LAURENT LAFFORGUE

Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson

Astérisque, tome 243 (1997)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1997__243__1_0>

243 ASTÉRISQUE

1997

CHTOUCAS DE DRINFELD ET CONJECTURE DE RAMANUJAN-PETERSSON

Laurent LAFFORGUE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Lafforgue (Equipe de recherche associée D0752 du CNRS).

Mots-clés : géométrie algébrique arithmétique, corps de fonctions, variétés modulaires de Drinfeld, représentations automorphes, opérateurs de Hecke, formule des points fixes, formule des traces de Selberg.

Code matière AMS 1980 (version 1985) : 11 G, 14 G 25, 11 G 09, 11 F 70, 11 F 60, 14 F 20, 11 F 72.

Table des matières

Chapitre V – Calcul des nombres de Lefschetz en rang $r \geq 2$

Chapitre VI – Formule des traces d'Arthur–Selberg et conjecture de Ramanujan–Petersson

Introduction

L'objet principal de ce livre est la conjecture de Ramanujan–Petersson sur les corps de fonctions. Rappelons de quoi il s'agit.

On considère F un corps de fonctions dont le corps des constantes $\mathbb{F}_q$ est fini à q éléments, F_x les complétés de F en les différentes places x, $\deg_x$ les valuations associées et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F.

Toute représentation admissible irréductible π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $r \geq 1$, est un produit $\bigotimes_x \pi_x$ de représentations admissibles irréductibles des $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Pour presque toute x, π_x est non ramifiée et il existe dans $\mathbb{C}^\times$ r nombres $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$, bien définis à permutation près, tels que π_x soit un sous-quotient de l'induite normalisée du caractère $(q^{\frac{1-r}{2}\deg(x)} z_1(\pi_x))^{\deg_x(\cdot)} \times \cdots \times (q^{\frac{1-r}{2}\deg(x)} z_r(\pi_x))^{\deg_x(\cdot)}$ de $\mathrm{GL}_1(F_x) \times \cdots \times \mathrm{GL}_1(F_x)$. Quand π_x est unitaire, la famille $\{|z_1(\pi_x)|, \ldots, |z_r(\pi_x)|\}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$ est symétrique par rapport à $q^{\frac{r-1}{2}\deg(x)}$.

D'autre part, à toutes représentations automorphes cuspidales irréductibles unitaires π, π' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, $r, r' \geq 1$, est associée la fonction $s \mapsto L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ de Rankin-Selberg. C'est une fonction rationnelle en q^s dont les pôles sont sur les droites $\mathrm{Re}\, s = 0$, $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Les deux conjectures suivantes sont bien connues :

Conjecture 1 (Ramanujan-Petersson). — *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. *Alors, en toute place x où π est non ramifiée, on a* $|z_i(\pi_x)| = q^{\frac{r-1}{2}\deg(x)}$, $1 \leq i \leq r$.

Conjecture 2. — *Soient π, π' deux représentations automorphes cuspidales irréductibles unitaires de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$. *Alors tous les zéros de la fonction $s \mapsto L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ sont sur la droite* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Rappelons que Drinfeld a successivement prouvé la conjecture 1 (et même en fait la correspondance de Langlands) dans les cas suivants :

• quand une des composantes π_x de π est la représentation de Steinberg et $r = 2$, en étudiant la cohomologie à coefficients constants des variétés modulaires classifiant les faisceaux elliptiques de rang 2 (et ce travail a été généralisé par Laumon en rang quelconque) ;

• quand une des composantes π_x de π est supercuspidale et $r = 2$, en étudiant la cohomologie à coefficients dans certains systèmes locaux des variétés modulaires classifiant les faisceaux elliptiques de rang 2 (et ce travail a été généralisé par Flicker et Kazhdan en rang quelconque) ;

• quand $r = 2$, en étudiant la cohomologie des variétés modulaires classifiant les chtoucas de rang 2.

Rappelons d'autre part que dans la situation de la conjecture 1, Jacquet et Shalika ont obtenu l'encadrement $q^{-\frac{1}{2}\deg(x)} < q^{\frac{1-r}{2}\deg(x)}|z_i(\pi_x)| < q^{\frac{1}{2}\deg(x)}$, $1 \leq i \leq r$, et que dans la situation de la conjecture 2, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shahidi et Shalika ont montré que les zéros de la fonction L envisagée sont dans la bande $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL. —

(i) *Soit* π *une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. *Alors :*

- *Si* r *est impair,* π *vérifie la conjecture* 1 *et on pose* $\varepsilon_\pi = 0$.
- *Si* r *est pair, ou bien* π *vérifie la conjecture* 1 *et on pose* $\varepsilon_\pi = 0$, *ou bien pour toute place* x *où* π *est non ramifiée, la moitié parmi les* $z_i(\pi_x)$, $1 \leq i \leq r$, *sont de module* $q^{(\frac{r-1}{2}+\frac{1}{4})\deg(x)}$ *et l'autre moitié de module* $q^{(\frac{r-1}{2}-\frac{1}{4})\deg(x)}$ *et on pose* $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$.

(ii) *Pour deux telles représentations* π, π' *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{A})$, *tous les zéros de* $L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ *sont sur la droite* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ *si* $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi'}$ *et sur les droites* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{4}$, $\operatorname{Re} s = \frac{3}{4}$ *si* $\varepsilon_\pi \neq \varepsilon_{\pi'}$.

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle de Drinfeld en rang 2. On s'intéresse aux modules d'éléments $\{z_i(\pi_x)\}$ et $\{q^s, L(s, \pi\otimes\check{\pi}') = 0\}$. L'idée est de relier ces derniers aux valeurs propres de l'opérateur de Frobenius agissant sur la cohomologie à supports compacts d'une certaine variété de type fini sur $\mathbb{F}_q$ (en combinant le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et une formule des traces d'Arthur-Selberg convenable) et d'invoquer le théorème de pureté de Deligne. Drinfeld a introduit des objets permettant de réaliser ce projet. Ce sont les variétés (ou plutôt les champs) classifiant les chtoucas de rang r.

Ce livre rassemble la thèse de l'auteur (Orsay, 1994) et une prépublication ultérieure (Orsay, 1995). Un résumé en a été présenté dans deux notes parues aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (tome 322, série I, 1996).

En voici le contenu détaillé :

On commence dans le chapitre I par rappeler la définition des chtoucas ainsi que les principales propriétés géométriques de leurs champs classifiants.

Soit X la courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ dont le corps des fonctions est F. Par souci de généralité et suivant une idée de Stuhler, on introduit également D une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F et $\mathcal{D}$

une $\mathcal{O}_X$–Algèbre finie de fibre générique D qui soit maximale pour cette propriété.

Un $\mathcal{D}$–chtouca de rang r sur un schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) est un diagramme

$$\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E}$$

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Modules à droite localement libres de rang r sur $X \times S$, ${}^\tau\mathcal{E}$ désigne le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Module $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}$, et j et t sont des homomorphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–linéaires, injectifs et dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes pôle $i_\infty : S \to X$ et zéro $i_0 : S \to X$ et sont localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$–Modules.

Etant donné $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini évitant le zéro et le pôle, une structure de niveau I sur un tel $\mathcal{D}$–chtouca consiste en la donnée d'isomorphismes $\mathcal{E}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$, $\mathcal{E}'_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S$ compatibles avec j et t.

On généralise les résultats de [Drinfeld, 1987] en s'inspirant des arguments de [Laumon, Rapoport, Stuhler]. On prouve que les champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ classificant les $\mathcal{D}$–chtoucas de rang r avec structure de niveau I sont algébriques au sens de Deligne–Mumford. L'application qui à un $\mathcal{D}$–chtouca associe son zéro et son pôle définit des morphismes $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to X \backslash I \times X \backslash I$ qui sont localement de type fini et même lisses de dimension relative $2(rd-1)$ au–dessus de $X' \backslash I \times X' \backslash I$, où l'on note X' le plus grand ouvert de X en tous les points fermés duquel l'algèbre D est déployée. Et pour tous sous–schémas fermés finis emboîtés $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$, le foncteur d'oubli $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ au–dessus de $X \backslash J \times X \backslash J$ est représentable fini étale galoisien.

En notant Λ le schéma complémentaire dans $X \times X$ de la diagonale et de ses transformées par les puissances de $(\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X)$ et de $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X)$, on dispose dans les $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ de deux morphismes de Frobenius partiels Frob_0 et Frob_∞ au–dessus des endomorphismes $(\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X)$ et $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X)$ de Λ. Leur composé dans un sens ou dans l'autre est le morphisme de Frobenius.

Soient $a \in \mathbb{A}^\times$ un idèle de degré 1, $\mathcal{D}_\mathbb{A}$ l'ordre maximal dans $D_\mathbb{A} = D \otimes_F \mathbb{A}$ qui correspond à $\mathcal{D}$, G le schéma en groupes sur F des automorphismes de $E = D^r$, K le sous–groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_\mathbb{A})$ de $\mathrm{GL}_r(D_\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$, $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A})$ c'est–à–dire l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de $G(\mathbb{A})$ dans $\mathbb{Q}$ et, pour tout $I \hookrightarrow X$, $\mathcal{H}_I$ la sous–algèbre des fonctions invariantes à gauche et à droite par $K_I = \mathrm{Ker}[K \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)]$.

Alors on dispose sur le champ représentable $\varprojlim_I \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^\mathbb{Z}$ d'une action à droite de $G(\mathbb{A})$. Elle est équivalente à la donnée, pour tout $I \hookrightarrow X$, d'un homomorphisme de $\mathcal{H}_I$ dans l'anneau des correspondances finies étales de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$.

Les champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ sont localement de type fini et n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes mais, pour $r \geq 2$, ils ne sont pas de type fini.

On cherche donc dans le chapitre II à les écrire de façon aussi naturelle que possible comme des réunions filtrantes d'ouverts de type fini, en généralisant le dernier paragraphe de [Drinfeld, 1987] qui traite le cas $D = F$, $r = 2$.

Dans ce but, on choisit de recourir aux notions de filtrations et polygones canoniques de Harder–Narasimhan. Pour cela il nous faut, étant donné $S = \operatorname{Spec} K$ le spectre d'un corps algébriquement clos, disposer d'une fonction rang et d'une fonction degré sur les objets de la catégorie abélienne des diagrammes

$$\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} {}^{\tau}\mathcal{E})$$

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes K$–Modules cohérents et j, t induisent des isomorphismes au–dessus d'un ouvert non vide. Comme fonction rang on prendra évidemment $\mathrm{rg}\, \widetilde{\mathcal{E}} = \mathrm{rg}\, \mathcal{E} = \mathrm{rg}\mathcal{E}'$. En revanche, les deux fonctions $\deg(\det \mathcal{E})$ et $\deg(\det \mathcal{E}')$ sont distinctes et aucune ne paraît préférable à l'autre. On est donc amené à introduire un paramètre réel α et à définir la famille de fonctions $\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} = \alpha \ \deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha) \deg(\det \mathcal{E}')$.

Pour tout réel α et tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, on construit maintenant des ouverts $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathcal{D},I}$ dans les $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ en demandant que le polygone α–canonique de Harder–Narasimhan soit majoré par p. Les $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ sont de type fini et si I est de degré assez grand en fonction de p, ce sont des schémas. Ils sont stables par l'action de la sous–algèbre de $\mathcal{H}_I$ constituée des fonctions dont le support est contenu dans $K\mathbb{A}^\times$. Et chaque $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathcal{D},I}$ est transformé par Frob_0 et Frob_∞ respectivement en $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_{\alpha-1} \leq p}_{\mathcal{D},I}$ et $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_{\alpha+1} \leq p}_{\mathcal{D},I}$.

Pour tous polygones p, q avec $0 \leq p \leq q$, on décrit aussi les différences entre les $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq q}_{\mathcal{D},I}$ et les $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathcal{D},I}$ comme des réunions finies disjointes de strates, les horocycles. Chaque horocycle est plongé par une immersion localement fermé et il est muni par ailleurs d'un morphisme lisse dans un $\mathrm{Cht}^{r',\overline{p}_\alpha \leq 0}_{\mathcal{D},I}$ avec $r' < r$, morphisme dont les fibres sont des groupes commutatifs unipotents.

Dans le chapitre III, on considère $0, \infty$ deux places distinctes de F correspondant à des points fermés de X', u', $s' \geq 1$ deux entiers et $u = u' \deg(0)$, $s = s' \deg(\infty)$, et $f' \in \mathcal{H}$ une fonction sur $G(\mathbb{A})$ de la forme

$f' = f_\infty \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0$ où f_∞ et f_0 sont les fonctions caractéristiques de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_\infty) \cong \mathrm{GL}_{rd}(O_\infty)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_0) \cong \mathrm{GL}_{rd}(O_0)$ sur $\mathrm{GL}_r(D_\infty) = G(F_\infty)$ et $\mathrm{GL}_r(D_0) = G(F_0)$. Etant donnés $\overline{0}, \overline{\infty}$ deux points de X au–dessus de $0, \infty$ à valeurs dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ et $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini tel que $f' \in \mathcal{H}_I$, on s'intéresse à l'ensemble (ou plutôt au groupoïde, car il y a des groupes finis d'automorphismes) des points fixes du composé de la correspondance associée à f' et des morphismes Frob_0^u et Frob_∞^s dans la fibre $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I,\overline{0},\overline{\infty}}/a^{\mathbb{Z}}$ de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ au–dessus de $(\overline{0}, \overline{\infty})$.

On commence par décrire le groupoïde $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I,\overline{0},\overline{\infty}}(\overline{\mathbb{F}}_q)/a^{\mathbb{Z}}$, classant pour cela les objets par classes d'isogénies c'est–à–dire regroupant entre eux les chtoucas ayant même fibre générique. Puis on obtient une description en termes adéliques du groupoïde de points fixes considéré. Tout ceci est dû à Drinfeld.

Ce groupoïde est infini en général mais pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ et tout paramètre réel α il n'y a qu'un nombre fini de points fixes dont le polygone α–canonique de Harder–Narasimhan soit majoré par p. On appelle nombre de Lefschetz leur cardinal compté avec multiplicités, noté

$$\mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p}(f^{\infty,0}, u, s)\,.$$

Comme fonction de α, ce nombre est périodique et il est localement constant en–dehors d'un réseau affine de $\mathbb{R}$ dont la période est rationnelle.

Dans le cas particulier où $u = s$ et le support de la fonction f' est contenu dans $K\mathbb{A}^\times$, ce nombre n'est autre que le cardinal de l'ensemble des points fixes du composé de la correspondance associée à f' et du morphisme $\mathrm{Frob}_0^u \,\mathrm{Frob}_\infty^s = \mathrm{Frob}^u$ agissant sur l'ouvert de type fini $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha \leq p}_{\mathcal{D},I,\overline{0},\overline{\infty}}/a^{\mathbb{Z}}$ (qui est un schéma si $\deg I$ est assez grand en fonction de p). D'après le théorème des points fixes de Grothendieck–Lefschetz, il s'interprète comme la trace de ce composé agissant sur la cohomologie à supports compacts de cet ouvert.

On donne dans le cas général une première expression pour ces nombres de Lefschetz. C'est une somme sur certaines des classes de conjugaison dans $G(F)$, celles dites (u, s)–admissibles, d'expressions intégrales adéliques qui font intervenir la fonction $f^{\infty,0}$ ainsi que des fonctions de troncature associées à p et α.

Pour celles de ces classes de conjugaison qui sont elliptiques, il n'y a pas de troncature et on obtient en définitive des intégrales orbitales de la fonction $f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u$ où f_∞^{-s} et f_0^u sont certaines fonctions sphériques introduites par Drinfeld.

Le cas particulier du rang $r = 1$, étudié dans le chapitre IV, fournit un modèle simple de tout ce qu'on voudrait faire grâce aux chtoucas.

Comme dans [Laumon, Rapoport, Stuhler], on prouve d'abord que chaque $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ est représentable, projectif et lisse de dimension relative $2(d-1)$ au–dessus de $X'\backslash I \times X'\backslash I$. Ceci correspond du côté géométrique à la compacité du quotient $D^\times\backslash D^\times_{\mathbb{A}}/a^{\mathbb{Z}}$ du côté adélique.

Ainsi dispose–t–on des espaces de cohomologie ℓ–adique $H^n_{\mathcal{D},I}$, $0 \leq n \leq 4(d-1)$, de la fibre générique. Ils sont munis d'une action du groupe de Galois du corps des fonctions de $X \times X$, et aussi de Frob_0 et Frob_∞. D'après un théorème de [Drinfeld, 1978], elles équivalent à la donnée d'une action du carré $\Gamma_F \times \Gamma_F$ du groupe de Galois Γ_F de F. Et commutant avec celle–ci, chaque $H^n_{\mathcal{D},I}$ est encore muni d'une action de $\mathcal{H}_I$. Ainsi, chaque $H^n_{\mathcal{D}} = \varinjlim_I H^n_{\mathcal{D},I}$ est muni d'une action de $\mathcal{H} = \varinjlim_I \mathcal{H}_I$ et pour tout I, $H^n_{\mathcal{D},I} \subseteq H^n_{\mathcal{D}}$ est l'image de l'opérateur induit par l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{H}_I$.

On cherche à décrire la représentation virtuelle

$$H^*_{\mathcal{D}} = \sum_{0 \leq n \leq 4(d-1)} (-1)^n [H^n_{\mathcal{D}}]$$

de $\mathcal{H} \times \Gamma_F \times \Gamma_F$.

Pour cela, il suffit de calculer les traces $\mathrm{Tr}_{H^*_{\mathcal{D}}}(f' \times \tau_0^{-u'} \times \tau_\infty^{-s'})$ avec 0, ∞, $f' = f_\infty \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0$, u', s' comme plus haut et τ_0, τ_∞ deux éléments de Frobenius de Γ_F en les places $0, \infty$. Pour $u = u' \deg(0)$, $s = s' \deg(\infty)$ et $f' \in \mathcal{H}_I$, une telle trace est égale par définition de l'action de $\mathcal{H} \times \Gamma_F \times \Gamma_F$ à celle sur la cohomologie de $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ du composé de la correspondance associée à f' et des morphismes Frob_0^u et Frob_∞^s.

D'après le théorème des points fixes de Grothendieck–Lefschetz et le calcul du chapitre III, elle est égale à

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u)(g^{-1}\gamma g)$$

qui n'est autre que la trace dans l'espace Aut des formes automorphes sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ de l'opérateur de convolution associé à $f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u$.

On obtient en définitive que sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ de $\mathbb{Q}_\ell$, la représentation $H^*_{\mathcal{D}}$ peut se mettre sous la forme

$$\sum_{\Pi} \Pi^{m'(\Pi)} \otimes \tau^*_\Pi \otimes (\tau^*_\Pi)^\vee(1-d)$$

où Π décrit l'ensemble des facteurs irréductibles de Aut, chaque $m'(\Pi)$ est un entier divisant la multiplicité $m(\Pi)$ de Π et chaque $\tau^*(\Pi)$ est une représentation semi–simple de Γ_F de dimension $d\sqrt{\frac{m(\Pi)}{m'(\Pi)}}$, $(\tau_\Pi^*)^\vee$ désignant la représentation duale. De plus τ_Π^* est non ramifiée partout où Π est non ramifiée et il existe un ouvert non vide de X où la fonction L de τ_Π^* est égale à celle de Π élevée à la puissance $\sqrt{\frac{m(\Pi)}{m'(\Pi)}}$.

Le chapitre V a pour objet d'exprimer les nombres de Lefschetz définis au chapitre III comme les traces tronquées d'Arthur de certaines fonctions sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$.

On commence, ayant rappelé la correspondance entre fibrés et adèles, par relier les troncatures par le polygone canonique de Harder–Narasimhan et celles d'Arthur. Les manipulations nécessaires sont basées sur trois principes simples. Le premier, de nature combinatoire, consiste, quand on considère une somme alternée indexée par toutes les filtrations d'un certain fibré, à regrouper entre elles les filtrations qui ont le même raffinement canonique de Harder–Narasimhan. Le second consiste à exploiter l'invariance locale des fonctions considérées pour remplacer des sommes discrètes par des intégrales continues. Le troisième enfin permet de limiter certaines sommations sur $G(F)$ à des sous–groupes paraboliques en usant de la compacité du support des fonctions considérées.

La définition de la trace tronquée $\mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ d'une fonction h localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ par un polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ est calquée sur celle d'Arthur dans le cas des corps de nombres. Quand h est d'un certain type, on introduit également des variantes $\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(h)$ qui sont des fonctions en escalier et périodiques de la variable réelle α et qui valent $\mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ en $\alpha = 0$.

On montre que, sous certaines conditions, les deux fonctions périodiques $\alpha \longmapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_\gamma,\alpha\leq p}(f^{\infty,0},u,s)$ et $\alpha \longmapsto \mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u)$ ont la même valeur moyenne. La raison pour laquelle il faut considérer des moyennes est que les fonctions degrés qui servent à définir les troncatures sont à valeurs discrètes : elles font intervenir des intersections de réseaux et de domaines bornés ; or le cardinal d'une telle intersection n'a pas d'expression simple mais sa moyenne sur tous les translatés du domaine considéré est le quotient du volume de ce domaine par celui du réseau.

La démonstration de cette formule passe par celle d'un résultat général portant sur les sommes

$$g \longmapsto \sum h(g^{-1}\gamma g)$$

indexées par les $\gamma \in G(F)$ de polynôme caractéristique $\chi_\gamma = \chi$ fixé. On montre que si h vérifie certaines propriétés d'annulation en au moins deux places alors l'intégrale de cette expression (qui est à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$) est nulle si χ a au moins deux facteurs premiers distincts et sinon est égale à l'intégrale de la même somme restreinte aux γ qui sont elliptiques. La démonstration de la seconde assertion, qui est la plus difficile, généralise un argument qui se trouve dans [Gelbart, Jacquet] pour le cas $r = 2$, $D = F$; elle fait intervenir certains produits eulériens sur toutes les places.

Dans le chapitre VI enfin, on transpose sur les corps de fonctions la formule des traces d'Arthur–Selberg (qui consiste à exprimer en termes spectraux les traces tronquées d'Arthur) puis on applique celle–ci aux fonctions $f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u$ ce qui, par combinaison avec la formule du chapitre V, permet de démontrer notre théorème principal.

On commence par rappeler l'énoncé de la décomposition spectrale de Langlands, à partir des notions de séries d'Eisenstein et d'opérateurs d'entrelacement de Langlands. Les objets sont ici plus faciles à manipuler que sur les corps de nombres du fait que les fonctions degrés sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (au lieu de $\mathbb{R}$) dont le dual $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact (contrairement à $\mathbb{R}$). En particulier la partie discrète dans la représentation $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ de $G(\mathbb{A})$ est une représentation admissible.

L'énoncé de la formule des traces d'Arthur–Selberg est évidemment semblable à celui dans le cas des corps de nombres. En revanche, nous en donnons ici une démonstration différente de celle d'Arthur, basée sur le seul énoncé de la décomposition spectrale de Langlands. Nous faisons un calcul direct, sans passer par des comparaisons asymptotiques et qui consiste essentiellement à appliquer la formule d'inversion de Fourier à certaines fonctions périodiques que l'on introduit.

La démonstration proprement dite de notre théorème principal se fait simultanément pour les assertions (i) et (ii), par récurrence forte sur la somme des rangs. On combine la formule de comptage du chapitre V, la formule des traces d'Arthur–Selberg, le théorème des points fixes de Grothendieck–Lefschetz et le théorème de pureté de Deligne. On se sert également des encadrements de Jacquet, Shalika et Jacquet, Piatetski–Shapiro, Shahidi, Shalika déjà cités ainsi que de la description par Mœglin et Waldspurger du spectre discret des $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Je tiens à exprimer ma très profonde gratitude envers Gérard Laumon qui m'a introduit à la géométrie des chtoucas puis à la formule des traces d'Arthur–Selberg et a dirigé ma thèse. Il m'a consacré un temps considérable, aussi bien pour me communiquer au jour le jour ses connaissances que pour relire avec un soin scrupuleux le texte que je lui soumettais, et il n'a cessé de me prodiguer ses encouragements lesquels ont été pour moi un soutien très fort.

Je remercie également Jean–Loup Waldspurger d'avoir eu la patience de lire la partie spectrale de la démonstration et de m'avoir fait corriger plusieurs erreurs.

Je remercie Laurent Clozel et Guy Henniart pour d'utiles discussions.

Enfin, j'exprime ma très vive reconnaissance envers Mme Bonnardel et Mme Le Bronnec qui ont assuré avec une compétence et une patience remarquables la saisie entière du manuscrit.

Chapitre I

$\mathcal{D}$-chtoucas : généralités

1. — Définitions, structures de niveau, opérations

Ce paragraphe est constitué de généralisations de notions introduites par Drinfeld et Stuhler.

a) Notations

Fixons une fois pour toutes une courbe projective lisse géométriquement connexe X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. On note F son corps des fonctions. Ainsi, les places de F s'identifient aux points fermés de X. On note $|X|$ leur ensemble.

Pour toute place x de F, on note :

- F_x le complété x-adique de F,
- O_x l'anneau des entiers de F_x,
- ϖ_x un élément uniformisant,
- $\kappa(x)$ le corps résiduel de O_x,
- $\deg(x)$ la dimension de $\kappa(x)$ sur $\mathbb{F}_q$,
- $x : F_x^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation de F_x, telle que $x(\varpi_x) = 1$.

On notera $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $O_\mathbb{A}$ son sous–anneau des entiers.

On dispose de l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \deg : \mathbb{A}^\times &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a_x)_{x\in|X|} &\longmapsto -\sum_x \deg(x)x(a_x). \end{aligned}$$

Fixons aussi une fois pour toutes D une algèbre à division centrale sur F, de dimension finie d^2.

Soit $\mathcal{D}$ une $\mathcal{O}_X$-Algèbre, c'est-à-dire un faisceau d'algèbres sur X, localement libre de rang d^2 comme $\mathcal{O}_X$-Module, et dont la fibre générique est D. On notera X' le plus grand ouvert de X où pour tout point fermé x $\mathcal{D}_x$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_d(O_x)$. A remarquer qu'on dispose de la $\mathcal{O}_X$-Algèbre opposée $\mathcal{D}^{op}$ dont la fibre générique est la F-algèbre opposée D^{op}.

Si $f : Y \to X$ est un schéma sur X, on notera $(\cdot)^\vee$ le foncteur qui à tout $f^*\mathcal{D}$-Module à droite $\mathcal{E}$ sur Y associe le $f^*\mathcal{D}^{op}$-Module à droite sur Y

$$\mathcal{E}^\vee = \mathcal{H}om_{f^*\mathcal{D}}(\mathcal{E}, f^*\mathcal{D}) \ .$$

Tous les schémas (ou les champs) considérés seront sur $\mathbb{F}_q$. Et si, Y, Z sont deux tels objets, $Y \times Z$ désignera leur produit sur $\mathbb{F}_q$.

Si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, on notera Frob : $S \to S$ le morphisme qui est l'identité sur l'ensemble sous-jacent et qui sur le faisceau de structure $\mathcal{O}_S$ est l'élévation à la puissance q.

Et si $\mathcal{X}$ est un champ sur $\mathbb{F}_q$, on notera Frob : $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ le morphisme qui pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ induit le foncteur

$$\begin{gathered} \mathcal{X}(S) \longrightarrow \mathcal{X}(S) \\ (s : S \to \mathcal{X} \longmapsto (s \circ \mathrm{Frob} : S \to S \to \mathcal{X}) \ . \end{gathered}$$

Cette définition est compatible avec la précédente lorsque $\mathcal{X}$ est en fait un schéma.

Ces morphismes Frob seront appelés morphismes de Frobenius.

b) $\mathcal{D}$-chtoucas à droite et à gauche

DÉFINITION 1. — *Pour $r \geq 1$ un entier et S un schéma, on appelle $\mathcal{D}$-chtouca à droite [resp. à gauche] de rang r sur S tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}' \\ {}^{\tau}\mathcal{E} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd} \qquad \left[\textit{resp.}\quad \begin{tikzcd} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E}' \arrow[r, hook, "j"] \arrow[ur, "t"] & {}^{\tau}\mathcal{E} \end{tikzcd}\right]$$

où :

- *$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules à droite localement libres de rang r (et a fortiori des $\mathcal{O}_{X \times S}$-Modules localement libres de rang rd^2) ;*
- *${}^{\tau}\mathcal{E}$ désigne le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Module* $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob})^*\mathcal{E}$ *;*
- *j et t sont des homomorphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-linéaires, injectifs et dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes $i_\infty : S \to X$ et $i_0 : S \to X$;*
- *j et t ont leurs conoyaux localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$-Modules ;*
- *les homomorphismes duaux $j^\vee$ et $t^\vee$ ont leurs conoyaux localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$-Modules.*

Remarque : Lorsque $i_\infty : S \to X$ [resp. $i_0 : S \to X$] est à valeurs dans l'ouvert X', les conditions sur les conoyaux de j et $j^\vee$ [resp. de t et $t^\vee$] dans la définition sont équivalentes. $\square$

A partir du paragraphe I.2, on n'étudiera plus que les $\mathcal{D}$-chtoucas à droite, et on dira alors plus simplement $\mathcal{D}$-chtoucas.

Toujours pour $r \geq 1$ un entier et S un schéma, et étant donnés deux $\mathcal{D}$-chtoucas (à droite) de rang r sur S $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1', j_1, t_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2', j_2, t_2)$, il est naturel d'appeler morphisme de l'un dans l'autre la donnée de deux morphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-linéaires $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et $f' : \mathcal{E}_1' \to \mathcal{E}_2'$, tels que soit commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j_1"'] & & \mathcal{E}_2 \arrow[dr, "j_2"] & \\
& \mathcal{E}_1' \arrow[rr, "f'"] & & \mathcal{E}_2' \\
{}^\tau\mathcal{E}_1 \arrow[rr, "{}^\tau f"] \arrow[ur, "t_1"] & & {}^\tau\mathcal{E}_2 \arrow[ur, "t_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Et de même s'agissant des $\mathcal{D}$-chtoucas à gauche.

On notera $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(S)$ [resp. ${}_{\mathcal{D}}^r\mathrm{Cht}(S)$] la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{D}$-chtoucas à droite [resp. à gauche] de rang r sur S et dont les flèches sont les isomorphismes de $\mathcal{D}$-chtoucas.

Maintenant, si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, le foncteur d'image réciproque $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ de la catégorie des Modules sur $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$ dans celle des Modules sur $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'}$ induit un foncteur

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(S) \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(S')$$

$$[\text{resp.} \quad {}_{\mathcal{D}}^r\mathrm{Cht}(S) \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}^r\mathrm{Cht}(S')]\ .$$

Ainsi, la collection des $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(S)$ [resp. ${}_{\mathcal{D}}^r\mathrm{Cht}(S)$] quand S décrit la catégorie des schémas sur $\mathbb{F}_q$ définit une catégorie fibrée. Il est immédiat que c'est un champ pour la topologie f.p.q.c., cf. [Laumon, Moret-Bailly].

On notera ce champ $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r$ [resp. ${}_{\mathcal{D}}^r\mathrm{Cht}$]. Les applications $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t) \mapsto (i_0, i_\infty)$ définissent un morphisme de champs

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r \longrightarrow X \times X$$

$$[\text{resp.} \quad {}_{\mathcal{D}}^r\mathrm{Cht} \longrightarrow X \times X]$$

dont les deux composantes sont appelées respectivement le zéro et le pôle, et sont notées 0 et ∞.

On remarque que si $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est un $\mathcal{D}$-chtouca à droite [resp. à gauche] de rang r sur un schéma S, dont le zéro et le pôle ne se rencontrent pas c'est-à-dire tel que le morphisme $(i_0, i_\infty) : S \to X \times X$ se factorise à travers l'ouvert complémentaire de la diagonale Δ_X de $X \times X$, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[dr, "j"] & \\ & \mathcal{E}' \\ {}^{\tau}\mathcal{E} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{[resp.} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E}' \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "j"] & \\ & {}^{\tau}\mathcal{E} \end{tikzcd} \quad]$$

se complète en un diagramme à la fois cartésien et cocartésien de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E} \arrow[dr, "j"] & \\ \mathcal{E}'' \arrow[ur, "t'"] \arrow[dr, "j'"'] & & \mathcal{E}' \\ & {}^{\tau}\mathcal{E} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{[resp.} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{E} \arrow[dr, "j'"] & \\ \mathcal{E}' \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{E}'' \\ & {}^{\tau}\mathcal{E} \arrow[ur, "t'"'] & \end{tikzcd} \quad]$$

et $(\mathcal{E}, \mathcal{E}'', j', t')$ définit un $\mathcal{D}$-chtouca à gauche [resp. à droite] de rang r sur S, qui a même zéro et même pôle que $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$.

De plus, cette construction est fonctorielle.

Ceci prouve qu'au-dessus de l'ouvert $X \times X - \Delta_X$, les champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ et ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}$ sont naturellement équivalents.

c) Structures de niveau en dehors du zéro et du pôle

DÉFINITION 2. — *Soient $r \geq 1$ un entier et $I \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini. Une structure de niveau I sur un $\mathcal{D}$-chtouca à droite [resp. à gauche] $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ de rang r sur un schéma S consiste en la donnée d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{I \times S}$-Modules*

$$i : (\mathcal{D}_I)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I \times S} \quad i' : (\mathcal{D}_I)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{I \times S}$$

compatibles aux actions de $\mathcal{D}_I$ et tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{I\times S} \arrow[r, "j_{|I\times S}"] & \mathcal{E}'_{I\times S} & {}^\tau\mathcal{E}_{I\times S} \arrow[l, "t_{|I\times S}"'] \\ & (\mathcal{D}_I)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \arrow[ul, "i", "\sim"'] \arrow[u, "i'"', "\wr"] \arrow[ur, "{}^\tau i"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

$$[\textit{resp.}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}_{I\times S} & \mathcal{E}'_{I\times S} \arrow[l, "t_{|I\times S}"'] \arrow[r, "j_{|I\times S}"] & {}^\tau\mathcal{E}_{I\times S} \\ & (\mathcal{D}_I)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \arrow[ul, "i", "\sim"'] \arrow[u, "i'"', "\wr"] \arrow[ur, "{}^\tau i"', "\sim"] & \end{tikzcd}\quad]$$

soit commutatif.

Remarque : Il résulte de cette définition que si $i_0, i_\infty : S \to X$ sont le zéro et le pôle du $\mathcal{D}$-chtouca considéré, leur image doit rester dans l'ouvert $X\backslash I$ complémentaire de I dans X. □

Si $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1, j_1, t_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}'_2, j_2, t_2)$ sont deux $\mathcal{D}$-chtoucas à droite [resp. à gauche] de rang r sur un schéma S, munis de structures de niveau I (i_1, i'_1) et (i_2, i'_2), on appelle morphisme de l'un dans l'autre tout couple d'homomorphismes $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$, $f' : \mathcal{E}'_1 \to \mathcal{E}'_2$ qui définisse un morphisme de $\mathcal{D}$-chtoucas et qui de plus vérifie $f_{|I\times S} \circ i_1 = i_2$, $f'_{|I\times S} \circ i_2 = i'_2$.

On notera $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(S)$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I(S)$] la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{D}$-chtoucas à droite [resp. à gauche] de rang r avec structure de niveau I sur le schéma S et dont les flèches sont les isomorphismes de tels objets.

Si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, on a un foncteur induit

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(S) \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(S') \quad [\text{resp. } {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I(S) \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I(S')]\ .$$

Ainsi, la collection des $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(S)$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I(S')$] quand S décrit la catégorie des schémas sur $\mathbb{F}_q$ définit une catégorie fibrée. Il est immédiat que c'est un champ pour la topologie f.p.q.c. On notera ce champ $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$].

Si $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$ sont des sous-schémas fermés finis emboîtés de X, tout $\mathcal{D}$-chtouca $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ sur un schéma S qui est muni d'une structure de niveau J est a fortiori muni d'une structure de niveau I puisque

$\mathcal{D}_J \otimes_{\mathcal{O}_J} \mathcal{O}_I = \mathcal{D}_I$ et $(\mathcal{E}_{J\times S}) \otimes_{\mathcal{O}_J} \mathcal{O}_I = \mathcal{E}_{I\times S}$. On a donc un morphisme canonique de champs

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \quad [\text{resp. } {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_J \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I]\ .$$

Bien sûr, lorsque $I = \emptyset$, on a $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},\emptyset} = \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_\emptyset = {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}$] donc pour tout sous-schéma fermé fini I de X, on a un morphisme canonique de champs

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \quad [\text{resp. } {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}]\ .$$

Et d'après la remarque qui suit la définition 2, le morphisme composé

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \to X \times X$$

$$[\text{resp. } {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht} \to X \times X]$$

se factorise à travers l'ouvert $(X\backslash I) \times (X\backslash I)$ de $X \times X$.

Enfin, on note que les champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ et ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$ s'identifient au-dessus de $(X\backslash I) \times (X\backslash I) - \Delta_{X\backslash I}$.

d) Les opérations Frob_0, Frob_∞ **et** $*$

Soit $r \geq 1$ un entier.

On remarque que si le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[dr, "j"] & \\ & \mathcal{E}' \\ {}^\tau\mathcal{E} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd} \qquad \left[\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{E} \\ \mathcal{E}' \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & {}^\tau\mathcal{E} \end{tikzcd}\right]$$

définit un $\mathcal{D}$-chtouca à droite [resp. à gauche] de rang r sur un schéma S, avec pour zéro $i_0 : S \to X$ et pour pôle $i_\infty : S \to X$, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}' \\ {}^\tau\mathcal{E} \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "{}^\tau j"'] & \\ & {}^\tau\mathcal{E}' \end{tikzcd} \qquad \left[\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}' \arrow[dr, "j"] & \\ & {}^\tau\mathcal{E} \\ {}^\tau\mathcal{E}' \arrow[ur, "{}^\tau t"'] & \end{tikzcd}\right]$$

définit un $\mathcal{D}$-chtouca à gauche [resp. à droite] de rang r sur S, dont le zéro est i_0 [resp. $i_0 \circ \mathrm{Frob}_S = \mathrm{Frob}_X \circ i_0$] et dont le pôle est $i_\infty \circ \mathrm{Frob}_S = \mathrm{Frob}_X \circ i_\infty$ [resp. i_∞].

De plus, ces constructions sont fonctorielles.

On définit ainsi des morphismes de champs

$$\mathrm{Frob}_\infty : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht} \quad \mathrm{Frob}_0 : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$$

qui rendent commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{Frob}_\infty"] \arrow[d, "(0{,}\infty)"] & {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht} \arrow[d, "(0{,}\infty)"'] \\ X \times X \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X"'] & X \times X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht} \arrow[r, "\mathrm{Frob}_0"] \arrow[d, "(0{,}\infty)"] & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \arrow[d, "(0{,}\infty)"'] \\ X \times X \arrow[r, "\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

De plus, il est immédiat que les morphismes composés $\mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty$ et $\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0$ sont égaux aux morphismes de Frobenius dans $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ et ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}$ respectivement. Enfin, les morphismes Frob_∞ et Frob_0 se relèvent trivialement, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, en des morphismes

$$\mathrm{Frob}_\infty : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \quad \mathrm{Frob}_0 : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$$

qui vérifient encore

$$\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0 = \mathrm{Frob} \quad \mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty = \mathrm{Frob}\ .$$

Rappelons aussi qu'au-dessus de $X \times X - \Delta_X$, les champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ et ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}$ peuvent être identifiés. Si donc on définit le schéma Λ sur $\mathbb{F}_q$ comme la limite projective de tous les ouverts de $X \times X$ obtenus comme complémentaires des transformés de Δ_X par les puissances de $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$ et de $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$, on voit que Frob_0 et Frob_∞ deviennent des endomorphismes de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ au-dessus de Λ. Leur composé dans un sens ou dans l'autre est le morphisme de Frobenius.

Par ailleurs, si $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est un $\mathcal{D}$-chtouca à droite [resp. à gauche] sur un schéma S, alors la famille duale $(\mathcal{E}^\vee, \mathcal{E}'^\vee, j^\vee, t^\vee)$ obtenue en appliquant au diagramme $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ le foncteur contravariant $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\cdot, \mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S) = (\cdot)^\vee$ définit un $\mathcal{D}^{op}$-chtouca à gauche [resp. à droite] sur S, et le zéro et le pôle sont échangés.

De plus, ces constructions sont fonctorielles.

On définit ainsi des morphismes de champs

$$* : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \to {}^r_{\mathcal{D}^{op}}\mathrm{Cht} \quad * : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}^{op}}$$

au-dessus du morphisme de permutation de $X \times X$.

Ils se relèvent trivialement, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, en des morphismes

$$* : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to {}^r_{\mathcal{D}^{op}}\mathrm{Cht}_I \quad * : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}^{op},I} \ .$$

Et sont vérifiées les identités

$$* \circ * = \mathrm{Id} \ , \ * \circ \mathrm{Frob}_\infty \circ * = \mathrm{Frob}_0 \ , \ * \circ \mathrm{Frob}_0 \circ * = \mathrm{Frob}_\infty \ .$$

Enfin, au-dessus de $X \times X - \Delta_X$, on a le morphisme induit $* : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}^{op}}$ dont on remarque que c'est même une involution de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ lorsque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{op}$ sont isomorphes et en particulier si $D = F$, $d = 1$, $\mathcal{D} = \mathcal{O}_X$.

e) Les opérateurs de Hecke

Remarquons que si $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est un $\mathcal{D}$-chtouca de rang r sur un schéma S et $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, alors $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}', \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes j, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes t)$ définit un $\mathcal{D}$-chtouca de rang r sur S.

De plus, si $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est muni d'une structure de niveau I et $\mathcal{L}$ est muni d'une structure de niveau I c'est-à-dire d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_I$-Modules

$$\mathcal{O}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_I \, ,$$

alors $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}', \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes j, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes t)$ est également muni d'une structure de niveau I.

Et ces constructions sont fonctorielles.

Par conséquent, si $I \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé fini et si $\mathrm{Pic}_I(X)$ désigne le groupe des faisceaux inversibles sur X munis d'une structure de niveau I, alors $\mathrm{Pic}_I(X)$ agit sur le champ $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$].

En particulier, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}_\emptyset(X)$ agit sur le champ $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}$].

Et pour $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de X, l'action de $\mathrm{Pic}_J(X)$ et celle de $\mathrm{Pic}_I(X)$ sont compatibles via l'homomorphisme de groupes $\mathrm{Pic}_J(X) \to \mathrm{Pic}_I(X)$ et le morphisme de champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_J \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$].

Par ailleurs, si $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ est un $\mathcal{D}$-chtouca de rang r sur un schéma S, $(i : \mathcal{D}^r_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I\times S}; i' : \mathcal{D}^r_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{I\times S})$ est une structure de niveau I

sur $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$ et g est un élément du groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_I^r \boxtimes \mathcal{O}_S)$, alors $(i \circ g; i' \circ g)$ définit une nouvelle structure de niveau I sur $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t)$.

Et ces constructions sont fonctorielles.

Ainsi, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, on a une action à droite du groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$ sur le champ $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$].

Et pour $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de X, l'action à droite de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J)$ et celle de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$ sont compatibles via l'homomorphisme de groupes $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$ et le morphisme de champs $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_J \to {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$].

Considérons maintenant T un ensemble fini de points fermés de X. On introduit le champ

$$\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}} = \varprojlim_{I \cap T = \emptyset} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \quad [\text{resp. } {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T = \varprojlim_{I \cap T = \emptyset} {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I]$$

où I décrit le système inductif filtrant des sous-schémas fermés finis de X qui ne rencontrent pas T.

Les morphismes zéro et pôle de $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$] dans X se factorisent à travers $X_{(T)} = \mathrm{Spec}(\bigcap_{x \in T} \mathcal{O}_{X,x})$ le schéma localisé de X le long de T.

Et d'après ce qui précède, on a sur le champ $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$] une action du groupe commutatif $\mathrm{Pic}^T(X) = \varprojlim_{I \cap T = \emptyset} \mathrm{Pic}_I(X)$ et une action à droite du groupe $\varprojlim_{I \cap T = \emptyset} \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$.

Rappelons qu'on a noté $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $O_{\mathbb{A}} = \prod_{x \in |X|} O_x$ son sous-anneau des entiers. Introduisons les idéaux $\mathbb{A}_T = \prod_{x \in T} F_x$ et $O_T = \prod_{x \in T} O_x$ et les anneaux quotients $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}/\mathbb{A}_T$, $O^T = O_{\mathbb{A}}/O_T$ puis $\mathbb{A}_T^\times = \mathrm{Ker}(\mathbb{A}^\times \to (\mathbb{A}^T)^\times)$, $O_T^\times = \mathrm{Ker}(O_{\mathbb{A}}^\times \to (O^T)^\times)$ et $(F^\times)^T = F^\times \cap O_T^\times$, le sous-groupe de $F^\times$ constitué des éléments qui sont des unités en toutes les places dans T.

On remarque que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Pic}^T(X) = \varprojlim_{I \cap T = \emptyset} \mathrm{Pic}_I(X) \cong F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / O_T^\times \cong (F^\times)^T \backslash (\mathbb{A}^T)^\times$$

(préservant les degrés), et

$$\varprojlim_{I \cap T = \emptyset} \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \cong \mathrm{GL}_r(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)\ .$$

Or $(\mathbb{A}^T)^\times$ s'identifie au centre et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)$ à un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{A}^T)=\mathrm{GL}_r(D\otimes_F\mathbb{A}^T)=\mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}})$.

Nous allons définir sur le champ $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$] une action à droite du groupe $\mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}})$ qui prolonge les actions déjà définies des sous-groupes $(\mathbb{A}^T)^\times$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)$.

Pour cela, introduisons le semi-groupe

$$\Gamma=\mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}})\cap M_r(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)\ .$$

Il est immédiat que $\mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}})$ est engendré par Γ et $(\mathbb{A}^T)^\times$. Donc il suffit de définir une action de Γ sur le champ $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$] qui prolonge celle de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)$ et qui coïncide avec celle de $(\mathbb{A}^T)^\times$ sur l'intersection $\Gamma\cap(\mathbb{A}^T)^\times=(\mathbb{A}^T)^\times\cap O^T$.

Soit donc $g\in\Gamma$, et soit $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}'_1,j_1,t_1)$ un objet de $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}(S)$ [resp. ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T(S)$]. Il est muni d'isomorphismes

$$i_1:(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)^r\boxtimes\mathcal{O}_S\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T$$

$$i'_1:(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)^r\boxtimes\mathcal{O}_S\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}'_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\ .$$

L'élément g de $M_r(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)$ induit un endomorphisme de $(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)^r\boxtimes\mathcal{O}_S$. Via i_1 et i'_1, il induit aussi des endomorphismes de $\mathcal{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T$ et $\mathcal{E}'_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T$, notés $[g]$ et $[g]'$ respectivement.

On cherche à définir le $\mathcal{D}$-chtouca $(\mathcal{E}_2,\mathcal{E}'_2,j_2,t_2)=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}'_1,j_1,t_1)g$. Tout d'abord, prenons pour $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$ les $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-Modules obtenus comme produits fibrés dans les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\\ \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \big\downarrow{\scriptstyle[g]}\\ \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathcal{E}'_2 & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{E}'_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\\ \big\downarrow{\scriptstyle\gamma'} & & \big\downarrow{\scriptstyle[g]'}\\ \mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{E}'_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\end{array}$$

On remarque que $[g]$ et $[g]'$ sont des homomorphismes injectifs et que leurs conoyaux sont plats sur $\mathcal{O}_S$. De plus, les homomorphismes composés

$$\mathcal{E}_1\xrightarrow{\alpha}\mathcal{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\longrightarrow\mathrm{Coker}[g]$$

$$\mathcal{E}'_1\xrightarrow{\alpha'}\mathcal{E}'_1\otimes_{\mathcal{O}_X} O^T\longrightarrow\mathrm{Coker}[g]'$$

sont surjectifs. Cela résulte de ce qu'ils deviennent surjectifs quand transformés par le foncteur $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T$ puisque

$$\mathrm{Coker}[g] \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T = \mathrm{Coker}[g]$$

$$\mathrm{Coker}[g]' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T = \mathrm{Coker}[g]' \ .$$

Ainsi, on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}[g] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_2' \longrightarrow \mathcal{E}_1' \longrightarrow \mathrm{Coker}[g]' \longrightarrow 0 \ .$$

On en déduit que la formation de $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_2'$ commute aux changements de base, et que $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_2'$ sont plats sur $\mathcal{O}_S$ et même localement libres de rang rd^2 sur $\mathcal{O}_{X \times S}$.

Par tensorisation, on a aussi des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \longrightarrow \mathrm{Coker}[g] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_2' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \longrightarrow \mathcal{E}_1' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \longrightarrow \mathrm{Coker}[g]' \longrightarrow 0 \ .$$

Donc β et β' induisent des isomorphismes

$$\mathcal{E}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \overset{\beta}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \qquad \mathcal{E}_2' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \overset{\beta'}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_1' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \ .$$

Ceci prouve qu'en dehors de T, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_2'$ sont localement libres de rang r sur $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$. Et ils le sont aussi au-dessus de T puisque là γ et γ' sont des isomorphismes.

Maintenant, définissons les homomorphismes j_2, t_2 comme étant ceux induits par j_1, t_1 dans les sous-Modules $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2', {}^\tau\mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1', {}^\tau\mathcal{E}_1$.

Et mettons sur $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2', j_2, t_2)$ la structure de niveau constituée des isomorphismes composés

$$i_2 : (\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \overset{i_1}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \overset{\beta^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T$$

$$i_2' : (\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T)^r \boxtimes \mathcal{O}_S \overset{i_1'}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_1' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \overset{\beta'^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_2' \otimes_{\mathcal{O}_X} O^T \ .$$

Comme on a vu, cette construction est fonctorielle, et elle répond clairement aux questions posées.

Rappelons maintenant que pour tout sous-schéma fermé $I \hookrightarrow X$, on a défini des morphismes :

$$\mathrm{Frob}_\infty : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \qquad \mathrm{Frob}_0 : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$$
$$* : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow {}^r_{\mathcal{D}^{op}}\mathrm{Cht}_I \qquad * : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}^{op},I}$$

Alors Frob_∞ et Frob_0 commutent aux actions de $\mathrm{Pic}_I(X)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$. Et $*$ transforme les actions de $\mathrm{Pic}_I(X)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$ en celles de $\mathrm{Pic}_I(X)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I^{op})$ via les homomorphismes

$$\mathrm{Pic}_I(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_I(X) \qquad g \mapsto g^{-1}$$
$$\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I^{op}) \qquad g \mapsto g^{-1}\ .$$

Puis, pour T un ensemble fini de points fermés de X, on obtient par limite projective des opérateurs

$$\mathrm{Frob}_\infty : \mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}} \longrightarrow {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T \qquad \mathrm{Frob}_0 : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T \longrightarrow \mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$$
$$* : \mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}} \longrightarrow {}^r_{\mathcal{D}^{op}}\mathrm{Cht}^T \qquad * : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T \longrightarrow \mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}^{op}}$$

qui vérifient

$$\mathrm{Frob}_\infty \circ \mathrm{Frob}_0 = \mathrm{Frob} \qquad \mathrm{Frob}_0 \circ \mathrm{Frob}_\infty = \mathrm{Frob}$$
$$* \circ * = \mathrm{Id} \qquad * \circ \mathrm{Frob}_\infty \circ * = \mathrm{Frob}_0 \qquad * \circ \mathrm{Frob}_0 \circ * = \mathrm{Frob}_\infty\ .$$

De plus, Frob_∞ et Frob_0 commutent à l'action de Hecke de $\mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}})$ et $*$ transforme l'action de $\mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}})$ en celle de $\mathrm{GL}_r(D^{op\ T}_{\mathbb{A}})$ via l'homomorphisme $g \mapsto g^{-1}$.

Enfin, on note que $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$ et ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$ s'identifient naturellement au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)} - \Delta_{X_{(T)}}$.

f) Le morphisme $\det : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{O}_X,I}$

LEMME 3. — *Soit $r \geq 1$ un entier.*
Il existe un unique morphisme de schémas en monoïdes sur X

$$\det : M_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

qui, au-dessus du point générique de X, coïncide avec le morphisme de norme réduite.

Et de plus, le morphisme $(\det)^d : M_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ *coïncide avec le morphisme évident*

$$\Lambda^{rd^2} : M_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{O}_X \ .$$

Démonstration : On sait que localement pour la topologie étale, la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathcal{D}$ se plonge dans $M_d(\mathcal{O}_X)$. Autrement dit, on peut choisir un recouvrement étale Y_1 de X muni d'un plongement de $\mathcal{O}_{Y_1}$-Algèbres

$$i_1 : \mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_1} \hookrightarrow M_d(\mathcal{O}_{Y_1})$$

qui est un isomorphisme en chaque point générique de Y_1.

Et si Y_2 est un autre recouvrement étale de X, muni d'un autre plongement

$$i_2 : \mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_2} \hookrightarrow M_d(\mathcal{O}_{Y_2}) \ ,$$

alors en chaque point générique de $Y_1 \times_X Y_2$, les deux isomorphismes

$$\mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_2} \rightrightarrows M_d(\mathcal{O}_{Y_1 \times_X Y_2})$$

induits par i_1 et i_2 se déduisent l'un de l'autre par conjugaison.

On considère maintenant l'homomorphisme composé

$$\det \circ i_1 : M_r(\mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_1}) \hookrightarrow M_{rd}(\mathcal{O}_{Y_1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1} \ .$$

Pour tout (Y_2, i_2), les homomorphismes

$$\det \circ i_1 : M_r(\mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1}$$

$$\det \circ i_2 : M_r(\mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_2}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_2}$$

induisent sur $Y_1 \times_X Y_2$ des homomorphismes égaux

$$M_r(\mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_2}) \rightrightarrows \mathcal{O}_{Y_1 \times_X Y_2}$$

puisque coïncidant aux points génériques de $Y_1 \times_X Y_2$.

En particulier, les deux homomorphismes sur $Y_1 \times_X Y_1$

$$M_r(\mathcal{D} \otimes \mathcal{O}_{Y_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_1}) \rightrightarrows \mathcal{O}_{Y_1 \times_X Y_1} \ ,$$

déduits de $\det \circ i_1$ via les deux projections, sont identiques, ce qui signifie par descente étale que $\det \circ i_1$ provient d'un homomorphisme de schémas en monoïdes sur X

$$\det : M_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{O}_X \ .$$

Et toujours d'après ce qui précède, il ne dépend pas du choix de (Y_1, i_1).

Au-dessus du point générique de X, il coïncide évidemment avec le morphisme de norme réduite.

Enfin, les homomorphismes $(\det)^d$ et Λ^{rd^2} sont égaux car ils coïncident au-dessus du point générique de X. $\square$

En particulier, on a un homomorphisme de schémas en groupes sur X

$$\det : \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X) \ ,$$

et pour tout sous-schéma fermé $I \hookrightarrow X$, on a par changement de base un homomorphisme

$$\det : \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I) \ .$$

Ainsi, det induit encore un homomorphisme

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)] \longrightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I)] \ .$$

Notons $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. pour $r' \geq 1$, $\mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X,I}$] le champ sur $\mathbb{F}_q$ qui classifie les $\mathcal{D}$-Modules à droite [resp. les $\mathcal{O}_X$-Modules] $\mathcal{E}$ sur X, localement libres de rang r [resp. r'] et munis d'une structure de niveau I, c'est-à-dire d'un isomorphisme de $\mathcal{D}_I$-Modules [resp. de $\mathcal{O}_I$-Modules]

$$(\mathcal{D}_I)^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_I \qquad [\text{resp. } (\mathcal{O}_I)^{r'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_I] \ .$$

Autrement dit, $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ [resp. $\mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X,I}$] est le champ classifiant du schéma en groupes sur X

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)]$$

$$[\text{resp.} \, \mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_{r'}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{GL}_{r'}(\mathcal{O}_I)] \ ] \ .$$

On voit maintenant que l'homomorphisme det induit un morphisme de champs sur $\mathbb{F}_q$

$$\det : \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Vec}^1_{\mathcal{O}_X,I} \ .$$

Mieux encore, comme $\det : \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X)$ provient de $\det : M_r(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{O}_X$, on voit que si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules à droite sur $X \times S$, localement libres de rang r et munis de structures de niveau I, et si $u : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ est un homomorphisme $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-linéaire, respectant les structures de niveau, on a un homomorphisme induit

$$\det u : \det \mathcal{E}_1 \longrightarrow \det \mathcal{E}_2 \ .$$

De plus, la section $(\det u)^d$ de $(\det \mathcal{E}_2)^d \otimes (\det \mathcal{E}_1)^{-d}$ s'identifie à la section $\Lambda^{rd^2} u$ de $(\Lambda^{rd^2} \mathcal{E}_2) \otimes (\Lambda^{rd^2} \mathcal{E}_1)^{-1}$.

En particulier, lorsque u est génériquement inversible dans toute fibre au-dessus de S, on a l'égalité entre diviseurs de Cartier

$$(\det u) = \frac{1}{d}(\Lambda^{rd^2} u) \ .$$

Il est clair maintenant que les foncteurs

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}', j, t) \mapsto (\det \mathcal{E}, \det \mathcal{E}', \det j, \det t)$$

définissent des morphismes de champs

$$\det : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{O}_X,I}$$

$$\det : {}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I \longrightarrow {}^1_{\mathcal{O}_X}\mathrm{Cht}_I \ .$$

Ils commutent à l'action de Frob_∞, Frob_0 et $*$.
Et ils sont compatibles aux actions de $\mathrm{Pic}_I(X)$, $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$ et $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I)$ via les homomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}_I(X) &\longrightarrow \mathrm{Pic}_I(X) & \qquad g &\mapsto g^{rd} \\ \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) &\longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_I) & \qquad g &\mapsto \det g \ . \end{aligned}$$

Enfin, pour T un ensemble fini de points fermés de X, on obtient par limite projective des morphismes de champs

$$\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{1,T}_{\mathcal{O}_X}$$

$${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T \longrightarrow {}^1_{\mathcal{O}_X}\mathrm{Cht}^T$$

et un homomorphisme de groupes

$$\det : \mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}}) \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}^T)$$

qui sont compatibles.

2. — Représentabilité. Lissité

A partir de maintenant, on n'étudiera plus que les $\mathcal{D}$-chtoucas à droite.
Commençons par prouver la proposition générale suivante :

PROPOSITION 1. — *Soient Y un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ deux champs sur Y.*

Soient ${}^\tau\mathcal{U}$ le champ sur Y qui se déduit de $\mathcal{U}$ par le changement de base $Y \xrightarrow{\mathrm{Frob}} Y$, et $\tau : \mathcal{U} \longrightarrow {}^\tau\mathcal{U}$ le morphisme au-dessus de Y qui se déduit du morphisme $\mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathcal{U}$ au-dessus de $Y \xrightarrow{\mathrm{Frob}} Y$.

Soit encore $(\alpha, \beta) : \mathcal{V} \longrightarrow {}^\tau\mathcal{U} \times_Y \mathcal{U}$ un morphisme au-dessus de Y. On forme le carré 2-cartésien (où donc les deux composés $(\tau, \mathrm{Id}) \circ \gamma$ et

$(\alpha,\beta)\circ j$ sont non pas égaux mais isomorphes et $\mathcal{W}$ est universel pour cette propriété) :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{W} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{U} \\
{\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\tau,\mathrm{Id})} \\
\mathcal{V} & \xrightarrow{(\alpha,\beta)} & {}^{\tau}\mathcal{U}\times_Y\mathcal{U}
\end{array}$$

Supposons que les champs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont algébriques localement de type fini sur Y, et que le morphisme $\alpha:\mathcal{V}\longrightarrow{}^{\tau}\mathcal{U}$ est représentable. Alors :

i) *$\mathcal{W}$ est un champ algébrique localement de type fini sur Y ;*

ii) *le morphisme diagonal $\mathcal{W}\longrightarrow\mathcal{W}\times_Y\mathcal{W}$ (qui est automatiquement représentable, séparé et de type fini) est partout non ramifié (donc quasi-fini) ;*

iii) *si de plus $\mathcal{U}$ est lisse sur Y et le morphisme $\alpha:\mathcal{V}\longrightarrow{}^{\tau}\mathcal{U}$ est lisse de dimension relative n, alors $\mathcal{W}$ est lisse de dimension relative n sur Y.*

Remarque : La proposition s'applique en particulier lorsque $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U}=Y\times\mathcal{U}'$, auquel cas $\mathcal{W}$ est aussi défini par le carré 2-cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{U}' \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Frob},\mathrm{Id})} \\
\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U}'\times\mathcal{U}'
\end{array}$$

Démonstration de la proposition :

i) résulte de ce que la 2-catégorie des champs algébriques localement de type fini sur Y est stable par la formation des produits fibrés.

ii) Soient S un schéma sur Y et $w_1,w_2:S\to\mathcal{W}$ deux objets de $\mathcal{W}(S)$.

Il s'agit de prouver que l'espace algébrique qui représente le faisceau $\mathrm{Isom}(w_1,w_2)$ est non ramifié sur S.

Or, en notant $j(w_1)=v_1$, $j(w_2)=v_2$, $\gamma(w_1)=u_1$, $\gamma(w_2)=u_2$ on a un carré cartésien d'espaces algébriques au-dessus de S :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}(w_1, w_2) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Isom}(u_1, u_2) \arrow[d, "(\tau,\mathrm{Id})"] \\
\mathrm{Isom}(v_1, v_2) \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] & \mathrm{Isom}({}^\tau u_1, {}^\tau u_2) \times \mathrm{Isom}(u_1, u_2)
\end{tikzcd}$$

On remarque immédiatement que l'homomorphisme entre faisceaux de différentielles relatives

$$\mathrm{d}\tau : \Omega^1_{\mathrm{Isom}({}^\tau u_1, {}^\tau u_2)/S} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Isom}(u_1,u_2)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{Isom}(u_1,u_2)/S}$$

est nul.

D'autre part, le morphisme

$$\mathrm{Isom}(v_1, v_2) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Isom}({}^\tau u_1, {}^\tau u_2)$$

est une immersion localement fermée.

En effet, il s'écrit : $S \times_{\mathcal{V}} S \longrightarrow S \times_{{}^\tau\mathcal{U}} S$ donc s'obtient par changement de base à partir de

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U}} \mathcal{V}$$

qui est une immersion localement fermée, puisque le morphisme $\alpha : \mathcal{V} \longrightarrow {}^\tau\mathcal{U}$ est représentable par hypothèse.

De ceci, on déduit que l'homomorphisme

$$\mathrm{d}\alpha : \Omega^1_{\mathrm{Isom}({}^\tau u_1, {}^\tau u_2)/S} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Isom}(v_1,v_2)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{Isom}(v_1,v_2)/S}$$

est surjectif.

De même, le morphisme (τ, Id) est une immersion fermée, donc aussi le morphisme $j : \mathrm{Isom}(w_1, w_2) \longrightarrow \mathrm{Isom}(v_1, v_2)$ si bien qu'est surjectif l'homomorphisme

$$\mathrm{d}j : \Omega^1_{\mathrm{Isom}(v_1,v_2)/S} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Isom}(w_1,w_2)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{Isom}(w_1,w_2)/S} \cdot$$

On obtient en définitive que l'homomorphisme

$$\Omega^1_{\mathrm{Isom}({}^\tau u_1, {}^\tau u_2)/S} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Isom}(w_1,w_2)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{Isom}(w_1,w_2)/S}$$

est à la fois nul et surjectif, donc que

$$\Omega^1_{\mathrm{Isom}(w_1,w_2)/S} = 0 \qquad \text{comme voulu.}$$

iii) Par hypothèse, il existe un schéma U lisse sur Y avec un morphisme $U \to \mathcal{U}$ représentable lisse surjectif. On a un carré cartésien d'espaces algébriques :

$$\begin{array}{ccc} W = \mathcal{W} \times_{\mathcal{U}} U & \xrightarrow{\gamma'} & U \\ \big\downarrow j' & & \big\downarrow (\tau,\mathrm{Id}) \\ V = \mathcal{V} \times_{({}^\tau\mathcal{U} \times_Y \mathcal{U})} ({}^\tau U \times_Y U) & \xrightarrow{(\alpha',\beta')} & {}^\tau U \times_Y U \end{array}$$

Comme $W \to \mathcal{W}$ est représentable lisse surjectif, il s'agit de prouver que si w est un point (géométrique) de W, notant $\gamma'(w) = u$, $j'(w) = v$, W est lisse sur Y au point w de dimension relative

$$n + \dim_w(W/\mathcal{W}) = n + \dim_u(U/\mathcal{U}) \ .$$

Or U et ${}^\tau U \times_Y U$ sont lisses sur Y aux points u et $({}^\tau u, u)$ de dimensions relatives $\dim_u(U/Y)$ et $\dim_u(U/Y) + \dim_{{}^\tau u}({}^\tau U/Y) = 2\dim_u(U/Y)$ respectivement.

Et le morphisme $V \longrightarrow Y$ se factorise en

$$V = \mathcal{V} \times_{({}^\tau\mathcal{U} \times \mathcal{U})} ({}^\tau U \times U) \longrightarrow \mathcal{V} \times_{{}^\tau\mathcal{U}} {}^\tau U \longrightarrow {}^\tau U \longrightarrow Y$$

donc est lisse au point v de dimension relative

$$\dim_u(U/\mathcal{U}) + n + \dim_{{}^\tau u}({}^\tau U/Y) \ .$$

D'après [EGA IV 4] proposition 17.3.2, on a seulement à prouver que l'homomorphisme entre espaces tangents

$$T_v(V/Y) \xrightarrow{T_v(\alpha',\beta')} T_{({}^\tau u,u)}({}^\tau U \times_Y U/Y) \Big/ T_u(\tau,\mathrm{Id})(T_u(U/Y))$$

est surjectif.

Autrement dit, il suffit de montrer que

$$T_{{}^\tau u}({}^\tau U/Y) \times T_u(U/Y) = T_v(\alpha',\beta')(T_v(V/Y)) + T_u(\tau,\mathrm{Id})(T_u(U/Y)) \ .$$

Or $T_u(\tau,\mathrm{Id})(T_u(U/Y)) = \{0\} \times T_u(U/Y)$ et le composé $T_v(V/Y) \longrightarrow T_{{}^\tau u}({}^\tau U) \times T_u(U) \longrightarrow T_{{}^\tau u}({}^\tau U)$ est surjectif par hypothèse.

D'où la conclusion. $\square$

Remarque : On peut montrer que la propriété ii) entraîne que $\mathcal{W}$ est un champ au sens de Deligne-Mumford, c'est-à-dire possède un recouvrement étale par des schémas.

Mais nous le verrons directement dans le cas qui nous intéresse. $\square$

Fixons $r \geq 1$ un entier et $I \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini. On cherche à appliquer la proposition 1 avec $\mathcal{W} = \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$. Pour cela, on a besoin d'une série de lemmes.

Rappelons que $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ désigne le champ classifiant des $\mathcal{D}$-Modules à droite sur X, localement libres de rang r et munis d'une structure de niveau I. Si l'on fixe un isomorphisme de $\mathcal{O}_I$-Modules $(\mathcal{D}_I)^r \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_I)^{rd^2}$, cela induit un morphisme de champs $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I}$.

LEMME 2. — *Le morphisme de champs*

$$\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I}$$

est représentable quasi-affine de type fini.

Démonstration : Soient S un schéma et $S \to \mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I}$ un objet de $\mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I}(S)$ c'est-à-dire un fibré $\mathcal{E}$ de rang rd^2 sur $X \times S$, avec structure de niveau I.

On considère le foncteur

$$(S' \to S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times S'}}(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'}, \mathit{End}_{\mathcal{O}_{X \times S'}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})) \ .$$

D'après un théorème de Grothendieck, cf. [EGA III] corollaire 7.7.8, il est représentable par un fibré vectoriel $S_1 \to S$ sur S associé à un faisceau de présentation finie.

Puis, pour tout morphisme de schémas $S' \to S_1$, on se demande quand–est–ce que l'homomorphisme induit

$$\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'} \longrightarrow \mathit{End}_{\mathcal{O}_{X \times S'}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})$$

est un anti-homomorphisme d'Algèbres et que de plus l'isomorphisme $(\mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_{S'})^r \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_I \boxtimes \mathcal{O}_{S'})^{rd^2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_I \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ est $\mathcal{D}_I$-linéaire pour la structure de $\mathcal{D}$-Module à droite ainsi définie sur $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$.

Cela revient à demander que des sections des faisceaux cohérents sur $X \times S_1$: $\mathit{End}_{\mathcal{O}_{X \times S_1}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1})$, $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times S_1}}(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1}, \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1})$ et $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times S_1}}(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_{S_1})^r, \mathcal{E}_I \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1})$ soient annulées par le changement de base $S' \to S_1$. Or ces faisceaux sont tous plats sur S_1, donc cette condition est représentable par une immersion fermée $S_2 \hookrightarrow S_1$ comme il résulte du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient $Z \to Y$ un morphisme projectif de schémas, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents sur Z tels que $\mathcal{G}$ soit plat sur $\mathcal{O}_Y$ et $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme global.*

Alors il existe une immersion fermée $Y_0 \hookrightarrow Y$ telle que pour tout morphisme de schémas $Y' \to Y$, l'homomorphisme α soit annulé par le changement de base $Y' \to Y$ si et seulement si $Y' \to Y$ se factorise à travers Y_0.

Démonstration du lemme 3 : D'après Grothendieck, cf. [EGA III] corollaire 7.7.8, le foncteur $(Y' \to Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z \times_Y Y'}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'})$ est représentable par le fibré vectoriel associé à un certain faisceau cohérent $\mathcal{Q}$ sur Y. En particulier, l'homomorphisme α correspond à un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules $\mathcal{Q} \to \mathcal{O}_Y$.

Alors, si $\mathcal{I}$ désigne le faisceau image de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{O}_Y$, le sous-schéma fermé Y_0 de Y défini par l'Idéal $\mathcal{I}$ répond à la question posée. $\square$

Avant de reprendre la démonstration du lemme 2, prouvons le lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient A, A' deux anneaux (commutatifs) locaux, $A \to A'$ un homomorphisme local, et R une A-algèbre qui est libre de type fini comme A-module.*

Alors, pour tout R-module (à droite) M qui est libre de type fini sur A, M est libre de rang r sur R si et seulement si $M \otimes_A A'$ est libre de rang r sur $R \otimes_A A'$.

Démonstration du lemme 4 : La nécessité est évidente. Il faut prouver la suffisance.

Supposons d'abord que A' est le corps résiduel de A. Soit $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_r$ une base de $M \otimes_A A'$ sur $R \otimes_A A'$, et soient $m_1, \ldots, m_r$ des éléments de M qui relèvent $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_r$. Ils définissent un homomorphisme R-linéaire $R^r \to M$. D'après le lemme de Nakayama, il est surjectif. Puis, comme il devient bijectif quand transformé par $\cdot \otimes_A A'$ et que M est plat sur A, il est bijectif. C'est ce qu'on voulait.

Ceci nous ramène au cas où A et A' sont des corps. On voit déjà que M est projectif sur R. En effet, il faut prouver qu'est exact le foncteur

$$N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

ce qui équivaut à l'exactitude du foncteur

$$N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_A A' = \mathrm{Hom}_{R \otimes_A A'}(M \otimes_A A', N \otimes_A A')$$

qui résulte de ce que $M \otimes_A A'$ est libre sur $R \otimes_A A'$.

Mais alors, on n'a plus qu'à prouver que $M/M\mathrm{rad}(R)$ est libre de rang r sur $R/\mathrm{rad}(R)$.

Or on sait que $R/\mathrm{rad}(R)$ s'écrit canoniquement comme un produit de A-algèbres simples de dimensions finies.

Donc il suffit de prouver que pour toute A-algèbre quotient $\overline{R}$ de R qui est simple, on a

$$\dim_A(M \otimes_R \overline{R}) = r \dim_A \overline{R}$$

et cela résulte immédiatement de ce que

$$\dim_{A'}((M \otimes_A A') \otimes_{R\otimes_A A'} (\overline{R} \otimes_A A')) = r \dim_{A'}(\overline{R} \otimes_A A')$$

puisque $M \otimes_A A'$ est libre de rang r sur $R \otimes_A A'$. $\square$

Fin de la démonstration du lemme 2 : Maintenant, pour tout morphisme de schémas $S' \to S$, on se demande quand–est–ce que le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'}$-Module $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ est localement libre de rang r. D'après le lemme 4 ci-dessus, il faut et il suffit que l'image de $X \times S'$ dans $X \times S_2$ soit contenue dans l'ouvert maximal Z où $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_2}$ est localement libre de rang r. Si donc on note S_3 l'ouvert de S_2 complémentaire du fermé image du complémentaire de l'ouvert Z dans $X \times S_2$, on voit que la condition demandée est représentable par l'immersion ouverte $S_3 \to S_2$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Puis prouvons :

LEMME 5. — *Pour tout entier $r \geq 1$ et tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, le champ $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ est algébrique, localement de type fini et lisse sur $\mathbb{F}_q$.*

Démonstration : On sait déjà que pour tout entier $r' \geq 1$, le champ $\mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X,\emptyset} = \mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q$ et localement de type fini, cf. [Laumon, Moret-Bailly] théorème 4.14.2.1. De plus, le morphisme de champs $\mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X,I} \to \mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X}$ est un torseur sous le schéma en groupes lisse $S \mapsto \mathrm{GL}_{r'}(\mathcal{O}_I \boxtimes \mathcal{O}_S)$ si bien que le champ $\mathrm{Vec}^{r'}_{\mathcal{O}_X,I}$ aussi est algébrique sur $\mathbb{F}_q$ et localement de type fini.

Maintenant, le choix d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_I$-Modules $(\mathcal{D}_I)^r \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_I)^{rd^2}$ détermine un morphisme de champs $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I}$ qui d'après le lemme 2 est représentable quasi-affine de type fini. Donc le champ $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ encore est algébrique sur $\mathbb{F}_q$ et localement de type fini.

Il reste à prouver que le champ $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ est formellement lisse sur $\mathbb{F}_q$. Soient donc S le spectre d'une $\mathbb{F}_q$-algèbre locale artinienne A et $\overline{S} \hookrightarrow S$ un sous-schéma fermé défini par un idéal J vérifiant $J^2 = 0$. Et soit $\overline{\mathcal{E}}$ un objet de $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{S})$, c'est-à-dire un $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}$-Module sur $X\times\overline{S}$ qui est localement libre de rang r, avec structure de niveau I.

D'après [Illusie] Chapitre IV, proposition 3.1.5, l'obstruction à relever $\overline{\mathcal{E}}$ en un $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-Module sur $X\times S$ localement libre de rang r gît dans le groupe de cohomologie $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}(\overline{\mathcal{E}},\overline{\mathcal{E}}\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{S}}}J)$. Or, comme le $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}$-Module $\overline{\mathcal{E}}$ est localement libre, les faisceaux $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}(\overline{\mathcal{E}},\overline{\mathcal{E}}\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{S}}}J)$ sont nuls pour $i\geq 1$. Et comme $\overline{S}$ est le spectre d'une algèbre artinienne, $X\times\overline{S}$ est de dimension de Krull 1 si bien qu'en définitive $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}(\overline{\mathcal{E}},\overline{\mathcal{E}}\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{S}}}J)=0$.

Soit donc $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-Module sur $X\times S$ localement libre de rang r et qui relève $\overline{\mathcal{E}}$. Considérons la base $\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_r$ de $\overline{\mathcal{E}}_{I\times\overline{S}}$ sur $\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}$ qui correspond à la structure de niveau $(\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}})^r\xrightarrow{\sim}\overline{\mathcal{E}}_{I\times\overline{S}}$. Comme $I\times S$ est un schéma affine, la base $\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_r$ se relève en une famille $e_1,\ldots,e_r$ dans $\mathcal{E}_{I\times S}$, laquelle définit un homomorphisme $\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S$-linéaire

$$(\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S)^r\longrightarrow\mathcal{E}_{I\times S}\ .$$

Comme sa réduction modulo J est un isomorphisme, et que $(\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S)^r$ et $\mathcal{E}_{I\times S}$ sont localement libres sur $\mathcal{O}_I\boxtimes\mathcal{O}_S$, c'est un isomorphisme. Ceci termine la démonstration. $\square$

Posons maintenant :

DÉFINITION 6. — *Pour tout entier $r\geq 1$ et tout sous-schéma fermé fini $I\hookrightarrow X$, on note* $\mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I}$ *le champ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde* $\mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I}(S)$ *des diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}' \\ & \\ \widetilde{\mathcal{E}} \arrow[uur, hook, "t"'] & \end{tikzcd}$$

où :

• *$\widetilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-Modules sur $X\times S$, localement libres de rang r et munis de structures de niveau I, c'est-à-dire d'isomorphismes $\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S$-linéaires*

$$(\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S)^r\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathcal{E}}_{I\times S}\ ,\ (\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S)^r\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}_{I\times S}\ ,\ (\mathcal{D}_I\boxtimes\mathcal{O}_S)^r\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}'_{I\times S}\,;$$

• *j et t sont des homomorphismes $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-linéaires, injectifs et dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes $i_\infty:S\to X\backslash I$ et $i_0:S\to X\backslash I$;*

• *j et t ont leurs conoyaux localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$-Modules ;*
• *les homomorphismes duaux $j^\vee$ et $t^\vee$ ont leurs conoyaux localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$-Modules ;*
• *j et t sont compatibles aux structures de niveau I.*

Avec cette définition, il est clair que l'on a un diagramme 2-cartésien de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \ . \end{array}$$

Les deux morphismes horizontaux sont

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array} \right) \mapsto \mathcal{E} \qquad \text{et} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array} \right) \mapsto (\widetilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) \ .$$

Les deux morphismes verticaux sont

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array} \right) \text{avec } \widetilde{\mathcal{E}} = {}^\tau\mathcal{E}, \text{et } \mathcal{E} \mapsto ({}^\tau\mathcal{E}, \mathcal{E}) \ .$$

On veut démontrer :

LEMME 7. — *Le morphisme de champs*

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow (X\backslash I) \times (X\backslash I) \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array} \right) \longmapsto (i_0, i_\infty, \widetilde{\mathcal{E}}) \end{array}$$

est représentable et quasi-projectif.

De plus, si X' désigne l'ouvert maximal de X où $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre d'Azumaya (c'est-à-dire est localement isomorphe pour la topologie étale à $M_d(\mathcal{O}_X)$), alors la restriction du morphisme au-dessus de l'ouvert $(X'\backslash I) \times (X'\backslash I) \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$ est même projective et lisse de dimension relative $2(rd-1)$.

Démonstration : Notons $\mathrm{Inj}^r_{\mathcal{D},I}$ le champ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des diagrammes

$$\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'$$

où :
- $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules à droite sur $X \times S$, localement libres de rang r et munis de structures de niveau I;
- j est un homomorphisme $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-linéaire, injectif et dont le conoyau est supporté par le graphe d'un morphisme $i : S \to X\backslash I$;
- j et $j^\vee$ ont leurs conoyaux localement libres de rang d comme $\mathcal{O}_S$-Modules;
- j est compatible aux structures de niveau I.

On a un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & \mathrm{Inj}^r_{\mathcal{D},I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Inj}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \end{array}$$

où les deux morphismes horizontaux sont

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & \nearrow t & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array} \right) \mapsto (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') \qquad \text{et } (\widetilde{\mathcal{E}} \overset{t}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') \mapsto \mathcal{E}'$$

et les deux morphismes verticaux sont

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & \nearrow t & \\ \widetilde{\mathcal{E}} & & \end{array} \right) \mapsto (\widetilde{\mathcal{E}} \overset{t}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') \qquad \text{et } (\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') \mapsto \mathcal{E}' .$$

Donc on est réduit à prouver :

LEMME 8. — *Les deux morphismes de champs*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Inj}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & X\backslash I \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \\
(\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') & \longmapsto & (i, \mathcal{E}) \\
(\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}') & \longmapsto & (i, \mathcal{E}')
\end{array}$$

sont représentables et quasi-projectifs.

De plus, ils sont mêmes projectifs et lisses de dimension relative $rd-1$ au-dessus de $X'\backslash I \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}$.

Démonstration : Soient donc S un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $i : S \to X\backslash I$ un morphisme et $\mathcal{E}$ [resp. $\mathcal{E}'$] un objet de $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I}(S)$.

Considérons le foncteur qui à tout schéma $S' \to S$ sur S associe l'ensemble des suites exactes de $\mathcal{O}_{X\times S'}$-Modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$
$$[\text{resp.}\quad 0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0]$$

où $\mathcal{E}'$ [resp. $\mathcal{E}$] est localement libre de rang rd^2, et $\mathcal{Q}$ est supporté par le graphe du composé $i' : S' \to S \to X$ et localement libre de rang d sur $\mathcal{O}_{S'}$.

En posant $\mathcal{Q}' = (\mathrm{Id}, i')^* \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_{X\times S'})$ [resp. $\mathcal{Q}' = (\mathrm{Id}, i')^* \mathcal{Q}$], cela revient à considérer l'ensemble des $\mathcal{O}_{S'}$-Modules quotients $\mathcal{Q}'$ de

$$(\mathrm{Id}, i')^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{O}_{X\times S'}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S'}}((\mathrm{Id}, i)^* \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{O}_{S'})$$

[resp. $(\mathrm{Id}, i)^* \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$] qui sont localement libres de rang d.

Ce foncteur est donc représentable par un morphisme $S_1 \to S$ qui est grassmannien, donc projectif. Notons $\mathcal{E}'_1$ et $\mathcal{Q}_1$ [resp. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{Q}_1$] les faisceaux canoniques sur $X \times S_1$. Pour tout morphisme de schémas $S' \to S_1$ on se demande quand–est–ce que l'action de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'}$ se prolonge à $\mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$ [resp. $\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$] et à $\mathcal{Q}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$. Cela revient à demander que soit annulé l'homomorphisme

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times S_1}}(\mathcal{E}'_1, \mathcal{O}_{X\times S_1}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{X\times S_1}}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{O}_{X\times S_1})$$

[resp. $\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Q}_1$] par le changement de base $S' \to S_1$.

D'après le lemme 3, cette condition est représentable par une immersion fermée $S_2 \hookrightarrow S_1$.

Enfin, pour tout morphisme $S' \to S_2$, on se demande quand–est–ce que le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'}$-Module à droite $\mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$ [resp. $\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$] est localement libre de rang r et que le conoyau de $(\mathcal{E}'_1 \otimes \mathcal{O}_{S'})^\vee \longrightarrow (\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S'})^\vee$ [resp. $(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{S'})^\vee \longrightarrow (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{O}_{S'})^\vee$], qui est automatiquement plat sur $\mathcal{O}_S$, est localement libre de rang d sur $\mathcal{O}_S$. D'après le lemme 4 et la fin de la démonstration du lemme 2, cette condition est représentable par une immersion ouverte $S_3 \subset S_2$.

Il reste à voir que si $i : S \to X \backslash I$ prend ses valeurs dans X', alors le morphisme $S_3 \to S$ est projectif lisse de dimension relative $rd - 1$.

On a que $i^*\mathcal{D}$ est une Algèbre d'Azumaya, donc quitte à remplacer S par un recouvrement étale, on peut supposer qu'il existe un isomorphisme $i^*\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} M_d(\mathcal{O}_S)$.

Pour $S' \to S$ un morphisme de schémas, se donner un $\mathcal{O}_{S'}$-Module quotient $\mathcal{Q}'$ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S'}}((\mathrm{Id}, i)^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{O}_{S'})$ [resp. $(\mathrm{Id}, i)^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$] sur S' qui soit localement libre de rang d et compatible avec l'action à gauche [resp. à droite] de $M_d(\mathcal{O}_{S'})$ revient, par équivalence de Morita, à se donner un $\mathcal{O}_{S'}$-Module quotient d'un certain fibré de rang $rd^2/d = rd$ qui soit inversible.

On voit que S_2 est l'espace projectif sur S associé à ce fibré. Il est lisse de dimension relative $rd - 1$.

Enfin, il est immédiat que dans ce cas $S_3 = S_2$. $\square$

D'après le lemme 5 et le lemme 7, on peut maintenant appliquer la proposition 1 au diagramme 2-cartésien de champs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \arrow[d, "(\mathrm{Frob},\mathrm{Id})"] \\
\mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I} \\
(X\backslash I) \times (X \backslash I) &
\end{tikzcd}$$

On obtient déjà le résultat suivant, dû à Drinfeld dans le cas $\mathcal{D} = \mathcal{O}_X$:

THÉORÈME 9. — *Pour tout entier $r \geq 1$ et tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ est un champ algébrique localement de type fini.*

De plus, le morphisme diagonal

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$$

est représentable, séparé, de type fini et partout non ramifié.

Enfin, le morphisme

$$(0,\infty) : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow (X\backslash I) \times (X\backslash I)$$

est lisse de dimension relative $2(rd-1)$ *au-dessus de l'ouvert* $(X'\backslash I) \times (X'\backslash I)$.

□

Remarque : Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment aux champs ${}^r_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$.

3. — Chtoucas triviaux. Applications

DÉFINITION 1. — *Soient* $Y \hookrightarrow X$ *un sous-schéma fermé de* X, $\mathcal{D}_Y$ *la* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre induite sur* Y *par* $\mathcal{D}$, *et* $r \geq 1$ *un entier.*

Pour tout schéma S *sur* $\mathbb{F}_q$, *on appelle* $\mathcal{D}_Y$*-chtouca trivial de rang* r *sur* S *tout* $\mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{O}_S$*-Module à droite* $\mathcal{E}$ *sur* $Y \times S$, *localement libre de rang* r, *et qui est muni d'un isomorphisme*

$${}^\tau\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

où ${}^\tau\mathcal{E}$ *désigne le* $\mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{O}_S$*-Module* $(\mathrm{Id}_Y \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}$.

On notera $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}$ le champ sur $\mathbb{F}_q$ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des $\mathcal{D}_Y$-chtoucas triviaux de rang r sur S. En particulier, si $Y = X$, on dispose du champ $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}}$ des $\mathcal{D}$-chtoucas triviaux de rang r.

Et si $I \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fini fermé, on note $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D},I}$ le champ des $\mathcal{D}$-chtoucas triviaux de rang r, avec structure de niveau I, obtenu comme le produit fibré dans le carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_I}
\end{array}$$

où le morphisme $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_I}$ est défini par les foncteurs de restriction $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}_{I\times S}$, et le morphisme $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_I}$ est la section évidente $S \mapsto ((\mathcal{D}_I)^r \boxtimes \mathcal{O}_S)$ de $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_I}$.

THÉORÈME 2. — *Pour tout sous-schéma fermé $Y \hookrightarrow X$, et tout entier $r \geq 1$, le champ $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}$ sur $\mathbb{F}_q$ s'écrit comme la somme disjointe sur les objets E de $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q)$ des champs classifiants sur $\mathbb{F}_q$ des groupes finis $\mathrm{Aut}\,E$ d'automorphismes.*

Autrement dit :

(i) *Le champ $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}}$ s'écrit*

$$\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}} = \coprod_E \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q / \mathrm{Aut}\,E$$

où E décrit la famille des $\mathcal{D}$-Modules à droite sur X, localement libres de rang r.

(ii) *Si $I \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé fini, on a*

$$\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q / \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \ .$$

Comme conséquence de (i) *et* (ii), *on a pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$*

$$\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D},I} = \coprod_E \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q / \mathrm{Aut}\,E$$

où E décrit la famille des $\mathcal{D}$-Modules à droite sur X, localement libres de rang r, et munis d'une structure de niveau I.

Démonstration : Le champ $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}$ s'inscrit dans le carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y} \\
\downarrow & & \downarrow \scriptstyle{(\mathrm{Frob},\mathrm{Id})} \\
\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y} & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\mathrm{Id})} & \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y} \times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y}
\end{array}$$

où $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y}$ désigne le champ classifiant des $\mathcal{D}_Y$-Modules à droite localement libres de rang r.

Or $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y}$ est un champ algébrique, localement de type fini et lisse sur $\mathbb{F}_q$. En effet, pour $Y = X$, on l'a vu dans le lemme 5 du paragraphe I.2 et si $Y \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé fini, cela résulte de ce que $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D}_Y}$ est le champ classifiant du schéma en groupes

$$S \mapsto \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{O}_S) \ .$$

D'après la proposition 1 du paragraphe I.2, on voit déjà que $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}$ est un champ algébrique localement de type fini et étale sur $\mathbb{F}_q$.

Il reste seulement à prouver que si E décrit la famille des objets de $\mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q)$, alors le morphisme de champs

$$\coprod_E \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \longrightarrow \mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_Y}$$

induit une équivalence entre fibres au-dessus de $\mathrm{Spec}\,K$, pour tout corps algébriquement clos K contenant $\mathbb{F}_q$.

Et ceci résulte du lemme suivant, compte tenu du lemme 4 du paragraphe I.2.

LEMME 3 (Drinfeld). — *Soient Z un schéma projectif sur $\mathbb{F}_q$, et K un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$.*

Alors le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes K$ de la catégorie des faisceaux cohérents sur Z dans la catégorie des faisceaux cohérents $\mathcal{G}$ sur $Z \otimes K$ qui sont munis d'un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ (où ${}^\tau\mathcal{G}$ désigne le faisceau $(\mathrm{Id}_Z \times \mathrm{Frob}_K)^*\mathcal{G}$) *est une équivalence.*

Démonstration du lemme 3 : Soit $\mathcal{O}_Z(1)$ un faisceau très ample sur Z. On sait que le foncteur

$$\mathcal{F} \mapsto \bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z, \mathcal{F}(n)) \quad [\text{resp. } \mathcal{G} \mapsto \bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z\otimes K, \mathcal{G}(n))]$$

induit une équivalence de la catégorie des faisceaux cohérents sur Z [resp. sur $Z \otimes K$] sur la catégorie quotient de la catégorie des modules gradués de type fini sur l'algèbre graduée $\bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z, \mathcal{O}_Z(n))$ [resp. $\bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z \otimes K, \mathcal{O}_Z(n) \otimes K)$] par la sous-catégorie des modules dont les facteurs sont nuls à partir d'un certain rang [resp. De plus, ce foncteur commute au foncteur τ].

Ceci nous ramène au cas où $Z = \mathrm{Spec}\,K$ et les faisceaux cohérents sont simplement les espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire finalement à l'énoncé suivant :

LEMME 4. — *Soient K un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$, U et V deux espaces vectoriels sur K de dimension finie, $\lambda : U \to V$ un homomorphisme linéaire et $\psi : U \to V$ un homomorphisme q-linéaire.*

Alors, si $U_0 = \mathrm{Ker}(\lambda - \psi)$, l'homomorphisme

$$U_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} K \longrightarrow U$$

est injectif si λ est injectif, et il est bijectif si λ et ψ sont bijectifs.

Démonstration du lemme 4 : Supposons λ injectif. Soit $e_1, \ldots, e_k$ une famille d'éléments de U_0, linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_q$. Il faut voir qu'ils sont aussi linéairement indépendants sur K. Supposons qu'il existe une relation linéaire non triviale $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$. On peut la supposer minimale, au sens que le nombre de termes non nuls est minimal.

En prenant l'image par ψ, on obtient

$$\alpha_1^q \psi(e_1) + \cdots + \alpha_k^q \psi(e_k) = 0$$

qui s'écrit encore

$$\alpha_1^q \lambda(e_1) + \cdots + \alpha_k^q \lambda(e_k) = 0$$

et comme λ est linéaire et injective, on trouve

$$\alpha_1^q e_1 + \cdots + \alpha_k^q e_k = 0 \ .$$

Par minimalité de la relation de départ, on obtient que les uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_k^q)$ sont proportionnels, autrement dit que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ est proportionnel à un uplet d'éléments de $\mathbb{F}_q$. Il y a contradiction.

Supposons maintenant que λ et ψ sont bijectifs. Et notons n la dimension sur K de U ou V. D'après ce qui précède, il suffit de voir que U_0 est toujours de cardinal q^n.

Considérons le sous-schéma fermé de $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \times \mathbb{A}^n$ défini par l'équation $g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - g_2 \begin{pmatrix} x_1^q \\ \vdots \\ x_n^q \end{pmatrix} = 0$. C'est évidemment un schéma en groupes sur $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ qui est affine et étale. Montrons qu'il est également fermé dans $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \times \mathbb{P}^n$.

En coordonnées homogènes, l'équation s'écrit

$$g_1 \begin{pmatrix} x_1/x_0 \\ \vdots \\ x_n/x_0 \end{pmatrix} - g_2 \begin{pmatrix} x_1^q/x_0^q \\ \vdots \\ x_n^q/x_0^q \end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad x_0^{q-1} g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - g_2 \begin{pmatrix} x_1^q \\ \vdots \\ x_n^q \end{pmatrix} = 0$$

qui est impossible à réaliser si $x_0 = 0$.

Ainsi, ce schéma en groupes est fini et étale sur $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$; par conséquent son rang est constant, égal à celui pour $g_1 = g_2 = I_n$, et c'est ce qu'on voulait.

Ceci achève la démonstration du lemme 4, donc aussi du lemme 3 et du théorème 2. $\square$

Comme conséquence du théorème 2, on a :

PROPOSITION 5. — *Soient $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de X et $r \geq 1$ un entier.*

Alors le morphisme canonique de champs au-dessus de $(X \backslash J) \times (X \backslash J)$

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$$

est représentable fini étale galoisien avec pour groupe de Galois le groupe fini

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)] \ .$$

Démonstration : Cela résulte de ce qu'on a alors les carrés 2-cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_J} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathrm{Tr}^r_{\mathcal{D}_I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)
\end{array}$$

si bien que les morphismes $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ et $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}$ sont représentables finis étales galoisiens avec pour groupes de Galois respectifs $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J)$ et $\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$. $\square$

COROLLAIRE 6. — *Pour $I \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini de X et $r \geq 1$ un entier, le champ $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ s'écrit comme réunion filtrante de sous-champs ouverts qui sont quotients de schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{F}_q$ par l'action de groupes finis.*

En particulier, $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford, et il est séparé sur $\mathbb{F}_q$.

Démonstration : Considérons $I' \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini non vide contenant I et de même support que I.

On a des morphismes de champs

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I'} \longrightarrow \mathrm{Hecke}^r_{\mathcal{D},I'} \longrightarrow (X\backslash I)\times(X\backslash I)\times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I'} \longrightarrow \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I'}\,.$$

Le premier de ces morphismes s'obtient par changement de base à partir de $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I'} \xrightarrow{(\mathrm{Frob},\mathrm{Id})} \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I'}\times \mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I'}$. D'après le lemme 7 du paragraphe I.2, le second morphisme est représentable quasi-projectif. Et le troisième est trivialement représentable quasi-projectif.

De plus, d'après le lemme 2 du paragraphe I.2, le morphisme $\mathrm{Vec}^r_{\mathcal{D},I'} \longrightarrow \mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I'}$ est représentable quasi-affine de type fini.

Or on sait que $\mathrm{Vec}^{rd^2}_{\mathcal{O}_X,I'}$ contient un sous-champ ouvert (celui des fibrés I'-stables) qui est représentable par une réunion disjointe de schémas quasi-projectifs, cf. [Seshadri] Quatrième partie. Donc le sous-champ ouvert de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I'}$ obtenu par image réciproque est lui-même représentable par une réunion disjointe de schémas quasi-projectifs sur $\mathbb{F}_q$. Et son quotient par l'action du groupe fini $\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{I'}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)]$ est un sous-champ ouvert $U_{I'}$ de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$.

Maintenant, les $U_{I'}$ (quand I' décrit l'ensemble ordonné des sous-schémas fermés finis de X qui contiennent I et ont même support) constituent une famille filtrante d'ouverts de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}$ dont la réunion est tout, car tout fibré est stable pour une structure de niveau de degré assez grand. $\square$

Donnons une autre conséquence du lemme 3 :

PROPOSITION 7. — *Supposons que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre maximale c'est-à-dire que pour tout point fermé x de X, $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} O_x$ est un ordre maximal dans la F_x-algèbre $D_x = D\otimes_F F_x$.*

Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E}$ un diagramme de $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-Modules sur $X\times S$, où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont localement libres de type fini sur $\mathcal{O}_{X\times S}$, j et t sont injectifs, et les faisceaux Coker j *et* Coker t *ont leurs supports inclus dans $X'\times S$.*

Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont localement libres sur $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$.

Démonstration : Si $d=1$, $\mathcal{D}=\mathcal{O}_X$, il n'y a rien à démontrer.

Si $d>1$, on a $X'\neq X$ si bien que j et t restent injectifs au-dessus de tout point algébrique de S. D'après le lemme 4 du paragraphe I.2, on peut se limiter au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos K.

Notons e le rang sur $\mathcal{O}_{X_K}$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

Soit x un point de $X\backslash X'$. Pour tout sous-schéma fermé fini $I\hookrightarrow X$ supporté par x, les homomorphismes induits $\mathcal{E}_{I\times S}\to \mathcal{E}'_{I\times S} \leftarrow {}^\tau\mathcal{E}_{I\times S}$ sont des isomorphismes, donc d'après le lemme 3, on a une écriture canonique

$$\mathcal{E}'_{I\times S} \cong \mathcal{E}_{I\times S} = E_I \otimes_{\mathbb{F}_q} K$$

où E_I est un module libre de rang e sur $\mathcal{O}_I$ et muni d'une action de $\mathcal{D}_I$.

Par conséquent, on obtient

$$\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} O_x \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_x = \varprojlim_I \mathcal{E}_{I\times S} = E_x \otimes_{\mathbb{F}_q} K$$

où $E_x = \varprojlim_I E_I$ est un module libre de rang e sur O_x et muni d'une action de $\mathcal{D}_x$.

Or $D_x = D \otimes_F F_x$ est une algèbre matricielle sur une algèbre à division centrale sur F_x de dimension d_x^2.

On voit déjà que e est un multiple de d_x^2, ce pour tout $x \in X\backslash X'$. Or le p.p.c.m. des entiers d_x, quand x décrit $X\backslash X'$, est d. Donc e est un multiple de d^2.

Par conséquent, pour tout $x \in X\backslash X'$, $E_x \otimes_{O_x} F_x$ est libre sur D_x. Puis, comme $\mathcal{D}_x$ est un ordre maximal dans D_x, E_x est libre sur $\mathcal{D}_x$, cf. [Curtis-Reiner] théorème 26.24 iii). D'après encore le lemme 4 du paragraphe I.2, cela implique que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont localement libres sur $\mathcal{D}\otimes K$ en tous les points au-dessus de $X\backslash X'$.

Et ils le sont aussi en les points au-dessus de X' puisque leur rang est un multiple de d^2. $\square$

COROLLAIRE 8. — *Supposons que la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathcal{D}$ est partout maximale. Pour S un schéma sur $\mathbb{F}_q$, on considère un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathcal{E}' \\ & t\nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{array}$$

où :

- *$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules à droite sur $X \times S$, localement libres de type fini comme $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modules ;*
- *j et t sont des homomorphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-linéaires, injectifs, et dont les conoyaux sont supportés respectivement par les graphes de morphismes $i_\infty : S \to X$ et $i_0 : S \to X$ et sont localement libres de rang d sur leurs supports comme $\mathcal{O}_S$-Modules.*

Alors, si les morphismes i_∞ et i_0 sont à valeurs dans $X' \subset X$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont automatiquement localement libres comme $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules.

Autrement dit, le diagramme ci-dessus définit un $\mathcal{D}$-chtouca sur S.

4. — Correspondances de Hecke

a) Préliminaires

Dans tout ce paragraphe, on fixera T un sous-ensemble fini de $|X|$. On utilisera les notations du paragraphe I.1e. On fixe également un élément a de $(\mathbb{A}^T)^\times$ qui est de degré 1. Il en existe d'après le lemme suivant :

LEMME 1. — *Pour tout sous-ensemble fini T de $|X|$, les entiers* $\deg(x) = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$, *quand x décrit $|X| \backslash T$, sont globalement premiers entre eux.*

Démonstration : Pour tout entier $\nu \geq 1$, notons $N_\nu = \sum_{\substack{x \in |X| \\ \deg(x)|\nu}} \deg(x)$.

En notant g le genre de la courbe X, l'hypothèse de Riemann pour X nous dit exactement que

$$\forall \nu \geq 1 \ , \ |N_\nu - q^\nu - 1| \leq 2g q^{\nu/2} \ .$$

En particulier, si ν est un nombre premier assez grand, l'ensemble $\{x \in |X|, \deg(x) = \nu\}$ est toujours non vide. D'où la conclusion. □

Cet élément a étant fixé, il détermine un plongement

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow (\mathbb{A}^T)^\times \quad n \mapsto a^n$$

et donc aussi un plongement de $\mathbb{Z}$ dans

$$(F^\times)^T \backslash (\mathbb{A}^T)^\times = \mathrm{Pic}^T(X) = \varprojlim_{I \cap T = \emptyset} \mathrm{Pic}_I(X) \ .$$

Et pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \backslash T$, l'homomorphisme ainsi défini $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}_I(X)$ est une section de $\deg : \mathrm{Pic}_I(X) \to \mathbb{Z}$.

Maintenant, on remarque de manière générale que pour tout entier $r \geq 1$, on dispose de l'application localement constante

$$\deg : \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui à tout point algébrique, c'est-à-dire à tout $\mathcal{D}$-chtouca de rang r
$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$$ sur un corps K associe $\deg(\det \mathcal{E}) = \dfrac{\deg \mathcal{E} - r \deg \mathcal{D}}{d}$.

Il lui correspond une décomposition en somme disjointe

$$\mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D},I} \ .$$

Il est immédiat que via le plongement $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}_I(X)$ l'action de $+1 \in \mathbb{Z}$ sur $\mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}$ transforme chaque $\mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D},I}$ en $\mathrm{Cht}^{r,n+rd}_{\mathcal{D},I}$.

D'où des isomorphismes naturels

$$\coprod_{0\leq n<rd} \mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D},I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \ .$$

b) Algèbres de Hecke

L'entier $r \geq 1$ étant fixé, on note G le schéma en groupes sur F des automorphismes de D^r, avec donc

$$G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$$

$$G(F_x) = \mathrm{GL}_r(D_x) \text{ pour toute place } x \text{ de } F$$

$$G(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(D \otimes_F \mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}})$$

$$G(\mathbb{A}^T) = \mathrm{GL}_r(D \otimes_F \mathbb{A}^T) = \mathrm{GL}_r(D^T_{\mathbb{A}}) \text{ d'où } G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A}^T) \times \prod_{x\in T} G(F_x)$$

et $K_x = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x)$ pour toute place x de F

$$K = \prod_{x\in|X|} K_x \subset G(\mathbb{A}) \ , \ K = \varprojlim_{I} \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)$$

$$K^T = \prod_{x\in|X|\setminus T} K_x \subset G(\mathbb{A}^T) \ , \ K^T = \varprojlim_{I\cap T=\emptyset} \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \ .$$

Si $I \hookrightarrow X$ [resp. $I \hookrightarrow X\setminus T$] est un sous-schéma fermé fini, on notera K_I [resp. K^T_I] le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$K \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \quad [\text{resp. } K^T \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)] \ .$$

On remarque que K [resp. K^T] est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^T)$] et que chaque K_I [resp. K_I^T] est un sous-groupe compact ouvert d'indice fini dans K [resp. K^T].

De plus, le groupe localement compact $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^T)$] est unimodulaire. Soit donc dg [resp. dg^T] la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^T)$] qui donne le volume 1 au sous-groupe K [resp. K^T].

De même, pour tout $x \in T$, K_x est un sous-groupe ouvert compact de G_x, qui est unimodulaire. Soit donc dg_x la mesure de Haar sur G_x pour laquelle K_x est de volume 1. On a $dg = dg^T \times \prod_{x \in T} dg_x$.

Enfin, on remarque que $a^{\mathbb{Z}}$ s'identifie à un sous-groupe discret dans le centre de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^T)$].

Posons maintenant :

DÉFINITION 2. — *On appelle algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^T)$, resp. G_x pour $x \in T$] et on note $\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}^T$, resp. $\mathcal{H}_x$] la $\mathbb{Q}$-algèbre de convolution, pour la mesure dg [resp. dg^T, resp. dg_x] des fonctions localement constantes à support compact de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^T)$, resp. G_x] dans $\mathbb{Q}$.*

Et pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$ [resp. $I \hookrightarrow X \backslash T$], on note $\mathcal{H}_I$ [resp. $\mathcal{H}_I^T$] la sous-algèbre de $\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}^T$] des fonctions invariantes à gauche et à droite par K_I [resp. K_I^T].

Remarque : On a $\mathcal{H} = \mathcal{H}^T \otimes \bigotimes_{x \in T} \mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_I^T \otimes \bigotimes_{x \in T} \mathcal{H}_x$, pour $I \hookrightarrow X \backslash T$.

Par ailleurs, $\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}^T$] est la réunion filtrante des $\mathcal{H}_I$ [resp. $\mathcal{H}_I^T$].

Enfin, chaque $\mathcal{H}_I$ [resp. $\mathcal{H}_I^T$] admet pour élément neutre la fonction caractéristique de K_I [resp. K_I^T] fois la constante $\dfrac{1}{dg(K_I)} = [K : K_I]$ [resp. $\dfrac{1}{dg^T(K_I)} = [K^T : K_I^T] = [K : K_I]$].

c) Correspondances de Hecke

Sont toujours fixés T un sous-ensemble fini de X, a un élément de degré 1 dans $(\mathbb{A}^T)^\times$ et $r \geq 1$ un entier.

On rappelle que d'après le paragraphe I.1e, on dispose sur $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}$ de l'action de Hecke à droite du groupe $G(\mathbb{A}^T) = \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}}^T)$.

Enonçons :

PROPOSITION 3. — *Pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \backslash T$ et tout* *élément g du groupe $G(\mathbb{A}^T)$, le morphisme*

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\mathrm{Id},.g)} \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}}$$

est représentable affine.

Son image $\Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g)$ est un sous-champ fermé de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$.

De plus, les deux projections au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$

$$\Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g) \rightrightarrows \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}}$$

sont des morphismes représentables finis étales.

Démonstration : D'après la proposition 5 du paragraphe I.3, on sait, pour tout sous-schéma fermé fini $J \hookrightarrow X\backslash T$, qu'au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$ le morphisme $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},J}^{r}$ est représentable affine pro-fini galoisien de groupe K_J^T.

On en déduit immédiatement qu'au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$, le morphisme composé

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\mathrm{Id},.\mathrm{g})} \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}}$$

est représentable affine pro–fini.

Son image $\Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g)$ est un sous-champ fermé de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}}$.

De plus, le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g)$$

est représentable affine pro-fini galoisien de groupe $K_I \cap gK_Ig^{-1}$, tandis que les morphismes

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}/a^{\mathbb{Z}} \rightrightarrows \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}/a^{\mathbb{Z}}$$

sont représentables affines pro-finis galoisiens de groupes respectifs K_I et gK_Ig^{-1}.

Ceci termine la démonstration puisque $K_I \cap gK_Ig^{-1}$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini à la fois dans K_I et gK_Ig^{-1}. $\square$

Rappelons ici une définition générale.

Si $\mathcal{X}$ est un champ sur $\mathbb{F}_q$, on appelle correspondance finie étale dans $\mathcal{X}$ toute somme formelle finie

$$\sum_i \lambda_i[Y_i]$$

où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{Q}$ et les Y_i sont des champs munis de deux morphismes $p_i, q_i : Y_i \rightrightarrows \mathcal{X}$ qui sont représentables finis étales. Et on pose entre les correspondances finies étales sur $\mathcal{X}$ les relations formelles suivantes :

- si $Y \cong \coprod_i Y_i$ est une décomposition en somme disjointe, alors $[Y] = \sum_i [Y_i]$;
- si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{X} \\ & {}^{p'}\nearrow & \uparrow p \\ Y' & \xrightarrow{f} & Y \\ & {}_{q'}\searrow & \downarrow q \\ & & \mathcal{X} \end{array}$$

avec p, q, p', q', f représentables finis étales et f de degré constant $n \geq 1$, alors $[Y'] = n[Y]$.

On notera $\mathrm{Cor}(\mathcal{X})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ des correspondances finies étales dans un champ $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{F}_q$. Cet espace devient une $\mathbb{Q}$-algèbre si on définit le produit $[Y] \cdot [Y']$ de deux classes associées à des champs Y et Y' munis de morphismes représentables finis étales $p, q : Y \rightrightarrows \mathcal{X}$ et $p', q' : Y' \rightrightarrows \mathcal{X}$ comme la classe de $Y \times_{q,\mathcal{X},p'} Y'$ munie de $p \times p'$ et $q \times q'$.

On remarque que si $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ sont deux champs sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est un morphisme représentable fini étale de degré constant $n \geq 1$, alors l'application $[Y] \mapsto \frac{1}{n}[\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}']$ définit un homomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$\mathrm{Cor}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Cor}(\mathcal{X}').$$

En effet, la compatibilité au produit résulte de ce que si Y_1, Y_2 sont deux champs sur $\mathbb{F}_q$ munis de morphismes représentables finis étales : $Y_1 \rightrightarrows \mathcal{X}$ et $Y_2 \rightrightarrows \mathcal{X}$, alors on a un isomorphisme canonique

$$(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}') \times_{\mathcal{X}'} (\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_2 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}') = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_2 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$$

ainsi qu'un morphisme représentable fini étale de degré constant égal à n

$$\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_2 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Y_1 \times_{\mathcal{X}} Y_2 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \ .$$

Enfin, on remarque que d'après la proposition 3, chaque $\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g)$ définit au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$ une correspondance finie étale dans $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$.
Démontrons le lemme préparatoire suivant :

LEMME 4. — *Soit $I \hookrightarrow X \backslash T$ un sous-schéma fermé fini. Alors :*

(i) *Le sous-champ fermé au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$*

$$\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g) \hookrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

associé à tout élément g de $G(\mathbb{A}^T)$ ne dépend que de la classe de g dans $K_I^T \backslash G(\mathbb{A}^T)/K_I^T a^{\mathbb{Z}}$.

(ii) *Si g, g' sont deux éléments de $G(\mathbb{A}^T)$ et si on écrit la décomposition en classes dans $G(\mathbb{A}^T)$*

$$K_I^T g K_I^T g' K_I^T a^{\mathbb{Z}} = \coprod_i K_I^T g_i K_I^T a^{\mathbb{Z}} ,$$

on a un morphisme canonique représentable fini étale

$$\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g) \times_{\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}} \Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g') \longrightarrow \coprod_i \Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g_i)$$

qui au-dessus de chaque composante $\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g_i)$ est de degré constant égal au cardinal fini du quotient

$$(K_I^T g K_I^T a^{\mathbb{Z}} \cap g_i K_I^T g'^{-1} K_I^T a^{\mathbb{Z}})/K_I^T a^{\mathbb{Z}} .$$

(iii) *Si $J \hookrightarrow X \backslash T$ est un autre sous-schéma fermé fini avec $I \hookrightarrow J$, si g est un élément de $G(\mathbb{A}^T)$ et si on écrit la décomposition en classes dans $G(\mathbb{A}^T)$*

$$K_I^T g K_I^T a^{\mathbb{Z}} = \coprod_j K_J^T g_j K_J^T a^{\mathbb{Z}} ,$$

on a une décomposition canonique

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}} \Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g) \times_{\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_j \Gamma^r_{\mathcal{D},J}(g_j) .$$

Démonstration : Remarquons d'abord que pour $J \hookrightarrow X \backslash T$ un sous-schéma fermé fini, h un élément de $G(\mathbb{A}^T)$ et s_1, s_2 deux points de $\mathrm{Cht}^{r,T}_{\mathcal{D}}$ à valeurs dans un schéma S sur $\mathbb{F}_q$, l'image de (s_1, s_2) dans $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}}$ se factorise à travers le sous-champ fermé $\Gamma^r_{\mathcal{D},J}(h)$

si et seulement si localement pour la topologie f.p.q.c. de S, on a $s_2 \in s_1 K_J^T h K_J^T a^{\mathbb{Z}}$.

(i) et (iii) se déduisent immédiatement de ce fait.

Pour (ii) et toujours d'après la même remarque, on est amené à s'intéresser aux triplets (s_1, s_2, s_3) de points de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,T}$ à valeurs dans un schéma S qui vérifient

$$s_2 \in s_1 K_I^T g K_I^T a^{\mathbb{Z}}, \quad s_3 \in s_2 K_I^T g' K_I^T a^{\mathbb{Z}} .$$

Ces conditions impliquent en particulier

$$s_3 \in s_1 K_I^T g K_I^T g' K_I^T a^{\mathbb{Z}} .$$

D'où l'existence d'un morphisme canonique

$$\Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g) \times_{\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^r / a^{\mathbb{Z}}} \Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g') \longrightarrow \coprod_i \Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g_i) .$$

Ce morphisme est compatible aux couples de projections sur $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^r / a^{\mathbb{Z}}$, et on sait que ces projections sont représentables finies étales. Donc ce morphisme est lui-même représentable fini étale.

Maintenant, pour $s_3 = s_1 h$ avec $h \in K_I^T g K_I^T g' K_I^T a^{\mathbb{Z}}$, on n'a plus qu'à déterminer le nombre de classes $s_2 K_I^T a^{\mathbb{Z}}$ telles que

$$s_2 \in s_1 K_I^T g K_I^T a^{\mathbb{Z}}$$

et

$$s_3 \in s_2 K_I^T g' K_I^T a^{\mathbb{Z}} \Longleftrightarrow s_2 \in s_1 h K_I^T g'^{-1} K_I^T a^{\mathbb{Z}} .$$

Ce nombre est égal au cardinal fini du quotient

$$(K_I^T g K_I^T a^{\mathbb{Z}} \cap h K_I^T g'^{-1} K_I^T a^{\mathbb{Z}}) / K_I^T a^{\mathbb{Z}}$$

et il ne dépend que de la classe de h dans $K_I^T \backslash G(\mathbb{A}^T) / K_I^T a^{\mathbb{Z}}$.

Ceci termine la démonstration. □

Remarquons que pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \backslash T$ chaque élément f de $\mathcal{H}_I^T$ s'écrit de manière unique comme une somme finie

$$f = \sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{K_I^T g_i K_I^T}$$

où les λ_i sont des nombres rationnels non nuls, les $K_I^T g_i K_I^T$ sont des classes distinctes dans $K_I^T \backslash G(\mathbb{A}^T) / K_I^T$ et les $\mathbb{1}_{K_I^T g_i K_I^T}$ sont leurs fonctions caractéristiques dans $G(\mathbb{A}^T)$.

Ceci permet d'énoncer :

THÉORÈME 5. — *Pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \backslash T$, associons à toute fonction $f = \sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{K_I^T g_i K_I^T}$ la correspondance finie étale dans $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ définie comme la somme formelle*

$$\sum_i \lambda_i dg^T(K_I^T)[\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g_i)] \ .$$

Alors :

(i) *L'application ainsi définie*

$$\mathcal{H}_I^T \longrightarrow \mathrm{Cor}(\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}})$$

est un homomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres.

(ii) *Si $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X \backslash T$ sont deux sous-schémas fermés finis emboîtés, alors le diagramme de $\mathbb{Q}$-algèbres*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_I^T & \longrightarrow & \mathrm{Cor}(\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_J^T & \longrightarrow & \mathrm{Cor}(\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}}) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration : Cette application est bien définie d'après la proposition 3 et le lemme 4 (i).

(i) résulte du lemme 4 (ii).

(ii) Il existe bien un homomorphisme

$$\mathrm{Cor}(\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathrm{Cor}(\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}})$$

car d'après la proposition 5 du paragraphe I.3, le morphisme

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

est représentable fini étale galoisien avec pour groupe de Galois

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)] \cong K_I^T/K_J^T$$

donc de degré constant égal à l'indice $[K_I^T : K_J^T]$.

La commutativité du diagramme résulte du lemme 4 (iii) et de ce que $[K_I^T : K_J^T] = dg^T(K_I^T)/dg^T(K_J^T)$. $\square$

d) Sous-champs des points fixes

Enonçons :

PROPOSITION 6. — *Soient $I \hookrightarrow X\backslash T$ un sous-schéma fermé fini, g un élément de $G(\mathbb{A}^T)$ et u, s deux entiers ≥ 1.*

On se place au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)} \times_{(X\times X)} \Lambda$.

Soit $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)$ le champ obtenu comme produit fibré dans le carré 2-cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "(\mathrm{Frob}_0^u\ o\ \mathrm{Frob}_\infty^s ; \mathrm{Id})"] \\
\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g) \arrow[r, hook] & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} .
\end{tikzcd}$$

Alors $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)$ est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford, localement de type fini au-dessus du sous-schéma fermé fini des points fixes de $\mathrm{Frob}^u \times \mathrm{Frob}^s$ dans $X_{(T)} \times X_{(T)} \times_{(X\times X)} \Lambda$ qui est

$$\coprod_{x_1,x_2} (\mathrm{Spec}\, \kappa(x_1) \times \mathrm{Spec}\, \kappa(x_2))$$

où $x_1, x_2 \in T$, $x_1 \neq x_2$, $\deg(x_1)|u$, $\deg(x_2)|s$.

De plus, sa restriction au-dessus des (x_1,x_2) qui sont dans $X' \times X'$ est étale sur $\mathbb{F}_q$.

Démonstration : D'après le corollaire 6 du paragraphe I.3, $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford, localement de type fini au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)} \times_{(X\times X)} \Lambda$.

De plus, d'après la proposition 3, les deux projections $\Gamma^r_{\mathcal{D},I} \rightrightarrows \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ sont des morphismes représentables finis étales.

Enfin, on se rappelle que les deux morphismes Frob_0 et Frob_∞ sont au-dessus de $(\mathrm{Frob}, \mathrm{Id})$ et $(\mathrm{Id}, \mathrm{Frob})$ respectivement dans $X_{(T)} \times X_{(T)} \times_{(X\times X)} \Lambda$.

La première assertion est conséquence de ces remarques.

Pour la seconde assertion, il suffit d'appliquer la proposition 1 du paragraphe I.2 puisque :

• la restriction de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $\coprod_{(x_1,x_2)} \mathrm{Spec}\, \kappa(x_1) \times \mathrm{Spec}\, \kappa(x_2)$, quand $x_1, x_2 \in X' \cap T$, $x_1 \neq x_2$, $\deg(x_1)|u$, $\deg(x_2)|s$, est localement de type fini et lisse sur $\mathbb{F}_q$, d'après le théorème 9 du paragraphe I.2 ;

- la première projection $\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g) \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ est représentable étale ;
- et le morphisme

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_0^u \circ \mathrm{Frob}_\infty^s\,;\,\mathrm{Id})} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

peut être vu comme le composé de

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}\,;\,\mathrm{Id})} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

et de

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\mathrm{Frob}_0^{u-1} \circ \mathrm{Frob}_\infty^{s-1}\,;\,\mathrm{Id})} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}\,.$$

$\square$

Enfin, donnons :

LEMME 7. — *Soient $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X\backslash T$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés, g un élément de $G(\mathbb{A}^T)$ et u, s deux entiers ≥ 1.*

Alors, si on écrit la décomposition en classes dans $G(\mathbb{A}^T)$

$$K_I^T g K_I^T a^{\mathbb{Z}} = \coprod_j K_J^T g_j K_J^T a^{\mathbb{Z}}\ ,$$

on a un carré 2-cartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} \coprod_j \mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},J}(g_j, u, s) & \longrightarrow & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g, u, s) & \longrightarrow & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \end{array}\ .$$

Par conséquent, on a un morphisme canonique

$$\coprod_j \mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},J}(g_j, u, s) \longrightarrow \mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g, u, s)$$

qui est représentable fini étale galoisien de groupe de Galois

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)] \cong K_I^T / K_J^T\ .$$

Démonstration : La première assertion résulte du lemme 4 (iii).
La seconde s'en déduit alors d'après la proposition 5 du paragraphe I.3.

$\square$

Chapitre II

Chtoucas réductibles. Filtrations de Harder–Narasimhan

1. — $\mathcal{D}$–chtoucas réductibles. Sous–champs d'iceux

a) Définitions

LEMME 1. — *Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et* $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ *un $\mathcal{D}$-chtouca sur S dont le zéro $i_0 : S \to X$ et le pôle $i_\infty : S \to X$ sont à valeurs dans X'.*

Soit aussi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{E}'_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E}_1 & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E} & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Modules à droite sur $X \times S$ qui sont localement libres de type fini sur $\mathcal{O}_{X \times S}$, où les lignes sont exactes et les homomorphismes verticaux sont injectifs.

On suppose que $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}'_2$ sont localement libres de type fini sur $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$ ou bien que la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathcal{D}$ est maximale sur X tout entier.

Alors, S s'écrit de manière unique comme réunion disjointe de deux parties S_1 et S_2 à la fois ouvertes et fermées, telles que pour tout morphisme $S' \to S$, on ait la propriété suivante : $S' \to S$ se factorise à travers l'ouvert S_1 [resp.S_2] si et seulement si les images réciproques sur S' des deux flèches $\mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}'_2$ et ${}^{\tau}\mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}'_2$ [resp.$\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}'_1$ et ${}^{\tau}\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}'_1$] sont des isomorphismes.

Le diagramme $\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}'_1 \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_1 & & \end{pmatrix}$ $\left[\text{\textit{resp.}} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}'_2 \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_2 & & \end{pmatrix}\right]$ *définit alors sur S' un $\mathcal{D}$-chtouca ayant respectivement pour zéro et pour pôle les composés*

$S' \to S \xrightarrow{i_0} X$ et $S' \to S \xrightarrow{i_\infty} X$, et le diagramme $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_2 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}_2' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}_2 & & \end{array}\right)$

$\left[\textit{resp.} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}_1' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}_1 & & \end{array}\right)\right]$ *définit sur S' un $\mathcal{D}$–chtouca trivial.*

Démonstration : On remarque que l'on a sur $X \times S$ une suite exacte de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1'/\mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}'/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2'/\mathcal{E}_2 \longrightarrow 0\,.$$

Elle peut aussi être vue (via le morphisme $(i_\infty, \mathrm{Id}) : S \to X \times S$) comme une suite exacte de $i_\infty^*\mathcal{D}$–Modules sur S.

Et par hypothèse $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est localement libre de rang d sur $\mathcal{O}_S$.

On définit S_1 comme l'ouvert complémentaire du support du faisceau cohérent $\mathcal{E}_2'/\mathcal{E}_2$ et S_2 comme l'ouvert complémentaire du support du faisceau cohérent $\mathcal{E}_1'/\mathcal{E}_1$.

Puisque le support de $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est S tout entier, on voit déjà que S_1 et S_2 sont disjoints.

Montrons que leur réunion est tout. Il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos K.

Mais alors, comme i_∞ se factorise à travers X', on a un isomorphisme $i_\infty^*\mathcal{D} \cong M_d(K)$. Par équivalence de Morita, cet isomorphisme permet d'écrire la suite exacte ci–dessus comme la somme directe d fois d'une suite exacte d'espaces vectoriels sur K

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

où E est de dimension 1. D'où le résultat.

Revenons maintenant à S général.

Sur S_1, on a $\mathcal{E}_2'/\mathcal{E}_2 = 0$ et $\mathcal{E}_1'/\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est un isomorphisme.

D'autre part, on a aussi $\mathcal{E}_2'/{}^\tau\mathcal{E}_2 = 0$ sur S_1. En effet, il suffit de le vérifier lorsque $S_1 = S$ est le spectre d'un corps et dans ce cas cela résulte de ce que les fibrés $\mathcal{E}_2$ et ${}^\tau\mathcal{E}_2$ ont même degré. On en déduit que, sur S_1, $\mathcal{E}_1'/{}^\tau\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}'/{}^\tau\mathcal{E}$ est un isomorphisme.

De la même façon, on a sur S_2 : $\mathcal{E}_1'/\mathcal{E}_1 = 0$, $\mathcal{E}_1'/{}^\tau\mathcal{E}_1 = 0$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E} \to \mathcal{E}_2'/\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}'/{}^\tau\mathcal{E} \to \mathcal{E}_2'/{}^\tau\mathcal{E}_2$ sont des isomorphismes.

Il reste à prouver que dans le cas où $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$–Algèbre maximale, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_2'$ sont automatiquement localement libres sur $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$. Et ceci résulte de la proposition 7 du paragraphe I.3. $\square$

Le lemme 1 amène à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2. — *Soient r, r' deux entiers avec $1 \leq r' \leq r-1$. On note* $\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,r'}$ *[resp.* $\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,r-r'}$*] et on appelle champ des $\mathcal{D}$–chtoucas de rang r réductibles avec quotient trivial de rang r' [resp. avec sous–objet trivial de rang $r-r'$] le champ qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des diagrammes commutatifs de $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$–Modules à droite sur $X\times S$, localement libres*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_1' & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{E}_2' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E}_1' & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E}' & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E}_2' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où :

- $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{array}\right)$ *est un $\mathcal{D}$–chtouca de rang r sur S ;*
- *les lignes sont exactes ;*
- $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_2 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}_2' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_2 & & \end{array}\right)$ *[resp.* $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}_1' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_1 & & \end{array}\right)$*] est un $\mathcal{D}$–chtouca trivial de rang r' [resp. $r-r'$] sur S.*

□

On remarque aussitôt qu'on a des morphismes naturels de champs

$$\begin{aligned} \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,r'} &\longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r-r'} \times \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}}^{r'} \\ \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,r-r'} &\longrightarrow \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}}^{r-r'} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r'} \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,r'} &\longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r} \\ \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,r-r'} &\longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r}\,. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini, notons $\mathrm{Vec}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}$ [resp. $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}$] le champ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des suites exactes de $\mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S$–Modules à droite sur $I \times S$, localement libres de rangs $r - r'$, r et r' respectivement

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow 0$$

[resp. et qui de plus sont munies d'un isomorphisme avec

$$0 \longrightarrow {}^\tau\mathcal{F}_1 \longrightarrow {}^\tau\mathcal{F} \longrightarrow {}^\tau\mathcal{F}_2 \longrightarrow 0] .$$

Par ailleurs, pour tout anneau A, on note $P^{r,r'}(A)$ le groupe des automorphismes de A^r qui préservent la filtration canonique

$$0 \longrightarrow A^{r-r'} \longrightarrow A^r = A^{r-r'} \times A^{r'} \longrightarrow A^{r'} \longrightarrow 0 .$$

Lemme 3. — *Avec les notations ci–dessus, le champ* $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}$ *s'identifie au champ classifiant sur* $\mathbb{F}_q$ *du groupe fini* $P^{r,r'}(\mathcal{D}_I)$.

Démonstration : On a le carré 2–cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \text{(Frob,Id)} \\
\mathrm{Vec}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} & \xrightarrow{\text{(Id,Id)}} & \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} \times \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}
\end{array}$$

où le champ $\mathrm{Vec}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}$ s'identifie au champ classifiant sur $\mathbb{F}_q$ du schéma en groupes $S \longmapsto H^0(S, P^{r,r'}(\mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S))$, donc est lisse sur $\mathbb{F}_q$. D'après la proposition 1 du paragraphe I.2, le champ $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}$ est étale sur $\mathbb{F}_q$. Il reste à prouver que pour tout corps K algébriquement clos, le foncteur $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'}(\mathrm{Spec}\,K)$ est une équivalence, ce qui résulte du lemme 3 du paragraphe I.3 et du lemme 4 du paragraphe I.2. $\square$

Or, pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, on a au–dessus de $(X\backslash I) \times (X\backslash I)$ des morphismes canoniques

$$\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,r'} \longrightarrow \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} \qquad \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,r-r'} \longrightarrow \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} .$$

Définissons donc les champs $\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'}$ et $\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'}$ comme les produits fibrés dans les carrés 2–cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,r'} & \longrightarrow & \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/P^{r,r'}(\mathcal{D}_I) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,r-r'} & \longrightarrow & \mathrm{Tr}_{\mathcal{D}_I}^{r,r'} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/P^{r,r'}(\mathcal{D}_I) \end{array}$$

Comme dans la proposition 5 du paragraphe I.3, on obtient :

PROPOSITION 4. — *Soient r, r' deux entiers avec $1 \leq r' \leq r-1$, et $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$ deux sous–schémas fermés finis emboîtés de X.*

Alors on a au–dessus de $(X\backslash J) \times (X\backslash J)$ des morphismes canoniques

$$\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},J}^{r,r'} \longrightarrow \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'}$$
$$\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},J}^{r,r-r'} \longrightarrow \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'}$$

qui sont représentables finis étales galoisiens avec pour groupe de Galois le groupe fini

$$\mathrm{Ker}[P^{r,r'}(\mathcal{D}_J) \longrightarrow P^{r,r'}(\mathcal{D}_I)]\,.$$

$\square$

Et pour tout sous–schéma fermé $I \hookrightarrow X$, on remarque encore qu'on a au–dessus de $(X\backslash I) \times (X\backslash I)$ des morphismes

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} & \times & \mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r'} \\ \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'} & \longrightarrow & \mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} & \times & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'} \end{array}$$

$$\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r} \quad \text{et} \quad \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r}\,.$$

Or, d'après le théorème 2 du paragraphe I.3, on a la décomposition canonique en composantes connexes

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^{r'}_{\mathcal{D},I} &= \coprod_{E} \ \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \\ [\text{resp.}\ \mathrm{Tr}^{r-r'}_{\mathcal{D},I} &= \coprod_{E} \ \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E] \end{aligned}$$

où E décrit la famille des $\mathcal{D}$–Modules à droite sur X, localement libres de rang r' [resp. $r - r'$] et munis d'une structure de niveau I.

En prenant les images réciproques, on obtient une décomposition naturelle

$$\begin{aligned} \mathrm{Chtqtr}^{r,r'}_{\mathcal{D},I} &= \coprod_{E} \ \mathrm{Chtqtr}^{r,E}_{\mathcal{D},I} \\ [\text{resp. } \mathrm{Chtsotr}^{r,r-r'}_{\mathcal{D},I} &= \coprod_{E} \ \mathrm{Chtsotr}^{r,E}_{\mathcal{D},I}]\,. \end{aligned}$$

b) Les morphismes $\mathrm{Chtqtr}^{r,r'}_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}$ **et** $\mathrm{Chtsotr}^{r,r-r'}_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}$

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant :

Théorème 5. — *Soient r, r' deux entiers avec $1 \leq r' \leq r-1$, $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini de X, et $n \in \mathbb{Z}$ un entier.*

Alors, si E décrit la famille des $\mathcal{D}$–Modules à droite sur X, localement libres de rang r' [resp. $r - r'$] et de degré $\leq n$ [resp. $\geq n$], munis d'une structure de niveau I, *le morphisme*

$$\begin{aligned} \coprod_{E} \ \mathrm{Chtqtr}^{r,E}_{\mathcal{D},I} &\longrightarrow \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I} \\ [\textit{resp.}\ \coprod_{E} \ \mathrm{Chtsotr}^{r,E}_{\mathcal{D},I} &\longrightarrow \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}] \end{aligned}$$

est représentable, quasi–fini, non ramifié et séparé.

Autrement dit, chaque morphisme

$$\mathrm{Chtqtr}^{r,E}_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I} \quad [\textit{resp.}\ \mathrm{Chtsotr}^{r,E}_{\mathcal{D},I} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}]$$

est représentable, quasi–fini, non ramifié et séparé. Et d'autre part, la famille des $\mathrm{Chtqtr}^{r,E}_{\mathcal{D},I}$, $\deg E \leq n$ [resp. des $\mathrm{Chtsotr}^{r,E}_{\mathcal{D},I}$, $\deg E \geq n$] est finie au–dessus de chaque ouvert quasi–compact du champ $\mathrm{Cht}^{r}_{\mathcal{D},I}$.

$\square$

Avant de passer à la démonstration, donnons quelques définitions et résultats préliminaires.

DÉFINITION 6. — *Si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, on appelle $\mathcal{D}$–chtouca généralisé sur S tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[dr, "j"] & \\ & \mathcal{E}' \\ {}^{\tau}\mathcal{E} \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–Modules à droite sur $X \times S$ localement libres de type fini, tel que j et t sont des isomorphismes en dehors d'un schéma fini sur S.

Et si $\widetilde{\mathcal{E}}_1 = \left(\begin{tikzcd}[cramped] \mathcal{E}_1 \arrow[dr] & \\ & \mathcal{E}_1' \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$ *et* $\widetilde{\mathcal{E}}_2 = \left(\begin{tikzcd}[cramped] \mathcal{E}_2 \arrow[dr] & \\ & \mathcal{E}_2' \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$ *sont deux $\mathcal{D}$–chtoucas généralisés sur S, on appelle morphisme de $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ dans $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ tout couple d'homomorphismes $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$–linéaires $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$, $f' : \mathcal{E}_1' \to \mathcal{E}_2'$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_1 \arrow[dr] & & \arrow[r, "f"] & & \mathcal{E}_2 \arrow[dr] & \\ & \mathcal{E}_1' & & \arrow[r, "f'"] & & \mathcal{E}_2' \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_1 \arrow[ur] & & \arrow[r, "{}^{\tau}f"] & & {}^{\tau}\mathcal{E}_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

L'ensemble des morphismes de $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ dans $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ que l'on note

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1, \widetilde{\mathcal{E}}_2)\,.$$

□

Maintenant, on a :

PROPOSITION 7. — *Pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, pour tous $\mathcal{D}$–chtoucas généralisés $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ sur S, le foncteur*

$$(S' \longrightarrow S) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{O}_{S'},\ \widetilde{\mathcal{E}}_2 \otimes \mathcal{O}_{S'})$$

est représentable par un schéma en $\mathbb{F}_q$–espaces vectoriels sur S qui est fini et non ramifié, noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \cdot, \widetilde{\mathcal{E}}_2 \otimes \cdot)$.

Démonstration : Tout d'abord, on a le lemme suivant :

LEMME 8. — *Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ deux $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$–Modules à droite sur $X\times S$ qui sont de présentation finie, et tels que $\mathcal{F}_2$ soit plat sur $\mathcal{O}_S$. Alors le foncteur*

$$(S'\longrightarrow S)\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{O}_{S'},\ \mathcal{F}_2\otimes\mathcal{O}_{S'})$$

est représentable par un fibré vectoriel de type fini sur S, que l'on notera $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)$.

Démonstration du lemme 8 : D'après Grothendieck (cf. [EGA III] corollaire 7.7.8), le foncteur $(S'\to S)\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X\times S'}}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{O}_{S'},\ \mathcal{F}_2\otimes\mathcal{O}_{S'})$ est représentable par un fibré vectoriel sur S que l'on notera $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)$. De même, on dispose de fibrés vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)$ sur S. Alors le noyau des deux homomorphismes $\mathcal{O}_S$–linéaires

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)$$

$$\text{et}\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\cdot,\ \mathcal{F}_2\otimes\cdot)$$

induits respectivement par les homomorphismes de produit $\mathcal{F}_2\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{F}_1$, est encore un fibré vectoriel sur S, et il répond à la question posée. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 7 : Notons $\widetilde{\mathcal{E}}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}'_1 \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}_1 & & \end{pmatrix}$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}'_2 \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}_2 & & \end{pmatrix}$.

Les homomorphismes $\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}'_2$, $\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}'_1$, ${}^\tau\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}'_2$ et ${}^\tau\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}'_1$ induisent des homomorphismes $\mathcal{O}_S$–linéaires entre fibrés vectoriels sur S :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}_2\otimes\cdot) & \xrightarrow{j_2} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}'_2\otimes\cdot)\\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}'_2\otimes\cdot) & \xrightarrow{j_1} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}'_2\otimes\cdot)\\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^\tau\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ {}^\tau\mathcal{E}_2\otimes\cdot) & \xrightarrow{t_2} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^\tau\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}'_2\otimes\cdot)\\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}'_2\otimes\cdot) & \xrightarrow{t_1} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^\tau\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}'_2\otimes\cdot)
\end{array}$$

Par ailleurs, on a un homomorphisme $\mathcal{O}_S$–q–linéaire :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ \mathcal{E}_2\otimes\cdot)\xrightarrow{\tau}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^\tau\mathcal{E}_1\otimes\cdot,\ {}^\tau\mathcal{E}_2\otimes\cdot)$$

On remarque que j_2, j_1, t_2 et t_1 sont universellement injectifs, donc sont des immersions fermées.

On voit immédiatement sur les définitions que le foncteur $(S' \longrightarrow S) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \mathcal{O}_{S'}, \widetilde{\mathcal{E}}_2 \otimes \mathcal{O}_{S'})$ est représentable par le sous–schéma fermé de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}_1 \otimes \cdot,\ \mathcal{E}_2 \otimes \cdot) \times_S \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_1 \otimes \cdot, \mathcal{E}'_2 \otimes \cdot)$ défini par les équations $j_2(f) = j_1(f')$ et $t_2 \circ \tau(f) = t_1(f')$. Ce schéma est donc affine sur S.

Il est aussi projectif sur S, donc fini. Pour le voir, il suffit de montrer qu'il est aussi fermé dans le fibré projectif

$$\mathbb{P}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}_1 \otimes \cdot,\ \mathcal{E}_2 \otimes \cdot) \times_S \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_1 \otimes \cdot,\ \mathcal{E}'_2 \otimes \cdot) \oplus \mathbb{A}^1_S)\,.$$

Or en coordonnées homogènes, les équations s'écrivent

$$j_2(f/f_0) = j_1(f'/f_0) \quad t_2 \circ \tau(f/f_0) = t_1(f'/f_0)$$

soit encore $$j_2(f) = j_1(f') \qquad t_2 \circ \tau(f) = f_0^{q-1} t_1(f')$$

qui est impossible à réaliser avec $f_0 = 0$ et $(f, f') \neq (0,0)$.

Enfin, ce schéma est non ramifié sur S.

En effet, d'après l'équation $j_2(f) = j_1(f')$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \cdot,\ \widetilde{\mathcal{E}}_2 \otimes \cdot)$ est un sous–schéma fermé de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_1 \otimes \cdot,\ \mathcal{E}'_2 \otimes \cdot)$, donc aussi de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^{\tau}\mathcal{E}_1 \otimes \cdot,\ \mathcal{E}'_2 \otimes \cdot)$ via t_1, si bien que

$$\mathrm{d}t_1 : \Omega^1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^{\tau}\mathcal{E}_1 \otimes \cdot,\ \mathcal{E}'_2 \otimes \cdot)/S} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \cdot,\ \widetilde{\mathcal{E}}_2 \otimes \cdot)/S}$$

est un homomorphisme surjectif.

Or d'après l'équation $t_2 \circ \tau(f) = t_1(f')$, on a $\mathrm{d}t_1 = 0$ d'où

$$\Omega^1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \otimes \cdot,\ \widetilde{\mathcal{E}}_2 \otimes \cdot)/S} = 0$$

comme on voulait.

∎

Par ailleurs, prouvons :

LEMME 9. — *Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$, nœthérien, et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent localement libre sur $X \times S$.*

Alors il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout point algébrique $s = \mathrm{Spec}\,\kappa(s)$ de S, et pour tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur $X \times s$ plongé dans $\mathcal{E}_s$ [resp. quotient de $\mathcal{E}_s$], on a

$$\deg \mathcal{F} \leq n \qquad [\textit{resp.}\ \deg \mathcal{F} \geq n]\,.$$

Démonstration : Si m (parmi un nombre fini de possibilités) désigne le rang de $\mathcal{F}$, tout plongement $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}_s$ induit un plongement

$$\Lambda^m \mathcal{F} \hookrightarrow \Lambda^m \mathcal{E}_s$$

d'où une inclusion

$$H^0(X \times s,\ \Lambda^m \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(X \times s,\ \Lambda^m \mathcal{E}_s)$$

entre espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\kappa(s)$.

Or, d'après le théorème de Riemann–Roch, on a

$$\dim_{\kappa(s)} H^0(X \times s,\ \Lambda^m \mathcal{F}) \geq \deg \mathcal{F} - g + 1$$

où g désigne le genre de la courbe X.

Or la fonction $s \longmapsto \dim_{\kappa(s)} H^0(X \times s,\ \Lambda^m \mathcal{E}_s)$ ne dépend que du point image de s dans S, et comme fonction de ce point, elle est constructible. Comme S est nœthérien, on voit que cette fonction ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Ceci prouve que s'il existe un plongement $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}_s$, $\deg \mathcal{F}$ est uniformément majoré.

D'autre part, s'il existe un homomorphisme surjectif $\mathcal{E}_s \to \mathcal{F}$, il lui correspond un plongement entre fibrés duaux $\mathcal{F}^\vee \hookrightarrow \mathcal{E}_s^\vee$, donc $\deg \mathcal{F}^\vee = -\deg \mathcal{F}$ est uniformément majoré. $\square$

Démonstration du théorème 5 : On remarque d'abord qu'au–dessus de $(X \backslash I) \times (X \backslash I)$, on a un diagramme 2–commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,r'} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r} \end{array} \qquad \left[\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,r-r'} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r} \end{array} \right]$$

où les deux morphismes verticaux sont représentables finis étales.

Donc il suffit d'étudier le cas $I = \emptyset$.

On sait que l'ensemble des $\mathcal{D}$–Modules à droite E sur X, localement libres, de rang et de degré fixés et dont tout sous–$\mathcal{O}_X$–Module localement libre a son degré majoré par une constante fixée, est fini. Ainsi, l'assertion que la famille des $\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,E}$, $\deg E \leq n$ [resp. des $\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,E}$, $\deg E \geq n$] est finie au–dessus de tout ouvert quasi–compact de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r}$ est conséquence du lemme 9 ci–dessus.

Reste à prouver que chaque morphisme

$$\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,E} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r} \quad [\text{resp. } \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,E} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r}]$$

est représentable quasi–fini non ramifié et séparé.

On note que pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, le foncteur

$$\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,E}(S) \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r}(S) \quad [\text{resp. } \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,E}(S) \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r}(S)]$$

est fidèle. Comme le morphisme $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q \to \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q/\operatorname{Aut}E$ est représentable fini étale galoisien, il suffit donc de prouver qu'est représentable quasi–fini non ramifié le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,E} \times_{(\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q/\operatorname{Aut}E)} \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r} \\ [\text{resp. } \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,E} \times_{(\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q/\operatorname{Aut}E)} \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r}]\,. \end{array}$$

Ainsi, il s'agit de montrer que si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ est un $\mathcal{D}$–chtouca de rang r sur S, et $\widetilde{E} = E \boxtimes \mathcal{O}_S$ est le $\mathcal{D}$–chtouca trivial sur S induit par E, alors le foncteur qui à tout schéma $S' \to S$ sur S associe l'ensemble des morphismes de $\widetilde{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ dans $\widetilde{E} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ [resp. de $\widetilde{E} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ dans $\widetilde{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_{S'}$] tels que les homomorphismes $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S'} \to E \otimes \mathcal{O}_{S'}$ et $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{S'} \to E \otimes \mathcal{O}_{S'}$ soient surjectifs [resp. $E \otimes \mathcal{O}_{S'} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ et $E \otimes \mathcal{O}_{S'} \to \mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{S'}$ soient injectifs et aient leurs conoyaux localement libres, ce qui revient à dire que les homomorphismes duaux $\mathcal{E}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{S'} \to E^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ et $\mathcal{E}'^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{S'} \to E^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{S'}$ soient surjectifs] est représentable quasi–fini non ramifié et séparé sur S.

Ce foncteur s'envoie évidemment dans le foncteur

$$S_1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{E}} \otimes \cdot,\ \widetilde{E} \otimes \cdot) \quad [\text{resp. } S_1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{E} \otimes \cdot, \widetilde{\mathcal{E}} \otimes \cdot)]$$

qui d'après la proposition 7 est représentable fini non ramifié sur S.

Sur $S_1 \times X$, on a des homomorphismes canoniques

$$\begin{array}{lccccccc} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S_1} & \longrightarrow & E \otimes \mathcal{O}_{S_1} & \quad & \mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{S_1} & \longrightarrow & E \otimes \mathcal{O}_{S_1} \\ [\text{resp.} & E \otimes \mathcal{O}_{S_1} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S_1} & \quad & E \otimes \mathcal{O}_{S_1} & \longrightarrow & \mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{S_1} \quad] \end{array}$$

et pour tout morphisme $S' \to S_1$, on se demande quand–est–ce que les faisceaux conoyaux $\mathrm{Coker}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S_1} \to E \otimes \mathcal{O}_{S_1})$ et $\mathrm{Coker}(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{O}_{S_1} \to E \otimes \mathcal{O}_{S_1})$ [resp. $\mathrm{Coker}(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_{S_1} \to E^\vee \otimes \mathcal{O}_{S_1})$ et $\mathrm{Coker}(\mathcal{E}'^\vee \otimes \mathcal{O}_{S_1} \to E^\vee \otimes \mathcal{O}_{S_1})$] sont annulés par le changement de base $S' \to S_1$.

D'après le lemme de Nakayama et la propreté de X, cette condition est représentable par l'immersion ouverte dont l'image dans S_1 est le complémentaire de l'image des supports de ces faisceaux sur $X \times S_1$.

Ceci termine la démonstration. $\square$

Comme conséquence du théorème 5 ci–dessus et du corollaire 6 du paragraphe I.3, on a :

COROLLAIRE 10. — *Pour tous entiers r, r' avec $1 \leq r' \leq r-1$, tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$ et tout $\mathcal{D}$–Module à droite E sur X, localement libre de rang r' [resp. $r - r'$] et muni d'une structure de niveau I, le champ*

$$\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} \quad [\textit{resp. } \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,E}]$$

est un champ algébrique au sens de Deligne–Mumford, localement de type fini et séparé sur $\mathbb{F}_q$.

Il s'écrit comme réunion filtrante de sous–champs ouverts qui sont quotients de schémas quasi–projectifs sur $\mathbb{F}_q$ par l'action de groupes finis.

$\square$

c) Les morphismes $\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} \to \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\mathrm{Aut}\,E$ **et** $\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'}$

Enonçons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 11. — *Soient r, r' deux entiers avec $1 \leq r' \leq r-1$, $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini, et E un $\mathcal{D}$–Module à droite sur X, localement libre de rang r' [resp. $r - r'$], muni d'une structure de niveau I.*

Alors le morphisme

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \\ [\textit{resp.} & \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'} \quad] \end{array}$$

est de type fini et lisse de dimension relative $r'd$ [resp. $(r-r')d$].

$\square$

Avant de procéder à la démonstration, rassemblons quelques résultats préliminaires.

Tout d'abord, rappelons la notion de champ de Picard (cf. [SGA4], XVIII, paragraphe 1.4).

DÉFINITION 12 (Grothendieck). — *Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$.*

On appelle champ de Picard sur S tout champ $\mathcal{A}$ sur S muni d'un morphisme commutatif et associatif

$$+ : \mathcal{A} \times_S \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et d'un morphisme élément neutre $0 : S \to \mathcal{A}$, vérifiant les axiomes naturels.

Si $(\mathcal{A}, +)$ et $(\mathcal{B}, +)$ sont deux champs de Picard sur S, un morphisme de l'un dans l'autre est un morphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ muni d'un 2–isomorphisme de commutation des deux foncteurs composés dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \times_S \mathcal{A} \arrow[r, "+"] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[d] \\ \mathcal{B} \times_S \mathcal{B} \arrow[r, "+"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

et avec des compatibilités évidentes.

Par abus de langage, appelons noyau d'un tel morphisme le produit fibré sur $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $S \xrightarrow{0} \mathcal{B}$ dans la 2–catégorie des champs. C'est encore un champ de Picard sur S.

Un champ de Picard sur S est dit représentable s'il est isomorphe à un espace algébrique en groupes abéliens sur S.

Un morphisme $(\mathcal{A}, +) \to (\mathcal{B}, +)$ entre champs de Picard sur S est dit représentable si son noyau est représentable.

Un champ de Picard $(\mathcal{A}, +)$ sur S est dit algébrique s'il existe un champ de Picard représentable $(A, +)$ sur S et un morphisme $(A, +) \to (\mathcal{A}, +)$ représentable lisse de type fini.

On a le lemme suivant :

LEMME 13. — *Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$.*

(i) *Associons à tout complexe $\mathcal{A}^\cdot : \mathcal{A}^{-1} \xrightarrow{a} \mathcal{A}^0$ de faisceaux de groupes abéliens sur le grand site f.p.q.c. de S, concentré en degrés -1 et 0 le champ $\mathcal{A}$ défini par le S–espace en groupoïdes correspondant.*

Alors ce foncteur induit une équivalence de la catégorie dérivée desdits complexes dans la catégorie des champs de Picard sur S.

En particulier, on dispose de la notion de triangle de champs de Picard.

(ii) *Si $(\mathcal{A},+)$ est un champ de Picard sur S associé à un complexe $\mathcal{A}^{\cdot}$ comme dans* (i), *alors pour tout schéma S' sur S, le groupe des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{A}(S')$ s'identifie à $H^{\circ}(S',\mathcal{A}^{\cdot})$ et le groupe des automorphismes de n'importe quel objet s'identifie à $H^{-1}(S',\mathcal{A}^{\cdot})$.*

(iii) *Soit $(\mathcal{A},+) \to (\mathcal{B},+) \to (\mathcal{C},+) \to$ un triangle de champs de Picard sur S. Alors a fortiori $(\mathcal{A},+)$ est le noyau de $(\mathcal{B},+) \to (\mathcal{C},+)$, et localement pour la topologie f.p.q.c., les fibres du morphisme $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sont isomorphes à des fibres de $\mathcal{A} \to S$.*

En particulier, si $\mathcal{A}$ est représentable [resp. de type fini, resp. lisse de dimension relative n] il en est de même du morphisme $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

Démonstration :

(i) est prouvé dans [SGA4], XVIII, proposition 1.4.15.

(ii) est évident sur les définitions.

(iii) La première assertion est claire d'après [SGA4], XVIII, corollaire 1.4.17.

Pour la seconde, soient S' un schéma sur S et $S' \to \mathcal{C}$ un morphisme. D'après (ii) et l'hypothèse, il existe un recouvrement $S'' \to S'$ pour la topologie f.p.q.c. tel que $S'' \to S' \to \mathcal{C}$ se relève en $S'' \to \mathcal{B}$. Et le choix d'un tel relèvement détermine un isomorphisme induit par $+$

$$\mathcal{A} \times_S S'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \times_{\mathcal{C}} S'' .$$

La dernière assertion est conséquence immédiate des précédentes. $\square$

Maintenant, prouvons :

LEMME 14. — *Soit $\mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r,r'}$ le champ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des suites exactes de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-Modules à droite sur $X \times S$, localement libres de rangs $r-r', r$ et r' respectivement*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

dont la restriction à $I \times S$ est munie d'un isomorphisme avec la suite exacte canonique $0 \to \mathcal{D}_I^{r-r'} \boxtimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{D}_I^{r} \boxtimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{D}_I^{r'} \boxtimes \mathcal{O}_S \to 0$.

Alors le morphisme

$$\mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} \longrightarrow \mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r'}$$

est algébrique, de type fini et lisse.

Plus précisément, si S *est un schéma sur* $\mathbb{F}_q$ *et* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *sont deux objets de* $\mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r'}(S)$ *et* $\mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}(S)$ *respectivement, alors le champ* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *obtenu comme produit fibré dans le carré 2–cartésien*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
\mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} \arrow[r] & \mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \mathrm{Vec}_{\mathcal{D},I}^{r'}
\end{tikzcd}$$

est un champ de Picard sur S *qui localement pour la topologie de Zariski de* S *peut être représenté par un complexe* $\mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^0$ *de* $\mathcal{O}_S$*–Modules localement libres de type fini.*

En particulier, le champ $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *sur* S *est algébrique lisse de type fini.*

Démonstration : Introduisons sur $X\times S$ le faisceau $Hom_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ qui est localement libre de rang $r'(r-r')d^2$ sur $\mathcal{O}_{X\times S}$. Puis introduisons le faisceau $Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I} = Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I})$ où $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ est l'Idéal qui définit le sous–schéma fermé $I \hookrightarrow X$. Il est aussi localement libre de rang $r'(r-r')d^2$ sur $\mathcal{O}_{X\times S}$.

Alors, si $p : X \times S \to S$ désigne la projection, il est immédiat que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est le champ de Picard sur S associé à l'objet

$$Rp_*(Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}))[-1]$$

dans la catégorie des complexes concentrés en degrés -1 et 0. Le fait que localement sur S, il peut être représenté par un complexe de $\mathcal{O}_S$–Modules localement libres de type fini résulte d'un théorème de Grothendieck, cf. [Mumford] Chapitre II, § 5, puisque $Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est plat sur $\mathcal{O}_S$.

On conclut d'après le lemme 13 (iii). $\square$

LEMME 15. — *Soient* S *un schéma sur* $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *trois* $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$*–Modules à droites sur* $X \times S$*, localement libres de rangs* a, b *et* b*, avec structures de niveau* I*, et* $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ *un homomorphisme* $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$*–linéaire, injectif, dont le conoyau est supporté par le graphe d'un morphisme* $i : S \to X\backslash I$ *et tel que* $\mathcal{B}'/\mathcal{B}$ *[resp.* $Ext^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S)$*] est localement libre de rang* β *sur son support comme* $\mathcal{O}_S$*–Module.*

Alors on a un triangle de champs de Picard au-dessus de S

$$\begin{array}{llllll} & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}') & \longrightarrow \\ [\textit{resp.} & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B}',\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B},\mathcal{A}) & \longrightarrow \;] \end{array}$$

où $\mathcal{L}$ est le fibré associé au faisceau localement libre dual

$$\Big((i,\mathrm{Id})^* \mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{A},\mathcal{B}'/\mathcal{B})\Big)^\vee = \mathcal{H}om_{i_*\mathcal{D}}\Big((i,\mathrm{Id})^*\mathcal{A},\mathcal{B}'/\mathcal{B})\Big)^\vee$$

$$[\textit{resp.} \Big((i,\mathrm{Id})^* \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{A})\Big)^\vee\,].$$

En particulier, le morphisme

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}') \\ [\textit{resp.}\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B}',\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B},\mathcal{A})] \end{array}$$

est représentable de type fini lisse de dimension relative $a\beta$.

Remarque : Lorsque $i : S \longrightarrow X$ est à valeurs dans X', il est équivalent de demander que $\mathcal{B}'/\mathcal{B}$ ou que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S)$ soit localement libre de rang β comme $\mathcal{O}_S$–Module. Et dans ce cas, le faisceau $(i,\mathrm{Id})^*\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{A})$ s'identifie à $\mathcal{H}om_{i^*\mathcal{D}}(\mathcal{B}'/\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{O}_S} i^*\Omega^1_X, (i,\mathrm{Id})^*\mathcal{A})$ puisqu'alors $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{X\times S}}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{O}_S)$ s'identifie à $\mathcal{B}'/\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{O}_S} i^*\Omega^1_X$.

Démonstration du lemme 15 : On a une suite exacte de $\mathcal{O}_{X\times S}$–Modules :

$$0\to \mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}')\to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{A},\mathcal{B}'/\mathcal{B})\to 0$$

$$[\text{resp.}\ 0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B}',\mathcal{A})\to \mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B},\mathcal{A}) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{A}) \to 0]$$

En notant $p : X\times S\to S$ la projection, on en déduit un triangle dans la catégorie dérivée des complexes concentrés en degrés -1 et 0

$$(i,\mathrm{Id})^*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{A},\mathcal{B}'/\mathcal{B})\to Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B})[-1]\to Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}')[-1]$$

$$[\text{resp.}\ (i,\mathrm{Id})^*\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}'/\mathcal{B},\mathcal{A}) \to Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B}',\mathcal{A})[-1]\to Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B},\mathcal{A})[-1]]$$

d'où la première assertion puisque $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}')$ [resp. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B}',\mathcal{A})$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B},\mathcal{A})$] sont les champs de Picard associés à $Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B})[-1]$ et $Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{A},\mathcal{B}')[-1]$ [resp. $Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B}',\mathcal{A})[-1]$ et $Rp_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D},I}(\mathcal{B},\mathcal{A})[-1]$].

La seconde assertion en résulte d'après le lemme 13 (iii). $\square$

Démonstration du théorème 11 : Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $S \to \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E$ [resp. $S \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'}$] un morphisme. Il est constitué d'un objet $\begin{pmatrix} \mathcal{F} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{F}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{F} & & \end{pmatrix} = \widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}(S)$ [resp. $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'}(S)$] et d'un objet $\mathcal{E}$ de $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r'}(S)$ [resp. $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}(S)$] qui devient isomorphe à E au–dessus de chaque point géométrique de S.

Notons $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ [resp. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$] le champ fibre au–dessus de S du morphisme

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \\ [\text{resp.} & \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,E} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q/\,\mathrm{Aut}\,E \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'} \quad]. \end{array}$$

On remarque qu'on a un carré 2–cartésien

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \times_{\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},{}^{\tau}\mathcal{F}) \\ & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\tau)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \times_S \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},{}^{\tau}\mathcal{F}) \\ [\text{resp.} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) \times_{\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^{\tau}\mathcal{F},\mathcal{E})} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^{\tau}\mathcal{F}',\mathcal{E}) \\ & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\tau)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) \times_S \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^{\tau}\mathcal{F}',\mathcal{E}) \ ] \end{array}$$

où d'après le lemme 14 tous les champs $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(.\,,.\,)$ sont algébriques lisses et de type fini sur S, et d'après le lemme 15 le morphisme

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}') \\ [\text{resp.} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F},\mathcal{E}) \quad] \end{array}$$

est représentable et lisse de dimension relative $r'd$ [resp. $(r-r')d$].

On conclut en appliquant la proposition 1 du paragraphe I.2. $\square$

d) Les champs $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$

Commençons par introduire une nouvelle notion.

Considérons de manière générale Y un schéma et $\mathcal{U}$ un champ sur Y, algébrique au sens de Deligne–Mumford, localement de type fini et lisse. Et soit $Y \to \mathcal{U}$ une section de ce champ sur Y.

Par hypothèse, il existe $U_1 \to \mathcal{U}$ un recouvrement étale de $\mathcal{U}$ par un schéma lisse sur Y. Alors $Y_1 = Y \times_{\mathcal{U}} U_1$ est un recouvrement étale de Y, et le morphisme $Y_1 \to U_1 \times_Y Y_1$ est une section du morphisme lisse $U_1 \times_Y Y_1 \to Y_1$ qui relève la section $Y_1 \to \mathcal{U} \times_Y Y_1$ de $\mathcal{U} \times_Y Y_1 \to Y_1$.

Ainsi, $Y_1 \to U_1 \times_Y Y_1$ est une immersion régulière et comme telle admet un faisceau normal $\mathcal{N}_1$ sur Y_1.

De plus, si $U_2 \to \mathcal{U}$ est un autre recouvrement étale, avec $U_3 = U_1 \times_{\mathcal{U}} U_2$, $Y_2 = Y \times_{\mathcal{U}} U_2$, $Y_3 = Y \times_{\mathcal{U}} U_3 = Y_1 \times_Y Y_2$ et $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$ les faisceaux normaux correspondants, alors les sections $Y_1 \to U_1 \times_Y Y_1$ et $Y_2 \to U_2 \times_Y Y_2$ s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U_1 \times_Y Y_1 & \longleftarrow & U_3 \times_Y Y_3 & \longrightarrow & U_2 \times_Y Y_2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Y_1 & \longleftarrow & Y_3 & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont étales.

Il en résulte que sur Y_3 les trois faisceaux $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \mathcal{O}_{Y_3}$ et $\mathcal{N}_2 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_2}} \mathcal{O}_{Y_3}$ sont canoniquement isomorphes.

De ceci, il résulte d'une part que $\mathcal{N}_1$ est muni d'une donnée de descente relativement à $Y_1 \to Y$, donc qu'il provient d'un faisceau $\mathcal{N}$ sur Y, et d'autre part que ce faisceau $\mathcal{N}$ ne dépend pas du choix de U_1.

Le faisceau $\mathcal{N}$ ainsi défini sur Y est appelé le faisceau normal de la section $Y \to \mathcal{U}$ du morphisme lisse $\mathcal{U} \to Y$.

Comme sous–produit de la démonstration du théorème 11 (via celle de la proposition 1 du paragraphe I.2), on a :

COROLLAIRE 16. — *Soient r, r' deux entiers avec $1 \leq r' \leq r-1$, $I \hookrightarrow X$ un sous–schéma fermé fini.*

Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathcal{F} & & \\ & \searrow^{j} & \\ & & \mathcal{F}' \\ & \nearrow_{t} & \\ {}^{\tau}\mathcal{F} & & \end{pmatrix}$ *un objet de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}(S)$*

[resp. de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'}(S)$] et $\mathcal{E}$ un objet de $\mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r'}(S)$ [resp.$\mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}(S)$]. Alors la section triviale du morphisme de type fini lisse de dimension relative $r'd$

[*resp.* $(r-r')d$]

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D},I}^{r,r'} \times_{(\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}\times \mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r'})} S \longrightarrow S$$

$$[\textit{resp.}\quad \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E}) = \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D},I}^{r,r-r'} \times_{(\mathrm{Tr}_{\mathcal{D},I}^{r-r'}\times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r'})} S \longrightarrow S\ ]$$

admet pour faisceau normal le faisceau sur S

$$Hom_{i_\infty^*\mathcal{D}}\Big((i_\infty,\mathrm{Id})^*\mathcal{E},\ \mathcal{F}'/\mathcal{F}\Big)$$

[*resp.* $(i_0,\mathrm{Id})^* Ext^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}'/{}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})$ *qui s'identifie à* $Hom_{i_0^*\mathcal{D}}(\mathcal{F}'/{}^\tau\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_S} i_0^*\Omega^1_X,\ (i_0,\mathrm{Id})^*\mathcal{E})$ *lorsque* $i_0 : S\to X$ *est à valeur dans* X'].

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme 15 et la remarque qui le suit. $\square$

On a également :

PROPOSITION 17. — *Sous les hypothèses et avec les notations du corollaire* 16, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ [*resp.* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$] *est un champ de Picard sur S.*
Il s'inscrit naturellement dans un triangle de champs de Picard sur S

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \xrightarrow{j-t\circ\tau} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}') \longrightarrow$$

$$[\textit{resp.}\quad \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) \xrightarrow{t-\tau\circ j} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E}) \longrightarrow]$$

où j et t sont induits par les homomorphismes $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$–linéaires $\mathcal{F}\xrightarrow{j}\mathcal{F}'$ et ${}^\tau\mathcal{F}\xrightarrow{t}\mathcal{F}'$ et τ est induit par l'homomorphisme $\mathcal{D}\boxtimes\mathrm{Frob}_S$–linéaire $\mathcal{F}\xrightarrow{\tau}{}^\tau\mathcal{F}$.

Démonstration : Tout d'abord, il est évident sur les définitions que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ [resp. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$] s'identifie au noyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \xrightarrow{j-t\circ\tau} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')$$

$$[\text{resp.}\quad \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) \xrightarrow{t-\tau\circ j} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})].$$

Or, en notant $p : X\times S\to S$ la projection, on sait que cet homomorphisme est l'image par le foncteur $Rp_*(.)[-1]$ de l'homomorphisme de faisceaux sur $X\times S$

$$Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \xrightarrow{j-t\circ\tau} Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')$$

$$[\text{resp.}\quad Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) \xrightarrow{t-\tau\circ j} Hom_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})].$$

Par conséquent, il s'agit de montrer que l'homomorphisme de faisceaux sur S

$$\begin{array}{rccc} & R^1p_*Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \xrightarrow{j-t\circ\tau} & R^1p_*Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}') \\ \text{[resp.} & R^1p_*Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) & \xrightarrow{t-\tau\circ j} & R^1p_*Hom_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})] \end{array}$$

est surjectif.

Et pour cela, il suffit de montrer que le morphisme

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \xrightarrow{j-t\circ\tau} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}') \\ \text{[resp.} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) & \xrightarrow{t-\tau\circ j} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})]\,. \end{array}$$

est lisse.

Considérons donc S' un schéma sur S et $s' : S' \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')$ [resp. $s' : S' \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})$] un point à valeur dans S'. Il s'agit de prouver que la fibre de $j - t\circ\tau$ [resp. $t - \tau\circ j$] au–dessus de s' est lisse sur S'. Pour simplifier les notations, on peut supposer que $S' = S$ et noter $s' = s$. Alors cela résulte des lemmes 14 et 15 et de la proposition 1 du paragraphe I.2 puisqu'on a un carré 2–cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})\times_{\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')}S & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})\times_{j(\cdot)+s,\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}'),t}\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},{}^\tau\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\tau)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})\times_S \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},{}^\tau\mathcal{F}) \end{array}$$

[respectivement :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E})\times_{\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})}S & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E})\times_{t(\cdot)+s,\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E}),j}\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F}',\mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\tau)} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E})\times_S \mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F}',\mathcal{E})] \end{array}$$

$\square$

Afin d'exploiter cette proposition dans le cas où S est un point géométrique, on a besoin du lemme algébrique suivant :

LEMME 18. — *Soient K un corps sur $\mathbb{F}_q$, algébriquement clos, U et V deux espaces vectoriels sur K de dimension finie, $\lambda : U \to V$ un homomorphisme linéaire et $\psi : U \to V$ un homomorphisme q-linéaire. Alors :*

(i) *Si λ est injectif, le schéma en groupes* $\mathrm{Ker}(\lambda - \psi)$ *est discret ; il s'identifie à un sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de U tel que* $\mathrm{Ker}(\lambda-\psi)\otimes_{\mathbb{F}_q} K \to U$ *est injectif ; en particulier, le rang sur $\mathbb{F}_q$ de* $\mathrm{Ker}(\lambda - \psi)$ *est majoré par la dimension sur K de U. De plus, le schéma en groupes commutatifs quotient* $\mathrm{Coker}(\lambda-\psi)$ *est unipotent et isomorphe (non canoniquement) à* $\mathrm{Coker}(\lambda)$.

(ii) *Si λ et ψ sont bijectifs, il existe une base $u_1, \ldots, u_n$ de U et une base $v_1, \ldots, v_n$ de V telles que*

$$\lambda(u_i) = v_i, \quad \psi(u_i) = v_i, \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq n .$$

(iii) *Si λ est surjectif, la composante neutre du schéma en groupes commutatifs* $\mathrm{Ker}(\lambda - \psi)$ *est unipotente et isomorphe (non canoniquement) à* $\mathrm{Ker}(\lambda)$.

(iv) *Factorisons ψ canoniquement en $U \xrightarrow{\tau} {}^{\tau}U \xrightarrow{\mu} V$ où τ est l'isomorphisme de Frobenius et μ est un homomorphisme linéaire avec donc des diagrammes*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\tau"] & V \\ {}^{\tau}U \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} {}^{t}U \arrow[d, "\tau"] & {}^{t}V \arrow[l, "{}^{t}\lambda"'] \arrow[dl, "{}^{t}\mu"] \\ {}^{\tau}({}^{t}U) & \end{tikzcd} .$$

Alors, si λ et μ sont surjectifs [resp. injectifs], la restriction à $\mathrm{Ker}(\lambda - \mu \circ \tau) \times \mathrm{Ker}({}^{\tau}\mu - \tau \circ {}^{t}\lambda)$ *de la forme bilinéaire*

$$U \times {}^{t}V \longrightarrow K \qquad (u, v^*) \longmapsto < v^*, \lambda(u) > = < {}^{t}\lambda(v^*), u >$$

est à valeurs dans $\mathbb{F}_q$, et elle induit une dualité parfaite entre la partie discrète de $\mathrm{Ker}(\lambda - \mu \circ \tau)$ *(c'est-à-dire son quotient par sa composante neutre) et le groupe discret* $\mathrm{Ker}({}^{t}\mu - \tau \circ {}^{t}\lambda)$ *[resp. entre le groupe discret* $\mathrm{Ker}(\lambda - \mu \circ \tau)$ *et la partie discrète de* $\mathrm{Ker}({}^{t}\mu - \tau \circ {}^{t}\lambda)$*].*

Démonstration :

(i) $\mathrm{Ker}(\lambda-\psi)$ est discret et étale sur K car c'est le noyau d'un homomorphisme séparable entre schémas en groupes lisses dont la différentielle $\mathrm{d}(\lambda-\psi)=\lambda$ est injective.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\lambda-\psi)$ s'identifie à l'ensemble de ses points sur K, c'est-à-dire à un sous-groupe de U.

Le fait que $\mathrm{Ker}(\lambda-\psi)\otimes_{\mathbb{F}_q} K \to U$ est injectif a déjà été montré dans le lemme 4 du paragraphe I.3.

Pour la seconde assertion, choisissons W un supplémentaire dans V de $\mathrm{Im}(\lambda)$. Alors l'homomorphisme induit $W \to \mathrm{Coker}(\lambda)$ est un isomorphisme. Par conséquent, l'homomorphisme de schémas en groupes commutatifs $\mathbb{F}_q$-linéaires

$$W \longrightarrow \mathrm{Coker}(\lambda-\psi)$$

est étale. Comme $\mathrm{Coker}(\lambda-\psi)$ est connexe, cet homomorphisme est surjectif et son noyau est un sous-groupe discret $\mathbb{F}_q$-linéaire de W.

Il s'agit donc de prouver que tout quotient de W par un sous-groupe discret $\mathbb{F}_q$-linéaire G est isomorphe à W comme schéma en groupes commutatifs $\mathbb{F}_q$-linéaires.

Si $G=0$, il n'y a rien à prouver.

Dans le cas contraire, choisissons $f_1 \neq 0$ dans G, et complétons f_1 en une base $f_1,\ldots,f_k$ de W.

Alors l'homomorphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire

$$W \longrightarrow W \qquad y_1f_1+\cdots+y_kf_k \longmapsto (y_1^q-y_1)f_1+y_2f_2+\cdots+y_kf_k$$

a pour noyau $\mathbb{F}_q f_1 \subset G$.

Donc l'homomorphisme de projection $W \to W/G$ se factorise à travers cet homomorphisme $W\to W$, et W/G apparaît comme un quotient de W cette fois par $G/\mathbb{F}_q f_1$. D'où le résultat par récurrence sur le cardinal de G.

(ii) Cela a déjà été démontré dans le lemme 4 du paragraphe I.3.

(iii) On fait une démonstration par récurrence sur la dimension de U.

Si $\mathrm{Ker}\,\psi \subset \mathrm{Ker}\,\lambda$, on a nécessairement $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Ker}\,\lambda$ puisque λ est surjective. Posons alors $U_2 = U/\mathrm{Ker}\,\lambda$. Les homomorphismes induits λ_2, $\psi_2 : U_2 \to V$ sont bijectifs, donc d'après (i), $\mathrm{Ker}(\lambda_2-\psi_2)$ est discret. De plus, on a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\lambda \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda-\psi) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda_2-\psi_2) \longrightarrow 0$$

d'où le résultat dans ce cas.

Dans le cas contraire, il existe $u_1 \in \mathrm{Ker}\,\psi$ tel que $v_1 = \lambda(u_1)$ soit non nul.

Posons $U_1 = Ku_1$, $V_1 = Kv_1$, $U_2 = U/U_1$, $V_2 = V/V_1$. Et soient λ_1, $\psi_1 : U_1 \to V_1$ et λ_2, $\psi_2 : U_2 \to V_2$ les homomorphismes induits.

Le lemme du serpent nous donne immédiatement deux suites exactes :

$$\begin{array}{llllllll}
0 = \operatorname{Ker}\lambda_1 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\lambda & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\lambda_2 & \longrightarrow & \operatorname{Coker}\lambda_1 = 0 \\
0 = \operatorname{Ker}(\lambda_1 - \psi_1) & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\lambda - \psi) & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\lambda_2 - \psi_2) & \longrightarrow & \operatorname{Coker}(\lambda_2 - \psi_2) = 0
\end{array}$$

Le résultat pour $\lambda - \psi$ se déduit donc de celui pour $\lambda_2 - \psi_2$.

Afin de préparer la démonstration de (iv), étudions un isomorphisme comme nous venons d'en construire :

$$\operatorname{Ker}\lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(\lambda - \psi)^0 \qquad u \longmapsto e(u)$$

Pour tout élément u de $\operatorname{Ker}\lambda$, l'homomorphisme composé

$$K \longrightarrow \operatorname{Ker}\lambda \longrightarrow \operatorname{Ker}(\lambda - \psi) \quad \alpha \longmapsto e(\alpha u)$$

est nécessairement de la forme

$$\alpha \longmapsto \alpha u^{(0)} + \alpha^q u^{(1)} + \alpha^{q^2} u^{(2)} + \cdots$$

puisqu'il est $\mathbb{F}_q$–linéaire.

Les $u^{(i)}$ sont nuls à partir d'un certain rang et on a $u^{(0)} = u$ puisque la différentielle de e en 0 est l'identité de $\operatorname{Ker}\lambda$. Chaque application $u \longmapsto u^{(i)}$ $\operatorname{Ker}\lambda \to U$ est q^i–linéaire. Enfin, comme $\alpha \longmapsto e(\alpha u)$ est à valeurs dans $\operatorname{Ker}(\lambda - \psi)$, on trouve

$$\psi(u^{(i)}) = \lambda(u^{(i+1)}), \quad \forall i \geq 0\,.$$

Notons U^0 le sous–espace de U engendré par les $u^{(i)}$, $u \in \operatorname{Ker}\lambda$, $i \geq 0$, et V^0 son image par ψ ou λ. Alors les homomorphismes induits λ_0, ψ_0, $\lambda_0 - \psi_0 : U^0 \to V^0$ sont tous trois surjectifs.

Notons $\overline{U} = U/U^0$, $\overline{V} = V/V^0$ et $\overline{\lambda}$, $\overline{\psi} : \overline{U} \to \overline{V}$ les homomorphismes induits. Le lemme du serpent nous donne une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \to & \operatorname{Ker}\lambda_0 & \to & \operatorname{Ker}\lambda & \to & \operatorname{Ker}\overline{\lambda} & \to & \operatorname{Coker}\lambda_0 & \to & \operatorname{Coker}\lambda & \to & \operatorname{Coker}\overline{\lambda} & \to 0 \\
& \| & & & & & & \| & & \| & & & \\
& \operatorname{Ker}\lambda & & & & & & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

donc $\overline{\lambda} : \overline{U} \to \overline{V}$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que ψ aussi est surjectif. Alors $\overline{\psi} : \overline{U} \to \overline{V}$ est surjectif, donc bijectif. D'après (ii), il existe une base $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k$ de $\overline{U}$ formée d'éléments du sous–groupe discret $\mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - \overline{\psi})$. Or, comme $\lambda_0 - \psi_0$ est surjectif et d'après le lemme du serpent, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda_0 - \psi_0) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda - \psi) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - \overline{\psi}) \longrightarrow 0\,.$$

Choisissons des éléments $u_1, \ldots, u_k$ dans $\mathrm{Ker}(\lambda - \psi)$ qui relèvent $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k$, soient $v_1, \ldots, v_k$ leurs images par λ ou ψ, et notons $U^d \subset U$ et $V^d \subset V$ les sous–espaces engendrés. On a obtenu des décompositions en sommes directes

$$U = U^0 \oplus U^d \qquad V = V^0 \oplus V^d$$

telles que λ et ψ induisent des isomorphismes de U^d sur V^d.

Démontrons maintenant (iv).

Il suffit d'étudier le cas où λ et $\psi = \mu \circ \tau$ sont surjectives, l'autre cas étant sa traduction en termes duaux.

Montrons d'abord que si $u \in \mathrm{Ker}(\lambda - \mu \circ \tau)$ et $v^* \in \mathrm{Ker}({}^t\mu - \tau \circ {}^t\lambda)$, on a

$$< v^*,\ \lambda(u) > \in \mathbb{F}_q\,.$$

Calculons

$$\begin{aligned} < v^*, \lambda(u) > = < v^*, \mu \circ \tau(u) > &= < {}^t\mu(v^*), \tau(u) > \\ &= < \tau \circ {}^t\lambda(v^*), \tau(u) > = (< {}^t\lambda(v^*), u >)^q \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On en déduit par continuité que si $v^* \in \mathrm{Ker}({}^t\mu - \tau \circ {}^t\lambda)$, alors

$$< v^*, \lambda(u) > = 0, \quad \forall u \in \mathrm{Ker}(\lambda - \psi)^0\,.$$

Cela s'écrit encore

$$\forall u \in \mathrm{Ker}\,\lambda\,,\ \forall \alpha \in K\,,\ \sum_{i \geq 0} \alpha^{q^i} < v^*\,,\ \lambda(u^{(i)}) > = 0$$

et donc la forme linéaire $< v^*, \lambda(\cdot) >$ s'annule sur l'espace engendré par les $u^{(i)}$, c'est–à–dire U^0.

On est donc ramené au cas où $U = U^d$, $V = V^d$, autrement dit où $\lambda,\ \psi : U \longrightarrow V$ sont tous deux bijectifs, et l'assertion (iv) devient alors évidente puisqu'il existe des bases $u_1, \ldots, u_k$ et $v_1, \ldots, v_k$ de U^d et V^d vérifiant

$$\lambda(u_i) = v_i = \psi(u_i), \quad 1 \leq i \leq k\,.$$

Ceci termine la démonstration. $\square$

Du lemme 18 ci–dessus et de la proposition 17, on déduit maintenant :

THÉORÈME 19. — *Avec les hypothèses et notations du corollaire 16, supposons que S est un point géométrique, c'est–à–dire le spectre d'un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$.*

(i) *Alors le champ* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ [*resp.* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$] *sur S est algébrique au sens de Deligne–Mumford, de type fini et lisse de dimension $r'd$ [resp. $(r-r')d$].*
De plus, l'espace grossier associé à ce champ est représentable. C'est un schéma en groupes commutatifs, de type fini et lisse.

(ii) *La composante neutre de ce schéma en groupes est unipotente. Son algèbre de Lie est canoniquement isomorphe à*

$$\mathrm{Hom}_{i_\infty^*\mathcal{D}}((i_\infty,\mathrm{Id})^*\mathcal{E},\mathcal{F}'/\mathcal{F})$$

[*resp.* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}'/{}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})$ *qui s'identifie à* $\mathrm{Hom}_{i_0^*\mathcal{D}}(\mathcal{F}'/{}^\tau\mathcal{F}\otimes i_0^*\Omega^1_X,\ (i_0,\mathrm{Id})^*\mathcal{E})$ *lorsque le zéro i_0 est dans X'*].

Elle possède une filtration canonique à deux termes où le sous–groupe est isomorphe (non canoniquement) à

$$\mathrm{Coker}(H^0(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}))\xrightarrow{j}H^0(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')))$$
$$[resp.\ \mathrm{Coker}(H^0(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}))\xrightarrow{t}H^0(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})))]$$

et le groupe quotient est isomorphe (non canoniquement) à

$$\mathrm{Ker}(H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}))\xrightarrow{j}H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')))$$
$$[resp.\ \mathrm{Ker}(H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E}))\xrightarrow{t}H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}({}^\tau\mathcal{F},\mathcal{E})))]\,.$$

(iii) Par ailleurs, la partie discrète de ce schéma en groupes (c'est–à–dire le groupe de ses composantes connexes) est canoniquement isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X,\tau}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}}),\ \Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S)$$
$$[resp.\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X,\tau}(Hom_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E}),\ \Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S)]$$

où Ω^1_X est le faisceau canonique des différentielles sur X, $\mathcal{I}$ est l'Idéal annulateur de I dans $\mathcal{O}_X$, et $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ [resp. $Hom_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$] désigne le

$\mathcal{O}_X$-chtouca à droite [resp. à gauche] généralisé :

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & & & & Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F},\mathcal{E}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F}') \ [\text{resp. } Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}',\mathcal{E}) & & \qquad] \\ & \nearrow & & \searrow & \\ Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},{}^{\tau}\mathcal{F}) & & & & Hom_{\mathcal{D}}({}^{\tau}\mathcal{F},\mathcal{E}) \end{array}$$

(iv) Enfin, le groupe de structure de la gerbe $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}})$ *[resp.* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D},I}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E})$*] sur son espace grossier est canoniquement isomorphe à*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{I})$$
$$[\textit{resp.}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D},\tau}(\widetilde{\mathcal{F}},\mathcal{E}\otimes\mathcal{I})\,.]$$

Démonstration : Seule l'assertion (iii) demande une explication supplémentaire. Il faut vérifier que les homomorphismes duaux de

$$\begin{array}{lccc} & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F})) & \xrightarrow{j_1} & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')) \\ & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},{}^{\tau}\mathcal{F})) & \xrightarrow{t_1} & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{E},\mathcal{F}')) \\ [\text{resp.} & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E})) & \xrightarrow{t_1} & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}({}^{\tau}\mathcal{F},\mathcal{E})) \\ & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F}',\mathcal{E})) & \xrightarrow{j_1} & H^1(X_S;Hom_{\mathcal{D},I}(\mathcal{F},\mathcal{E}))] \end{array}$$

sont

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F}'),\Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F}), \\ & & \quad \Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) \\ \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{F}'),\Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},{}^{\tau}\mathcal{F}), \\ & & \quad \Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) \\ [\text{resp.}\,\mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}({}^{\tau}\mathcal{F},\mathcal{E}),\Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}',\mathcal{E}), \\ & & \quad \Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) \\ \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}',\mathcal{E}), \\ & & \quad \Omega^1_X\otimes\mathcal{I}^{-1}\otimes\mathcal{O}_S)]\,. \end{array}$$

Or, ceci n'est autre que la dualité de Serre. $\square$

2. — Filtrations canoniques de Harder–Narasimhan. Applications

a) Pentes. Filtrations canoniques de Harder–Narasimhan

On commence par des considérations générales.

DÉFINITION 1. —
• *On appelle catégorie à pentes une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ munie de deux applications*

$$\mathrm{rg} : \mathrm{Ob}\ \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \deg : \mathrm{Ob}\ \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui sont additives au sens que pour toute suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ *dans $\mathcal{A}$, on a*

$$\mathrm{rg}\ B = \mathrm{rg}\ A + \mathrm{rg}\ C \quad et \quad \deg B = \deg A + \deg C\,.$$

• *Pour tout objet A de $\mathcal{A}$ avec* $\mathrm{rg}\ A \geq 1$, *on appelle pente de A et on note $\mu(A)$ le quotient* $\deg A / \mathrm{rg}\ A$.
• *Si A est un objet de $\mathcal{A}$ et $0 = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_\ell = A$ est une filtration de A avec* $\mathrm{rg}\ A_0 < \mathrm{rg}\ A_1 < \cdots < \mathrm{rg}\ A_\ell$, *on appelle polygone de cette filtration l'application continue*

$$[0,\ \mathrm{rg}\ A] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui s'annule aux points 0 *et* $\mathrm{rg}\, A$ *et qui sur chaque intervalle* $[\mathrm{rg}\, A_{i-1},\ \mathrm{rg}\, A_i]$, $1 \leq i \leq \ell$, *est affine de pente $\mu(A_i/A_{i-1}) - \mu(A)$.*
• *Si A est un objet de $\mathcal{A}$ avec* $\mathrm{rg}\ A \geq 1$, *et $\mathfrak{a}$ une famille de sous–objets de A, $\mathfrak{a}$ sera dite bonne si :*

(i) *$\mathfrak{a}$ est stable par intersections finies et sommes finies ;*

(ii) *$\mathfrak{a}$ est nœthérienne au sens que toute suite croissante d'éléments de $\mathfrak{a}$ est stationnaire ;*

(iii) *si $A_1 \in \mathfrak{a}$, on a : $A_1 \neq 0 \Longleftrightarrow$* $\mathrm{rg}\ A_1 \geq 1$ *;*

(iv) *si A_1, A_2 sont éléments de $\mathfrak{a}$, on a (le signe $\wedge$ signifiant "et")*

$$\mathrm{rg}\ A_1 = \mathrm{rg}\ A_2 \wedge A_1 \subsetneq A_2 \Longrightarrow \deg A_1 < \deg A_2\,.$$

• *Pour un tel couple $(A, \mathfrak{a})$, on note*

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(A_1),\ A_1 \in \mathfrak{a} \wedge \mathrm{rg}\ A_1 \geq 1\}$$
$$\mu^-(A) = \inf\{\mu(A/A_1),\ A_1 \in \mathfrak{a} \wedge \mathrm{rg} A_1 < \mathrm{rg}\ A\}\,.$$

On dit que $(A, \mathfrak{a})$ *est semi-stable si*

$$\mu^+(A) = \mu(A) = \mu^-(A) .$$

Si rg $A = 0$, *on convient de noter* $\mu^+(A) = -\infty$, $\mu^-(A) = +\infty$.

Faisons quelques remarques.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie à pentes, A un objet de $\mathcal{A}$, et $\mathfrak{a}$ une bonne famille de sous–objets de A, on pourra appeler maximaux les éléments A_1 de $\mathfrak{a}$ qui vérifient

$$A_2 \in \mathfrak{a} \quad \wedge \quad A_1 \subseteq A_2 \quad \wedge \quad \mathrm{rg}\, A_1 = \mathrm{rg}\, A_2 \Longrightarrow A_1 = A_2 .$$

La propriété (iii) exprime que 0 est maximal. D'après la propriété (ii), tout élément de $\mathfrak{a}$ est contenu dans un élément maximal de même rang, et d'après (iv) on peut dans la définition de $\mu^+(A)$ et $\mu^-(A)$ se cantonner aux A_1 qui sont maximaux.

D'autre part, on a toujours $\mu^+(A) \geq \mu(A) \geq \mu^-(A)$ ainsi que l'équivalence $\mu^+(A) = \mu(A) \Longleftrightarrow \mu^-(A) = \mu(A)$.

D'autre part enfin, si A_1 est un élément maximal de $\mathfrak{a}$ et $A_2 \supsetneq A_1$ est un élément de $\mathfrak{a}$, la famille des B/A_1, $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$, $B \in \mathfrak{a}$, est une bonne famille de sous–objets de A_2/A_1. Tout tel quotient A_2/A_1 sera implicitement muni de cette bonne famille.

Maintenant, on peut énoncer :

PROPOSITION 2. — *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie à pentes, A un objet de $\mathcal{A}$, et $\mathfrak{a}$ une bonne famille de sous–objets de A. Alors :*

(i) *A possède une unique filtration par des éléments de $\mathfrak{a}$*

$$0 = \overline{A}_0 \subsetneq \overline{A}_1 \subsetneq \cdots \overline{A}_{k-1} \subsetneq \overline{A}_k = A$$

telle que :

- *les $\overline{A}_i$, $0 \leq i \leq k$, sont des éléments maximaux de $\mathfrak{a}$;*
- *chacun des quotients $\overline{A}_i/\overline{A}_{i-1}$ est semi-stable ;*
- $\mu(\overline{A}_1/\overline{A}_0) > \mu(\overline{A}_2/\overline{A}_1) > \cdots > \mu(\overline{A}_k/\overline{A}_{k-1})$.

On l'appelle la filtration canonique (de Harder–Narasimhan) de $(A, \mathfrak{a})$.

(ii) *Si $\overline{p} = \overline{p}^A$ désigne le polygone de cette filtration canonique, il majore les polygones de toutes les filtrations de A par des éléments de $\mathfrak{a}$.*

(iii) *Pour tout $A_1 \in \mathfrak{a}$, on a* $\mathrm{rg}\, A_1 \geq 1 \Longrightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A) + \frac{\overline{p}(\mathrm{rg}\, A_1)}{\mathrm{rg}\, A_1}$.

(iv) *Le polygone $\overline{p}$ est concave, de pente maximale $\mu^+(A) - \mu(A)$, et de pente minimale $\mu^-(A) - \mu(A)$.*

(v) *Si* $(A', \mathfrak{a}')$ *est un autre objet de* $\mathcal{A}$, *muni d'une bonne famille de sous–objets, et si* $u : A \to A'$ *est un homomorphisme tel que* $\operatorname{Ker} u \in \mathfrak{a}$ *et* $\operatorname{Im} u \in \mathfrak{a}'$, *alors*

$$\mu^-(A) > \mu^+(A') \Longrightarrow u = 0\,.$$

Démonstration :

(i) On raisonne par récurrence sur $r = \operatorname{rg} A$.

Pour tout entier r', $1 \leq r' \leq r$, notons

$$\mu^+_{r'} = \sup\{\mu(A_1)\,,\ A_1 \in \mathfrak{a} \wedge \operatorname{rg} A_1 = r'\}\,.$$

On a $\mu^+(A) = \max\{\mu^+_{r'}\,,\ 1 \leq r' \leq r\}$, et il existe un unique entier r_1, $1 \leq r_1 \leq r$, tel que

$$\mu^+(A) = \mu^+_{r_1} \quad \text{et} \quad \mu^+(A) > \mu^+_{r'},\ \forall r',\ r_1 < r' \leq r\,.$$

On peut choisir une suite (A_n) d'éléments de $\mathfrak{a}$, tous de rang r_1, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu^+_{r_1} = \mu^+(A)\,.$$

Pour tous entiers n, p, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A_n + \operatorname{rg} A_p &= \operatorname{rg}(A_n \cap A_p) + \operatorname{rg}(A_n + A_p) \\ \deg A_n + \deg A_p &= \deg(A_n \cap A_p) + \deg(A_n + A_p) \end{aligned}$$

avec $\deg(A_n \cap A_p) \leq \mu^+(A)\operatorname{rg}(A_n \cap A_p)$, $\operatorname{rg}(A_n + A_p) \geq r_1$ et $\mu(A_n + A_p) \leq \max\{\mu^+_{r'},\ r_1 < r' \leq r\} < \mu^+(A)$ si $\operatorname{rg}(A_n + A_p) > r_1$.

Ceci impose que pour tous n, p assez grands, $A_n \cap A_p$ et $A_n + A_p$ soient aussi de rang r_1. On peut supposer que c'est réalisé pour tous $n, p \geq 1$.

Si alors on introduit les $A'_n = A_1 + \cdots + A_n$, les A'_n sont tous de rang r_1. En effet, la filtration de A'_n/A_1 par les $(A_1 + \cdots + A_p)/A_1$, $1 < p \leq n$, a pour quotients successifs les $(A_1 + \cdots + A_p)/(A_1 + \cdots + A_{p-1})$ qui sont des quotients de $(A_{p-1} + A_p)/A_{p-1}$ donc de rang 0. Les A'_n forment une suite croissante d'éléments de $\mathfrak{a}$, donc stationnaire. Soit $\overline{A}_1$ sa limite.

Pour tous n, on a $A_n \subseteq A'_n \wedge \operatorname{rg} A_n = \operatorname{rg} A'_n \Longrightarrow \mu(A_n) \leq \mu(A'_n)$ d'où $\mu(\overline{A}_1) = \mu^+(A)$.

Par choix de r_1, $\overline{A}_1$ est de rang maximal vérifiant la condition $\mu(\overline{A}_1) = \mu^+(A)$.

Si B est un autre élément de $\mathfrak{a}$ qui vérifie $B \neq 0 \wedge \mu(B) = \mu^+(A)$, on a nécessairement $\mu(\overline{A}_1 + B) = \mu^+(A) = \mu(\overline{A}_1)$ puisque $\overline{A}_1 \cap B = 0$ ou $\mu(\overline{A}_1 \cap B) \leq \mu^+(A)$.

Donc $\overline{A}_1 \subseteq \overline{A}_1 + B$ est réalisé avec $\operatorname{rg} \overline{A}_1 = \operatorname{rg}(\overline{A}_1 + B)$ et $\mu(\overline{A}_1) = \mu(\overline{A}_1 + B)$.

Ceci impose $\overline{A}_1 = \overline{A}_1 + B$ soit $B \subseteq \overline{A}_1$.

$\overline{A}_1$ est aussi évidemment maximal, et on n'a plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à $A/\overline{A}_1$.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) est évident.

(i) $\Longrightarrow$ (iii). On remarque que A_1 est filtré par les $A_1 \cap \overline{A}_i$. Chaque quotient $A_1 \cap \overline{A}_{i+1}/A_1 \cap \overline{A}_i = (A_1 \cap \overline{A}_{i+1} + \overline{A}_i)/\overline{A}_i$ se plonge dans $\overline{A}_{i+1}/\overline{A}_i$. Il est nul ou bien vérifie

$$\mu(A_1 \cap \overline{A}_{i+1}/A_1 \cap \overline{A}_i) \leq \mu(\overline{A}_{i+1}/\overline{A}_i)\,.$$

On conclut grâce à la concavité du polygone $\overline{p}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) est évident.

(v) Si $\operatorname{Im} u$ est non nul, on a par définition

$$\mu^+(A') \geq \mu(\operatorname{Im} u) = \mu(A/\operatorname{Ker} u) \geq \mu^-(A)\,.$$

Il y a contradiction. □

LEMME 3. — *On suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre partout maximale.*

Soient K un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$ et $\overline{o}$, $\overline{\infty}$ deux points de X sur K qui sont dans X' [resp. qui sont dans X' et ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de Frob*].*

Soit α un nombre dans l'intervalle $]0,1[$ [resp. dans $\mathbb{R}$].

Soit $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ la catégorie abélienne des diagrammes de $\mathcal{D}_K$-Modules cohérents sur X_K

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow^{j} & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow_{t} & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$$

où j et t sont des isomorphismes en-dehors de $\overline{\infty}$ et $\overline{o}$ respectivement.

Alors, si un tel objet $\widetilde{\mathcal{E}}$ est sans torsion au sens que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont sans torsion sur $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont localement libres sur $\mathcal{D}_K$ autrement dit $\widetilde{\mathcal{E}}$ définit un $\mathcal{D}$-chtouca généralisé sur K.

Par conséquent, l'application sur $\operatorname{Ob} \mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$

$$\operatorname{rg} : \widetilde{\mathcal{E}} \longmapsto \operatorname{rg}\widetilde{\mathcal{E}} = \operatorname{rg}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{tor}) = \operatorname{rg}_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_{tor})$$

est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Par ailleurs, on définit l'application

$$\deg_\alpha : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \widetilde{\mathcal{E}} \longmapsto \alpha \deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha)\deg(\det \mathcal{E}')\,.$$

Alors $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ *munie de* rg *et* $\deg_\alpha$ *est une catégorie à pentes et pour tout objet sans torsion de* $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ *(c'est-à-dire tout* $\mathcal{D}$*–chtouca généralisé sur* K*) la famille de tous ses sous–objets est une bonne famille au sens de la définition* 1.

Démonstration : Il est évident que $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ est une catégorie abélienne.

Le fait que tout objet sans torsion de $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ est un $\mathcal{D}$–chtouca généralisé sur K résulte de la proposition 7 du paragraphe I.3.

Il est évident encore que les applications rg et $\deg_\alpha$ sont additives.

Reste à prouver que pour tout sous–objet sans torsion de $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$, la famille de tous ses sous–objets est une bonne famille. Les propriétés (i), (ii) et (iii) dans la définition sont clairement vérifiées.

Pour ce qui est de (iv), il s'agit de voir que si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un objet sans torsion de $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}_2$ sont deux sous–objets de même rang, alors $\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}_1 < \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}_2$. Soit $\widetilde{\mathcal{F}} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{F}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{F} & & \end{array}\right)$ l'objet quotient de $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ par $\widetilde{\mathcal{E}}_1$.
C'est un objet de torsion et non nul, et on a

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}_2 - \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}_1 = \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{d}(\alpha \dim_K \mathcal{F} + (1-\alpha)\dim_K \mathcal{F}')\,.$$

Si $0 < \alpha < 1$, on a terminé.

Et dans le second cas, la conclusion résulte du lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient* K *un corps contenant* $\mathbb{F}_q$*, et* $\overline{o}, \overline{\infty}$ *deux points de* X *sur* K*, dont aucun n'est image de l'autre par une puissance de* Frob.

Soient $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}'$ *des faisceaux finis sur* $\mathcal{O}_{X_K}$ *et* $j : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, $t : {}^\tau\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ *des homomorphismes qui sont des isomorphismes en dehors de* $\overline{\infty}$ *et de* $\overline{o}$ *respectivement.*

Alors $\dim_K \mathcal{F} = \dim_K \mathcal{F}'$.

Démonstration : Si $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{F}')$ sont les diviseurs associés à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, on voit qu'il existe deux entiers $n_{\overline{\infty}}$ et $n_{\overline{o}}$ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$(\mathcal{F}') - (\mathcal{F}) = n_{\overline{\infty}}\overline{\infty} \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}') - ({}^\tau\mathcal{F}) = n_{\overline{o}}\overline{o}\,.$$

On en déduit $(\mathcal{F}) - ({}^\tau\mathcal{F}) = n_{\overline{o}}\overline{o} - n_{\overline{\infty}}\overline{\infty}$ qui est possible seulement si $n_{\overline{o}} = 0 = n_{\overline{\infty}}$. Donc $(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}')$ et a fortiori $\dim_K \mathcal{F} = \dim_K \mathcal{F}'$. $\square$

Dans la situation du lemme 3, on peut donc appliquer les notions de la définition 1.

En particulier, pour tout objet $\widetilde{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$ de rang ≥ 1, on dispose de sa pente d'indice α : $\mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}) = \deg_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}})/\mathrm{rg}(\widetilde{\mathcal{E}})$. Et si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est sans torsion, on peut introduire

$$\begin{aligned}\mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}}) &= \sup\{\mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}_1),\ \widetilde{\mathcal{E}}_1 \subseteq \widetilde{\mathcal{E}} \text{ et } \mathrm{rg}\,\widetilde{\mathcal{E}}_1 \geq 1\}\\ \mu_\alpha^-(\widetilde{\mathcal{E}}) &= \inf\{\mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{E}}_1),\ \widetilde{\mathcal{E}}_1 \subseteq \widetilde{\mathcal{E}} \text{ et } \mathrm{rg}\,\widetilde{\mathcal{E}}_1 < \mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{E}}\}\,.\end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{E}}$ est dit α–semi–stable si $\mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}}) = \mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}) = \mu_\alpha^-(\widetilde{\mathcal{E}})$.

D'après la proposition 2, on a maintenant :

THÉORÈME 5. — *On suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$–Algèbre partout maximale.*

Soient K un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$ et $\overline{o}, \overline{\infty}$ deux points de X sur K qui sont dans X' [resp. qui sont dans X' et ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de Frob].

Soit α un nombre dans l'intervalle $]0,1[$ [*resp. dans* $\mathbb{R}$].

Soit $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ *un $\mathcal{D}$–chtouca généralisé sur K, tel que $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ soit concentré en $\overline{\infty}$ et $\mathcal{E}'/{}^\tau\mathcal{E}$ soit concentré en $\overline{o}$.*

Alors :

(i) *$\widetilde{\mathcal{E}}$ possède une unique filtration par des $\mathcal{D}$–chtoucas généralisés*

$$0 = \widetilde{\mathcal{E}}_0 \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}_{k-1} \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}_k = \widetilde{\mathcal{E}}$$

telle que :

- *les quotients $\widetilde{\mathcal{E}}_i/\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}$ sont des $\mathcal{D}$–chtoucas généralisés qui sont α–semi–stables ;*
- $\mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}_1/\widetilde{\mathcal{E}}_0) > \mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}_2/\widetilde{\mathcal{E}}_1) > \cdots > \mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}_k/\widetilde{\mathcal{E}}_{k-1})$.

On l'appelle la filtration α–canonique (de Harder–Narasimhan) de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Son polygone est noté $\overline{p}_\alpha$. Il vérifie les propriétés (ii), (iii) *et* (iv) *de la proposition* 2.

(ii) *Si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}$–chtouca trivial, de la forme $\widetilde{\mathcal{E}} = E \otimes_{\mathbb{F}_q} K$ où E est un $\mathcal{D}$–Module à droite localement libre sur X, alors $\mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}) = \dfrac{\deg(\det E)}{\mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E} = \mu(E)$ est indépendant de α. De plus, la filtration α–canonique de E est composé de $\mathcal{D}$–chtoucas triviaux, et elle est indépendante de α.*

(iii) *Si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}$–chtouca, on a*

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} = \deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha) = \deg(\det \mathcal{E}') - \alpha\,.$$

Dans la filtration α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$, tous les quotients $\widetilde{\mathcal{E}}_i/\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}$ sont des $\mathcal{D}$–chtoucas triviaux sauf un et un seul qui est un $\mathcal{D}$–chtouca.

Par conséquent, $\widetilde{\mathcal{E}}$ a une filtration canonique

$$0 \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}' \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}'' \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}$$

où :

- *$\widetilde{\mathcal{E}}'$ et $\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{E}}''$ sont des $\mathcal{D}$–chtoucas triviaux,*
- *$\widetilde{\mathcal{E}}''/\widetilde{\mathcal{E}}'$ est un $\mathcal{D}$–chtouca,*
- *$\widetilde{\mathcal{E}}''/\widetilde{\mathcal{E}}'$ est α–semi–stable et*

$$\mu^-(\widetilde{\mathcal{E}}') > \mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}''/\widetilde{\mathcal{E}}') > \mu^+(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{E}}'')\,.$$

Démonstration :

(i) résulte de la proposition 2.

(ii) est évident.

(iii) résulte du lemme 1 du paragraphe II.1. □

Remarquons que sous les hypothèses du lemme 3, pour tout objet $\mathcal{L}$ de $\mathrm{Pic}(X)$, on dispose d'un foncteur

$$\mathcal{L}\otimes\cdot : \mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathcal{L}\otimes\mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{L}\otimes\mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ \mathcal{L}\otimes{}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, dans le cas où $\overline{o}$ et $\overline{\infty}$ ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de Frob, on dispose de deux foncteur exacts

$$\begin{aligned} \mathrm{Frob}_\infty : \mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}} &\longrightarrow \mathcal{A}_{\overline{o},{}^\tau\overline{\infty}} \\ \mathrm{Frob}_o : \mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}} &\longrightarrow \mathcal{A}_{{}^\tau\overline{o},\overline{\infty}} \end{aligned}$$

définis de la manière suivante :

A tout diagramme $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \overset{j}{\searrow} & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow_{t} & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$, Frob_∞ [resp. Frob_0] associe le diagramme

$$\begin{matrix} \mathcal{E}' & & \\ & \overset{j_\infty}{\searrow} & \\ & & \mathcal{E}_\infty \\ & \nearrow_{t_\infty} & \\ {}^{\tau}\mathcal{E}' & & \end{matrix} \qquad \left[\text{resp.} \quad \begin{matrix} \mathcal{E}_0 & & \\ & \overset{j_0}{\searrow} & \\ & & {}^{\tau}\mathcal{E} \\ & \nearrow_{{}^{\tau}t_0} & \\ {}^{\tau}\mathcal{E}_0 & & \end{matrix}\right]$$

où $\mathcal{E}_\infty$ [resp. $\mathcal{E}_0$] s'inscrit dans le carré cartésien et cocartésien de $\mathcal{D}_K$–Modules

$$\begin{array}{ccc} {}^{\tau}\mathcal{E} & \xrightarrow{t} & \mathcal{E}' \\ \downarrow {}^{\tau}j & & \downarrow j_\infty \\ {}^{\tau}\mathcal{E}' & \xrightarrow[t_\infty]{} & \mathcal{E}_\infty \end{array} \qquad \left[\text{resp.} \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_0 & \xrightarrow{t_0} & \mathcal{E} \\ \downarrow j_0 & & \downarrow j \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & \xrightarrow[t]{} & \mathcal{E}' \end{array}\right].$$

Sur les sous–catégories des $\mathcal{D}$–chtoucas triviaux, Frob_∞ et Frob_0 sont l'identité et sur les sous–catégories des $\mathcal{D}$–chtoucas, ils se confondent avec les foncteurs déjà définis au paragraphe I.1.

Enfin, ils transforment $\mathcal{D}$–chtoucas généralisés en $\mathcal{D}$–chtoucas généralisés.

LEMME 6. — *Sous les hypothèses du lemme* 3 *et avec les définitions ci–dessus, on a pour tout objet* $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{A}_{\overline{o},\overline{\infty}}$:

(i) *Pour tout élément* $\mathcal{L}$ *de* $\mathrm{Pic}(X)$:

$$\deg_\alpha(\mathcal{L} \otimes \widetilde{\mathcal{E}}) = d \,\mathrm{rg}\,(\widetilde{\mathcal{E}}) \deg(\mathcal{L}) + \deg_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}})$$
$$\mathrm{rg}(\mathcal{L} \otimes \widetilde{\mathcal{E}}) = \mathrm{rg}(\widetilde{\mathcal{E}})$$

(ii) *Dans le cas où* $\overline{o}$ *et* $\overline{\infty}$ *ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de* Frob, *on a* :

$$\deg_{\alpha+1}(\mathrm{Frob}_\infty(\widetilde{\mathcal{E}})) = \deg_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}) = \deg_{\alpha-1}(\mathrm{Frob}_0(\widetilde{\mathcal{E}}))$$
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Frob}_\infty(\widetilde{\mathcal{E}})) = \mathrm{rg}(\widetilde{\mathcal{E}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Frob}_0(\widetilde{\mathcal{E}}))$$

Démonstration :

(i) est évident.

(ii) résulte de ce que, avec les notations de la discussion qui précède l'énoncé du lemme, on a

$$\begin{aligned}\deg(\det \mathcal{E}_\infty) &= \deg(\det \mathcal{E}') + \deg(\det {}^\tau\mathcal{E}') - \deg(\det {}^\tau\mathcal{E}) \\ &= 2\deg(\det \mathcal{E}') - \deg(\det \mathcal{E}) \\ \deg(\det \mathcal{E}_0) &= \deg(\det \mathcal{E}) + \deg(\det {}^\tau\mathcal{E}) - \deg(\det \mathcal{E}') \\ &= 2\deg(\det \mathcal{E}) - \deg(\det \mathcal{E}')\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}(\alpha+1)\deg(\det \mathcal{E}') - \alpha\deg(\det \mathcal{E}_\infty) &= \alpha\deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha)\deg(\det \mathcal{E}') \\ (\alpha-1)\deg(\det \mathcal{E}_0) + (2-\alpha)\deg(\det {}^\tau\mathcal{E}) &= \alpha\deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha)\deg(\det \mathcal{E}')\end{aligned}$$

comme on voulait. $\square$

Corollaire 7. — *Toujours sous les hypothèses du lemme* 3, *on a pour tout $\mathcal{D}$–chtouca généralisé*

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$$

tel que $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est concentré en $\overline{\infty}$ et $\mathcal{E}'/{}^\tau\mathcal{E}$ en $\overline{o}$:

(i) *Pour tout élément $\mathcal{L}$ de* $\mathrm{Pic}(X)$, *le foncteur $\mathcal{L} \otimes \cdot$ transforme la filtration α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$ en la filtration α–canonique de $\mathcal{L} \otimes \widetilde{\mathcal{E}}$, et les polygones associés sont les mêmes.*

(ii) *Dans le cas où $\overline{o}$ et $\overline{\infty}$ ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de* Frob, *le foncteur* Frob_∞ [*resp.* Frob_0] *transforme la filtration α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$ en la filtration $(\alpha+1)$–canonique de* $\mathrm{Frob}_\infty(\widetilde{\mathcal{E}})$ [*resp. en la filtration $(\alpha-1)$–canonique de* $\mathrm{Frob}_0(\widetilde{\mathcal{E}})$], *et les polygones associés sont les mêmes.*

Démonstration : Compte tenu du lemme 6, il suffit de voir que tout sous–objet maximal de l'image de $\widetilde{\mathcal{E}}$ par le foncteur considéré est l'image par ce foncteur d'un sous–objet maximal de $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Dans le cas (i), cela résulte de ce que le foncteur $\mathcal{L} \otimes \cdot$ a un quasi–inverse qui est $\mathcal{L}^{-1} \otimes \cdot$.

Et dans le cas (ii), cela résulte de ce que $\mathrm{Frob}_\infty(\widetilde{\mathcal{E}})$, $\widetilde{\mathcal{E}}$ et $\mathrm{Frob}_0(\widetilde{\mathcal{E}})$ sont canoniquement isomorphes en dehors de $\overline{o}$ et $\overline{\infty}$. $\square$

b) Les sous–champs ouverts $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n,\overline{p}_\alpha\leq p}$

Soit $r \geq 1$ un entier.

Rappelons que pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, on a la décomposition en somme disjointe

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n}$$

associée à l'application localement constante

$$\deg : \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui à tout point algébrique, c'est–à–dire à tout $\mathcal{D}$–chtouca de rang r $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ sur un corps K associe $\deg(\det \mathcal{E})$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 8. — *On suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$–Algèbre maximale.*
Soient $r \geq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$ deux entiers.
Soit α un nombre dans l'intervalle $]0,1[$ *[resp. dans* $\mathbb{R}$*].*
Enfin, soit $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone, c'est–à–dire une application continue, affine sur chaque intervalle $[r'-1, r']$, $r' = 1,2,\ldots,r$ et s'annulant aux points 0 et r.
Alors :

(i) *Il existe dans le champ $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$ au–dessus de $X' \times X'$ [resp. de $X' \times X' \times_{(X\times X)} \Lambda$] un (unique) sous–champ ouvert noté $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha\leq p}$ tel que pour tout point géométrique $S = \mathrm{Spec}\, K \to \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$ correspondant à un $\mathcal{D}$–chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ de rang r et de degré n sur K, dont le zéro et le pôle sont dans X' [resp. sont dans X' et ne sont images l'un de l'autre par aucune puissance de* Frob*], ce point se factorise à travers l'ouvert $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha\leq p}$ si et seulement si le polygone de la filtration α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est majoré par p.*

(ii) *Le sous–champ ouvert $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha\leq p}$ est de type fini sur $X' \times X'$ [resp. sur $X' \times X' \times_{(X\times X)} \Lambda$].*

$\square$

Avant de procéder à la démonstration, nous allons prouver quelques lemmes préparatoires.

LEMME 9. —

(i) *Soient $r > r_1 \geq 1$ et $n, n_1 \in \mathbb{Z}$ des nombres entiers.*

Soit $\mathrm{Vecso}_{\mathcal{O}_X}^{r,r_1,n,n_1}$ *le champ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des suites exactes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_{X\times S}$-Modules sur $X \times S$ avec $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$ localement libres sur $\mathcal{O}_{X\times S}$ de rangs respectifs r et r_1 et de degrés respectifs n et n_1 relativement à S, et avec $\mathcal{E}_2$ plat sur $\mathcal{O}_S$.

Alors le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Vecso}_{\mathcal{O}_X}^{r,r_1,n,n_1} &\longrightarrow \mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{r} \\ (0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0) &\longmapsto \mathcal{E} \end{aligned}$$

est représentable et projectif.

(ii) *Soient $r > r_1 \geq 1$ et n, n_1, $n'_1 \in \mathbb{Z}$ des nombres entiers. Soit* $\mathrm{Chtso}_{\mathcal{D}}^{r,r_1,n,n_1,n'_1}$ *le champ qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde des diagrammes commutatifs*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{f'} & \mathcal{E}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{E}'_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^{\tau}\mathcal{E}_1 & \xrightarrow{{}^{\tau}f} & {}^{\tau}\mathcal{E} & \xrightarrow{{}^{\tau}g} & {}^{\tau}\mathcal{E}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_S$-Modules à droite sur $X \times S$, où $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{array}\right)$ *est un $\mathcal{D}$-chtouca de rang r et de degré n sur S, où les lignes sont exactes, où $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$ sont plats sur $\mathcal{O}_S$ et où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}'_1$ sont localement libres sur $\mathcal{O}_{X\times S}$ de rang $r_1 d^2$ et sont de degrés respectifs $dn_1 + r_1 \deg(\mathcal{D})$ et $dn'_1 + r_1 \deg(\mathcal{D})$ relativement à S.*

Alors le morphisme

$$\mathrm{Chtso}_{\mathcal{D}}^{r,r_1,n,n_1,n'_1} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$$

est représentable et projectif.

Démonstration :

(i) est un théorème de Grothendieck, cf. [FGA] Les schémas de Hilbert.

(ii) Posons $\overline{n} = dn + r\deg(\mathcal{D})$, $\overline{n}_1 = dn_1 + r_1\deg(\mathcal{D})$, $\overline{n}'_1 = dn'_1 + r_1\deg(\mathcal{D})$.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Vecso}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2,r_1d^2,\overline{n},\overline{n}_1} & \longleftarrow & \mathrm{Chtso}_{\mathcal{D}}^{r,r_1,n,n_1,n'_1} & \longrightarrow & \mathrm{Vecso}^{rd^2,r_1d^2,\overline{n}+d,\overline{n}'_1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2} & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n} & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2} \\
\mathcal{E} & \longleftarrow\!\shortmid & (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow {}^{\tau}\mathcal{E}) & \longmapsto & \mathcal{E}'
\end{array}$$

Autrement dit, on a un morphisme de $\mathrm{Chtso}_{\mathcal{D}}^{r,r_1,n,n_1,n'_1}$ dans le produit fibré

$$\mathrm{Vecso}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2,r_1d^2,\overline{n},\overline{n}_1} \times_{\mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2}} \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n} \times_{\mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2}} \mathrm{Vecso}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2,r_1d^2,\overline{n}+d,\overline{n}'_1}$$

lequel, d'après (i), est représentable et projectif sur $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$.

De plus, ce morphisme représente les conditions d'annulation des homomorphismes composés :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 \\
\mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{E}'_2 \\
\mathcal{E}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} & \hookrightarrow & \mathcal{E}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{E}'_2 \\
{}^{\tau}\mathcal{E}_1 & \xrightarrow{{}^{\tau}f} & {}^{\tau}\mathcal{E} & \hookrightarrow & \mathcal{E}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{E}'_2
\end{array}$$

D'après le lemme 3 du paragraphe I.2, ce morphisme est donc représentable par une immersion fermée.

D'où la conclusion. $\square$

LEMME 10. —

(i) *Il existe une constante $R \geq 0$ telle que pour tout $\mathcal{D}$–chtouca* $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ *sur un corps algébriquement clos K et tout sous-$\mathcal{O}_X$-Module* *maximal $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire tel que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ soit sans torsion) vérifiant*

$$\mu^-(\mathcal{F}) > R + \mu^+(\mathcal{E}/\mathcal{F}),$$

$\mathcal{F}$ provient d'un sous-objet maximal $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{F}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{F} & & \end{array}\right)$ *de* $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array}\right)$.

(ii) *Sous les hypothèses du théorème 8, soit $q : [0, rd^2] \to \mathbb{R}_+$ un polygone tel que :*

- $1 \leq r' < rd^2 \Longrightarrow q(r') - q(r'-1) > [q(r'+1) - q(r')] + R,$
- $1 \leq r' < r \Longrightarrow \frac{1}{d} q(r'd'^2) \geq p(r') + \max\left\{\frac{r'}{r}(1-\alpha); \frac{r'-r}{r}(1-\alpha)\right\}.$

Alors, pour tout $\mathcal{D}$-chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array}\right)$ *de rang r sur un corps algébriquement clos K dont le polygone α-canonique est majoré par p, le polygone canonique du $\mathcal{O}_X$-Module sans torsion $\mathcal{E}$ est majoré par q.*

Démonstration :

(i) Soit $\mathcal{F}'$ le sous-$\mathcal{O}_X$-Module maximal de $\mathcal{E}'$ engendré par $\mathcal{F}$. Il s'agit de prouver que les homorphismes composés

$$\begin{array}{lccccccc} & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/\mathcal{F} \\ \text{et} & {}^\tau\mathcal{F} & \longrightarrow & {}^\tau\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{E}'/\mathcal{F}' \end{array}$$

sont nuls si R est assez grande.

D'une part, il existe un fibré inversible très ample $\mathcal{L}$ sur X tel que $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ soit engendré par ses sections. Donc tout $\mathcal{O}_X$-Module quotient de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}$ est aussi quotient d'une puissance de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}$ d'où

$$\mu^-(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}) \geq \mu^-(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}) = \mu^-(\mathcal{F}) - \deg(\mathcal{L}).$$

Si donc $R \geq \deg(\mathcal{L})$, on voit d'après la proposition 2 (v) que l'homomorphisme $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \to \mathcal{E}/\mathcal{F}$ est nécessairement nul.

D'autre part, on a $\mu^-({}^\tau\mathcal{F}) = \mu^-(\mathcal{F})$ et on remarque que l'homomorphisme $\mathcal{E}/\mathcal{F} \to \mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ est injectif et que son conoyau est de torsion et de degré $\leq d$, d'où

$$\mu^+(\mathcal{E}'/\mathcal{F}') \leq \mu^+(\mathcal{E}/\mathcal{F}) + d.$$

Si donc aussi $R \geq d$, on voit toujours d'après la proposition 2 (v) que l'homomorphisme ${}^\tau\mathcal{F} \to \mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ est nul.

(ii) Soit $0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}$ la filtration canonique de Harder–Narasimham de $\mathcal{E}$, et $\overline{q}$ son polygone associé. On raisonne par l'absurde en supposant que $\overline{q}$ n'est pas majoré par q.

Soit alors i un entier qui maximise la différence $(\overline{q} - q)(\mathrm{rg}\,\mathcal{E}_i)$ et posons $\mathcal{F} = \mathcal{E}_i$. D'après nos hypothèses, on a

$$\deg \mathcal{F} - \frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{\mathrm{rg}\,\mathcal{E}} \deg \mathcal{E} = \overline{q}(\mathrm{rg}\,\mathcal{F}) > q(\mathrm{rg}\,\mathcal{F})$$
$$\text{et} \quad \mu^-(\mathcal{F}) > R + \mu^+(\mathcal{E}/\mathcal{F})\,.$$

D'après (i), $\mathcal{F}$ provient d'un sous–objet maximal $\widetilde{\mathcal{F}} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{F}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{F} & & \end{array}\right)$ de

$\widetilde{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array}\right)$. Soit r', $1 \leq r' < r$, son rang sur $\mathcal{D}_K$. On a

$$\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = r'd^2 \quad \mathrm{rg}\,\mathcal{E} = rd^2$$
$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} = \deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha) = \frac{\deg \mathcal{E} - r \deg \mathcal{D}}{d} + (1-\alpha)$$

et

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} = \deg(\det \mathcal{F}) = \frac{\deg \mathcal{F} - r' \deg \mathcal{D}}{d} \qquad \text{ou bien}$$
$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} = \deg(\det \mathcal{F}) + (1-\alpha) = \frac{\deg \mathcal{F} - r' \deg \mathcal{D}}{d} + (1-\alpha)$$

suivant que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{D}$–chtouca trivial ou un $\mathcal{D}$–chtouca.

Dans le premier cas, on obtient l'inégalité

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} - \frac{r'}{r} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} + \frac{r'}{r}(1-\alpha) > \frac{1}{d} q(r'd^2)$$

et dans le second cas

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} - \frac{r'}{r} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} - (1-\alpha) + \frac{r'}{r}(1-\alpha) > \frac{1}{d} q(r'd^2)$$

d'où $\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} - \frac{r'}{r} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} > p(r')$ dans les deux cas, et il y a contradiction. $\square$

Maintenant, on peut donner :

Démonstration du théorème 8 :

(i) On considère le morphisme

$$\coprod \mathrm{Chtso}_{\mathcal{D}}^{r,r_1,n,n_1,n_1'} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$$

où (r, n_1, n_1') décrit l'ensemble des triplets d'entiers qui vérifient $1 \leq r_1 < r$, $n_1' = n_1$ ou $n_1' = n_1 + 1$, et $\alpha n_1 + (1-\alpha)n_1' - \frac{r_1}{r}(n + (1-\alpha)) > p(r_1)$.

D'après le lemme 9 (ii) ci–dessus combiné au lemme 9 du paragraphe I.4, ce morphisme est représentable et projectif.

Alors l'ouvert $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ complémentaire de son image répond à la question posée.

(ii) On a un carré 2–cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}}^r \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hecke}_{\mathcal{D}}^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}}^r \times \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}}^r
\end{array}$$

et d'après le lemme 7 du paragraphe I.2, le morphisme $\mathrm{Hecke}_{\mathcal{D}}^r \to X \times X \times \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}}^r$ est (représentable) de type fini. Il en est donc de même du morphisme

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r \longrightarrow X \times X \times \mathrm{Vec}_{\mathcal{D}}^r \qquad \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{array} \right) \longmapsto (i_0, i_\infty, \mathcal{E})\,.$$

De plus, d'après le lemme 2 du paragraphe I.2, le morphisme $\mathrm{Vec}_{\mathcal{D}}^r \to \mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2}$ est (représentable quasi–affine) de type fini. Enfin, avec les notations du lemme 10 ci–dessus, le morphisme $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p} \to \mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2}$ se factorise à travers le sous–champ ouvert de $\mathrm{Vec}_{\mathcal{O}_X}^{rd^2}$ qui classifie les fibrés de degré $dn + r \deg \mathcal{D}$ dont le polygone de Harder–Narasimhan est majoré par q. Et on sait que cet ouvert est de type fini sur $\mathbb{F}_q$.

Ceci achève la démonstration. □

Pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, on notera $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ le sous–champ ouvert de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^r$ image réciproque de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ par le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^r \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r\,.$$

On a :

PROPOSITION 11. — *Sous les hypothèses du théorème 8, et si* $I \hookrightarrow X$ *est un sous–schéma fermé fini vérifiant* $d \deg I > p(1) + p(r-1)$, *le champ* $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ *est représentable quasi–projectif sur* $(X' \backslash I) \times (X' \backslash I)$ [*resp.* $(X' \backslash I) \times (X' \backslash I) \times_{(X \times X)} \Lambda$].

Démonstration : D'après le théorème 8 ci–dessus et le corollaire 6 du paragraphe I.3, on sait déjà que $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ peut s'écrire comme le quotient d'un schéma quasi–projectif sur $\mathbb{F}_q$ [resp. Λ] par l'action d'un groupe fini.

Donc il suffit de prouver que si $S = \mathrm{Spec}\, K \to \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ est un point géométrique correspondant à un $\mathcal{D}$–chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ sur un corps algébriquement clos K, alors tout automorphisme u de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est l'identité.

Or, si $\mathcal{I}$ désigne le faisceau d'idéaux dans $\mathcal{O}_X$ qui définit I, $u - \mathrm{Id}$ détermine un morphisme

$$u - \mathrm{Id} : \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}\,.$$

Or, d'après le lemme 6 ci–dessus, on a

$$\mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}) = \mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}}) - d \deg I$$

tandis que par hypothèse

$$\mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}}) \leq p(1) \quad \mu_\alpha^-(\widetilde{\mathcal{E}}) \geq -p(r-1)$$

d'où

$$\mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}) < \mu_\alpha^-(\widetilde{\mathcal{E}})\,.$$

D'après la proposition 2 (v), on conclut $u - \mathrm{Id} = 0$. □

Enfin, le lemme 6 et le corollaire 7 ci–dessus impliquent :

PROPOSITION 12. — *Sous les hypothèses du théorème 8, on a :*

(i) *Pour tout élément* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$, *le foncteur* $\mathcal{L} \otimes \cdot$ *envoie le champ* $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ *dans le champ*

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n+rd\deg \mathcal{L},\overline{p}_\alpha \leq p}\,.$$

(ii) *Les foncteurs* Frob_∞ *et* Frob_0 *envoient le champ* $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$ *respectivement dans*

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n+1,\overline{p}_{\alpha+1} \leq p}$$

$$et \quad \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n-1,\overline{p}_{\alpha-1} \leq p}\,.$$

□

c) Les horocycles

Définition 13. — *Si α est un nombre réel, on appellera α–type tout quadruplet $t = (r, E', E'', n)$ où :*

- *$r \geq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont des entiers,*
- *E' et E'' sont des $\mathcal{D}$–Modules à droite localement libres de type fini sur X,*
- *les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\mu^-(E') > \frac{n - \deg(\det E') - \deg(\det E'') + (1-\alpha)}{r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E' - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E''} > \mu^+(E'')$$

Le théorème 5 (iii) dit exactement que tout $\mathcal{D}$–chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ de rang r et de degré n sur un corps algébriquement clos K et tel que (i_0, i_∞) est à valeur dans $X' \times X'$ [resp. $X' \times X' \times_{(X\times X)} \Lambda$ si $\alpha \notin]0,1[$] possède une unique filtration

$$0 \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}' \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}'' \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}$$

pour laquelle il existe un α–type $t = (r, E', E'', n)$ avec :

- $\widetilde{\mathcal{E}}' \cong E' \otimes_{\mathbb{F}_q} K \;\; \widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{E}}'' \cong E'' \otimes_{\mathbb{F}_q} K$,
- $\widetilde{\mathcal{E}}''/\widetilde{\mathcal{E}}'$ est un $\mathcal{D}$–chtouca α–semi–stable.

En effet, les inégalités dans la définition des α–types s'écrivent alors exactement :

$$\mu^-(\widetilde{\mathcal{E}}') > \mu_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}''/\widetilde{\mathcal{E}}') > \mu^+(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{E}}'')$$

De plus, on remarque que dans ces conditions le polygone α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$ ne dépend que de t. On le notera p_α^t. Il est caractérisé par les conditions suivantes :

- sur l'intervalle $[0, \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E']$, la fonction

$$x \longmapsto p_\alpha^t(x) + \left(\frac{n + (1-\alpha)}{r} - \mu(E')\right) x$$

est le polygone canonique du $\mathcal{D}$–chtouca trivial E' ;

• sur l'intervalle $[\mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E', r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'']$, la fonction $x \longmapsto p_\alpha^t(x)$ est affine de pente

$$\frac{n - \deg(\det E') - \deg(\det E'') + (1-\alpha)}{r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E' - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E''} - \frac{n + (1-\alpha)}{r}\,;$$

• sur l'intervalle $[0, \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'']$, la fonction

$$x \longmapsto p_\alpha^t(r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'' + x) + \left(\frac{n + (1-\alpha)}{r} - \mu(E'')\right)(x - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'')$$

est le polygone canonique du $\mathcal{D}$–chtouca trivial E''.

Considérons maintenant α un nombre réel et $t = (r, E', E'', n)$ un α–type.

On dispose au–dessus de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r$ des champs

$$\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,E'} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,E''}\,.$$

En prenant l'image réciproque de l'ouvert $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$, on définit des champs $\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,E',n}$ et $\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,E'',n}$.

Soit $\overline{\mathrm{Horo}}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n}$ le produit fibré dans le carré 2–cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathrm{Horo}}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n} & \longrightarrow & \mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E',E'',n-\deg(\det E')} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r,E',n} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E',n-\deg(\det E')}
\end{array}$$

Il s'inscrit aussi dans le carré 2– cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathrm{Horo}}^{r,E',E'',n} & \longrightarrow & \mathrm{Chtsotr}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'',E',n-\deg(\det E'')} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Chtqtr}_{\mathcal{D}}^{r,E'',n} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'',n-\deg(\det E'')}
\end{array}$$

On a un morphisme canonique

$$\overline{\mathrm{Horo}}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'',n-\deg(\det E')-\deg(\det E'')} .$$

D'après le théorème 11 du paragraphe II.1, ce morphisme est de type fini et lisse de dimension relative $(\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E' + \mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'')d$.

Par ailleurs, on a aussi un morphisme canonique

$$\overline{\mathrm{Horo}}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$$

et d'après le théorème 5 du paragraphe II.1, il est représentable quasi–fini, non ramifié et séparé.

Maintenant, énonçons :

Théorème 14. — *On suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$–Algèbre maximale. Soient $r \geq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$ deux entiers.*

Soit α un nombre dans l'intervalle $]0,1[$ [*resp. dans* $\mathbb{R}$].

(i) *Pour tout α–type $t = (r, E', E'', n)$, appelons champ horocycle de α–type t, et notons $\mathrm{Horo}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n,\alpha}$ le champ image réciproque par le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Horo}}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'',n-\deg(\det E')-\deg(\det E'')}$$

du sous–champ ouvert des $\mathcal{D}$–chtoucas α–semi–stables

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'-\mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'',n-\deg(\det E')-\deg(\det E''),\overline{p}_\alpha\leq 0}$$

au-dessus de $X' \times X'$ [*resp.* $X' \times X' \times_{(X\times X)} \Lambda$].

Alors $\mathrm{Horo}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n,\alpha}$ est de type fini sur $X' \times X'$ [*resp.* $X' \times X' \times_{(X\times X)} \Lambda$] *et lisse de dimension relative*

$$(2r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E' - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}}E'')d - 2 .$$

(ii) *Pour tout α–type $t = (r, E', E'', n)$, le morphisme*

$$\mathrm{Horo}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n,\alpha} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$$

au-dessus de $X' \times X'$ [*resp.* $X' \times X'_{(X\times X)}\Lambda$] *est représentable par une immersion localement fermée.*

(iii) *Si $p, q : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ sont deux polygones vérifiant $p \leq q$, alors, au–dessus de $X' \times X'$ [resp. $X' \times X' \times_{(X \times X)} \Lambda$], le sous–champ ouvert $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq q}$ de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$ s'écrit comme la réunion disjointe finie de l'ouvert*

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n,\overline{p}_\alpha \leq p}$$

et des parties localement fermées $\mathrm{Horo}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n,\alpha}$ quand $t = (r, E', E'', n)$ décrit la famille des α–types dont le polygone p_α^t vérifie

$$p \leq p_\alpha^t \leq q\,, \quad p_t^\alpha \neq p\,.$$

Démonstration : Compte tenu des considérations qui précèdent l'énoncé du théorème, on a :

(i) résulte de ce que le champ

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E' - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'', n - \deg(\det E') - \deg(\det E''), \overline{p}_\alpha \leq 0}$$

au–dessus de $X' \times X'$ [resp. $X' \times X' \times_{(X \times X)} \Lambda$] est de type fini (d'après le théorème 8) et lisse de dimension relative $2(r - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E' - \mathrm{rg}_{\mathcal{D}} E'')d - 2$ (d'après le théorème 9 du paragraphe I.2).

(ii) On sait déjà que le morphisme $\mathrm{Horo}_{\mathcal{D}}^{r,E',E'',n,\alpha} \to \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^{r,n}$ est représentable quasi–fini et non ramifié. Il suffit donc de prouver que l'application induite entre ensembles de points géométriques est injective, et ceci résulte de l'unicité de la filtration α–canonique d'un $\mathcal{D}$–chtouca.

(iii) résulte de l'existence et unicité des filtrations α–canoniques. $\square$

Chapitre III

Description adélique des chtoucas. Nombres de Lefschetz

1. — Rappels : φ–espaces et F_x–modules de Dieudonné, d'après Drinfeld

On renvoie à [Laumon, Rapoport, Stuhler] Appendice A et [Drinfeld, 1987] pour les démonstrations.

A partir de maintenant, $\overline{\mathbb{F}_q}$ désignera toujours une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_q$. Et on rappelle que F est le corps des fonctions de la courbe X, avec donc $\mathbb{F}_q$ comme corps des constantes.

DÉFINITION 1. — *Un φ–espace (sur $\overline{\mathbb{F}_q}$) est un espace vectoriel V de dimension finie sur le corps $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ muni d'une application* $\mathrm{Id}_F \otimes \mathrm{Frob}$–*linéaire bijective $\varphi : V \longrightarrow V$.*

Un morphisme α entre deux φ–espaces (V_1, φ_1) et (V_2, φ_2) est une application $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$–linéaire $V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2$ telle que $\varphi_2 \circ \alpha = \alpha \circ \varphi_1$.

DÉFINITION 2. — *Une φ–paire est une paire $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$, où $\widetilde{F}$ est une F–algèbre de dimension finie et commutative, et $\widetilde{\Pi}$ est un élément de $\widetilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$ qui vérifie la propriété suivante : pour toute sous–algèbre stricte F' de $\widetilde{F}$, $\widetilde{\Pi}$ n'est pas dans le sous–groupe $F'^\times \otimes \mathbb{Q}$ de $\widetilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$.*

LEMME 3. — *Si $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ est une φ–paire, $\widetilde{F}$ est une F–algèbre étale.*

De plus, si $N \in \mathbb{Z}$ est un entier non nul tel que $\widetilde{\Pi}^N \in \widetilde{F}$, alors $\widetilde{F} = F[\widetilde{\Pi}^N]$.

$\square$

A chaque φ–espace non nul (V, φ), Drinfeld associe une φ–paire $(F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)})$ de la manière suivante :

Pour n assez divisible, le φ–espace (V, φ) sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ est défini sur $\mathbb{F}_{q^n}$. Autrement dit, il existe un entier $n' \geq 1$, un espace vectoriel V' de dimension finie sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^{n'}}$, une application $\mathrm{Id}_F \otimes \mathrm{Frob}$–linéaire φ' : $V' \to V'$ et un isomorphisme de φ–espaces :

$$(V, \varphi) \cong (V', \varphi') \otimes_{\mathbb{F}_{q^{n'}}} \overline{\mathbb{F}_q}$$

Alors $\varphi'^{n'} : V' \to V'$ est une application $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^{n'}}$–linéaire et bijective, et la sous–algèbre engendrée

$$F[\varphi'^{n'}] \subset \mathrm{End}_{F\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^{n'}}}(V')$$

est de dimension finie sur F et commutative.

Si $\Pi' : V \to V$ est le prolongement $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$–linéaire de $\varphi'^{n'}$, c'est–à–dire $\Pi' = \varphi'^{n'} \otimes \mathrm{Id}_{\overline{\mathbb{F}_q}}$, la F–sous–algèbre

$$F' = F[\Pi'] \subset \mathrm{End}_{F\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}}(V)$$

est isomorphe à $F[\varphi'^{n'}]$, donc est aussi de dimension finie sur F et commutative.

De plus, Π' commute avec φ, d'où

$$F' \subset \mathrm{End}(V, \varphi)\,.$$

Posons $F_{(V,\varphi)} = \bigcap_{N\geq 1} F[\Pi'^N]$.

C'est une F–algèbre commutative et de dimension finie, et il existe un entier $N \geq 1$ tel que $F_{(V,\varphi)} = F[\Pi'^N]$.

Comme $\Pi'^N : V \to V$ est bijective, Π'^N est élément de $F^\times_{(V,\varphi)}$ et on peut poser

$$\Pi_{(V,\varphi)} = (\Pi'^N)^{1/n'N} \in F^\times_{(V,\varphi)} \otimes \mathbb{Q}\,.$$

On vérifie facilement que $(F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)})$ est une φ–paire et qu'elle est indépendante des choix à unique isomorphisme près.

On a le théorème suivant, dû à Drinfeld :

Théorème 4. —

(i) *La catégorie des φ–espaces sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ est abélienne, F–linéaire et semi–simple.*

(ii) *L'application $(V, \varphi) \longmapsto (F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)})$ ci–dessus induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de φ–espaces irréductibles et l'ensemble des classes d'isomorphismes de φ–paires $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$, où $\widetilde{F}$ est un corps.*

(iii) *Si $\widetilde{F}$ est un corps extension finie de F, et $\widetilde{\Pi} \in \widetilde{F}^\times \otimes \mathbb{Q}$, notons $d(\widetilde{\Pi})$ le plus petit dénominateur commun des rationnels* $\deg(\tilde{x})\tilde{x}(\widetilde{\Pi})$, *où $\tilde{x}$ décrit l'ensemble des places de $\widetilde{F}$ et* $\deg(\tilde{x})$ *est le degré sur $\mathbb{F}_q$ du corps résiduel de $\tilde{x}$.*

Avec ces notations, on a pour tout φ–espace irréductible (V,φ)

$$\dim_{F\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}}(V) = [F_{(V,\varphi)} : F]d(\Pi_{(V,\varphi)})$$

et $\mathrm{End}(V,\varphi)$ *est une algèbre à division centrale sur* $F_{(V,\varphi)}$ *de dimension* $d(\Pi_{(V,\varphi)})^2$ *et d'invariants*

$$\mathrm{inv}_{\tilde{x}}(\mathrm{End}(V,\varphi)) = -\deg(\tilde{x})\tilde{x}(\Pi_{(V,\varphi)}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

en les places $\tilde{x}$ *de* $F_{(V,\varphi)}$.

□

Soit maintenant x une place de F. On rappelle que F_x désigne la complétion correspondante de F, O_x l'anneau des entiers de F_x, $\varpi_x \in O_x$ un élément uniformisant, $\kappa(x)$ le corps résiduel et $\deg(x)$ la dimension de $\kappa(x)$ sur $\mathbb{F}_q$.

DÉFINITION 5. — *Un F_x–module de Dieudonné sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ est un $F_x\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$–module N de type fini qui est muni d'une application* $\mathrm{Id}_{F_x}\widehat{\otimes}\,\mathrm{Frob}$*–linéaire bijective* $\psi : N \to N$.

Un morphisme α entre deux F_x–modules de Dieudonné (N_1,ψ_1) et (N_2,ψ_2) est une application $F_x\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$–linéaire $N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2$ telle que $\psi_2\circ\alpha = \alpha\circ\psi_1$.

Les F_x–modules de Dieudonné forment une catégorie qui est F_x–linéaire, abélienne, nœthérienne et artinienne.

Soit $i_0 : \kappa(x) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ un plongement fixé sur $\mathbb{F}_q$.

Et pour $j \in \mathbb{Z}/\deg(x)\mathbb{Z}$, notons $i_j = \mathrm{Frob}^j \circ i_0 : \kappa(x) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$. Alors on a un scindage canonique, où chacun des facteurs est un corps :

$$F_x\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q} = \prod_j F_x\widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_j}\overline{\mathbb{F}_q}$$

Par conséquent, la donnée d'un F_x–module de Dieudonné (N,ψ) est équivalente à celle d'espaces de dimension finie N_j sur $F_x\widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_j}\overline{\mathbb{F}_q}$ et d'applications semilinéaires bijectives $\varphi_j : N_j \to N_{j+1}$ sur

$$\mathrm{Id}_{F_x}\widehat{\otimes}_{\kappa(x)}\mathrm{Frob} : F_x\widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_j}\overline{\mathbb{F}_q} \xrightarrow{\sim} F_x\widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_{j+1}}\overline{\mathbb{F}_q}\,.$$

Cela revient encore à se donner un espace vectoriel N_0 de dimension finie sur $F_x\widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_0}\overline{\mathbb{F}_q}$ et une application $\mathrm{Id}_{F_x}\widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_0}\mathrm{Frob}^{\deg(x)}$–linéaire bijective

$$\psi_0 = \varphi_{\deg(x)-1}\circ\varphi_{\deg(x)-2}\circ\cdots\circ\varphi_0 : N_0 \to N_0\,.$$

Soient maintenant $e \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux.

Soit N_0 un espace vectoriel de dimension e sur $F_x \widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_0} \overline{\mathbb{F}_q}$ avec pour base $n_1, \ldots, n_e$ et soit $\psi_0 : N_0 \to N_0$ l'application $\mathrm{Id}_{F_x} \widehat{\otimes}_{\kappa(x),i_0} \mathrm{Frob}^{\deg(x)}$–linéaire bijective définie par :

$$\psi_0(n_i) = \begin{cases} \varpi_x^r n_e & \text{si } i = 1 \\ n_{i-1} & \text{si } i = 2, \ldots, e \end{cases}$$

D'après les considérations précédentes, la paire (N_0, ψ_0) définit un F_x–module de Dieudonné que l'on notera $(N_{e,r}; \psi_{e,r})$. Sa classe d'isomorphismes ne dépend pas des choix du plongement $i_0 : \kappa(x) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ et de l'élément uniformisant $\varpi_x \in O_x$.

Toujours d'après Drinfeld, on a les résultats suivants :

THÉORÈME 6. —

(i) *La catégorie abélienne des F_x–modules de Dieudonné sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ est semi–simple.*

(ii) *Les F_x–modules de Dieudonné irréductibles sont exactement les $(N_{e,r}; \psi_{e,r})$ définis ci–dessus.*

(iii) *Pour tous entiers $e \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}$ avec $e \wedge r = 1$,* $\mathrm{End}(N_{e,r}; \psi_{e,r})$ *est une algèbre à division centrale sur F_x d'invariant $-\frac{r}{e} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

□

PROPOSITION 7. — *Soit (V, φ) un φ–espace irréductible et $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi}) = (F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)})$ la φ–paire qui lui correspond.*

Pour toute place $\tilde{x}$ de $\widetilde{F}$ au–dessus de x, posons

$$(V_{\tilde{x}}, \varphi_{\tilde{x}}) = \widetilde{F}_{\tilde{x}} \widehat{\otimes}_{\widetilde{F}} (V, \varphi) .$$

Le scindage canonique $F_x \otimes_F \widetilde{F} = \prod_{\tilde{x}|x} \widetilde{F}_{\tilde{x}}$ induit un scindage $(V_x, \varphi_x) = \bigoplus_{\tilde{x}|x} (V_{\tilde{x}}, \varphi_{\tilde{x}})$ de $(V_x, \varphi_x) = F_x \widehat{\otimes}_F (V, \varphi)$ comme F_x–module de Dieudonné.

Alors, pour toute place $\tilde{x}$ de $\widetilde{F}$ au–dessus de x, $(V_{\tilde{x}}, \varphi_{\tilde{x}})$ est isomorphe à

$$(N_{d_{\tilde{x}}, r_{\tilde{x}}};\ \psi_{d_{\tilde{x}}, r_{\tilde{x}}})^{s_{\tilde{x}}}$$

où les entiers $d_{\tilde{x}}$, $r_{\tilde{x}}$ et $s_{\tilde{x}}$ sont uniquement déterminés par :

$$\begin{cases} d_{\tilde{x}} \geq 1\,,\ r_{\tilde{x}} \in \mathbb{Z}\,,\ s_{\tilde{x}} \geq 1 \\ d_{\tilde{x}} \wedge r_{\tilde{x}} = 1 \\ r_{\tilde{x}} / d_{\tilde{x}} = \deg(\tilde{x}) \tilde{x}(\widetilde{\Pi}) / [\widetilde{F}_{\tilde{x}} : F_x] \\ d_{\tilde{x}} s_{\tilde{x}} = d(\widetilde{\Pi}) [\widetilde{F}_{\tilde{x}} : F_x] \end{cases}$$

□

Pour (N,ψ) un F_x–module de Dieudonné sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, on appellera réseau dans N tout sous–$O_x\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$–module de type fini de N qui engendre N comme $F_x\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$–module.

Par ailleurs, on notera

$$N^\psi = \{n \in N \mid \psi(n) = n\}\,.$$

LEMME 8. — *Les propriétés suivantes d'un F_x–module de Dieudonné (N,ψ) sont équivalentes :*

(i) *Il existe un réseau M de N tel que $\psi(M) = M$.*

(ii) *Le morphisme canonique $N^\psi\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q} \to N$ est bijectif.*

(iii) *(N,ψ) est isomorphe à une puissance de $(N_{1,0};\psi_{1,0})$.*

De plus, si ces conditions sont remplies, alors pour tout réseau M de N vérifiant $\psi(M) = M$, $M^\psi = M \cap N^\psi$ est un réseau dans le F_x–espace vectoriel de dimension finie N^ψ et le morphisme canonique $M^\psi\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q} \to M$ est un isomorphisme.

$\square$

LEMME 9. — *Les propriétés suivantes de (N,ψ) sont équivalentes :*

(i) *L'ensemble $\mathcal{N}$ des réseaux M de N tels que :*

- $\psi(M) \subseteq M$ [*resp.* $M \subseteq \psi(M)$],
- $\exists n \geq 1$, $\psi^n(M) \subseteq \varpi_x M$ [*resp.* $M \subseteq \varpi_x\psi^n(M)$],
- $\dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(M/\psi(M)) = 1$ [*resp.* $\dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(\psi(M)/M) = 1$],

est non vide.

(ii) *Il existe un entier $e \geq 1$ tel que (N,ψ) soit isomorphe à $(N_{e,1};\psi_{e,1})$ [resp. $(N_{e,-1};\psi_{e,-1})$].*

De plus, si ces conditions sont réalisées, $\mathcal{N}$ est un espace principal homogène pour l'action du groupe $\mathbb{Z}$ donnée par

$$\mathbb{Z} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \quad (m,M) \longmapsto \psi^m(M)\,.$$

$\square$

LEMME 10. — *Les propriétés suivantes de (N,ψ) sont équivalentes :*

(i) *Il existe un réseau M dans N tel que :*

- $\psi(M) \subseteq M$ [*resp.* $M \subseteq \psi(M)$]
- $\dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(M/\psi(M)) = 1$ [*resp.* $\dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(\psi(M)/M) = 1$]

(ii) *Il existe des entiers* $e \geq h \geq 1$ *tels que* (N, ψ) *soit isomorphe à* $(N_{1,0}; \psi_{1,0})^{e-h} \oplus (N_{h,1}; \psi_{h,1})$ [*resp.* $(N_{1,0}; \psi_{1,0})^{e-h} \oplus (N_{h,-1}; \psi_{h,-1})$].

De plus, si ces propriétés sont satisfaites, tout réseau M *de* N *satisfaisant les conditions de* (i) *se décompose de manière unique en somme directe de deux* $O_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$*–sous–modules libres*

$$M = M^{\text{ét}} \oplus M^c$$

tels que :

- $\psi(M^{\text{ét}}) = M^{\text{ét}}$
- $\psi(M^c) \subseteq M^c$ [*resp.* $M^c \subseteq \psi(M^c)$]
- $\exists n \geq 1,\ \psi^n(M^c) \subseteq \varpi_x M^c$ [*resp.* $M^c \subseteq \varpi_x \psi^n(M^c)$]
- $\dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(M^c/\psi(M^c)) = 1$ [*resp.* $\dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(\psi(M^c)/M^c) = 1$]

□

2. — Description à isogénie près des $\mathcal{D}$–chtoucas de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$

Dans cette section et jusqu'à la fin du chapitre, on fixe 0 et ∞ deux points fermés de X ou, si l'on préfère, deux places de F.

On suppose que 0 et ∞ sont distincts, et qu'ils sont dans l'ouvert $X' \subseteq X$. Ainsi les algèbres $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_0$ et $\mathcal{D}_\infty = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_\infty$ sont respectivement isomorphes à $M_d(O_0)$ et $M_d(O_\infty)$.

On fixe également deux plongements $\kappa(0) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ et $\kappa(\infty) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ sur $\mathbb{F}_q$, autrement dit deux points de $X(\overline{\mathbb{F}_q})$ au-dessus de 0 et ∞ qu'on notera $\overline{0}$ et $\overline{\infty}$.

DÉFINITION 1. — *Si* $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow^{j} & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow_{t} & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ *est un* $\mathcal{D}$*–chtouca de rang* r *sur* $\overline{\mathbb{F}_q}$ *ayant* $\overline{0}$ *pour zéro et* $\overline{\infty}$ *pour pôle, on appelle fibre générique de* $\widetilde{\mathcal{E}}$ *le triplet* (V, φ, i) *où :*

- V *est la fibre générique de* $\mathcal{E}$,
- φ *est l'application* $\mathrm{Id}_F \otimes \mathrm{Frob}$*–linéaire composée*

$$V \xrightarrow{\tau} {}^\tau V \xrightarrow{j^{-1} \circ t} V\,,$$

- $i : D^{op} \to \mathrm{End}(V, \varphi)$ *est l'homomorphisme de F-algèbres induit par l'action à droite de $\mathcal{D}$ sur $\widetilde{\mathcal{E}}$.*

On dira que deux tels $\mathcal{D}$-chtoucas sont isogènes si leurs fibres génériques respectives sont isomorphes.

PROPOSITION 2. — *Il existe une bijection naturelle de l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{D}$-chtoucas de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ ayant $\overline{0}$ pour zéro et $\overline{\infty}$ pour pôle sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de paires $((V, \varphi, i),\ (M_x)_{x \in |X|})$, où :*

- (V, φ) *est un φ-espace sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, de rang rd^2 sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$,*
- $i : D^{op} \to \mathrm{End}(V, \varphi)$ *est un homomorphisme de F-algèbres,*
- *les M_x, indexés par les points fermés de X, sont des réseaux, libres de rang r sur $\mathcal{D}_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, dans les F_x-modules de Dieudonné $(V_x, \varphi_x) = (F_x \widehat{\otimes}_F V,\ F_x \widehat{\otimes}_F \varphi)$ et qui vérifient :*

(i) *on a $\varpi_\infty \varphi_\infty(M_\infty) \subseteq M_\infty \subseteq \varphi_\infty(M_\infty)$; le module $\varphi_\infty(M_\infty)/M_\infty$ sur $\kappa(\infty) \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ est de longueur d et supporté par le point $\overline{\infty}$;*

(ii) *on a $\varpi_0 M_0 \subseteq \varphi_0(M_0) \subseteq M_0$; le module $M_0/\varphi_0(M_0)$ sur $\kappa(0) \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ est de longueur d et supporté par le point $\overline{0}$;*

(iii) *si $x \neq \infty, 0$ on a $\varphi_x(M_x) = M_x$;*

(iv) *n'importe quelle base de l'espace vectoriel V sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ est telle que pour presque toute place x, elle s'envoie dans le réseau M_x de V_x et l'engendre comme $O_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$-module.*

Cette bijection est induite par l'application qui à tout tel $\mathcal{D}$-chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ *associe sa fibre générique ainsi que la famille des réseaux*

$$M_x = \mathcal{E} \widehat{\otimes}_{O_X} O_x \subset \mathcal{E} \widehat{\otimes}_{O_X} F_x .$$

Démonstration : Il est évident que si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}$-chtouca de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ ayant $\overline{0}$ pour zéro et $\overline{\infty}$ pour pôle, et si $((V, \varphi, i), (M_x)_{x \in X})$ est la paire associée, alors V est de rang rd^2 sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, (V, φ) est un φ-espace sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, et les réseaux M_x satisfont les propriétés (i), (ii), (iii), (iv).

Réciproquement, à toute paire $((V, \varphi, i), (M_x)_{x \in |X|})$ vérifiant les conditions de la proposition, on cherche à associer un $\mathcal{D}$–chtouca $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$.

Commençons par noter $\overline{F} = F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ le corps des fonctions de la courbe $\overline{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ et pour tout point fermé $\overline{x}$ de $\overline{X}$, soient $\overline{F}_{\overline{x}}$ le complété de $\overline{F}$ selon la valuation associée à $\overline{x}$ et $O_{\overline{x}}$ son anneau des entiers. Si x est un point fermé de X et $\overline{x}$ décrit l'ensemble fini des points fermés de $\overline{X}$ au–dessus de x, on a

$$F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} = \prod_{\overline{x}} \overline{F}_{\overline{x}} \quad \text{et} \quad O_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} = \prod_{\overline{x}} O_{\overline{x}} \, .$$

Pour tout point fermé $\overline{x}$ de $\overline{X}$, d'image x dans X, on pose

$$V_{\overline{x}} = V \otimes_{\overline{F}} \overline{F}_{\overline{x}} = V_x \otimes_{(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})} \overline{F}_{\overline{x}} \quad \text{et} \quad M_{\overline{x}} = M_x \otimes_{(O_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})} O_{\overline{x}} \, .$$

Ainsi, $M_{\overline{x}}$ est un réseau dans $V_{\overline{x}}$, libre de rang r sur la $O_{\overline{x}}$–algèbre $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_{\overline{x}}$, et les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) des M_x se traduisent par :

(i)' $M_{\overline{\infty}} \subseteq \varphi_{\overline{\infty}}(M_{\overline{\infty}})$ et le quotient $\varphi_{\overline{\infty}}(M_{\overline{\infty}})/M_{\overline{\infty}}$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel $\kappa(\overline{\infty}) = \overline{\mathbb{F}_q}$, de dimension d,

(ii)' $\varphi_{\overline{0}}(M_{\overline{0}}) \subseteq M_{\overline{0}}$ et le quotient $M_{\overline{0}}/\varphi_{\overline{0}}(M_{\overline{0}})$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel $\kappa(\overline{0}) = \overline{\mathbb{F}_q}$, de dimension d,

(iii)' si $\overline{x} \neq \overline{0}, \overline{\infty}$, $\varphi_{\overline{x}}(M_{\overline{x}}) = M_{\overline{x}}$,

(iv)' n'importe quelle base de l'espace vectoriel V sur $\overline{F}$ est telle que pour presque toute place $\overline{x}$, elle s'envoie dans le réseau $M_{\overline{x}}$ de $V_{\overline{x}}$ et l'engendre comme $O_{\overline{x}}$–module.

Définissons alors les faisceaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sur $\overline{X}$ par leurs sections sur tout ouvert U de $\overline{X}$:

$$H^0(U, \mathcal{E}) = \Big(\prod_{\overline{x} \in U} M_{\overline{x}}\Big) \cap V \subseteq \prod_{\overline{x} \in U} V_{\overline{x}}$$
$$H^0(U, \mathcal{E}') = \Big(\prod_{\overline{x} \in U} (M_{\overline{x}} + \varphi_{\overline{x}}(M_{\overline{x}}))\Big) \cap V \subseteq \prod_{\overline{x} \in U} V_{\overline{x}}$$

Comme pour tout point fermé $\overline{x}$ de $\overline{X}$ on a $M_{\overline{x}} \otimes_{O_{\overline{x}}} \overline{F}_{\overline{x}} = V_{\overline{x}}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{O}_{\overline{X}}$–Modules quasi–cohérents. Et d'après la propriété (iv)', leurs fibres génériques s'identifient à V. On a des plongements évidents $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ et ${}^{\tau}\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ et aussi une action de $\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\overline{X}}$ sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ compatible avec ces plongements. Puis, d'après le théorème d'approximation forte, on a pour tout point fermé $\overline{x}$ de $\overline{X}$

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} O_{\overline{x}} = M_{\overline{x}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} O_{\overline{x}} = M_{\overline{x}} + \varphi_{\overline{x}}(M_{\overline{x}})\,.$$

On en déduit que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des $\mathcal{O}_{\overline{X}}$–Modules localement libres de rang rd^2 puis, d'après le lemme 4 du paragraphe I.2, qu'ils sont localement libres de rang r sur $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\overline{X}}$.

On en déduit aussi, d'après les propriétés (i)', (ii)' et (iii)', que $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/{}^{\tau}\mathcal{E}$ sont supportés par $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ respectivement et sont de dimension d sur $\overline{\mathbb{F}_q}$.

Ceci termine la démonstration. □

LEMME 3. — *Soit (V, φ, i) la fibre générique d'un $\mathcal{D}$–chtouca de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, ayant $\overline{0}$ pour zéro et $\overline{\infty}$ pour pôle,* $\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$.

Soit $(V, \varphi) = (V', \varphi') \oplus (V'', \varphi'')$ la décomposition de (V, φ) dans la catégorie semi–simple des φ–espaces, où l'on a regroupé dans (V'', φ'') tous les facteurs triviaux c'est-à-dire isomorphes à $(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}, \mathrm{Id}_F \otimes \mathrm{Frob})$ et dans (V', φ') tous les autres facteurs.

Alors :

(i) *(V', φ') et (V'', φ'') sont stables par l'action à droite de D,*

(ii) *(V', φ') est irréductible au sens qu'il ne possède pas de sous–φ–espace stable par D,*

(iii) *le rang de (V', φ') est un multiple de d^2, donc de la forme $r'd^2$ avec $r' \leq r$.*

(iv) *(V', φ') est non nul (soit $r' \geq 1$) et il est isotypique, c'est-à-dire ne fait intervenir dans sa décomposition qu'une seule classe d'isomorphismes de φ–espaces irréductibles.*

On appellera (V'', φ'') la partie triviale de (V, φ, i), (V', φ') sa partie irréductible et r', $1 \leq r' \leq r$, son rang irréductible.

Démonstration : (i) résulte de ce que, comme (V', φ') et (V'', φ'') sont sans facteurs irréductibles communs dans la catégorie semi–simple des φ–espaces, on a

$$\mathrm{End}(V, \varphi) = \mathrm{End}(V', \varphi') \times \mathrm{End}(V'', \varphi'')\,.$$

Pour (ii) et (iii), considérons (W,φ) un sous–φ–espace de (V,φ) stable par l'action de D. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ les sous–fibrés maximaux de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ engendrés par $W \subseteq V$. Les morphismes $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \to \mathcal{E}/\mathcal{F}$, $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \to \mathcal{E}'/\mathcal{F}'$, $\mathcal{F} \to \mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ et ${}^{\tau}\mathcal{F} \to \mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ sont partout nuls puisqu'ils le sont sur la fibre générique et que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ sont sans torsion. Autrement dit, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ sont stables par l'action de $\mathcal{D}$ et les plongements $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$, ${}^{\tau}\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ induisent des plongements $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$, ${}^{\tau}\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$.

Or d'après le lemme du serpent appliqué au diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/\mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{E}'/\mathcal{F}' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on a une suite exacte de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$–Modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'/\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}'/\mathcal{E} \longrightarrow (\mathcal{E}'/\mathcal{F}')/(\mathcal{E}/\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est supporté par $\overline{\infty}$ et de dimension d sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, donc irréductible puisque $\mathcal{D}_\infty \cong M_d(O_\infty)$.

On en déduit que ou bien $\mathcal{F}'/\mathcal{F} = 0$ ou bien $\mathcal{F}'/\mathcal{F} = \mathcal{E}'/\mathcal{E}$. Dans le premier cas, comme ${}^{\tau}\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ ont même degré, on a aussi $\mathcal{F}'/{}^{\tau}\mathcal{F} = 0$, d'où un isomorphisme ${}^{\tau}\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$. D'après le lemme 3 du paragraphe I.3, on peut écrire $\mathcal{F} \cong F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, où F est un $\mathcal{D}$–Module sur X. Donc (W,φ) n'a que des facteurs triviaux et son rang est un multiple de d^2.

De même, dans le second cas, $(V/W,\varphi)$ n'a que des facteurs triviaux et son rang est un multiple de d^2.

Ceci prouve (ii) et (iii).

(iv). Si l'on avait $(V,\varphi) = (V'',\varphi'')$, alors par exemple (V_0,φ_0) serait une puissance de $(N_{1,0};\psi_{1,0})$, donc ne posséderait pas de réseau M_0 vérifiant $\varphi_0(M_0) \subsetneq M_0$, ce qui contredit la proposition 2.

Par ailleurs, si (V',φ') n'était pas isotypique, on pourrait écrire $(V',\varphi') = (V_1',\varphi_1') \oplus (V_2',\varphi_2')$ avec (V_1',φ_1') et (V_2',φ_2') sans facteurs communs donc stables par D comme dans (i). Et cela contredirait (ii). □

D'après le lemme 10 du paragraphe III.1, on a :

LEMME 4. — *Soit $((V,\varphi,i),\ (M_x)_{x\in|X|})$ une paire comme dans la proposition* 2.

Et soit r', $1 \le r' \le r$, le rang irréductible de (V,φ,i).

Le choix d'un isomorphisme $\mathcal{D}_\infty \cong M_d(O_\infty)$ [*resp.* $\mathcal{D}_0 \cong M_d(O_0)$] *détermine par équivalence de Morita un scindage canonique*

$$\begin{array}{lll} & (V_\infty, \varphi_\infty) = (\widetilde{V}_\infty, \widetilde{\varphi}_\infty)^d & \textit{et} \quad M_\infty = (\widetilde{M}_\infty)^d \\ [\textit{resp.} & (V_0, \varphi_0) = (\widetilde{V}_0, \widetilde{\varphi}_0)^d & \textit{et} \quad M_0 = (\widetilde{M}_0)^d \ ] \end{array}$$

où $(\widetilde{V}_\infty, \widetilde{\varphi}_\infty)$ [*resp.* $(\widetilde{V}_0, \widetilde{\varphi}_0)$] *est un* F_∞ [*resp.* F_0]*-module de Dieudonné sur* $\overline{\mathbb{F}_q}$*, et* $\widetilde{M}_\infty \subseteq \widetilde{V}_\infty$ [*resp.* $\widetilde{M}_0 \subseteq \widetilde{V}_0$] *est un réseau.*

De plus, $(\widetilde{V}_\infty, \widetilde{\varphi}_\infty)$ [*resp.* $(\widetilde{V}_0, \widetilde{\varphi}_0)$] *se décompose canoniquement en*

$$(\widetilde{V}_\infty, \widetilde{\varphi}_\infty) = (\widetilde{V}_{\widetilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}}) \oplus (\widetilde{V}_\infty^{\widetilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_\infty^{\widetilde{\infty}}) \ [\textit{resp.}\ (\widetilde{V}_0, \widetilde{\varphi}_0) = (\widetilde{V}_{\widetilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{0}}) \oplus (\widetilde{V}_0^{\widetilde{0}}, \widetilde{\varphi}_0^{\widetilde{0}})]$$

où pour un entier h_∞*,* $1 \leq h_\infty \leq r'd$ [*resp.* $h_0, 1 \leq h_0 \leq r'd$]*, on a*

$$\begin{array}{lll} & (\widetilde{V}_{\widetilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}}) \cong (N_{h_\infty,-1}; \psi_{h_\infty,-1}) & (\widetilde{V}_\infty^{\widetilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_\infty^{\widetilde{\infty}}) \cong (N_{1,0}; \psi_{1,0})^{rd-h_\infty} \\ [\textit{resp.} & (\widetilde{V}_{\widetilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{0}}) \cong (N_{h_0,1}; \psi_{h_0,1}) & (\widetilde{V}_0^{\widetilde{0}}, \widetilde{\varphi}_0^{\widetilde{0}}) \cong (N_{1,0}; \psi_{1,0})^{rd-h_0} \ ]. \end{array}$$

Enfin, le réseau $\widetilde{M}_\infty$ *dans* $\widetilde{V}_\infty$ [*resp.* $\widetilde{M}_0$ *dans* $\widetilde{V}_0$] *est la somme directe d'un réseau* $\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}}$ *dans* $\widetilde{V}_{\widetilde{\infty}}$ [*resp.* $\widetilde{M}_{\widetilde{0}}$ *dans* $\widetilde{V}_{\widetilde{0}}$] *et d'un réseau* $\widetilde{M}_\infty^{\widetilde{\infty}}$ *dans* $\widetilde{V}_\infty^{\widetilde{\infty}}$ [*resp.* $\widetilde{M}_0^{\widetilde{0}}$ *dans* $\widetilde{V}_0^{\widetilde{0}}$] *qui vérifient :*

- $\widetilde{\varphi}_\infty^{\widetilde{\infty}}(\widetilde{M}_\infty^{\widetilde{\infty}}) = \widetilde{M}_\infty^{\widetilde{\infty}}$ [*resp.* $\widetilde{\varphi}_0^{\widetilde{0}}(\widetilde{M}_0^{\widetilde{0}}) = \widetilde{M}_0^{\widetilde{0}}$],
- $\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}} \subseteq \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}}(\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}})$ [*resp.* $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{0}}(\widetilde{M}_{\widetilde{0}}) \subseteq \widetilde{M}_{\widetilde{0}}$],
- $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}}(\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}})/\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}}$ [*resp.* $\widetilde{M}_{\widetilde{0}}/\widetilde{\varphi}_{\widetilde{0}}(\widetilde{M}_{\widetilde{0}})$] *est supporté par* $\widetilde{\infty}$ [*resp.* $\widetilde{0}$] *et de dimension* 1 *sur* $\overline{\mathbb{F}_q}$*,*
- $\exists n \geq 1$, $\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}} \subseteq \varpi_\infty \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}}^n(\widetilde{M}_{\widetilde{\infty}})$ [*resp.* $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{0}}^n(\widetilde{M}_{\widetilde{0}}) \subseteq \varpi_0 \widetilde{M}_{\widetilde{0}}$].

$\square$

Les notations $\widetilde{\infty}$ et $\widetilde{0}$ qui apparaissent dans cette proposition vont maintenant acquérir un sens indépendant et désigner deux places d'une certaine extension finie $\widetilde{F}$ de F comme suit :

Proposition 5. — *Soit* $((V,\varphi,i),(M_x)_{x\in|X|})$ *une paire comme dans la proposition* 2.

Soit $(V,\varphi,i)=(V',\varphi',i)\oplus(V'',\varphi'',i)$ *la décomposition de* (V,φ,i) *en partie irréductible et partie triviale, et soit* r', $1\leq r'\leq r$, *son rang irréductible. Soit* (W,ψ) *l'unique* φ*–espace irréductible qui entre dans la décomposition de* (V',φ'), *et soit* $(\widetilde{F},\widetilde{\Pi})$ *la* φ*–paire associée.*

Alors :

(i) *Le* φ*–espace* (V',φ') *est isomorphe à* $(W,\psi)^d$.

(ii) *Si* $[\widetilde{F}:F]$ *désigne le degré sur* F *du corps* $\widetilde{F}$, *on a*

$$[\widetilde{F}:F]d(\widetilde{\Pi})=r'd\,.$$

(iii) *Il existe seulement deux places* $\tilde{x}$ *de* $\widetilde{F}$ *telles que* $\tilde{x}(\widetilde{\Pi})\neq 0$ *; l'une, notée* $\tilde{\infty}$, *divise* ∞ *et l'autre, notée* $\tilde{0}$, *divise* 0.

(iv) *Si* h_∞, h_0, $1\leq h_\infty,h_0\leq r'd$, *sont les deux entiers introduits dans le lemme* 4, *on a*

$$h_\infty=\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}[\widetilde{F}_{\tilde{\infty}}:F_\infty]\qquad h_0=\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}[\widetilde{F}_{\tilde{0}}:F_0]\,.$$

(v) *Si on note* $\Delta=\mathrm{End}(V,\varphi,i)$, $\Delta'=\mathrm{End}(V',\varphi',i)$, $\Delta''=\mathrm{End}(V'',\varphi'',i)$ *avec donc* $\Delta=\Delta'\times\Delta''$, *on a :*

- Δ' *est une algèbre à division centrale sur* $\widetilde{F}$, *de dimension* $(r'd/[\widetilde{F}:F])^2$ *et d'invariants dans* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{cases}[\widetilde{F}:F]/r'd \text{ en la place } \tilde{\infty}\\ -[\widetilde{F}:F]/r'd \text{ en la place } \tilde{0}\\ [\widetilde{F}_{\tilde{x}}:F_x]\mathrm{inv}_x(D) \text{ en toute place } \tilde{x}\neq\tilde{\infty},\tilde{0} \text{ de } \widetilde{F} \text{ d'image } x \text{ dans } F\end{cases}$$

- Δ'' *est isomorphe à* $M_{r-r'}(D)$.

Démonstration : Il existe un entier $n\geq 1$ tel que (V',φ') soit isomorphe à $(W,\psi)^n$. Donc le rang du φ–espace (W,ψ) s'écrit

$$\mathrm{rg}(W)=r'd^2/n\,. \tag{1}$$

D'autre part, d'après le théorème 4 (iii) du paragraphe III.1, il est aussi égal à

$$\mathrm{rg}(W)=[\widetilde{F}:F]d(\widetilde{\Pi})\,. \tag{2}$$

D'après ce même théorème, $\widetilde{F}$ est un corps et $\mathrm{End}(W,\psi)$ est une algèbre à division centrale sur $\widetilde{F}$ dont la dimension est $d(\widetilde{\Pi})^2$ et dont l'invariant en chaque place $\tilde{x}$ de $\widetilde{F}$ est

$$-\deg(\tilde{x})\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,.$$

On en déduit en particulier que $\mathrm{End}(V',\varphi') \cong M_n(\mathrm{End}(W,\psi))$ est une algèbre centrale simple sur $\widetilde{F}$ d'invariants

$$-\deg(\tilde{x})\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

et de dimension $n^2 d(\widetilde{\Pi})^2 = r'^2 d^4/[\widetilde{F}:F]^2$.

Or via i, l'algèbre à division centrale D^{op} sur F se plonge dans $\mathrm{End}(V,\varphi)$, donc aussi l'algèbre centrale simple $D^{op}\otimes_F \widetilde{F}$ de dimension d^2 sur $\widetilde{F}$.

Par conséquent, l'algèbre $\Delta' = \mathrm{End}(V',\varphi',i)$ qui est le commutateur dans $\mathrm{End}(V',\varphi')$ de D^{op} ou de $D^{op}\otimes_F \widetilde{F}$ est une algèbre centrale simple sur $\widetilde{F}$ d'invariant

$$-\deg(\tilde{x})\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) + [\widetilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]\mathrm{inv}_x D \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{3}$$

en chaque place $\tilde{x}$ de $\widetilde{F}$ au–dessus de x dans F, et de dimension

$$r'^2 d^2/[\widetilde{F}:F]^2 \text{ sur } \widetilde{F}\,. \tag{3'}$$

En particulier, on voit que $[\widetilde{F}:F]$ divise $r'd$.

Maintenant, comme $\widetilde{F}$ s'identifie au centre de $\Delta' = \mathrm{End}(V',\varphi',i)$, on voit que $\widetilde{F}\otimes_F F_\infty$ [resp. $\widetilde{F}\otimes_F F_0$] se plonge dans $\mathrm{End}(V'_\infty,\varphi'_\infty,i)$ [resp. $\mathrm{End}(V'_0,\varphi'_0,i)$]. De plus, le choix d'isomorphismes $\mathcal{D}_\infty \cong M_d(O_\infty)$ et $\mathcal{D}_0 \cong M_d(O_0)$ comme dans le lemme 4 détermine par équivalence de Morita des décompositions de la forme

$$(V'_\infty,\varphi'_\infty) \cong (\widetilde{V}'_\infty,\widetilde{\varphi}'_\infty)^d \quad (V'_0,\varphi'_0) \cong (\widetilde{V}'_0,\widetilde{\varphi}'_0)^d$$

et des isomorphismes

$$\mathrm{End}(V'_\infty,\varphi'_\infty,i) \cong \mathrm{End}(\widetilde{V}'_\infty,\widetilde{\varphi}'_\infty) \quad \mathrm{End}(V'_0,\varphi'_0,i) \cong \mathrm{End}(\widetilde{V}'_0,\widetilde{\varphi}'_0)\,.$$

Or, d'après le lemme 4, $(\widetilde{V}'_\infty,\widetilde{\varphi}'_\infty)$ [resp. $(\widetilde{V}'_0,\widetilde{\varphi}'_0)$] qui est un facteur de $(\widetilde{V}_\infty,\widetilde{\varphi}_\infty)$ [resp. $(\widetilde{V}_0,\widetilde{\varphi}_0)$] tel que le facteur complémentaire soit trivial, est nécessairement de la forme

$$\begin{array}{llll} & (\widetilde{V}'_\infty,\widetilde{\varphi}'_\infty) \cong (N_{h_\infty,-1};\psi_{h_\infty,-1}) & \oplus & (N_{1,0};\psi_{1,0})^{r'd-h_\infty} \\ [\text{resp.} & (\widetilde{V}'_0,\widetilde{\varphi}'_0) \cong (N_{h_0,1};\psi_{h_0,1}) & \oplus & (N_{1,0};\psi_{1,0})^{r'd-h_0} \quad] \end{array}$$

d'où un isomorphisme induit

$$\begin{array}{lll} & \mathrm{End}(\widetilde{V}'_\infty, \widetilde{\varphi}'_\infty) \cong \mathrm{End}(N_{h_\infty,-1}; \psi_{h_\infty,-1}) & \times \quad M_{r'd-h_\infty}(F_\infty) \\ [\text{resp.} & \mathrm{End}(\widetilde{V}'_0, \widetilde{\varphi}'_0) \cong \mathrm{End}(N_{h_0,1}; \psi_{h_0,1}) & \times \quad M_{r'd-h_0}(F_0) \quad] \end{array}$$

où, d'après le théorème 6 (iii) du paragraphe III.1, $\mathrm{End}(N_{h_\infty,-1}; \psi_{h_\infty,-1})$] [resp. $\mathrm{End}(N_{h_0,1}; \psi_{h_0,1})$] est une algèbre à division centrale sur F_∞[resp. F_0] d'invariant $1/h_\infty$ [resp. $-1/h_0$] dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Donc il existe une unique place $\tilde{\infty}$ [resp. $\tilde{0}$] de $\widetilde{F}$ au-dessus de la place ∞ [resp. 0] de F, telle que

$$\widetilde{F}_{\tilde{\infty}} \subseteq \mathrm{End}(N_{h_\infty,-1}; \psi_{h_\infty,-1}) \quad [\text{resp. } \widetilde{F}_{\tilde{0}} \subseteq \mathrm{End}(N_{h_0,1}; \psi_{h_0,1})]\,.$$

Et si on pose $\widetilde{V}'_{\tilde{\infty}} = \widetilde{V}'_\infty \otimes_{(\widetilde{F} \otimes_F F_\infty)} \widetilde{F}_{\tilde{\infty}}$ [resp. $\widetilde{V}'_{\tilde{0}} = \widetilde{V}'_0 \otimes_{(\widetilde{F} \otimes_F F_0)} \widetilde{F}_{\tilde{0}}$] on a d'après la proposition 7 du paragraphe III.1

$$\widetilde{V}'_{\tilde{\infty}} \cong (N_{h_\infty,-1}; \psi_{h_\infty,-1}) \quad [\text{resp. } \widetilde{V}'_{\tilde{0}} \cong (N_{h_{0,1}}; \psi_{h_{0,1}})]\,.$$

Par ailleurs, posant $(W_{\tilde{\infty}}, \psi_{\tilde{\infty}}) = (W, \psi) \otimes_{\widetilde{F}} \widetilde{F}_{\tilde{\infty}}$ [resp. $(W_{\tilde{0}}, \psi_{\tilde{0}}) = (W, \psi) \otimes_{\widetilde{F}} \widetilde{F}_{\tilde{0}}$], on a un isomorphisme

$$(W_{\tilde{\infty}}, \psi_{\tilde{\infty}})^n \cong (\widetilde{V}'_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}'_{\tilde{\infty}})^d \quad [\text{resp. } (W_{\tilde{0}}, \psi_{\tilde{0}})^n \cong (\widetilde{V}'_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}'_{\tilde{0}})^d]$$

donc $e = \frac{d}{n}$ est un entier et encore d'après la proposition 7 du paragraphe III.1, on a :

$$(4) \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{h_\infty} = \dfrac{\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\widetilde{\Pi})}{[\widetilde{F}_{\tilde{\infty}} : F_\infty]} \\ \\ h_\infty e = d(\widetilde{\Pi})[\widetilde{F}_{\tilde{\infty}} : F_\infty] \end{cases} \qquad \left[\text{resp. } \begin{cases} \dfrac{1}{h_0} = \dfrac{\deg(\tilde{0})\tilde{0}(\widetilde{\Pi})}{[\widetilde{F}_{\tilde{0}} : F_0]} \\ \\ h_0 e = d(\widetilde{\Pi})[\widetilde{F}_{\tilde{0}} : F_0] \end{cases} \right]$$

D'autre part, si $\tilde{x}$ est une place de $\widetilde{F}$ au-dessus de la place $x = \infty$ ou 0 dans F mais distincte de $\tilde{\infty}$ et $\tilde{0}$, $(\widetilde{V}'_{\tilde{x}}, \widetilde{\varphi}'_{\tilde{x}}) = (\widetilde{V}'_x, \widetilde{\varphi}'_x) \otimes_{(\widetilde{F} \otimes_F F_x)} \widetilde{F}_{\tilde{x}}$ est isomorphe à une puissance de $(N_{1,0}; \psi_{1,0})$ donc aussi $(W_{\tilde{x}}, \psi_{\tilde{x}}) = (W, \psi) \otimes_{\widetilde{F}} \widetilde{F}_{\tilde{x}}$ et toujours d'après la proposition 7 du paragraphe III.1, cela entraîne

$$\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) = 0\,.$$

C'est vrai aussi lorsque $\tilde{x}$ est une place de $\widetilde{F}$ au–dessus d'une place $x \neq \infty, 0$ dans F car alors il existe dans (V_x, φ_x) un réseau M_x tel que $\varphi_x(M_x) = M_x$, et d'après le lemme 8 du paragraphe III.1, cela impose que (V_x, φ_x) est isomorphe à une puissance de $(N_{1,0}; \psi_{1,0})$.

Ceci, combiné aux formules (4), prouve déjà (iii).

Maintenant, $d(\widetilde{\Pi})$ est le plus petit commun dénominateur des rationnels $\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\widetilde{\Pi})$ et $\deg(\tilde{0})\tilde{0}(\widetilde{\Pi})$.

Or, d'après (1) et (2), on a

$$d(\widetilde{\Pi}) = \frac{r'd^2}{n[\widetilde{F} : F]} = e\frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]}$$

et d'après (4)

$$\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\widetilde{\Pi}) = \frac{-e}{d(\widetilde{\Pi})} = \frac{-1}{r'd/[\widetilde{F} : F]} \qquad \deg(\tilde{0})\tilde{0}(\widetilde{\Pi}) = \frac{e}{d(\widetilde{\Pi})} = \frac{1}{r'd/[\widetilde{F} : F]}\,.$$

Comme on a vu déjà que $[\widetilde{F} : F]$ divise $r'd$, on conclut :

$$(5) \qquad d(\widetilde{\Pi}) = \frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]} \qquad \frac{d}{n} = e = 1$$

Ceci prouve (i) et (ii).

La combinaison de (4) et (5) prouve (iv).

La combinaison de (3), (3') et de (5), plus le fait que $\mathrm{inv}_\infty D = \mathrm{inv}_0 D = 0$ prouve la première partie de (v).

Pour la seconde partie de (v), il faut remarquer que Δ'' est le commutateur de D^{op} dans $\mathrm{End}(V'', \varphi'') \cong M_{(r-r')d^2}(F)$, et que $D \otimes_F D^{op} \cong M_{d^2}(F)$.

Ceci termine la démonstration. □

THÉORÈME 6. — *Il existe une bijection naturelle de l'ensemble des classes d'isogénies de $\mathcal{D}$-chtoucas de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ ayant $\overline{0}$ pour zéro et $\overline{\infty}$ pour pôle sur l'ensemble des couples $(r', (\widetilde{F}, \widetilde{\Pi}))$, où :*

- *r' est un entier vérifiant $1 \leq r' \leq r$.*
- *$(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ est une classe d'isomorphismes de φ-paires vérifiant :*

  (i) *$\widetilde{F}$ est un corps et le degré $[\widetilde{F} : F]$ divise $r'd$.*

  (ii) *Il existe seulement deux places $\tilde{x}$ de $\widetilde{F}$ telles que $\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) \neq 0$; l'une, notée $\tilde{\infty}$, divise ∞ et l'autre, notée $\tilde{0}$, divise 0.*

(iii) *On a les formules*

$$\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\widetilde{\Pi}) = -\frac{1}{r'd/[\widetilde{F}:F]} \qquad \deg(\tilde{0})\tilde{0}(\widetilde{\Pi}) = \frac{1}{r'd/[\widetilde{F}:F]}$$

d'où en particulier $d(\widetilde{\Pi}) = \frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}$.

(iv) *Pour toute place* $\tilde{x}$ *de* $\widetilde{F}$ *au-dessus d'une place* x *de* F, *on a*

$$\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}[\widetilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]\mathrm{inv}_x(D) = 0 \quad \textit{dans } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Cette bijection est induite par l'application qui à tout tel $\mathcal{D}$*–chtouca de fibre générique* (V, φ, i) *associe le rang irréductible* r' *de* (V, φ, i) *et la* φ*–paire* $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ *qui correspond à l'unique* φ*–espace irréductible* (W, ψ) *qui entre comme facteur dans la partie irréductible* (V', φ') *de* (V, φ, i).

Démonstration : D'après la proposition 2, il est équivalent de raisonner en termes de $\mathcal{D}$–chtoucas comme dans l'énoncé ou bien en termes de paires $((V, \varphi, i), (M_x)_{x\in|X|})$ comme dans ladite proposition. C'est ce second point de vue qu'on utilisera.

D'après la proposition 5, on sait déjà que si $(r', (\widetilde{F}, \widetilde{\Pi}))$ est dans l'image de l'application étudiée, elle vérifie les propriétés de l'énoncé.

Il s'agit de construire une application inverse. Soient donc r' un entier, $1 \le r' \le r$, et $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ une φ–paire satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (iv).

Soit (W, ψ) le φ–espace irréductible qui correspond à la φ–paire $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ d'après le théorème 4 (ii) du paragraphe III.1.

Et soit Δ' une algèbre à division centrale sur $\widetilde{F}$ d'invariants

$$\begin{cases} [\widetilde{F}:F]/r'd \text{ en la place } \tilde{\infty}, \\[2ex] -[\widetilde{F}:F]/r'd \text{ en la place } \tilde{0}, \\[2ex] [\widetilde{F}_{\tilde{x}} : F_x]\mathrm{inv}_x(D) \text{ en toute place } \tilde{x} \neq \tilde{\infty}, \tilde{0} \text{ de } \widetilde{F} \\ \text{au-dessus d'une place } x \text{ de } F. \end{cases}$$

D'après la propriété (iv), on a

$$\dim_{\widetilde{F}} \Delta' = \left(\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}\right)^2.$$

Alors, $D^{op} \otimes_F \Delta' = (D^{op} \otimes_F \widetilde{F}) \otimes_{\widetilde{F}} \Delta'$ et $M_d(\mathrm{End}(W,\psi))$ sont des algèbres centrales simples sur $\widetilde{F}$ qui ont même dimension $r'^2 d^4/[\widetilde{F}:F]^2 = d^2 d(\widetilde{\Pi})^2$ et mêmes invariants

$$\begin{cases} [\widetilde{F}:F]/r'd = -\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\widetilde{\Pi}) \text{ en la place } \tilde{\infty}, \\ -[\widetilde{F}:F]/r'd = -\deg(\tilde{0})\tilde{0}(\widetilde{\Pi}) \text{ en la place } \tilde{0}, \\ 0 = -\deg(\tilde{x})\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) \text{ en les places } \tilde{x} \neq \tilde{\infty}, \tilde{0} \text{ de } \widetilde{F}, \end{cases}$$

comme il résulte des propriétés (ii) et (iii) et du théorème 4 (iii) du paragraphe III.1.

Donc il existe un isomorphisme entre ces deux algèbres (unique à automorphisme intérieur près, d'après le théorème de Skolem–Nœther) :

$$D^{op} \otimes_F \Delta' \xrightarrow{\sim} M_d(\mathrm{End}(W,\psi))$$

Posons $(V',\varphi') = (W,\psi)^d$, et soit i l'homomorphisme de F–algèbres injectif défini comme le composé

$$i : D^{op} \longrightarrow D^{op} \otimes_F \Delta' \xrightarrow{\sim} M_d(\mathrm{End}(W,\psi)) = \mathrm{End}(V',\varphi')\,.$$

On remarque que $\mathrm{End}(V',\varphi',i)$, définie comme le commutant de $i(D^{op})$ dans $\mathrm{End}(V',\varphi')$, s'identifie à Δ'.

Par ailleurs, soit (V'',φ'') le φ–espace trivial de rang $(r-r')d^2$

$$D^{r-r'} \otimes_F (F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})\,.$$

Il est muni naturellement d'une action à droite de D, c'est–à–dire d'un homomorphisme de F–algèbres

$$i : D^{op} \longrightarrow \mathrm{End}(V'',\varphi'')$$

et $\mathrm{End}(V'',\varphi'',i)$ s'identifie naturellement à $\Delta'' = M_{r-r'}(D)$.

Posons maintenant

$$(V,\varphi,i) = (V',\varphi',i) \oplus (V'',\varphi'',i)\,.$$

On remarque que $\Delta = \mathrm{End}(V,\varphi,i)$ s'identifie à $\Delta' \times \Delta''$.

Il reste à prouver qu'il est possible de construire une famille de réseaux M_x dans les F_x–modules de Dieudonné $(V_x,\varphi_x) = (F_x \widehat{\otimes}_F V,\ \mathrm{Id}_{F_x} \widehat{\otimes}_F \varphi)$, libres de rang r sur les $\mathcal{D}_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, indexés par l'ensemble des points fermés x de X, et satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (iv) de la proposition 2.

Fixons une base de l'espace vectoriel V sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$.

Alors il existe un ensemble fini $\Sigma \supset \{\infty, 0\}$ de places de F tel que pour toute place $x \notin \Sigma$, le réseau M_x engendré dans V_x par cette base soit stable par l'action de $\mathcal{D}_x$, libre de rang r sur $\mathcal{D}_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ et vérifie $\varphi(M_x) = M_x$.

Maintenant, si $x \in \Sigma \backslash \{\infty, 0\}$, (V_x, φ_x) est isomorphe à

$$(V_x^{\varphi_x} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q},\ \mathrm{Id} \widehat{\otimes} \mathrm{Frob})$$

d'après la propriété (ii) et la proposition 7 du paragraphe III.1. Et n'importe quel $\mathcal{D}_x$–module libre de rang r dans le D_x–module libre de rang r $V_x^{\varphi_x}$ engendre un réseau M_x de V_x qui est stable par $\mathcal{D}_x$, libre de rang r sur $\mathcal{D}_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ et tel que $\varphi_x(M_x) = M_x$.

Enfin, le choix d'isomorphismes d'algèbres $\mathcal{D}_\infty \cong M_d(O_\infty)$ et $\mathcal{D}_0 \cong M_d(O_0)$ détermine par équivalence de Morita des décompositions

$$(V_\infty, \varphi_\infty) \cong (\widetilde{V}_\infty, \widetilde{\varphi}_\infty)^d \quad (V_0, \varphi_0) \cong (\widetilde{V}_0, \widetilde{\varphi}_0)^d$$

où, par construction de (V, φ)

$$(\widetilde{V}_\infty, \widetilde{\varphi}_\infty) \cong (W_\infty, \psi_\infty) \oplus (N_{1,0}; \psi_{1,0})^{(r-r')d}$$
$$(\widetilde{V}_0, \widetilde{\varphi}_0) \cong (W_0, \psi_0) \oplus (N_{1,0}; \psi_{1,0})^{(r-r')d}.$$

Et, d'après les propriétés (ii) et (iii) et la proposition 7 du paragraphe III.1, on a encore

$$(W_\infty, \psi_\infty) \cong (N_{h_\infty,-1}; \psi_{h_\infty,-1}) \oplus (N_{1,0}, \psi_{1,0})^{r'd-h_\infty}$$
$$(W_0, \psi_0) \cong (N_{h_0,1}; \psi_{h_0,1}) \oplus (N_{1,0}, \psi_{1,0})^{r'd-h_0}$$

où $h_\infty = \frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}[\widetilde{F}_{\widetilde{\infty}} : F_\infty]$, $h_0 = \frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}[\widetilde{F}_{\widetilde{0}} : F_0]$.

D'après le lemme 10 du paragraphe III.1, il existe donc des réseaux $\widetilde{M}_\infty \subseteq \widetilde{V}_\infty$ et $\widetilde{M}_0 \subseteq \widetilde{V}_0$ tels que

$$\widetilde{M}_\infty \subseteq \widetilde{\varphi}_\infty(\widetilde{M}_\infty) \qquad \dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(\widetilde{\varphi}_\infty(\widetilde{M}_\infty)/\widetilde{M}_\infty) = 1$$

$$\widetilde{\varphi}_0(\widetilde{M}_0) \subseteq \widetilde{M}_0 \qquad \dim_{\overline{\mathbb{F}_q}}(\widetilde{M}_0/\widetilde{\varphi}_0(\widetilde{M}_0)) = 1\,.$$

De plus, quitte à transformer $\widetilde{M}_\infty$ [resp. $\widetilde{M}_0$] par $\widetilde{\varphi}_\infty$ [resp. $\widetilde{\varphi}_0$] suffisamment de fois, on peut supposer que le support de $\widetilde{\varphi}_\infty(\widetilde{M}_\infty)/\widetilde{M}_\infty$ [resp. $\widetilde{M}_0/\widetilde{\varphi}_0(\widetilde{M}_0)$] est le point $\widetilde{\infty}$ [resp. $\widetilde{0}$].

Il suffit alors de prendre

$$M_\infty = (\widetilde{M}_\infty)^d \subseteq (\widetilde{V}_\infty)^d = V_\infty$$
$$M_0 = (\widetilde{M}_0)^d \subseteq (\widetilde{V}_0)^d = V_0$$

pour terminer la construction. $\square$

3. — Description d'une classe d'isogénies de $\mathcal{D}$–chtoucas

On conserve sur $\overline{\infty}$, $\overline{0}$, ∞, 0 les hypothèses du précédent paragraphe.

Pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$ qui évite ∞ et 0, on note $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})$ le groupoïde des $\mathcal{D}$–chtoucas de rang r sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, ayant $\overline{0}$ pour zéro et $\overline{\infty}$ pour pôle, et qui sont munis d'une structure de niveau I.

On note également

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty}) = \varprojlim_I \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})$$

le groupoïde obtenu par limite projective. On sait qu'en fait il n'a pas d'automorphismes non triviaux.

Lorsque $\mathcal{C}$ décrit l'ensemble des classes d'isogénies de tels $\mathcal{D}$–chtoucas, on a évidemment une décomposition

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},\emptyset}(\overline{0},\overline{\infty}) = \coprod_{\mathcal{C}} \mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},\emptyset}(\overline{0},\overline{\infty})\,.$$

Par images réciproques, on en déduit des décompositions

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty}) = \coprod_{\mathcal{C}} \mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})$$

et

$$\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty}) = \coprod_{\mathcal{C}} \mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty})\,.$$

D'autre part, rappelons que $\mathbb{A}$ désigne l'anneau des adèles de F, c'est–à–dire le produit restreint des F_x relativement aux O_x quand x décrit l'ensemble des places de F.

On introduit aussi $\mathbb{A}^{\infty,0}$ le produit restreint des F_x relativement aux O_x quand x décrit $|X|\backslash\{\infty,0\}$. Ainsi $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}^{\infty,0} \times F_0$.

On note encore $D_{\mathbb{A}} = D \otimes_F \mathbb{A}$ et $D^{\infty,0}_{\mathbb{A}} = D \otimes_F \mathbb{A}^{\infty,0}$. Ainsi $D_{\mathbb{A}}$ [resp. $D^{\infty,0}_{\mathbb{A}}$] est le produit restreint des D_x relativement aux $\mathcal{D}_x$ quand x décrit $|X|$ [resp. $|X|\backslash\{\infty,0\}$].

Enfin, l'entier $r \geq 1$ étant fixé, on dispose comme dans le paragraphe I.4b de

$$G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$$
$$G(F_x) = \mathrm{GL}_r(D_x) \text{ pour toute place } x \text{ de } F\,,$$
$$G(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}})$$
$$G(\mathbb{A}^{\infty,0}) = \mathrm{GL}_r(D^{\infty,0}_{\mathbb{A}})$$

et
$$K_x = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x) \text{ pour toute place } x \text{ de } F\,,$$
$$K = \prod_{x\in|X|} K_x$$
$$K^{\infty,0} = \prod_{x\in|X|\setminus\{\infty,0\}} K_x\,.$$

Si $I \hookrightarrow X$ est un sous–schéma fermé fini [resp. et qui évite $\infty, 0$] on note K_I [resp. $K_I^{\infty,0}$] le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$K \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I) \quad [\text{resp. } K^{\infty,0} \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)]\,.$$

On a que K [resp. $K^{\infty,0}$] est un sous–groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$] et que chaque K_I [resp. $K_I^{\infty,0}$] est un sous–groupe ouvert d'indice fini dans K [resp. $K^{\infty,0}$].

Avec ces hypothèses et notations, on a maintenant :

THÉORÈME 1. — *Soient $\mathcal{C}$ une classe d'isogénies et (V,φ,i) la fibre générique qui lui correspond. Soient $(V,\varphi,i) = (V',\varphi',i) \oplus (V'',\varphi'',i)$ sa décomposition en partie irréductible et partie triviale. Soient $\Delta = \mathrm{End}(V,\varphi,i)$, $\Delta' = \mathrm{End}(V',\varphi',i)$, $\Delta'' = \mathrm{End}(V'',\varphi'',i)$ avec donc $\Delta = \Delta' \times \Delta''$.*

Fixons des isomorphismes d'algèbres $D_\infty \xrightarrow{\sim} M_d(O_\infty)$, $D_0 \xrightarrow{\sim} M_d(O_0)$ (d'où des isomorphismes induits $G(F_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_{rd}(O_\infty)$, $G(F_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_{rd}(O_0)$).

Et soient

$$(V_\infty,\varphi_\infty) = (\widetilde{V}_\infty,\widetilde{\varphi}_\infty)^d \qquad (V_0,\varphi_0) = (\widetilde{V}_0,\widetilde{\varphi}_0)^d$$
$$(\widetilde{V}_\infty,\widetilde{\varphi}_\infty) = (\widetilde{V}_{\tilde\infty},\widetilde{\varphi}_{\tilde\infty}) \oplus (\widetilde{V}_\infty^{\tilde\infty},\widetilde{\varphi}_\infty^{\tilde\infty}) \quad (\widetilde{V}_0,\widetilde{\varphi}_0) = (\widetilde{V}_{\tilde 0},\widetilde{\varphi}_{\tilde 0}) \oplus (\widetilde{V}_0^{\tilde 0},\widetilde{\varphi}_0^{\tilde 0})$$
avec $$(\widetilde{V}_{\tilde\infty},\widetilde{\varphi}_{\tilde\infty}) \cong (N_{h_\infty,-1};\psi_{h_\infty,-1}) \qquad (\widetilde{V}_{\tilde 0},\widetilde{\varphi}_{\tilde 0}) \cong (N_{h_0,1};\psi_{h_0,1})$$

et $(\widetilde{V}_\infty^{\tilde\infty},\widetilde{\varphi}_\infty^{\tilde\infty})$, $(\widetilde{V}_0^{\tilde 0},\widetilde{\varphi}_0^{\tilde 0})$ triviaux, les décompositions qui leur sont associées (d'après le lemme 4 du paragraphe précédent).

Alors :

(i) *Le module $(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi^{\infty,0}}$ sur $D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$, constitué des éléments de $V_{\mathbb{A}}^{\infty,0} = V\widehat{\otimes}_F\mathbb{A}^{\infty,0}$ fixés par $\varphi^{\infty,0} = \varphi\widehat{\otimes}\mathrm{Id}$, est libre de rang r.*

Si $Y^{\infty,0}$ désigne l'ensemble de ses bases sur $D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$, $Y^{\infty,0}$ est un espace principal homogène pour l'action à droite naturelle de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, ou pour l'action à gauche naturelle de $\mathrm{Aut}(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0},\varphi^{\infty,0},i) = \mathrm{Aut}_{D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}}((V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi^{\infty,0}})$.

(ii) *L'espace* $(\widetilde{V}_{\infty}^{\tilde{\infty}})^{\widetilde{\varphi}_{\infty}^{\tilde{\infty}}}$ *[resp.* $(\widetilde{V}_{0}^{\tilde{0}})^{\widetilde{\varphi}_{0}^{\tilde{0}}}$*] sur* F_{∞} *[resp.* F_0*] est de dimension* $rd - h_{\infty}$ *[resp.* $rd - h_0$*]. Si* $Y_{\infty}^{\tilde{\infty}}$ *[resp.* $Y_0^{\tilde{0}}$*] désigne l'ensemble des bases de cet espace,* $Y_{\infty}^{\tilde{\infty}}$*[resp.* $Y_0^{\tilde{0}}$*] est un espace principal homogène pour l'action à droite naturelle du groupe* $G_{\infty}^{\tilde{\infty}} = \mathrm{GL}_{rd-h_{\infty}}(F_{\infty})$ *[resp.* $G_0^{\tilde{0}} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(F_0)$*] ou pour l'action à gauche naturelle de* $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\infty}^{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\infty}^{\tilde{\infty}}) = \mathrm{Aut}_{F_{\infty}}((\widetilde{V}_{\infty}^{\tilde{\infty}})^{\widetilde{\varphi}_{\infty}^{\tilde{\infty}}})$ *[resp.* $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{0}^{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{0}^{\tilde{0}}) = \mathrm{Aut}_{F_0}((\widetilde{V}_{0}^{\tilde{0}})^{\widetilde{\varphi}_{0}^{\tilde{0}}})$*].*

(iii) *Si* $Z_{\tilde{\infty}}$ *[resp.* $Z_{\tilde{0}}$*] désigne l'ensemble des réseaux* $\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}$ *dans* $\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}$ *[resp.* $\widetilde{M}_{\tilde{0}}$ *dans* $\widetilde{V}_{\tilde{0}}$*] qui vérifient :*

- $\widetilde{M}_{\tilde{\infty}} \subseteq \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}})$ *[resp.* $\widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}(\widetilde{M}_{\tilde{0}}) \subseteq \widetilde{M}_{\tilde{0}}$*]*
- $\widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}})/\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}$ *[resp.* $\widetilde{M}_{\tilde{0}}/\widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}(\widetilde{M}_{\tilde{0}})$*] est supporté par* $\overline{\infty}$ *[resp.* $\overline{0}$*] et de dimension 1 sur* $\overline{\mathbb{F}_q}$*,*

alors $Z_{\tilde{\infty}}$ *[resp.* $Z_{\tilde{0}}$*] est un espace principal homogène pour l'action de* $\mathbb{Z}$ *donnée par*

$$\mathbb{Z} \times Z_{\tilde{\infty}} \longrightarrow Z_{\tilde{\infty}} \quad (m, \widetilde{M}_{\tilde{\infty}}) \longmapsto (\widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}})^{m \deg(\infty)}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}})$$

$$[resp. \quad \mathbb{Z} \times Z_{\tilde{0}} \longrightarrow Z_{\tilde{0}} \qquad (m, \widetilde{M}_{\tilde{0}}) \longmapsto (\widetilde{\varphi}_{\tilde{0}})^{m \deg(0)}(\widetilde{M}_{\tilde{0}}) \qquad].$$

(iv) *Le groupe multiplicatif* $\Delta^{\times}$ *agit naturellement à gauche sur* $Y^{\infty,0}$*,* $Y_{\infty}^{\tilde{\infty}}$ *et* $Y_0^{\tilde{0}}$*. Ces actions se factorisent à travers celles de* $\mathrm{Aut}(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0}, \varphi_{\mathbb{A}}^{\infty,0}, i) = \mathrm{Aut}_{D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}}((V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi_{\mathbb{A}}^{\infty,0}})$*,* $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\infty}^{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\infty}^{\tilde{\infty}}) = \mathrm{Aut}_{F_{\infty}}((\widetilde{V}_{\infty}^{\tilde{\infty}})^{\widetilde{\varphi}_{\infty}^{\tilde{\infty}}})$ *et* $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{0}^{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{0}^{\tilde{0}}) = \mathrm{Aut}_{F_0}((\widetilde{V}_{0}^{\tilde{0}})^{\widetilde{\varphi}_{0}^{\tilde{0}}})$*.*

(v) *Le groupe multiplicatif* $\Delta^{\times} = (\Delta')^{\times} \times (\Delta'')^{\times}$ *agit naturellement sur* $Z_{\tilde{\infty}}$ *[resp.* $Z_{\tilde{0}}$*]. Son action se factorise à travers celle de* $\mathbb{Z}$ *via l'homomorphisme*

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \Delta^{\times} & \longrightarrow & (\Delta')^{\times} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}) & \xrightarrow{\det} & F_{\infty}^{\times} & \xrightarrow{-\infty(\cdot)} & \mathbb{Z} & \\ [resp. & \Delta^{\times} & \longrightarrow & (\Delta')^{\times} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}) & \xrightarrow{\det} & F_0^{\times} & \xrightarrow{0(\cdot)} & \mathbb{Z} &] \end{array}$$

où det *est l'homomorphisme de norme réduite associé à l'algèbre à division centrale* $\mathrm{End}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}})$ *[resp.* $\mathrm{End}(\widetilde{V}_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}})$*] sur* F_{∞} *[resp.* F_0*].*

(vi) *Notons* $K_{\infty}^{\tilde{\infty}} = \mathrm{GL}_{rd-h_{\infty}}(O_{\infty})$ *[resp.* $K_0^{\tilde{0}} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(O_0)$*] qui est un sous-groupe ouvert compact de* $G_{\infty}^{\tilde{\infty}} = \mathrm{GL}_{rd-h_{\infty}}(F_{\infty})$ *[resp.* $G_0^{\tilde{0}} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(F_0)$*].*

Alors l'ensemble $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},\leftarrow}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0}, \overline{\infty})$ *s'identifie canoniquement à*

$$\Delta^{\times} \backslash [Z_{\tilde{\infty}} \times (Y_{\infty}^{\tilde{\infty}}/K_{\infty}^{\tilde{\infty}}) \times Y^{\infty,0} \times (Y_0^{\tilde{0}}/K_0^{\tilde{0}}) \times Z_{\tilde{0}}].$$

Et pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$ qui évite $\infty, 0$, le groupoïde $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,C}(\overline{0},\overline{\infty})$ *s'identifie canoniquement à*

$$\Delta^{\times}\backslash[Z_{\tilde{\infty}} \times (Y_{\infty}^{\tilde{\infty}}/K_{\infty}^{\tilde{\infty}}) \times (Y^{\infty,0}/K_I^{\infty,0}) \times (Y_0^{\tilde{0}}/K_0^{\tilde{0}}) \times Z_{\tilde{0}}]\,.$$

Démonstration : (i) résulte de ce que, d'après la proposition 2 du paragraphe précédent, il existe dans les (V_x, φ_x), $x \in |X|\backslash\{\infty, 0\}$ des réseaux M_x, libres de rang r sur $\mathcal{D}_x\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$ et vérifiant les propriétés (iii) et (iv) dans ladite proposition. En effet, d'après le lemme 8 du paragraphe III.1, on a alors des isomorphismes

$$(M_x)^{\varphi_x}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q} \xrightarrow{\sim} M_x$$

et d'après le lemme 4 du paragraphe I.2, $(M_x)^{\varphi_x}$ est libre de rang r sur $\mathcal{D}_x$. Si donc, pour tout $x \in |X|\backslash\{\infty, 0\}$, on choisit $(m_x^1, m_x^2, \ldots, m_x^r)$ une base de $(M_x)^{\varphi_x}$ sur $\mathcal{D}_x$ et si on introduit $m^1 = (m_x^1)_{x\in|X|\backslash\{\infty,0\}}, \ldots, m^r = (m_x^r)_{x\in|X|\backslash\{\infty,0\}}$, alors la famille $m^1, \ldots, m^r$ est une base de $(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi^{\infty,0}}$ sur $D^{\infty,0}$.

Ainsi, $(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi^{\infty,0}}$ est libre de rang r sur $D^{\infty,0}$ et les autres assertions s'en déduisent immédiatement.

(ii) résulte de même du lemme 4 du paragraphe précédent.

(iii) résulte aussi du lemme 4 du paragraphe précédent, combiné au lemme 9 du paragraphe III.1. Il apparaît un facteur $\deg(\infty)$ [resp. $\deg(0)$] car si $\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}$ [resp. $\widetilde{M}_{\tilde{0}}$] est un élément de $Z_{\tilde{\infty}}$ [resp. $Z_{\tilde{0}}$], et si m est un entier, alors le quotient

$$\widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}^{m+1}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}})/\widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}^{m}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}) \quad [\text{resp. } \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}^{m}(\widetilde{M}_{\tilde{0}})/\widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}^{m+1}(\widetilde{M}_{\tilde{0}})]$$

est supporté par $\mathrm{Frob}^m(\overline{\infty})$ [resp. $\mathrm{Frob}^m(\overline{0})$].

(iv) est évident.

(v) Il est évident que $\Delta^{\times}$ agit naturellement sur $Z_{\tilde{\infty}}$ [resp. $Z_{\tilde{0}}$] via $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}})$ [resp. $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}})$]. De plus, l'action de $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}})$ [resp. $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}})$] sur $Z_{\tilde{\infty}}$ [resp. $Z_{\tilde{0}}$] se factorise nécessairement par

$$\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}) \xrightarrow{\det} F_{\infty}^{\times} \quad [\text{resp. } \mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}) \xrightarrow{\det} F_0^{\times}]$$

en un homomorphisme $F_{\infty}^{\times} \to \mathbb{Z}$ [resp. $F_0^{\times} \to \mathbb{Z}$]. Puis, pour connaître ce dernier, il suffit de connaître l'action du centre $F_{\infty}^{\times}$ de $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}})$ [resp. $F_0^{\times}$ de $\mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_{\tilde{0}})$]. Or, pour $g_{\infty} \in F_{\infty}^{\times} \cap O_{\infty}$, $\widetilde{M}_{\tilde{\infty}} \in Z_{\tilde{\infty}}$ [resp. $g_0 \in F_0^{\times} \cap O_0$, $\widetilde{M}_{\tilde{0}} \in Z_{\tilde{0}}$] et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} \dim_{\overline{\mathbb{F}_q}} \widetilde{M}_{\tilde{\infty}}/g_\infty \widetilde{M}_{\tilde{\infty}} = \deg(\infty) h_\infty \infty(g_\infty) \\ \dim_{\overline{\mathbb{F}_q}} \widetilde{M}_{\tilde{\infty}}/\widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}^{-m\deg(\infty)}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}) = m\deg(\infty) \\ \det(g_\infty) = (g_\infty)^{h_\infty} \end{cases}$$

[respectivement

$$\begin{cases} \dim_{\overline{\mathbb{F}_q}} \widetilde{M}_{\tilde{0}}/g_0 \widetilde{M}_{\tilde{0}} = \deg(0) h_0 0(g_0) \\ \dim_{\overline{\mathbb{F}_q}} \widetilde{M}_{\tilde{0}}/\widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}^{m\deg(0)}(\widetilde{M}_{\tilde{0}}) = m\deg(0) \\ \det(g_0) = (g_0)^{h_0} \end{cases}$$

]

d'où le résultat.

(vi) D'après la proposition 2 et le lemme 4 du paragraphe précédent, se donner un $\mathcal{D}$–chtouca dans $\mathcal{C}$, muni d'un isomorphisme de sa fibre générique avec (V, φ, i), revient à se donner :

- pour tout $x \in |X|\backslash\{\infty, 0\}$ un réseau M_x dans V_x, libre de rang r sur $\mathcal{D}_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ de façon à vérifier les propriétés (iii) et (iv) de ladite proposition 2,
- un réseau $\widetilde{M}_\infty^{\tilde{\infty}}$ dans $\widetilde{V}_\infty^{\tilde{\infty}}$ et un réseau $\widetilde{M}_0^{\tilde{0}}$ dans $\widetilde{V}_0^{\tilde{0}}$, invariants par $\varphi_\infty^{\tilde{\infty}}$ et $\varphi_0^{\tilde{0}}$ respectivement,
- deux éléments $\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}$ et $\widetilde{M}_{\tilde{0}}$ de $Z_{\tilde{\infty}}$ et $Z_{\tilde{0}}$ respectivement.

De plus, se donner une structure de tous niveaux en–dehors de ∞ et 0 sur le $\mathcal{D}$–chtouca considéré revient à se donner pour tout $x \in |X|\backslash\{\infty, 0\}$ une base de M_x sur $\mathcal{D}_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ invariante par φ_x, c'est–à–dire une base sur $D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$ de $(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi^{\infty,0}}$ qui engendre les M_x.

Et d'après le lemme 8 du paragraphe III.1, la donnée de $\widetilde{M}_\infty^{\tilde{\infty}}$ et $\widetilde{M}_0^{\tilde{0}}$ est équivalente à celle de deux réseaux dans $(\widetilde{V}_\infty^{\tilde{\infty}})^{\widetilde{\varphi}_\infty^{\tilde{\infty}}}$ et $(\widetilde{V}_0^{\tilde{0}})^{\widetilde{\varphi}_0^{\tilde{0}}}$, autrement dit de deux éléments de $Y_\infty^{\tilde{\infty}}/K_\infty^{\tilde{\infty}}$ et $Y_0^{\tilde{0}}/K_0^{\tilde{0}}$.

Ceci prouve la première assertion de (vi).

Maintenant on remarque que pour tous sous–schémas fermés $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X$ évitant ∞ et 0, le foncteur

$$\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},J}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0}, \overline{\infty}) \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0}, \overline{\infty})$$

est galoisien de groupe

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_J) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)] = K_I/K_J = K_I^{\infty,0}/K_J^{\infty,0},$$

et comme $\bigcap_J K_J^{\infty,0} = \{1\}$, on en déduit que $\mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})$ s'identifie au quotient de $\mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty})$ par l'action à droite de $K_I^{\infty,0}$, ce qui termine la démonstration. ☐

Maintenant, décrivons en termes des identifications du théorème 1 (vi) l'action des opérateurs définis au paragraphe I.1.

PROPOSITION 2. —

(i) *Le morphisme de champs* $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ [*resp.* $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$] *induit un foncteur de chaque groupoïde* $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})$ *ou* $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty})$ *dans lui-même. De plus, ce foncteur préserve les classes d'isogénies* $\mathcal{C}$*. Et en termes des identifications du théorème* 1 (vi)

$$\mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty}) \cong \Delta^\times\backslash[Z_{\tilde{\infty}} \times (Y_\infty^{\tilde{\infty}}/K_\infty^{\tilde{\infty}}) \times (Y^{\infty,0}/K_I^{\infty,0}) \times (Y_0^{\tilde{0}}/K_0^{\tilde{0}}) \times Z_{\tilde{0}}]$$

$$\mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty}) \cong \Delta^\times\backslash[Z_{\tilde{\infty}} \times (Y_\infty^{\tilde{\infty}}/K_\infty^{\tilde{\infty}}) \times Y^{\infty,0} \times (Y_0^{\tilde{0}}/K_0^{\tilde{0}}) \times Z_{\tilde{0}}]$$

son action est induite par :

- *l'identité sur* $Y_\infty^{\tilde{\infty}}$, $Y^{\infty,0}$ *et* $Y_0^{\tilde{0}}$,
- *la translation par* $+1$ *sur* $Z_{\tilde{\infty}}$ [*resp.* $Z_{\tilde{0}}$] *c'est-à-dire l'application*

$$\widetilde{M}_{\tilde{\infty}} \longmapsto (\varphi_{\tilde{\infty}})^{\deg(\infty)}(\widetilde{M}_{\tilde{\infty}}) \quad [\textit{resp.}\ \widetilde{M}_{\tilde{0}} \longmapsto (\varphi_{\tilde{0}})^{\deg(0)}(\widetilde{M}_{\tilde{0}})],$$

- *l'identité sur* $Z_{\tilde{0}}$ [*resp.* $Z_{\tilde{\infty}}$].

(ii) *L'action de Hecke à droite du groupe* $\mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}) = G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ *sur le champ* $\mathrm{Cht}^{r,\{\infty,0\}}_{\mathcal{D}}$ *induit une action sur l'ensemble* $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty})$ *qui préserve chaque classe d'isogénies* $\mathcal{C}$*. En termes des identifications du théorème* 1 (vi)

$$\mathrm{Cht}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},\leftarrow}(\overline{0},\overline{\infty}) \cong \Delta^\times\backslash[Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}}/K_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}}/K_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}}]$$

cette action est induite par :

- *l'identité sur* $Z_{\tilde{\infty}}$, $Y_\infty^{\tilde{\infty}}$, $Y_0^{\tilde{0}}$ *et* $Z_{\tilde{0}}$,
- *l'action à droite naturelle de* $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ *sur* $Y^{\infty,0}$ *citée dans le théorème* 1 (i).

Démonstration :

(i) Cette action existe car le morphisme $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ [resp. $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$] transforme le zéro $\overline{0}$ et le pôle $\overline{\infty}$ en $\overline{0}$ et $\mathrm{Frob}^{\deg(\infty)}(\overline{\infty}) = \overline{\infty}$ [resp. en $\mathrm{Frob}^{\deg(0)}(\overline{0}) = \overline{0}$ et $\overline{\infty}$].

Le reste de l'assertion est évident sur les définitions.

(ii) est évident sur les définitions, une fois remarqué que l'action de Hecke préserve zéro et pôle. ☐

4. — Description des groupoïdes de points fixes

On conserve sur $\overline{\infty}$, $\overline{0}$, ∞, 0 les hypothèses des deux précédents paragraphes.

Par ailleurs, on se reporte aux hypothèses, notations et définitions du paragraphe I.4 consacré aux correspondances de Hecke, avec maintenant $T = \{\infty, 0\}$.

En particulier, on fixe une fois pour toutes un élément a de degré 1 dans $(\mathbb{A}^{\infty,0})^\times$.

Si $I \hookrightarrow X\backslash T$ est un sous-schéma fermé fini et g est un élément de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, on dispose de la correspondance finie étale $\Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g)$ dans $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $X_{(T)} \times X_{(T)}$.

Si de plus u, $s \geq 1$ sont deux entiers avec $\deg(0)|u, \deg(\infty)|s$, on dispose du champ des points fixes $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)$ qui est algébrique au sens de Deligne–Mumford, et étale, au-dessus de $\operatorname{Spec}\kappa(0) \times \operatorname{Spec}\kappa(\infty)$.

On note $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$ le groupoïde fibre au-dessus du point $(\overline{0},\overline{\infty})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_q}$.

Le foncteur canonique

$$\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty}) \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})/a^{\mathbb{Z}}$$

induit une décomposition suivant les classes d'isogénies

$$\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty}) = \coprod_{\mathcal{C}} \mathrm{Fixe}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})\,.$$

PROPOSITION 1. — *Soient $I \hookrightarrow X\backslash\{\infty,0\}$ un sous-schéma fermé fini, g un élément de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ et u, $s \geq 1$ deux entiers avec* $\deg(0)|u, \deg(\infty)|s$.

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'isogénies de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}(\overline{0},\overline{\infty})$, et fixons des isomorphismes d'algèbres $D_\infty \xrightarrow{\sim} M_d(O_\infty)$, $D_0 \xrightarrow{\sim} M_d(O_0)$.

Alors, avec les notations ci-dessus et celles du théorème 1 *du paragraphe* III.3, *le groupoïde $\mathrm{Fixe}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$ est naturellement équivalent au groupoïde quotient*

$$\Delta^\times\backslash\{(\gamma, \widetilde{M}_{\widetilde{\infty}}, y^{\widetilde{\infty}}_{\infty}, y^{\infty,0}, y^{\tilde{0}}_0, \widetilde{M}_{\tilde{0}})\}/K^{\widetilde{\infty}}_\infty \times K^{\infty,0}_I a^{\mathbb{Z}} \times K^{\tilde{0}}_0$$

où :

- $(\gamma, \widetilde{M}_{\widetilde{\infty}}, y^{\widetilde{\infty}}_{\infty}, y^{\infty,0}, y^{\tilde{0}}_0, \widetilde{M}_{\tilde{0}})$ *décrit le sous-ensemble de* $\Delta^\times \times Z_{\widetilde{\infty}} \times$

$Y_\infty^{\tilde\infty} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde 0} \times Z_{\tilde 0}$ *des éléments qui vérifient*

$$\begin{cases} -\deg(\tilde\infty)\tilde\infty(\det\gamma') = s \\ \gamma y_\infty^{\tilde\infty} \in y_\infty^{\tilde\infty} K_\infty^{\tilde\infty} \\ \gamma y^{\infty,0} \in y^{\infty,0} K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0} a^{\mathbb{Z}} \\ \gamma y_0^{\tilde 0} \in y_0^{\tilde 0} K_0^{\tilde 0} \\ \deg(\tilde 0)\tilde 0(\det\gamma') = u \end{cases}$$

si l'on note $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in \Delta^\times = (\Delta')^\times \times (\Delta'')^\times$, $\widetilde{F}$ *le centre de l'algèbre à division* Δ', $\det : (\Delta')^\times \to (\widetilde{F})^\times$ *l'homomorphisme de norme réduite, et* $\tilde\infty$, $\tilde 0$ *les places de* $\widetilde{F}$ *déterminées par*

$$\widetilde{F}_{\tilde\infty} = \mathrm{Im}(\widetilde{F} \otimes_F F_\infty \to \mathrm{End}(\widetilde{V}_{\tilde\infty}, \widetilde{\varphi}_{\tilde\infty})), \quad \widetilde{F}_{\tilde 0} = \mathrm{Im}(\widetilde{F} \otimes_F F_0 \to \mathrm{End}(\widetilde{V}_{\tilde 0}, \widetilde{\varphi}_{\tilde 0})),$$

• *l'action à droite de* $K_\infty^{\tilde\infty} \times K_I^{\infty,0} a^{\mathbb{Z}} \times K_0^{\tilde 0}$ *sur ce sous-ensemble est induite par celle de* $G_\infty^{\tilde\infty} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde 0}$ *sur* $Z_{\tilde\infty} \times Y_\infty^{\tilde\infty} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde 0} \times Z_{\tilde 0}$ (*telle que précisée dans le théorème* 1 *du paragraphe* III.3), *et par l'action identité sur le facteur* $\Delta^\times$,

• *l'action à gauche de* $\Delta^\times$ *sur ce sous-ensemble est induite par celle de* $\Delta^\times$ *sur* $Z_{\tilde\infty} \times Y_\infty^{\tilde\infty} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde 0} \times Z_{\tilde 0}$ *et par l'action de conjugaison sur le facteur* $\Delta^\times$

$$\Delta^\times \times \Delta^\times \longrightarrow \Delta^\times \quad (\delta, \gamma) \longmapsto \delta\gamma\delta^{-1}.$$

Démonstration : Par définition, on a un carré 2–cartésien de champs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "(\mathrm{Frob}_0^u \circ \mathrm{Frob}_\infty^s ; \mathrm{Id})"] \\ \Gamma^r_{\mathcal{D},I}(g) \arrow[r, hook] & \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

En prenant les fibres au–dessus du point $(\overline{0}, \overline{\infty})$ à valeur dans $\overline{\mathbb{F}_q}$ et en se restreignant à la classe d'isogénies $\mathcal{C}$, on en déduit un carré 2–cartésien de groupoïdes

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty}) & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0},\overline{\infty})/a^{\mathbb{Z}} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle (\mathrm{Frob}_0^u \circ \mathrm{Frob}_\infty^s ;\mathrm{Id})} \\
\Gamma_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(g)(\overline{0},\overline{\infty}) & \hookrightarrow & \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0},\overline{\infty})/a^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0},\overline{\infty})/a^{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

où, d'après le théorème 1 (vi) du paragraphe III.3, le groupoïde $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0},\overline{\infty})$ est naturellement équivalent à

$$\Delta^\times \backslash [Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}}]/K_\infty^{\tilde{\infty}} \times K_I^{\infty,0} \times K_0^{\tilde{0}} .$$

De plus, et d'après la proposition 2 (i) du paragraphe III.3, l'action de $\mathrm{Frob}_0^u \, \mathrm{Frob}_\infty^s$ sur $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(\overline{0},\overline{\infty})$ est induite en ces termes par :

- l'action identité sur $Y_\infty^{\tilde{\infty}}$, $Y^{\infty,0}$ et $Y_0^{\tilde{0}}$,
- la translation par $\frac{u}{\deg(0)}$ sur $Z_{\tilde{0}}$,
- la translation par $\frac{s}{\deg(\infty)}$ sur $Z_{\tilde{\infty}}$.

Enfin, d'après la proposition 2 (ii) du paragraphe III.3, et la définition de la correspondance $\Gamma_{\mathcal{D},I}^r(g)$, le groupoïde $\Gamma_{\mathcal{D},I}^{r,\mathcal{C}}(g)(\overline{0},\overline{\infty})$ s'identifie au quotient

$$\Delta^\times \backslash \{(M_{\tilde{\infty}},\ y_\infty^{\tilde{\infty}},\ y_1^{\infty,0},\ y_2^{\infty,0},\ y_0^{\tilde{0}},\ M_{\tilde{0}})\}/K_\infty^{\tilde{\infty}} \times K_I^{\infty,0}a^{\mathbb{Z}} \times K_I^{\infty,0}a^{\mathbb{Z}} \times K_0^{\tilde{0}}$$

où $(M_{\tilde{\infty}},\ y_\infty^{\tilde{\infty}},\ y_1^{\infty,0},\ y_2^{\infty,0},\ y_0^{\tilde{0}},\ M_{\tilde{0}})$ est le sous–ensemble de $Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}}$ des éléments qui vérifient

$$y_2^{\infty,0} \in y_1^{\infty,0} K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0} a^{\mathbb{Z}} .$$

Pour conclure il suffit, d'après le théorème 1 (v) du paragraphe III.3, de vérifier que les homomorphismes composés

$$\begin{array}{llllll}
 & (\Delta')^\times & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{\infty}},\widetilde{\varphi}_{\tilde{\infty}}) & \xrightarrow{\det} F_\infty^\times \xrightarrow{-\infty(\cdot)} \mathbb{Z} & \\
[\text{resp.} & (\Delta')^\times & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\widetilde{V}_{\tilde{0}},\widetilde{\varphi}_{\tilde{0}}) & \xrightarrow{\det} F_0^\times \xrightarrow{0(\cdot)} \mathbb{Z} &] \\
\text{et} & (\Delta')^\times & \xrightarrow{\det} & (\widetilde{F})^\times & \xrightarrow{-\frac{\deg(\tilde{\infty})}{\deg(\infty)}\tilde{\infty}(\cdot)} & \mathbb{Z} \\
[\text{resp.} & (\Delta')^\times & \xrightarrow{\det} & (\widetilde{F})^\times & \xrightarrow{\frac{\deg(\tilde{0})}{\deg(0)}\tilde{0}(\cdot)} & \mathbb{Z} \quad]
\end{array}$$

sont égaux.

On remarque que ces deux homomorphismes sont continus pour la topologie ∞–adique [resp. 0–adique], se factorisent à travers $F_\infty^\times$ [resp. $F_0^\times$] et que l'image dans $F_\infty^\times$[resp. $F_0^\times$] du sous–groupe $F^\times \subseteq \widetilde{F}^\times \subseteq (\Delta')^\times$ a son adhérence d'indice fini. Donc il suffit de prouver que ces deux homomorphismes deviennent égaux quand composés avec le plongement $F^\times \hookrightarrow \widetilde{F}^\times \hookrightarrow (\Delta')^\times$.

Soit donc $\gamma' \in F^\times \subseteq (\Delta')^\times$.

Son image par le premier homomorphisme est

$$-h_\infty \infty(\gamma') \qquad [\text{resp. } h_0 0(\gamma')]$$

et son image par le second est

$$-(\dim_{\widetilde{F}} \Delta')^{\frac{1}{2}} \frac{\deg(\widetilde{\infty})}{\deg(\infty)} \widetilde{\infty}(\gamma') \quad [\text{resp. } (\dim_{\widetilde{F}} \Delta')^{\frac{1}{2}} \frac{\deg(\tilde{0})}{\deg(0)} \tilde{0}(\gamma')] \,.$$

Or d'après la proposition 5 du paragraphe III.2, on a

$$h_\infty = \frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]}[\widetilde{F}_{\widetilde{\infty}} : F_\infty] \quad h_0 = \frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]}[\widetilde{F}_{\tilde{0}} : F_0] \quad \dim_{\widetilde{F}} \Delta' = \left(\frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]}\right)^2$$

et par ailleurs, on a évidemment

$$[\widetilde{F}_{\widetilde{\infty}} : F_\infty] \deg(\infty)\infty(\gamma') = \deg(\widetilde{\infty})\widetilde{\infty}(\gamma') \ [\widetilde{F}_{\tilde{0}} : F_0] \deg(0)0(\gamma') = \deg(\tilde{0})\tilde{0}(\gamma')$$

d'où le résultat annoncé. $\square$

Posons, les places 0 et ∞ étant toujours fixées :

DÉFINITION 2. — *Soient u, $s \geq 1$ deux entiers.*

Un élément γ du groupe $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$ est dit (u, s)–admissible si la F–algèbre engendrée $F[\gamma]$ se décompose en $F[\gamma] = F' \times F''$, où :

- *F' est un corps, et si γ' désigne l'image de γ dans F', alors il existe deux places $0'$ et ∞' de F' au–dessus de 0 et ∞ respectivement, telles que*

$$0'(\gamma') \neq 0 \,, \quad \infty'(\gamma') \neq 0$$

et $x'(\gamma') = 0$ pour toute autre place x' de F' au–dessus de 0 ou ∞,

- *on a* $\deg(0)0(\det \gamma) = u \quad -\deg(\infty)\infty(\det \gamma) = s$,

• *si γ'' désigne l'image de γ dans F'', alors γ'' a toutes ses valuations nulles au-dessus de* 0 *ou* ∞.

Remarque : Les écritures $F[\gamma] = F' \times F''$, $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ sont évidemment uniques. On pourra les appeler les décompositions canoniques de $F[\gamma]$ et γ. On dira que F' et γ' en sont les parties irréductibles, F'' et γ'' les parties triviales.

On note que les polynômes minimaux de γ' et γ'' sont premiers entre eux. $\square$

LEMME 3. — *On fixe u, $s \geq 1$ deux entiers.*

(i) *Soient C une classe d'isogénies et (V, φ, i) la fibre générique qui lui correspond. Et, avec les notations du théorème* 1 *du paragraphe* III.3, *soit $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ un élément de $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ tel qu'il existe $y_{\infty}^{\tilde{\infty}} \in Y_{\infty}^{\tilde{\infty}}$ et $y_0^{\tilde{0}} \in K_0^{\tilde{0}}$ vérifiant*

$$(1) \qquad \begin{cases} -\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\det \gamma') = s \\ \gamma y_{\infty}^{\tilde{\infty}} \in y_{\infty}^{\tilde{\infty}} K_{\infty}^{\tilde{\infty}} \\ \gamma y_0^{\tilde{0}} \in y_0^{\tilde{0}} K_0^{\tilde{0}} \\ \deg(\tilde{0})\tilde{0}(\det \gamma') = u \end{cases}$$

(*avec les notations de la proposition* 1).

Alors il existe une base de (V, i) sur $D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ telle que le plongement induit $\Delta^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_r(D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})$ envoie γ sur un élément de $\mathrm{GL}_r(D)$, bien déterminé à conjugaison près, et qui est nécessairement (u, s)-admissible.

De plus, si $F' = F[\gamma']$, $F'' = F[\gamma'']$, $F[\gamma] = F' \times F''$ est la décomposition canonique de $F[\gamma]$, F' contient $\widetilde{F}$ et, avec les notations de la définition 2, $0'$ *est l'unique place de F' au-dessus de $\tilde{0}$ et ∞' l'unique place de F' au-dessus de $\tilde{\infty}$.*

(ii) *Réciproquement, soit γ un élément (u, s)-admissible dans* $\mathrm{GL}_r(D)$.

Alors il existe sur $(V, i) = (D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})^r$ une structure de φ-espace (V, φ, i), bien déterminée à isomorphisme près préservant γ et telle que :

- *$\gamma \in \Delta = \mathrm{End}(V, \varphi, i)$,*
- *(V, φ, i) est fibre générique d'une classe d'isogénie C,*
- *la décomposition canonique $F[\gamma] = F' \times F''$ est compatible avec la décomposition canonique $\Delta = \Delta' \times \Delta''$,*
- *le centre $\widetilde{F}$ de Δ' est contenu dans F' et, avec les notations de la définition* 2 *ci-dessus et du théorème* 6 *du paragraphe* III.2, *les places $\tilde{\infty}$, $\tilde{0}$ de $\widetilde{F}$ sont les restrictions des places ∞', $0'$ de F',*

- *sur* (V'', i), φ'' *est induit par l'homomorphisme* $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Frob}$ *de* $(V, i) = (D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})^r$. *De plus, il existe* $y_{\infty}^{\widetilde{\infty}} \in Y_{\infty}^{\widetilde{\infty}}$ *et* $y_0^{\widetilde{0}} \in Y_0^{\widetilde{0}}$ *(avec les notations du théorème* 1 *du paragraphe* III.3) *tel que soit vérifié le système de conditions* (1).

Démonstration :

(i) Posons $\widetilde{F}' = \widetilde{F}[\gamma']$. Ainsi $\widetilde{F}'$ est un corps, plongé dans Δ', et engendré par $\widetilde{F}$ et F'.

On remarque d'abord que l'homomorphisme composé

$$\widetilde{F}' \otimes_{\widetilde{F}} \widetilde{F}_{\widetilde{\infty}} \longrightarrow \Delta' \otimes_{\widetilde{F}} \widetilde{F}_{\widetilde{\infty}} \longrightarrow \mathrm{End}(\widetilde{V}_{\widetilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}})$$

est injectif. Comme $\mathrm{End}(\widetilde{V}_{\widetilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\infty}})$ est une algèbre à division, on voit que $\widetilde{F}' \otimes_{\widetilde{F}} \widetilde{F}_{\widetilde{\infty}}$ est un corps. Autrement dit, il existe une unique place $\widetilde{\infty}'$ de $\widetilde{F}'$ au–dessus de la place $\widetilde{\infty}$ de $\widetilde{F}$. De même, il existe dans $\widetilde{F}'$ une unique place $\widetilde{0}'$ au–dessus de la place $\widetilde{0}$ de $\widetilde{F}$.

Par conséquent, on a $\widetilde{\infty}'(\gamma') \neq 0$, $\widetilde{0}'(\gamma') \neq 0$ et $\tilde{x}'(\gamma') = 0$ pour toute autre place $\tilde{x}'$ de $\widetilde{F}'$ au–dessus de ∞ ou 0, comme il résulte maintenant des conditions (1). Cela implique en particulier que si ∞' et $0'$ sont les places de F' restrictions de $\widetilde{\infty}'$ et $\widetilde{0}'$, alors $\widetilde{\infty}'$ [resp. $\widetilde{0}'$] est l'unique place de $\widetilde{F}'$ au–dessus de ∞' [resp. $0'$].

Or, si $\widetilde{\Pi}$ est l'élément de $(\widetilde{F})^{\times} \otimes \mathbb{Q}$ tel que $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ soit la φ–paire associée à (V', φ'), on a d'après le théorème 6 du paragraphe III.2 que $\widetilde{\infty}(\widetilde{\Pi}) \neq 0$, $\widetilde{0}(\widetilde{\Pi}) \neq 0$ et $\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) = 0$ pour tout autre place $\tilde{x}$ de $\widetilde{F}$.

Par ailleurs, il existe dans F' un élément non nul Π' tel que $\infty'(\Pi') \neq 0$, $0'(\Pi') \neq 0$, et $x'(\Pi') = 0$ pour toute autre place x' de F'. En effet, si X' désigne la courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ dont le corps des fonctions est F', le fibré associé au diviseur de degré 0 : $\deg(0')\infty' - \deg(\infty')0'$ est nécessairement de torsion dans le groupe abélien $\mathrm{Pic}(X')$.

Maintenant, il existe deux entiers non nuls N, $N' \in \mathbb{Z}$ tels que $\widetilde{\Pi}^N \in (\widetilde{F})^{\times} \subseteq (\widetilde{F}')^{\times}$, $\Pi'^{N'} \in (F')^{\times} \subseteq (\widetilde{F}')^{\times}$ et $\widetilde{\infty}'(\widetilde{\Pi}^N) = \widetilde{\infty}'(\Pi'^{N'})$. D'autre part, on a automatiquement $\tilde{x}'(\widetilde{\Pi}^N) = 0 = \tilde{x}'(\Pi'^{N'})$ pour toute place $\tilde{x}' \neq \widetilde{\infty}', \widetilde{0}'$ dans $\widetilde{F}'$. Donc aussi $\widetilde{0}'(\widetilde{\Pi}^N) = \widetilde{0}'(\Pi'^{N'})$ d'après la formule du produit, et $\widetilde{\Pi}^N$ et $\Pi'^{N'}$ diffèrent d'une constante multiplicative. Quitte à remplacer N et N' par des multiples, on peut même supposer

$$\widetilde{\Pi}^N = \Pi'^{N'} .$$

Mais, d'après le lemme 3 du paragraphe III.1, $\widetilde{F}$ est engendré sur F par $\widetilde{\Pi}^N$, donc $\widetilde{F} \subseteq F'$ et $\widetilde{F}' = F'$.

D'autre part, il résulte encore des conditions (1) que γ'' a toutes ses valuations nulles au–dessus de ∞ ou 0.

Maintenant, montrons qu'il existe un plongement $F' \hookrightarrow M_{r'}(D)$. On dispose d'un plongement $F' \hookrightarrow \Delta'$, et on sait $\dim_{\widetilde{F}} \Delta' = \left(\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}\right)^2$. Donc tous les invariants de $\Delta' \otimes_{\widetilde{F}} F'$ sont annulés par $\frac{r'd}{[F':\widetilde{F}]}$. Or, d'après la proposition 5 (v) du paragraphe III.2, Δ' et $D \otimes_F \widetilde{F}$ ont mêmes invariants en toutes les places $\tilde{x} \neq \tilde{\infty}, \tilde{0}$ dans $\widetilde{F}$. Par conséquent, tous les invariants de $D \otimes_F F' = (D \otimes_F \widetilde{F}) \otimes_{\widetilde{F}} F'$ sont annulés par $\frac{r'd}{[F':\widetilde{F}]}$.

L'existence d'un plongement $F' \hookrightarrow M_{r'}(D)$ résulte alors du lemme suivant :

Lemme 4. — *Soient K un corps de fonctions sur un corps fini, K' un corps extension finie de K et A une algèbre centrale simple sur K, de dimension finie α^2.*

Alors, il existe un plongement $K' \hookrightarrow A$ sur K si et seulement si $[K' : K]$ divise α et $\frac{\alpha}{[K':K]}$ annule tous les invariants de $A \otimes_K K'$ en les places de K'.

Démonstration : Supposons qu'il existe un plongement $K' \hookrightarrow A$. Et soit K'' un corps plongé dans A, maximal, et contenant K'. On a que K'' est dans A son propre centralisateur. Donc, d'après [Jacobson, II] théorème 4.8, on a

$$[K'' : K] = \alpha \quad \text{et} \quad (A \otimes_K K') \otimes_{K'} K'' = A \otimes_K K'' \cong M_\alpha(K'')\,.$$

Donc $[K'' : K'] = \frac{\alpha}{[K':K]}$ est un entier, et qui annule tous les invariants de $A \otimes_K K'$ en les places de K'.

Réciproquement, si $\frac{\alpha}{[K':K]} = \alpha'$ est un entier qui annule les invariants de $A \otimes_K K'$, on peut écrire $A \otimes_K K' \cong M_{\alpha/\alpha'}(A')$ où A' est une algèbre centrale simple sur K', de dimension α'^2. On a aussi $A^{op} \otimes_K K' \cong M_{\alpha/\alpha'}(A'^{op})$ et le choix d'une base de A'^{op} sur K détermine un plongement

$$A^{op} \otimes_K K' \hookrightarrow M_{\alpha^2}(K)\,.$$

Le commutateur de A^{op} dans $M_{\alpha^2}(K)$ est isomorphe à A, et il contient K'. C'est ce qu'on voulait. $\square$

Suite de la démonstration du lemme 3 :

Maintenant, le choix d'une base de (V', i) sur $D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ détermine un plongement composé

$$F' \hookrightarrow \mathrm{End}(V', \varphi', i) \hookrightarrow \mathrm{End}(V', i) \xrightarrow{\sim} M_{r'}(D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})$$

qui, d'après le théorème de Skolem–Nœther, est conjugué de

$$F' \hookrightarrow M_{r'}(D) \hookrightarrow M_{r'}(D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})\,.$$

Autrement dit, quitte à changer de base, on peut supposer que ces homomorphismes composés sont égaux.

Par ailleurs, si on choisit une base sur D de $(V'')^{\varphi''}$, elle induit un plongement

$$F'' \hookrightarrow \mathrm{End}(V'', \varphi'', i) = \mathrm{End}((V'')^{\varphi''}, i) \xrightarrow{\sim} M_{r''}(D)\,.$$

Le composé

$$F[\gamma] = F' \times F'' \hookrightarrow M_{r'}(D) \times M_{r''}(D) \hookrightarrow M_r(D)$$

répond alors à la question posée.

En effet, pour prouver que l'image de γ est (u, s)–admissible on n'a plus qu'à remarquer que les homomorphismes

$$\begin{array}{rl} & (\widetilde{F}_{\widetilde{\infty}})^\times \xrightarrow{\;-\deg(\widetilde{\infty})\widetilde{\infty}(\cdot)\;} \mathbb{Z} \\ & [\text{resp. } (\widetilde{F}_{\widetilde{0}})^\times \xrightarrow{\;\deg(\widetilde{0})\widetilde{0}(\cdot)\;} \mathbb{Z}\,] \\ \text{et} & (\widetilde{F}_{\widetilde{\infty}})^\times \xrightarrow{\det} (F_\infty)^\times \xrightarrow{\;-\deg(\infty)\infty(\cdot)\;} \mathbb{Z} \\ & [\text{resp. } (\widetilde{F}_{\widetilde{0}})^\times \xrightarrow{\det} (F_0)^\times \xrightarrow{\;\deg(0)0(\cdot)\;} \mathbb{Z}\,] \end{array}$$

sont égaux.

(ii) $\gamma \in \mathrm{GL}_r(D)$ peut être vu comme un automorphisme du D–module à droite D^r, et aussi du $D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$–module à droite $(D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})^r$.

On pose $V' = \mathrm{Ker}\,\gamma'' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, $V'' = \mathrm{Ker}\,\gamma' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, si (γ', γ'') est la décomposition canonique de γ. Ainsi, γ' s'identifie à un automorphisme de $\mathrm{Ker}\,\gamma''$, ou de V', et γ'' s'identifie à un automorphisme de $\mathrm{Ker}\,\gamma'$, ou de V''. On notera r' le rang de V'.

Il s'agit de mettre sur V' et V'' des structures de φ–espaces φ' et φ'' de façon à vérifier les propriétés de l'énoncé.

(V'', φ'') doit être un φ–espace trivial, avec $\gamma'' \in \mathrm{End}(V'', \varphi'', i)$. On peut prendre $\varphi'' = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}\,\gamma'} \otimes \mathrm{Frob}$, et c'est la seule possibilité.

Voyons maintenant comment construire φ'.

Tout d'abord, il existe $\Pi' \in (F')^\times$ tel que $\infty'(\Pi') \neq 0$, $0'(\Pi') \neq 0$, et $x'(\Pi') = 0$ pour toute autre place x' de F'.

Et soit $\widetilde{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} F[\Pi'^n] \subseteq F'$.

Puis, soit $\widetilde{\Pi}$ l'unique élément de $(\widetilde{F})^\times \otimes \mathbb{Q}$ colinéaire à Π' et qui vérifie

$$\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\widetilde{\Pi}) = -\frac{[\widetilde{F}:F]}{r'd} \quad \deg(\tilde{0})\tilde{0}(\widetilde{\Pi}) = \frac{[\widetilde{F}:F]}{r'd}$$

si $\tilde{\infty}$, $\tilde{0}$ désignent les places de $\widetilde{F}$ obtenues par restriction de ∞', $0'$. On a aussi $\tilde{x}(\widetilde{\Pi}) = 0$ pour toute place $\tilde{x} \neq \tilde{\infty}, \tilde{0}$ dans $\widetilde{F}$.

Et on remarque au passage que nécessairement ∞' et $0'$ sont les seules places de F' au-dessus de $\tilde{\infty}$ et $\tilde{0}$ puisque $\Pi' \in (\widetilde{F})^\times \otimes \mathbb{Q}$ et $x'(\Pi') = 0$, $\forall x' \neq \infty', 0'$.

Par ailleurs, de l'existence des plongements

$$\widetilde{F} \hookrightarrow F' \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Ker}\,\gamma'', i) \cong M_{r'}(D)$$

on déduit d'après le lemme 4 que $[\widetilde{F} : F]$ et même $[F' : F]$ divisent $r'd$, que $\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}$ annule les invariants de $D \otimes_F \widetilde{F}$ et que $\frac{r'd}{[F':F]}$ annule les invariants de $D \otimes_F F'$.

On voit déjà d'après le théorème 6 du paragraphe III.2 que (V', i) peut être muni d'une structure de φ–espace (V', φ', i) dont la φ–paire associée soit $(\widetilde{F}, \widetilde{\Pi})$ et telle que $(V, \varphi, i) = (V', \varphi', i) \oplus (V'', \varphi'', i)$ définisse une classe d'isogénie $\mathcal{C}$.

Montrons que quitte à conjuguer φ' par un élément de $\mathrm{Aut}(V', i)$, on peut supposer que $\gamma' \in \mathrm{Aut}(V', \varphi', i) = \Delta'$.

Pour cela, il suffit de prouver qu'existe un plongement

$$F' \hookrightarrow \Delta'$$

car alors les plongements

$$F' \hookrightarrow \Delta' \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V', i) \quad \text{et} \quad F' \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V', i)$$

seront nécessairement conjugués.

Et d'après le lemme 4, il s'agit de voir que $[F' : \widetilde{F}]$ divise $\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}$ et que $\frac{r'd}{[F':F]}$ annule les invariants de $\Delta' \otimes_F F'$.

Cela résulte de ce qu'on a déjà prouvé, car, d'après la proposition 5 (v) du paragraphe III.2, $\Delta' \otimes_F F'$ a mêmes invariants que $D \otimes_F F'$ en toutes les places distinctes de ∞' et $0'$, et ses invariants en ∞' et $0'$ sont respectivement

$$\frac{[\widetilde{F}:F]}{r'd}[F'_{\infty'} : \widetilde{F}_{\tilde{\infty}}] = \frac{[F':F]}{r'd} \quad \text{et} \quad -\frac{[\widetilde{F}:F]}{r'd}[F'_{0'} : \widetilde{F}_{\tilde{0}}] = -\frac{[F':F]}{r'd}\,.$$

Ceci achève la construction d'un φ' convenable. Et il est immédiat qu'à isomorphisme près préservant γ' c'est la seule possibilité.

La dernière assertion résulte de ce que, comme γ est (u,s)–admissible, son image dans $\mathrm{Aut}((\widetilde{V}_\infty^{\tilde\infty})^{\widetilde{\varphi}_\infty^{\tilde\infty}})$ [resp. $\mathrm{Aut}((\widetilde{V}_0^{\tilde 0})^{\widetilde{\varphi}_0^{\tilde 0}})$] a toutes ses valuations nulles, donc engendre un sous–groupe d'adhérence compacte, qui nécessairement stabilise un réseau, c'est–à–dire un élément de $Y_\infty^{\tilde\infty}/K_\infty^{\tilde\infty}$ [resp. $Y_0^{\tilde 0}/K_0^{\tilde 0}$]. □

De la proposition 1 et du lemme 3, ainsi que du théorème 1 du paragraphe III.3, on déduit immédiatement :

THÉORÈME 5. — *Soient $r \geq 1$ un entier, ∞ et 0 deux places distinctes de F qui sont dans X', et $\overline{\infty}$, $\overline{0}$ deux points de $X(\overline{\mathbb{F}_q})$ au-dessus de ∞ et 0.*

On fixe des isomorphismes d'algèbres $\mathcal{D}_\infty \xrightarrow{\sim} M_d(O_\infty)$, $\mathcal{D}_0 \xrightarrow{\sim} M_d(O_0)$.

Soit (V,i) le $D\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$–module à droite $(D\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q})^r$.

Pour toute structure de φ–espace (V,φ,i) sur (V,i), telle que $(V)^\varphi = (V'')^{\varphi''}$ soit contenu dans D^r et qui corresponde à une classe d'isogénies de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(\overline{0},\overline{\infty})$, on choisit une fois pour toutes, avec les notations du théorème 1 *du paragraphe* III.3, *un point base dans*

$$Z_{\tilde\infty}\times Y_\infty^{\tilde\infty}\times Y^{\infty,0}\times Y_0^{\tilde 0}\times Z_{\tilde 0}$$

c'est–à–dire :

- *une base de $(V_{\mathbb{A}}^{\infty,0})^{\varphi^{\infty,0}}$ sur $D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$,*
- *une base de $(\widetilde{V}_\infty^{\tilde\infty})^{\widetilde{\varphi}_\infty^{\tilde\infty}}$ [resp. $(\widetilde{V}_0^{\tilde 0})^{\widetilde{\varphi}_0^{\tilde 0}}$] sur F_∞ [resp. F_0],*
- *un réseau dans $\widetilde{V}_{\tilde\infty}$ [resp. $\widetilde{V}_{\tilde 0}$] qui soit élément de $Z_{\tilde\infty}$ [resp. $Z_{\tilde 0}$].*

En notant $G(\mathbb{A}^{\infty,0}) = \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$, $G_\infty^{\tilde\infty} = \mathrm{GL}_{rd-h_\infty}(F_\infty)$, $G_0^{\tilde 0} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(F_0)$ et $\Delta = \mathrm{End}(V,\varphi,i)$, $\Delta' = \mathrm{End}(V',\varphi',i)$, $\Delta'' = \mathrm{End}(V'',\varphi'',i)$, on a des homomorphismes induits :

$$\begin{array}{lllllll}
\Delta^\times & \longrightarrow & \Delta'^\times & \xrightarrow{\det} & \widetilde{F}^\times & \xrightarrow{-\frac{\deg(\tilde\infty)}{\deg(\infty)}\tilde\infty(\cdot)} & \mathbb{Z} \\
\Delta^\times & \longrightarrow & G_\infty^{\tilde\infty} & & & & \\
\Delta^\times & \longrightarrow & G(\mathbb{A}^{\infty,0}) & & & & \\
\Delta^\times & \longrightarrow & G_0^{\tilde 0} & & & & \\
\Delta^\times & \longrightarrow & \Delta'^\times & \xrightarrow{\det} & \widetilde{F}^\times & \xrightarrow{\frac{\deg(\tilde 0)}{\deg(0)}\tilde 0(\cdot)} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

De plus, soit a un élément de degré 1 dans $(\mathbb{A}^{\infty,0})^{\times}$, fixé une fois pour toutes.

Et soient u, $s \geq 1$ deux entiers, avec $\deg(0) \mid u$ *et* $\deg(\infty) \mid s$.

Pour tout élément γ de $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$ qui est (u,s)-admissible, on choisit une fois pour toutes une structure de φ-espace (V, φ, i) sur (V, i) qui satisfasse les conditions du lemme 3 (ii). *Et on note $\Delta_\gamma = \Delta'_{\gamma'} \times \Delta''_{\gamma''}$ la sous-algèbre de $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ des éléments qui commutent avec γ.*

Alors, si γ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison d'éléments (u,s)-admissibles de $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$, les choix que nous avons faits déterminent une équivalence, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \backslash \{\infty, 0\}$ et tout élément g de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, entre le groupoïde $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$ *et la somme disjointe de groupoïdes quotients*

$$\coprod_{\gamma} \Delta_\gamma^\times \backslash \{(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, m_{\tilde 0})\} / K_\infty^{\tilde\infty} \times K_I^{\infty,0} a^{\mathbb{Z}} \times K_0^{\tilde 0}$$

où

$$K_\infty^{\tilde\infty} = \mathrm{GL}_{rd-h_\infty}(O_\infty) \subseteq \mathrm{GL}_{rd-h_\infty}(F_\infty) = G_\infty^{\tilde\infty}$$

$$K_I^{\infty,0} = \mathrm{Ker}\left[\prod_{\substack{x \in |X| \\ x \neq \infty, 0}} \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)\right] \subseteq \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}) = G(\mathbb{A}^{\infty,0})$$

$$K_0^{\tilde 0} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(O_0) \subseteq \mathrm{GL}_{rd-h_0}(F_0) = G_0^{\tilde 0}$$

et $\{(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, m_{\tilde 0})\}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde\infty} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde 0} \times \mathbb{Z}$ défini par les conditions

$$\begin{cases} (g_\infty^{\tilde\infty})^{-1} \gamma g_\infty^{\tilde\infty} \in K_\infty^{\tilde\infty} \\ (g^{\infty,0})^{-1} \gamma g^{\infty,0} \in K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0} a^{\mathbb{Z}} \\ (g_0^{\tilde 0})^{-1} \gamma g_0^{\tilde 0} \in K_0^{\tilde 0}\,. \end{cases}$$

$\square$

5. — Nombres de Lefschetz

Sont toujours fixés ∞, 0, $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ comme dans les précédents paragraphes. Par ailleurs, on suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre partout maximale.

a) Polygones de Harder–Narasimhan

LEMME 1. — *Soit α un nombre réel.*

Soit $\mathcal{A}_{\overline{0},\overline{\infty}}$ la catégorie abélienne des diagrammes de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$–Modules cohérents sur $X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow^{j} & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow_{t} & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$$

où j et t sont des isomorphismes en–dehors de $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ respectivement.

Soient rg *et* $\deg_\alpha$ *les deux applications*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} : \mathrm{Ob}\mathcal{A}_{\overline{0},\overline{\infty}} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \widetilde{\mathcal{E}} &\longmapsto \mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{E}} = \mathrm{rg}_{\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}}(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{tor}) \\ \deg_\alpha : \mathrm{Ob}\mathcal{A}_{\overline{0},\overline{\infty}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \widetilde{\mathcal{E}} &\longmapsto \alpha \deg(\det \mathcal{E}) + (1-\alpha)\deg(\det \mathcal{E}')\,. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{A}_{\overline{0},\overline{\infty}}$ munie de ces deux applications est une catégorie à pentes (au sens de la définition 1 *du paragraphe* II.2*).*

De plus, si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un objet sans torsion de $\mathcal{A}_{\overline{0},\overline{\infty}}$ (c'est–à–dire un $\mathcal{D}$–chtouca généralisé sur $\overline{\mathbb{F}_q}$), muni d'un automorphisme γ de sa fibre générique, alors la famille de ses sous–objets dont la fibre générique est stabilisée par γ est une bonne famille (toujours au sens de la définition 1 *du paragraphe* II.2*).*

Démonstration : Cela résulte du lemme 3 du paragraphe II.2 et du fait que si γ est un automorphisme d'un certain φ–espace (V, φ, i) la famille des sous–espaces stabilisés par γ est stable par intersections et sommes. □

D'après la proposition 2 du paragraphe II.2, on voit maintenant que pour tout entier $r \geq 1$ et tout nombre réel α, on peut associer à tout couple $(\widetilde{\mathcal{E}}, \gamma)$ constitué d'un objet $\widetilde{\mathcal{E}}$ de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}(\overline{0}, \overline{\infty})$ et d'un automorphisme γ de la fibre générique de $\widetilde{\mathcal{E}}$, un polygone α–canonique

$$\overline{p}_{\gamma,\alpha} : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}_+\,.$$

On dispose aussi du polygone α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$

$$\overline{p}_\alpha : [0, r] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

et on a évidemment toujours l'inégalité

$$\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq \overline{p}_\alpha\,.$$

LEMME 2. — *Soient $r \geq 1$ un entier et α un nombre réel.*

Soient $\widetilde{\mathcal{E}}$ un objet de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}(\overline{0}, \overline{\infty})$ et γ un automorphisme de la fibre générique (V, φ, i) de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Soit $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ l'écriture qui correspond à la décomposition canonique $(V, \varphi, i) = (V', \varphi', i) \oplus (V'', \varphi'', i)$ en partie irréductible et partie triviale.

Enfin, soit $\mathcal{L}$ un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ muni d'une section rationnelle non nulle ℓ et tel que l'homomorphisme $\gamma'' : (V, \varphi, i) \to (V, \varphi, i)$ et ℓ induisent un homomorphisme partout défini

$$\gamma'' \otimes \ell : \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}\,.$$

Alors, en posant $R = d \deg \mathcal{L}$, on a :

(i) *Pour tout sous-objet maximal $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ tel que*

$$\mu^-_\alpha(\widetilde{\mathcal{F}}) > \mu^+_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{F}}) + R\,,$$

la fibre générique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est stabilisée par γ.

(ii) *Pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ vérifiant*

$$1 \leq r' < r \Longrightarrow p(r') - p(r'-1) > [p(r'+1) - p(r')] + R$$

et en notant $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$ et $\overline{p}_\alpha$ les polygones α-canoniques de $(\widetilde{\mathcal{E}}, \gamma)$ et $\widetilde{\mathcal{E}}$, on a l'équivalence

$$\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p \Longleftrightarrow \overline{p}_\alpha \leq p\,.$$

Démonstration :

(i) La fibre générique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ s'écrit comme la somme directe d'un sous-espace de (V', φ', i) qui est soit 0 soit (V', φ', i) et d'un sous-espace de (V'', φ'', i). Donc elle est automatiquement stabilisée par γ'. Comme $\gamma = \gamma' + \gamma''$, il s'agit de voir qu'elle est aussi stabilisée par γ'' c'est-à-dire que l'homomorphisme composé

$$\widetilde{\mathcal{F}} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\gamma'' \otimes \ell} \widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$$

est nul.

Or, d'après le lemme 6 (i) du paragraphe II.2, on a

$$\mu^+_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}) = \mu^+_\alpha(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{F}}) + d \deg \mathcal{L}$$

d'où par hypothèse

$$\mu_\alpha^-(\widetilde{\mathcal{F}}) > \mu_\alpha^+(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}) .$$

On conclut d'après la proposition 2 (v) du paragraphe II.2.

(ii) On sait que $\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq \overline{p}_\alpha$ d'où déjà l'implication

$$\overline{p}_\alpha \leq p \Longrightarrow \overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p .$$

Réciproquement, supposons qu'on n'ait pas $\overline{p}_\alpha \leq p$. Soit $0 = \widetilde{\mathcal{E}}_0 \subsetneq \widetilde{\mathcal{E}}_1 \subsetneq \cdots$ la filtration α–canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ un objet parmi les $\widetilde{\mathcal{E}}_i$ qui maximise la quantité

$$(\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} - \frac{\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}}{\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{E}}} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}) - p(\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}) = (\overline{p}_\alpha - p)(\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}) .$$

Ainsi, on a

$$\deg_\alpha \widetilde{\mathcal{F}} - \frac{\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}}{\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{E}}} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} > p(\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}})$$

et par ailleurs, il résulte de l'hypothèse sur p que

$$\mu^-(\widetilde{\mathcal{F}}) > \mu^+(\widetilde{\mathcal{E}}/\widetilde{\mathcal{F}}) + R .$$

D'après (i), la fibre générique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est stabilisée par γ et donc il n'est pas vrai non plus que $\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p$. $\square$

Considérons maintenant, pour $r \geq 1$ un entier et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application qui à tout objet de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(\overline{0}, \overline{\infty})$ [resp. et qui est muni d'un automorphisme de sa fibre générique] associe son polygone α–canonique $\overline{p}_\alpha$ [resp. $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$]. Cette application est invariante par l'action de $\mathrm{Pic}(X)$ d'après le corollaire 7 (i) du paragraphe II.2. En particulier, si on a choisi un élément a de degré 1 dans $(\mathbb{A}^{\infty,0})^\times$, elle est invariante par $a^{\mathbb{Z}}$.

Or, si $I \hookrightarrow X \backslash \{\infty, 0\}$ est un sous–schéma fermé fini, g est un élément de $G(\mathbb{A}^{\infty,0}) = \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$ et $u, s \geq 1$ sont deux entiers avec $\deg(0)|u$ et $\deg(\infty)|s$, le foncteur

$$\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D},I}^r(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty}) \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^r(\overline{0},\overline{\infty})/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(\overline{0},\overline{\infty})/a^{\mathbb{Z}}$$

associe à tout objet de $\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D},I}^r(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$ un objet de $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(\overline{0},\overline{\infty})$ (modulo $a^{\mathbb{Z}}$) et qui de plus est évidemment muni d'un automorphisme de sa fibre générique.

A tout objet de $\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D}}^r(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$, on sait donc associer des polygones α–canoniques $\overline{p}_\alpha$ et $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$.

PROPOSITION 3. — *On a fixé un élément a de degré 1 dans* $(\mathbb{A}^{\infty,0})^\times$.

Soient $r \geq 1$ un entier et α un nombre réel.

Soient $I \hookrightarrow X\backslash\{\infty, 0\}$ un sous-schéma fermé fini, g un élément de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ *et $u, s \geq 1$ deux entiers avec* $\deg(0) \mid u$ *et* $\deg(\infty) \mid s$.

(i) *Soit $R \geq 0$ une constante telle qu'existe un élément $b \in (\mathbb{A}^{\infty,0})^\times$ vérifiant :*

- $bg \in G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \cap M_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$ *où* $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,0} = \prod_{x\in|X|\backslash\{\infty,0\}} \mathcal{D}_x$,
- $R \geq -d\deg(b) - \frac{1}{r}\deg(\det g) + \frac{1}{r}(s-u)$.

Alors pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ tel que

$$1 \leq r' < r \Longrightarrow p(r') - p(r'-1) > [p(r'+1) - p(r')] + R$$

et pour tout objet de $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g, u, s)(\overline{0}, \overline{\infty})$ *de polygones α-canoniques $\overline{p}_\alpha$ et $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$, on a l'équivalence*

$$\overline{p}_\alpha \leq p \Longleftrightarrow \overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p\,.$$

(ii) *Pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes dans le groupoïde* $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g, u, s)(\overline{0}, \overline{\infty})$ *dont le polygone α-canonique $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$ vérifie*

$$\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p\,.$$

Démonstration :

(i) On utilise les notations de la proposition 1 du paragraphe III.4 et la description qui y est faite du groupoïde $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g, u, s)(\overline{0}, \overline{\infty})$. On considère donc un objet dans la classe d'isogénies $\mathrm{Fixe}^{r,\mathcal{C}}_{\mathcal{D},I}(g, u, s)(\overline{0}, \overline{\infty})$ représenté par un uplet $(\gamma, \widetilde{M}_{\tilde{\infty}}, y^{\tilde{\infty}}_{\infty}, y^{\infty,0}, y^{\tilde{0}}_0, \widetilde{M}_{\tilde{0}})$ dans $\Delta^\times \times Z_{\tilde{\infty}} \times Y^{\tilde{\infty}}_{\infty} \times Y^{\infty,0} \times Y^{\tilde{0}}_0 \times Z_{\tilde{0}}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} -\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\det \gamma') = s \\ \gamma y^{\tilde{\infty}}_{\infty} \in y^{\tilde{\infty}}_{\infty} K^{\tilde{\infty}}_{\infty} \\ \gamma y^{\infty,0} \in y^{\infty,0} K^{\infty,0}_I g K^{\infty,0}_I a^n \text{ pour un } n \in \mathbb{Z} \\ \gamma y^{\tilde{0}}_0 \in y^{\tilde{0}}_0 K^{\tilde{0}}_0 \\ \deg(\tilde{0})\tilde{0}(\det \gamma') = u \end{cases}$$

Ecrivons que l'élément $\det \gamma$ dans $F^\times$ est de degré 0. On obtient

$$-s + \deg(\det g) + rdn + u = 0$$

puisque a est de degré 1.

Par ailleurs, on a

$$(ba^{-n})K_I^{\infty,0}gK_I^{\infty,0}a^n \subseteq G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \cap M_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,0})\,.$$

Donc si $\mathcal{L}$ est le réseau dans $\mathbb{A}$ qui est engendré par $b^{-1}a^n$ en les places distinctes de $\infty, 0$ et par 1 en ∞ et 0, $\mathcal{L}$ vu comme un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ muni d'une section rationnelle vérifie l'hypothèse du lemme 2 ci–dessus.

Or $\deg\mathcal{L} = -\deg(b) + n = -\deg(b) + \frac{s-u-\deg(\det g)}{rd}$. Ainsi, l'énoncé résulte du lemme 2 (ii).

(ii) Il existe certainement une constante $R \geq 0$ comme dans (i), et on peut trouver un polygone $q \geq p$ tel que

$$1 \leq r' < r \Longrightarrow q(r') - q(r'-1) \geq [q(r'+1) - q(r')] + R\,.$$

Il suffit donc de prouver qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes dans $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$ dont le polygone α–canonique $\overline{p}_\alpha$ vérifie

$$\overline{p}_\alpha \leq q\,.$$

Et ceci résulte des faits suivants :

- D'après la proposition 6 du paragraphe I.4, le champ $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s)$ au–dessus de $\mathrm{Spec}\,\kappa(0) \times \mathrm{Spec}\,\kappa(\infty)$ est un champ algébrique au sens de Deligne–Mumford, étale sur $\mathbb{F}_q$, donc localement fini sur $\mathbb{F}_q$.
- Le morphisme $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g,u,s) \longrightarrow \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ est représentable par une immersion fermée.
- On a un isomorphisme naturel :

$$\coprod_{0\leq n<rd} \mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D},I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

- Les morphismes $\mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D}}$ sont représentables finis, et d'après le théorème 8 du paragraphe II.2, les sous–champs ouverts $\mathrm{Cht}^{r,n,\overline{p}_\alpha\leq q}_{\mathcal{D}}$ des $\mathrm{Cht}^{r,n}_{\mathcal{D}}$ sont de type fini au–dessus de $X' \times X' \times_{(X\times X)} \Lambda$.

$\square$

b) Définition des nombres de Lefschetz

On a fixé a un élément de degré 1 dans $(\mathbb{A}^{\infty,0})^\times$ et $r \geq 1$ un entier.

On reprend les notations du paragraphe I.4b, avec $T = \{\infty, 0\}$. En particulier, le groupe $G(\mathbb{A}^{\infty,0}) = \mathrm{GL}_r(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$ est muni de la mesure de Haar

$dg^{\infty,0}$ pour laquelle le sous–groupe compact ouvert $K^{\infty,0} = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$ est de volume 1. $\mathcal{H}^{\infty,0}$ désigne l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, c'est–à–dire l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ dans $\mathbb{Q}$. Et pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X\backslash\{\infty, 0\}$, $\mathcal{H}_I^{\infty,0}$ désigne la sous–algèbre de $\mathcal{H}^{\infty,0}$ des fonctions invariantes à gauche et à droite par $K_I^{\infty,0} = \mathrm{Ker}[\mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,0}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_I)]$. On rappelle que tout élément $f^{\infty,0}$ de $\mathcal{H}_I^{\infty,0}$ s'écrit de manière unique comme une somme finie

$$f^{\infty,0} = \sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{K_I^{\infty,0} g_i K_I^{\infty,0}}$$

où les λ_i sont des nombres rationnels non nuls, les $K_I^{\infty,0} g_i K_I^{\infty,0}$ sont des classes distinctes dans $K_I^{\infty,0}\backslash G(\mathbb{A}^{\infty,0})/K_I^{\infty,0}$ et les $\mathbb{1}_{K_I^{\infty,0} g_i K_I^{\infty,0}}$ sont leurs fonctions caractéristiques dans $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$.

PROPOSITION 4. — *Soient u, $s \geq 1$ deux entiers avec* $\deg(0) \mid u$ *et* $\deg(\infty) \mid s$. *Et soient $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone, et α un nombre réel.*

(i) *Pour tout sous–schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$ et tout élément g de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, on considère la somme*

$$\sum_M \frac{1}{\#\,\mathrm{Aut}(M)}$$

où M décrit un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes d'objets du groupoïde $\mathrm{Fixe}^r_{\mathcal{D},I}(g, u, s)(\overline{0}, \overline{\infty})$ dont le polygone α–canonique $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$ vérifie $\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p$, et où pour tout tel M, $\#\,\mathrm{Aut}(M)$ désigne le cardinal du groupe fini de ses automorphismes.

Alors cette somme est finie.

On la note $\mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p}_{\mathcal{D},I}(g, u, s)$.

Elle ne dépend que de la classe de g dans $K_I^{\infty,0}\backslash G(\mathbb{A}^{\infty,0})/K_I^{\infty,0}$.

(ii) *Pour tout élément $f^{\infty,0}$ de $\mathcal{H}^{\infty,0}$ et tout sous–schéma fermé $I \hookrightarrow X\backslash\{\infty, 0\}$ tel que $f^{\infty,0} \in \mathcal{H}_I^{\infty,0} \subseteq \mathcal{H}^{\infty,0}$, on considère la somme*

$$\sum_i \lambda_i dg^{\infty,0}(K_I^{\infty,0}) \mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p}_{\mathcal{D},I}(g, u, s)$$

associée à l'écriture canonique

$$f^{\infty,0} = \sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{K_I^{\infty,0} g_i K_I^{\infty,0}}\,.$$

Alors cette somme ne dépend pas de I.

On la note $\mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,s)$.

C'est une fonction $\mathbb{Q}$*–linéaire de* $f^{\infty,0}\in\mathcal{H}^{\infty,0}$.

Démonstration :

(i) La finitude de cette somme a été prouvée dans la proposition 3 (ii) plus haut.

Le fait qu'elle ne dépend que de la classe de g dans $K_I^{\infty,0}\backslash G(\mathbb{A}^{\infty,0})/K_I^{\infty,0}$ résulte du lemme 4 (i) du paragraphe I.4.

(ii) Il suffit de prouver que si $I\hookrightarrow J\hookrightarrow X\backslash\{\infty,0\}$ sont deux sous–schémas fermés finis emboîtés avec $f^{\infty,0}\in\mathcal{H}_I^{\infty,0}\subseteq\mathcal{H}_J^{\infty,0}\subset\mathcal{H}^{\infty,0}$, alors les sommes associées à $(f^{\infty,0},I)$ et $(f^{\infty,0},J)$ sont égales. Or ceci résulte du lemme 7 du paragraphe I.4 puisque l'indice fini $[K_I^{\infty,0}:K_J^{\infty,0}]$ est égal au quotient des mesures

$$dg^{\infty,0}(K_I^{\infty,0})/dg^{\infty,0}(K_J^{\infty,0})\,.$$

Enfin, la $\mathbb{Q}$–linéarité est évidente. $\square$

LEMME 5. — *Soient* u, $s\geq 1$ *deux entiers, avec* $\deg(0)\mid u$ *et* $\deg(\infty)\mid s$. *Et soit* $p:[0,r]\to\mathbb{R}_+$ *un polygone.*

Alors pour toute fonction $f^{\infty,0}$ *dans* $\mathcal{H}^{\infty,0}$*, l'application*

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Q}\qquad \alpha\longmapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,s)$$

est périodique de période le p.g.c.d. des entiers $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$.

Démonstration : Il est équivalent de prouver que pour tout sous–schéma fermé fini $I\hookrightarrow X\backslash\{\infty,0\}$ et tout élément $g\in G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, la fonction

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Q}\qquad \alpha\longmapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{D},I}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(g,u,s)$$

est période de période le p.g.c.d. de $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$.

Or les morphismes $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$ et $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ induisent deux foncteurs commutant entre eux

$$\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D},I}^r(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})\rightrightarrows\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D},I}^r(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})\,.$$

De plus, le composé $(\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)})^{\deg(\infty)}\circ(\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)})^{\deg(0)}=\mathrm{Frob}^{\deg(0)\deg(\infty)}$ est une équivalence, puisque Frob est une équivalence du groupoïde $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^r(\overline{\mathbb{F}_q})$ dans lui–même. Donc $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$ et $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ sont eux–mêmes des équivalences.

Et d'autre part, d'après le lemme 6 (ii) du paragraphe II.2, le polygone α–canonique de tout objet de $\mathrm{Fixe}_{\mathcal{D},I}^r(g,u,s)(\overline{0},\overline{\infty})$ est égal au polygone $(\alpha-\deg(0))$–canonique [resp. $(\alpha+\deg(\infty))$–canonique] de son image par $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$ [resp. $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$].

D'où le résultat. $\square$

6. — Expression intégrale des nombres de Lefschetz

Sont toujours fixés ∞, 0, $\overline{\infty}$ et $\overline{0}$ comme dans les précédents paragraphes, ainsi qu'un élément a de degré 1 dans $(\mathbb{A}^{\infty,0})^\times$, qu'un entier $r \geq 1$, et que des isomorphismes $\mathcal{D}_\infty \tilde{\to} M_d(O_\infty), \mathcal{D}_0 \tilde{\to} M_d(O_0)$.

Et on suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre partout maximale.

a) Fonctions de troncature

Considérons d'abord, avec les notations du théorème 1 du paragraphe III.3, $\mathcal{C}$ une classe d'isogénies, (V, φ, i) la fibre générique qui lui correspond, et γ un élément de $\Delta^\times = \mathrm{Aut}(V, \varphi, i)$.

D'après ce théorème le groupoïde

$$\Delta_\gamma^\times \backslash [Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}}] / K_\infty^{\tilde{\infty}} \times K^{\infty,0} \times K_0^{\tilde{0}},$$

où Δ_γ désigne la sous-algèbre de Δ des éléments qui commutent avec γ, s'identifie au groupoïde des $\mathcal{D}$-chtoucas dans $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D}}^r(\overline{0}, \overline{\infty})$ qui sont dans la classe d'isogénie $\mathcal{C}$ et dont la fibre générique est munie d'un automorphisme dans la classe de conjugaison de γ.

D'après les considérations du paragraphe III.5a, on peut donc associer à tout objet de ce groupoïde et à tout nombre réel α un polygone α-canonique $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$.

Pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $\mathbb{1}(\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(\cdot)} \leq p)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des objets dont le polygone α-canonique est majoré par p. C'est donc une fonction caractéristique sur $Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}}$, invariante à gauche par $\Delta_\gamma^\times$ et invariante à droite par $K_\infty^{\tilde{\infty}} \times K^{\infty,0} \times K_0^{\tilde{0}}$. Elle est également invariante par $\mathbb{A}^\times$ et en particulier par $a^{\mathbb{Z}}$, d'après le lemme 6 (i) du paragraphe II.2.

Considérons maintenant le cas particulier où γ est un élément (u, s)–admissible de $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$, pour $u, s \geq 1$ deux entiers avec $\deg(0)|u$, $\deg(\infty)|s$, où $(V, i) = (D \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})^r$, et où (V, φ, i) est la structure de φ-espace sur (V, i) qui a été associée à γ dans l'énoncé du théorème 5 du paragraphe III.4. Toujours comme dans ce théorème, on a également choisi un point base de $Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}}$ qui induit une identification

$$Z_{\tilde{\infty}} \times Y_\infty^{\tilde{\infty}} \times Y^{\infty,0} \times Y_0^{\tilde{0}} \times Z_{\tilde{0}} \tilde{\to} \mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde{\infty}} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde{0}} \times \mathbb{Z}$$

si bien que les fonctions caractéristique $\mathbb{1}(\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(\cdot)} \leq p)$ sont maintenant définies sur $\mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde{\infty}} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde{0}} \times \mathbb{Z}$.

On rappelle qu'on a une décomposition canonique en partie irréductible et partie triviale

$$(V, \varphi, i) = (V', \varphi', i) \oplus (V'', \varphi'', i)$$

et que les isomorphismes $\mathcal{D}_\infty \tilde{\to} M_d(O_\infty)$, $\mathcal{D}_0 \tilde{\to} M_d(O_0)$ induisent des décompositions

$$V'_\infty = (\widetilde{V}'_\infty)^d \quad \widetilde{V}'_\infty = \widetilde{V}_{\tilde{\infty}} \oplus \widetilde{V}'^{\tilde{\infty}}_\infty \quad V''_\infty = (\widetilde{V}''_\infty)^d$$
$$V'_0 = (\widetilde{V}'_0)^d \quad \widetilde{V}'_0 = \widetilde{V}_{\tilde{0}} \oplus \widetilde{V}'^{\tilde{0}}_0 \quad V''_0 = (\widetilde{V}''_0)^d$$

avec $\widetilde{V}^{\tilde{\infty}}_\infty = \widetilde{V}'^{\tilde{\infty}}_\infty \oplus \widetilde{V}''_\infty$ et $\widetilde{V}^{\tilde{0}}_0 = \widetilde{V}'^{\tilde{0}}_0 \oplus \widetilde{V}''_0$.

LEMME 1. — *Comme ci-dessus, soient $u, s \geq 1$ deux entiers avec* $\deg(0)|u$, $\deg(\infty)|s$ *et γ un élément (u,s)-admissible de $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$.*

Soient $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ la décomposition canonique de γ, r' le rang de γ' sur D, $E = D^r$, $E' = D^{r'}$, $E'' = D^{r-r'}$; on a donc $\gamma \in \mathrm{Aut}\, E$, $E = E' \oplus E''$ et on suppose que $\gamma' \in \mathrm{Aut}\, E'$, $\gamma'' \in \mathrm{Aut}\, E''$. Ainsi $(V', i) = E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ et $(V'', \varphi'', i) = (E'' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}, \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Frob})$.

Avec les notations ci-dessus, on suppose encore que le point base choisi de $Y^{\infty,0}$ [resp. $Y^{\tilde{\infty}}_\infty$, resp. $Y^{\tilde{0}}_0$] qui est une base de $(V^{\infty,0}_{\mathbb{A}})^{\varphi^{\infty,0}_{\mathbb{A}}}$ sur $D^{\infty,0}_{\mathbb{A}}$ [resp. de $(\widetilde{V}^{\tilde{\infty}}_\infty)^{\tilde{\varphi}^{\tilde{\infty}}_\infty}$ sur F_∞, resp. de $(\widetilde{V}^{\tilde{0}}_0)^{\tilde{\varphi}^{\tilde{0}}_0}$ sur F_0] a été construit en adjoignant à la base de $(V''^{\infty,0}_{\mathbb{A}})^{\varphi''^{\infty,0}_{\mathbb{A}}}$ [resp. $(\widetilde{V}''_\infty)^{\widetilde{\varphi}''_\infty}$, resp. $(\widetilde{V}''_0)^{\widetilde{\varphi}''_0}$] induite par la base canonique de $(V'')^{\varphi''} = E'' = D^{r-r'}$ une base de $(V'^{\infty,0}_{\mathbb{A}})^{\varphi'^{\infty,0}_{\mathbb{A}}}$ [resp. $(\widetilde{V}'^{\tilde{\infty}}_\infty)^{\widetilde{\varphi}'^{\tilde{\infty}}_\infty}$, resp. $(\widetilde{V}'^{\tilde{0}}_0)^{\widetilde{\varphi}'^{\tilde{0}}_0}$].

Alors :

(i) *En notant Δ_γ, $\Delta'_{\gamma'}$, $\Delta''_{\gamma''}$,* $\mathrm{End}(E)_\gamma$, $\mathrm{End}(E')_{\gamma'}$, $\mathrm{End}(E'')_{\gamma''}$ *les sous-algèbres de commutateurs, on a*

$$\Delta = \Delta' \times \Delta'' \qquad \Delta_\gamma = \Delta'_{\gamma'} \times \Delta''_{\gamma''}$$

et $\mathrm{End}(E)_\gamma = \mathrm{End}(E')_{\gamma'} \times \mathrm{End}(E'')_{\gamma''}$.

De plus, on a des identifications naturelles

$$\Delta'' = \mathrm{End}(E'') \qquad \Delta''_{\gamma''} = \mathrm{End}(E'')_{\gamma''} .$$

(ii) *Les sous-D-modules W de E stables par γ sont ceux de la forme*

$$W = W' \oplus W'' \subseteq E' \oplus E'' = E$$

où W' et W'' sont respectivement des sous-D-modules de E' et E'' stables par γ' et γ''.

(iii) *L'application* $W \mapsto \overline{W} = W \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \subseteq E \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} = V$ *induit une bijection de l'ensemble des* W *comme dans* (ii) *tels que* $W' = 0$ *ou* $W' = E'$ *sur l'ensemble des sous-espaces de* (V, φ, i) *stables par* γ.

(iv) *Pour* W *comme dans* (iii), *le sous-groupe de* $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ *des éléments qui stabilisent le sous-espace* $W_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$ *de* $E_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$ *se confond avec le sous-groupe des éléments qui stabilisent le sous-espace* $\overline{W}_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$ *de* $V_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$. *Notons-le* $P_W(\mathbb{A}^{\infty,0})$.

(v) *Avec les notations de la définition* 2 *du paragraphe* III.4, *soit* $\gamma'_{0'} = \gamma_{0'}$ *l'image de* γ_0 *dans le facteur* $F'_{0'}$ *de* F'_0 *ou* $F[\gamma]_0$ [*resp.* $\gamma'_{\infty'} = \gamma_{\infty'}$ *l'image de* γ_∞ *dans le facteur* $F'_{\infty'}$ *de* F'_∞ *ou* $F[\gamma]_\infty$]. *Soient* $\gamma_0'^{0'}$ *et* $\gamma_0^{0'}$ [*resp.* $\gamma_\infty'^{\infty'}$ *et* $\gamma_\infty^{\infty'}$] *les autres facteurs avec donc*

$$\gamma'_0 = (\gamma'_{0'}, \gamma_0'^{0'}) \qquad \gamma_0 = (\gamma_{0'}, \gamma_0^{0'}) \qquad \gamma_0^{0'} = (\gamma_0'^{0'}, \gamma''_0)$$

$$[resp. \quad \gamma'_\infty = (\gamma'_{\infty'}, \gamma_\infty'^{\infty'}) \quad \gamma_\infty = (\gamma_{\infty'}, \gamma_\infty^{\infty'}) \quad \gamma_\infty^{\infty'} = (\gamma_\infty'^{\infty'}, \gamma''_\infty)]$$

et soient les décompositions en sommes directes correspondantes

$$E'_0 = E'_{0'} \oplus E_0'^{0'} \qquad E_0 = E_{0'} \oplus E_0^{0'} \qquad E'_{0'} = E_{0'} \qquad E_0^{0'} = E_0'^{0'} \oplus E''_0$$

$$[resp.\ E'_\infty = E'_{\infty'} \oplus E_\infty'^{\infty'} \quad E_\infty = E_{\infty'} \oplus E_\infty^{\infty'} \quad E'_{\infty'} = E_{\infty'} \quad E_\infty^{\infty'} = E_\infty'^{\infty'} \oplus E''_\infty].$$

L'isomorphisme $\mathcal{D}_0 \xrightarrow{\sim} M_d(O_0)$ [*resp.* $\mathcal{D}_\infty \xrightarrow{\sim} M_d(O_\infty)$] *induit des décompositions canoniques*

$$E_0 = (\widetilde{E}_0)^d, E'_0 = (\widetilde{E}'_0)^d, E''_0 = (\widetilde{E}''_0)^d, E_{0'} = (\widetilde{E}_{0'})^d, E_0^{0'} = (\widetilde{E}_0^{0'})^d,$$
$$E_0'^{0'} = (\widetilde{E}_0'^{0'})^d$$

$$[resp.\ E_\infty = (\widetilde{E}_\infty)^d, E'_\infty = (\widetilde{E}'_\infty)^d, E''_\infty = (\widetilde{E}''_\infty)^d, E_{\infty'} = (\widetilde{E}_{\infty'})^d, E_\infty^{\infty'} = (\widetilde{E}_\infty^{\infty'})^d,$$
$$E_\infty'^{\infty'} = (\widetilde{E}_\infty'^{\infty'})^d].$$

La base canonique de E'' *induit une base canonique de* $\widetilde{E}''_0$ [*resp.* $\widetilde{E}''_\infty$] *de cardinal* $(r - r')d$. *Et la dimension de* $\widetilde{E}_0'^{0'}$ [*resp.* $\widetilde{E}_\infty'^{\infty'}$] *sur* F_0 [*resp.* F_∞] *est* $r'd - h_0$ [*resp.* $r'd - h_\infty$]. *Donc le choix d'une base de cet espace induit un isomorphisme*

$$G_0^{\tilde{0}} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(F_0) \xrightarrow{\sim} G_0^{0'} = \mathrm{Aut}_{F_0}(\widetilde{E}_0^{0'}) = \mathrm{Aut}_{D_0}(E_0^{0'})$$

$$[resp. \quad G_\infty^{\tilde{\infty}} = \mathrm{GL}_{rd-h_\infty}(F_\infty) \xrightarrow{\sim} G_\infty^{\infty'} = \mathrm{Aut}_{F_\infty}(\widetilde{E}_\infty^{\infty'}) = \mathrm{Aut}_{D_\infty}(E_\infty^{\infty'})].$$

Ce choix étant fait, le sous-groupe de $G_0^{\tilde{0}}$ [*resp.* $G_\infty^{\tilde{\infty}}$] *des éléments qui stabilisent le sous-espace* $W_0^{0'} = W_0 \cap E_0^{0'}$ [*resp.* $W_\infty^{\infty'} = W_\infty \cap E_\infty^{\infty'}$] *se confond avec le sous-groupe des éléments qui stabilisent le sous-espace* $\overline{W}_0^{\tilde{0}} = \overline{W}_0 \cap V_0^{\tilde{0}}$ [*resp.* $\overline{W}_\infty^{\tilde{\infty}} = \overline{W}_\infty \cap V_\infty^{\tilde{\infty}}$].
Notons-le $(P_W)_0^{\tilde{0}}$ [*resp.* $(P_W)_\infty^{\tilde{\infty}}$].

(vi) *Soit W un sous-D-module de E comme dans* (iii).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $\deg_\alpha^{\overline{W}}$ l'application

$$\mathbb{Z} \times \widetilde{G_\infty^\infty} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times \widetilde{G_0^0} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

qui associe à tout élément de l'ensemble de départ le nombre réel $\deg_\alpha(\widetilde{\mathcal{F}})$ où $\widetilde{\mathcal{F}}$ est le sous-objet maximal engendré par $\overline{W}$ dans le $\mathcal{D}$-chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ de fibre générique (V, φ, i) associé à cet élément.

Par ailleurs, notons $\deg^W$ l'unique application $G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \to \mathbb{Z}$ [resp. $\widetilde{G_0^0} \to \mathbb{Z}$, resp. $\widetilde{G_\infty^\infty} \to \mathbb{Z}$] invariante à droite par $K^{\infty,0}$ [resp. $\widetilde{K_0^0}$, resp. $\widetilde{K_\infty^\infty}$] et qui à tout élément de $P_W(\mathbb{A}^{\infty,0})$ [resp. $\widetilde{(P_W)_0^0}$, resp. $\widetilde{(P_W)_\infty^\infty}$] associe le degré du déterminant dans $\mathbb{A}^{\infty,0}$ [resp. F_0, resp. F_∞] de sa restriction dans $\mathrm{Aut}_{D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}}(W_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$ *[resp.* $\mathrm{Aut}_{D_0}(W_0^{0'})$*, resp.* $\mathrm{Aut}_{D_\infty}(W_\infty^{\infty'})$*].*

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et tout $(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, m_{\tilde 0})$ dans $\mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde\infty} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde 0} \times \mathbb{Z}$, on a l'égalité :

$$\deg_\alpha^{\overline{W}}(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, m_{\tilde 0})$$

$$= \begin{cases} \deg^W(g_\infty^{\tilde\infty}) + \deg^W(g^{\infty,0}) + \deg^W(g_0^{\tilde 0}) & \text{si } W' = 0 \\ \deg(\infty) m_{\tilde\infty} + \deg^W(g_\infty^{\tilde\infty}) + \deg^W(g^{\infty,0}) + \deg^W(g_0^{\tilde 0}) & \\ \qquad - \deg(0) m_{\tilde 0} + (1-\alpha) + \deg_1^{\overline{E}'}(0,1,1,1,0) & \text{si } W' = E' \end{cases}$$

(vii) *Pour tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, tout élément $(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, m_{\tilde 0})$ de $\mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde\infty} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde 0} \times \mathbb{Z}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(m_{\tilde\infty}, g_\infty^{\tilde\infty}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde 0}, m_{\tilde 0})} \leq p$ si et seulement si :*

- $$\Big(1 - \frac{\mathrm{rg}_D W}{r}\Big)\Big(\deg(\infty) m_{\tilde\infty} - \deg(0) m_{\tilde 0} + (1-\alpha) + \deg_1^{\overline{E}'}(0,1,1,1,0)\Big)$$
$$+ \Big(\deg^W(g_\infty^{\tilde\infty}) + \deg^W(g^{\infty,0}) + \deg^W(g_0^{\tilde 0})\Big)$$
$$- \frac{\mathrm{rg}_D W}{r}\Big(\deg^E(g_\infty^{\tilde\infty}) + \deg^E(g^{\infty,0}) + \deg^E(g_0^{\tilde 0})\Big) \leq p(\mathrm{rg}_D W)$$

pour tout W comme dans (iii), *tel que $W' = E'$; et*

- $$-\frac{\mathrm{rg}_D W}{r}\Big(\deg(\infty) m_{\tilde\infty} - \deg(0) m_{\tilde 0} + (1-\alpha) + \deg_1^{\overline{E}'}(0,1,1,1,0)\Big)$$
$$+ \Big(\deg^W(g_\infty^{\tilde\infty}) + \deg^W(g^{\infty,0}) + \deg^W(g_0^{\tilde 0})\Big)$$
$$- \frac{\mathrm{rg}_D W}{r}\Big(\deg^E(g_\infty^{\tilde\infty}) + \deg^E(g^{\infty,0}) + \deg^E(g_0^{\tilde 0})\Big) \leq p(\mathrm{rg}_D W)$$

pour tout W *comme dans* (iii), *tel que* $W' = 0$.

Démonstration : (i) résulte de ce que γ' et γ'' ont leurs polynômes minimaux premiers entre eux et de ce que $(V'')^{\varphi''} = E''$.

(ii) est conséquence de (i).

(iii) est conséquence de (ii) et (i) et de ce que (V', φ', i) est irréductible, comme on a vu dans le lemme 3 (ii) du paragraphe III.2.

(iv) résulte de ce que $(V'')^{\varphi''} = E''$ puisque W est de la forme $W = W' \oplus W''$ avec $W' = 0$ ou $W' = E'$ et $W'' \subseteq E''$.

(v) La dimension de $\widetilde{E}_{0'}$ sur F_0 [resp. de $\widetilde{E}_{\infty'}$ sur F_∞] est

$$\frac{r'd}{[F' : F]}[F'_{0'} : F_0] \quad [\text{resp. } \frac{r'd}{[F' : F]}[F'_{\infty'} : F_\infty]] \ .$$

Or, d'après la proposition 5 (iv) du paragraphe III.2, on a

$$\frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]}[F_{\tilde{0}} : F_0] = h_0 \quad [\text{resp. } \frac{r'd}{[\widetilde{F} : F]}[\widetilde{F}_{\tilde{\infty}} : F_\infty] = h_\infty]$$

et d'après le lemme 3 (i) du paragraphe III.4, $0'$ [resp. ∞'] est l'unique place de F' au-dessus de la place $\tilde{0}$ [resp. $\tilde{\infty}$] de $\widetilde{F}$ si bien que

$$\frac{[\widetilde{F}_{\tilde{0}} : F_0]}{[\widetilde{F} : F]} = \frac{[F'_{0'} : F_0]}{[F' : F]} \quad [\text{resp. } \frac{[\widetilde{F}_{\tilde{\infty}} : F_\infty]}{[\widetilde{F} : F]} = \frac{[F'_{\infty'} : F_\infty]}{[F' : F]}] \ .$$

Ainsi la dimension de $\widetilde{E}_{0'}$ [resp. $\widetilde{E}_{\infty'}$] est effectivement h_0 [resp. h_∞].

Et la dernière assertion se prouve comme (iv).

(vi) est évident sur les définitions.

(vii) résulte de (vi) et de ce que, si $(\widetilde{\mathcal{E}}, \gamma)$ est un objet de $\mathrm{Cht}^r_{\mathcal{D}}(\overline{0}, \overline{\infty})$ muni d'un automorphisme de sa fibre générique, et de polygone α-canonique $\overline{p}_{\gamma,\alpha}$, on a $\overline{p}_{\gamma,\alpha} \leq p$ si et seulement si tout sous-objet maximal $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ dont la fibre générique est stable par γ vérifie

$$\deg_\alpha(\widetilde{\mathcal{F}}) - \frac{\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}}}{\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{E}}} \deg_\alpha \widetilde{\mathcal{E}} \leq p(\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}}) \ .$$

$\square$

b) Expression intégrale

PROPOSITION 2. — *Pour tout élément $f^{\infty,0}$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^{\infty,0}$ du groupe $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, tous entiers $u, s \geq 1$ avec $\deg(0)|u$, $\deg(\infty)|s$, tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ et tout nombre réel α, on a l'égalité*

$$\mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0}, u, s)$$
$$= \sum_{\gamma} \int_{\Delta_\gamma^\times a^{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde{\infty}} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde{0}} \times \mathbb{Z}} f_\infty^{\tilde{\infty}}((g_\infty^{\tilde{\infty}})^{-1}\gamma g_\infty^{\tilde{\infty}}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{\infty,0}(a^n (g^{\infty,0})^{-1}\gamma g^{\infty,0})$$
$$f_0^{\tilde{0}}((g_0^{\tilde{0}})^{-1}\gamma g_0^{\tilde{0}}) \mathbb{1}(\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(m_{\tilde{\infty}}, g_\infty^{\tilde{\infty}}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde{0}}, m_{\tilde{0}})} \leq p) \cdot dm_{\tilde{\infty}} \cdot dg_\infty^{\tilde{\infty}} \cdot dg^{\infty,0} \cdot dg_0^{\tilde{0}} \cdot dm_{\tilde{0}}$$

où :

- *γ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison d'éléments (u,s)-admissibles dans $G(F)$, comme dans le théorème* 5 *du paragraphe* III.4,
- *$dm_{\tilde{\infty}}$ et $dm_{\tilde{0}}$ sont la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$,*
- *$dg_\infty^{\tilde{\infty}}$, $dg^{\infty,0}$ et $dg_0^{\tilde{0}}$ sont les mesures de Haar sur $G_\infty^{\tilde{\infty}}$, $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ et $G_0^{\tilde{0}}$ respectivement qui attribuent le volume* 1 *aux sous-groupes ouverts compacts $K_\infty^{\tilde{\infty}}$, $K^{\infty,0}$ et $K_0^{\tilde{0}}$,*
- *$f_\infty^{\tilde{\infty}}$ et $f_0^{\tilde{0}}$ désignent respectivement les fonctions caractéristiques de $K_\infty^{\tilde{\infty}}$ et $K_0^{\tilde{0}}$ dans $G_\infty^{\tilde{\infty}}$ et $G_0^{\tilde{0}}$.*

Démonstration : Par linéarité, on se ramène immédiatement au cas où $f^{\infty,0}$ est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0}}$ d'une classe $K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0}$, où $I \hookrightarrow X\backslash\{\infty, 0\}$ est un sous-schéma fermé fini et g est un élément de $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$.

La formule résulte alors de la définition

$$\mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(\mathbb{1}_{K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0}}, u, s) = dg^{\infty,0}(K_I^{\infty,0}) \mathrm{Lef}_{\mathcal{D},I}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(g, u, s)$$

et du théorème 5 du paragraphe III.4. □

Afin de transformer cette intégrale, nous avons besoin de quelques lemmes préparatoires.

LEMME 3. — *Soient $u, s \geq 1$ deux entiers avec $\deg(0)|u$ et $\deg(\infty)|s$ et γ un élément (u,s)-admissible de $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$.*

On se place dans les conditions et sous les hypothèses du lemme 1. *Alors :*

(i) *On a pu choisir la base de* $(V_{\mathbb{A}}^{\prime\infty,0})^{\varphi_{\mathbb{A}}^{\prime\infty,0}}$ *sur* $D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}$ *de telle façon que* γ' *ait même image par les deux homomorphismes*

$$\Delta' = \mathrm{End}(V', \varphi', i) \to \mathrm{End}(V_{\mathbb{A}}^{\prime\infty,0}, \varphi_{\mathbb{A}}^{\prime\infty,0}, i) =$$
$$\mathrm{End}_{D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}}((V_{\mathbb{A}}^{\prime\infty,0})^{\varphi_{\mathbb{A}}^{\prime\infty,0}}) \cong M_{r'}(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0})$$

et

$$M_{r'}(D) \longrightarrow M_{r'}(D_{\mathbb{A}}^{\infty,0}).$$

(ii) *On a pu choisir les bases de* $(\widetilde{V}_{\infty}^{\prime\tilde{\infty}})^{\widetilde{\varphi}_{\infty}^{\prime\tilde{\infty}}}$ *et* $\widetilde{E}_{\infty}^{\prime\infty'}$ *sur* F_∞ [*resp. de* $(\widetilde{V}_0^{\prime\tilde{0}})^{\widetilde{\varphi}_0^{\prime\tilde{0}}}$ *et* $\widetilde{E}_0^{\prime 0'}$ *sur* F_0] *de telle façon que* γ' *ait même image par les deux homomorphismes*

$$\Delta'=\mathrm{End}(V',\varphi',i)\to\mathrm{End}(\widetilde{V}_{\infty}^{\prime\tilde{\infty}},\widetilde{\varphi}_{\infty}^{\prime\tilde{\infty}})=\mathrm{End}((\widetilde{V}_{\infty}^{\prime\tilde{\infty}})^{\widetilde{\varphi}_{\infty}^{\prime\tilde{\infty}}})\cong M_{r'd-h_\infty}(F_\infty)$$

et $\quad \mathrm{End}_{D_\infty}(E_{\infty}^{\prime\infty'}) = \mathrm{End}_{F_\infty}(\widetilde{E}_{\infty}^{\prime\infty'}) \xrightarrow{\sim} M_{r'd-h_\infty}(F_\infty)$

[*resp.* $\Delta' = \mathrm{End}(V', \varphi', i) \to \mathrm{End}(\widetilde{V}_0^{\prime\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_0^{\prime\tilde{0}}) = \mathrm{End}((\widetilde{V}_0^{\prime\tilde{0}})^{\widetilde{\varphi}_0^{\prime\tilde{0}}}) \cong M_{r'd-h_0}(F_0)$

et $\quad \mathrm{End}_{D_0}(E_0^{\prime 0'}) = \mathrm{End}_{F_0}(\widetilde{E}_0^{\prime 0'}) \xrightarrow{\sim} M_{r'd-h_0}(F_0)$] .

(iii) *L'algèbre des commutateurs* $M_{r'}(D)_{\gamma'}$ *est une algèbre matricielle sur le corps* $F' = F[\gamma']$, *de dimension* $\left(\frac{r'd}{[F':F]}\right)^2$.

Et $\Delta'_{\gamma'}$ *est une algèbre à division centrale sur* F', *de dimension* $\left(\frac{r'd}{[F':F]}\right)^2$.

Enfin, les deux groupes $(M_{r'}(D)_{\gamma'})^\times = \mathrm{GL}_{r'}(D)_{\gamma'}$ *et* $(\Delta'_{\gamma'})^\times$ *se déduisent l'un de l'autre par torsion intérieure.*

(iv) *Sous la condition de* (i), *les algèbres* $M_{r'}(D)_{\gamma'} \otimes_F \mathbb{A}^{\infty,0}$ *et* $\Delta'_{\gamma'} \otimes_F \mathbb{A}^{\infty,0}$ *s'identifient.*

(v) *Les scindages*

$$(M_{r'}(D)_{\gamma'}) \otimes_F F_0 = \mathrm{End}_{D_0}(E'_{0'})_{\gamma'_0} \oplus M_{rd-h_0}(F_0)_{\gamma_0^{\prime 0'}}$$

$$\Delta'_{\gamma'} \otimes_F F_0 = \Delta'_{\gamma'} \otimes_{F'} F'_{o'} \oplus \mathrm{End}(\widetilde{V}_0^{\tilde{0}}, \widetilde{\varphi}_0^{\tilde{0}})_{\gamma'}$$

[*resp.* $\quad (M_{r'}(D)_{\gamma'}) \otimes_F F_\infty = \mathrm{End}_{D_\infty}(E'_{\infty'})_{\gamma'_\infty} \oplus M_{rd-h_\infty}(F_\infty)_{\gamma_\infty^{\prime\infty'}}$

$$\Delta'_{\gamma'} \otimes_F F_\infty = \Delta'_{\gamma'} \otimes_{F'} F'_{\infty'} \oplus \mathrm{End}(\widetilde{V}_\infty^{\tilde{\infty}}, \widetilde{\varphi}_\infty^{\tilde{\infty}})_{\gamma'}]$$

sont ceux induits par le scindage

$$F'_0 = F' \otimes_F F_0 = F'_{0'} \oplus F_0^{\prime 0'} \quad [\textit{resp. } F'_\infty = F' \otimes_F F_\infty = F'_{\infty'} \oplus F_\infty^{\prime\infty'}] .$$

De plus, et sous les conditions de (ii), *les algèbres* $M_{rd-h_0}(F_0)_{\gamma_0'^{0'}}$ *et* $\mathrm{End}(\widetilde{V}_0^{\bar{0}}, \widetilde{\varphi}_0^{\bar{0}})_{\gamma'}$ [*resp.* $M_{rd-h_\infty}(F_\infty)_{\gamma_\infty'^{\infty'}}$ *et* $\mathrm{End}(\widetilde{V}_\infty^{\bar{\infty}}, \widetilde{\varphi}_\infty^{\bar{\infty}})_{\gamma'}$] *s'identifient.*

Démonstration : (i) et (ii) sont conséquences du lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient x une place de F, $n \geq 1$ un entier, γ_1 et γ_2 deux éléments de* $\mathrm{GL}_n(D_x)$.

On suppose que γ_1 et γ_2 ont même polynôme caractéristique χ et même polynôme minimal μ sur F_x, et que tous les facteurs irréductibles de μ apparaissent avec la multiplicité 1.

Alors γ_1 et γ_2 sont conjugués dans $\mathrm{GL}_n(D_x)$.

De plus, si γ_1 et γ_2 sont éléments du sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathcal{D}_x)$, si x est dans X', et si l'anneau quotient $O[X]/\mu(X)$ est normal, alors γ_1 et γ_2 sont conjugués dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{D}_x)$.

Démonstration : Ecrivons les décompositions en facteurs irréductibles

$$\mu = \mu_1 \cdots \mu_\ell \quad \chi = \mu_1^{m_1} \cdots \mu_\ell^{m_\ell} \,.$$

On a les décompositions en sommes directes

$$D_x^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq \ell} \mathrm{Ker}(\mu_i(\gamma_1)) \quad et \quad D_x^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq \ell} \mathrm{Ker}(\mu_i(\gamma_2)) \,.$$

Pour tout i, $1 \leq i \leq \ell$, $\mathrm{Ker}(\mu_i(\gamma_1))$ et $\mathrm{Ker}(\mu_i(\gamma_2))$ sont des D_x-modules, de même dimension $m_i \deg(\mu_i)$ sur F_x, donc isomorphes. Ils sont munis d'une action de γ_1 et γ_2 respectivement, avec le même polynôme minimal μ_i qui est premier.

La première assertion du lemme résulte donc du théorème de Skolem-Noether.

Supposons maintenant que γ_1 et γ_2 sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{D}_x)$, que x est dans X', et que l'anneau quotient $O_x[X]/\mu(X)$ est normal.

Alors, les actions de γ_1 et γ_2 sur $\mathcal{D}_x^n$ définissent sur celui-ci deux structures de modules sur $\mathcal{D}_x \otimes_{O_x} O_x[X]/\mu(X)$ qui, d'après ce qu'on vient de voir, deviennent isomorphes quand tensorisées par F_x. Comme x est dans X', c'est-à-dire $\mathcal{D}_x \cong M_d(O_x)$ et que, d'après l'hypothèse sur μ, $O_x[X]/\mu(X)$ est un produit d'anneaux de valuation discrète, cela implique que les deux modules ainsi définis sur $\mathcal{D}_x \otimes_{O_x} O_x[X]/\mu(X)$ sont isomorphes. C'est ce qu'on voulait.

□

Suite de la démonstration du lemme 3 :

(iii) La première assertion est évidente.

La seconde résulte de ce que, d'après la proposition 5 du paragraphe III.2, Δ' est une algèbre à division centrale sur $\widetilde{F}$ de dimension $\left(\frac{r'd}{[\widetilde{F}:F]}\right)^2$ et de ce que, d'après le lemme 3 du paragraphe III.4, $F' = F[\gamma']$ contient $\widetilde{F}$ comme sous-corps.

La troisième assertion résulte des deux premières.

(iv) On a un homomorphisme injectif naturel

$$\Delta'_{\gamma'} \otimes_F \mathbb{A}^{\infty,0} \longrightarrow M_{r'}(D)_{\gamma'} \otimes_F \mathbb{A}^{\infty,0}$$

qui est nécessairement un isomorphisme puisque, d'après (iii), $\Delta'_{\gamma'}$ et $M_{r'}(D)_{\gamma'}$ ont même dimension sur F'.

(v) La première formule est évidente. La seconde résulte de ce que $0'$ [resp. ∞'] est l'unique place de F' au-dessus de la place $\tilde{0}$ [resp. $\tilde{\infty}$] de $\widetilde{F}$.

La dernière assertion se prouve alors comme (iv). $\square$

LEMME 5. — *Soient K un corps de fonctions sur un corps fini, $\mathbb{A}_K$ son anneau des adèles et R une algèbre à division centrale sur K, de dimension α^2.*

Alors :

(i) *Les algèbres de Lie R et $M_\alpha(K)$ des groupes $R^\times$ et $\mathrm{GL}_\alpha(K)$ deviennent isomorphes sur toute clôture séparable de K, et l'isomorphisme qui les relie est bien déterminé à conjugaison près.*

Par conséquent, leurs puissances extérieures maximales sur K s'identifient et pour tout place x de K, le groupe $R_x^\times = (R \otimes_K K_x)^\times$ est unimodulaire et peut être muni d'une unique mesure de Haar dont la forme volume correspond à celle de la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_\alpha(K_x)$ qui attribue le volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux.

(ii) *Soient $R_{\mathbb{A}}^\times = (R \otimes_K \mathbb{A}_K)^\times$ et $\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)$ qu'on munit des mesures de Haar induites par les produits des mesures de Haar introduites dans* (i) *sur les $R_x^\times$ et les $\mathrm{GL}_\alpha(K_x)$.*

Et soient $R_{\mathbb{A}}^{\times 0}$ et $\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)^0$ les sous-groupes ouverts de $R_{\mathbb{A}}^\times$ et $\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)$ constitués des éléments dont le déterminant dans $\mathbb{A}_K^\times$ est de degré 0.

Alors $R^\times \backslash R_{\mathbb{A}}^{\times 0}$ est compact et $\mathrm{GL}_\alpha(K) \backslash \mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)^0$ est de volume fini égal à celui de $R^\times \backslash R_{\mathbb{A}}^{\times 0}$.

(iii) *Pour toute place x de K, l'homomorphisme*

$$R_x^\times \xrightarrow{\det} K_x^\times \xrightarrow{x(\cdot)} \mathbb{Z}$$

est surjectif, et si $R_x = R \otimes_K K_x$ est encore une algèbre à division, le noyau de cet homomorphisme est compact, de volume

$$\frac{1}{(\#\kappa(x)-1)((\#\kappa(x))^2-1)\cdots((\#\kappa(x))^{\alpha-1}-1)}$$

où $\#\kappa(x)$ désigne le cardinal du corps résiduel de K_x.

Démonstration : (i) R et $M_\alpha(K)$ deviennent isomorphes sur n'importe quelle clôture séparable de K car ce sont des algèbres centrales simples sur K de même dimension α^2. Et d'après le théorème de Skolem-Noether l'isomorphisme qui les relie est bien déterminé à conjugaison près.

Les autres assertions s'en déduisent immédiatement.

(ii) Notons $\mathbb{A}_K^{\times 0}$ le sous-groupe de $\mathbb{A}_K^\times$ des éléments de degré 0. D'après [Weil] lemme 3.1.1, $K^\times\backslash\mathbb{A}_K^{\times 0}$ et $R^\times\backslash R_\mathbb{A}^{\times 0}$ sont compacts.

D'autre part et si on choisit une mesure de Haar pour $\mathbb{A}_K^\times$, on sait d'après [Weil] théorème 3.3.1 que $R^\times\mathbb{A}_K^\times\backslash R_\mathbb{A}^\times$ et $\mathrm{GL}_\alpha(K)\mathbb{A}_K^\times\backslash\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)$ ont le même volume fini.

Et on a des suites exactes

$$1 \longrightarrow K^\times\backslash\mathbb{A}_K^{\times 0} \longrightarrow R^\times\backslash R_\mathbb{A}^{\times 0} \longrightarrow R^\times\mathbb{A}_K^{\times 0}\backslash R_\mathbb{A}^{\times 0} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow K^\times\backslash\mathbb{A}_K^{\times 0} \longrightarrow \mathrm{GL}_\alpha(K)\backslash\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)^0 \longrightarrow \mathrm{GL}_\alpha(K)\mathbb{A}_K^{\times 0}\backslash\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)^0 \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow R^\times\mathbb{A}_K^{\times 0}\backslash R_\mathbb{A}^{\times 0} \longrightarrow R^\times\mathbb{A}_K^\times\backslash R_\mathbb{A}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}_\alpha(K)\mathbb{A}_K^{\times 0}\backslash\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)^0 \longrightarrow \mathrm{GL}_\alpha(K)\mathbb{A}_K^\times\backslash\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K) \longrightarrow \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit que $R^\times\backslash R_\mathbb{A}^{\times 0}$ et $\mathrm{GL}_\alpha(K)\backslash\mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{A}_K)^0$ ont aussi même volume fini.

(iii) Soit x une place de K, et soit K'_x une extension de K_x de dimension α et totalement ramifiée.

De ces conditions imposées à K'_x, il résulte que :

• il existe un plongement $K'_x \hookrightarrow R_x$ sur K_x, et alors est commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} K'^\times_x \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\det"'] & & R_x^\times \arrow[dl, "\det"] \\ & K_x^\times & \end{tikzcd}$$

• l'homomorphisme $K'^\times_x \xrightarrow{\det} K_x^\times \xrightarrow{x(\cdot)} \mathbb{Z}$ est surjectif.

La première assertion s'en déduit.

Enfin, la seconde assertion est prouvée dans [Laumon] lemme 4.6.4 ou bien dans [Rogawski]. $\square$

Maintenant, prouvons :

PROPOSITION 6. — *Soient $f^{\infty,0}$ un élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^{\infty,0}$ du groupe $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, $u, s \geq 1$ deux entiers avec $\deg(0)|u$, $\deg(\infty)|s$, $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ un polygone et α un nombre réel.*

Soit γ un élément (u,s)-admissible de $G(F)$.

On suppose vérifiées les hypothèses du lemme 1 (dont on conserve les notations) et du lemme 3 (i), (ii).

Alors on a l'égalité

$$\int_{\Delta_\gamma^\times a^{\mathbb{Z}}\backslash\mathbb{Z}\times G_\infty^{\tilde{\infty}}\times G(\mathbb{A}^{\infty,0})\times G_0^{\tilde{0}}\times\mathbb{Z}} f_\infty^{\tilde{\infty}}((g_\infty^{\tilde{\infty}})^{-1}\gamma g_\infty^{\tilde{\infty}}) f^{\infty,0}((g^{\infty,0})^{-1}\gamma g^{\infty,0})$$

$$f_0^{\tilde{0}}((g_0^{\tilde{0}})^{-1}\gamma g_0^{\tilde{0}}) \mathbb{1}(\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(m_{\tilde{\infty}}, g_\infty^{\tilde{\infty}}, g^{\infty,0}, g_0^{\tilde{0}}, m_{\tilde{0}})} \leq p)\cdot dm_{\tilde{\infty}}\cdot dg_\infty^{\tilde{\infty}}.dg^{\infty,0}\cdot dg_0^{\tilde{0}}\cdot dm_{\tilde{0}}$$

$$= \sum_{\substack{1\leq m_{\infty'}\leq \frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)} \\ 1\leq m_{0'}\leq\frac{\deg(0')}{\deg(0)}}} \mu_\infty\mu_0 \int_{G(F)_\gamma a^{\mathbb{Z}}\backslash G_{\gamma\infty'}\times G_\infty^{\infty'}\times G(\mathbb{A}^{\infty,0})\times G_0^{0'}\times G_{\gamma 0'}} f_\infty^{\infty'}((g_\infty^{\infty'})^{-1}\gamma g_\infty^{\infty'})$$

$$f^{\infty,0}((g^{\infty,0})^{-1}\gamma g^{\infty,0}) f_0^{0'}((g_0^{0'})^{-1}\gamma g_0^{0'})$$

$$\mathbb{1}(\overline{p}_{\gamma,\alpha}^{(m_{\infty'}-\frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)}\infty'(\det g_{\gamma\infty'}); g_\infty^{\infty'}; g^{\infty,0}; g_0^{0'}; m_{0'}+\frac{\deg(0')}{\deg(0)}0'(\det g_{\gamma 0'}))} \leq p)$$

$$\cdot dg_{\gamma\infty'}\cdot dg_\infty^{\infty'}\cdot dg^{\infty,0}\cdot dg_0^{0'}\cdot dg_{\gamma 0'}$$

où :

- $f_\infty^{\tilde{\infty}} = f_\infty^{\infty'}$ *et* $f_0^{\tilde{0}} = f_0^{0'}$ *désignent respectivement les fonctions caractéristiques de* $K_\infty^{\tilde{\infty}} = \mathrm{GL}_{rd-h_\infty}(O_\infty)$ *et* $K_0^{\tilde{0}} = \mathrm{GL}_{rd-h_0}(O_0)$ *dans* $G_\infty^{\tilde{\infty}} = G_\infty^{\infty'}$ *et* $G_0^{\tilde{0}} = G_0^{0'}$,
- $dg_\infty^{\tilde{\infty}} = dg_\infty^{\infty'}$, $dg^{\infty,0}$ *et* $dg_0^{\tilde{0}} = dg_0^{0'}$ *sont les mesures de Haar sur* $G_\infty^{\tilde{\infty}} = G_\infty^{\infty'}$, $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ *et* $G_0^{\tilde{0}} = G_0^{0'}$ *qui attribuent le volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts* $K_\infty^{\tilde{\infty}}$, $K^{\infty,0}$ *et* $K_0^{\tilde{0}}$,
- $dm_{\tilde{\infty}}$ *et* $dm_{\tilde{0}}$ *sont la mesure de comptage sur* $\mathbb{Z}$,
- $dg_{\gamma\infty'}$ *et* $dg_{\gamma 0'}$ *sont les mesures de Haar sur*

$$G_{\gamma\infty'} = ((\mathrm{End}\, E')_{\gamma'}\otimes_{F'} F'_{\infty'})^\times = (\mathrm{End}_{D_\infty} E'_{\infty'})^\times_{\gamma'_{\infty'}}$$

et

$$G_{\gamma 0'} = ((\mathrm{End}\, E')_{\gamma'}\otimes_{F'} F'_{0'})^\times = (\mathrm{End}_{D_0} E'_{0'})^\times_{\gamma'_{0'}}$$

qui attribuent le volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux,

• *on a posé*

$$\mu_\infty = (q^{\deg(\infty')}-1)(q^{2\deg(\infty')}-1)\cdots(q^{(h_\infty/[F'_{\infty'}:F_\infty]-1)\deg(\infty')}-1)$$
$$\mu_0 = (q^{\deg(0')}-1)(q^{2\deg(0')}-1)\cdots(q^{(h_0/[F'_{0'}:F_0]-1)\deg(0')}-1).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2, du lemme 3 et du lemme 5 puisque :

• $\Delta'_{\gamma'}\otimes_{F'}F'_{\infty'}$ [resp. $\Delta'_{\gamma'}\otimes_{F'}F'_{0'}$] est une algèbre à division centrale sur $F'_{\infty'}$ [resp. $F'_{0'}$] de dimension $\left(\frac{r'd}{[F':F]}\right)^2 = \left(\frac{h_\infty}{[F'_{\infty'}:F_\infty]}\right)^2$ [resp. $\left(\frac{r'd}{[F':F]}\right)^2 = \left(\frac{h_0}{[F'_{0'}:F_0]}\right)^2$],

• les deux homomorphismes $\Delta_\gamma^\times \rightrightarrows \mathbb{Z}$ se factorisent respectivement en

$$\Delta_\gamma^\times \longrightarrow \Delta'^\times_{\gamma'} \longrightarrow (\Delta'_{\gamma'}\otimes_{F'}F'_{\infty'})^\times \xrightarrow{\det} F'^\times_{\infty'} \xrightarrow{\infty'(\cdot)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\frac{-\deg(\infty')}{\deg(\infty)}} \mathbb{Z}$$

$$\text{et}\quad \Delta_\gamma^\times \longrightarrow \Delta'^\times_{\gamma'} \longrightarrow (\Delta'_{\gamma'}\otimes_{F'}F'_{0'})^\times \xrightarrow{\det} F'^\times_{0'} \xrightarrow{0'(\cdot)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\frac{\deg(0')}{\deg(0)}} \mathbb{Z},$$

• d'après le lemme 1, la fonction de troncature $\mathbb{1}(\overline{p}^{(\cdot)}_{\gamma,\alpha}\leq p)$ est invariante à gauche par les sous-groupes de $(\Delta'_{\gamma'}\otimes_F\mathbb{A})^\times$ et $(\mathrm{End}_D(E')_{\gamma'}\otimes_F\mathbb{A})^\times$ constitués des éléments dont le déterminant est de degré 0. □

c) Transfert pour les termes elliptiques

On commence par rassembler quelques lemmes préparatoires. Posons d'abord la définition suivante :

Définition 7. — *Soient K un corps local non-archimédien, O son anneau de valuation, κ son corps résiduel de cardinal fini $\#\kappa$, et $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ l'homomorphisme de valuation.*

Pour $n\geq 1$ et $t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ deux entiers, on appelle fonction de Drinfeld en rang n et de niveau t la fonction

$$f^t : \mathrm{GL}_n(K)\to\mathbb{Z}$$

définie suivant les cas par :

(i) *Si $t\geq 1$, on a pour tout $g\in\mathrm{GL}_n(K)$:*

• *$f^t(g) = (1-\#\kappa)(1-(\#\kappa)^2)\cdots(1-(\#\kappa)^{\rho-1})$ si $g\in M_n(O)\cap\mathrm{GL}_n(K)$, $v(\det g)=t$ et en désignant par ρ la dimension sur κ du noyau de la matrice $\overline{g}$ image de g dans $M_n(\kappa)$,*

• *$f^t(g)=0$ si $g\notin M_n(O)$ ou $v(\det g)\neq t$.*

(ii) *Si* $t \leq -1$, *on a pour tout* $g \in \mathrm{GL}_n(K)$

$$f^t(g) = f^{-t}(g^{-1}) \ .$$

On a le lemme fondamental suivant, dû à Drinfeld :

LEMME 8. — *Sous les hypothèses de la définition* 7, *soit* γ *un élément de* $\mathrm{GL}_n(K)$, *elliptique c'est-à-dire tel que* $K' = K[\gamma]$ *soit un corps.*

Soient κ' *le corps résiduel de* K', $\#\kappa'$ *son cardinal, et* $n' = \frac{n}{[K':K]}$.

Soient dg *et* dg_γ *les mesures de Haar sur* $\mathrm{GL}_n(K)$ *et* $\mathrm{GL}_n(K)_\gamma$ *qui attribuent le volume* 1 *aux sous-groupes ouverts compacts maximaux.*

Alors, si $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *et* $v(\det\gamma) = t$, *on a*

$$\int_{\mathrm{GL}_n(K)_\gamma\backslash \mathrm{GL}_n(K)} f^t(g^{-1}\gamma g)\cdot\frac{dg}{dg_\gamma} = (1-\#\kappa')\cdots(1-(\#\kappa')^{n'-1})[\kappa':\kappa] \ .$$

Démonstration : Voir [Laumon] théorème 4.6.1 dans le cas $t \geq 1$. Le cas $t \leq -1$ s'en déduit puisque $f^t(g^{-1}\gamma g) = f^{-t}(g^{-1}\gamma^{-1}g)$. □

Par ailleurs, on a :

LEMME 9. — *Sous les hypothèses de la définition* 7, *soit* γ *un élément de* $\mathrm{GL}_n(K)$. *On suppose que* $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *et* $v(\det\gamma) = t$.

Soit $0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{\ell-1} \subsetneq E_\ell = E$ *une filtration de* $E = K^n$ *qui est respectée par* γ. *Soit* N *le radical unipotent du sous-groupe parabolique* P *de* $\mathrm{GL}_n(K)$ *associé à cette filtration, et soit* dn *la mesure de Haar sur* N *qui attribue le volume* 1 *au sous-groupe ouvert compact* $N \cap \mathrm{GL}_n(O)$.

Enfin, pour $1 \leq i \leq \ell$, *soit* $\overline{\gamma}_i$ *l'automorphisme de* E_i/E_{i-1} *induit par* γ.

Alors :

(i) *On a*

$$\int_N f^t(\gamma n)\cdot dn = 0$$

à moins qu'il n'existe i_0, $1 \leq i_0 \leq \ell$, *tel que*

$$v(\det\overline{\gamma}_{i_0}) = t \quad \text{et} \quad i \neq i_0 \Rightarrow v(\det\overline{\gamma}_i) = 0 \ .$$

(ii) *Si les polynômes minimaux des* $\overline{\gamma}_i$, $1 \leq i \leq \ell$, *sont deux à deux premiers entre eux, on a*

$$\int_N f^t(n^{-1}\gamma n)\cdot dn = 0$$

à moins qu'il n'existe i_0 *comme dans* (i).

(iii) *Si $\ell = 2$, les polynômes minimaux de $\overline{\gamma}_1$ et $\overline{\gamma}_2$ sont premiers entre eux, et $v(\det \overline{\gamma}_1) = t$, $v(\det \overline{\gamma}_2) = 0$, on a*

$$\int_N f^t(n^{-1}\gamma n) \cdot dn = f_1^t(\overline{\gamma}_1) f_2^0(\overline{\gamma}_2)$$

où f_1^t est la fonction de Drinfeld de niveau t sur $\operatorname{Aut} E_1$, E_1 étant muni de la structure entière induite par celle de E, et f_2^0 est la fonction caractéristique du sous-groupe de $\operatorname{Aut} E/E_1$ image de $\mathrm{GL}_n(O) \cap P$ par $P \to \operatorname{Aut} E/E_1$.

Démonstration : (i) résulte de [Laumon] proposition 4.2.5.

(ii) est conséquence de (i) puisqu'alors $n \mapsto \gamma^{-1} n^{-1} \gamma n$ est un difféomorphisme de N, dont le jacobien est constant.

(iii) résulte aussi de [Laumon] proposition 4.2.5. □

Rappelons aussi le lemme évident :

LEMME 10. — *Soient K un corps local non archimédien, O son anneau de valuation.*

Soient $n \geq 1$ un entier, $G = \mathrm{GL}_n(K)$, P un sous-groupe parabolique de G, N son radical unipotent et $M = P/N$.

(i) *Soient $K_G = \mathrm{GL}_n(O)$, dg [resp. dn, resp. dm] la mesure de Haar sur G [resp. N, resp. M] qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact K_G [resp. $K_G \cap N$, resp. $\mathrm{Im}(K_G \cap P \to M)$].*

Alors, pour toute fonction intégrable $f : G \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int_G f(g) \cdot dg = \int_M dm \int_N dn \int_{K_G} f(mng) \cdot dg$$

(ii) *Si γ est un élément de P dont les images dans les différents facteurs de M ont leurs polynômes minimaux deux à deux premiers entre eux, alors les groupes de commutateurs G_γ, P_γ et M_γ s'identifient.*

(iii) *Sous les hypothèses de* (ii), *soit $dg_\gamma = dm_\gamma$ une mesure de Haar sur le groupe $G_\gamma = M_\gamma$, et soient dg, dn et dm les mesures de Haar sur G, N et M définies en* (i). *Alors, pour toute fonction intégrable f sur l'orbite $G_\gamma \backslash G$ de γ, on a :*

$$\int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g) \cdot \frac{dg}{dg_\gamma} = \int_{M_\gamma \backslash M} \frac{dm}{dm_\gamma} \int_N dn \int_{K_G} f(g^{-1} n^{-1} m^{-1} \gamma m n g) \cdot dg$$

□

De la proposition 6 et des lemmes 8, 9 et 10, on déduit immédiatement :

PROPOSITION 11. — *Soient* $f^{\infty,0}$ *un élément de l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}^{\infty,0}$ *du groupe* $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, $u, s \geq 1$ *deux entiers avec* $\deg(0)|u$, $\deg(\infty)|s$, $f_{\infty}^{-s/\deg(\infty)}$ *[resp.* $f_0^{u/\deg(0)}$*] la fonction de Drinfeld en rang rd et de niveau* $-\frac{s}{\deg(\infty)}$ *[resp. de niveau* $\frac{u}{\deg(0)}$*] sur* $\mathrm{GL}_{rd}(F_\infty) = G(F_\infty)$ *[resp.* $\mathrm{GL}_{rd}(F_0) = G(F_0)$*] et* $f = f_{\infty}^{-s/\deg(\infty)} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^{u/\deg(0)}$ *l'élément induit de l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}$ *du groupe* $G(\mathbb{A}) = G(F_\infty) \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G(F_0)$.

Alors, pour tout élément γ *de* $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$ *qui est elliptique c'est-à-dire tel que* $F' = F[\gamma]$ *soit un corps, on a :*

- *si* γ *n'est pas* (u,s)*-admissible*

$$\int_{G(F)_\gamma a^{\mathbb{Z}} \backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g) \cdot dg = 0\,,$$

- *si* γ *est* (u,s)*-admissible (avec nécessairement* $\gamma = \gamma'$ *et toutes les fonctions de troncature* $\mathbb{1}(\overline{p}^{(\cdot)}_{\gamma,\alpha} \leq p)$ *valant* 1 *partout)*

$$\begin{aligned}
&\int_{G(F)_\gamma a^{\mathbb{Z}} \backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g) \cdot dg \\
&= \int_{\Delta_\gamma^\times a^{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z} \times G_\infty^{\tilde{\infty}} \times G(\mathbb{A}^{\infty,0}) \times G_0^{\tilde{0}} \times \mathbb{Z}} f_\infty^{\tilde{\infty}}((g_\infty^{\tilde{\infty}})^{-1}\gamma g_\infty^{\tilde{\infty}}) f^{\infty,0}((g^{\infty,0})^{-1}\gamma g^{\infty,0}) \\
&\qquad f_0^{\tilde{0}}((g_0^{\tilde{0}})^{-1}\gamma g_0^{\tilde{0}}) \cdot dm_{\tilde{\infty}} \cdot dg_\infty^{\tilde{\infty}} \cdot dg^{\infty,0} \cdot dg_0^{\tilde{0}} \cdot dm_{\tilde{0}}
\end{aligned}$$

avec les notations de la proposition 2.

$\square$

Chapitre IV

Le cas des $\mathcal{D}$–chtoucas de rang $r = 1$

1. — Projectivité

Dans tout ce chapitre, on fixe a un élément de degré 1 dans $\mathbb{A}^\times$ dont toutes les composantes dans les F_x valent 1 en–dehors d'un ensemble fini T_a de places x de F.

On supposera également toujours que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$–Algèbre partout maximale sur X.

Nous allons montrer :

THÉORÈME 1. —

(i) *Le champ algébrique (au sens de Deligne–Mumford)* $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}}/a^{\mathbb{Z}}$ *est propre et lisse de dimension relative* $2(d-1)$ *au–dessus de* $X' \times X'$.

(ii) *Si* $I \hookrightarrow X$ *est un sous–schéma fermé fini non vide, le champ* $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ *est représentable, projectif, et lisse de dimension relative* $2(d-1)$ *au–dessus de* $X'\backslash I \times X'\backslash I$.

Démonstration : Rappelons ce que nous savons déjà.

• D'après le théorème 9 du paragraphe I.2, le champ $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{1,n}_{\mathcal{D}}$ est lisse de dimension relative $2(d-1)$ au–dessus de $X' \times X'$, et donc il en est de même de

$$\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq n\leq d} \mathrm{Cht}^{1,n}_{\mathcal{D}}\,.$$

• D'après la proposition 5 du paragraphe I.3, chaque morphisme $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}}$ est représentable fini étale galoisien au–dessus de $X\backslash I \times X\backslash I$, et il en est de même du morphisme $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}}/a^{\mathbb{Z}}$.

• Enfin, on remarque que tout $\mathcal{D}$–chtouca de rang 1 est irréductible, et a fortiori α–semi–stable pour n'importe quel $\alpha \in]0,1[$. D'après le théorème 8 (ii) du paragraphe II.2, on voit donc que $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}}/a^{\mathbb{Z}} \cong \coprod_{1\leq n\leq d} \mathrm{Cht}^{1,n}_{\mathcal{D}}$ est de type fini sur $X' \times X'$, et d'après la proposition 11 du paragraphe II.2, on sait que $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ est représentable quasi–projectif sur $(X'\backslash I) \times (X'\backslash I)$ dès que $I \neq \emptyset$.

En définitive, il nous suffira pour démontrer le théorème de prouver le critère valuatif de propreté pour le morphisme

$$\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow X' \times X' ,$$

ou, ce qui est équivalent, pour le morphisme

$$\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}} \longrightarrow X' \times X' .$$

Soient donc A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, ϖ un élément uniformisant et $k = A/\varpi A$ son corps résiduel. On peut se limiter au cas où A est complet.

Notons A' l'anneau local du point générique de la fibre spéciale $X \otimes k$ plongée dans $X \otimes A$ et $k' = \mathrm{Frac}(F \otimes k)$ [resp. $K' = \mathrm{Frac}(F \otimes K)$] le corps des fonctions de $X \otimes k$ [resp. $X \otimes K$]. Ainsi, A' est un anneau de valuation discrète, dont le corps résiduel est k', le corps des fractions est K', et dont ϖ est aussi un élément uniformisant.

Citons la proposition suivante due à Drinfeld :

PROPOSITION 2. — *Avec les notations et hypothèses ci–dessus, soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K', muni d'une application $\varphi : V \to V$ qui est* $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Frob}$*–linéaire sur $K' = \mathrm{Frac}(F \otimes K)$ et injective. Alors :*

(i) *La famille des A'–réseaux $M \subseteq V$ tels que $\varphi(M) \subseteq M$ possède un plus grand élément M_0.*

(ii) *Quitte à remplacer K par une extension finie totalement ramifiée et V par son tensorisé par cette extension, on peut supposer que l'application déduite de φ par réduction*

$$\overline{\varphi} : M_0/\varpi M_0 \longrightarrow M_0/\varpi M_0$$

n'est pas nilpotente.

Démonstration : Voir [Drinfeld, 1989] proposition 3.2. ∎

Suite de la démonstration du théorème 1 :

On considère un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, K & \longrightarrow & \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Spec}\, A & \xrightarrow{(i_0, i_\infty)} & X' \times X' \end{array}$$

où la flèche $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Cht}^1_{\mathcal{D}}$ consiste en un $\mathcal{D}$–chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}_K = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_K & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}'_K \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}_K & & \end{pmatrix}$ de rang 1 sur K, de zéro i_0 et de pôle i_∞. Il s'agit de prolonger $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ en un $\mathcal{D}$–chtouca sur A.

Soit V la fibre générique de $\mathcal{E}_K$, identifiée aussi à celle de $\mathcal{E}'_K$. Et soit $\varphi : V \to V$ l'application induite par le composé $\mathcal{E}_K \to {}^\tau\mathcal{E}_K \to \mathcal{E}'_K$. Le couple (V, φ) vérifie les hypothèses de la proposition 2. Quitte à remplacer K par une extension finie totalement ramifiée, on peut donc supposer que le A'–réseau M_0 satisfait la condition de la proposition 2 (ii).

Bien sûr, on a aussi sur V une action à droite de D commutant à φ. Comme M_0 est le plus grand réseau stabilisé par φ, on voit que M_0 est également respecté par l'action de D.

Et comme $X \otimes A$ est un schéma régulier dont le sous–schéma des points de codimension ≤ 1 est la réunion de la fibre générique $X \otimes K$ et de $\operatorname{Spec} A'$, $\mathcal{E}_K$ et $\mathcal{E}'_K$ se prolongent de manière unique en des faisceaux localement libres de type fini $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sur $X \otimes A$ qui sur $\operatorname{Spec} A'$ s'identifient à M_0. M_0 étant stable par D, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont munis d'actions à droite de $\mathcal{D}$ et M_0 étant stable par φ, on a un diagramme d'homomorphismes $\mathcal{D} \otimes A$–linéaires

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow^{j} & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow_{t} & \\ {}^\tau\mathcal{E} & & \end{pmatrix} \quad \text{qui prolonge} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{E}_K & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}'_K \\ & \nearrow & \\ {}^\tau\mathcal{E}_K & & \end{pmatrix}.$$

On remarque que j reste injectif quand réduit modulo ϖ. Donc $\operatorname{Coker} j$ est plat sur A ; on en déduit qu'il est supporté par le graphe du morphisme $i_\infty : \operatorname{Spec} A \to X$ et qu'il est libre de rang d sur A puisqu'il en est ainsi au–dessus de $\operatorname{Spec} K$.

Par ailleurs, la suite exacte $0 \to {}^\tau\mathcal{E} \xrightarrow{t} \mathcal{E}' \to \operatorname{Coker} t \to 0$ nous dit que $\operatorname{Coker} t$ est de dimension projective ≤ 1. Il en résulte que tout point associé à $\operatorname{Coker} t$ est de codimension 1, c'est–à–dire correspond à un diviseur de $X \otimes A$, qui ne peut être que la fibre spéciale $X \otimes k$ ou bien le graphe du morphisme $i_0 : \operatorname{Spec} A \to X$.

De ces constatations, il résulte en particulier que le faisceau $\operatorname{Coker} j \otimes_A k$ sur la fibre spéciale $X \otimes k$ est concentré en le point $i_\infty(\operatorname{Spec} k) \in X'(k)$ et que la partie de torsion du faisceau $\operatorname{Coker} t \otimes_A k$ sur $X \otimes k$ est concentrée en le point $i_0(\operatorname{Spec} k) \in X'(k)$.

Maintenant, les fibres génériques des fibrés induits $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes_A k$ et $\overline{\mathcal{E}}' = \mathcal{E}' \otimes_A k$ sur la fibre spéciale $X \otimes k$ s'identifient à $M_0 / \varpi M_0 = \overline{M}_0$.

Et par construction, l'application $\overline{\varphi} : \overline{M}_0 \to \overline{M}_0$ n'est pas nilpotente. Autrement dit, les sous–espaces $k' \operatorname{Im} \overline{\varphi}^n$, $n \geq 0$, sont tous non nuls. Etant emboîtés, ils sont égaux à partir d'un certain rang à un sous–espace non nul $\overline{N}_0$ de $\overline{M}_0$. Ce dernier est stable par l'action de D et par $\overline{\varphi}$, et on a $k'\overline{\varphi}(\overline{N}_0) = \overline{N}_0$.

Soient donc $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{F}}'$ les sous–fibrés de $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{E}}'$ sur $X \otimes k$ engendrés par $\overline{N}_0$. Ils sont stables par l'action de $\mathcal{D}$ et on a un diagramme d'homomorphismes $\mathcal{D} \otimes k$–linéaires induits par j et t et qui sont des isomorphismes en le point générique de $X \otimes k$:

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{F}} & & \\ & \searrow^{\overline{j}} & \\ & & \overline{\mathcal{F}}' \\ & \nearrow_{\overline{t}} & \\ {}^{\tau}\overline{\mathcal{F}} & & \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Coker} \overline{j}$ et $\operatorname{Coker} \overline{t}$ sont des faisceaux de torsion et qui se plongent respectivement dans $\operatorname{Coker} j \otimes_A k$ et $\operatorname{Coker} t \otimes_A k$. Ils sont supportés par $i_\infty(\operatorname{Spec} k)$ et $i_0(\operatorname{Spec} k)$ qui sont dans $X'(k)$. Comme $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$–Algèbre partout maximale, on voit d'après la proposition 7 du paragraphe I.3 que $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{F}}'$ sont localement libres sur $\mathcal{D} \otimes k$. Or $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{E}}'$ sont localement libres de rang 1 sur $\mathcal{D} \otimes k$. Donc $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{F}}' = \overline{\mathcal{E}}'$ et $\overline{N}_0 = \overline{M}_0$.

On a prouvé que, de même que j, t reste injectif quand réduit modulo ϖ. Comme on a dit pour $\operatorname{Coker} j$, il en résulte que $\operatorname{Coker} t$ est supporté par le graphe du morphisme $i_0 : \operatorname{Spec} A \to X$ et qu'il est libre de rang d sur A.

D'après le corollaire 8 du paragraphe I.3, on conclut que $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{E}' \\ & \nearrow & \\ {}^{\tau}\mathcal{E} & & \end{pmatrix}$ est un $\mathcal{D}$–chtouca de rang 1 sur A, de pôle i_∞ et de zéro i_0, ce qui termine la démonstration. □

2. — Cohomologie ℓ–adique des schémas $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$

Dans ce qui suit, ℓ désignera toujours un nombre premier distinct de la caractéristique du corps fini $\mathbb{F}_q$. Et $\mathbb{Q}_\ell$ désignera le corps des nombres ℓ–adiques c'est–à–dire le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation discrète associée à ℓ ou encore le corps des fractions de $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout sous–schéma fermé fini non vide $I \hookrightarrow X$,* *les morphismes au-dessus de* $(X'\backslash I) \times (X'\backslash I)$

$$\begin{array}{lccc} p_{\mathcal{D},I} & : & \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & (X'\backslash I) \times (X'\backslash I) \\ {}_{\mathcal{D}}p_I & : & {}^{\;1}_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I/a^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & (X'\backslash I) \times (X'\backslash I) \end{array}$$

sont représentables projectifs lisses de dimension relative $2(d-1)$.

Pour tout entier $n \geq 0$, *les* $\mathbb{Q}_\ell$*-faisceaux*

$$H^n_{\mathcal{D},I} = R^n(p_{\mathcal{D},I})_*\mathbb{Q}_\ell \quad et \quad {}_{\mathcal{D}}H^n_I = R^n({}_{\mathcal{D}}p_I)_*\mathbb{Q}_\ell$$

sur $(X'\backslash I) \times (X'\backslash I)$ *sont constructibles et lisses (donc peuvent être vus comme des représentations du groupoïde fondamental* $\pi(X'\backslash I \times X'\backslash I)$ *de* $X'\backslash I \times X'\backslash I$ *dans la catégorie des* $\mathbb{Q}_\ell$*-espaces vectoriels de dimension finie) et ils s'identifient naturellement.*

Démonstration : La première assertion résulte du théorème 1 du paragraphe IV.1 puisque dans le paragraphe I.1d, on a pu construire un isomorphisme

$$* : {}^{\;1}_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I/a^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}^{op},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

au-dessus de l'automorphisme de permutation dans $X\backslash I \times X\backslash I$.

Alors les faisceaux $H^n_{\mathcal{D},I}$ et ${}_{\mathcal{D}}H^n_I$ sont constructibles parce que les morphismes $p_{\mathcal{D},I}$ et ${}_{\mathcal{D}}p_I$ sont projectifs et ils sont lisses parce que $p_{\mathcal{D},I}$ et ${}_{\mathcal{D}}p_I$ sont projectifs et lisses.

On remarque qu'en dehors de la diagonale de $X\backslash I \times X\backslash I$ et comme on a vu dans le paragraphe I.1b, les schémas ${}^{\;1}_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$ et $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}$ s'identifient naturellement. Par conséquent les faisceaux ${}_{\mathcal{D}}H^n_I$ et $H^n_{\mathcal{D},I}$ s'identifient naturellement en le point générique de $X'\backslash I \times X'\backslash I$. Comme ces faisceaux sont constructibles et lisses et que $X'\backslash I \times X'\backslash I$ est connexe, ils s'identifient partout. $\square$

PROPOSITION 2. — *Soit* $I \hookrightarrow X$ *un sous-schéma fermé fini non vide. Alors :*

(i) *Les faisceaux* $H^n_{\mathcal{D},I}$ *sont nuls en-dehors de* $0 \leq n \leq 4(d-1)$.

(ii) *Chaque faisceau* $H^n_{\mathcal{D},I}$ *sur* $X'\backslash I \times X'\backslash I$ *est naturellement muni de deux homomorphismes induits par* Frob_0 *et* Frob_∞

$$(\mathrm{Frob} \times \mathrm{Id})^* H^n_{\mathcal{D},I} \longrightarrow H^n_{\mathcal{D},I} \quad et \quad (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* H^n_{\mathcal{D},I} \longrightarrow H^n_{\mathcal{D},I}$$

dont le composé dans un sens ou dans l'autre est égal à l'isomorphisme canonique

$$(\mathrm{Frob})^* H^n_{\mathcal{D},I} \xrightarrow{\sim} H^n_{\mathcal{D},I}\,.$$

Ces deux morphismes sont donc des isomorphismes.

(iii) *Si T est un ensemble fini de places de X avec $T \cap T_a = \emptyset$ et $I \hookrightarrow X \backslash T$, chacun des faisceaux $H^n_{\mathcal{D},I}$ est muni sur $X_{(T)} \times X_{(T)}$ d'une action à droite naturelle de la sous–algèbre $\mathcal{H}^T_I$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^T$ du groupe $G(\mathbb{A}^T) = (D^T_{\mathbb{A}})^\times$, avec les notations du paragraphe* I.4b.

(iv) *Si $\sigma : X'\backslash I \times X'\backslash I \to X'\backslash I \times X'\backslash I$ désigne le morphisme de permutation, l'isomorphisme $* : \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D}^{op},I} \xrightarrow{\sim} {}^{\ 1}_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I$ au–dessus de σ induit des isomorphismes $\sigma^* H^n_{\mathcal{D},I} \xrightarrow{\sim} H^n_{\mathcal{D}^{op},I}$ qui transforment les isomorphismes de* (ii)

$$\begin{array}{lccccccc} & (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Id})^* H^n_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & H^n_{\mathcal{D},I} & \textit{et} & (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* H^n_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & H^n_{\mathcal{D},I} \\ \textit{en} & (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* H^n_{\mathcal{D}^{op},I} & \longrightarrow & H^n_{\mathcal{D}^{op},I} & \textit{et} & (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Id})^* H^n_{\mathcal{D}^{op},I} & \longrightarrow & H^n_{\mathcal{D}^{op},I}. \end{array}$$

(v) *Le morphisme* det : $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I} \to \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{O}_X,I}$ *induit un homomorphisme*

$$H^0_{\mathcal{O}_X,I} \longrightarrow H^0_{\mathcal{D},I}$$

compatible aux isomorphismes de (ii) *et* (iv).

Démonstration :

(i) résulte de ce que la dimension relative de $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}$ sur $X'\backslash I \times X'\backslash I$ est $2(d-1)$.

(ii) On définit ces homomorphismes comme étant induits par les morphismes

$$\begin{array}{rccll} \mathrm{Frob}_0 : \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & {}^{\ 1}_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I & \text{au–dessus de} & (\mathrm{Frob} \times \mathrm{Id}) \\ \text{et} \quad \mathrm{Frob}_\infty : \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I} & \longrightarrow & {}^{\ 1}_{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}_I & \text{au–dessus de} & (\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})\,, \end{array}$$

et par les identifications des faisceaux $H^n_{\mathcal{D},I}$ et ${}_{\mathcal{D}}H^n_I$.

(iii) Prouvons d'abord le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$. Rappelons que pour tout schéma $Y \xrightarrow{f} S$ sur S,* $\mathrm{Cor}(Y)$ *désigne la $\mathbb{Q}$-algèbre des correspondances finies étales sur Y.*

(i) *Pour tout $Y \xrightarrow{f} S$ comme ci-dessus, soit* $\mathrm{Cor}_f(Y)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Cor}(Y)$ *sur $\mathbb{Q}$, engendré par les cycles $[\Gamma]$ tels que les deux morphismes composés $\Gamma \rightrightarrows Y \xrightarrow{f} S$ soient égaux. Alors* $\mathrm{Cor}_f(Y)$ *est une sous-algèbre de* $\mathrm{Cor}(Y)$.

(ii) *Si $Y \xrightarrow{f} S$ est un schéma propre sur S et $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur S, il existe une action à droite naturelle de* $\mathrm{Cor}_f(Y)$ *sur chaque faisceau $R^n f_* f^* \mathcal{F}$, $n \geq 0$.*

(iii) *Si $Y \xrightarrow{f} S$ et $Y' \xrightarrow{f'} S$ sont deux schémas propres sur S et $Y' \xrightarrow{g} Y$ est un morphisme tel que $f' = f \circ g$ et qui est fini étale de rang constant, alors l'homomorphisme* $\mathrm{Cor}(Y) \to \mathrm{Cor}(Y')$ *envoie* $\mathrm{Cor}_f(Y)$ *dans* $\mathrm{Cor}_{f'}(Y')$ *et l'homomorphisme induit est compatible avec les actions de* $\mathrm{Cor}_f(Y)$ *et* $\mathrm{Cor}_{f'}(Y')$ *sur les $R^n f_* f^* \mathcal{F}$ et $R^n f'_* f'^* \mathcal{F}$ respectivement et avec les homomorphismes*

$$R^n f_* f^* \mathcal{F} \longrightarrow R^n f_* g_* g^* f^* \mathcal{F} = R^n f'_* f'^* \mathcal{F}.$$

Démonstration du lemme 3 :

(i) Il suffit de remarquer que si $\Gamma_1 \xrightarrow{(p_1,q_1)} Y \times Y$ et $\Gamma_2 \xrightarrow{(p_2,q_2)} Y \times Y$ sont deux morphismes avec $f \circ p_1 = f \circ q_1$ et $f \circ p_2 = f \circ q_2$, et si on pose $\Gamma = \Gamma_1 \times_{q_1,Y,p_2} \Gamma_2$, alors les deux morphismes $p_1 \times p_2 : \Gamma \to Y$ et $q_1 \times q_2 : \Gamma \to Y$ vérifient $f \circ (p_1 \times p_2) = f \circ (q_1 \times q_2)$.

(ii) Si $\Gamma \xrightarrow{(p,q)} Y \times_S Y$ est un morphisme avec p et q finis étales, on définit l'action à droite du cycle $[\Gamma]$ sur $R^n f_* f^* \mathcal{F}$ comme le composé

$$R^n f_* f^* \mathcal{F} \longrightarrow R^n f_* p_* p^* f^* \mathcal{F} = R^n f_* q_* q^* f^* \mathcal{F} \longrightarrow R^n f_* f^* \mathcal{F}$$

où le premier homomorphisme est induit par l'homomorphisme d'adjonction pour p et le second l'est par l'homomorphisme de trace pour q.

Par linéarité, on étend cette action aux combinaisons linéaires formelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de tels cycles $[\Gamma]$.

Il reste à prouver que cette action passe au quotient $\mathrm{Cor}_f(Y)$ et qu'elle est compatible avec la multiplication dans $\mathrm{Cor}_f(Y)$.

Si $(\Gamma, (p,q)) = \coprod_i (\Gamma_i, (p_i, q_i))$, l'action de $[\Gamma]$ est bien égale à celle de $\sum_i [\Gamma_i]$ car on a évidemment pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur Y

$$p_* p^* \mathcal{G} = \bigoplus_i p_{i*} p_i^* \mathcal{G} \quad \text{et} \quad q_* q^* \mathcal{G} = \bigoplus_i q_{i*} q_i^* \mathcal{G}.$$

Puis, si deux cycles $(\Gamma, (p, q))$ et $(\Gamma', (p', q'))$ s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & Y \\ \Gamma' \arrow[rru, "p'"] \arrow[rrd, "q'"'] \arrow[r, "\gamma"] & \Gamma \arrow[ru, "p"'] \arrow[rd, "q"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

avec γ un morphisme fini étale de degré constant égal à n, alors l'action de $[\Gamma']$ est égale à celle de $n[\Gamma]$ car pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur Γ le composé

$$\mathcal{G} \longrightarrow \gamma_* \gamma^* \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

de l'homomorphisme d'adjonction et de la trace est la multiplication par n.

Enfin, il y a compatibilité avec la multiplication car pour tout carré cartésien où les morphismes sont finis étales

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[ld, "p_2'"'] \arrow[rd, "q_1'"] & \\ \Gamma_1 \arrow[rd, "q_1"'] & & \Gamma_2 \arrow[ld, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

et pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur Y, les deux homomorphismes composés

$$q_{1*} q_1^* \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow p_{2*} p_2^* \mathcal{G}$$
$$q_{1*} q_1^* \mathcal{G} \longrightarrow q_{1*} p'_{2*} p_2'^* q_1^* \mathcal{G} = p_{2*} q'_{1*} q_1'^* p_2^* \mathcal{G} \longrightarrow p_{2*} p_2^* \mathcal{G}$$

sont égaux, ce qu'on voit immédiatement sur les fibres.

(iii) La première assertion est immédiate.

Pour la seconde, soit α le rang constant de Y' sur Y, et considérons $(\Gamma, (p, q))$ un cycle de $\mathrm{Cor}_f(Y)$ et $(\Gamma', (p', q')) = Y' \times_Y \Gamma \times_Y Y'$. Il s'agit de prouver que l'homomorphisme composé

$$R^n f_* f^* \mathcal{F} \to R^n f'_* f'^* \mathcal{F} \to R^n f'_* p'_* p'^* f'^* \mathcal{F} = R^n f'_* q'_* q'^* f'^* \mathcal{F} \to R^n f'_* f'^* \mathcal{F}$$

est égal à α fois l'homomorphisme composé

$$R^n f_* f^* \mathcal{F} \longrightarrow R^n f_* p_* p^* f^* \mathcal{F} = R^n f_* q_* q^* f^* \mathcal{F} \longrightarrow R^n f_* f^* \mathcal{F} \longrightarrow R^n f'_* f'^* \mathcal{F} .$$

Or on a un diagramme commutatif où tous les carrés sont cartésiens et tous les morphismes sont finis étales

$$\begin{tikzcd}
 & & \Gamma' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, bend right, "p'"'] \arrow[ddrr, bend left, "q'"] & & \\
 & Y' \times_Y \Gamma \arrow[dl] \arrow[dr, "g_p"] & & \Gamma \times_Y Y' \arrow[dl, "g_q"'] \arrow[dr] & \\
Y' \arrow[dr, "g"] & & \Gamma \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & Y' \arrow[dl, "g"'] \\
 & Y & & Y &
\end{tikzcd}$$

donc on a, en sus de $R^n f'_* f'^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* f^* \mathcal{F}$,

$$R^n f'_* p'_* p'^* f'^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* p_* g_{q*} g_q^* p^* f^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* p_* q^* g_* g^* f^* \mathcal{F}$$
$$R^n f'_* q'_* q'^* f'^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* q_* g_{p*} g_p^* q^* f^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* q_* p^* g_* g^* f^* \mathcal{F}$$

d'où encore

$$R^n f'_* p'_* p'^* f'^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* g_* g^* p_* p^* f^* \mathcal{F}$$
$$\text{et } R^n f'_* q'_* q'^* f'^* \mathcal{F} = R^n f_* g_* g^* g_* g^* q_* q^* f^* \mathcal{F} .$$

Cela permet de conclure puisque pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur Y, l'homomorphisme composé $\mathcal{G} \to g_* g^* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est la multiplication par α. $\square$

Suite de la démonstration de la proposition 2 :

D'après ce lemme 3, l'assertion (iii) résulte maintenant de ce que d'après le théorème 5 du paragraphe I.4, on a un homomorphisme de $\mathbb{Q}$–algèbres

$$\mathcal{H}_I^T \longrightarrow \mathrm{Cor}(\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}})$$

dont l'image est évidemment contenue dans la sous–algèbre associée au morphisme $\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}} \to X_{(T)} \times X_{(T)}$.

(iv) est évident puisque l'isomorphisme $*$ transforme les morphismes Frob_0 et Frob_∞ respectivement en Frob_∞ et Frob_0.

(v) est évident puisque le morphisme det commute aux différents morphismes Frob_0, Frob_∞ et $*$. $\square$

Prouvons maintenant le théorème suivant, dû à Drinfeld :

Théoréme 4. — *Soient X_1 et X_2 deux courbes quasi–projectives lisses sur $\mathbb{F}_q$.*

Soient $\pi(X_1 \times X_2)$, $\pi(X_1)$ et $\pi(X_2)$ les groupoïdes fondamentaux de $X_1 \times X_2$, X_1 et X_2.

Alors le foncteur naturel

$$\pi(X_1 \times X_2) \longrightarrow \pi(X_1) \times \pi(X_2)$$

induit une équivalence de la catégorie des représentations du groupoïde $\pi(X_1) \times \pi(X_2)$ dans les ensembles finis dans la catégorie des revêtements finis étales Y de $X_1 \times X_2$ qui sont munis d'un isomorphisme au–dessus de $X_1 \times X_2$

$$(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* Y \xrightarrow{\sim} Y\,.$$

Démonstration : Il faut d'abord montrer que si Y est un revêtement fini étale de $X_1 \times X_2$ qui provient d'une représentation de $\pi(X_1) \times \pi(X_2)$, il est naturellement muni d'un isomorphisme $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* Y \xrightarrow{\sim} Y$. Pour commencer, on peut choisir X'_2 un revêtement fini étale galoisien de X_2 tel que la représentation restreinte de $\pi(X_2)$ soit trivialisée par le foncteur $\pi(X'_2) \to \pi(X_2)$. Autrement dit, si Y_1 est le revêtement fini étale de X_1 qui correspond à la représentation restreinte de $\pi(X_1)$, on a un isomorphisme canonique

$$Y_{\times_{X_2}} X'_2 \xrightarrow{\sim} Y_1 \times X'_2$$

si bien que $Y_{\times_{X_2}} X'_2$ est muni d'un isomorphisme canonique

$$(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* (Y_{\times_{X_2}} X'_2) \xrightarrow{\sim} Y_{\times_{X_2}} X'_2$$

au–dessus de $X_1 \times X'_2$.

Cet isomorphisme est invariant par le groupe de Galois de X'_2 sur X_2 donc il provient d'un isomorphisme

$$(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* Y \xrightarrow{\sim} Y$$

au–dessus de $X_1 \times X_2$. Et il est évident que celui–ci ne dépend pas du revêtement X'_2 de X_2 que nous avons choisi.

Il nous faut maintenant définir un foncteur en sens inverse.

Commençons par prouver le lemme suivant :

LEMME 5. — *Soit $\overline{X}_1$ une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$.*

Alors le champ qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des schémas $\overline{Y}$ finis et plats sur $\overline{X_1} \times S$ qui sont munis d'un isomorphisme $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* \overline{Y} \xrightarrow{\sim} \overline{Y}$ *au–dessus de $\overline{X_1} \times S$ s'écrit canoniquement*

$$\coprod_{\overline{Y_1}} \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q / \mathrm{Aut}\, \overline{Y_1}$$

où $\overline{Y_1}$ décrit l'ensemble des classes d'isomorphismes de schémas finis plats sur $\overline{X_1}$ et où, pour tout tel $\overline{Y_1}$, $\mathrm{Aut}\,\overline{Y_1}$ *désigne le groupe fini de ses automorphismes au–dessus de $\overline{X}_1$.*

Démonstration : Notons $\mathcal{X}$ le champ ainsi défini.

Et soit $\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\overline{X}_1}}$ [resp. $\mathcal{X}_1$] le champ qui à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ associe le groupoïde des Modules $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{X_1} \times S}$, localement libres de type fini et qui sont munis d'un isomorphisme $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ [resp. ainsi que d'un homomorphisme $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X_1} \times S}} \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, compatibles entre eux].

On a des morphismes naturels de champs

$$\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\overline{X}_1}} .$$

Or, d'après le lemme 3 du paragraphe I.2, le morphisme $\mathcal{X} \to \mathcal{X}_1$ est représentable par une immersion fermée.

Et d'après la proposition 7 du paragraphe II.1, le morphisme $\mathcal{X}_1 \to \mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\overline{X_1}}}$ est représentable fini non ramifié.

Enfin, d'après le théorème 2 (i) du paragraphe I.3, $\mathrm{Tr}_{\mathcal{O}_{\overline{X_1}}}$ est un champ algébrique au sens de Deligne–Mumford et étale sur $\mathbb{F}_q$.

On en déduit que $\mathcal{X}$ également est un champ algébrique au sens de Deligne–Mumford et étale sur $\mathbb{F}_q$.

Pour conclure, on n'a plus qu'à remarquer que le morphisme évident

$$\coprod_{\overline{Y_1}} \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q / \mathrm{Aut}\, \overline{Y}_1 \longrightarrow \mathcal{X}$$

induit une équivalence entre fibres au–dessus de $\overline{\mathbb{F}_q}$, comme il résulte du lemme 3 du paragraphe I.3. ∎

Suite de la démonstration du théorème 4 : Soit maintenant Y un revêtement fini étale de $X_1 \times X_2$, muni d'un isomorphisme $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* Y \xrightarrow{\sim} Y$ au-dessus de $X_1 \times X_2$.

Soit $\overline{X}_1$ la courbe normalisée de X_1. Elle est donc projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ et elle contient X_1 comme ouvert.

Et soit $\overline{Y}$ la clôture normale de $\overline{X}_1 \times X_2$ dans le corps des fonctions de Y. Ainsi, Y est la restriction de $\overline{Y}$ au-dessus de $X_1 \times X_2$. De plus, $\overline{Y}$ est sans torsion, donc plat sur X_2 et comme $\overline{Y}$ est normal, ses fibres au-dessus des points de X_2 sont sans composantes immergées, donc plates sur $\overline{X}_1$, et en définitive $\overline{Y}$ est plat sur $\overline{X}_1 \times X_2$. Enfin, comme $\overline{Y}$ et $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Frob})^* \overline{Y}$ sont normaux et coïncident au-dessus de $X_1 \times X_2$, ils coïncident partout.

On peut maintenant appliquer le lemme 5. On voit qu'il existe un revêtement fini étale galoisien X_2' de X_2 avec un isomorphisme canonique

$$Y \times_{X_2} X_2' \xrightarrow{\sim} Y_1 \times X_2'$$

où Y_1 est un revêtement fini étale de X_1.

Ce revêtement Y_1 correspond à une représentation de $\pi(X_1)$ qui, composée avec le foncteur

$$\pi(X_1 \times X_2') \longrightarrow \pi(X_1) \times \pi(X_2') \longrightarrow \pi(X_1)$$

est égale au composé de la représentation de $\pi(X_1 \times X_2)$ qui correspond à Y avec le foncteur

$$\pi(X_1 \times X_2') \longrightarrow \pi(X_1 \times X_2)\,.$$

Or on a un diagramme 2–cocartésien

$$\begin{tikzcd}
\pi(X_1 \times X_2') \arrow[r] \arrow[d] & \pi(X_1) \times \pi(X_2') \arrow[d] \\
\pi(X_1 \times X_2) \arrow[r] & \pi(X_1) \times \pi(X_2)
\end{tikzcd}$$

donc on obtient une représentation unique de $\pi(X_1) \times \pi(X_2)$ qui soit équivalente aux données précédentes.

Il est évident qu'elle ne dépend pas du choix de X_2'.

On a ainsi construit un foncteur en sens inverse.

Il est évident qu'il est quasi–inverse du premier. $\square$

De la proposition 1, de la proposition 2 (ii) et du théorème 4, on déduit immédiatement :

COROLLAIRE 6. — *Pour tout sous-schéma fermé fini non vide $I \hookrightarrow X$, chacun des faisceaux $H^n_{\mathcal{D},I}$ sur $X'\backslash I \times X'\backslash I$ peut être vu comme une représentation du groupoïde produit*

$$\pi(X'\backslash I) \times \pi(X'\backslash I)$$

dans la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie.

□

Prouvons encore :

LEMME 7. — *Soient T un ensemble fini de places de X avec $T \cap T_a = \emptyset$ et $I \hookrightarrow J \hookrightarrow X\backslash T$ deux sous-schémas fermés finis non vides emboîtés.*

(i) *Pour tout $n \geq 0$, on a un plongement canonique de faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $X'\backslash J \times X'\backslash J$*

$$H^n_{\mathcal{D},I} \hookrightarrow H^n_{\mathcal{D},J}\,.$$

Vu en termes de représentations, il est compatible aux actions des groupoïdes $\pi(X'\backslash I) \times \pi(X'\backslash I)$ et $\pi(X'\backslash J) \times \pi(X'\backslash J)$ via le foncteur $\pi(X'\backslash J) \to \pi(X'\backslash I)$.

(ii) *Chacun des plongements $H^n_{\mathcal{D},I} \hookrightarrow H^n_{\mathcal{D},J}$ au-dessus de $X'_{(T)} \times X'_{(T)}$ est compatible aux actions des sous-algèbres $\mathcal{H}^T_I$ et $\mathcal{H}^T_J$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^T$ via l'inclusion $\mathcal{H}^T_I \subseteq \mathcal{H}^T_J$.*

(iii) *L'action à droite de l'algèbre $\mathcal{H}^T_J$ sur $H^n_{\mathcal{D},J}$ comprend en particulier une action à droite du groupe $K^T/K^T_J = (\mathcal{D}_J)^\times$ et $H^n_{\mathcal{D},I}$ s'identifie au sous-faisceau de $H^n_{\mathcal{D},J}$ fixé par le sous-groupe K^T_I/K^T_J de K^T/K^T_J.*

Démonstration : D'après la proposition 5 du paragraphe I.3, le morphisme

$$\mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},J}/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Cht}^1_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$$

au-dessus de $(X'\backslash J) \times (X'\backslash J)$ est représentable fini étale galoisien de groupe $\mathrm{Ker}[(\mathcal{D}_J)^\times \to (\mathcal{D}_I)^\times] = K^T_I/K^T_J$. Et ce morphisme commute aux actions de Frob_0 et Frob_∞. Par conséquent, les homomorphismes d'adjonction

$$H^n_{\mathcal{D},I} \longrightarrow H^n_{\mathcal{D},J}$$

sont compatibles aux actions de $\pi(X'\backslash I)\times\pi(X'\backslash I)$ et $\pi(X'\backslash J)\times\pi(X'\backslash J)$ et au foncteur $\pi(X'\backslash J)\to\pi(X'\backslash I)$. On dispose aussi de l'homomorphisme de trace

$$H^n_{\mathcal{D},J}\longrightarrow H^n_{\mathcal{D},I}$$

et le composé $H^n_{\mathcal{D},I}\to H^n_{\mathcal{D},J}\to H^n_{\mathcal{D},I}$ est la multiplication par le degré $[K_I^T:K_J^T]$.

Ceci prouve (i) et (iii).

Enfin, (ii) est conséquence du théorème 5 (ii) du paragraphe I.4 et du lemme 3 (iii) ci–dessus. □

Maintenant, on a :

PROPOSITION 8. — *Soit T un ensemble fini de places de X avec $T\cap T_a=\emptyset$. Pour tout entier $n\geq 0$, posons*

$$H^{T,n}_{\mathcal{D}}=\varinjlim_{I\cap T=\emptyset} H^n_{\mathcal{D},I}$$

qui est un faisceau de $\mathbb{Q}_\ell$–espaces vectoriels sur $X'_{(T)}\times X'_{(T)}$. Alors :

(i) *Si $\pi(X'_{(T)})=\varprojlim_{I\cap T=\emptyset}\pi(X'\backslash I)$ est le groupoïde fondamental de $X'_{(T)}$, chaque $H^{T,n}_{\mathcal{D}}$ peut être vu comme une représentation du groupoïde produit*

$$\pi(X'_{(T)})\times\pi(X'_{(T)})$$

dans la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$–espaces vectoriels.

(ii) *Si $\mathcal{H}^T$ désigne l'algèbre de Hecke du groupe $G(\mathbb{A}^T)=(D^T_{\mathbb{A}})^\times$, chaque $H^{T,n}_{\mathcal{D}}$ est muni d'une action à droite de $\mathcal{H}^T$ ou, ce qui est équivalent, d'une action à droite lisse de $G(\mathbb{A}^T)$, et qui commute à l'action de $\pi(X'_{(T)})\times\pi(X'_{(T)})$.*

Cette action est admissible au sens que pour tout sous–groupe ouvert de $G(\mathbb{A}^T)$, le sous–faisceau de $H^{T,n}_{\mathcal{D}}$ fixé par ce sous–groupe est constructible.

(iii) *Pour tout entier $n\geq 0$, on dispose d'un isomorphisme*

$$*:H^{T,n}_{\mathcal{D}}\xrightarrow{\sim}H^{T,n}_{\mathcal{D}^{op}}\,.$$

Il échange les actions des deux facteurs $\pi(X'_{(T)})$ et $\pi(X'_{(T)})$ et il est compatible aux actions de $(D^T_{\mathbb{A}})^\times$ et $(D^{op\,T}_{\mathbb{A}})^\times$ via l'isomorphisme $g\longmapsto g^{-1}$.

(iv) *On a un homomorphisme naturel*

$$H^{T,0}_{\mathcal{O}_X} \longrightarrow H^{T,0}_{\mathcal{D}}$$

compatible aux actions de $\pi(X'_{(T)}) \times \pi(X'_{(T)})$ *ainsi qu'à l'isomorphisme de* (iii) *et aux actions de* $(\mathbb{A}^T)^\times$ *et* $(D^T_{\mathbb{A}})^\times$ *via l'homomorphisme* $\det$: $(D^T_{\mathbb{A}})^\times \to (\mathbb{A}^T)^\times$.

Démonstration :

(i) résulte du corollaire 6 et du lemme 7 (i).

(ii) L'existence de cette action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^T$ résulte de la proposition 2 (iii) et du lemme 7 (ii).

Cette action commute avec celle de $\pi(X'_{(T)}) \times \pi(X'_{(T)})$ car l'action à droite du groupe $G(\mathbb{A}^T)$ sur $\mathrm{Cht}^{1,T}_{\mathcal{D}}$ et $\frac{1}{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$ est compatible avec les morphismes Frob_0 et Frob_∞.

Enfin, cette action est admissible d'après le lemme 7 (iii).

(iii) résulte de la proposition 2 (iv) et du fait que l'isomorphisme

$$* : \mathrm{Cht}^{1,T}_{\mathcal{D}^{op}} \longrightarrow \tfrac{1}{\mathcal{D}}\mathrm{Cht}^T$$

est compatible aux actions de $(D^{op\,T}_{\mathbb{A}})^\times$ et de $(D^T_{\mathbb{A}})^\times$ via l'isomorphisme $g \longmapsto g^{-1}$.

(iv) résulte de la proposition 2 (v) et du fait que le morphisme

$$\det : \mathrm{Cht}^{1,T}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Cht}^{1,T}_{\mathcal{O}_X}$$

est compatible aux actions à droite de $(D^T_{\mathbb{A}})^\times$ et de $(\mathbb{A}^T)^\times$ via l'homomorphisme $\det : (D^T_{\mathbb{A}})^\times \to (\mathbb{A}^T)^\times$. □

3. — Généralités sur les représentations admissibles

a) Représentations admissibles. Homomorphismes de traces

Rappelons d'abord (d'après par exemple [Cartier]) :

DÉFINITION 1. — *Soient L un corps de caractéristique* 0 *et $\mathcal{A}$ une L-algèbre munie d'une famille (e_I) d'éléments idempotents telle que la famille $(e_I \mathcal{A} e_I)$ de sous-algèbres de $\mathcal{A}$ est inductive de réunion $\mathcal{A}$.*

On appelle représentation admissible de $\mathcal{A}$ tout module à droite M sur $\mathcal{A}$ tel que les sous-modules Me_I sur les sous-algèbres $e_I\mathcal{A}e_I$ soient tous de dimension finie sur le corps L et aient leur réunion égale à M.

Une représentation admissible M de $\mathcal{A}$ est dite irréductible si elle ne possède d'autre sous–représentation que 0 *et* M.

Une représentation admissible M de $\mathcal{A}$ est dite absolument irréductible si pour tout corps L' contenant L la représentation admissible $M \otimes_L L'$ de la L'–algèbre $\mathcal{A} \otimes_L L'$ est irréductible.

Enfin, une représentation admissible M de $\mathcal{A}$ est dite semi–simple si elle est isomorphe à une somme directe finie de représentations admissibles irréductibles.

Prouvons :

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses de la définition* 1, *on a :*

(i) *La catégorie des représentations admissibles de $\mathcal{A}$ est abélienne et pour tout I, la catégorie des représentations admissibles (c'est–à–dire de dimension finie sur le corps L) de l'algèbre $e_I \mathcal{A} e_I$ est abélienne, nœthérienne et artinienne.*

(ii) *Le foncteur $M \longmapsto (Me_I)_I$ induit une équivalence de la catégorie des représentations admissibles de $\mathcal{A}$ sur la catégorie des systèmes inductifs (M_I) de représentations admissibles des sous–algèbres $e_I \mathcal{A} e_I$, munis donc d'isomorphismes compatibles*

$$M_I e_J \xrightarrow{\sim} M_J$$

pour tous indices I, J vérifiant $e_J \mathcal{A} e_J \subseteq e_I \mathcal{A} e_I$.

Ce foncteur admet pour quasi–inverse

$$(M_I) \longmapsto \varinjlim_I M_I \, .$$

(iii) *Si M est une représentation admissible de $\mathcal{A}$ qui correspond à un système inductif (M_I) dans l'équivalence de* (ii), *M est irréductible si et seulement si pour tout I, M_I est irréductible comme représentation de $e_I \mathcal{A} e_I$.*

(iv) *Pour tout indice I fixé, l'application*

$$M \longmapsto Me_I$$

induit une injection de l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles M de $\mathcal{A}$ telles que $Me_I \neq 0$ dans l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles non nulles de $e_I \mathcal{A} e_I$.

De plus, pour tout tel M l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \longrightarrow \mathrm{End}_{e_I \mathcal{A} e_I}(Me_I)$$

est bijectif.

(v) *Si M est une représentation admissible semi–simple de $\mathcal{A}$, alors pour tout corps L' contenant L, la représentation admissible $M \otimes_L L'$ de $\mathcal{A} \otimes_L L'$ est aussi semi–simple.*

(vi) *Si M est une représentation admissible semi–simple non nulle de $\mathcal{A}$, son algèbre* $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ *des endomorphismes est semi–simple, et de dimension finie sur le corps L.*

De plus, M est irréductible si et seulement si $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ *est une algèbre à division, et M est absolument irréductible si et seulement si le plongement* $L \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration :

(i) résulte de ce que toute sous–représentation et toute représentation quotient d'une représentation admissible est encore admissible.

(ii) est évident sur la définition.

(iii) Déjà, la suffisance résulte de (ii).

Pour la nécessité, si M est irréductible et N est une sous–représentation d'un Me_I, alors $N\mathcal{A}$ est une sous–représentation de M avec $N\mathcal{A}e_I = N$ d'où l'on tire ou bien $N\mathcal{A} = M$ et $N = Me_I$ ou bien $N\mathcal{A} = 0$ et $N = 0$. Ce qui prouve que Me_I est irréductible.

(iv) Il faut prouver que si M est une représentation admissible irréductible de $\mathcal{A}$ telle que $Me_I = M_I \neq 0$, M est complètement déterminée par M_I.

Soit $\overline{M} = M_I \otimes_{e_I\mathcal{A}e_I} e_I\mathcal{A}$. C'est un module à droite sur $\mathcal{A}$, tel que $\overline{M}e_I$ s'identifie à M_I, et qui est muni d'un homomorphisme $\mathcal{A}$–linéaire $\overline{M} \to M$. Cet homomorphisme est non nul, donc surjectif puisque M est irréductible.

Soit encore $\overline{N} = \{m \in \overline{M},\ m\mathcal{A}e_I = 0\}$. $\overline{N}$ est le plus grand sous–module N de $\overline{M}$ tel que $Ne_I = 0$. Comme M_I est irréductible sur $e_I\mathcal{A}e_I$ et engendre $\overline{M}$ sur $\mathcal{A}$, on voit que pour tout sous–module N de $\overline{M}$ ou bien $N \subseteq \overline{N}$ ou bien $N = \overline{M}$.

Par conséquent, le module $\overline{M}/\overline{N}$ est irréductible.

Enfin, l'homomorphisme surjectif $\overline{M} \to M$ se factorise évidemment en $\overline{M}/\overline{N} \to M$ qui est un homomorphisme surjectif entre $\mathcal{A}$–modules irréductibles, donc un isomorphisme.

Ainsi, on peut effectivement retrouver M à partir de M_I.

Maintenant, l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \longrightarrow \mathrm{End}_{e_I\mathcal{A}e_I}(M_I)$$

est injectif puisque M est irréductible et $M_I \neq 0$.

De plus, et avec les notations ci–dessus, tout endomorphisme de M_I sur $e_I\mathcal{A}e_I$ induit un endomorphisme de $\overline{M} = M_I \otimes_{e_I\mathcal{A}e_I} e_I\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$, lequel stabilise nécessairement le sous–module $\overline{N} = \{m \in \overline{M},\ m\mathcal{A}e_I = 0\}$, donc induit un endomorphisme de $\overline{M}/\overline{N} \cong M$ sur $\mathcal{A}$.

Ainsi l'homomorphisme injectif

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \longrightarrow \mathrm{End}_{e_I \mathcal{A} e_I}(M_I)$$

admet un inverse à droite. C'est un isomorphisme.

(v) Il suffit de considérer le cas où M est irréductible. Soit $D = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ qui est une algèbre à division, et de dimension finie sur L d'après (iv). Les sous–$\mathcal{A}$–modules de $M \otimes_L L'$ correspondent bijectivement aux sous–D–modules à droite de $D \otimes_L L'$ et les sous–modules de $M \otimes_L L'$ sur $\mathcal{A} \otimes_L L'$ correspondent bijectivement aux idéaux à droite de $D \otimes_L L'$. Mais comme D est une algèbre à division de dimension finie sur L et comme L est de caractéristique 0, $D \otimes_L L'$ est une algèbre semi–simple de dimension finie sur L', d'où l'on conclut.

(vi) Si M est irréductible, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ est une algèbre à division et de dimension finie sur L d'après (iv).

Et si $M \cong M_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus M_r^{m_r}$ où $M_1, \ldots, M_r$ sont des représentations admissibles irréductibles de $\mathcal{A}$, deux à deux non isomorphes, on a

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \cong M_{m_1}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_1)) \times \cdots \times M_{m_r}(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_r))\,.$$

Ceci prouve les deux premières assertions.

Enfin, la troisième assertion résulte de la seconde puisque si M est irréductible et L' est un corps contenant L, $M \otimes_L L'$ est une représentation semi–simple de $\mathcal{A} \otimes_L L'$ d'après (v) et $\mathrm{End}_{\mathcal{A}\otimes_L L'}(M \otimes_L L') = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) \otimes_L L'$.

$\square$

COROLLAIRE 3. — *Avec les hypothèses et notations de la définition* 1, *soit $K_{ad}(\mathcal{A})$ le groupe*

$$K_{ad}(\mathcal{A}) = \varprojlim_{I} \quad K(e_I \mathcal{A} e_I)$$

où, pour tout indice I, $K(e_I \mathcal{A} e_I)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des représentations admissibles de la L–algèbre $e_I \mathcal{A} e_I$ et où, pour tous indices I, J avec $e_I \mathcal{A} e_I \subseteq e_J \mathcal{A} e_J$, l'homomorphisme

$$K(e_J \mathcal{A} e_J) \longrightarrow K(e_I \mathcal{A} e_I)$$

est induit par le foncteur exact

$$M_J \longmapsto M_J e_I \,.$$

Alors le groupe $K_{ad}(\mathcal{A})$ est naturellement isomorphe au groupe abélien des sommes formelles

$$\sum \lambda_M [M]$$

où M décrit un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes de représentations admissibles irréductibles non nulles de $\mathcal{A}$ et (λ_M) décrit l'ensemble des familles d'éléments de $\mathbb{Z}$ telles que pour tout indice I il n'y ait qu'un nombre fini de M vérifiant $Me_I \neq 0$ et $\lambda_M \neq 0$.

De plus, toute représentation admissible M de $\mathcal{A}$ a une classe associée $[M]$ dans $K_{ad}(\mathcal{A})$ et le groupe $K_{ad}(\mathcal{A})$ est engendré par l'ensemble de ces classes $[M]$.

Démonstration : C'est immédiat d'après la proposition 2 (ii), (iii) et (iv).

$\square$

PROPOSITION 4. — *Toujours avec les hypothèses et notations de la définition* 1, *on a :*

(i) *Pour tout élément f de $\mathcal{A}$ et toute représentation admissible M de $\mathcal{A}$, l'opérateur induit par f sur M est de rang fini sur L. On dispose donc de sa trace que l'on note $\mathrm{Tr}_M(f) \in L$.*

(ii) *Pour tout élément f de $\mathcal{A}$, l'application $M \longmapsto \mathrm{Tr}_M(f)$ se factorise de manière unique en un homomorphisme*

$$K_{ad}(\mathcal{A}) \longrightarrow L \qquad M \longmapsto \mathrm{Tr}_M(f)\,.$$

Et pour tout élément fixé M de $K_{ad}(\mathcal{A})$, l'application

$$f \longmapsto \mathrm{Tr}_M(f)$$

est un homomorphisme L-linéaire.

(iii) *Etant donnés M_1 et M_2 deux éléments de $K_{ad}(\mathcal{A})$, on a $M_1 = M_2$ si et seulement si $\mathrm{Tr}_{M_1}(f) = \mathrm{Tr}_{M_2}(f)$, $\forall f \in \mathcal{A}$.*

Plus précisément, si (M_i) est une famille finie d'éléments de $K_{ad}(\mathcal{A})$, N_0 une représentation admissible irréductible de $\mathcal{A}$ et (N_j) un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes de représentations admissibles *irréductibles de $\mathcal{A}$ dont le coefficient dans l'un des M_i au moins est non nul, alors il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que pour tout j*

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}_{N_j}(f) = 1 & \textit{si } N_j \cong N_0 \\ \mathrm{Tr}_{N_j}(f) = 0 & \textit{dans le cas contraire}. \end{cases}$$

Démonstration :

(i) Par hypothèse sur $\mathcal{A}$, il existe un indice I tel que $f \in e_I \mathcal{A} e_I$. Donc l'image de l'opérateur induit par f dans M est contenue dans Me_I qui est de dimension finie sur L.

(ii) Par définition, on a

$$K_{ad}(\mathcal{A}) = \varprojlim_I K(e_I \mathcal{A} e_I)\,.$$

Et pour tout $f \in e_I \mathcal{A} e_I$ fixé, l'application qui à toute représentation admissible M_I de $e_I \mathcal{A} e_I$ associe la trace dans L de l'opérateur induit par f dans M_I se factorise en un unique homomorphisme

$$K(e_I \mathcal{A} e_I) \longrightarrow L \qquad M_I \longmapsto \mathrm{Tr}_{M_I}(f)\,.$$

D'où la première assertion.

La seconde est évidente.

(iii) La première assertion est conséquence évidente de la seconde. Pour celle–ci, soit I un indice tel que $N_0 e_I \neq 0$. L'ensemble J_0 des j tels que $N_j e_I \neq 0$ est fini, et ces $N_j e_I$ sont irréductibles et deux à deux non isomorphes, comme il résulte de la proposition 2 (iv). D'après [Bourbaki] Chapitre 8, § 12, proposition 3, les formes linéaires $f \longmapsto \mathrm{Tr}_{N_j e_I}(f)$ $e_I \mathcal{A} e_I \longrightarrow L$, quand j décrit J_0, sont linéairement indépendantes. Comme J_0 est fini, il existe $f \in e_I \mathcal{A} e_I$ telle que

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}_{N_j e_I}(f) = 1 & \text{si } N_j e_I \cong N_0 e_I \Longleftrightarrow N_j \cong N_0 \\ \mathrm{Tr}_{N_j e_I}(f) = 0 & \text{si } N_j e_I \ncong N_0 e_I \text{ et } N_j e_I \neq 0\,. \end{cases}$$

Et si $N_j e_I = 0$, on a nécessairement $\mathrm{Tr}_{N_j e_I}(f) = 0$ puisque $f \in e_I \mathcal{A} e_I$. C'est ce qu'on voulait. $\square$

b) Corps de rationalité. Corps de définition

Posons :

Définition 5. — *Toujours avec les hypothèses et notations de la définition* 1*, soient L' un corps contenant L et M' une représentation admissible de l'algèbre $\mathcal{A} \otimes_L L'$.*

On appelle corps de rationalité de M' et on note $L(M')$ le sous-corps de L' qui est engendré sur L par les éléments $\mathrm{Tr}_{M'}(f)$ quand f décrit $\mathcal{A}$.

On appelle corps de définition de M' tout corps L_1 contenant L tel qu'existent une représentation admissible M_1 de $\mathcal{A} \otimes_L L_1$, un corps L'_1 contenant à la fois L' et L_1 et un isomorphisme entre représentations admissibles de $\mathcal{A} \otimes_L L'_1$

$$M' \otimes_{L'} L'_1 \cong M_1 \otimes_{L_1} L'_1 .$$

Proposition 6. — *Dans les conditions de la définition* 5*, on a :*

(i) *Le corps de rationalité de M' se plonge naturellement dans tout corps de définition de M'.*

De plus, et si M' est irréductible, le corps de rationalité de M' est égal à celui de $M'e_I$ pour tout indice I tel que $M'e_I \neq 0$.

(ii) *Si M' est irréductible et s'il existe une représentation admissible M de $\mathcal{A}$ telle que le coefficient $m' \in \mathbb{N}$ de $[M']$ dans la classe $[M \otimes_L L'] \in K_{ad}(\mathcal{A} \otimes_L L')$ soit non nul, le corps de rationalité $L(M') = L(M'^{m'})$ est une extension finie de L et c'est le plus petit corps de définition de $M'^{m'}$.*

(iii) *Sous les hypothèses de* (ii)*, il existe une extension finie de L contenant $L(M')$ qui soit un corps de définition de M'.*

Démonstration :

(i) La première assertion résulte de ce que deux représentations admissibles isomorphes ont même homomorphisme trace associé, et de ce que la formation de la trace commute aux extensions du corps de base.

Pour la seconde assertion, on peut supposer que L' est galoisien sur L, de groupe Σ. Pour tout élément σ de Σ, on dispose de la représentation admissible irréductible $\sigma(M') = M' \otimes_{L',\sigma} L'$ de $\mathcal{A} \otimes_L L'$.

D'après la proposition 4 (iii), le corps de rationalité de M' [resp. de $M'e_I$] est le plus grand sous–corps de L' fixé par le sous–groupe de Σ constitué des éléments σ qui vérifient $\sigma(M') \cong M'$ [resp. $\sigma(M')e_I \cong \sigma(M')$]. On conclut d'après la proposition 2 (iv).

(ii) On peut supposer que la représentation admissible M de $\mathcal{A}$ est irréductible. Posons $D = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ et $D' = \mathrm{End}_{\mathcal{A}\otimes_L L'}(M')$. D'après la proposition 2 (vi), D et D' sont des algèbres à division, de dimensions finies sur L et L' respectivement. Soient C et C' leurs centres, qui sont des corps, extensions finies de L et L'.

D'après la proposition 2 (v), la représentation $M \otimes_L L'$ de $\mathcal{A} \otimes_L L'$ est semi–simple, si bien que l'algèbre $M_{m'}(D') = \mathrm{End}_{\mathcal{A}\otimes_L L'}(M'^{m'})$ s'identifie à l'un des facteurs de l'algèbre semi–simple $D \otimes_L L'$. Autrement dit encore, C' est l'un des facteurs de $C \otimes_L L'$ et on a

$$M'^{m'} \cong (M \otimes_L L') \otimes_{(C \otimes_L L')} C' = M \otimes_C C' .$$

Soient c un élément qui engendre C sur L, P son polynôme minimal sur L et P' le polynôme minimal sur L' de l'image de c dans C'. Ainsi, P' est un facteur de P dans l'anneau polynomial $L'[X]$.

Les coefficients de P' sont dans L' et algébriques sur L. Le sous–corps de L' qu'ils engendrent est fini sur L et c'est un corps de définition de $M'^{m'}$.

D'après (i), ceci prouve que le corps de rationalité $L(M') = L(M'^{m'})$ est fini sur L.

Il reste à prouver que $M'^{m'}$ est définie sur $L(M')$.

D'après ce qui précède, on peut supposer encore que L' est une extension finie galoisienne de L. Soit Σ son groupe de Galois sur $L(M')$. A tout $\sigma \in \Sigma$ est canoniquement associé un automorphisme σ–linéaire

$$M \otimes_L L' \xrightarrow{\overline{\sigma} = \mathrm{Id} \otimes \sigma} M \otimes_L L' .$$

L'image de la sous–représentation $M'^{m'}$ par $\overline{\sigma}$ est une sous–représentation qui a même homomorphisme trace associé. D'après la proposition 4 (iii), cette image est encore $M'^{m'}$. Ainsi, les automorphismes $\overline{\sigma}$ se restreignent à $M'^{m'}$ et ils vérifient

$$\overline{\sigma \circ \sigma'} = \overline{\sigma} \circ \overline{\sigma'} \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma .$$

Ils définissent donc une donnée de descente sur $M'^{m'}$, c'est–à–dire sur tous les $M'^{m'} e_I$. Comme ces derniers sont de dimension finie sur L', la donnée de descente est effective et la représentation $M'^{m'}$ est définie sur $L(M')$.

(iii) Notons $L_0 = L(M')$. D'après (ii), L_0 est une extension finie de L et il existe une représentation semi–simple M_0 de $\mathcal{A} \otimes_L L_0$ telle que $M_0 \otimes_{L_0} L' \cong M'^{m'}$.

$D_0 = \mathrm{End}_{\mathcal{A}\otimes_L L_0}(M_0)$ est une algèbre simple de dimension finie sur L_0. C'est une algèbre centrale simple sur son centre C_0, et si $D' = \mathrm{End}_{\mathcal{A}\otimes_L L'}(M')$, elle vérifie $D_0 \otimes_{L_0} L' \cong M_{m'}(D')$.

On voit que répond à la question toute extension finie de C_0 qui scinde l'algèbre centrale simple D_0, par exemple n'importe quel sous–corps maximal contenant C_0 de l'algèbre à division centrale associée à D_0. □

Prouvons encore (d'après par exemple [Waldspurger] lemme I.1) :

PROPOSITION 7. — *Dans les conditions de la définition* 5, *supposons que la représentation admissible M' de l'algèbre $\mathcal{A}\otimes_L L'$ est irréductible et qu'elle est e_I–non ramifiée pour un certain indice I c'est–à–dire que $M'e_I$ est de dimension* 1 *sur le corps L' ou encore* $\mathrm{Tr}_{M'}(e_I) = 1$.

Alors M' est absolument irréductible et elle est définie sur son corps de rationalité.

Démonstration : D'après la proposition 2 (iv), l'algèbre des endomorphismes de M' s'identifie à l'algèbre des endomorphismes de $M'e_I$, laquelle est nécessairement L' puisque $M'e_I$ est de dimension 1. D'après la proposition 2 (vi), M' est donc absolument irréductible comme annoncé.

Pour la seconde assertion, on peut supposer que L est le corps de rationalité de $M'e_I$ et que L' est galoisien sur L de groupe Σ.

Soit M_I un sous–espace non nul de $M'e_I$ et de dimension 1 sur le corps L. Pour tout élément f de $e_I\mathcal{A}e_I$, son action sur $M'e_I$ est la multiplication par le scalaire $\mathrm{Tr}_{M'}(f)$ qui est dans L, donc M_I est stable par cette action.

Soit maintenant $M = M_I\mathcal{A} \subseteq M'$. Il suffit de prouver que l'homomorphisme $M \otimes_L L' \to M'$ est un isomorphisme car alors M sera nécessairement admissible.

Comme M' est irréductible, l'homomorphisme $M \otimes_L L' \to M'$ qui est non nul est nécessairement surjectif. Reste à prouver qu'il est injectif. Raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe des éléments $m_1, \ldots, m_k$ de M, linéairement indépendants sur L et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in L'$, non tous nuls, tels que $m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k = 0$ dans M'.

On peut supposer que cette relation est de longueur minimale et aussi que par exemple $\lambda_2/\lambda_1 \notin L$ si bien qu'il existe $\sigma \in \Sigma$ vérifiant $\sigma(\lambda_2/\lambda_2) \neq \lambda_2/\lambda_1$. Comme L est le corps de rationalité de M', les deux représentations admissibles irréductibles M' et $\sigma(M') = M'\otimes_{L',\sigma} L'$ ont le même homomorphisme trace associé, donc sont isomorphes d'après la proposition 4 (iii).

Autrement dit, M' possède un automorphisme σ–linéaire. Bien sûr il préserve $M'e_I$ et quitte à le multiplier par un scalaire, on peut supposer qu'il fixe M_I et donc aussi M.

En prenant l'image par cet automorphisme de la relation

$$m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k = 0\,,$$

on obtient un nouvelle relation

$$m_1\sigma(\lambda_1) + \cdots + m_k\sigma(\lambda_k) = 0\,.$$

On peut la combiner à la précédente pour obtenir une relation non triviale et de longueur plus petite. Il y a contradiction. ∎

c) Représentations admissibles des produits tensoriels d'algèbres

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 8. — *Soient L un corps de caractéristique* 0, *$\mathcal{A}$ une L–algèbre, (e_I) une famille d'éléments idempotents de $\mathcal{A}$, vérifiant les propriétés de la définition* 1.

Une représentation admissible M de $\mathcal{A}$ sera dite isotypique si elle est isomorphe à une puissance d'une représentation admissible irréductible et elle sera dite absolument isotypique si pour tout corps L' contenant L la représentation $M \otimes_L L'$ de $\mathcal{A} \otimes_L L'$ est isotypique.

Alors, une représentation admissible semi-simple M de $\mathcal{A}$ est isotypique [resp. absolument isotypique] si et seulement si son algèbre des endomorphismes est une algèbre simple [resp. centrale simple] sur L.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 (v) et (vi) puisque la formation des algèbres d'endomorphismes commute aux changements de base.

$\square$

Dans la situation du lemme et pour toute représentation admissible absolument isotypique M de $\mathcal{A}$, on notera $d(M)$ l'unique entier ≥ 1 tel que $\dim_L(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)) = d(M)^2$.

Enonçons maintenant (d'après par exemple [Bourbaki] Chapitre 8) :

Proposition 9. — *Soient L un corps de caractéristique* 0, *$\mathcal{A}^1$ et $\mathcal{A}^2$ deux L–algèbres, (e^1_I) et (e^2_J) deux familles d'éléments idempotents de $\mathcal{A}^1$ et $\mathcal{A}^2$, vérifiant les propriétés de la définition* 1.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathcal{A}^1 \otimes_L \mathcal{A}^2$, munie de la famille d'idempotents $(e^1_I \otimes e^2_J)$.

Alors :

(i) *Si M_1 et M_2 sont deux représentations admissibles de $\mathcal{A}^1$ et $\mathcal{A}^2$, $M = M_1 \otimes_L M_2$ est une représentation admissible de $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 \otimes_L \mathcal{A}^2$.*

(ii) *Dans la situation de* (i) *et si M_1 et M_2 sont semi-simples, M est aussi semi-simple, et*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}^1}(M_1) \otimes_L \mathrm{End}_{\mathcal{A}^2}(M_2)\,.$$

(iii) *Dans la situation de* (i), *et si M_1 est absolument isotypique, on a les implications :*

- *M_2 isotypique $\Longrightarrow$ M isotypique,*
- *M_2 absolument isotypique $\Longrightarrow$ M absolument isotypique.*

(iv) *Dans la situation de* (i), *et si* M_1 *est absolument irréductible, on a les implications :*

- M_2 *irréductible* $\Longrightarrow$ M *irréductible,*
- M_2 *absolument irréductible* $\Longrightarrow$ M *absolument irréductible.*

(v) *Réciproquement, si* M *est une représentation admissible irréductible de* $\mathcal{A}$, *il existe deux représentations admissibles irréductibles* M_1 *et* M_2 *de* $\mathcal{A}^1$ *et* $\mathcal{A}^2$, *uniques à isomorphisme près, telles que* M *soit un quotient de la représentation admissible semi-simple* $M_1 \otimes_L M_2$ *de* $\mathcal{A}$.

(vi) *Dans la situation de* (v) *et si* M *est absolument isotypique,* M_1 *et* M_2 *sont aussi absolument isotypiques.*

De plus, $d(M)$ *divise le produit* $d(M_1)d(M_2)$ *et on a un isomorphisme*

$$M_1 \otimes_L M_2 \cong M^{\frac{d(M_1)d(M_2)}{d(M)}}\,.$$

Enfin, pour tous $f^1 \in \mathcal{A}^1$, $f^2 \in \mathcal{A}^2$, *on a*

$$\frac{1}{d(M)}\mathrm{Tr}_M(f^1 \otimes f^2) = \frac{1}{d(M_1)}\mathrm{Tr}_{M_1}(f^1)\frac{1}{d(M_2)}\mathrm{Tr}_{M_2}(f^2)\,.$$

(vii) *Dans la situation de* (v) *et si* L *est algébriquement clos, on a un isomorphisme*

$$M_1 \otimes_L M_2 \cong M\,.$$

Démonstration :

(i) résulte de ce que, pour tous indices I et J, on a un isomorphisme naturel

$$M(e_I^1 \otimes e_J^2) \cong (M_1 e_I^1) \otimes_L (M_2 e_J^2)\,.$$

(ii) Pour montrer que M est semi-simple, on peut supposer que M_1 et M_2 sont irréductibles. Notons $D_1 = \mathrm{End}_{\mathcal{A}^1}(M_1)$ et $D_2 = \mathrm{End}_{\mathcal{A}^2}(M_2)$ qui sont des algèbres à division de dimension finie sur L. On peut écrire

$$M_1 \otimes_L M_2 = M_1 \otimes_L (D_2 \otimes_{D_2} M_2) = (M_1 \otimes_L D_2) \otimes_{D_2} M_2$$

et tout sous-espace de $M_1 \otimes_L M_2$ stable par les actions de $\mathcal{A}^1$ et $\mathcal{A}^2$ est de la forme $N_1 \otimes_{D_2} M_2$ où N_1 est un sous-espace de $M_1 \otimes_L D_2$ stable par les actions de $\mathcal{A}^1$ et D_2.

De plus

$$M_1 \otimes_L D_2 = (D_1 \otimes_{D_1} M_1) \otimes_L D_2 = (D_1 \otimes_L D_2) \otimes_{D_1} M_1$$

et tout sous–espace N_1 de $M_1 \otimes_L D_2$ stable par les actions de $\mathcal{A}^1$ et D_2 est de la forme $N \otimes_{D_1} M_1$ où N est un sous–espace de $D_1 \otimes_L D_2$ stable par les actions de D_1 et D_2, autrement dit un idéal à droite de la L–algèbre $D_1 \otimes_L D_2$.

Or $D_1 \otimes_L D_2$ est une algèbre semi–simple puisque D_1 et D_2 le sont et que le corps L est de caractéristique 0, donc $M_1 \otimes_L M_2$ est une représentation semi–simple.

La seconde assertion, c'est–à–dire l'égalité

$$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}^1}(M_1) \otimes_L \mathrm{End}_{\mathcal{A}^2}(M_2)$$

est une conséquence immédiate de l'exactitude du foncteur $\cdot \otimes_L \cdot$ en chacune des deux variables.

(iii) résulte de (ii) et du lemme 8 puisque le produit tensoriel sur L d'une algèbre centrale simple et d'une algèbre simple [resp. de deux algèbres centrales simples] est une algèbre simple [resp. centrale simple].

(iv) est conséquence de (ii) et de la proposition 2 (vi).

(v) Il est immédiat que l'action à droite de $\mathcal{A}$ sur M correspond à deux actions à droite commutant entre elles de $\mathcal{A}^1$ et $\mathcal{A}^2$ sur M. Pour tout indice J, Me_J^2 vue comme représentation de $\mathcal{A}^1$ est admissible. Choisissons un J tel que $Me_J^2 \neq 0$, et soit M_1 une sous–représentation admissible irréductible non nulle de Me_J^2 sur $\mathcal{A}^1$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^1}(M_1, M)$ est une représentation de $\mathcal{A}^2$, automatiquement admissible, et non nulle par choix de M_1. Soit M_2 une sous–représentation admissible irréductible non nulle de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^1}(M_1, M)$ sur $\mathcal{A}^2$.

Sur $\mathcal{A}$, on dispose d'un homomorphisme

$$M_1 \otimes_L M_2 \longrightarrow M$$

qui est non nul, donc surjectif puisque M est irréductible.

Ceci prouve l'existence de M_1 et M_2.

Leur unicité à isomorphisme près résulte de ce que pour tout indice J[resp. I], la représentation admissible $M_1 \otimes_L M_2 e_J^2$ de $\mathcal{A}^1$ [resp. $M_1 e_I^1 \otimes_L M_2$ de $\mathcal{A}^2$] est isotypique de type M_1 [resp. M_2], donc aussi Me_J^2 [resp. Me_I^1].

(vi) Notons C, C_1 et C_2 les centres des algèbres $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}^1}(M_1)$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{A}^2}(M_2)$. D'après (ii) et (v), C est un quotient de $C_1 \otimes_L C_2$. Par conséquent, l'égalité $L = C$ implique $L = C_1$ et $L = C_2$. D'après le lemme 8, ceci signifie que si M est absolument isotypique, M_1 et M_2 le sont.

Mais alors, d'après (iii), $M_1 \otimes_L M_2$ est aussi absolument isotypique, donc isomorphe à une puissance de M. Et l'exposant est nécessairement

$\frac{d(M_1)d(M_2)}{d(M)}$ puisque $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ est de dimension $d(M)^2$ sur L et $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M_1 \otimes_L M_2) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}^1}(M_1) \otimes_L \mathrm{End}_{\mathcal{A}^2}(M_2)$ est de dimension $d(M_1)^2$ $d(M_2)^2$ sur L.

Enfin, la dernière assertion est conséquence de l'existence d'un isomorphisme $M_1 \otimes_L M_2 \cong M^{\frac{d(M_1)d(M_2)}{d(M)}}$ puisque, pour tous $f^1 \in \mathcal{A}^1$, $f^2 \in \mathcal{A}^2$, on a

$$\mathrm{Tr}_{M_1 \otimes_L M_2}(f^1 \otimes f^2) = \mathrm{Tr}_{M_1}(f^1)\mathrm{Tr}_{M_2}(f^2)\,.$$

(vii) résulte de (v) et (vi) car alors M, M_1 et M_2 sont absolument irréductibles, donc absolument isotypiques avec

$$d(M) = 1 \quad d(M_1) = 1 \quad d(M_2) = 1\,.$$

$\square$

COROLLAIRE 10. — *Soient L un corps et Y un ensemble.*

Pour tout $y \in Y$, soit $\mathcal{A}^y$ une L-algèbre, munie d'une famille $(e_I^y)_{I \in \mathcal{I}^y}$ d'idempotents comme dans la définition 1, *et parmi ceux-ci distinguons un idempotent particulier $e_\emptyset^y$.*

Pour tout sous-ensemble fini Y_1 de Y, notons $\mathcal{A}^{Y_1}$ la L-algèbre $\bigotimes_{y \in Y_1} \mathcal{A}^y$, munie de la famille d'idempotents $(e_I^{Y_1})$ indexée par $\prod_{y \in Y_1} \mathcal{I}^y = \mathcal{I}^{Y_1}$, avec un élément distingué $e_\emptyset^{Y_1}$.

Pour tous sous-ensembles finis Y_1, Y_2 de Y avec $Y_1 \subseteq Y_2$, soit $\mathcal{A}^{Y_1} \hookrightarrow \mathcal{A}^{Y_2}$ l'inclusion définie par

$$f \longmapsto f \otimes \left(\bigotimes_{y \in Y_2 \setminus Y_1} e_\emptyset^y \right) = f \otimes e_\emptyset^{Y_2 \setminus Y_1}\,.$$

Enfin, pour tout sous-ensemble (infini) Y_1 de Y, notons $\mathcal{A}^{Y_1}$ la L-algèbre

$$\varinjlim_{Y_2} \mathcal{A}^{Y_2}$$

où Y_2 parcourt l'ensemble inductif des sous-ensembles finis de Y contenus dans Y_1. Munissons $\mathcal{A}^{Y_1}$ de la famille évidente $(e_I^{Y_1})$ d'idempotents indexée par $\varinjlim_{Y_2} \mathcal{I}^{Y_2}$ ou, si l'on préfère, par le sous-ensemble $\mathcal{I}^{Y_1}$ de $\prod_{y \in Y_1} \mathcal{I}^y$ constitué des familles dont tous les éléments sauf un nombre fini sont égaux à $\emptyset$.

Cette famille a un élément distingué $e_\emptyset^{Y_1}$.

Alors :

(i) *Si* $Y' = Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_n$ *est une réunion disjointe de parties de* Y, *il lui est associé un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{A}^{Y'} \cong \mathcal{A}^{Y_1} \otimes_L \cdots \otimes_L \mathcal{A}^{Y_n} .$$

(ii) *Si* M *est une représentation admissible irréductible de* $\mathcal{A}^Y$, *pour toute partie* Y' *de* Y, *il existe deux représentations admissibles irréductibles* $M^{Y'}$ *et* $M^{Y \setminus Y'}$ *de* $\mathcal{A}^{Y'}$ *et* $\mathcal{A}^{Y\setminus Y'}$, *uniques à isomorphisme près, telles que* M *soit un quotient de* $M^{Y'} \otimes_L M^{Y \setminus Y'}$.

(iii) *Dans les conditions de* (ii) *et si* $Y' = Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_n$ *est une réunion disjointe de parties de* Y, $M^{Y'}$ *est un quotient de* $M^{Y_1} \otimes_L M^{Y_2} \otimes_L \cdots \otimes_L M^{Y_n}$.

(iv) *Dans les conditions de* (ii) *et si* M *est absolument isotypique, tous les* $M^{Y'}$ *sont absolument isotypiques.*

De plus, si $Y' = Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_n$ *est une réunion disjointe de parties de* Y, $d(M^{Y'})$ *divise* $d(M^{Y_1})d(M^{Y_2}) \cdots d(M^{Y_n})$, *et il existe un isomorphisme*

$$M^{Y_1} \otimes_L M^{Y_2} \otimes_L \cdots \otimes_L M^{Y_n} \cong (M^{Y'})^{\frac{d(M^{Y_1}) \cdots d(M^{Y_n})}{d(M^{Y'})}} .$$

Et pour tous $f^{Y_1} \in \mathcal{A}^{Y_1}$, $f^{Y_2} \in \mathcal{A}^{Y_2}, \ldots, f^{Y_n} \in \mathcal{A}^{Y_n}$, *on a*

$$\frac{1}{d(M^{Y'})} \mathrm{Tr}_{M^{Y'}} (f^{Y_1} \otimes f^{Y_2} \otimes \cdots \otimes f^{Y_n}) =$$
$$\frac{1}{d(M^{Y_1})} \mathrm{Tr}_{M^{Y_1}} (f^{Y_1}) \cdots \frac{1}{d(M^{Y_n})} \mathrm{Tr}_{M^{Y_n}} (f^{Y_n}) .$$

(v) *Dans les conditions de* (iv), *il existe un sous-ensemble fini* $\overline{Y}$ *de* Y *tel que pour toute partie* Y' *de* Y *ne rencontrant pas* $\overline{Y}$, *la représentation* $M^{Y'}$ *soit* $e_\emptyset^{Y'}$*–non ramifiée et absolument irréductible (c'est-à-dire absolument isotypique avec* $d(M^{Y'}) = 1$*).*

Démonstration :

(i) résulte de ce que le produit tensoriel commute aux limites inductives.

(ii) a été montré dans la proposition 9 (v).

(iii) D'après la proposition 9 (v), il existe certainement des représentations admissibles irréductibles $N^{Y_1}, \ldots, N^{Y_n}$ de $\mathcal{A}^{Y_1}, \ldots, \mathcal{A}^{Y_n}$ telles que $M^{Y'}$ soit un quotient de $N^{Y_1} \otimes_L \cdots \otimes_L N^{Y_n}$.

Alors, pour $1 \leq i \leq n$, M est un quotient de

$$N^{Y_i} \otimes_L (N^{Y_1} \otimes_L \cdots \otimes_L N^{Y_{i-1}} \otimes_L N^{Y_{i+1}} \otimes_L \cdots \otimes_L N^{Y_n} \otimes M^{Y \setminus Y'}) ,$$

donc d'un $N^{Y_i} \otimes N^{Y \setminus Y_i}$ où $N^{Y \setminus Y_i}$ est une représentation admissible irréductible de $\mathcal{A}^{Y \setminus Y_i}$.

Toujours d'après la proposition 9 (v), cela impose $N^{Y_i} = M^{Y_i}$ comme on voulait.

(iv) résulte par itération de la proposition 9 (vi) compte tenu de (iii).

(v) D'après la proposition 7, il suffit de considérer le cas où le corps L est algébriquement clos.

Alors, pour toute réunion disjointe $Y' = Y_1 \coprod \cdots \coprod Y_n$ de parties de Y, on a un isomorphisme

$$M^{Y'} \cong M^{Y_1} \otimes_L \cdots \otimes_L M^{Y_n} \,,$$

comme il résulte de la proposition 9 (vii).

Soit $I_0 \in \mathcal{I}^Y$ un indice tel que $Me_{I_0}^Y \neq 0$, autrement dit tel que $\mathrm{Tr}_M(e_{I_0}^Y)$ soit un entier non nul. Il existe un sous–ensemble fini $\overline{Y}_0$ de Y tel que la composante de $I_0 \in \mathcal{I}^Y = \mathcal{I}^{\overline{Y}_0} \times \mathcal{I}^{Y \setminus \overline{Y}_0}$ dans $\mathcal{I}^{Y \setminus \overline{Y}_0}$ soit l'élément distingué $\emptyset$.

Si donc $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des parties disjointes de $Y \setminus \overline{Y}_0$, le produit $\mathrm{Tr}_{M^{Y_1}}(e_\emptyset^{Y_1}) \cdots \mathrm{Tr}_{M^{Y_n}}(e_\emptyset^{Y_n})$ est un facteur de $\mathrm{Tr}_M(e_{I_0}^Y)$ dans $\mathbb{N}$.

Par conséquent, il existe une partie finie $\overline{Y} \supseteq \overline{Y}_0$ de Y telle que pour toute partie finie Y' de Y évitant $\overline{Y}$, la représentation $M^{Y'}$ soit $e_\emptyset^{Y'}$–non ramifiée.

Enfin, cette propriété est encore vraie lorsqu'on abandonne la condition de finitude de $Y' \subseteq Y \setminus \overline{Y}$ car le choix d'un élément non nul $m^{Y_1} \in M^{Y \setminus Y_1} e_\emptyset^{Y \setminus Y_1}$ pour toute partie finie $Y_1 \supseteq \overline{Y}$ de Y détermine un homomorphisme

$$\varinjlim_{Y_1} M^{Y_1} \longrightarrow M^Y$$

non nul donc surjectif. $\square$

4. — Calcul des traces. Applications

a) Formules des traces

On rappelle que a est un élément fixé de degré 1 dans $\mathbb{A}^\times$ dont toutes les composantes dans les F_x valent 1 en–dehors d'un ensemble fini T_a de places x de F.

Et on a supposé que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre partout maximale sur X.

On utilise les notations du paragraphe I.4b avec $r = 1$. Ainsi

$$G(F) = D^{\times}$$

$$G(F_x) = D_x^{\times} \text{ pour toute place } x \text{ de } F$$

$$G(\mathbb{A}) = D_{\mathbb{A}}^{\times}$$

$$K_x = \mathcal{D}_x^{\times} \text{ pour toute place } x \text{ de } F$$

$$K = \mathcal{D}_{\mathbb{A}}^{\times} = \prod_{x \in |X|} K_x\,;$$

dg [resp. dg_x pour x une place de F] désigne la mesure de Haar sur le groupe localement compact unimodulaire $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(F_x)$] qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact K [resp. K_x].

Par ailleurs, si T est un ensemble fini de places de F, on note $G(\mathbb{A}_T) = \prod_{x \in T} G(F_x)$, $K_T = \prod_{x \in T} K_x$ et $dg_T = \prod_{x \in T} dg_x$.

On note $\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}_x$ si x est une place de F, resp. $\mathcal{H}_T$ si T est un ensemble fini de places de F] la $\mathbb{Q}$-algèbre de Hecke du groupe $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(F_x)$, resp. $G(\mathbb{A}_T)$], c'est-à-dire l'algèbre de convolution, pour la mesure dg [resp. dg_x, resp. dg_T] des fonctions localement constantes à support compact de $G(\mathbb{A})$ [resp. $G(F_x)$, resp. $G(\mathbb{A}_T)$] dans $\mathbb{Q}$.

De plus, si $I \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé fini [resp. et supporté par x, resp. et supporté par T], on note K_I [resp. $K_{x,I}$, resp. $K_{T,I}$] le sous-groupe ouvert compact

$$K_I = \mathrm{Ker}[K \longrightarrow \mathcal{D}_I^{\times}]$$

$$[\text{resp. } K_{x,I} = \mathrm{Ker}[K_x \longrightarrow \mathcal{D}_I^{\times}]\ ,$$

$$\text{resp. } K_{T,I} = \mathrm{Ker}[K_T \longrightarrow \mathcal{D}_I^{\times}]]\,.$$

On note $\mathcal{H}_I$ [resp. $\mathcal{H}_{x,I}$, resp. $\mathcal{H}_{T,I}$] la sous-algèbre de $\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}_x$, resp. $\mathcal{H}_T$] des fonctions invariantes à droite et à gauche par K_I [resp. $K_{x,I}$, resp. $K_{T,I}$] et on note f_I [resp. $f_{x,I}$, resp. $f_{T,I}$] la fonction caractéristique de K_I [resp. $K_{x,I}$, resp. $K_{T,I}$] fois la constante $\frac{1}{dg(K_I)}$ [resp. $\frac{1}{dg_x(K_{x,I})}$, resp. $\frac{1}{dg_T(K_{T,I})}$].

Commençons par le résultat suivant :

Proposition 1. —

(i) *Dans la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{H}_x$ pour x une place de F, resp. $\mathcal{H}_T$ pour T un ensemble fini de places de F], les éléments f_I [resp. $f_{x,I}$, resp. $f_{T,I}$] constituent une famille d'idempotents qui vérifie les hypothèses de la définition* 1 *du précédent paragraphe.*

Et pour tout I, on a

$$f_I \mathcal{H} f_I = \mathcal{H}_I \quad [\mathit{resp.}\ f_{x,I}\mathcal{H}_x f_{x,I} = \mathcal{H}_{x,I}, \mathit{resp.}\ f_{T,I}\mathcal{H}_T f_{T,I} = \mathcal{H}_{T,I}] .$$

(ii) *Si dans chaque famille $(f_{x,I})_I$ [resp. $(f_{T,I})_I$], on distingue l'élément $f_{x,\emptyset}$ [resp. $f_{T,\emptyset}$] qui est la fonction caractéristique du sous-groupe K_x [resp. K_T], alors la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathcal{H}$ est le produit de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathcal{H}_T$ et des $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathcal{H}_x$, $x \notin T$, au sens du corollaire* 10 *du précédent paragraphe.*

(iii) *Si* Aut *désigne le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des fonctions localement constantes (à support compact) de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{Q}$, muni de l'action à droite par convolution de $\mathcal{H}$, alors* Aut *est une représentation admissible de $\mathcal{H}$.*

(iv) *Pour tout élément $f \in \mathcal{H}$, l'opérateur induit par f dans* Aut *possède un noyau localement constant sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \times G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ qui est*

$$(h,g) \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(a^n g^{-1} \gamma h) .$$

Et sa trace est donnée par la formule de Selberg

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Aut}}(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(a^n g^{-1} \gamma g) .$$

Ou encore, si γ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison de $G(F)$ et si pour tout tel γ $G(F)_\gamma$ désigne son commutateur dans $G(F)$, on a

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Aut}}(f) = \sum_{\gamma} \int_{G(F)_\gamma \backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(a^n g^{-1} \gamma g) .$$

Démonstration :

(i) et (ii) sont évidents.

(iii) Comme on a déjà vu dans le lemme 5 (ii) du paragraphe III.6, l'espace homogène $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ est compact.

Ainsi, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$, l'ensemble $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_I a^{\mathbb{Z}}$ est fini et donc le sous-espace $\mathrm{Aut}\, f_I$ de Aut qui est constitué des fonctions invariantes à droite par K_I est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

(iv) Pour toute fonction $m \in$ Aut, calculons son image mf par l'action à droite par convolution de $f \in \mathcal{H}$.

Pour tout $h \in G(\mathbb{A})$, on a

$$\begin{aligned}(mf)(h) &= \int_{G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} m(g) \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a^n g^{-1} h) \cdot dg \\ &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} m(\gamma^{-1} g) \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a^n g^{-1}\gamma h) \\ &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot m(g) \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a^n g^{-1}\gamma h)\ .\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur induit par f possède un noyau localement constant qui est

$$(h, g) \mapsto \sum_{\gamma\in G(F)} f(a^n g^{-1}\gamma h)\ .$$

Sa trace se calcule en intégrant ce noyau le long de la diagonale, ce qui donne la première formule.

La seconde s'en déduit en regroupant par classes de conjugaison les éléments $\gamma \in G(F)$. $\square$

A partir de maintenant, on fixe F_s une clôture séparable du corps F et on note Γ_F le groupe de Galois de F_s sur F.

Pour tout entier n, on note $H^n_{\mathcal{D}}$ la fibre au-dessus du point Spec $F_s \times$ Spec F_s de la représentation $H^{\emptyset,n}_{\mathcal{D}}$ du groupoïde produit $\pi(X'_{(\emptyset)}) \times \pi(X'_{(\emptyset)}) = \pi(\mathrm{Spec}\ F) \times \pi(\mathrm{Spec}\ F)$ dans la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels, définie dans la proposition 8 du paragraphe IV.2.

Ainsi, chaque $H^n_{\mathcal{D}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_\ell$, muni d'une action continue du groupe $\Gamma_F \times \Gamma_F$, c'est-à-dire de deux actions continues de Γ_F qui commutent.

De plus, d'après la proposition 8 (ii) du paragraphe IV.2, chaque $H^n_{\mathcal{D}}$ est muni d'une action à droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$, commutant à l'action de $\Gamma_F \times \Gamma_F$, et comme tel, c'est une représentation admissible.

Autrement dit, et en notant $\mathcal{A}_{F,\ell}$ l'algèbre des fonctions à support fini du groupe Γ_F dans $\mathbb{Q}_\ell$, chaque $H^n_{\mathcal{D}}$ est une représentation admissible de $(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}$.

D'après la proposition 2 (i) du paragraphe IV.2, les $H^n_{\mathcal{D}}$ sont nuls en dehors de $0 \leq n \leq 4(d-1)$. On notera $H^*_{\mathcal{D}}$ la somme alternée de classes

$$H^*_{\mathcal{D}} = \sum_{0 \leq n \leq 4(d-1)} (-1)^n [H^n_{\mathcal{D}}]$$

dans le groupe de Grothendieck admissible

$$K_{ad}((\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \ .$$

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 2. — *Soit f un élément de $\mathcal{H}$.*

Soient 0 et ∞ deux places de F, distinctes, qui sont dans X', qui ne sont pas dans T_a et telles que, correspondant à l'écriture $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\infty \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^{\infty,0} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_0$, f se mette sous la forme

$$f = f_{\infty,\emptyset} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_{0,\emptyset}$$

où $f^{\infty,0} \in \mathcal{H}^{\infty,0}$ et $f_{0,\emptyset}$, $f_{\infty,\emptyset}$ sont les éléments idempotents distingués de $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_\infty$ c'est-à-dire les fonctions caractéristiques des sous-groupes ouverts compacts maximaux K_0 et K_∞ de $G(F_0)$ et $G(F_\infty)$ respectivement.

Soit τ_0 [resp. τ_∞] un élément de Frobenius en 0 [resp. en ∞] c'est-à-dire un élément du sous-groupe de décomposition de 0 [resp. de ∞] dans Γ_F qui induit l'automorphisme $\mathrm{Frob}^{\deg(0)}$ *[resp.* $\mathrm{Frob}^{\deg(\infty)}$*] sur la clôture algébrique de $\kappa(0)$ [resp. de $\kappa(\infty)$].*

Soient $u, s \geq 1$ deux entiers.

Soit $f_0^u \in \mathcal{H}_0$ [resp. $f_\infty^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$] la fonction de Drinfeld en rang d et de niveau u [resp. de niveau $-s$] sur $G(F_0) \cong \mathrm{GL}_d(F_0)$ [resp. $G(F_\infty) \cong \mathrm{GL}_d(F_\infty)$] comme dans la définition 7 du paragraphe III.6c.

Alors on a l'égalité

$$\mathrm{Tr}_{H^*_{\mathcal{D}}}(f \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Aut}}(f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u)$$

dans le corps $\mathbb{Q}$.

Démonstration :
Par définition de la trace, on a

$$\mathrm{Tr}_{H^*_{\mathcal{D}}}(f \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) = \sum_n (-1)^n \mathrm{Tr}_{H^n_{\mathcal{D}}}(f \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) \ .$$

D'après le lemme 7 (iii) du paragraphe IV.2 et le fait que $f = f_{\infty,\emptyset} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_{0,\emptyset}$, on voit que les homomorphismes de faisceaux $H^{T,n}_{\mathcal{D}} \to H^{\emptyset,n}_{\mathcal{D}}$

avec $T = \{\infty, 0\}$ induisent un isomorphisme de l'image de l'opérateur induit par $f^{\infty,0} \in \mathcal{H}^{\infty,0} = \mathcal{H}^T$ dans $H_{\mathcal{D}}^{T,n}$ sur l'image de l'opérateur induit par $f \in \mathcal{H}$ dans $H_{\mathcal{D}}^{\emptyset,n}$.

Or le faisceau $H_{\mathcal{D}}^{T,n}$ se prolonge sur $X'_{(T)} \times X'_{(T)}$ et d'après la proposition 8 du paragraphe IV.2, l'action de $\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}$ ne dépend que de son image dans $\pi(X'_{(T)}) \times \pi(X'_{(T)})$ et a fortiori de son image dans $\pi(X'_{(0)}) \times \pi(X'_{(\infty)})$.

Ainsi chaque $\mathrm{Tr}_{H_{\mathcal{D}}^n}(f \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s})$ est égal à la trace de l'opérateur induit par $f^{\infty,0} \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}$ sur n'importe quelle fibre du faisceau $H_{\mathcal{D}}^{T,n}$ au-dessus de $X'_{(0)} \times X'_{(\infty)}$.

Considérons donc la fibre au-dessus de $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q$, pour $\overline{0} : \kappa(0) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$ et $\overline{\infty} : \kappa(\infty) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$ deux points de $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de 0 et ∞.

D'après l'hypothèse sur τ_0 et τ_∞, leurs actions sur cette fibre sont celles des automorphismes de Frobenius arithmétiques $\mathrm{Frob}^{\deg(0)}$ et $\mathrm{Frob}^{\deg(\infty)}$ de $\overline{\mathbb{F}}_q$. Elles sont inverses des actions des morphismes de Frobenius géométriques correspondants c'est-à-dire de $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$ et $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ d'après le théorème 4 et la proposition 2 (ii) du paragraphe IV.2.

Ainsi, chaque $\mathrm{Tr}_{H_{\mathcal{D}}^n}(f \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s})$ est égal à la trace de l'opérateur induit par $f^{\infty,0} \times \mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u} \times \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s}$ sur la fibre de $H_{\mathcal{D}}^{T,n}$ au-dessus de $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q$.

Maintenant, il existe certainement un sous-schéma fermé fini non vide $I \hookrightarrow X \backslash \{\infty, 0\}$ tel que $f^{\infty,0} \in \mathcal{H}_I^{\infty,0}$, c'est-à-dire tel que $f^{\infty,0}$ s'écrive comme une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de classes bilatères $K_I^{\infty,0} g K_I^{\infty,0}$ d'éléments $g \in G(\mathbb{A}^{\infty,0})$.

D'après le théorème 1 (ii) du paragraphe IV.1 et comme I est non vide, le champ $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^1 / a^{\mathbb{Z}}$ est représentable projectif et lisse au-dessus de $\overline{\mathbb{F}}_q$.

De plus, d'après la proposition 6 du paragraphe I.4, la correspondance inverse de celle associée au morphisme $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)u} \circ \mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)s}$ coupe transversalement toutes les correspondances $\Gamma_{\mathcal{D},I}^1(g)$ dans le champ $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}^1 / a^{\mathbb{Z}}$ au-dessus de $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q$.

On est donc en position d'appliquer le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz, et avec les notations de la proposition 4 (ii) du paragraphe III.5 (en omettant les troncatures qui ici sont triviales puisqu'on est en rang $r = 1$), on obtient

$$\mathrm{Tr}_{H_{\mathcal{D}}^*}(f \times \tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) = \mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^1(f^{\infty,0}; \deg(0)u; \deg(\infty)s) \ .$$

Or, d'après la proposition 2 et la proposition 11 du paragraphe III.6 et le fait que tout élément de $G(F) = D^\times$ est elliptique, on sait

$$\operatorname{Lef}^1_{\mathcal{D}}(f^{\infty,0};\deg(0)u;\deg(\infty)s) =$$
$$\sum_{\gamma}\int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f_\infty^{-s}\otimes f^{\infty,0}\otimes f_0^u)(a^n g^{-1}\gamma g)\cdot dg$$

où γ décrit un ensemble de représentants des classes de conjugaison de $G(F)$ et, pour tout tel γ, $G(F)_\gamma$ désigne son commutateur dans $G(F)$.

On conclut d'après la proposition 1 (iv) ci-dessus. □

b) Représentations automorphes

Définition 3. — *Pour L un corps de caractéristique* 0*, on appelle facteur L-automorphe de $\mathcal{H}$ toute représentation admissible irréductible et absolument isotypique Π de $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Q}} L$ telle que soit non nul le coefficient correspondant $m(\Pi)$ de la classe $[\mathrm{Aut}\otimes_{\mathbb{Q}}L]$ dans le groupe $K_{\mathrm{ad}}(\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Q}} L)$.*

Remarque : Si Π est une représentation admissible irréductible de $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Q}} L$, il est équivalent de demander que $m(\Pi)$ soit non nul ou bien que Π puisse s'écrire comme un sous-quotient de la représentation admissible $\mathrm{Aut}\otimes_{\mathbb{Q}}L$. Lorsque $L=\mathbb{C}$, la définition ci-dessus coïncide donc avec la définition usuelle.

Proposition 4. — *Pour L un corps de caractéristique* 0 *et Π un facteur L-automorphe de $\mathcal{H}$, on a :*

(i) *Le corps de rationalité $\mathbb{Q}(\Pi)$ de Π est une extension finie de $\mathbb{Q}$. C'est le plus petit corps de définition de $\Pi^{m(\Pi)}$.*

(ii) *Il existe une extension finie de $\mathbb{Q}(\Pi)$ et donc de $\mathbb{Q}$ qui soit un corps de définition de Π.*

(iii) *Si, pour toute place $x\in|X|$, Π_x désigne la représentation admissible irréductible absolument isotypique de $\mathcal{H}_x\otimes_{\mathbb{Q}} L$ qui est associée à Π d'après le corollaire* 10 (iv) *du paragraphe* IV.3 *et la proposition* 1 (ii)*, alors pour toutes ces places x sauf un nombre fini, Π_x est $f_{x,\emptyset}$ − non ramifiée. Elle est absolument irréductible et définie sur son corps de rationalité, lequel est contenu dans $\mathbb{Q}(\Pi)$.*

De plus, on a :

(iv) *Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de facteurs L-automorphes Π de $\mathcal{H}$ et l'ensemble des couples (E,Π_E) avec E un sous-corps de L qui est fini sur $\mathbb{Q}$ et Π_E une classe d'isomorphismes de facteurs E-automorphes dont le corps de rationalité est E tout entier. Si Π et (E,Π_E) se correspondent, on a*

$$m(\Pi)d(\Pi)=m(\Pi_E)d(\Pi_E)\quad d(\Pi)|d(\Pi_E)\quad m(\Pi_E)|m(\Pi)$$

et

$$\mathbb{Q}(\Pi) = E \quad \Pi_E \otimes_E L \cong \Pi^{d(\Pi_E)/d(\Pi)} \ .$$

Démonstration :

(i) et (ii) résultent de la proposition 6 du paragraphe IV.3.

(iii) D'après le corollaire 10 (v) du paragraphe IV.3, pour toutes les places x sauf un nombre fini, Π_x est $f_{x,\emptyset}$-non ramifiée. Cela entraîne qu'elle est absolument irréductible et définie sur son corps de rationalité d'après la proposition 7 du paragraphe IV.3. Enfin, l'inclusion $\mathbb{Q}(\Pi_x) \subseteq \mathbb{Q}(\Pi)$ résulte du corollaire 10 (iv) du paragraphe IV.3.

(iv) Soit Π un facteur L-automorphe de $\mathcal{H}$. Posons $E = \mathbb{Q}(\Pi)$ qui est un sous-corps de L et qui est fini sur $\mathbb{Q}$ d'après (i). Toujours d'après (i), la représentation $\Pi^{m(\Pi)}$ est définie sur E. Comme telle, elle est absolument isotypique donc de la forme Π_E^n, où Π_E est une représentation admissible absolument isotypique et irréductible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} E$. Nécessairement Π_E est un facteur E-automorphe de $\mathcal{H}$ et $n = m(\Pi_E)$. De l'isomorphisme $\Pi^{m(\Pi)} \cong \Pi_E^{m(\Pi_E)}$ résulte alors la formule $m(\Pi)d(\Pi) = m(\Pi_E)d(\Pi_E)$.

Réciproquement, supposons donné (E, Π_E). Comme Π_E est absolument isotypique, $\Pi_E \otimes_E L$ l'est aussi ; elle est donc de la forme $\Pi_E \otimes_E L \cong \Pi^{n'}$ où Π est une représentation admissible absolument isotypique et irréductible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$, avec nécessairement $d(\Pi_E) = n'd(\Pi)$ si bien que $d(\Pi)$ divise $d(\Pi_E)$. Et Π est un facteur L-automorphe de $\mathcal{H}$.

Ces deux applications sont évidemment inverses l'une de l'autre, ce qui termine la démonstration. $\square$

Citons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 5 (Satake). — *Soient K un corps local non-archimédien, O son anneau de valuation, κ son corps résiduel de cardinal fini $\#\kappa$ et ϖ un élément uniformisant.*

Soient $n \geq 1$ un entier, H le groupe unimodulaire $\mathrm{GL}_n(K)$, muni de la mesure de Haar sur H qui attribue le volume 1 au sous-groupe compact ouvert maximal $H_0 = \mathrm{GL}_n(O)$.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de H dans $\mathbb{Q}$.

Et pour tout entier $i \geq 0$, soit $a_i \in \mathcal{A}$ la fonction caractéristique du sous-groupe ouvert compact $H_i = \mathrm{Ker}[H_0 \to \mathrm{GL}_n(O/\varpi^i)]$ multipliée par la constante $[H_0 : H_i]$.

On a :

(i) *Les éléments a_i, $i \geq 0$, constituent une famille d'idempotents de $\mathcal{A}$ qui vérifie les hypothèses de la définition 1 du paragraphe* IV.3.

(ii) *La sous-algèbre* $a_0\mathcal{A}a_0$ *de* $\mathcal{A}$ *est commutative et de type fini sur* $\mathbb{Q}$.

(iii) *Si* L *est un corps de caractéristique* 0 *et* M *est une représentation admissible absolument irréductible de* $\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{Q}}L$ *telle que* $Ma_0 \neq 0$, *alors* Ma_0 *est de dimension* 1 *sur* L, *autrement dit* M *est* a_0*-non ramifiée.*

(iv) *Sous les hypothèses de* (iii), *il existe un unique polynôme à coefficients dans* L, *unitaire et de degré* n *et dont les racines* $\{z_1(M), \ldots, z_n(M)\}$ *dans n'importe quelle clôture algébrique de* L *sont non nulles et telles que les fonctions de Drinfeld en rang* n *et de niveau* t, $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $f^t \in \mathcal{A}$, *introduites dans la définition* 7 *du paragraphe* III.6c, *vérifient*

$$\mathrm{Tr}_M(f^t) = \begin{cases} z_1(M)^t + \cdots + z_n(M)^t & si \quad t \geq 1 \\ \left(\frac{z_1(M)}{(\#\kappa)^{n-1}}\right)^t + \cdots + \left(\frac{z_n(M)}{(\#\kappa)^{n-1}}\right)^t & si \quad t \leq -1 \,. \end{cases}$$

Ce polynôme caractérise la représentation M.

Démonstration :

(i) est évident.

(ii) résulte de l'isomorphisme de Satake, cf. [Laumon] théorème 4.1.17.

(iii) D'après la proposition 2 (iii) du paragraphe IV.3, Ma_0 doit être une représentation absolument irréductible de l'algèbre $a_0\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{Q}}La_0$ dès lors que M est absolument irréductible et $Ma_0 \neq 0$. Mais comme cette algèbre est commutative d'après (ii), Ma_0 est nécessairement de dimension 1 sur L.

(iv) Lorsque $L = \mathbb{C}$, c'est le contenu de [Laumon] théorèmes 7.5.4 et 7.5.6. De plus, et si P désigne alors le polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des racines est $\{z_1(M), \ldots, z_n(M)\}$, les coefficients de P sont des fonctions symétriques de ces racines, donc des expressions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$ en les nombres $z_1(M)^t + \cdots + z_n(M)^t = \mathrm{Tr}_M(f^t), t \geq 1$. Ainsi, ces coefficients sont dans le corps de rationalité de M.

Ceci prouve le résultat lorsqu'il existe un plongement de L dans $\mathbb{C}$. Reste à voir qu'on peut se ramener à ce cas.

D'après la proposition 7 du paragraphe IV.3, M est définie sur son corps de rationalité, donc on peut supposer que $L = \mathbb{Q}(M)$. D'après la proposition 6 (i) du paragraphe IV.3, L est alors aussi le corps de rationalité de Ma_0. Comme l'algèbre $a_0\mathcal{A}a_0$ est de type fini sur $\mathbb{Q}$ d'après (ii) et comme l'homomorphisme de trace sur Ma_0 est un homomorphisme d'algèbres de $a_0\mathcal{A}a_0$ dans L puisque Ma_0 est de dimension 1, on voit que le corps L est engendré sur $\mathbb{Q}$ par un nombre fini d'éléments.

Il peut donc se plonger dans $\mathbb{C}$, comme on voulait. $\square$

Enfin, prouvons :

PROPOSITION 6. — *Soit Π un facteur $\mathbb{C}$-automorphe de $\mathcal{H}$.*

(i) *Si f est un élément de $\mathcal{H}$ et f^- désigne la fonction élément de $\mathcal{H}$ définie par $f^-(g) = f(g^{-1})$, $\forall g \in G(\mathbb{A})$, alors les deux nombres complexes*

$$\mathrm{Tr}_{\Pi}(f) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Tr}_{\Pi}(f^-)$$

sont conjugués.

(ii) *Pour tout point fermé x de X' tel que le facteur Π_x de Π correspondant au facteur $\mathcal{H}_x$ de $\mathcal{H}$ soit $f_{x,\emptyset}$-non ramifié, le uplet de nombres complexes $z_1(\Pi_x), \ldots, z_d(\Pi_x)$ associé à Π_x d'après le théorème 5 (iv) est tel que les deux uplets $\dfrac{q^{\deg(x)(d-1)}}{z_1(\Pi_x)}, \ldots, \dfrac{q^{\deg(x)(d-1)}}{z_d(\Pi_x)}$ et $\overline{z_1(\Pi_x)}, \ldots, \overline{z_d(\Pi_x)}$ sont égaux à permutation près.*

Démonstration :

(i) Soit $I \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini tel que, f_I désignant l'élément idempotent correspondant de $\mathcal{H}$, on ait $f \in f_I \mathcal{H} f_I$ d'où aussi $f^- \in f_I \mathcal{H} f_I$ et

$$\mathrm{Tr}_{\Pi}(f) = \mathrm{Tr}_{\Pi f_I}(f) \quad \mathrm{Tr}_{\Pi}(f^-) = \mathrm{Tr}_{\Pi f_I}(f^-) \ .$$

Maintenant, Πf_I est un sous-quotient de la représentation de dimension finie sur $\mathbb{C}$ $\mathrm{Aut}\, f_I \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ et il suffit de prouver que pour toute sous-représentation M de $\mathrm{Aut}\, f_I \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Tr}_M(f^-) = \overline{\mathrm{Tr}_M(f)}$.

Or sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, on dispose de la forme hermitienne définie positive

$$(f_1, f_2) \mapsto < f_1 | f_2 > = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} f_1(g) \overline{f}_2(g) \cdot dg \ .$$

Si $f_1, \ldots, f_n$ désigne une base orthonormée de M, on a donc

$$\mathrm{Tr}_M(f) = \sum_{i=1}^{n} < f_i f | f_i >$$

$$\mathrm{Tr}_M(f^-) = \sum_{i=1}^{n} < f_i f^- | f_i > \ .$$

Or d'après la proposition 1 (iv), les deux opérateurs induits sur $\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ par f et f^- ont des noyaux localement constants sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \times$

$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$, à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et qui se déduisent l'un de l'autre par échange des deux variables.

Donc ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre pour le produit hermitien $< \cdot | \cdot >$ et pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on a

$$< \overline{f_i f | f_i} >=< f_i | f_i f >=< f_i f^- | f_i > \ .$$

D'où le résultat.

(ii) se déduit de (i) et du théorème 5 (iv).

En effet, écrivons la décomposition $\Pi \cong \Pi_x \otimes_{\mathbb{C}} \Pi^x$ et choisissons un sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \backslash \{x\}$ tel que l'élément idempotent associé f_I^x dans $\mathcal{H}^x$ vérifie $\Pi^x f_I^x \neq 0$, si bien que $\mathrm{Tr}_{\Pi^x}(f_I^x)$ est un entier non nul.

Pour tout $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, soient f_x^t et f_x^{-t} les fonctions de Drinfeld en rang d et de niveaux t et $-t$ sur $\mathrm{GL}_d(F_x) \cong G(F_x)$.

Alors on a

$$(f_x^t \otimes f_I^x)^- = f_x^{-t} \otimes f_I^x$$

d'où l'on tire d'après (i)

$$\mathrm{Tr}_{\Pi_x}(f_x^{-t}) = \overline{\mathrm{Tr}_{\Pi_x}(f_x^t)} \ , \ \forall t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \, ,$$

ce qui permet de conclure. □

c) Représentations ℓ–adiques de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ attachées aux représentations automorphes

Commençons par un lemme préparatoire :

LEMME 7. — *Soient L un corps contenant $\mathbb{Q}_\ell$ et Π une représentation admissible absolument isotypique irréductible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$.*

(i) *Pour toute représentation admissible irréductible Σ de l'algèbre $(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$, la représentation $\Pi \otimes_L \Sigma$ de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ est isotypique. Elle s'écrit*

$$\Pi \otimes_L \Sigma \cong (\Pi, \Sigma)^{e(\Pi,\Sigma)}$$

où (Π, Σ) est une représentation admissible irréductible, et $e(\Pi, \Sigma)$ est un entier ≥ 1 qui divise $d(\Pi)^2$.

(ii) *Pour tout Σ comme dans (i) et tout entier n, $0 \leq n \leq 4(d-1)$, soit $m^n(\Pi, \Sigma)$ la multiplicité de (Π, Σ) dans la classe*

$$[H_D^n \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L] \in K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L) \, .$$

Alors les entiers $m^n(\Pi, \Sigma)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de représentations irréductibles Σ (à isomorphisme près), et si on pose

$$\Sigma_\Pi^n = \bigoplus_\Sigma \Sigma^{\frac{d(\Pi)^2}{e(\Pi,\Sigma)} m^n(\Pi,\Sigma)}$$

on a un isomorphisme

$$\Pi \otimes_L \Sigma_\Pi^n \cong \left(\bigoplus_\Sigma (\Pi, \Sigma)^{m^n(\Pi,\Sigma)}\right)^{d(\Pi)^2} .$$

De plus, si on pose pour tout Σ $m(\Pi, \Sigma) = \sum_n (-1)^n m^n(\Pi, \Sigma) \in \mathbb{Z}$ et si on définit l'élément

$$\Sigma_\Pi^* = \sum_n (-1)^n [\Sigma_\Pi^n] \in K_{ad}((\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L)$$

alors on a dans $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_\mathbb{Q} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L)$ l'égalité

$$[\Pi] \otimes_L \Sigma_\Pi^* = d^2(\Pi)\left(\sum_\Sigma m(\Pi, \Sigma)[(\Pi, \Sigma)]\right) .$$

Démonstration :

(i) La représentation $\Pi \otimes_L \Sigma$ est isotypique d'après la proposition 9 (iii) du paragraphe IV.3.

De plus, les représentations $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\otimes_\mathbb{Q} L}(\Pi, \Pi \otimes_L \Sigma)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\otimes_\mathbb{Q} L}(\Pi, (\Pi, \Sigma))$ de $(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ sont évidemment admissibles, et on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\otimes_\mathbb{Q} L}(\Pi, \Pi \otimes_L \Sigma) \cong \Sigma^{d(\Pi)^2}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\otimes_\mathbb{Q} L}(\Pi, \Pi \otimes_L \Sigma) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\otimes_\mathbb{Q} L}(\Pi, (\Pi, \Sigma))^{e(\Pi,\Sigma)}$$

Comme la représentation Σ est irréductible, cela prouve que $e(\Pi, \Sigma)$ est un diviseur de $d(\Pi)^2$.

(ii) Le fait que les entiers $m^n(\Pi, \Sigma)$ sont presque tous nuls résulte de ce que $H_\mathcal{D}^n \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$, considérée comme une représentation du seul facteur $\mathcal{H} \otimes_\mathbb{Q} L$, est admissible.

Les autres assertions sont immédiates d'après (i). $\square$

LEMME 8. — *Soient L et Π comme dans le lemme 7.*

(i) *Si la représentation Π est absolument irréductible, alors on a pour toute représentation admissible irréductible Σ de $(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$*

$$\Pi \otimes_L \Sigma \cong (\Pi, \Sigma)\,.$$

On a pour tout entier n

$$\Pi \otimes_L \Sigma_\Pi^n \cong \bigoplus_\Sigma (\Pi, \Sigma)^{m^n(\Pi,\Sigma)}$$

et on a dans $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L)$ l'égalité

$$[\Pi] \otimes_L \Sigma_\Pi^* = \sum_\Sigma m(\Pi, \Sigma)[\Pi \otimes_L \Sigma]\,.$$

(ii) *Si L' est un corps qui contient L et Π' est l'unique représentation admissible absolument isotypique irréductible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L'$ qui intervient comme facteur dans la représentation absolument isotypique $\Pi \otimes_L L'$, avec donc un isomorphisme*

$$\Pi \otimes_L L' \cong \Pi'^{d(\Pi)/d(\Pi')}\,,$$

alors pour tout entier n on a un isomorphisme

$$\Sigma_\Pi^n \otimes_L L' \cong (\Sigma_{\Pi'}^n)^{d(\Pi)^2/d(\Pi')^2}$$

et on a dans $K_{ad}((\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L')$ l'égalité

$$\Sigma_\Pi^* \otimes_L L' = \frac{d(\Pi)^2}{d(\Pi')^2} \Sigma_{\Pi'}^*\,.$$

Démonstration :

(i) Le fait que Π est absolument irréductible se traduit par l'égalité $d(\Pi) = 1$. De plus chaque entier $e(\Pi, \Sigma)$, qui d'après le lemme 7 (i) divise $d(\Pi)^2$, doit valoir 1.

Toutes les assertions se déduisent alors du lemme 7.

(ii) Par définition des entiers $m^n(\Pi, \Sigma)$ [resp. $m^n(\Pi', \Sigma')$], la somme

$$\sum_\Sigma m^n(\Pi, \Sigma)[(\Pi, \Sigma)] \quad \Big[\text{resp.} \sum_{\Sigma'} m^n(\Pi', \Sigma')[(\Pi', \Sigma')]\Big]$$

dans le groupe $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L)$[resp. $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L')$] rassemble toutes les composantes de la classe $[H^n_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L]$ [resp.$[H^n_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L']$] qui font apparaître Π [resp. Π'] comme facteur correspondant à $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ [resp. $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L'$].

Par conséquent, il existe un isomorphisme

$$\left(\bigoplus_{\Sigma} (\Pi, \Sigma)^{m^n(\Pi,\Sigma)}\right) \otimes_L L' \cong \bigoplus_{\Sigma'} (\Pi', \Sigma')^{m^n(\Pi',\Sigma')} .$$

D'après le lemme 7 (ii), cela prouve la première assertion.

La seconde s'en déduit trivialement. $\square$

Du théorème 2 et du théorème 5 nous allons maintenant déduire :

THÉORÈME 9. — *Soient L un corps contenant $\mathbb{Q}_\ell$ et Π une représentation admissible absolument isotypique irréductible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$.*

(i) *L'ensemble des points fermés x de $X' \backslash T_a$ tels que le facteur Π_x de Π correspondant à l'algèbre $\mathcal{H}_x \otimes_{\mathbb{Q}} L$ ne soit pas $f_{x,\emptyset}$–non ramifié est un ensemble fini. On notera X'_Π son complémentaire dans $X' \backslash T_a$.*

(ii) *Pour tout entier n, $0 \leq n \leq 4(d-1)$, la représentation Σ^n_Π de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ est non ramifiée au-dessus de $X'_\Pi \times X'_\Pi$ c'est-à-dire se factorise à travers le foncteur*

$$\Gamma_F \times \Gamma_F \longrightarrow \pi(\operatorname{Spec} F) \times \pi(\operatorname{Spec} F) \longrightarrow \pi(X'_\Pi) \times \pi(X'_\Pi) .$$

(iii) *Soient 0 et ∞ deux points fermés de X'_Π, $\tau_0 \in \Gamma_F$ et $\tau_\infty \in \Gamma_F$ deux éléments de Frobenius en 0 et ∞ respectivement.*

Alors, pour tout entier $u \in \mathbb{N}$ divisible à la fois par $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$, *toutes les valeurs propres de l'opérateur induit dans Σ^n_Π par l'élément $\tau_0^{-u/\deg(0)} \times \tau_\infty^{-u/\deg(\infty)}$ de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ sont des entiers algébriques sur $\mathbb{Q}$ dont toutes les valeurs absolues sont égales à $q^{\frac{n}{2}u}$.*

Par conséquent, les représentations semi-simples Σ^n_Π, $0 \leq n \leq 4(d-1)$, ont deux à deux des facteurs irréductibles distincts.

(iv) *S'il existe n tel que la représentation Σ^n_Π soit non nulle, Π est un facteur L–automorphe de $\mathcal{H}$.*

De plus, il existe alors un ouvert non vide $X''_\Pi \subseteq X'_\Pi$ tel que pour tous points fermés distincts 0, ∞ de X''_Π, tous éléments τ_0, τ_∞ de Γ_F comme dans (iii) *et tous entiers $u, s \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) = \\ &d(\Pi)^2 m(\Pi)(z_1(\Pi_0)^u + \cdots + z_d(\Pi_0)^u) q^{s \deg(\infty)(d-1)} \\ &\qquad\qquad (z_1(\Pi_\infty)^{-s} + \cdots + z_d(\Pi_\infty)^{-s}) \end{aligned}$$

où $m(\Pi)$ *est le coefficient de* $[\Pi]$ *dans la classe* $[\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} L] \in K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L)$ *et* $z_1(\Pi_0), \ldots, z_d(\Pi_0)$ *et* $z_1(\Pi_\infty), \ldots, z_d(\Pi_\infty)$ *sont comme dans le théorème* 5 (iv).

Démonstration :

(i) résulte du corollaire 10 (v) du paragraphe IV.3.

(ii) Il s'agit de prouver que pour tout ensemble fini T de points fermés de X'_Π, la représentation Σ^n_Π de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ se factorise à travers le groupoïde $\pi(X'_{(T)}) \times \pi(X'_{(T)})$.

Or le facteur $\Pi_T = \bigotimes\limits_{x \in T} \Pi_x$ de Π qui correspond au facteur $\mathcal{H}_T$ de $\mathcal{H}$ est $f_{T,\emptyset}$–non ramifié. Par conséquent et d'après les propositions 2 (iv) et 9 (iv) et (v) du paragraphe IV.3, l'homomorphisme de faisceaux

$$H^{T,n}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L \longrightarrow H^{\emptyset,n}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$$

induit un isomorphisme de la composante de $[H^{T,n}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L]$ dans le groupe de Grothendieck admissible de $(f_{T,\emptyset}\mathcal{H}_T f_{T,\emptyset} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^T) \otimes_{\mathbb{Q}} L = (\mathcal{H}_{T,\emptyset} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^T) \otimes_{\mathbb{Q}} L$ qui est isotypique de type $(\Pi_T f_{T,\emptyset}) \otimes_L \Pi^T$ sur la composante de $[H^{\emptyset,n}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L]$ dans le groupe de Grothendieck admissible de $(\mathcal{H}_T \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^T) \otimes_{\mathbb{Q}} L = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ qui est isotypique de type $\Pi_T \otimes_L \Pi^T = \Pi$, à savoir $\left[\bigoplus\limits_{\Sigma} (\Pi, \Sigma)^{m^n(\Pi,\Sigma)}\right]$.

Et d'après la proposition 8 du paragraphe IV.2, le faisceau $H^{T,n}_{\mathcal{D}}$ se prolonge sur $X'_{(T)} \times X'_{(T)}$, et vu comme représentation du groupoïde $\pi(\mathrm{Spec}\, F) \times \pi(\mathrm{Spec}\, F)$, il provient d'une représentation du groupoïde $\pi(X'_{(T)}) \times \pi(X'_{(T)})$.

Cela permet de conclure puisque d'après le lemme 7 (ii)

$$\Pi \otimes_L \Sigma^n_\Pi \cong \left(\bigoplus_{\Sigma} (\Pi, \Sigma)^{m^n(\Pi,\Sigma)}\right)^{d(\Pi)^2}.$$

(iii) On conserve les notations de la démonstration de (ii), avec $T = \{0, \infty\}$.

Soit $I \hookrightarrow X \backslash T$ un sous–schéma fermé fini non vide tel que, si f^T_I désigne l'élément idempotent correspondant dans $\mathcal{H}^T$, on ait $\Pi^T f^T_I \neq 0$, c'est–à–dire aussi $\Pi(f_{T,\emptyset} \otimes f^T_I) \neq 0$.

Alors l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur induit par $\tau_0^{u/\deg(0)} \times \tau_\infty^{u/\deg(\infty)}$ sur Σ^n_Π est certainement contenu dans l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur induit par $\tau_0^{u/\deg(0)} \times \tau_\infty^{u/\deg(\infty)}$ sur n'importe quelle fibre du faisceau $H^{T,n}_{\mathcal{D}} f^T_I = H^n_{\mathcal{D},I}$.

Considérons donc la fibre au-dessus de $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}_q}$, pour $\overline{0} : \kappa(0) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ et $\overline{\infty} : \kappa(\infty) \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}$ deux points de $X(\overline{\mathbb{F}_q})$ au-dessus de 0 et ∞.

Sur cette fibre, les actions de τ_0 et τ_∞ sont inverses de celles de $\mathrm{Frob}_0^{\deg(0)}$ et $\mathrm{Frob}_\infty^{\deg(\infty)}$ et l'action de $\tau_0^{-u/\deg(0)} \times \tau_\infty^{-u/\deg(\infty)}$ est égale à celle du morphisme de Frobenius géométrique Frob^u. Or d'après le théorème 1 du paragraphe IV.1, le champ $\mathrm{Cht}_{\mathcal{D},I}/a^{\mathbb{Z}}$ est représentable, projectif et lisse au-dessus de $X'\backslash I \times X'\backslash I$.

On conclut d'après le théorème de pureté de Deligne que les valeurs propres de ces opérateurs ont les propriétés annoncées.

La dernière assertion de (iii) est une conséquence évidente de la précédente.

(iv) D'après la proposition 6 (iii) du paragraphe IV.3 et le lemme 8 (ii), on peut se limiter au cas où L est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$.

Alors et d'après le lemme 8 (i), on a dans le groupe de Grothendieck admissible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ la décomposition

$$[H_{\mathcal{D}}^* \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L] = \sum_\pi \Sigma_\pi^* \otimes_L [\pi]$$

où π décrit un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes de représentations admissibles absolument irréductibles de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$.

D'autre part, on a dans le groupe de Grothendieck admissible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ la décomposition

$$[\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} L] = \sum_\pi m(\pi)[\pi]$$

où chaque $m(\pi)$ est un entier ≥ 0, non nul si et seulement si π est un facteur L–automorphe de $\mathcal{H}$.

D'après la proposition 4 (iii) du paragraphe IV.3, il existe un élément $f \in \mathcal{H}$ tel que pour tout π intervenant dans l'une des classes $[H_{\mathcal{D}}^n \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L]$ ou dans $[\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} L]$, on ait

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}_\pi(f) = 1 \text{ si } \pi \cong \Pi \\ \mathrm{Tr}_\pi(f) = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Soit alors T un ensemble fini de places de X, contenant T_a et tel que f soit de la forme $f = f_\emptyset^T \otimes f_T$ où f_T est un élément de $\mathcal{H}_T$ et $f_\emptyset^T$ est l'élément idempotent distingué de $\mathcal{H}^T$.

Soit X''_Π le complémentaire de T dans X'_Π.

Alors pour tous points fermés distincts $0, \infty$ de X''_Π, f peut s'écrire sous la forme $f = f_{\infty,\emptyset} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_{0,\emptyset}$ où $f^{\infty,0} \in \mathcal{H}^{\infty,0}$.

Pour u, $s \geq 1$ deux entiers, on a donc d'après le théorème 2

$$\mathrm{Tr}_{H^*_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L}(\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s} \times f) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} L}(f_\infty^{-s} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^u) .$$

D'après l'hypothèse sur f et le corollaire 10 (iv) du paragraphe IV.3, cela s'écrit encore

$$\mathrm{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(\tau_0^{-u} \otimes \tau_\infty^{-s}) = \sum_\pi m(\pi) \mathrm{Tr}_{\pi_0}(f_0^u) \mathrm{Tr}_{\pi_\infty}(f_\infty^{-s}) \mathrm{Tr}_{\pi^{\infty,0}}(f^{\infty,0}) .$$

De plus, si $\mathrm{Tr}_{\pi_0}(f_0^u) \neq 0$ et $\mathrm{Tr}_{\pi_\infty}(f_\infty^{-s}) \neq 0$, alors $\pi_0 f_{0,\emptyset} \neq 0$ et $\pi_\infty f_{\infty,\emptyset} \neq 0$ et d'après le théorème 5 (iii) ceci implique que $\pi_0 f_{0,\emptyset}$ et $\pi_\infty f_{\infty,\emptyset}$ sont de dimension 1 sur L si bien que dans tous les cas

$$\mathrm{Tr}_{\pi_0}(f_0^u) \mathrm{Tr}_{\pi_\infty}(f_\infty^{-s}) \mathrm{Tr}_{\pi^{\infty,0}}(f^{\infty,0}) = \mathrm{Tr}_{\pi_0}(f_0^u) \mathrm{Tr}_{\pi_\infty}(f_\infty^{-s}) \mathrm{Tr}_\pi(f) .$$

En utilisant encore l'hypothèse sur f et d'après le théorème 5 (iv), on obtient :

$$\mathrm{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) =$$

$$m(\Pi)(z_1(\Pi_0)^u + \cdots + z_d(\Pi_0)^u) q^{s \deg(\infty)(d-1)} (z_1(\Pi_\infty)^{-s} + \cdots + z_d(\Pi_\infty)^{-s})$$

Cette égalité, vraie pour tous entiers u, $s \geq 1$, s'étend immédiatement à tous entiers u, $s \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve la seconde assertion.

Pour la première assertion, supposons qu'il existe n avec $\Sigma^n_\Pi \neq 0$. Alors d'après la dernière assertion de (iii), on a aussi $\Sigma^*_\Pi \neq 0$. Et d'après le théorème de densité de Čebotarev, les $\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}$ quand $(0, \infty)$ décrit l'ensemble des couples de points fermés distincts dans X''_Π et u, s décrivent $\mathbb{Z}$, sont denses dans $\Gamma_F \times \Gamma_F$. Comme Σ^*_Π est une représentation non nulle continue de $\Gamma_F \times \Gamma_F$, on voit d'après la proposition 4 (iii) du paragraphe IV.3, qu'il existe un tel $\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}$ avec $\mathrm{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}) \neq 0$, ce qui impose $m(\Pi) \neq 0$.

$\square$

COROLLAIRE 10. —

(i) *Pour tout entier n impair, le faisceau $H^n_{\mathcal{D}}$ est nul. Il en est de même du faisceau $H^n_{\mathcal{D},I}$ pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X$.*

(ii) *Dans le groupe de Grothendieck admissible de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$, on a l'égalité entre classes induites*

$$[H^*_{\mathcal{D}}] = d^2 [\mathrm{Aut} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell] .$$

Démonstration :

(i) La seconde assertion est conséquence de la première car d'après le lemme 7 (iii) du paragraphe IV.2, on a toujours $H^n_{\mathcal{D},I} = H^n_{\mathcal{D}} f_I$.

Pour la première assertion, il suffit de prouver que si L est un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}_\ell$, Π un facteur L–automorphe de $\mathcal{H}$ et n un entier impair, alors $\Sigma^n_\Pi = 0$.

Fixons 0 et ∞ deux points fermés distincts de X''_Π. Et soient τ_0 et τ_∞ comme dans le théorème 8 (iii). Pour tout entier n, $0 \leq n \leq 4(d-1)$, notons $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,b(n)}$ les valeurs propres de l'opérateur induit par $\tau_0^{-\deg(\infty)} \times \tau_\infty^{-\deg(0)}$ sur Σ^n_π.

Pour tout entier $u \in \mathbb{Z}$, on a donc

$$\mathrm{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(\tau_0^{-\deg(\infty)u} \times \tau_\infty^{-\deg(0)u}) = \sum_n (-1)^n ((\lambda_{n,1})^u + \cdots + (\lambda_{n,b(n)})^u)$$

et d'après le théorème 9 (iii) les ensembles $\{\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,b(n)}\}$ sont deux à deux disjoints.

Mais d'après le théorème 9 (iv) on a également

$$\mathrm{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(\tau_0^{-\deg(\infty)u} \times \tau_\infty^{-\deg(0)u}) =$$
$$m(\Pi) \sum_{1 \leq i,j \leq d} (z_i(\Pi_0)^{\deg(\infty)} q^{\deg(\infty)\deg(0)(d-1)} z_j(\Pi_\infty)^{-\deg(0)})^u \,.$$

Ceci prouve que pour n impair, la dimension $b(n)$ de Σ^n_Π sur L est nulle.

(ii) Soit encore L un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}_\ell$.

Il suffit de prouver que dans $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_\mathbb{Q} L)$, on a

$$[H^*_\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L] = d^2 [\mathrm{Aut} \otimes_\mathbb{Q} L] \,.$$

Or dans $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_\mathbb{Q} (\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L)$, on a

$$[H^*_\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L] = \sum_\Pi \Sigma^*_\Pi \otimes_L [\Pi]$$

et dans $K_{ad}(\mathcal{H} \otimes_\mathbb{Q} L)$, on a

$$[\mathrm{Aut} \otimes_\mathbb{Q} L] = \sum_\Pi m(\Pi)[\Pi] \,.$$

Enfin, si 1 désigne l'élément unité dans $\Gamma_F \times \Gamma_F$, on a d'après le théorème 9 (iv)

$$\mathrm{Tr}_{\Sigma^*_\Pi}(1) = m(\Pi) d^2 \,.$$

D'où l'on conclut. $\square$

d) Représentations ℓ–adiques de Γ_F attachées aux représentations automorphes

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on introduit $\mathbb{Q}_\ell(n)$ la représentation continue de Γ_F de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_\ell$ qui se factorise à travers le foncteur $\Gamma_F \to \pi(\operatorname{Spec} F) \to \pi(\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q)$ et pour laquelle n'importe quel automorphisme de Frobenius (arithmétique) de $\pi(\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q)$ agit par la multiplication par q^n.

Si L est un corps contenant $\mathbb{Q}_\ell$ et σ est une représentation de $\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ de dimension finie sur L, on note $\sigma(n)$ la représentation $\sigma \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(n)$. D'autre part, on note $\sigma^\vee$ la représentation duale $\operatorname{Hom}_L(\sigma, L)$ de σ.

Les foncteurs $\sigma \longmapsto \sigma(n)$ et $\sigma \longmapsto \sigma^\vee$ sont exacts et induisent des automorphismes de $K(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L)$, notés de la même façon.

Avec ces notations, on a :

Proposition 11. — *Soient L un corps contenant $\mathbb{Q}_\ell$ et Π un facteur L–automorphe de $\mathcal{H}$.*

(i) *Σ_Π^* peut être vue comme une représentation semi–simple de $(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$.*

Elle induit une représentation du premier facteur $\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ qu'on notera σ_Π^* et qui est également semi–simple.

(ii) *X'_Π désignant l'ouvert non vide de X' défini dans le théorème* 9 (i), *la représentation σ_Π^* de Γ_F est non ramifiée au–dessus de X'_Π c'est–à–dire se factorise à travers le foncteur*

$$\Gamma_F \longrightarrow \pi(\operatorname{Spec} F) \longrightarrow \pi(X'_\Pi)\,.$$

(iii) *X''_Π désignant l'ouvert non vide de X'_Π introduit dans le théorème* 9 (iv) *on a pour tout point fermé* 0 *de X''_Π, tout élément $\tau_0 \in \Gamma_F$ comme dans le théorème* 9 (iii) *et tout $u \in \mathbb{Z}$*

$$\operatorname{Tr}_{\sigma_\Pi^*}(\tau_0^{-u}) = d(\Pi)^2 m(\Pi) d(z_1(\Pi_0)^u + \cdots + z_d(\Pi_0)^u)\,.$$

(iv) *On a un isomorphisme entre représentations semi–simples de $(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$*

$$\sigma_\Pi^* \otimes_L (\sigma_\Pi^*)^\vee(1-d) \cong (\Sigma_\Pi^*)^{d(\Pi)^2 m(\Pi) d^2}\,.$$

Démonstration :

(i) $\Sigma_\Pi^* = \sum\limits_n (-1)^n [\Sigma_\Pi^n]$ peut être vue comme une représentation semi–simple de $(\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{A}_{F,\ell}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ puisque d'après le corollaire 10 (i) les Σ_Π^n sont nulles pour tous n impairs.

D'après la proposition 9 (v) du paragraphe IV.3, σ_Π^* est alors semi–simple comme représentation de $\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$.

(ii) résulte du théorème 9 (ii).

(iii) s'obtient en choisissant un point fermé ∞ de X''_Π distinct de 0 et en posant $s = 0$ dans l'énoncé du théorème 9 (iv).

(iv) D'après (i) ci–dessus et la proposition 9 (ii) du paragraphe IV.3, les deux représentations considérées sont semi–simples.

De plus, d'après (iii) ci–dessus et le théorème 9 (iv), leurs homomorphismes traces associés coïncident en tous les éléments de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ qui sont de la forme

$$\tau_0^{-u} \times \tau_\infty^{-s}$$

avec $0, \infty$ deux points fermés distincts de X''_Π, τ_0 et τ_∞ comme dans le théorème 9 (iii) et u, $s \in \mathbb{Z}$.

Or ces éléments sont denses dans $\Gamma_F \times \Gamma_F$ d'après le théorème de densité de Čebotarev. Cela permet de conclure lorsque L est une extension algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ car alors les représentations de $\Gamma_F \times \Gamma_F$ considérées sont continues.

Et on se ramène à ce cas d'après le lemme 4 (iv), le lemme 8 (ii) et la partie (i) du lemme suivant :

LEMME 12. — *Soient L et Π comme dans la proposition* 11.

(i) *Si L' est un corps qui contient L et Π' est l'unique facteur L'–automorphe de $\mathcal{H}$ qui vérifie*

$$\Pi \otimes_L L' \cong \Pi'^{d(\Pi)/d(\Pi')} ,$$

alors on a un isomorphisme

$$\sigma^*_\Pi \otimes_L L' \cong (\sigma^*_{\Pi'})^{d(\Pi)^2/d(\Pi')^2} .$$

(ii) *Il existe une extension finie L' de L telle que pour Π' comme dans* (i) *tous les facteurs irréductibles de la représentation $\sigma^*_{\Pi'}$ de $\mathcal{A}_{F,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ sont absolument irréductibles.*

(iii) *Si L' est une extension de L qui vérifie la conclusion de* (ii) *et $m \geq 1$ est le plus grand entier tel que la représentation $\sigma^*_{\Pi'}$ s'écrive sous la forme τ^m, alors Σ^*_Π est isomorphe à une puissance de $\tau \otimes \tau^\vee(1-d)$.*

Démonstration :

(i) résulte des définitions de σ^*_Π et $\sigma^*_{\Pi'}$ et du lemme 8 (ii).

(ii) résulte de la proposition 6 (iii) du paragraphe IV.3b ainsi que de (i).

(iii) m est le p.g.c.d. de tous les coefficients des composantes irréductibles de la classe $[\sigma^*_{\Pi'}]$ et c'est aussi le p.g.c.d. des coefficient des composantes irréductibles de la classe $[(\sigma^*_{\Pi'})^\vee(1-d)]$. Comme ces composantes irréductibles sont en fait absolument irréductibles on voit d'après la proposition 9 (iv) du paragraphe IV.3 que le p.g.c.d. des coefficients des composantes irréductibles de la classe $[\sigma^*_{\Pi'} \otimes (\sigma^*_{\Pi'})^\vee(1-d)]$ est m^2.

On conclut d'après la proposition 11 (iv) car alors m^2 doit être divisible par $d(\Pi')^2 m(\Pi') d^2$. □

Nous pouvons maintenant démontrer :

THÉORÈME 13. — *Soient L un corps contenant $\mathbb{Q}_\ell$, Π un facteur L-automorphe de $\mathcal{H}$ et $\mathbb{Q}(\Pi) \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement dans $\mathbb{C}$ du corps de rationalité $\mathbb{Q}(\Pi)$ de Π qui est un corps de nombres.*

Alors :

(i) *En utilisant les notations du théorème 5 (iv), les uplets de normes de nombres complexes*

$$\left(|z_1(\Pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}}, \ldots, |z_d(\Pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}}\right),$$

quand 0 décrit l'ensemble des points fermés de l'ouvert non vide $X''_\Pi \subseteq X'_\Pi \subseteq X' \backslash T_a$ de X, sont tous égaux à permutation près. Ils sont respectés par l'involution $t \longmapsto q^{d-1}/t$.

Et ils prennent leurs valeurs dans l'un ou l'autre des deux ensembles

$$\{1, q, q^2, \ldots, q^{d-2}, q^{d-1}\} \quad ou \quad \{q^{1/2}, q^{3/2}, \ldots, q^{d-5/2}, q^{d-3/2}\}.$$

(ii) *S'il existe au moins un point fermé 0 de X''_Π où l'on sache que*

$$q^{\frac{d}{2}-1} < |z_i(\Pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}} < q^{\frac{d}{2}}, \quad 1 \leq i \leq d,$$

alors on peut conclure que pour tout point fermé x de X''_Π

$$|z_i(\Pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}} = q^{\frac{d-1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Et il est équivalent de dire que $\Sigma^n_\Pi = 0$, $\forall n \neq 2(d-1)$.

Remarque : Les inégalités dans l'hypothèse de (ii) sont connues en tous les points fermés 0 de X'_Π si Π correspond au sens de Jacquet–Langlands à une représentation automorphe cuspidale du groupe adélique $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$.

Démonstration du théorème 13 : Que $\mathbb{Q}(\Pi)$ soit un corps de nombres a été vu dans la proposition 4 (i).

(i) La symétrie par l'involution $t \longmapsto q^{d-1}/t$ résulte de la proposition 6 (ii).

On remarque que pour x fixé, connaître le uplet des $|z_i(\Pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}}$, $1 \leq i \leq d$, revient à connaître le uplet des

$$|z_i(\Pi_0)||z_j(\Pi_0)|\,, \quad 1 \leq i, j \leq d\,.$$

Or d'après la proposition 11 (iii) et (iv) et la proposition 6 (ii), le uplet répété $d(\Pi)^2 m(\Pi)$ fois des

$$z_i(\Pi_0)\overline{z_j(\Pi_0)}\,, \quad 1 \leq i\,,\ j \leq d\,,$$

s'identifie au uplet des valeurs propres de l'opérateur induit par $\tau_0^{-1} \times \tau_0^{-1}$ sur la représentation semi–simple Σ_Π^* de $\Gamma_F \times \Gamma_F$.

Puis d'après le théorème 9 (iii) et le corollaire 10 (i), on voit que les normes de ces nombres sont à valeurs dans l'ensemble

$$\{1, q^{\deg(0)},\ q^{2\deg(0)}, \ldots, q^{2(d-1)\deg(0)}\}$$

et que chaque norme $q^{n\deg(0)}$, $0 \leq n \leq 2(d-1)$, apparaît avec une multiplicité égale à la dimension sur L de Σ_Π^{2n}, donc indépendante du point fermé 0.

A partir de là, on conclut immédiatement.

(ii) La première assertion est un cas particulier de (i).

La seconde résulte de la discussion dans la démonstration de (i).

□

Afin de poursuivre, on a besoin de rappels sur les fonctions L associées aux représentations ℓ–adiques de Γ_F et sur les fonctions L associées aux représentations automorphes cuspidales des groupes adéliques $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$.

DÉFINITION 14 (Grothendieck). — *Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ et U un ouvert non vide de X.*

Soit σ une représentation continue de Γ_F dans un espace de dimension finie sur L, non ramifiée sur U c'est–à–dire se factorisant à travers le foncteur

$$\Gamma_F \longrightarrow \pi(\operatorname{Spec} F) \longrightarrow \pi(U)\,.$$

On appelle fonction L partielle associée à σ et on note $L_U(\sigma, z)$ la série formelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

$$L_U(\sigma, z) = \prod_0 \frac{1}{\det_\sigma(1 - \tau_0^{-1} z^{\deg(0)})}$$

où 0 décrit l'ensemble des points fermés de U et chaque $\tau_0 \in \Gamma_F$ est un élément de Frobenius en la place 0.

DÉFINITION 15 (Langlands). — *Soient n_1 et n_2 entiers, Π_1 et Π_2 deux représentations admissibles irréductibles automorphes cuspidales des algèbres de Hecke sur $\mathbb{C}$ des groupes adéliques $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{A})$ respectivement.*

Soit U un ouvert non vide de X tel que pour tout point fermé x de U les facteurs locaux Π_{1x} et Π_{2x} de Π_1 et Π_2 (qui sont des représentations admissibles irréductibles des algèbres de Hecke sur $\mathbb{C}$ des groupes $\mathrm{GL}_{n_1}(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{n_2}(F_x)$ respectivement) soient non ramifiées au sens du théorème 5.

On appelle fonction L partielle associée à $\Pi_1 \otimes \Pi_2^\vee$ et on note $L_U(\Pi_1 \otimes \Pi_2^\vee, z)$ la série formelle à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$L_U(\Pi_1 \otimes \Pi_2^\vee, z) = \prod_x \frac{1}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n_1\\ 1\le j\le n_2}} \left(1 - \frac{z_i(\Pi_{1x})}{z_j(\Pi_{2x})} z^{\deg(x)}\right)}$$

où x décrit l'ensemble des points fermés de U.

THÉORÈME 16 (Grothendieck, Deligne). — *Comme dans la définition 14, soient L une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ et U un ouvert non vide de X.*

(i) *Si σ, σ_1, σ_2 sont trois représentations de Γ_F comme dans la définition 14 et s'il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \sigma_1 \longrightarrow \sigma \longrightarrow \sigma_2 \longrightarrow 0$$

alors on a $L_U(\sigma, z) = L_U(\sigma_1, z) L_U(\sigma_2, z)$.

(ii) *Toute représentation σ de Γ_F comme dans la définition 14 peut être vue comme un L-faisceau constructible et lisse sur U.*

Et on a la formule

$$L_U(\sigma, z) = \frac{\det_{H_c^1(\sigma)}(1 - \mathrm{Frob}^{-1} z)}{\det_{H_c^0(\sigma)}(1 - \mathrm{Frob}^{-1} z) \det_{H_c^2(\sigma)}(1 - \mathrm{Frob}^{-1} z)}\,.$$

En particulier, $L_U(\sigma, z)$ est une fraction rationnelle.

De plus on remarque que $H_c^0(\sigma) = H^0(\sigma)$ si $U = X$, $H_c^0 = 0$ si $U \neq X$ et que

$$H_c^2(\sigma) \cong H^0(\sigma^\vee(-1))\,.$$

(iii) *Dans la situation de* (ii), *supposons que σ est pure de poids $n \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire que pour tout point fermé 0 de U, les valeurs propres de τ_0^{-1} dans σ sont des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ dont toutes les valeurs absolues archimédiennes sont égales à $q^{\frac{n}{2}\deg(0)}$.*

Alors toutes les valeurs propres de Frob^{-1} dans $H_c^1(\sigma)$ sont des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ dont les valeurs absolues archimédiennes sont de la forme $q^{\frac{n'}{2}}$ avec $n' \le n + 1$.

(iv) *Soient σ_1 et σ_2 deux représentations de Γ_F comme dans la définition 14, supposées irréductibles et pures de même poids.*

Alors la fonction $L(\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee, z)$ possède au point q^{-1} un pôle de multiplicité égale à la dimension sur L de $\mathrm{End}_L(\sigma_1)$ si σ_1 et σ_2 sont isomorphes, et dans le cas contraire, elle n'a ni zéro ni pôle en ce point.

Démonstration :

(i) est évident sur la définition.

(ii) La première assertion résulte de la définition du groupoïde $\pi(U)$ et de ce que Γ_F, étant profini donc compact, stabilise un réseau de σ.

La formule qui suit est un théorème de Grothendieck.

Les deux expressions pour $H_c^0(\sigma)$ sont évidentes, et celle pour $H_c^2(\sigma)$ s'obtient par dualité de Poincaré–Grothendieck.

(iii) a été démontré par Deligne.

(iv) La représentation $\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee$ est pure de poids 0 donc d'après (iii) le polynôme $\det_{H_c^1(\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee)}(1 - \mathrm{Frob}^{-1} z)$ ne s'annule pas au point q^{-1}. D'après (ii), le polynôme $\det_{H_c^0(\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee)}(1 - \mathrm{Frob}^{-1} z)$ non plus ne s'y annule pas et le polynôme $\det_{H_c^2(\sigma_1 \otimes \sigma_2^\vee)}(1 - \mathrm{Frob}^{-1} z)$ s'y annule avec la multiplicité

$$\dim_L \ \mathrm{Hom}_L(L(-1)\,,\ (\sigma_1^\vee \otimes \sigma_2)(-1)) = \dim_L \ \mathrm{Hom}_L(\sigma_1, \sigma_2)$$

d'où l'on tire le résultat annoncé. □

THÉORÈME 17. — *Soient n_1 et n_2, Π_1 et Π_2 et U comme dans la définition* 15. *Alors la série*

$$L_U(\Pi_1 \otimes \Pi_2^\vee, z)$$

est convergente dans un voisinage de 0 *dans* $\mathbb{C}$.

Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ *tout entier.*

Au point q^{-1} elle n'a ni zéro ni pôle si $n_1 \neq n_2$ ou bien si $n_1 = n_2$ mais Π_1 et Π_2 ne sont pas isomorphes, et elle a en ce point un pôle d'ordre 1 *si $n_1 = n_2$ et $\Pi_1 \cong \Pi_2$.*

Démonstration : Voir [Shahidi].

□

Nous pouvons maintenant démontrer :

THÉORÈME 18. — *Soient L un corps contenant $\mathbb{Q}_\ell$ et Π un facteur L–automorphe de $\mathcal{H}$ qui correspond au sens de Jacquet–Langlands à une représentation automorphe cuspidale du groupe adélique* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$.

Supposons que l'on sache que toute représentation continue, non ramifiée sur un ouvert non vide U de X et absolument irréductible de Γ_F dans un espace de dimension $d' < d$ sur une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ corresponde au sens de Langlands à une représentation automorphe cuspidale du groupe adélique $\mathrm{GL}_{d'}(\mathbb{A})$, non ramifiée sur U.

Alors on peut conclure que la représentation semi-simple σ_Π^* de Γ_F est absolument isotypique et si son unique facteur irréductible est absolument irréductible, il est de dimension d.

Remarque : La supposition du théorème est réalisée d'après Drinfeld lorsque $d \leq 3$.

Démonstration du théorème 18 : D'après la proposition 4 (ii) et le lemme 12 (i) et (ii), on peut supposer que L est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, que Π est absolument irréductible et que σ_Π^* s'écrit

$$\sigma_\Pi^* = \bigoplus \sigma^{m(\sigma)}$$

où les σ sont des représentations absolument irréductibles de Γ_F dont on note d_σ les dimensions respectives sur L.

D'après la proposition 11, les facteurs σ sont des représentations continues non ramifiées sur X_Π'' et on a

$$\sum_\sigma m(\sigma) d_\sigma = m(\Pi) d^2 \,.$$

Soit Π' la représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ qui est associée à Π au sens de Jacquet–Langlands.

Supposons qu'il existe un facteur σ avec $m(\sigma) \geq 1$ et $d_\sigma < d$. Alors par hypothèse il lui correspond au sens de Langlands une représentation automorphe cuspidale Π'_σ de $\mathrm{GL}_{d_\sigma}(\mathbb{A})$. D'après la proposition 11 (iii), on a une égalité de séries formelles à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}(\Pi)$ (qui est contenu à la fois dans L et dans $\mathbb{C}$)

$$L_{X_\Pi''}(\sigma_\Pi^* \otimes \sigma^\vee, z) = L_{X_\Pi''}(\Pi' \otimes \Pi_\sigma'^\vee, z) \,.$$

D'après le théorème 16 (ii), le premier terme est une fraction rationnelle. De plus, d'après le théorème 13 (ii) et la proposition 11 (iii), la représentation σ_Π^* est pure de poids $d-1$, donc aussi son facteur σ. On en déduit grâce au théorème 16 (iv) et (i) que la fraction rationnelle $L_{X_\Pi''}(\sigma_\Pi^* \otimes \sigma^\vee, z)$ possède au point q^{-1} un pôle d'ordre $m(\sigma)$. Et d'après le théorème 17, $L_{X_\Pi''}(\Pi' \otimes \Pi_\sigma'^\vee, z)$ induit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui n'a ni zéro ni pôle au point q^{-1}. Il y a contradiction.

Ainsi, les représentations absolument irréductibles σ qui interviennent dans la décomposition de σ_{Π}^{*} sont toutes de dimensions $d_\sigma \geq d$.

Maintenant on a, toujours d'après la proposition 11 (iii), l'égalité suivante entre séries formelles à coefficients dans $\mathbb{Q}(\Pi)$

$$L_{X''_{\Pi}}(\sigma_{\Pi}^{*} \otimes (\sigma_{\Pi}^{*})^{\vee}, z) = L_{X''_{\Pi}}(\Pi' \otimes \Pi'^{\vee})^{m(\Pi)^2 d^2} .$$

D'après le théorème 17, le second terme induit sur $\mathbb{C}$ une fonction méromorphe qui présente au point q^{-1} un pôle d'ordre $m(\Pi)^2 d^2$. D'autre part et comme on a déjà dit, la représentation σ_{Π}^{*} et ses facteurs σ sont purs de poids $d-1$. D'après le théorème 16 (ii), (i) et (iv), la série formelle $L_{X''_{\Pi}}(\sigma_{\Pi}^{*} \otimes (\sigma_{\Pi}^{*})^{\vee}, z)$ est une fraction rationnelle qui admet au point q^{-1} un pôle d'ordre $\sum\limits_{\sigma} m(\sigma)^2$.

En résumé, on a

$$\sum_{\sigma} m(\sigma) d_\sigma = m(\Pi) d^2 \quad \sum_{\sigma} m(\sigma)^2 = m(\Pi)^2 d^2 \quad \text{et} \quad d_\sigma \geq d, \ \forall \sigma .$$

On en déduit $\sum\limits_{\sigma} m(\sigma) \leq \sum\limits_{\sigma} \frac{m(\sigma) d_\sigma}{d} = m(\Pi) d$ qui n'est compatible avec $\sum\limits_{\sigma} m(\sigma)^2 = m(\Pi)^2 d^2$ que s'il n'y a qu'un seul facteur σ et qui vérifie

$$d_\sigma = d .$$

C'est ce qu'on voulait. $\square$

Chapitre V

Calcul des nombres de Lefschetz en rang $r \geq 2$

1. — Polygones canoniques de Harder–Narasimhan et troncatures d'Arthur

a) Petit dictionnaire des adèles et des fibrés

On note G le schéma en groupes sur F des automorphismes de $E = D^r$, pour $r \geq 2$ un entier.

Soit M_0 le sous-groupe de Lévi de G associé à la décomposition en somme directe $E = D \oplus \cdots \oplus D$. Désignons par $\mathcal{P}_0$ [resp. $\mathcal{M}_0$] l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques de G [resp. de leurs sous–groupes de Lévi] qui contiennent M_0. Et soit $P_0 \in \mathcal{P}_0$ le sous-groupe parabolique minimal associé à la filtration $0 \subsetneq D \subsetneq D^2 \subsetneq \cdots \subsetneq D^r = E$.

Tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}_0$ admet un unique sous-groupe de Lévi M_P qui soit dans $\mathcal{M}_0$. En particulier $M_{P_0} = M_0$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_0$ [resp. $P \in \mathcal{P}_0$] on notera Z_M son centre [resp. $Z_P = Z_{M_P}$ le centre de M_P]. On notera en particulier $Z_{P_0} = Z_{M_0} = Z_0$.

On désignera par $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$ l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques de G. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, on notera N_P son radical unipotent.

On suppose que l'ordre $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}$ dans $D_{\mathbb{A}} = D \otimes_F \mathbb{A}$ associé à la $\mathcal{O}_X$–algèbre $\mathcal{D}$ localement libre de rang d^2 et de fibre générique D est maximal, si bien que $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$ est un sous–groupe ouvert compact maximal de $G(\mathbb{A})$. Enfin, on fixe $a \in \mathbb{A}^\times$ un idèle de degré 1 dont les composantes valent 1 en dehors d'un ensemble fini T_a de places de F.

Le quotient $G(\mathbb{A})/K$ s'identifie naturellement à l'ensemble des $\mathcal{D}$-Modules (à droite) $\mathcal{E}$ localement libres de rang r sur X et munis d'une trivialisation de leur fibre générique c'est-à-dire d'un isomorphisme

$$\mathcal{E} \otimes_{O_X} F = \mathcal{E}_F \cong E = D^r \ .$$

Le $\mathcal{D}$-Module $\mathcal{E}^g$ qui correspond à un élément $g = (g_x)_{x \in |X|}$ de $G(\mathbb{A})$ est caractérisé par le fait que pour tout $x \in |X|$

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} O_x = \mathcal{E}_x = g_x(\mathcal{D}_x^r) \text{ dans } D_x^r = E_x \ .$$

Puis le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$ s'identifie au groupoïde des $\mathcal{D}$-Modules localement libres de rang r sur X. Si $\mathcal{E}^g$ est le $\mathcal{D}$-Module associé à un élément $g \in G(\mathbb{A})$, son degré est $\deg \mathcal{E}^g = \deg(\det g)$ et sa pente est $\mu(\mathcal{E}^g) = \dfrac{\deg \mathcal{E}^g}{\mathrm{rg}\mathcal{E}^g} = \mu(g)$.

Si maintenant P est un objet de $\mathcal{P}_0$ et $r_1, \ldots, r_{|P|}$ désignent les rangs des facteurs simples de M_P au nombre de $|P|$, l'application $\delta \mapsto \delta^{-1} P \delta$ permet d'identifier $P(F)\backslash G(F)$ au sous-ensemble $\mathcal{P}_P$ de $\mathcal{P}$ des sous-groupes paraboliques de G dont le quotient réductif a ses facteurs de rangs $r_1, \ldots, r_{|P|}$. Et $\mathcal{P}_P$ s'identifie à son tour à l'ensemble des filtrations $E_\cdot = (0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{|P|} = E)$ de $E = D^r$ telles que $\mathrm{rg}(E_{i-1}\backslash E_i) = r_i$, $1 \leq i \leq |P|$. On associe pour cela à tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}_P$ la plus fine filtration $E_\cdot^Q$ de E qu'il stabilise.

Puis si $g \in G(\mathbb{A})/K$ correspond à un fibré $\mathcal{E}^g$ muni d'une trivialisation $\mathcal{E}_F^g \cong E$ et si $Q \in \mathcal{P}_P$ est un sous-groupe parabolique, on peut leur associer la filtration $\mathcal{E}_\cdot^{g,Q}$ de $\mathcal{E}^g$ par les sous-fibrés engendrés par les $E_i^Q \subseteq E$. On remarque que l'application $g \mapsto (\mathcal{E}^g, \mathcal{E}_\cdot^{g,P})$ définit une équivalence du quotient $P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$ sur le groupoïde des $\mathcal{D}$-Modules $\mathcal{E}$ localement libres de rang r munis d'une filtration $\mathcal{E}_\cdot$ vérifiant $\mathrm{rg}(\mathcal{E}_{i-1}\backslash \mathcal{E}_i) = r_i$, $1 \leq i \leq |P|$. Notons au passage que pour tous $g \in G(\mathbb{A})$ et $\delta \in G(F)$, on a $\mathcal{E}_\cdot^{g,\delta^{-1}P\delta} = \mathcal{E}_\cdot^{\delta g, P}$.

b) Polygones et filtrations canoniques de Harder-Narasimhan

A tout élément $g \in G(\mathbb{A})$ et à tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}$ auxquels on fait correspondre le fibré $\mathcal{E}^g$ muni de la filtration $\mathcal{E}_\cdot^{g,Q}$, est associé le polygone $p_Q^g : [0, r] \to \mathbb{R}$ défini par les conditions :

- p_Q^g s'annule aux bornes 0 et r et il est affine sur chaque intervalle $[\mathrm{rg}\mathcal{E}_{i-1}^{g,Q}, \mathrm{rg}\mathcal{E}_i^{g,Q}]$,
- pour tout indice i, on a

$$p_Q^g(\mathrm{rg}\mathcal{E}_i^{g,Q}) = \deg \mathcal{E}_i^{g,Q} - \frac{\mathrm{rg}\mathcal{E}_i^{g,Q}}{r} \deg \mathcal{E}^g \ .$$

On prouve d'après la proposition 2 du paragraphe II.2a que pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$ fixé et lorsque Q décrit l'ensemble $\mathcal{P}$ de tous les sous-groupes paraboliques de G, la famille des polygones p_Q^g possède un plus grand élément. On le note $\overline{p}^g$ et on l'appelle polygone canonique de Harder-Narasimhan de g ou de $\mathcal{E}^g$. C'est un polygone concave.

De plus, parmi les sous–groupes paraboliques Q de G dont le polygone p_Q^g se confonde avec le polygone canonique $\overline{p}^g$, il en existe un plus grand $\overline{Q}^g$, correspondant à une filtration $\mathcal{E}_\cdot^{g,\overline{Q}^g} = \overline{\mathcal{E}}_\cdot^g$, qu'on appellera filtration canonique de Harder–Narasimhan de g ou de $\mathcal{E}^g$.

Rappelons tout de suite le lemme fondamental suivant dû à Harder et Narasimhan :

LEMME 1. — *Pour tout polygone* $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, *l'ensemble*

$$\{g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \ , \ \bar{p}^g \leq p\}$$

est compact. □

On prouve plus généralement que pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$ et tout sous-groupe parabolique P de G fixés et lorsque Q décrit l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques de G contenus dans P, la famille des polygones p^g_Q possède un plus grand élément. On le note $\bar{p}^g_P$ et on l'appelle polygone canonique de Harder-Narasimhan de l'élément g muni de la filtration P.

De plus, parmi les sous–groupes paraboliques $Q \subseteq P$ de G dont le polygone p^g_Q se confonde avec le polygone canonique $\bar{p}^g_P$, il en existe un plus grand $\overline{Q}^g_P \subseteq P$, correspondant à une filtration $\mathcal{E}^{g,\overline{Q}^g_P}_{\cdot} = \overline{\mathcal{E}}^{g,P}_{\cdot}$, qu'on appellera raffinement canonique de Harder–Narasimhan de (g,P) ou de $\mathcal{E}^{g,P}_{\cdot}$.

Le lemme 1 entraîne le résultat plus général :

COROLLAIRE 2. — *Pour tout sous-groupe parabolique* $P \in \mathcal{P}$ *et pour tout polygone* $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, *l'ensemble*

$$\{g \in P(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \ , \ \bar{p}^g_P \leq p \wedge p^g_P \geq -p\}$$

est compact. □

Pour des raisons techniques il nous faudra aussi pouvoir modifier les filtrations canoniques $\overline{Q}^g$ et $\overline{Q}^g_P$ de la façon que voici :

Pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$ [resp. et tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}$] et toute constante $\mu \geq 0$, on notera ${}^{\mu}\overline{Q}^g$ [resp. ${}^{\mu}\overline{Q}^g_P$] l'unique sous-groupe parabolique de G tel que si ${}^{\mu}\overline{\mathcal{E}}^g_{\cdot}$ [resp. ${}^{\mu}\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_{\cdot}$] désigne la filtration de $\mathcal{E}^g$ associée, alors

$$\{{}^{\mu}\overline{\mathcal{E}}^g_i\} = \{\overline{\mathcal{E}}^g_j, \mu(\overline{\mathcal{E}}^g_{j-1}\backslash\overline{\mathcal{E}}^g_j) > \mu + \mu(\overline{\mathcal{E}}^g_j\backslash\overline{\mathcal{E}}^g_{j+1})\}$$

[resp.

$$\{{}^{\mu}\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_i\} = \{\mathcal{E}^{g,P}_j\} \cup \{\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_j, \mu(\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_{j-1}\backslash\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_j) > \mu + \mu(\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_j\backslash\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_{j+1})\}] \ .$$

Bien sûr, on a toujours ${}^{\mu}\overline{Q}^g \supseteq \overline{Q}^g$ [resp. $P \supseteq {}^{\mu}\overline{Q}^g_P \supseteq \overline{Q}^g_P$]. Autrement dit la filtration ${}^{\mu}\overline{\mathcal{E}}^g_{\cdot}$ de $\mathcal{E}^g$ est moins fine que la filtration canonique $\overline{\mathcal{E}}^g_{\cdot}$ [resp. la filtration ${}^{\mu}\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_{\cdot}$ est plus fine que la filtration $\mathcal{E}^{g,P}_{\cdot}$ de $\mathcal{E}^g$ et elle est moins fine que le raffinement canonique $\overline{\mathcal{E}}^{g,P}_{\cdot}$].

Nous aurons également besoin d'une variante de la notion de polygone attaché à une filtration $\mathcal{E}^{g,Q}_{\cdot}$ d'un fibré $\mathcal{E}^g$, lorsqu'on fixe un homomorphisme $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$.

Considérons g un élément de $G(\mathbb{A})$, $Q \in \mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de G et γ un élément de $Q(F)$. Ainsi γ stabilise-t-il la filtration $E^Q_{\cdot}$ de $E = D^r$ associée à Q et pour tout indice i on peut introduire l'automorphisme γ_i restriction de γ à E^Q_i. On notera $p^g_{Q,\gamma,\varepsilon} : [0,r] \to \mathbb{R}$ le polygone défini par les conditions :

- $p^g_{Q,\gamma,\varepsilon}$ s'annule aux bornes 0 et r et il est affine sur chaque intervalle $[\mathrm{rg} E^Q_{i-1}, \mathrm{rg} E^Q_i]$,
- pour tout indice i, on a

$$p^g_{Q,\gamma,\varepsilon}(\mathrm{rg} E^Q_i) = (\deg \mathcal{E}^{g,Q}_i + \varepsilon(\det \gamma_i)) - \frac{\mathrm{rg} E^Q_i}{r}(\deg \mathcal{E}^g + \varepsilon(\det \gamma)) .$$

Ici encore on prouve d'après la proposition 2 du paragraphe II.2a que pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$ et tout automorphisme $\gamma \in G(F)$, et lorsque Q décrit l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques de G contenant γ, la famille des polygones $p^g_{Q,\gamma,\varepsilon}$ possède un plus grand élément. On le note $\bar{p}^g_{\gamma,\varepsilon}$ et on l'appelle polygone ε-canonique de Harder-Narasimhan de (g,γ). C'est un polygone concave.

Il est réalisé par un plus grand sous-groupe parabolique $\overline{Q}^g_{\gamma,\varepsilon}$ de G contenant γ, correspondant à une filtration $\overline{\mathcal{E}}^{g,\gamma,\varepsilon}_{\cdot}$, qu'on appelle filtration ε-canonique de Harder-Narasimhan de (g,γ) ou de $(\mathcal{E}^g,\gamma)$.

Plus généralement, pour $g \in G(\mathbb{A}), P$ un sous-groupe parabolique de G et $\gamma \in P(F)$, on dispose d'un raffinement ε-canonique $\overline{Q}^g_{P,\gamma,\varepsilon}$ inclus dans P et contenant γ, correspondant à une filtration $\overline{\mathcal{E}}^{g,P,\gamma,\varepsilon}_{\cdot}$ de $\mathcal{E}^g$, et dont le ε-polygone est noté $\bar{p}^g_{P,\gamma,\varepsilon}$.

Lorsque $\varepsilon = 0$ on pourra ôter le "ε" dans toutes ces notations.

c) Troncatures par le polygone canonique. Un peu de combinatoire

Introduisons d'abord une nouvelle notation.

Si $p, q : [0,r] \to \mathbb{R}$ sont deux polygones et $P \in \mathcal{P}$ est un sous–groupe parabolique de G, on notera $q >_P p$ pour signifier que

$$q(\mathrm{rg}\, E^P_i) > p(\mathrm{rg}\, E^P_i), \quad 1 \leq i < |P| .$$

Pour P contenant P_0, on remarque que la fonction caractéristique sur $G(\mathbb{A})$

$$g \longmapsto \mathbb{1}(p_P^g >_P p)$$

se confond avec celle notée dans [Arthur]

$$g \longmapsto \widehat{\tau}_P(H(g) - T)$$

si T est un cocaractère réel de M_0 tel que la famille des différences de pentes

$$[p(r') - p(r'-1)] - [p(r'+1) - p(r')]\,, \quad 1 \le r' < r\,,$$

soit égale à celle des $\alpha(T)$, α décrivant l'ensemble des racines simples de P_0.

Relions par une première formule les troncatures par le polygone canonique aux troncatures d'Arthur :

Proposition 3. — *Pour tout polygone concave $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$, on a l'identité suivante entre fonctions caractéristiques $\mathbb{1}(\cdots)$ de la variable $g \in G(\mathbb{A})$:*

$$\mathbb{1}(\bar{p}^g \le p) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_0 \\ P \supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P p)$$

Démonstration : On sait que pour tout $P \in \mathcal{P}$ et tout $\delta \in P(F)\backslash G(F)$ on a $p_P^{\delta g} = p_{\delta^{-1}P\delta}^g$. De plus, quand P décrit le sous-ensemble de $\mathcal{P}_0$ des éléments contenant P_0 et δ décrit $P(F)\backslash G(F)$, $\delta^{-1}P\delta$ décrit l'ensemble $\mathcal{P}$ de tous les sous-groupes paraboliques de G. Ainsi la somme de droite se récrit-elle sous la forme

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} (-1)^{|P|-1} \mathbb{1}(p_P^g >_P p)\;.$$

Lorsque $\bar{p}^g = \max\limits_{P \in \mathcal{P}} \{p_P^g\}$ vérifie $\bar{p}^g \le p$, tous les termes dans cette somme sont nuls excepté celui correspondant à $P = G$ qui vaut 1.

Reste à voir que si $\bar{p}^g$ n'est pas majoré par p, cette somme est nulle. Or on sait associer à tout $P \in \mathcal{P}$ le raffinement canonique $\overline{Q}_P^g$ de (g,P). On peut regrouper les termes suivant leurs raffinements canoniques et il suffit de prouver que pour tout $\overline{Q} \in \mathcal{P}$:

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ \overline{Q}_P^g = \overline{Q}}} (-1)^{|P|-1} \mathbb{1}(p_P^g >_P p) = 0$$

C'est le cas particulier $\mu = 0$, $Q = \overline{Q}$ du lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient $\mu \geq 0$ une constante, $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone et Q, $\overline{Q} \in \mathcal{P}$ deux sous-groupes paraboliques tels que $\overline{Q} \subseteq Q$.*

Alors la fonction sur $\overline{Q}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$

$$g \longmapsto \left| \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ \overline{Q}^g_P = \overline{Q}, {}^{\mu}\overline{Q}^g_P = Q}} (-1)^{|P|-1} \mathbb{1}(p^g_P >_P p) \right|$$

est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble compact qui contient $\{g, \overline{Q}^g = \overline{Q} \wedge {}^{\mu}\overline{Q}^g = Q \wedge \overline{p}^g \leq p\}$ et même lui est égal si le polygone p est μ-grand au sens que pour tout r', $1 \leq r' < r$, $[p(r') - p(r'-1)] \geq \mu + [p(r'+1) - p(r')]$.

Démonstration : Introduisons les ensembles suivants, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$:

$$I = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,Q}_i \ , \ 1 \leq i < |Q|\}$$

$$\bar{I} = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i \ , \ 1 \leq i < |\overline{Q}|\}$$

$$\bar{I}_0 = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i \ , \ \mu(\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_{i-1}\backslash\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i) > \mu(\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i\backslash\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_{i+1})\}$$

$$\bar{I}_\mu = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i \ , \ \mu(\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_{i-1}\backslash\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i) > \mu + \mu(\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_i\backslash\mathcal{E}^{g,\overline{Q}}_{i+1})\}$$

$$I_p = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,Q}_i \ , \ (p^g_Q - p)(\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,Q}_i) > 0\}$$

Il est immédiat que l'application $P \mapsto I_P = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}^{g,P}_i, 1 \leq i < |P|\}$ définit une bijection de l'ensemble $\{P \in \mathcal{P}, \overline{Q}^g_P = \overline{Q} \wedge {}^{\mu}\overline{Q}^g_P = Q \wedge p^g_P >_P p\}$ sur l'ensemble des parties J de I qui vérifient $\bar{I}_\mu \subseteq I \subseteq \bar{I}$ et $\bar{I}\backslash\bar{I}_0 \cup I\backslash\bar{I}_\mu \subseteq J \subseteq I_p$ et que pour tout tel P, $|P| - 1 = \#I_P$. Ainsi la fonction considérée est-elle la fonction caractéristique du sous-ensemble des $g \in \overline{Q}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ vérifiant $\bar{I}_\mu \subseteq I \subseteq \bar{I}$ et $\bar{I}\backslash\bar{I}_0 \cup I\backslash\bar{I}_\mu = I_p$. D'après le corollaire 2, c'est une partie compacte, et qui contient évidemment $\{g, \overline{Q}^g = \overline{Q} \wedge {}^{\mu}\overline{Q}^g = Q \wedge \overline{p}^g \leq p\}$.

Voyons maintenant ce qu'impliquent les relations $\bar{I}_\mu \subseteq I \subseteq \bar{I}$ et $\bar{I}\backslash\bar{I}_0 \cup I\backslash\bar{I}_\mu = I_p$ lorsque le polygone p est μ–grand. Tout d'abord, on prétend que $I_p = \emptyset$.

Supposant $I_p \neq \emptyset$, soit r' le plus petit des éléments de $\bar{I}$ qui maximisent la différence $(p^g_{\overline{Q}} - p)(r')$. Comme p est μ–grand on a nécessairement $r' \in \bar{I}_\mu$ d'où d'une part $r' \in I$ et même $r' \in I_p$ puisque $I_p \neq \emptyset$ et d'autre part $r' \in \bar{I}_0$. Cela contredit l'égalité $\bar{I}\backslash\bar{I}_0 \cup I\backslash\bar{I}_\mu = I_p$.

Comme $I_p = \emptyset$, on a $\bar{I} = \bar{I}_0$ et $I = \bar{I}_\mu$ c'est–à–dire $\overline{Q}^g = \overline{Q}$ et ${}^\mu\overline{Q}^g = Q$. Les relations $p^g_Q \leq p$ et ${}^\mu\overline{Q}^g = Q$ impliquent alors $\overline{p}^g = p^g_{\overline{Q}} \leq p$ puisque le polygone p est μ–grand.

Ceci termine la démonstration du lemme 4 et donc aussi de la proposition 3.

$\square$

On prouve de la même façon que la proposition 3 :

PROPOSITION 3'. —

(i) *Soit* $\varepsilon : \mathbb{A}^\times / O^\times_\mathbb{A} \to \mathbb{R}$ *un homomorphisme.*

Pour tout polygone concave $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, *on a l'identité suivante entre fonctions caractéristiques* $\mathbb{1}(\cdots)$ *des variables* $g \in G(\mathbb{A})$ *et* $\gamma \in G(F)$ *:*

$$\mathbb{1}(\bar{p}^g_{\gamma,\varepsilon} \leq p) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_0 \\ P \supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{\substack{\delta \in P(F)\backslash G(F) \\ \delta\gamma\delta^{-1} \in P(F)}} \mathbb{1}(p^{\delta g}_{P,\delta\gamma\delta^{-1},\varepsilon} >_P p)$$

(ii) *Pour tout polygone concave* $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, *on a en particulier :*

$$\mathbb{1}(\bar{p}^g_\gamma \leq p) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_0 \\ P \supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{\substack{\delta \in P(F)\backslash G(F) \\ \delta\gamma\delta^{-1} \in P(F)}} \mathbb{1}(p^{\delta g}_P >_P p)$$

$\square$

d) Conséquences de l'invariance locale

Pour tout sous–groupe parabolique $P \in \mathcal{P}$, on note dn_P la mesure de Haar sur $N_P(\mathbb{A})$ pour laquelle le quotient compact $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$ est de volume 1.

On a le lemme fondamental suivant (pour une autre formulation, voir par exemple [Mœglin, Waldspurger, 1994] lemme I.2.7) :

LEMME 5. — *Pour tout sous-groupe ouvert* K' *de* K, *il existe une constante* $\mu \geq 0$ *ne dépendant que de* K' *telle que :*

Pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, *pour tout sous-groupe parabolique* $P \in \mathcal{P}$ *de* G *vérifiant* $P \supseteq {}^\mu\overline{Q}^g$ *et pour toute fonction* $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *invariante à gauche par* $N_P(F)$ *et invariante à droite par* K', *on a :*

$$\varphi(g) = \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P g)$$

Démonstration : Il n'y a pas de restriction à supposer, quitte à changer g en δg et $\varphi(\cdot)$ en $\varphi(\delta^{-1}\cdot)$ pour un certain $\delta \in G(F)$, que la filtration canonique $\overline{Q}^g$ de g est un élément Q de $\mathcal{P}_0$. A fortiori P qui contient Q est aussi dans $\mathcal{P}_0$ et il n'y a plus qu'un nombre fini de possibilités pour P et Q.

En écrivant la décomposition d'Iwasawa de g et d'après le corollaire 2, on peut supposer de plus que g est de la forme $g = nzmk$ où :

- $k \in K$,
- n reste dans un domaine fondamental compact fixé de $N_Q(\mathbb{A})$ relativement au réseau $N_Q(F)$,
- m reste dans une partie compacte fixée de $M_Q(\mathbb{A})$,
- $z = (z^1, \ldots, z^{|Q|})$ est dans $Z_Q(\mathbb{A}) = Z_Q^1(\mathbb{A}) \times \cdots \times Z_Q^{|Q|}(\mathbb{A}) \cong (\mathbb{A}^\times)^{|Q|}$, et pour tous indices i, j, $1 \leq i < j \leq |Q|$, on a $\mu(z^i) \geq \mu(z^j)$, et même $\mu(z^i) \geq \mu + \mu(z^j)$ si Z_Q^i et Z_Q^j ne sont pas dans le même facteur simple de M_P.

On en déduit aussitôt que si la constante μ est assez grande en fonction de K', il existe dans $N_P(\mathbb{A})$ un domaine fondamental compact $\overline{N_P(\mathbb{A})}$ relativement au réseau $N_P(F)$ tel que pour tout $n_P \in \overline{N_P(\mathbb{A})}$ l'élément $g^{-1}n_P g = k^{-1}m^{-1}z^{-1}n^{-1}n_P nzmk$ soit dans K'. Et comme φ est invariante à droite par K', on obtient

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P g) = \int_{\overline{N_P(\mathbb{A})}} dn_P \cdot \varphi(g(g^{-1}n_P g)) = \varphi(g) \ .$$

$\square$

Le lemme 5 entraîne aussitôt le résultat plus général :

COROLLAIRE 6. — *Pour tout sous-groupe ouvert K' de K, il existe une constante $\mu \geq 0$ ne dépendant que de K' telle que :*

Pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, pour tous sous-groupes paraboliques $P, Q \in \mathcal{P}$ de G vérifiant $P \supseteq Q \supseteq {}^{\mu}\overline{Q}^g_P$ et pour toute fonction $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ invariante à gauche par $N_Q(F) \supseteq N_P(F)$ et invariante à droite par K', on a :

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P g) = \int_{N_Q(F)\backslash N_Q(\mathbb{A})} dn_Q \cdot \varphi(n_Q g)$$

$\square$

Pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$, l'opérateur de troncature d'Arthur Λ^p sur les fonctions localement constantes $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ est défini par la formule :

$$(\Lambda^p\varphi)(g) = \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_0 \\ P\supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P p) \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P\delta g)$$

Ceci étant rappelé, on a :

PROPOSITION 7. — *Pour tout sous-groupe ouvert K' de K, il existe une constante $\mu \geq 0$ ne dépendant que de K' telle que, pour tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ qui soit μ-grand et pour toute fonction $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ invariante à droite par K', on ait :*

$$(\Lambda^p\varphi)(g) = \mathbb{1}(\bar{p}^g \leq p)\varphi(g)\ ,\ \forall g \in G(\mathbb{A})$$

Démonstration : La formule de définition de $(\Lambda^p\varphi)(g)$ s'écrit encore :

$$(\Lambda^p\varphi)(g) = \sum_{P\in\mathcal{P}} (-1)^{|P|-1}\mathbb{1}(p_P^g >_P p) \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P g)$$

Lorsque $\bar{p}^g = \max\limits_{P\in\mathcal{P}}\{p_P^g\}$ vérifie $\bar{p}^g \leq p$, tous les termes dans cette somme sont nuls à l'exception de celui correspondant à $P = G$ qui vaut $\varphi(g)$.

Reste à voir que si $\bar{p}^g$ n'est pas majoré par p, cette somme est nulle. Or on sait associer à tout $P \in \mathcal{P}$ le raffinement canonique $\overline{Q}_P^g = \overline{Q}$ de (g, P) ainsi que, pour $\mu \geq 0$ fixée, la filtration ${}^\mu\overline{Q}_P^g = Q$. Et si μ a été choisie comme dans le corollaire 6, on a avec ces notations

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \varphi(n_P g) = \int_{N_Q(F)\backslash N_Q(\mathbb{A})} dn_Q \cdot \varphi(n_Q g)\ .$$

Regroupons donc les $P \in \mathcal{P}$ suivant les couples $(\overline{Q}_P^g, {}^\mu\overline{Q}_P^g) = (\overline{Q}, Q)$ associés. On conclut d'après le lemme 4. $\square$

e) Conséquences de la compacité du support

On a l'autre lemme fondamental suivant :

LEMME 8. — *Pour toute partie compacte S de $G(\mathbb{A})$, il existe une constante $\mu \geq 0$ telle que pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $\gamma \in G(F)$, on ait l'implication :*

$$g^{-1}\gamma g \in S \Longrightarrow \gamma \in {}^\mu\overline{Q}^g$$

Démonstration : Choisissons un élément $b \in \mathbb{A}^\times$ tel que $bS \subseteq M_r(\mathcal{D}_\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})$. Et notons $\mathcal{L}$ le O_X-Module inversible associé à l'élément b^{-1}. Comme $g^{-1}\gamma g \in S$, γ induit un homomorphisme de $\mathcal{D}$-Modules sur X partout défini $\mathcal{E}^g \xrightarrow{\gamma} \mathcal{E}^g \otimes_{O_X} \mathcal{L}$. Il s'agit de montrer que pour tout indice i s'annule le composé

$$^\mu\overline{\mathcal{E}}_i^g \hookrightarrow \mathcal{E}^g \xrightarrow{\gamma} \mathcal{E}^g \otimes_{O_X} \mathcal{L} \to ({}^\mu\overline{\mathcal{E}}_i^g \backslash \mathcal{E}^g) \otimes_{O_X} \mathcal{L} \, .$$

Pour cela, il suffit d'après la proposition 2(v) du paragraphe II.2a que la pente maximale μ^+ du fibré d'arrivée soit strictement inférieure à la pente minimale μ^- du fibré de départ. Or $\mu^+(({}^\mu\overline{\mathcal{E}}_i^g \backslash \mathcal{E}^g) \otimes_{O_X} \mathcal{L}) = \mu^+({}^\mu\overline{\mathcal{E}}_i^g \backslash \mathcal{E}^g) + d \deg \mathcal{L}$ et par définition même de la filtration ${}^\mu\overline{\mathcal{E}}_\cdot^g$ on a $\mu^-({}^\mu\overline{\mathcal{E}}_i^g) > \mu + \mu^+({}^\mu\overline{\mathcal{E}}_i^g \backslash \mathcal{E}^g)$. Ainsi la constante $\mu = d \deg \mathcal{L} = -d \deg b$ répond-elle à la question posée. □

Le lemme 8 entraîne aussitôt le résultat plus général :

Corollaire 9. — *Pour toute partie compacte S de $G(\mathbb{A})$, il existe une constante $\mu \geq 0$ telle que pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, pour tout sous-groupe parabolique P de G et pour tout $\gamma \in P(F)$ on ait l'implication :*

$$\exists n \in N_P(\mathbb{A}), g^{-1}\gamma n g \in S \Longrightarrow \gamma \in {}^\mu\overline{Q}_P^g$$

□

Citons la conséquence suivante du lemme 8 :

Proposition 10. — *Pour toute partie compacte S de $G(\mathbb{A})$, il existe une constante $\mu \geq 0$ telle que pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ qui soit μ-grand, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et pour tout $\gamma \in G(F)$, on ait l'implication :*

$$g^{-1}\gamma g \in S \Longrightarrow \mathbb{1}(\bar{p}_\gamma^g \leq p) = \mathbb{1}(\bar{p}^g \leq p)$$

Démonstration : Bien sûr on a sans hypothèse aucune $\bar{p}_\gamma^g \leq \bar{p}^g$, d'où l'implication $\bar{p}^g \leq p \Longrightarrow \bar{p}_\gamma^g \leq p$.

Réciproquement supposons que $\bar{p}_\gamma^g \leq p$. Si μ est choisie comme dans le lemme 8, l'hypothèse $g^{-1}\gamma g \in S$ entraîne que $\gamma \in {}^\mu\overline{Q}^g$. Donc le polygone ${}^\mu\bar{p}^g$ du couple $(g, {}^\mu\overline{Q}^g)$ est majoré par $\bar{p}_\gamma^g$ et a fortiori par p. Or, comme p est μ-grand, il est équivalent de demander que ${}^\mu\bar{p}^g \leq p$ ou que $\bar{p}^g \leq p$. □

Etant donnés $h : G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact et P un objet de $\mathcal{P}_0$, l'opérateur $\varphi \longmapsto \varphi * h$ de convolution à droite par h dans l'espace des fonctions localement intégrables de

$M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ admet un noyau qui s'écrit

$$K_{h,P}(g',g) = \sum_{\gamma\in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g')\,.$$

La combinaison des deux lemmes fondamentaux 5 et 8 entraîne :

PROPOSITION 11. — *Soit $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction supportée par une partie compacte S et invariante à droite par un sous-groupe ouvert K' de K.*

Alors pour tout polygone $p : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction

$$g \longmapsto \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_0\\ P\supseteq P_0}} (-1)^{(P)-1} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P p) K_{h,P}(\delta g, \delta g)$$

est à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$. Et si le polygone p est μ-grand pour $\mu \geq 0$ une constante assez grande en fonction de S et K', elle est égale aux deux fonctions

$$g \longmapsto \sum_{\gamma\in G(F)} \mathbb{1}(\overline{p}_\gamma^g \leq p) h(g^{-1}\gamma g)$$

$$g \longmapsto \mathbb{1}(\overline{p}^g \leq p) K_{h,G}(g,g)\,.$$

Démonstration :

Récrivons la somme considérée sous la forme

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} (-1)^{|P|-1} \mathbb{1}(p_P^g >_P p) \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \sum_{\gamma\in P(F)} h(g^{-1}\gamma n_P g)\,.$$

Choisissons $\mu \geq 0$ une constante qui satisfasse la conclusion du corollaire 9 relativement à S et celle du corollaire 6 relativement à K'. Associant à tout $P \in \mathcal{P}$ le raffinement canonique $\overline{Q}_P^g = \overline{Q}$ de (g,P) ainsi que la filtration ${}^{\mu}\overline{Q}_P^g = Q$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \sum_{\gamma\in P(F)} h(g^{-1}\gamma n_P g) \\
&= \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \sum_{\gamma\in Q(F)} h(g^{-1}\gamma n_P g) \\
&= \int_{N_Q(F)\backslash N_Q(\mathbb{A})} dn_Q \cdot \sum_{\gamma\in Q(F)} h(g^{-1}\gamma n_Q g)
\end{aligned}$$

Regroupons donc les $P \in \mathcal{P}$ suivant les couples $(\overline{Q}_P^g, {}^{\mu}\overline{Q}_P^g) = (\overline{Q}, Q)$ associés. On conclut d'après le lemme 4. ∎

Nous voulons également écrire une variante de la proposition 11 s'appliquant à un type particulier de fonctions $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}$ localement constantes à support compact.

Supposons fixé ε un homomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times$ dans le groupe additif $\mathbb{R}$. On dira qu'une telle fonction h est adaptée à ε si elle vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ on a l'implication

$$h(g) \neq 0 \Longrightarrow \varepsilon(\det g) = r \ ,$$

- pour tout $P \in \mathcal{P}_0$ et pour tout élément $m = (m^1, \ldots, m^{|P|})$ dans $M_P(\mathbb{A}) = M_P^1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_P^{|P|}(\mathbb{A})$ tel qu'existent $k, k' \in K$ avec

$$\int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(kmn_Pk') \neq 0 \ ,$$

il y a un unique indice i, $1 \leq i \leq |P|$, vérifiant

$$\varepsilon(\det m^i) = r \text{ et } \varepsilon(\det m^j) = 0 \ , \ \forall j \neq i \ .$$

Si h est adaptée à ε, alors pour tout $P \in \mathcal{P}_0$ le noyau $K_{h,P} : (g', g) \mapsto \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g')$ se décompose de manière naturelle en une somme

$$K_{h,P} = \sum_{1 \leq i \leq |P|} K_{h,P}^i$$

où pour tous $g', g \in G(\mathbb{A})$ et pour tout indice i, $1 \leq i \leq |P|$, $K_{h,P}^i(g', g)$ est défini de la manière suivante :

On écrit pour g' et g des décompositions d'Iwasawa $g' = m'n'k'$, $g = mnk$ où k', k sont dans K, n', n sont dans $N_P(\mathbb{A})$ et $m' = (m'^1, \ldots, m'^{|P|})$, $m = (m^1, \ldots, m^{|P|})$ sont dans $M_P(\mathbb{A}) = M_P^1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_P^{|P|}(\mathbb{A})$. Et on pose

$$K_{h,P}^i(g', g) = \sum_{\gamma} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g')$$

où la sommation est restreinte aux $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^{|P|})$ dans $M_P(F) = M_P^1(F) \times \cdots \times M_P^{|P|}(F)$ vérifiant

$$\begin{cases} \varepsilon((m^i)^{-1}\gamma^i m'^i) = r \\ \varepsilon((m^j)^{-1}\gamma^j m'^j) = 0 \ , \ \forall j \neq i \ . \end{cases}$$

Introduisons encore une nouvelle notation. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}$ de G et pour tout indice i, $1 \leq i \leq |P|$, on désigne par p_P^i le polygone $[0, r] \to \mathbb{R}$ qui est affine sur chaque intervalle $[\mathrm{rg} E_{j-1}^P, \mathrm{rg} E_j^P]$, $1 \leq j \leq |P|$, et qui en chaque point $\mathrm{rg} E_j^P$ vaut

$$\begin{cases} -\mathrm{rg} E_j^P & \text{si} \quad 0 \leq j < i\,, \\ r - \mathrm{rg} E_j^P & \text{si} \quad i \leq j \leq r\,. \end{cases}$$

Ceci étant posé, on prouve de la même façon que la proposition 11 :

PROPOSITION 11'. — *Soit $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction supportée par une partie compacte S, invariante à droite par un sous-groupe ouvert K' de K et adaptée à un certain homomorphisme $\varepsilon : \mathbb{A}^\times / O_{\mathbb{A}}^\times \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Alors pour tout réel α et pour tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$, la fonction

$$g \longmapsto \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_0 \\ P \supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{1 \leq i \leq |P|} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P -\alpha p_P^i) K_{h,P}^i(\delta g, \delta g)$$

est à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$. Et si le polygone p est μ-grand pour $\mu \geq 0$ une constante assez grande en fonction de S, de K' et de $|\alpha|$, elle est égale à la fonction

$$g \longmapsto \sum_{\gamma \in G(F)} \mathbb{1}(\overline{p}_{\gamma, \alpha\varepsilon}^g \leq p) h(g^{-1}\gamma g)\,.$$

□

2. — Transfert

a) Traces tronquées d'Arthur et nombres de Lefschetz

Le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ est muni de la mesure de Haar dg pour laquelle le sous-groupe ouvert compact maximal $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$ est de volume 1.

Etant donnée $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact, on appelle trace tronquée d'Arthur de h par un polygone p l'intégrale

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_0 \\ P \supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P p) K_{h,P}(\delta g, \delta g)$$

qui est bien définie d'après la proposition 11 du précédent paragraphe.

Lorsque h est de surcroît adaptée à un certain homomorphisme ε : $\mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$, on dispose aussi pour tout réel α de l'intégrale

$$\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_0 \\ P\supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{1\leq i\leq |P|} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P -\alpha p_P^i) K_{h,P}^i(\delta g, \delta g)$$

qui est bien définie d'après la proposition 11′ du précédent paragraphe. On remarque que $\mathrm{Tr}_0^{\leq p}(h) = \mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ et on prouvera au paragraphe VI.2f que les fonctions $\alpha \longmapsto \mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(h)$ sont périodiques de période $r!d$.

La suite de ce chapitre contient la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient S' une partie compacte de $G(\mathbb{A})$, K' un sous-groupe ouvert de K et $t \geq 0$ un entier.*

Soient 0 et ∞ deux points fermés de X ou, si l'on préfère, deux places de F. On suppose que 0 et ∞ sont distincts, qu'ils ne sont pas dans l'ensemble fini T_a et qu'existent des isomorphismes $\mathcal{D}_0 \cong M_d(O_0)$, $\mathcal{D}_\infty \cong M_d(O_\infty)$. On suppose également que $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$ sont assez grands en fonction de S' et t (et précisons que cette condition est vide si $S' \subseteq K$ et $t = 0$).

Soient $\overline{0}$ et $\overline{\infty}$ deux points de $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de 0 et ∞.

Soit $\varepsilon_0 : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$ l'homomorphisme $(a_x)_{x\in|X|} \mapsto \deg(0)0(a_0)$.

Soit $f^{\infty,0} : G(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}$ (pour $\mathbb{A}^{\infty,0} = \mathbb{A}/(F_\infty \times F_0)$) une fonction invariante à droite par l'image dans $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ de $K' \subseteq K \subseteq G(\mathbb{A})$ et supportée par l'image dans $G(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}}$ du compact S' de $G(\mathbb{A})$.

Soient $u, s \geq 1$ deux entiers avec $\deg(0)|u$, $\deg(\infty)|s$ et $|u-s| \leq t$.

Soit $f_0^{u'} : G(F_0) \to \mathbb{Q}$ [resp. $f_\infty^{-s'} : G(F_\infty) \to \mathbb{Q}$] la fonction de Drinfeld en rang rd et de niveau $u' = \dfrac{u}{\deg(0)}$ [resp. de niveau $-s' = -\dfrac{s}{\deg(\infty)}$] sur $G(F_0) \cong \mathrm{GL}_{rd}(F_0)$ [resp. sur $G(F_\infty) \cong \mathrm{GL}_{rd}(F_\infty)$].

Soit $f : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}$ la fonction $f = f_\infty^{-s'} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^{u'}$ qui est adaptée à $\dfrac{r}{u}\varepsilon_0$.

Alors il existe une constante $\mu \geq 0$, ne dépendant que de K' et S', telle que, pour tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ qui soit μ-grand, les deux fonctions périodiques

$$\mathbb{R} \to \mathbb{Q} \quad \alpha \mapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0}, u, s)$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{Q} \quad \alpha \mapsto \mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f)$$

aient même moyenne. □

Le fait que la fonction $f = f_\infty^{-s'} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^{u'}$ soit adaptée à l'homomorphisme $\frac{r}{u}\varepsilon_0$ résulte du lemme 9 (i) du paragraphe III.6c.

Et on rappelle que la périodicité de la fonction $\alpha \longmapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,s)$ a été prouvée dans le lemme 5 du paragraphe III.5b.

b) Une fonction de troncature auxiliaire

Etant donné $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$ un homomorphisme, nous aurons besoin d'une variante de la notion de polygone ε–canonique.

Tout d'abord, on dira qu'un polynôme unitaire χ à coefficients dans F et dont le coefficient constant $\det\chi$ est non nul est adapté à ε si $\varepsilon(\det\chi) > 0$ et si le coefficient constant $\det\mu$ de tout polynôme unitaire μ entrant en facteur dans χ vérifie $\varepsilon(\det\mu) \geq 0$.

Et on dira qu'un élément $\gamma \in G(F)$ est adapté à ε si son polyôme caractéristique χ_γ l'est. Dans ce cas, on dira qu'un sous–module W de $E = D^r$ est adapté à γ et ε si γ préserve W et si la restriction γ_W de γ à W vérifie l'alternative $\varepsilon(\det\gamma_W) = 0$ ou $\varepsilon(\det\gamma_W) = \varepsilon(\det\gamma)$. Comme γ est adapté à ε, on voit que la famille des sous–modules de E adaptés à γ et ε est stable par intersections et sommes.

Disons aussi qu'un sous–groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}$ est adapté à γ et ε si tous les objets de la filtration associée $E_\cdot^Q$ de E sont adaptés à γ et ε.

Il résulte de la proposition 2 du paragraphe II.2a que pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et lorsque Q décrit l'ensemble des sous–groupes paraboliques de G adaptés à γ et ε, la famille des polygones $p^g_{Q,\gamma,\alpha\varepsilon}$ possède un plus grand élément $\widetilde{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon}$. C'est un polygone concave. On note $\widetilde{Q}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon}$ le plus grand sous–groupe parabolique adapté à γ et ε qui le réalise, et $\widetilde{\mathcal{E}}_\cdot^{g,\gamma,\alpha\varepsilon}$ la filtration associée du fibré $\mathcal{E}^g$.

Plus généralement, si P est un sous–groupe parabolique adapté à γ et ε, on dispose d'un raffinement canonique $\widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} \subseteq P$, correspondant à une filtration $\widetilde{\mathcal{E}}_\cdot^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}$ de $\mathcal{E}^g$ et dont le $\alpha\varepsilon$–polygone est noté $\widetilde{p}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon}$.

LEMME 2. — *Soit $\gamma \in G(F)$ un automorphisme de $E = D^r$ adapté à un homomorphisme $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$.*

Décomposant le polynôme caractéristique de γ en $\chi_\gamma = \chi'_\gamma\chi''_\gamma$ où χ'_γ [resp. χ''_γ] rassemble tous les facteurs premiers μ vérifiant $\varepsilon(\det\mu) > 0$ [resp. $\varepsilon(\det\mu) = 0$], soient $E'_\gamma = \mathrm{Ker}\,\chi'_\gamma(\gamma)$, $E''_\gamma = \mathrm{Ker}\,\chi''_\gamma(\gamma)$ et γ', γ'' les restrictions de γ à ces sous–modules de E.

Alors :

(i) *On a $E'_\gamma \oplus E''_\gamma = E$. De plus les sous–modules de E adaptés à γ et ε sont exactement ceux de la forme $W = W' \oplus W''$ avec $W' = 0$ ou $W' = E'_\gamma$ et W'' un sous–module de E''_γ stable par γ''.*

(ii) *Pour tout sous–module W de E, notons P_W le sous–groupe parabolique de G stabilisateur de W et $\deg^W : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{Z}$ l'unique* *application invariante à droite par* $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$ *et qui à tout élément de* $P_W(\mathbb{A})$ *associe le degré du déterminant dans* $\mathbb{A}^\times$ *de sa restriction dans* $\mathrm{Aut}_{D_{\mathbb{A}}}(W \otimes_F \mathbb{A})$.

Ceci étant posé, pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, *tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et tout polygone* $p : [0, r] \to \mathbb{R}$, *on a* $\widetilde{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p$ *si et seulement si :*

• $\left(1 - \frac{\mathrm{rg} W}{r}\right)\alpha\varepsilon(\det\gamma) + \deg^W(g) - \frac{\mathrm{rg} W}{r}\deg^E(g) \leq p(\mathrm{rg} W)$ *pour tout* W *comme dans* (i) *avec* $W' = E'_\gamma$,

• $-\frac{\mathrm{rg} W}{r}\alpha\varepsilon(\det\gamma) + \deg^W(g) - \frac{\mathrm{rg} W}{r}\deg^E(g) \leq p(\mathrm{rg} W)$ *pour tout* W *comme dans* (i) *avec* $W' = 0$.

Démonstration :

(i) La première assertion résulte de ce que $\chi_\gamma = \chi'_\gamma \chi''_\gamma$ est une décomposition du polynôme caractéristique de γ comme produit de deux polynômes premiers entre eux. Ceci implique même que les sous–modules de E stables par γ sont exactement ceux de la forme $W = W' \oplus W''$ avec W', W'' des sous–modules de E'_γ, E''_γ stables par γ', γ''. Alors la restriction γ_W de γ à W vérifie $\varepsilon(\det\gamma_W) = 0$ si et seulement si $W' = 0$ et $\varepsilon(\det\gamma_W) = \varepsilon(\det\gamma)$ si et seulement si $W' = E'_\gamma$.

(ii) est une simple traduction des définitions, compte tenu de (i). □

Etant donné $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact et χ un polynôme unitaire à coefficients dans F, on dira que le couple (h, χ) est adapté à un homomorphisme $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$ si :

• χ est adapté à ε,

• pour toute décomposition en somme directe $E = E' \oplus E''$ de $E = D^r$, tout $\gamma'' \in \mathrm{Aut}\, E''$ vérifiant $\varepsilon(\det\gamma'') = 0$ et $\chi_{\gamma''} \mid \chi$, et tout $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction

$$h^g(\cdot, \gamma'') : \mathrm{Aut}(E' \otimes_F \mathbb{A}) \to \mathbb{R} \quad g' \longmapsto h(g^{-1}(g', \gamma'')g)$$

est adaptée à $\frac{\mathrm{rg} E'}{r}\varepsilon$.

Bien sûr, si (h, χ) est adapté à ε pour un certain χ, h est elle–même adaptée à ε.

On dira que h est très adaptée à ε si pour tout $\gamma \in G(F)$ tel qu'existe $g \in G(\mathbb{A})$ vérifiant $h(g^{-1}\gamma g) \neq 0$, le couple (h, χ_γ) est adapté à ε.

PROPOSITION 3. — *Soit* $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ *une fonction supportée par une partie compacte* S *et invariante à droite par un sous–groupe ouvert* K' *de* K. *Et soit* χ *un polynôme unitaire à coefficients dans* F, *de degré* rd, *tel que le couple* (h, χ) *soit adapté à un homomorphisme* $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$.

Alors pour tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \mathbb{1}(\tilde{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) h(g^{-1}\gamma g)$$

est à support compact modulo $G(F)$. Et si le polygone p est μ–grand pour $\mu \geq 0$ une constante assez grande en fonction de S, K' et $|\alpha|$, elle est égale à la fonction

$$g \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \mathbb{1}(\overline{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) h(g^{-1}\gamma g)\,.$$

De plus, ces assertions restent vraies quand on restreint les sommations aux $\gamma \in G(F)$ tels que E'_γ et E''_γ soient fixés (le support étant cette fois considéré modulo le sous–groupe des fixateurs de ceux-ci).

Démonstration :

Bien sûr, il suffit de prouver la dernière affirmation.

Soient donc $\chi = \chi'\chi''$ la décomposition canonique de χ comme dans le lemme 2, $r'd$ et $(r-r')d$ les degrés de χ' et χ'', et $E = E' \oplus E''$ la décomposition en somme directe correspondante de E, avec $E' = D^{r'}$, $E'' = D^{r-r'}$. Notons aussi G' et G'' les schémas en groupes sur F des automorphismes de E' et E''.

Pour $g \in G(\mathbb{A})$, on s'intéresse à la somme

$$\sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \mathbb{1}(\widetilde{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p)\; h(g^{-1}\gamma g)$$

où $\{\gamma\}$ désigne l'ensemble des $\gamma \in G(F)$ tels que $\chi_\gamma = \chi$, $E'_\gamma = E'$, $E''_\gamma = E''$, c'est–à–dire des $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in G'(F) \times G''(F)$ tels que $\chi_{\gamma'} = \chi'$, $\chi_{\gamma''} = \chi''$.

Soit $\mu \geq 0$ une constante assez grande en fonction de S et de K'. Notons $Q = {}^{\mu}\overline{Q}^g$ et $Q' = Q \cap G'$.

D'après le lemme 8 du paragraphe V.1e, on connait déjà l'implication $h(g^{-1}\gamma g) \neq 0 \Rightarrow \gamma \in Q(F)$.

D'autre part, on a :

LEMME 4. — *Dans la situation ci–dessus, écrivons g sous la forme $(g', g'')nk$ où $g' \in G'(\mathbb{A})$, $g'' \in G''(\mathbb{A})$, $k \in K$ et $n \in N_{P_{E'}}(\mathbb{A})$ où $N_{P_{E'}}$ est le radical unipotent du sous–groupe parabolique $P_{E'}$ de G respectant le sous–objet E' de E. Et supposons que pour certains $g'_1 \in G'(\mathbb{A})$, $g''_1 \in G''(\mathbb{A})$ de polynômes caractéristiques χ', χ'', on ait $h(g^{-1}(g'_1, g''_1)g) \neq 0$.*

Alors n est dans une partie compacte de $G(\mathbb{A})$ qui ne dépend que du support S de h.

Démonstration du lemme 4 :

Faisons le changement de variable $g_2' = g'^{-1}g_1'g'$, $g_2'' = g''^{-1}g_1''g''$.

Il suffit alors de remarquer que l'application

$$(g_2', g_2'', n) \longmapsto n^{-1}(g_2', g_2'')n$$

induit un homéomorphisme de l'ensemble des $(g_2', g_2'', n) \in G'(\mathbb{A}) \times G''(\mathbb{A}) \times N_{P_{E'}}(\mathbb{A})$ tels que $\chi_{g_2'} = \chi'$, $\chi_{g_2''} = \chi''$ sur l'ensemble des $g_2 \in P_{E'}(\mathbb{A})$ tels que $\chi_{g_2} = \chi$ et $\operatorname{Ker}\chi'(g_2) = E' \otimes \mathbb{A}$. □

Suite de la démonstration de la proposition 3 :

Remarquons que le sous–ensemble $\{\gamma\} \cap Q(F)$ de $G(F)$ est invariant à droite par $N_{Q'}(F)$, de même d'ailleurs que l'application $\gamma \longmapsto \widetilde{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon}$ sur ce sous–ensemble.

Ecrivant $g = (g', g'')nk$ comme dans le lemme 4, on voit que s'il existe $\gamma \in \{\gamma\} \cap Q(F)$ tel que $h(g^{-1}\gamma g) \neq 0$, alors $Q' \supseteq {}^{\mu-\mu'}\overline{Q}^{g'}$ où $\mu' \geq 0$ est une constante ne dépendant que de S. Si donc la constante μ est assez grande en fonction de S et de K', il résulte du lemme 5 du paragraphe V.1d que

$$\sum_{\delta \in N_{Q'}(F)} h^{-1}(g^{-1}\gamma\delta g) = \int_{N_{Q'}(\mathbb{A})} dn_{Q'} \cdot h(g^{-1}\gamma n_{Q'} g)\,,$$

et cette dernière intégrale ne peut être non nulle que si $N_{Q'} = \{1\}$ c'est–à–dire si Q est adapté à γ et ε.

Ceci entraîne que $p^{g}_{Q,\gamma,\alpha\varepsilon} \leq \widetilde{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p$, donc que le polygone canonique de g est majoré en fonction de p, de $|\alpha|$ et de μ et on a démontré que la fonction considérée est à support compact modulo $G'(F) \times G''(F)$.

De plus, si le polygone p est $(\mu + \mu_\alpha)$–grand pour $\mu_\alpha \geq 0$ une constante assez grande en fonction de $|\alpha|$, on a pour tout $\gamma \in \{\gamma\} \cap Q(F)$ l'équivalence

$$p^{g}_{Q,\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p \Longleftrightarrow \overline{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p\,,$$

d'où l'égalité :

$$\sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) h(g^{-1}\gamma g) = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \mathbb{1}(\overline{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) h(g^{-1}\gamma g)$$

□

COROLLAIRE 5. — *Pour h comme dans la proposition 3 et très adaptée à un homomorphisme ε, l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) h(g^{-1}\gamma g)$$

est bien définie.

C'est une fonction périodique de période $r!d$ de la variable $\alpha \in \mathbb{R}$.

Et elle est égale à $\mathrm{Tr}_{\alpha}^{\leq p}(h)$ si le polygone p est μ-grand pour μ une constante assez grande en fonction de S et de K'.

Démonstration :

La première assertion est immédiate.

Pour la seconde, il suffit de démontrer que pour toute décomposition en somme directe $E = E' \oplus E''$ de $E = D^r$ avec $E' = D^{r'}$, $E'' = D^{r-r'}$ et notant G', G'' les schémas en groupes sur F des automorphismes de E', E'', l'intégrale sur $G'(F) \times G''(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ de la fonction à support compact

$$g \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ E'_\gamma = E',\ E''_\gamma = E''}} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) h(g^{-1}\gamma g)$$

est périodique de période $r'd$ comme fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Or ceci s'obtient en faisant le changement de variable $g \longmapsto (a,1)g$ dans $G(\mathbb{A})$ qui consiste à translater par $(a,1) \in G'(\mathbb{A}) \times G''(\mathbb{A})$ car pour tout $\gamma \in G(F)$ vérifiant $E'_\gamma = E'$, $E''_\gamma = E''$, on a

$$\widetilde{p}^{(a,1)g}_{\gamma,\alpha\varepsilon} = \widetilde{p}^{g}_{\gamma,(\alpha + \frac{r'}{r}d)\varepsilon}\,.$$

Enfin la troisième assertion résulte de la proposition 3 combinée à la proposition 11' du paragraphe V.1e. □

c) Première transformation

Avec les notations du théorème 1 que nous voulons démontrer, nous allons d'abord prouver que la fonction $f = f_\infty^{-s'} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^{u'}$ est très adaptée à l'homomorphisme $\frac{r}{u}\varepsilon_0$ au sens du paragraphe précédent.

LEMME 6. — *Soient K un corps local non archimédien, O son anneau des entiers, $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ deux entiers et $f^t : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathbb{Z}$ la fonction de Drinfeld en rang n et de niveau t.*

Soit $E = E' \oplus E''$ une décomposition en somme directe de $E = K^n$.

Supposons qu'existent un élément $g_1' \in \operatorname{Aut} E'$ dont toutes les valuations des valeurs propres sont non nulles et un élément $g_1'' \in \operatorname{Aut} E''$ dont la valuation du déterminant est nulle, tels que $f^t(g_1', g_1'') \neq 0$.

Alors :

(i) *Si $M = O^n$ désigne le réseau des points entiers dans $E = K^n$ et M', M'' sont les réseaux intersections avec E', E'', on a $M = M' \oplus M''$.*

(ii) *Si on choisit deux bases pour les réseaux M' et M'' avec en particulier des isomorphismes induits $\operatorname{Aut} E' \cong \mathrm{GL}_{n'}(K)$, $\operatorname{Aut} E'' \cong \mathrm{GL}_{n''}(K)$ et si f'^t et f'' désignent respectivement la fonction de Drinfeld en rang n' et de niveau t sur $\mathrm{GL}_{n'}(K)$ et la fonction caractéristique de $\mathrm{GL}_{n''}(O)$ dans $\mathrm{GL}_{n''}(K)$, on a pour tous $g' \in \operatorname{Aut} E'$ et $g'' \in \operatorname{Aut} E''$ tel que $\det g''$ soit de valuation nulle :*

$$f^t(g', g'') = f'^t(g') f''(g'')$$

(iii) *Pour $g' \in \operatorname{Aut} E'$, $g'' \in \operatorname{Aut} E''$ et n un élément du radical unipotent du sous–groupe parabolique de $\operatorname{Aut} E$ préservant E', on a l'implication*

$$f^t(n^{-1}(g', g'')^{-1}(g_1', g_1'')(g', g'')n) \neq 0 \Rightarrow n \in \mathrm{GL}_n(O)\,.$$

(iv) *Soient Q' un sous–groupe parabolique de $\operatorname{Aut} E'$, $N_{Q'}$ son radical unipotent et $dn_{Q'}$ une mesure de Haar sur $N_{Q'}$. Pour $g \in \operatorname{Aut} E$, $g' \in Q'$ et $g'' \in \operatorname{Aut} E''$ tels que $\det g''$ soit de valuation nulle et que deux au moins des éléments induits par g' dans les facteurs de $Q'/N_{Q'}$ aient un déterminant de valuation non nulle, on a*

$$\int_{N_{Q'}} dn_{Q'} \cdot f^t(g^{-1}(g' n_{Q'}, g'')g) = 0\,.$$

Démonstration :

Comme par définition $f^{-t}(g) = f^t(g^{-1})$, $\forall g \in \operatorname{Aut} E$, il suffit de prouver ces assertions pour $t \geq 1$.

(i) Comme $f^t(g_1', g_1'') \neq 0$, on a nécessairement $(g_1', g_1'')(M) \subseteq M$ et a fortiori $g_1'(M') \subseteq M'$, $g_1''(M'') \subseteq M''$.

Bien sûr, on a $M' \oplus M'' \subseteq M$. En sens inverse, soit m un élément de M. Il s'écrit $m = m' + m''$ avec $m' \in E'$, $m'' \in E''$. D'autre part, les valeurs propres de g_1' sont de valuations non nulles par hypothèse donc strictement positives puisque $g_1'(M') \subseteq M'$. Et il existe certainement un entier $e \geq 1$ tel que $g_1'^e(m') \in M'$. Or $g_1'^e(m') + g_1''^e(m'') = (g_1', g_1'')^e(m)$ est dans M puisque $(g_1', g_1'')(M) \subseteq M$. Par conséquent $g_1''^e(m'') \in M \cap E'' = M''$ et comme $g_1'' \in \operatorname{Aut} E''$ vérifie $g_1''(M'') = M''$, on obtient $m'' \in M''$ puis $m' \in M'$. C'est ce qu'on voulait.

(ii) se déduit immédiatement de (i) et de la définition des fonctions de Drinfeld.

(iii) Ecrivons sous forme de matrices par blocs selon la décomposition $E = E' \oplus E''$ les matrices suivantes :

$$(g', g'')^{-1}(g'_1, g''_1)(g', g'') = \begin{pmatrix} g'_2 & 0 \\ 0 & g''_2 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & b \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

$$n^{-1}(g', g'')^{-1}(g'_1, g''_1)(g', g'')n = \begin{pmatrix} g'_2 & g'_2 b - b g''_2 \\ 0 & g''_2 \end{pmatrix}$$

On voit en particulier que les matrices g'_2, $g'_2 b - b g''_2$, g''_2 doivent être à coefficients entiers et que même $g''_2 \in \mathrm{GL}_{n''}(O)$.

Soit ϖ un élément uniformisant de K. Et soit β le plus petit entier ≥ 0 tel que $\varpi^\beta b$ soit à coefficients entiers. Il faut prouver que $\beta = 0$. Supposons au contraire que $\beta > 0$. Alors, comme $g'_2(\varpi^\beta b) - (\varpi^\beta b) g''_2 = \varpi^\beta (g'_2 b - b g''_2)$, on a

$$\overline{g'_2}\,\overline{\varpi^\beta b} - \overline{\varpi^\beta b}\,\overline{g''_2} = 0$$

où $\overline{g'_2}$, $\overline{g''_2}$, $\overline{\varpi^\beta b}$ désignent les réductions modulo ϖ des matrices à coefficients entiers g'_2, g''_2 et $\varpi^\beta b$.

La matrice $\overline{g''_2}$ est inversible, donc $\overline{g'_2}$ induit un automorphisme de l'espace image de $\overline{\varpi^\beta b}$. Mais comme toutes les valeurs propres de g'_2 sont de valuation > 0, la matrice $\overline{g'_2}$ est nilpotente. Ainsi $\overline{\varpi^\beta b} = 0$ et la matrice $\varpi^{\beta-1} b$ est à coefficients entiers. Il y a contradiction.

(iv) Notons χ' le polynôme caractéristique commun à tous les éléments $g' n_{Q'}$ quand $n_{Q'}$ décrit le radical unipotent $N_{Q'}$.

Si $f^t(g^{-1}(g' n_{Q'}, g'')g) = 0$, $\forall n_{Q'} \in N_{Q'}$, il n'y a rien à démontrer.

Dans le cas contraire, il faut en particulier que toutes les racines de χ' aient des valuations ≥ 0 et χ' s'écrit canoniquement $\chi' = \chi'_1 \chi'_2$ où χ'_1 [resp. χ'_2] rassemble toutes les racines de valuations strictement positives [resp. nulles].

Notons $E'_1 = \operatorname{Ker} \chi'_1(g')$, $E'_2 = \operatorname{Ker} \chi'_2(g')$, avec donc une décomposition en somme directe $E' = E'_1 \oplus E'_2$, et $N^1_{Q'} = N_{Q'} \cap \operatorname{Aut} E'_1$, $N^2_{Q'} = N_{Q'} \cap \operatorname{Aut} E'_2$.

Pour tout élément $n_{Q'} \in N_{Q'}$, il existe un élément $n^0_{Q'} \in N_{Q'}$ qui envoie $\operatorname{Ker} \chi'_1(g' n_{Q'})$ et $\operatorname{Ker} \chi'_2(g' n_{Q'})$ sur E'_1 et E'_2 respectivement. Autrement dit $g' n_{Q'}$ s'écrit sous la forme

$$g' n_{Q'} = (n^0_{Q'})^{-1} g' n^1_{Q'} n^2_{Q'} n^0_{Q'}$$

avec $n^1_{Q'} \in N^1_{Q'}$, $n^2_{Q'} \in N^2_{Q'}$. De plus, $n^0_{Q'}$ est déterminé à multiplication à gauche près par un élément de $N^1_{Q'} \times N^2_{Q'}$ et si $n^0_{Q'}$ est choisi, $n^1_{Q'}$ et $n^2_{Q'}$ sont uniquement déterminés.

On en déduit que si $dn^1_{Q'}$ et $dn^2_{Q'}$ désignent des mesures de Haar sur $N^1_{Q'}$ et $N^2_{Q'}$, il existe une mesure $dn^0_{Q'}$ sur l'espace homogène $N^1_{Q'} \times N^2_{Q'} \backslash N_{Q'}$ telle que

$$\int_{N_{Q'}} dn_{Q'} \cdot f^t(g^{-1}(g' n_{Q'}, g'')g) = \int_{N^1_{Q'} \times N^2_{Q'} \backslash N_{Q'}} dn^0_{Q'} \cdot \int_{N^2_{Q'}} dn^2_{Q'} \cdot \int_{N^1_{Q'}} dn^1_{Q'} \cdot \\ f^t((n^0_{Q'} g)^{-1}(g' n^2_{Q'} n^1_{Q'}, g'') n^0_{Q'} g)\,.$$

En remplaçant g par $n^0_{Q'}g$, E' par E'_1, E'' par $E'_2 \oplus E''$, on est donc ramené au cas où $\chi' = \chi'_1$, $E' = E'_1$, autrement dit où toutes les racines de χ' ont des valuations > 0.

On remarque encore que quitte à remplacer E', E'', (g', g'') et Q' par $g^{-1}(E')$, $g^{-1}(E'')$, $g^{-1}(g', g'')g$ et $g^{-1}Q'g$, on peut supposer que $g = \mathrm{Id}$. Encore une fois, si $f^t(g' n_{Q'}, g'') = 0$, $\forall n_{Q'} \in N_{Q'}$, il n'y a rien à démontrer. Sinon on peut écrire d'après (ii)

$$f^t(g' n_{Q'}, g'') = f'^t(g' n_{Q'}) f''(g'') = f'^t(g' n_{Q'})\,.$$

On conclut d'après le lemme 9 (i) du paragraphe III.6c appliqué à la fonction de Drinfeld f'^t. $\square$

Montrons maintenant :

Proposition 7. — *Avec les notations du théorème 1, la fonction* $f = f_\infty^{-s'} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^{u'}$ *est très adaptée à l'homomorphisme* $\frac{r}{u}\varepsilon_0$.

Et il existe une constante $\mu \geq 0$ *ne dépendant que de* K' *et* S' *telle que, pour tout polygone* $p : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ *qui soit* μ*–grand et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on ait :*

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}_\alpha(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{\,g}_{\gamma, \alpha \frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}\gamma g)$$

Démonstration :

La première assertion résulte de la partie (iv) du lemme 6.

Pour ce qui est de la seconde, la périodicité des fonctions considérées permet de se limiter aux $\alpha \in [0, r!d]$.

Et l'égalité annoncée est un cas particulier du corollaire 5 quand μ est assez grande en fonction de K' et du support de f, c'est–à–dire de K', S', u et s.

Notre but est donc d'affiner ce résultat jusqu'à supprimer la dépendance en u et s.

Par définition, $\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f)$ est l'image par la fonctionnelle $\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg\cdot$ de la fonction qui associe à tout g la somme

$$\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{1\leq i\leq |P|} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P p - \alpha p_P^i) K_{f,P}^i(\delta g,\delta g)$$

$$= \sum_{P\in\mathcal{P}} (-1)^{|P|-1} \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \sum_{\gamma\in P(F)_\varepsilon} \mathbb{1}(p^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} >_P p) f(g^{-1}\gamma n_P g)$$

où, pour tout $P\in\mathcal{P}$, $P(F)_\varepsilon$ désigne l'ensemble des $\gamma\in P(F)$ tels que P soit adapté à γ et $\varepsilon = \frac{r}{u}\varepsilon_0$.

Rappelons que pour $g\in G(\mathbb{A})$, $\gamma\in G(F)$ et P un sous–groupe parabolique adapté à γ et ε, on dispose d'un raffinement canonique $\widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon}\subseteq P$, correspondant à une filtration $\widetilde{\mathcal{E}}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}_{\cdot}$ de $\mathcal{E}^g$ et dont le $\alpha\varepsilon$–polygone est noté $\widetilde{p}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon}$.

Si $\mu\geq 0$ est une constante, on peut aussi introduire le raffinement intermédiaire ${}^\mu\widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon}\subseteq P$, correspondant à la filtration ${}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}_{\cdot}$ telle que

$$\{{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\} = \{\mathcal{E}_j^P\}\cup\{\widetilde{\mathcal{E}}_j^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}, d\widetilde{p}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon}(\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{E}}_j^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}) > \mu\}$$

où, pour tout polygone p, on note $dp(r') = [p(r')-p(r'-1)] - [p(r'+1) - p(r')]$, $\forall r'$.

On remarque que la décomposition $E = E'_\gamma\oplus E''_\gamma$ induit une projection naturelle de E'_γ, E''_γ dans la fibre générique de chaque quotient ${}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}$. On notera ${}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\cap E'_\gamma$, ${}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\cap E''_\gamma$ les sous–fibrés maximaux engendrés par les images de E'_γ, E''_γ.

LEMME 8. — *Soient $g\in G(\mathbb{A})$, $P\in\mathcal{P}$, $\gamma\in P(F)_\varepsilon$ et $\alpha\in[0,r!d]$.*

(i) *Il existe une constante $\mu_1\geq 0$ ne dépendant que de K' et S' telle que si $f(g^{-1}\gamma n_P g)\neq 0$ pour un certain $n_P\in N_P(\mathbb{A})$, si $\mu\geq\mu_1$ et si ${}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\notin\{\mathcal{E}_j^P\}$, alors*

$$\mu^-({}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\cap E''_\gamma) \geq \mu-\mu_1+\mu^+({}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i+1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\cap E''_\gamma)\,.$$

(ii) *Il existe une constante $\mu_2\geq 0$ ne dépendant que de K', S', u et s telle que si $\sum_{\substack{\gamma'\in\mathrm{Aut}\,E'_\gamma\\ E'_{\gamma\gamma'}=E'_\gamma}} f(g^{-1}\gamma\gamma' n_P g)\neq 0$ pour un certain $n_P\in N_P(\mathbb{A})$, si $\mu\geq\mu_2$ et si ${}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}\notin\{\mathcal{E}_j^P\}$, alors*

$$\mu^-({}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_i^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i-1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}) \geq \mu-\mu_2+\mu^+({}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i+1}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon}/{}^\mu\widetilde{\mathcal{E}}_{i}^{g,P,\gamma,\alpha\varepsilon})\,.$$

Démonstration du lemme 8 :

(i) est conséquence du corollaire 9 du paragraphe V.1e combiné au lemme 4 du paragraphe V.2b et au lemme 6 (iii) du paragraphe V.2c (appliqué sur les corps locaux F_0 et F_∞).

(ii) est conséquence de (i) ainsi que du lemme 5 du paragraphe V.1d et du lemme 8 du paragraphe V.1e puisque la fonction f est très adaptée à l'homomorphisme ε. $\square$

D'autre part, on a la variante suivante du lemme 4 du paragraphe V.1c :

LEMME 9. — *Soient $\mu \geq 0$ une constante, $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone, α un réel, Q, $\widetilde{Q} \in \mathcal{P}$ deux sous-groupes paraboliques tels que $\widetilde{Q} \subseteq Q$ et γ un élément de $\widetilde{Q}(F)_\varepsilon$.*

Alors la fonction sur $\widetilde{Q}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$

$$g \longmapsto \left| \sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ \widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} = \widetilde{Q}, {}^\mu\widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} = Q}} (-1)^{|P|-1} \mathbb{1}(p^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} > p) \right|$$

est la fonction caractéristique du sous-ensemble

$$\{g, \exists! P \in \mathcal{P}, \widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} = \widetilde{Q} \wedge {}^\mu\widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} = Q \wedge p^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} > p\}$$

lequel est égal à $\{g, \widetilde{Q}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} = \widetilde{Q} \wedge {}^\mu\widetilde{Q}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} = Q \wedge \widetilde{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p\}$ si le polygone p est μ-grand. $\square$

Suite de la démonstration de la proposition 7 :

Etant donnés $\widetilde{Q} \subseteq Q$ deux sous-groupes paraboliques de G, $\mu \geq 0$ une constante, $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone et $\alpha \in [0, r!d]$, considérons la fonction sur $\widetilde{Q}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ qui à tout g associe

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} (-1)^{|P|-1} \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot \sum_{\substack{\gamma \in P(F)_\varepsilon \\ \widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} = \widetilde{Q}, {}^\mu\widetilde{Q}^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} = Q}} \mathbb{1}(p^g_{P,\gamma,\alpha\varepsilon} > p) f(g^{-1}\gamma n_P g) .$$

D'après les lemmes 8 (ii) et 9 ci-dessus et le corollaire 6 du paragraphe V.1d, cette fonction est à support compact.

Et d'après les lemmes 8 (i) et 9 ci-dessus et le corollaire 6 du paragraphe V.1d, son intégrale pour la mesure dg est égale à celle de la fonction

$$g \longmapsto \sum_{\gamma \in \widetilde{Q}(F)} \mathbb{1}(\widetilde{Q}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} = \widetilde{Q}, {}^\mu\widetilde{Q}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} = Q, \widetilde{p}^g_{\gamma,\alpha\varepsilon} \leq p) f(g^{-1}\gamma g) ,$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

d) Suite et fin du calcul

Enonçons le théorème général suivant :

THÉORÈME 10. — *Soient h une fonction localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et χ un polynôme unitaire de degré rd à coefficients dans F.*

On suppose que pour deux places distinctes $0, \infty$ de F hors de T_a, h est de la forme $h = h_\infty \otimes h^{\infty,0} \otimes h_0$ où h_∞, h_0, $h^{\infty,0}$ sont des fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_\infty)$, $G(F_0)$, $G(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}}$ telles que pour tout sous-groupe parabolique non trivial P de G et tout élément $\gamma \in P(F)$ de polynôme caractéristique $\chi_\gamma = \chi$, on ait

$$\int_{N_P(F_\infty)} h_\infty(g_\infty^{-1}\gamma n_{P,\infty} g_\infty) dn_{P,\infty} = 0\,, \qquad \forall g_\infty \in G(F_\infty)\,,$$

$$\int_{N_P(F_0)} h_0(g_0^{-1}\gamma n_{P,0} g_0) dn_{P,0} = 0\,, \qquad \forall g_0 \in G(F_0)\,,$$

si $dn_{P,\infty}$, $dn_{P,0}$ désignent des mesures de Haar sur $N_P(F_\infty)$, $N_P(F_0)$.

Alors :

(i) *Si χ a au moins deux facteurs premiers distincts, on a*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} h(g^{-1}\gamma g) = 0\,.$$

(ii) *Si χ a un seul facteur premier μ, on a*

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} h(g^{-1}\gamma g) &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in c_\mu} h(g^{-1}\gamma g) \\ &= \int_{G_{\gamma_\mu}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot h(g^{-1}\gamma_\mu g)\end{aligned}$$

où c_μ est la classe de conjugaison elliptique $\{\gamma \in G(F),\ \mu(\gamma) = 0\}$, γ_μ est un représentant quelconque de la classe c_μ et G_{γ_μ} désigne le sous-schéma en groupes de G des commutateurs de γ_μ. □

Remarque : On sait déjà d'après la proposition 3 du paragraphe V.2b que les fonctions

$$g \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} h(g^{-1}\gamma g)$$

sont à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ (et il suffit pour cela de l'une ou l'autre des familles d'annulations en ∞ et 0 dans l'hypothèse).

A fortiori les termes de gauche dans (i) et (ii) sont bien définis.

Et les deux autres intégrales dans (ii) sont convergentes sans aucune hypothèse sur h. $\square$

Ce théorème sera prouvé dans les prochains paragraphes. Admettons–le provisoirement et montrons qu'il entraîne le théorème principal :

Démonstration du théorème 1 du paragraphe V.2a :

On se place sous les hypothèses dudit théorème.

On suppose en particulier que $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$ sont assez grands en fonction de S' et $|u-s|$ pour que soit vérifiée la conclusion du lemme suivant :

LEMME 11. — *Soient S', 0, ∞, ε_0 et f comme dans l'énoncé du théorème 1 du paragraphe* V.2a.

Soit $\{\chi\}_f$ l'ensemble fini des polynômes caractéristiques d'éléments $\gamma \in G(F)$ pour lesquels il existe $g \in G(\mathbb{A})$ vérifiant $f(g^{-1}\gamma g) \neq 0$.

Alors, si $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$ *sont assez grands en fonction de S' et $|u-s|$ (et cette condition est vide si $S' \subseteq K$ et $u = s$), tout $\chi \in \{\chi\}_f$ s'écrit canoniquement $\chi = \chi'\chi''$ où :*

- *les racines de χ'' ont toutes leurs valuations nulles au–dessus de 0 et ∞, si bien que $\varepsilon_0(\det\chi'') = 0$;*
- *pour tout facteur irréductible μ de χ', les valuations au–dessus de 0 de ses racines sont ≥ 0, avec au moins une inégalité stricte (si bien que $\varepsilon_0(\det\mu) > 0$), et les valuations au–dessus de ∞ de ses racines sont ≤ 0, avec au moins une inégalité stricte.*

De plus, le coefficient constant de χ, ou de χ', est de valuation $u' = \frac{u}{\deg(0)}$ en 0 et $-s' = -\frac{s}{\deg(\infty)}$ en ∞.

Démonstration du lemme 11 :

Il est immédiat sur la définition des fonctions de Drinfeld $f_0^{u'}$ et $f_\infty^{-s'}$ que toute racine d'un polynôme $\chi \in \{\chi\}_f$ a toutes ses valuations ≥ 0 au–dessus de 0 et toutes ses valuations ≤ 0 au–dessus de ∞.

La seule chose qui reste à prouver est que s'il existe un facteur μ de l'un des $\chi \in \{\chi\}_f$ dont le terme constant $\det\mu$ soit de valuation non nulle en l'une des places $0, \infty$ et de valuation nulle en l'autre, cela impose sur $\deg(0)$ ou $\deg(\infty)$ une borne qui ne dépend que de S' et $|u-s|$.

Ecrivons pour cela la formule du produit

$$\deg(0)0(\det\mu) + \deg(\infty)\infty(\det\mu) + \sum_{x\in|X|\backslash\{0,\infty\}} \deg(x)x(\det\mu) = 0\,.$$

On conclut en remarquant que le troisième terme est borné par une constante qui ne dépend que de S' et $|u-s|$.

Et dans le cas particulier où $S' \subseteq K$ et $u = s$, ce troisième terme est nécessairement nul si bien qu'il n'y a aucune condition à imposer sur $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$ pour obtenir une contradiction. $\square$

Suite de la démonstration du théorème principal :

Supposons aussi que le polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ est assez grand en fonction de K' et S' pour vérifier la conclusion de la proposition 7.

Pour tout polynôme $\chi \in \{\chi\}_f$, on considère sa décomposition canonique $\chi = \chi'\chi''$ et, notant $r'd$ et $(r-r')d$ les degrés de χ' et χ'', la décomposition $E = E' \oplus E''$ de $E = D^r$ avec $E' = D^{r'}$, $E'' = D^{r-r'}$ et G', G'' les schémas en groupes sur F des automorphismes de E', E''.

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(f)$ s'écrit comme la somme sur tous les $\chi \in \{\chi\}_f$ des intégrales

$$\int_{G'(F)\times G''(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma\in G(F) \\ \chi_\gamma=\chi,\ E'_\gamma=E',\ E''_\gamma=E''}} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{\,g}_{\gamma,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}\gamma g)\,.$$

Introduisant dg' la mesure de Haar sur $G'(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_{r'}(D_{\mathbb{A}})$ qui attribue le volume 1 au sous–groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_{r'}(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$, cette intégrale s'écrit encore

$$\int_{G'(\mathbb{A})\times G''(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} \frac{dg}{dg'} \cdot \sum_{\substack{\gamma''\in G''(F) \\ \chi_{\gamma''}=\chi''}} \int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} dg' \cdot$$
$$\sum_{\substack{\gamma'\in G'(F) \\ \chi_{\gamma'}=\chi'}} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{\,g'g}_{(\gamma',\gamma''),\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}(g'^{-1}\gamma' g',\gamma'')g)\,.$$

Or, d'après le lemme 2 (ii) du paragraphe V.2b, la condition $\widetilde{p}^{\,g'g}_{(\gamma',\gamma''),\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p$ s'écrit exactement

$$\alpha r + \deg(\det g') \in I_g$$

où I_g est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ qui dépend de g, puisque $\frac{r}{u}\varepsilon_0(\det\chi) = r$.

Fixant $g \in G(\mathbb{A})$ et $\gamma'' \in G''(F)$ vérifiant $\chi_{\gamma''} = \chi''$, considérons pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'intégrale

$$S_n = \int dg' \cdot \sum_{\substack{\gamma'\in G'(F) \\ \chi_{\gamma'}=\chi'}} f(g^{-1}(g'^{-1}\gamma' g',\gamma'')g)$$

où la sommation est limitée aux $g' \in G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})$ vérifiant $\deg(\det g') = n$. On voit par le changement de variable $g' \longmapsto ag'$ que la fonction $n \longmapsto S_n$ est périodique de période $r'd$. Par conséquent, on peut écrire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} dg' \cdot \sum_{\substack{\gamma' \in G'(F) \\ \chi_{\gamma'} = \chi'}} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{g'g}_{(\gamma',\gamma''),\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}(g'^{-1}\gamma' g', \gamma'')g)$$
$$= \sum_{1 \leq n \leq r'd} \#((\alpha r + n + r'd\mathbb{Z}) \cap I_g) S_n$$

où $\#((\alpha r + n + r'd\mathbb{Z}) \cap I_g)$ désigne le cardinal fini de l'intersection de $\alpha r + n + r'd\mathbb{Z}$ avec l'intervalle I_g. Or ce cardinal est périodique de période $r'd/r$ comme fonction de α et sa valeur moyenne est $\ell(I_g)/r'd$ si $\ell(I_g)$ désigne la longueur de I_g. Par conséquent, l'intégrale considérée sur $G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})$ est également périodique de période $r'd/r$ comme fonction de α et sa valeur moyenne est

$$\frac{\ell(I_g)}{r'd} \sum_{1 \leq n \leq r'd} S_n = \frac{\ell(I_g)}{r'd} \int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg' \cdot \sum_{\substack{\gamma' \in G'(F) \\ \chi_{\gamma'} = \chi'}} f(g^{-1}(g'^{-1}\gamma' g', \gamma'')g)\,.$$

Or, d'après le lemme 6 (iv) du paragraphe V.2c et le lemme 11 ci–dessus, toutes les fonctions $f(g^{-1}(\cdot, \gamma'')g)$ sur $G'(\mathbb{A})$ vérifient les hypothèses du théorème 10. Donc chaque intégrale

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg' \cdot \sum_{\substack{\gamma' \in G'(F) \\ \chi_{\gamma'} = \chi'}} f(g^{-1}(g'^{-1}\gamma' g', \gamma'')g)$$

est nulle si χ' a au moins deux facteurs premiers, et si χ' a un unique facteur premier μ_χ elle est égale à la même intégrale où l'on restreint la sommation aux $\gamma' \in G'(F)$ vérifiant $\mu_\chi(\gamma') = 0$.

Notons $\{\chi\}'_f$ le sous–ensemble de $\{\chi\}_f$ constitué des polynômes $\chi = \chi'\chi''$ dont la composante χ' n'a qu'un seul facteur premier μ_χ. Et notons $\{\gamma\}'_f$ le sous–ensemble de $G(F)$ constitué des éléments dont le polynôme caractéristique est dans $\{\chi\}'_f$ et dont la restriction γ' à E'_γ est elliptique c'est–à–dire vérifie $\mu_\chi(\gamma') = 0$.

Ainsi on a prouvé que la moyenne de la fonction périodique $\alpha \longmapsto \mathrm{Tr}^{\leq p}_\alpha(f)$ est égale à celle de

$$\alpha \longmapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in \{\gamma\}'_f} \mathbb{1}(\widetilde{p}^{g}_{\gamma,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}\gamma g)\,.$$

Notant $\{c\}'_f$ l'ensemble fini des classes de conjugaison de $\{\gamma\}'_f$, γ_c un représentant de chaque $c \in \{c\}'_f$ et G_{γ_c} le sous–schéma en groupes de G des commutateurs de γ_c, cette moyenne est encore égale à la somme sur les $c \in \{c\}'_f$ des moyennes des fonctions périodiques

$$\alpha \longmapsto \int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \mathbb{1}(\widetilde{p}^g_{\gamma_c,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}\gamma_c g)\,.$$

Pour tout $c \in \{c\}'_f$ de polynôme caractéristique $\chi \in \{\chi\}'_f$, décomposons χ dans l'anneau des polynômes à coefficients dans F_0 [resp. dans F_∞] en

$$\chi = \chi_{0'}\chi_0^{0'} \qquad [\text{resp. } \chi = \chi_{\infty'}\chi_\infty^{\infty'}]$$

où $\chi_{0'}$ [resp. $\chi_{\infty'}$] rassemble toutes les racines de valuation > 0 [resp. < 0] et $\chi_0^{0'}$ [resp. $\chi_\infty^{\infty'}$] rassemble toutes les racines de valuation 0. Bien entendu, $\chi_{0'}$ [resp. $\chi_{\infty'}$] est un diviseur de χ'.

Ecrivons les décompositions en sommes directes

$$E_0 = E_{0'} \oplus E_0^{0'} \quad [\text{resp. } E_\infty = E_{\infty'} \oplus E_\infty^{\infty'}]$$

de $E_0 = E \otimes_F F_0 = D_0^r$ [resp. $E_\infty = E \otimes_F F_\infty = D_\infty^r$] avec $E_{0'} = \operatorname{Ker} \chi_{0'}(\gamma_c)$, $E_0^{0'} = \operatorname{Ker} \chi_0^{0'}(\gamma_c)$ [resp. $E_{\infty'} = \operatorname{Ker} \chi_{\infty'}(\gamma_c)$, $E_\infty^{\infty'} = \operatorname{Ker} \chi_\infty^{\infty'}(\gamma_c)$]. Notons $G_{0'} = \operatorname{Aut} E_{0'}$, $G_0^{0'} = \operatorname{Aut} E_0^{0'}$ [resp. $G_{\infty'} = \operatorname{Aut} E_{\infty'}$, $G_\infty^{\infty'} = \operatorname{Aut} E_\infty^{\infty'}$] et $\gamma_{0'} \in G_{0'}$, $\gamma_0^{0'} \in G_0^{0'}$ [resp. $\gamma_{\infty'} \in G_{\infty'}$, $\gamma_\infty^{\infty'} \in G_\infty^{\infty'}$] les restrictions de γ_c à $E_{0'}$ et $E_0^{0'}$ [resp. à $E_{\infty'}$ et $E_\infty^{\infty'}$]. Enfin, notons $dg_{0'}$ et $dg_0^{0'}$ [resp. $dg_{\infty'}$ et $dg_\infty^{\infty'}$] les mesures de Haar sur $G_{0'}$ et $G_0^{0'}$ [resp. $G_{\infty'}$ et $G_\infty^{\infty'}$] qui attribuent le volume 1 aux sous–groupes ouverts compacts maximaux.

Mettons sur E'_0 et $E_0^{0'}$ [resp. $E_{\infty'}$ et $E_\infty^{\infty'}$] les structures entières induites par celle de E_0 [resp. E_∞]. Introduisons $f_{0'}^{u'}$ [resp. $f_{\infty'}^{-s'}$] la fonction de Drinfeld de niveau u' sur $G_{0'}$ [resp. de niveau $-s'$ sur $G_{\infty'}$] et $f_0^{0'}$ [resp. $f_\infty^{\infty'}$] la fonction caractéristique de $G_0^{0'} \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_0)$ dans $G_0^{0'}$ [resp. de $G_\infty^{\infty'} \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_\infty)$ dans $G_\infty^{\infty'}$].

Comme $G(F)$ est dense dans $G(F_0) \times G(F_\infty)$, on a pu choisir chaque représentant γ_c de façon que $f_0^{u'}(\gamma_c) \neq 0$ et $f_\infty^{-s'}(\gamma_c) \neq 0$. D'après le lemme 6 (i), (ii), (iii) du paragraphe V.2c et le lemme 10 (i) du paragraphe III.6c, on a pour tout $c \in \{c\}'_f$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \mathbb{1}(\widetilde{p}^{\,g}_{\gamma_c,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}\gamma_c g) \\
&= \int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash[G_{\infty'}\times G_\infty^{\infty'}\times G(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}}\times G_0^{0'}\times G_{0'}]} dg_{\infty'}\cdot dg_\infty^{\infty'}\cdot dg^{\infty,0}\cdot dg_0^{0'}\cdot dg_{0'}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\mathbb{1}(\widetilde{p}^{\,g_{\infty'}g_\infty^{\infty'}g^{\infty,0}g_0^{0'}g_{0'}}_{\gamma_c,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) \\
&\qquad f_{\infty'}^{-s'}(g_{\infty'}^{-1}\gamma_{\infty'}g_{\infty'}) f_\infty^{\infty'}((g_\infty^{\infty'})^{-1}\gamma_\infty^{\infty'}g_\infty^{\infty'}) f^{\infty,0}((g^{\infty,0})^{-1}\gamma_c g^{\infty,0}) \\
&\qquad\qquad f_0^{0'}((g_0^{0'})^{-1}\gamma_0^{0'}g_0^{0'}) f_{0'}^{u'}(g_{0'}^{-1}\gamma_{0'}g_{0'})\,.
\end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 2 (ii) du paragraphe V.2b et comme $E_{0'}$ et $E_{\infty'}$ sont contenus respectivement dans $E'\otimes_F F_0$ et $E'\otimes_F F_\infty$, la condition $\widetilde{p}^{\,g_{\infty'}g_\infty^{\infty'}g^{\infty,0}g_0^{0'}g_{0'}}_{\gamma_c,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p$ s'écrit

$$\alpha r - \deg(\infty)\infty(\det g_{\infty'}) - \deg(0)0(\det g_{0'}) \in J^c_{g_\infty^{\infty'}g^{\infty,0}g_0^{0'}}$$

où $J^c_{g_\infty^{\infty'}g^{\infty,0}g_0^{0'}}$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Notons $G_{\gamma_{\infty'}}$ et $G_{\gamma_{0'}}$ les sous–groupes de commutateurs de $\gamma_{\infty'}$ et $\gamma_{0'}$ dans $G_{\infty'}$ et $G_{0'}$; munissons–les des mesures de Haar $dg_{\gamma_{\infty'}}$ et $dg_{\gamma_{0'}}$ qui attribuent le volume 1 aux sous–groupes ouverts compacts maximaux.

On voit que la moyenne de chaque fonction

$$\alpha \longmapsto \int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \mathbb{1}(\widetilde{p}^{\,g}_{\gamma_c,\alpha\frac{r}{u}\varepsilon_0} \leq p) f(g^{-1}\gamma_c g)$$

est égale au produit de la moyenne de la fonction périodique

$$\begin{aligned}
\alpha \longmapsto &\int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash[G_{\gamma_{\infty'}}\times G_\infty^{\infty'}\times G(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}}\times G_0^{0'}\times G_{\gamma_{0'}}]} dg_{\gamma_{\infty'}}\cdot dg_\infty^{\infty'}\cdot dg^{\infty,0}\cdot dg_0^{0'}\cdot dg_{\gamma_{0'}}\cdot \\
&\mathbb{1}(\alpha - \deg(\infty)\infty(\det g_{\gamma_{\infty'}}) - \deg(0)0(\det g_{\gamma_{0'}}) \in J^c_{g_\infty^{\infty'}g^{\infty,0}g_0^{0'}}) \\
&f_\infty^{\infty'}((g_\infty^{\infty'})^{-1}\gamma_\infty^{\infty'}g_\infty^{\infty'}) f^{\infty,0}((g^{\infty,0})^{-1}\gamma_c g^{\infty,0}) f_0^{0'}((g_0^{0'})^{-1}\gamma_0^{0'}g_0^{0'})
\end{aligned}$$

et des deux intégrales orbitales

$$\int_{G_{\gamma_{\infty'}}\backslash G_{\infty'}} \frac{dg_{\infty'}}{dg_{\gamma_{\infty'}}}\cdot f_{\infty'}^{-s'}(g_{\infty'}^{-1}\gamma_{\infty'}g_{\infty'}) \quad \text{et} \quad \int_{G_{\gamma_{0'}}\backslash G_{0'}} \frac{dg_{0'}}{dg_{\gamma_{0'}}}\cdot f_{0'}^{u'}(g_{0'}^{-1}\gamma_{0'}g_{0'})\,.$$

Pour que ces deux intégrales orbitales soient non nulles, il faut d'après les lemmes 9 (ii) et 10 (iii) du paragraphe III.6c que les polynômes minimaux de $\gamma_{\infty'}$ et $\gamma_{0'}$ soient premiers c'est-à-dire que $F_\infty[\gamma_{\infty'}] = F'_{\infty'}$ et $F_0[\gamma_{0'}] = F'_{0'}$ soient des corps.

Autrement dit, il faut que γ_c soit (u,s)-admissible au sens de la définition 2 du paragraphe III.4. Dans ce cas et d'après le lemme 8 du paragraphe III.6c, les deux intégrales orbitales valent respectivement

$$\frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)}(q^{\deg(\infty')-1})(q^{2\deg(\infty')}-1)\cdots(q^{(h_\infty/[F'_{\infty'}:F_\infty]-1)\deg(\infty')}-1) = \frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)}\mu_\infty$$

et

$$\frac{\deg(0')}{\deg(0)}(q^{\deg(0')}-1)(q^{2\deg(0')}-1)\cdots(q^{(h_0/[F'_{0'}:F_0]-1)\deg(0')}-1) = \frac{\deg(0')}{\deg(0)}\mu_0\,,$$

où $\deg(\infty')$, $\deg(0')$ désignent les degrés résiduels sur $\mathbb{F}_q$ des corps $F'_{\infty'}$, $F'_{0'}$ et h_∞, h_0 désignent les dimensions sur F_∞, F_0 des espaces $E_{\infty'}$, $E_{0'}$.

Or d'après les propositions 2 et 6 du paragraphe III.6b combinées avec le lemme 1 (vii) du paragraphe III.6a, la moyenne des nombres de Lefschetz $\alpha \longmapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{D}}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,s)$ est égale à la somme sur tous les γ_c qui sont (u,s)-admissibles des moyennes des fonctions

$$\alpha \longmapsto \sum_{\substack{1\leq m_{\infty'}\leq \frac{\deg(\infty')}{\deg(\infty)} \\ 1\leq m_{0'}\leq \frac{\deg(0')}{\deg(0)}}} \mu_\infty\mu_0 \int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash[G_{\gamma_{\infty'}}\times G_\infty^{\infty'}\times G(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}}\times G_0^{0'}\times G_{\gamma_{0'}}]} dg_{\gamma_{\infty'}}\cdot dg_\infty^{\infty'}\cdot dg^{\infty,0}\cdot dg_0^{0'}\cdot dg_{\gamma_{0'}}\cdot$$
$$\mathbb{1}\Big((1-\alpha)+\deg_1^{\overline{E}'}(0,1,1,1,0)+\deg(\infty)m_{\infty'}-\deg(0)m_{0'} - \deg(\infty)\infty(\det g_{\gamma_{\infty'}})-\deg(0)0(\det g_{\gamma_{0'}})\in J^c_{g_\infty^{\infty'}g^{\infty,0}g_0^{0'}}\Big)$$
$$f_\infty^{\infty'}((g_\infty^{\infty'})^{-1}\gamma_\infty^{\infty'}g_\infty^{\infty'})f^{\infty,0}((g^{\infty,0})^{-1}\gamma_c g^{\infty,0})f_0^{0'}((g_0^{0'})^{-1}\gamma_0^{0'}g_0^{0'})\,.$$

Ceci termine la démonstration du théorème principal. □

3. — Le cas où χ a plusieurs facteurs premiers distincts

On se propose dans ce paragraphe de démontrer la partie (i) du théorème 10 du paragraphe V.2d.

a) Préliminaires

Nous rassemblons ici plusieurs lemmes dont nous aurons besoin.

LEMME 1. — *Soit S une partie compacte de $G(\mathbb{A})$.*
Soient g, g' deux éléments de $G(\mathbb{A})$ tels que $g' \in gS$, $\mathcal{E}^g$ et $\mathcal{E}^{g'}$ les $\mathcal{D}$-Modules localement libres de fibre générique D^r qui leur sont associés et $P \in \mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de G.
Alors :

(i) *La différence des deux polygones p_P^g et $p_P^{g'}$ est bornée par une constante μ_1 qui ne dépend que de S.*

(ii) *La différence des deux polygones canoniques $\overline{p}_P^g$ et $\overline{p}_P^{g'}$ est bornée par μ_1.*

(iii) *Si $\mu \geq 2\mu_1$, le raffinement intermédiaire ${}^{\mu}\overline{Q}_P^g$ vérifie*

$$ {}^{\mu-2\mu_1}\overline{Q}_P^{g'} \subseteq {}^{\mu}\overline{Q}_P^g . $$

Démonstration :

(i) Ecrivons les décompositions d'Iwasawa

$$ g = p\,k\,, \quad g' = p'k'\,, $$

avec p, $p' \in P(\mathbb{A})$ et k, $k' \in K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$.

Alors on a $p_P^{g'} - p_P^g = p_P^{p^{-1}p'}$; or $p^{-1}p'$ reste dans la partie compacte KSK donc le polygone $p_P^{p^{-1}p'} = -p_P^{p'^{-1}p}$ reste borné en fonction de S uniquement.

(ii) résulte de (i) appliqué à tous les raffinements $Q \subseteq P$ de P.

(iii) résulte de (ii) appliqué à ${}^{\mu}\overline{Q}_P^g$. □

LEMME 2. — *Soit h une fonction supportée par une partie compacte S de $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et invariante à droite par un sous-groupe ouvert K' de K.*
Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_\ell$ une décomposition standard de $E = D^r$ avec $E_1 = D^{r_1}, \ldots, E_\ell = D^{r_\ell}$. Notons $M_1, \ldots, M_\ell$ les schémas en groupes sur F des automorphismes de $E_1, \ldots, E_\ell$.
Pour toute permutation σ de $\{1, 2, \ldots, \ell\}$, notons P^σ le sous-groupe parabolique de G associé à la filtration

$$ 0 \subseteq E_{\sigma(1)} \subseteq E_{\sigma(1)} \oplus E_{\sigma(2)} \subseteq \cdots \subseteq E \quad \text{de} \quad E = D^r . $$

Puis, si $\sigma = (\sigma_x)_{x \in |X|}$ est une famille indexée par $|X|$ de permutations de $\{1, 2, \ldots, \ell\}$, notons $N^\sigma(\mathbb{A})$ le produit restreint des $N_{P^{\sigma_x}}(F_x)$ relativement aux $N_{P^{\sigma_x}}(F_x) \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x)$.
Soient aussi $\chi_1, \ldots, \chi_\ell$ des polynômes à coefficients dans F deux à deux premiers entre eux et Z le sous-schéma fermé de $M_1 \times \cdots \times M_\ell$ constitué des uplets dont les polynômes caractéristiques sont $\chi_1, \ldots, \chi_\ell$.
Alors :

(i) *Toutes les fonctions indexées par $n \in N^\sigma(\mathbb{A})$, $k \in K$*

$$\begin{aligned} h^{nk} : & M_1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_\ell(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (m_1, \ldots, m_\ell) \longmapsto h(k^{-1} n^{-1} (m_1, \ldots, m_\ell) n\, k) \end{aligned}$$

sont supportées par une partie compacte $(S_1 \times \cdots \times S_\ell) a^{\mathbb{Z}}$ de $(M_1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_\ell(\mathbb{A}))/a^{\mathbb{Z}}$.

(ii) *Il existe un sous-groupe compact $\overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ de $N^\sigma(\mathbb{A})$ ne dépendant que de S tel que pour tous $n \in N^\sigma(\mathbb{A})$, $k \in K$, on ait $n \in \overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ dès que la restriction de h^{nk} à $Z(\mathbb{A})$ est non nulle.*

(iii) *Il existe un sous-groupe ouvert compact $K_1 \times \cdots \times K_\ell$ de $M_1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_\ell(\mathbb{A})$ ne dépendant que de S et K' et par lequel sont invariantes à droite toutes les fonctions h^{nk}, $n \in \overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$, $k \in K$.*

Démonstration :

(i) Pour que $h^{nk}(m_1, \ldots, m_\ell) \neq 0$, il faut que

$$n^{-1}(m_1, \ldots, m_\ell) n \in KSK\,.$$

Or, la matrice $n^{-1}(m_1, \ldots, m_\ell)n$ a même déterminant que $(m_1, \ldots, m_\ell)$ et mêmes blocs diagonaux.

D'où le résultat.

(ii) Si $h^{nk}(m_1, \ldots, m_\ell) \neq 0$ avec $n \in N^\sigma(\mathbb{A})$, $k \in K$ et $(m_1, \ldots, m_\ell) \in Z(\mathbb{A})$, alors d'après (i) le ℓ-uplet $(m_1, \ldots, m_\ell)$ reste dans une partie compacte de $Z(\mathbb{A})$ qui ne dépend que de S, et donc aussi $(m_1, \ldots, m_\ell)^{-1} n^{-1} (m_1, \ldots, m_\ell) n$, qui est dans $N^\sigma(\mathbb{A})$, reste dans une partie compacte qui ne dépend que de S.

Or, pour toute permutation σ de $\{1, 2, \ldots, \ell\}$, le morphisme de schémas

$$\begin{aligned} Z \times N_{P^\sigma} &\longrightarrow Z \times N_{P^\sigma} \\ ((m_1, \ldots, m_\ell); n) &\longmapsto ((m_1, \ldots, m_\ell); (m_1, \ldots, m_\ell)^{-1} n^{-1} (m_1, \ldots, m_\ell) n) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Pour x une place de F, l'isomorphisme réciproque transforme toute partie compacte de $Z(F_x) \times N_{P^\sigma}(F_x)$ en une partie compacte de $Z(F_x) \times N_{P^\sigma}(F_x)$ et, en-dehors d'un nombre fini de places, il transforme le compact $(Z(F_x) \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x)) \times (N_{P^\sigma}(F_x) \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x))$ en lui-même.

Le résultat annoncé s'en déduit, compte tenu de ce que toute partie compacte de $N^\sigma(\mathbb{A})$ est contenue dans un sous-groupe compact.

(iii) Comme $\overline{N^{\sigma}(\mathbb{A})}$ et K sont compacts, il existe évidemment un sous–groupe ouvert compact $K_1 \times \cdots \times K_\ell$ de $M_1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_\ell(\mathbb{A})$ tel que

$$k^{-1}n^{-1}(K_1 \times \cdots \times K_\ell)nk \subseteq K' \, , \; \forall n \in \overline{N^{\sigma}(\mathbb{A})} \, , \; \forall k \in K \, .$$

Un tel $K_1 \times \cdots \times K_\ell$ répond à la question posée.

□

Pour tout $\mathcal{D}$–Module localement libre $\mathcal{E}$ de fibre générique $E = D^r$ et tout sous–module E' de E, on notera $\mathcal{E} \cap E'$ le sous–$\mathcal{D}$–Module maximal de $\mathcal{E}$ dont la fibre générique est E'.

LEMME 3. — *Soit S une partie compacte de $G(\mathbb{A})$.*

Soient g un élément de $G(\mathbb{A})$ et $\mathcal{E}^g$ le $\mathcal{D}$–Module localement libre de fibre générique D^r qui lui correspond.

Soient γ un élément de $G(F)$ tel que $g^{-1}\gamma g \in S$ et χ son polynôme caractéristique.

Soient $\chi_1, \ldots, \chi_\ell$ des polynômes unitaires divisant χ, deux à deux premiers entre eux et tels que χ et $\chi_1 \ldots \chi_\ell$ aient les mêmes facteurs premiers.

Alors :

(i) *Il existe une constante $\mu_1 \geq 0$ ne dépendant que de S telle que*

$$\mu^+(\mathcal{E}^g) \geq \max_{1 \leq i \leq \ell} \{\mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma))\} \geq \max_{1 \leq i \leq \ell} \{\mu^+_\gamma(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma))\}$$
$$\geq \mu^+(\mathcal{E}^g) - \mu_1 .$$

(ii) *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^g$ est un sous–$\mathcal{D}$–Module maximal de $\mathcal{E}^g$ tel que $\mu^-(\mathcal{F}) > \mu_1 + \mu^+(\mathcal{E}^g/\mathcal{F})$ et si $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma)$ est un sous–$\mathcal{D}$–module d'un $\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma)$ tel que $\mu(\mathcal{F}') = \mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma)) = \max_{1 \leq i \leq \ell} \{\mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma))\}$, on a nécessairement*

$$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \, .$$

Démonstration :

(i) Les deux premières inégalités sont évidentes.

Pour la troisième, considérons $\overline{p}^g$ le polygone canonique de g. Et rappelons que d'après le lemme 8 du paragraphe V.1e, il existe une constante $\mu'_1 \geq 0$ ne dépendant que de S telle que tout sous–$\mathcal{D}$–Module maximal $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}^g$ vérifiant $\mu^-(\mathcal{F}) > \mu^+(\mathcal{E}^g/\mathcal{F}) + \mu'_1$ est génériquement stable par γ.

Soit $\overline{r}$, $1 \leq \overline{r} \leq r$, le plus grand entier tel que

$$d\overline{p}^g(r') = [\overline{p}^g(r') - \overline{p}^g(r'-1)] - [\overline{p}^g(r'+1) - \overline{p}^g(r')] \leq \mu'_1 \, , \;\; \forall r' \in \{1, 2, \ldots, \overline{r}-1\}.$$

On a ou bien $\overline{r} = r$ ou bien $d\overline{p}^g(\overline{r}) > \mu_1'$, donc figure dans la filtration canonique de Harder–Narasimhan de $\mathcal{E}^g$ un sous–$\mathcal{D}$–Module $\overline{\mathcal{E}}$ de rang $\overline{r}$; nécessairement sa fibre générique est stable par γ et il vérifie

$$\mu^-(\overline{\mathcal{E}}) \geq \mu^+(\overline{\mathcal{E}}) - (\overline{r}-1)\mu_1' = \mu^+(\mathcal{E}^g) - (\overline{r}-1)\mu_1' .$$

Puis, comme χ et $\chi_1 \dots \chi_\ell$ ont les mêmes facteurs premiers, $\overline{\mathcal{E}} \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma)$ est non nul pour au moins un $i_0 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. D'après le lemme 2 (ii) ci–dessus, il vérifie alors

$$\mu(\overline{\mathcal{E}} \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma)) \geq \mu^-(\overline{\mathcal{E}} \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma)) \geq \mu^-(\overline{\mathcal{E}}) - \mu_1''$$

où $\mu_1'' \geq 0$ est une constante qui ne dépend que de S.

On voit que $\mu_1 = (r-1)\mu_1' + \mu_1''$ répond à la question posée.

(ii) Il s'agit de prouver la nullité du composé

$$\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_{i_0}(\gamma) \hookrightarrow \mathcal{E}^g \longrightarrow \mathcal{E}^g/\mathcal{F} .$$

Or, d'après (i) et l'hypothèse sur $\mathcal{F}$, on a

$$\mu^-(\mathcal{F}') = \mu(\mathcal{F}') = \max_{1 \leq i \leq \ell} \{\mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma))\} \geq \mu^+(\mathcal{E}^g) - \mu_1 > \mu^+(\mathcal{E}^g/\mathcal{F}) .$$

On conclut d'après la proposition 2 (v) du paragraphe II.2.

□

Corollaire 4. — *Soient χ un polynôme unitaire à coefficients dans F et $\chi_1, \dots, \chi_\ell$ des polynômes unitaires divisant χ, deux à deux premiers entre eux et tels que χ et $\chi_1 \dots \chi_\ell$ aient les mêmes facteurs premiers, comme dans le lemme 1.*

Et soit h une fonction localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$. Alors :

(i) *Pour tout nombre réel μ_0, la fonction*

$$g \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \mathbb{1}\big(\max_{1 \leq i \leq \ell} \{\mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma))\} - \mu(g) \leq \mu_0\big) h(g^{-1}\gamma g)$$

est à support compact sur $G(F) \backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$.

(ii) *On suppose que pour tout élément $\gamma \in G(F)$ de polynôme caractéristique $\chi_\gamma = \chi$ et pour tout sous–groupe parabolique non trivial P de G contenant γ, on a*

$$\int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g) = 0\,, \quad \forall g \in G(\mathbb{A})\,.$$

Dans ce cas, si μ_0 est un réel assez grand en fonction de h, on a pour toute application $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ et tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$\sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \varphi\Big(\max_{1 \leq i \leq \ell} \mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma)) - \mu(g)\Big) h(g^{-1}\gamma g)$$
$$= \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \varphi^{\leq \mu_0}\Big(\max_{1 \leq i \leq \ell} \mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma)) - \mu(g)\Big) h(g^{-1}\gamma g)$$

si $\varphi^{\leq \mu_0}$ désigne la fonction $t \longmapsto \varphi(t)\mathbb{1}(t \leq \mu_0)$.

En particulier, pour un tel μ_0, la fonction de (i) *se confond avec*

$$g \longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} h(g^{-1}\gamma g)\,.$$

Démonstration :

(i) est une conséquence immédiate du lemme 3 (i) ci–dessus et du lemme 1 du paragraphe V.1b.

(ii) Etant donnée $\mu \geq 0$ une constante, considérons le sous–groupe parabolique ${}^{\mu}\overline{Q}^g$ associé à tout $g \in G(\mathbb{A})$.

D'après le lemme 8 du paragraphe V.1e, on a l'implication

$$\forall \gamma \in G(F)\,, \quad h(g^{-1}\gamma g) \neq 0 \Longrightarrow \gamma \in {}^{\mu}\overline{Q}^g(F)$$

dès lors que μ est assez grande en fonction du support de h. De plus, d'après le lemme 3 (ii) ci–dessus, l'expression $\max\limits_{1 \leq i \leq \ell} \mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma)) - \mu(g)$ ne dépend alors que de la classe de γ modulo le radical unipotent de ${}^{\mu}\overline{Q}g$.

Enfin, on voit d'après le lemme 5 du paragraphe V.1d que si μ est assez grande en fonction de h et si ${}^{\mu}\overline{Q}^g = P$ est non trivial, alors pour tout $\gamma \in P(F)$

$$\sum_{\delta \in N_P(F)} h(g^{-1}\gamma\delta g) = \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g) = 0\,.$$

Pour conclure, il suffit de choisir $\mu_0 \in \mathbb{R}$ de façon que

$$^{\mu}\overline{Q}^g = G \Longrightarrow \max_{1 \leq i \leq \ell} \mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma)) - \mu(g) \leq \mu_0 .$$

Or $^{\mu}\overline{Q}^g = G \Longrightarrow \mu^+(g) - \mu^-(g) \leq (r-1)\mu$, donc $\mu_0 = (r-1)\mu$ répond à la question posée.

□

b) Démonstration du théorème 10 (i) du paragraphe V.2d

On se place sous les hypothèses de ce théorème. Ainsi, le polynôme χ compte au moins deux facteurs premiers distincts. On peut certainement l'écrire sous la forme $\chi = \chi_1 \chi_2$ où χ_1 et χ_2 sont deux polynômes unitaires non triviaux premiers entre eux.

On sait d'après le corollaire 4 (ii) que pour μ_0 un réel assez grand en fonction de h

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} h(g^{-1}\gamma g)$$

$$= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \mathbb{1}\Big(\max_{i=1,2}\{\mu^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker} \chi_i(\gamma))\} - \mu(g) \leq \mu_0\Big) h(g^{-1}\gamma g)$$

de sorte qu'il suffit de montrer que l'expression de droite s'annule.

D'après le corollaire 4 (i), la double sommation dans ladite expression de droite est absolument convergente et tous les changements de variables y sont autorisés.

Les degrés des polynômes χ_1 et χ_2 sont de la forme $r_1 d$, $r_2 d$ avec $r_1 \geq 1$, $r_2 \geq 1$, $r_1 + r_2 = r$. On considère la décomposition standard $E = E_1 \oplus E_2$ de $E = D^r$ avec $E_1 = D^{r_1}$, $E_2 = D^{r_2}$. On note M_1, M_2 les schémas en groupes sur F des automorphismes de E_1, E_2 et dm_1, dm_2 les mesures de Haar sur $M_1(\mathbb{A})$, $M_2(\mathbb{A})$ qui attribuent le volume 1 aux sous–groupes ouverts compacts maximaux.

Alors l'intégrale ci–dessus est égale à

$$\int_{M_1(\mathbb{A}) \times M_2(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \frac{dg}{dm_1 \cdot dm_2} \cdot \int_{(M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A}) \times M_2(F)\backslash M_2(\mathbb{A}))/a^{\mathbb{Z}}} dm_1 \cdot dm_2 \cdot$$

$$\sum_{\substack{\gamma_1 \in M_1(F) \\ \chi_{\gamma_1} = \chi_1}} \sum_{\substack{\gamma_2 \in M_2(F) \\ \chi_{\gamma_2} = \chi_2}} \mathbb{1}\Big(\max_{i=1,2}\{\mu^+(\mathcal{E}^{(m_1,m_2)g} \cap E_i)\} - \mu((m_1,m_2)g) \leq \mu_0\Big)$$

$$h(g^{-1}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 m_2)g) .$$

Notons P^1 et P^2 les sous–groupes paraboliques de G respectant les sous–modules E_1 et E_2 de $E = D^r$. Puis, étant donnée $\sigma : |X| \to \{1,2\}$, $x \longmapsto \sigma_x$ une application, notons $N^\sigma(\mathbb{A})$ le produit restreint des $N_{P^{\sigma_x}}(F_x)$ relativement aux $N_{P^{\sigma_x}}(F_x) \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_x)$ muni de la mesure de Haar dn qui attribue le volume 1 à $N^\sigma(\mathbb{A}) \cap K$.

Notons dk la mesure induite par dg sur $K \subseteq G(\mathbb{A})$.

Pour tous éléments $k \in K$, $n \in N^\sigma(\mathbb{A})$, notons h^{nk} la fonction

$$M_1(\mathbb{A}) \times M_2(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (m_1, m_2) \longmapsto h(k^{-1}n^{-1}(m_1,m_2)nk)\,.$$

Alors l'intégrale étudiée se récrit comme la transformée par la fonctionnelle $\int_K dk \cdot \int_{M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \times M_2(F)\backslash M_2(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dm_1 \cdot dm_2 \cdot$ de l'expression

$$\int_{N^\sigma(\mathbb{A})} dn \cdot \sum_{\substack{\gamma_1 \in M_1(F) \\ \chi_{\gamma_1} = \chi_1}} \sum_{\substack{\gamma_2 \in M_2(F) \\ \chi_{\gamma_2} = \chi_2}} h^{nk}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 m_2)$$
$$\sum_{e \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}\left(\max_{i=1,2}\{\mu^+(\mathcal{E}^{(a^e m_1, m_2)n} \cap E_i) - \mu((a^e m_1, m_2)n)\} \leq \mu_0\right).$$

Il nous suffira donc de prouver que pour $m_1 \in M_1(\mathbb{A})$, $m_2 \in M_2(\mathbb{A})$, $k \in K$ fixés, cette expression est nulle si σ a été choisie judicieusement et si μ_0 est assez grand en fonction de h.

Or la condition $\max\limits_{i=1,2}\{\mu^+(\mathcal{E}^{(a^e m_1, m_2)n} \cap E_i) - \mu((a^e m_1, m_2)n)\} \leq \mu_0$ est équivalente à $-B^2_{\mu_0}(n) \leq e \leq B^1_{\mu_0}(n)$ si $B^1_{\mu_0}(n)$ et $B^2_{\mu_0}(n)$ désignent les parties entières de

$$\frac{r}{r_2 d}(\mu_0 + \mu(m_1, m_2) - \mu^+(\mathcal{E}^{(m_1,m_2)n} \cap E_1))$$

et

$$\frac{r}{r_1 d}(\mu_0 + \mu(m_1, m_2) - \mu^+(\mathcal{E}^{(m_1,m_2)n} \cap E_2))\,,$$

donc

$$\sum_{e \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}\left(\max_{i=1,2}\{\mu^+(\mathcal{E}^{(a^e m_1, m_2)n} \cap E_i) - \mu((a^e m_1, m_2)n)\} \leq \mu_0\right)$$
$$= \max\{0, B^1_{\mu_0}(n) + B^2_{\mu_0}(n) + 1\}\,.$$

D'autre part, on sait d'après le lemme 2 (ii) que pour n en–dehors d'un sous–groupe compact $\overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ de $N^\sigma(\mathbb{A})$ qui ne dépend que du support de h, on a $h^{nk}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 m_2) = 0$ dès que $\chi_{\gamma_1} = \chi_1$, $\chi_{\gamma_2} = \chi_2$.

Examinons d'abord le cas où $B^1_{\mu_0}(n) + B^2_{\mu_0}(n) + 1 \geq 0$, $\forall n \in \overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$. Alors il nous suffit de prouver que pour tous éléments fixés $\gamma_1 \in M_1(F)$, $\gamma_2 \in M_2(F)$ avec $\chi_{\gamma_1} = \chi_1$, $\chi_{\gamma_2} = \chi_2$ s'annulent les intégrales

$$\int_{N^\sigma(\mathbb{A})} dn \cdot h^{nk}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 m_2) B^1_{\mu_0}(n)\,,$$
$$\int_{N^\sigma(\mathbb{A})} dn \cdot h^{nk}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 m_2)(B^2_{\mu_0}(n) + 1)\,.$$

On voit ici qu'il convient d'avoir choisi l'application $\sigma : |X| \to \{1,2\}$ de telle façon que les images σ_0 et σ_∞ des places 0 et ∞ soient distinctes; disons par exemple que $\sigma_0 = 1$ et $\sigma_\infty = 2$. En effet, les entiers $B^1_{\mu_0}(n)$ et $B^2_{\mu_0}(n)$ sont alors respectivement invariants par les facteurs $N_{P^1}(F_0)$ et $N_{P^2}(F_\infty)$ de $N^\sigma(\mathbb{A})$. Et on conclut d'après les hypothèses sur les facteurs h_0 et h_∞ de h.

Examinons maintenant l'autre cas où il existe au moins un $n \in \overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ tel que $B^1_{\mu_0}(n) + B^2_{\mu_0}(n) + 1 < 0$. D'après le lemme 1 (ii), on voit déjà qu'existe une constante μ_1 ne dépendant que de $\overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ (donc de h mais pas de μ_0) telle que ou bien $\mu^+(m_1) - \mu(m_1) > \mu_0 - \mu_1$ ou bien $\mu^+(m_2) - \mu(m_2) > \mu_0 - \mu_1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer par exemple

$$\mu^+(m_2) - \mu(m_2) > \mu_0 - \mu_1\,.$$

Pour toute constante $\mu_2 \geq 0$, on peut considérer le sous–groupe parabolique ${}^{\mu_2}\overline{Q}^{m_2}$ de M_2 et ${}^{\mu_2}\overline{E}^{m_2}_{\cdot}$ la filtration de E_2 qui lui correspond. Et on remarque que ${}^{\mu_2}\overline{Q}^{m_2}$ est non trivial si $\mu_0 - \mu_1 \geq (r-1)\mu_2$.

D'autre part, d'après le lemme 2 (i) et (iii), toutes les fonctions h^{nk}, $n \in \overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$, sont supportées par une partie compacte $(S_1 \times S_2)a^{\mathbb{Z}}$ de $(M_1(\mathbb{A}) \times M_2(\mathbb{A}))/a^{\mathbb{Z}}$ ne dépendant que de h et invariantes à droite par un sous–groupe ouvert compact $K_1 \times K_2$ de $M_1(\mathbb{A}) \times M_2(\mathbb{A})$ ne dépendant que de h.

Si donc μ_2 est assez grande en fonction de h et si on note $Q_2 = {}^{\mu_2}\overline{Q}^{m_2}$, il résulte du lemme 8 du paragraphe V.1e et du lemme 5 du paragraphe V.1d que pour tout $n \in N^\sigma(\mathbb{A})$ et tout $\gamma_1 \in M_1(F)$ avec $\chi_{\gamma_1} = \chi_1$

$$\sum_{\substack{\gamma_2 \in M_2(F)\\ \chi_{\gamma_2} = \chi_2}} h^{nk}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 m_2)$$
$$= \sum_{\substack{\gamma_2 \in Q_2(F)/N_{Q_2}(F)\\ \chi_{\gamma_2} = \chi_2}} \int_{N_{Q_2}(\mathbb{A})} dn_{Q_2} \cdot h^{nk}(m_1^{-1}\gamma_1 m_1, m_2^{-1}\gamma_2 n_{Q_2} m_2)\,.$$

De plus, il n'y a aucune restriction à supposer que $m_2 \in Q_2(\mathbb{A})$.

Notons d'autre part Q le sous–groupe parabolique de G respectant la filtration de E par les $E_1 \oplus {}^{\mu_2}\overline{E}_i^{m_2}$, $i \geq 1$. D'après le lemme 1 (iii), on voit que si μ_2 est assez grande en fonction de $\overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ donc de h, la fonction $n \longmapsto B^1_{\mu_0}(n) + B^2_{\mu_0}(n) + 1$ sur $\overline{N^\sigma(\mathbb{A})}$ est invariante par $\overline{N^\sigma(\mathbb{A})} \cap N_Q(\mathbb{A})$ puisqu'alors $\mu^+(\mathcal{E}^{(m_1,m_2)n} \cap E_2) = \mu^+(\mathcal{E}^{(m_1,m_2)n} \cap {}^{\mu_2}\overline{E}_1^{m_2})$.

Or $N^\sigma(\mathbb{A}) \cap N_Q(\mathbb{A})$ contient le facteur $N_{P^1}(F_0) \cap N_Q(F_0)$ et le quotient $N_Q/N_{P^1} \cap N_Q$ s'identifie à N_{Q_2}.

On conclut d'après l'hypothèse sur le facteur h_0 de h. □

4. — Le cas où χ est une puissance d'un polynôme irréductible

On se propose dans ce paragraphe de démontrer la partie (ii) du théorème 10 du paragraphe V.2d.

a) Préliminaires sur les sous–groupes de commutateurs et les intégrales orbitales

Commençons par le résultat suivant :

LEMME 1. — *Soient K un corps, R une algèbre centrale simple sur K de dimension d^2 et $r \geq 1$ un nombre entier.*

Soit $\gamma \in \mathrm{GL}_r(R)$ un automorphisme du R–module à droite $E = R^r$. Enfin, soient μ un polynôme à coefficients dans K et $n \geq 1$ un entier tels que $\mu^n(\gamma) = 0$.

Pour tout entier i, $0 \leq i \leq n$, notons

$$E_i = \operatorname{Ker} \mu(\gamma)^i$$

et pour tous entiers i, $0 \leq i \leq n$, et j, $0 \leq j \leq n-i$, notons

$$E_{i,j} = \operatorname{Ker} \mu(\gamma)^i + (\operatorname{Im} \mu(\gamma)^j \cap \operatorname{Ker} \mu(\gamma)^{i+1})\,.$$

Notons aussi $\mathcal{P}$ la sous–algèbre de $M_r(R)$ constituée des endomorphismes de E qui respectent la filtration de E par les $E_{i,j}$, et $\mathcal{N}$ le radical de $\mathcal{P}$.

Alors :

(i) *La sous–algèbre $\mathrm{End}(E)_\gamma$ de $\mathrm{End}(E) = M_r(R)$ constituée des endomorphismes de E qui commutent avec γ est contenue dans $\mathcal{P}$.*

(ii) *Pour tout entier i, $1 \leq i < n$, $\mu(\gamma)$ induit un isomorphisme*

$$E_i \backslash E_{i+1} \xrightarrow{\sim} E_{i-1} \backslash E_{i-1,1} \subseteq E_{i-1} \backslash E_i$$

qui envoie les $E_i \backslash E_{i,j}$, $0 \leq j \leq n-i$, *sur les* $E_{i-1} \backslash E_{i-1,j+1}$.

Via ces isomorphismes, l'image de tout élément de $\mathrm{End}(E)_\gamma \subseteq \mathcal{P}$ *dans chaque* $\mathrm{End}(E_i \backslash E_{i+1})$ *s'identifie à celle dans* $\mathrm{End}(E_{0,i})$.

En particulier, le noyau de $\mathrm{End}(E)_\gamma \hookrightarrow \mathcal{P} \to \mathrm{End}(E_1)$ *est nilpotent.*

Démonstration :

(i) résulte de ce que tout endomorphisme de E qui commute avec γ doit stabiliser les sous–modules $\mathrm{Ker}\, \mu(\gamma)^i$ et $\mathrm{Im}\, \mu(\gamma)^j$ donc aussi les $E_{i,j}$.

(ii) La première assertion résulte de ce que pour tout entier i

$$\mathrm{Ker}\, \mu(\gamma)^i = (\mu(\gamma))^{-1}(\mathrm{Ker}\, \mu(\gamma)^{i-1}),$$

et pour tous entier i, j

$$\mu(\gamma)(\mathrm{Im}\, \mu(\gamma)^j \cap \mathrm{Ker}\, \mu(\gamma)^{i+1}) = \mathrm{Im}\, \mu(\gamma)^{j+1} \cap \mathrm{Ker}\, \mu(\gamma)^i .$$

La seconde assertion est conséquence de la première puisque tout élément de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ commute a fortiori avec $\mu(\gamma)$ et avec les $\mu(\gamma)^i$.

Enfin, on voit que le noyau de $\mathrm{End}(E)_\gamma \hookrightarrow \mathcal{P} \to \mathrm{End}(E_1)$ s'identifie à celui de $\mathrm{End}(E)_\gamma \hookrightarrow \mathcal{P} \to \mathrm{End}(E_1) \times \mathrm{End}(E_1 \backslash E_2) \times \cdots \times \mathrm{End}(E_{n-1} \backslash E_n)$ donc est contenu dans $\mathcal{N}$. Il est nilpotent.

$\square$

Remarque :

Avec les notations du lemme 1, on voit que si $\mu = \mu' \mu''$ est le produit de deux polynômes μ', μ'' premiers entre eux et si on pose $E' = \mathrm{Ker}\, \mu'^n(\gamma)$, $E'' = \mathrm{Ker}\, \mu''^n(\gamma)$, alors $E = E' \oplus E''$, $\mathrm{End}(E)_\gamma = \mathrm{End}(E')_\gamma \times \mathrm{End}(E'')_\gamma$ et pour tous entiers i, j

$$\begin{gathered} E' \cap E_i = \mathrm{Ker}\, \mu'(\gamma)^i , \qquad E'' \cap E_i = \mathrm{Ker}\, \mu''(\gamma)^i , \\ E' \cap E_{i,j} = \mathrm{Ker}\, \mu'(\gamma)^i + (\mu'(\gamma)^j (E') \cap \mathrm{Ker}\, \mu'(\gamma)^{i+1}) , \\ E'' \cap E_{i,j} = \mathrm{Ker}\, \mu''(\gamma)^i + (\mu''(\gamma)^j (E'') \cap \mathrm{Ker}\, \mu''(\gamma)^{i+1}) . \end{gathered}$$

$\square$

Proposition 2. — *Sous les hypothèses et avec les notations du lemme* 1, *on a :*

(i) *Le groupe* $\mathrm{Aut}(E)_\gamma = \mathrm{End}(E)_\gamma^\times$ *des automorphismes de* E *qui commutent avec* γ *est unimodulaire au sens que son action par conjugaison sur* $\mathrm{End}(E)_\gamma$ *induit l'action triviale sur la puissance extérieure maximale de* $\mathrm{End}(E)_\gamma$.

(ii) *Notons* $\mathcal{P}_1$ *la sous–algèbre de* $\mathrm{End}(E_1)$ *constituée des endomorphismes de* E_1 *qui respectent la filtration par les* $E_{0,j}$ *et* $\mathcal{P}_{1\gamma} = \mathcal{P}_1 \cap \mathrm{End}(E_1)_\gamma$.

Et supposons que tous les facteurs irréductibles de μ *apparaissent avec la multiplicité* 1.

Alors l'homomorphisme

$$\mathrm{End}(E)_\gamma \longrightarrow \mathcal{P}_{1\gamma} \qquad [\textit{resp.}\, \mathrm{Aut}(E)_\gamma \longrightarrow \mathcal{P}_{1\gamma}^{\times}]$$

est surjectif.

Par conséquent, l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(E)_\gamma &\longrightarrow \prod_{1\leq j\leq n} \mathrm{End}(E_{0,j}\backslash E_{0,j-1})_\gamma \\ [\textit{resp.}\quad \mathrm{Aut}(E)_\gamma &\longrightarrow \prod_{1\leq j\leq n} \mathrm{Aut}(E_{0,j}\backslash E_{0,j-1})_\gamma\ ] \end{aligned}$$

est surjectif et son noyau est le radical de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ [*resp. le radical unipotent de* $\mathrm{Aut}(E)_\gamma$].

Démonstration :

(i) Il suffit de prouver l'assertion après n'importe quelle extension du corps de base. On peut donc supposer qu'il existe un isomorphisme $R \cong M_d(K)$. Quitte à remplacer r par rd, ceci nous ramène au cas où $R = K$.

On peut supposer également que le polynôme minimal de γ est scindé et même, d'après la remarque qui précède l'énoncé de la proposition, que c'est une puissance μ^n d'un polynôme μ de degré 1.

En utilisant les notations du lemme 1, choisissons pour tout i, $1 \leq i \leq n$, un sous–espace $\overline{E}_i$ de E_i qui relève le quotient $E_{i-1,1}\backslash E_{i-1,0} = E_{i-1,1}\backslash E_i$ de E_i.

Alors, se donner un élément de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ revient exactement à se donner sa restriction à chaque $\overline{E}_i$ qui est un homomorphisme arbitraire de $\overline{E}_i$ dans $E_i = \mathrm{Ker}\,\mu(\gamma)^i = \bigoplus_{1\leq i'\leq i} \bigoplus_{0\leq j\leq n-i'} \mu(\gamma)^j(\overline{E}_{j+i'})$.

Pour g un élément de $\mathrm{End}(E)_\gamma$, notons $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ la famille des homomorphismes qu'il induit dans les $E_{i-1,1}\backslash E_i$.

Alors son action par conjugaison sur la puissance extérieure maximale de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ est le produit sur tous les i, $1 \leq i \leq n$, de

$$\det(g_i)^{\dim E_i}$$

et de

$$\Big(\prod_{1\le i'\le i}\ \prod_{i'\le j'\le n} \det(g_i)^{\dim \overline{E}_{j'}}\Big)^{-1}.$$

Comme $\dim E_i = \sum\limits_{1\le i'\le i}\ \sum\limits_{0\le j\le n-i'} \dim \overline{E}_{j+i'}$, on voit que ce produit est 1. C'est ce qu'on voulait.

(ii) Montrons que l'homomorphisme $\mathrm{End}(E)_\gamma \to \mathcal{P}_{1\gamma}$ est surjectif. Il suffit de le prouver après n'importe quelle extension finie séparable du corps de base, l'hypothèse sur μ n'étant pas modifiée par une telle extension. On peut donc supposer qu'il existe un isomorphisme $R \cong M_d(K)$. Par équivalence de Morita et quitte à remplacer r par rd, ceci nous ramène au cas où $R = K$.

Et d'après la remarque qui précède l'énoncé de la proposition, on peut supposer que μ est irréductible.

E vu comme module sur l'anneau de polynômes $K[X]$ via l'action de γ s'écrit sous la forme

$$\bigoplus_k \mu(X)^{n_k}\backslash K[X]e_k$$

où les n_k sont des entiers, $1 \le n_k \le n$, et les e_k sont des éléments de E.

Les éléments de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ sont déterminés par les images des e_k, chacune étant arbitraire dans $\mathrm{Ker}\,\mu(\gamma)^{n_k}$.

D'autre part, les éléments de $\mathrm{End}(E_1)_\gamma$ sont déterminés par les images des $\mu(\gamma)^{n_k-1}e_k$, lesquelles sont arbitraires dans E_1.

On voit qu'un tel élément de $\mathrm{End}(E_1)_\gamma$ est induit par un élément de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ si et seulement si pour tout k l'image de $\mu(\gamma)^{n_k-1}e_k$ est dans

$$\mu(\gamma)^{n_k-1}(\mathrm{Ker}\,\mu(\gamma)^{n_k})\,.$$

C'est dire exactement que cet élément est dans la sous–algèbre $\mathcal{P}_{1\gamma}$ de $\mathrm{End}(E_1)_\gamma$ comme on voulait.

Maintenant, le noyau de $\mathrm{End}(E)_\gamma \to \mathcal{P}_{1\gamma}$ étant nilpotent d'après le lemme 1 (ii), on voit qu'un élément de $\mathrm{End}(E)_\gamma$ est inversible si et seulement si son image dans $\mathcal{P}_{1\gamma}$ l'est, si bien qu'est aussi surjectif l'homomorphisme

$$\mathrm{Aut}(E)_\gamma \longrightarrow \mathcal{P}_{1\gamma}^\times\,.$$

Enfin, remarquons que le noyau de $\mathrm{End}(E)_\gamma \to \prod\limits_{1\le j\le n} \mathrm{End}(E_{0,j}\backslash E_{0,j-1})_\gamma$ est nilpotent puisque contenu dans $\mathcal{N}$ d'après le lemme 1 (ii) et que d'autre part l'algèbre $\prod\limits_{1\le j\le n} \mathrm{End}(E_{0,j}\backslash E_{0,j-1})_\gamma$ est semi–simple puisque par hypothèse tous les facteurs irréductibles de μ apparaissent avec la multiplicité 1.

A partir de là, les deux dernières assertions résultent des deux premières. $\square$

Citons enfin le résultat suivant, dû à Rao et Deligne en caractéristique 0 et à Howe en caractéristique > 0 :

PROPOSITION 3. — *Soient K un corps local non archimédien, R une algèbre centrale simple sur K de dimension d^2 et $r \geq 1$ un nombre entier.*

Soient $\gamma \in \mathrm{GL}_r(R)$ un automorphisme du R–module à droite $E = R^r$ et $\mathrm{Aut}(E)_\gamma$ le sous–groupe de $\mathrm{Aut}(E) = \mathrm{GL}_r(R)$ constitué des automorphismes de E qui commutent avec γ.

Enfin, soient dg et dg_γ deux mesures de Haar sur les groupes localement compacts unimodulaires $\mathrm{Aut}(E)$ et $\mathrm{Aut}(E)_\gamma$ et $\frac{dg}{dg_\gamma}$ la mesure quotient sur l'orbite $\mathrm{Aut}(E)_\gamma \backslash \mathrm{Aut}(E)$.

Alors, pour toute fonction h localement constante à support compact définie sur $\mathrm{Aut}(E)$, l'intégrale orbitale

$$\int_{\mathrm{Aut}(E)_\gamma \backslash \mathrm{Aut}(E)} \frac{dg}{dg_\gamma} \cdot h(g^{-1}\gamma g)$$

est convergente.

Démonstration : On a vu dans la proposition 2 (i) que le sous–groupe $\mathrm{Aut}(E)_\gamma$ est unimodulaire.

Pour ce qui est de la convergence, voir [Laumon] proposition 4.8.9. $\square$

b) Encore une nouvelle fonction de pente maximale

Dans ce sous–paragraphe et dans les suivants, on fixe χ un polynôme unitaire à coefficients dans F de degré rd qui est une puissance d'un polynôme irréductible μ.

On note F' le corps $F' = F[X]/\mu(X)$ et $\mathcal{O}'_X$ le faisceau de $\mathcal{O}_X$–algèbres sur X des entiers de F' c'est–à–dire la clôture intégrale de $\mathcal{O}_X$ dans F'.

Le faisceau d'algèbres $\mathcal{O}'_X \otimes \mathcal{D}$ est fini sur $\mathcal{O}_X$ et il a pour fibre générique $F' \otimes_F D$. Il est certainement contenu dans un faisceau d'algèbres fini sur $\mathcal{O}_X$, de fibre générique $F' \otimes_F D$ et maximal pour ces propriétés. On fixe une fois pour toutes un tel faisceau $\mathcal{D}'$.

LEMME 4. — *Soient g un élément de $G(\mathbb{A})$ et $\mathcal{E}^g$ le $\mathcal{D}$–Module localement libre de fibre générique D^r qui lui correspond.*

Soit γ un élément de $G(F) = \mathrm{GL}_r(D)$ dont le polynôme caractéristique est χ.

Etant donné $\mathcal{F}$ un sous-$\mathcal{D}$-Module de $\mathcal{E}^g$, on dira qu'il est (γ,μ)-admissible si γ stabilise la fibre générique de $\mathcal{F}$ et si la restriction de γ à cette fibre est annulée par le polynôme irréductible μ. On dira que $\mathcal{F}$ est $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$-admissible s'il est (γ,μ)-admissible et s'il est stable par l'action à droite de $\mathcal{D}'$ induite par celle de $F'\otimes_F D$.

On suppose que $g^{-1}\gamma g \in S$, où S est une partie compacte de $G(\mathbb{A})$.

Alors pour tout sous-$\mathcal{D}$-Module non nul maximal $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}^g$ qui est (γ,μ)-admissible et en notant $\mathcal{F}'$ le plus grand sous-$\mathcal{D}$-Module de $\mathcal{F}$ qui soit $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$-admissible, on a

$$\mathrm{rg}\mathcal{F}' = \mathrm{rg}\mathcal{F}$$
$$\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(\mathcal{F}') \geq \mu(\mathcal{F}) - \mu_0$$

où $\mu_0 \geq 0$ est une constante qui ne dépend que de S.

Démonstration :

On note d'abord que le polynôme χ et donc aussi le polynôme μ figurent dans un ensemble fini qui ne dépend que de S.

Puis on remarque que dans le $\mathbb{A}$-module des polynômes de degré $< \deg\mu$ à coefficients dans $\mathbb{A}$, il existe certainement un $\mathcal{O}$-module compact $\mathcal{Q}$ ne dépendant que de μ tel que

$$\mathcal{D}'_{\mathbb{A}} = \prod_{x\in|X|} \mathcal{D}'_x = \prod_{x\in|X|} \mathcal{D}'\otimes_{\mathcal{O}_X} O_x \subseteq \mathcal{D}_{\mathbb{A}}\otimes\mathcal{Q} \subseteq D_{\mathbb{A}}\otimes_{\mathbb{A}}\mathbb{A}[X]/\mu(X) = D'_{\mathbb{A}}\,.$$

D'après l'hypothèse $g^{-1}\gamma g\in S$, on voit qu'il existe une partie compacte S' de $M_r(D_{\mathbb{A}})$ ne dépendant que de S telle que

$$g^{-1}\{q(\gamma),\ q\in\mathcal{Q}\}g \subseteq S'\,.$$

Soit $b\in\mathbb{A}^\times$ un élément ne dépendant que de S tel que $bS'\subseteq M_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$. Et notons $\mathcal{L}$ le $\mathcal{O}_X$-Module inversible sur X associé à $b\in\mathbb{A}^\times$.

Pour $\mathcal{F}$ comme dans l'énoncé, on obtient donc

$$(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L})\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{F}\,.$$

Ainsi, $(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L})\mathcal{D}'$ est un sous-$\mathcal{D}$-Module de $\mathcal{F}$. Il est stable par l'action à droite de $\mathcal{D}'$ puisque $\mathcal{D}'\mathcal{D}'=\mathcal{D}'$, donc il est contenu dans $\mathcal{F}'$. Et il contient $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}$.

De ceci on déduit

$$\mathrm{rg}\mathcal{F} = \mathrm{rg}\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L} \leq \mathrm{rg}\mathcal{F}' \leq \mathrm{rg}\mathcal{F}\,,$$
$$\mu(\mathcal{F}) + d\deg b = \mu(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}) \leq \mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})\,.$$

Ainsi $\mu_0 = -d\deg b$ répond à la question posée.

$\square$

On a besoin de la variante suivante du lemme 3 du paragraphe V.3a :

LEMME 5. — *Soit S une partie compacte de $G(\mathbb{A})$.*
Soient g un élément de $G(\mathbb{A})$ et $\mathcal{E}^g$ le $\mathcal{D}$–Module localement libre de fibre générique D^r qui lui correspond.
Soit γ un élément de $G(F)$ de polynôme caractéristique χ et tel que $g^{-1}\gamma g \in S$.
Introduisons

$$\begin{aligned}\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g) &= \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^g)\\ &= \max\{\mu(\mathcal{F}'),\ \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{E}^g \wedge \mathcal{F}' \text{ est } (\gamma,\mu,\mathcal{D}')\text{–admissible}\}.\end{aligned}$$

Alors :

(i) *Si $\mathcal{E}'$ désigne le plus grand sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker}\mu(\gamma)$ qui soit $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$–admissible c'est–à–dire stable par $\mathcal{D}'$, on a*

$$\begin{aligned}\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^g) &= \mu^+_\gamma(\mathcal{E}')\\ &= \max\{\mu(\mathcal{F}'), \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{E}' \wedge \mathcal{F}' \text{ est stable par } \gamma \text{ génériquement}\}.\end{aligned}$$

D'autre part, si $\mathcal{F}'$ est un sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{E}^g$ qui est $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$–admissible et vérifie $\mu(\mathcal{F}') = \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^g)$, il est γ–semi–stable.

(ii) *Il existe une constante $\mu_1 \geq 0$ ne dépendant que de S telle que*

$$\mu^+(\mathcal{E}^g) \geq \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^g) \geq \mu^+(\mathcal{E}^g) - \mu_1\,.$$

(iii) *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^g$ est un sous–$\mathcal{D}$–Module maximal de $\mathcal{E}^g$ stable génériquement par γ et tel que $\mu^-_\gamma(\mathcal{F}) > \mu_1 + \mu^+_\gamma(\mathcal{E}^g/\mathcal{F})$ et si $\mathcal{F}'$ est un sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{E}^g$ qui est $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$–admissible et vérifie $\mu(\mathcal{F}') = \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^g)$, on a nécessairement*

$$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}\,.$$

Démonstration :

(i) Les deux assertions résultent de ce que si $\mathcal{F}'$ est un sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{E}^g$ qui est $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$–admissible, tout sous–$\mathcal{D}$–Module maximal de $\mathcal{F}'$ qui est stable par γ génériquement est aussi $(\gamma,\mu,\mathcal{D}')$–admissible.

(ii) Il est évident sur la définition que $\mu^+(\mathcal{E}^g) \geq \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^g)$. Par ailleurs, il existe d'après le lemme 3 (i) du paragraphe V.3a une constante μ'_1 ne dépendant que de S telle que

$$\mu^+_\gamma(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker}\mu(\gamma)) \geq \mu^+(\mathcal{E}^g) - \mu'_1\,.$$

Soit $\mathcal{F}$ un sous–$\mathcal{D}$–Module maximal de $\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker}\mu(\gamma)$, stable par γ génériquement et qui réalise

$$\mu(\mathcal{F}) = \mu_\gamma^+(\mathcal{E}^g \cap \operatorname{Ker}\mu(\gamma)) .$$

Et soit $\mathcal{F}'$ le plus grand sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{F}$ qui soit $(\gamma, \mu, \mathcal{D}')$–admissible.

D'après le lemme 4, on a

$$\mu(\mathcal{F}') \geq \mu(\mathcal{F}) - \mu_0$$

où $\mu_0 \geq 0$ est une constante qui ne dépend que de S.

On voit que $\mu_1 = \mu_1' + \mu_0$ répond à la question posée.

(iii) Il s'agit de prouver la nullité du composé

$$\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{E}^g \longrightarrow \mathcal{E}^g/\mathcal{F} .$$

Or, d'après (i), (ii) et l'hypothèse sur $\mathcal{F}'$, on a

$$\mu_\gamma^-(\mathcal{F}') = \mu(\mathcal{F}') \geq \mu^+(\mathcal{E}^g) - \mu_1 \geq \mu_\gamma^+(\mathcal{E}^g) - \mu_1 > \mu_\gamma^+(\mathcal{E}^g/\mathcal{F}) .$$

On conclut d'après la proposition 2 (v) du paragraphe II.2.

$\square$

On a également besoin du corollaire suivant :

COROLLAIRE 6. — *Soit h une fonction localement constante à support compact de $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$.*

Et soit $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ une application.

Alors, si $\mu \geq 0$ est une constante assez grande en fonction de h, l'intégrale

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \varphi(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g) - \mu(g)) h(g^{-1}\gamma g)$$

converge si et seulement si pour tout sous–groupe parabolique standard $P \in \mathcal{P}_0$, $P \supseteq P_0$, de G converge l'intégrale

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(N_P(\mathbb{A}) \cap K)} \int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dm_P \cdot \mathbb{1}({}^{\mu}\overline{Q}^{m_P} = P)$$

$$\sum_{\substack{\gamma \in M_P(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} \varphi(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(m_P^1) - \mu(m_P)) \int_K dk \cdot \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(k^{-1} m_P^{-1} \gamma m_P n_P k)$$

où dk désigne la mesure de Haar de volume 1 sur $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$, dm_P la mesure de Haar sur le sous–groupe de Lévi $M_P(\mathbb{A})$ qui attribue le volume 1 à $M_P(\mathbb{A}) \cap K$, et m_P^1 la première composante de tout $m_P \in M_P(\mathbb{A}) = M_P^1(\mathbb{A}) \times \cdots \times M_P^{|P|}(\mathbb{A})$.

Et dans ce cas, la première intégrale est égale à la somme des secondes sur tous les sous–groupes paraboliques standards P.

Démonstration :

Soit $\mu \geq 0$ une constante. L'intégrale de la fonction considérée sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ est certainement égale à la somme sur tous les sous–groupes paraboliques standards P des intégrales de la même fonction sur les $\{g \in P(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\ {}^{\mu}\overline{Q}^{g} = P\}$.

De plus, si μ est assez grande en fonction de h, on a les propriétés suivantes, pour $g \in G(\mathbb{A})$ et ${}^{\mu}\overline{Q}^{g} = P$:

- D'après le lemme 8 du paragraphe V.1e,

$$h(g^{-1}\gamma g) \neq 0 \Longrightarrow \gamma \in P(F), \quad \forall \gamma \in G(F)\,.$$

- D'après le lemme 5 du paragraphe V.1d,

$$\sum_{\delta \in N_P(F)} h(g^{-1}\gamma\delta g) = \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g), \quad \forall \gamma \in P(F)\,.$$

- D'après le lemme 5 (iii) ci–dessus,

$$h(g^{-1}\gamma g) \neq 0 \Longrightarrow \mu^{+}_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g) = \mu^{+}_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(\mathcal{E}^{g} \cap E_1^{P})\,.$$

On conclut en écrivant la formule d'intégration associée à la décomposition d'Iwasawa.

$\square$

c) Introduction d'un facteur de convergence

On conserve les notations du sous–paragraphe précédent.

En particulier, on a défini les fonctions de pente maximale $\mu^{+}_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}$.

PROPOSITION 7. —

(i) *Pour toute fonction h localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et pour tout réel $s > 0$, l'intégrale*

$$I^{s}_{\chi}(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} q^{-s(\mu^{+}_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g) - \mu(g))} h(g^{-1}\gamma g)$$

est convergente. Plus précisément, pour toute classe de conjugaison c dans $G(F)$ de polynôme caractéristique χ et pour tout réel $s > 0$, l'intégrale

$$I_c^s(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in c} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g) - \mu(g))} h(g^{-1}\gamma g)$$

est convergente. Et on a

$$I_\chi^s(h) = \sum_c I_c^s(h)\,.$$

(ii) *Pour toute classe de conjugaison c dans $G(F)$ dont le polynôme caractéristique est χ mais qui n'est pas elliptique c'est-à-dire dont le polynôme minimal n'est pas μ, il existe une fonction h positive vérifiant*

$$\lim_{s \to 0} I_c^s(h) = +\infty\,.$$

(iii) *Si c_μ désigne la classe de conjugaison elliptique dans $G(F)$ dont le polynôme minimal est μ, on a pour toute fonction h*

$$\lim_{s \to 0} I_{c_\mu}^s(h) = I_{c_\mu}(h)$$

où $I_{c_\mu}(h)$ désigne l'intégrale convergente

$$I_{c_\mu}(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in c_\mu} h(g^{-1}\gamma g)\,.$$

(iv) *Etant données $x \in |X| \backslash T_a$ une place et h_x [resp. h] une fonction localement constante à support compact sur $G(F_x)$ [resp. $G(\mathbb{A})$], on dira que h_x est inadaptée à χ [resp. que h est inadaptée à χ en la place x si h est de la forme $h = h_x \otimes h^x$ et] si pour tout $\gamma \in G(F)$ de polynôme caractéristique χ et tout sous-groupe parabolique non trivial P de G contenant γ, on a*

$$\int_{N_P(F_x)} dn_{P,x} \cdot h_x(g_x^{-1}\gamma n_{P,x} g_x) = 0\,, \ \forall g_x \in G(F_x)\,,$$

où $dn_{P,x}$ désigne une mesure de Haar sur $N_P(F_x)$.

Alors, pour toute fonction h inadaptée à χ en au moins une place, on a

$$\lim_{s \to 0} I_\chi^s(h) = I_\chi(h)$$

où $I_\chi(h)$ désigne l'intégrale convergente

$$I_\chi(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} h(g^{-1}\gamma g)\,.$$

Démonstration :

(i) Prouvons la première assertion.

Pour cela, choisissons $\mu \geq 0$ une constante qui vérifie la conclusion du corollaire 6. Il s'agit donc de prouver que pour tout sous–groupe parabolique standard P de G et notant h_P la fonction localement constante

$$M_P(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad m_P \longmapsto \int_K dk \cdot \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(k^{-1} m_P n_P\, k)\,,$$

est convergente l'intégrale

$$\int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dm_P \cdot \mathbb{1}({}^{\mu}\overline{Q}^{m_P} = P) \sum_{\substack{\gamma \in M_P(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(m_P^1) - \mu(m_P))} h_P(m_P^{-1} \gamma m_P).$$

Ecrivons la décomposition en facteurs $M_P = M_P^1 \times \cdots \times M_P^{|P|}$.

Pour $m_P = (m_P^1, \ldots, m_P^{|P|}) \in M_P(\mathbb{A})$ et $e = (e_1, \ldots, e_{|P|}) \in \mathbb{Z}^{|P|}$, la condition ${}^{\mu}\overline{Q}^{a^e m_P} = P$ portant sur $a^e m_P = (a^{e_1} m_P^1, \ldots, a^{e_{|P|}} m_P^{|P|})$ s'explicite en

$${}^{\mu}\overline{Q}^{m_P^1} = M_P^1, \ldots, {}^{\mu}\overline{Q}^{m_P^{|P|}} = M_P^{|P|} \quad \text{et}$$

$$\mu^-(m_P^1) + de_1 > \mu^+(m_P^2) + de_2, \ldots, \mu^-(m_P^{|P|-1}) + de_{|P|-1} > \mu^+(m_P^{|P|}) + de_{|P|}\,.$$

D'autre part, si $r_1, \ldots, r_{|P|}$ désignent les rangs de $M_P^1, \ldots, M_P^{|P|}$, on a

$$\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(a^{e_1} m_P^1) - \mu(a^e m_P) = \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(m_P^1) - \mu(m_P) + d\big(e_1 - \tfrac{r_1 e_1 + \cdots + r_{|P|} e_{|P|}}{r}\big)\,.$$

Ainsi, pour $m_P \in M_P(\mathbb{A})$, la somme

$$\sum_{e = (e_1, \ldots, e_{|P|}) \in \mathbb{Z}^{|P|}/\mathbb{Z}} \mathbb{1}({}^{\mu}\overline{Q}^{a^e m_P} = P) \sum_{\substack{\gamma \in M_P(F) \\ \chi_\gamma = \chi,\ h_P(m_P^{-1} \gamma m_P) \neq 0}} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(a^{e_1} m_P^1) - \mu(a^e m_P))}$$

converge si $s > 0$.

Comme la partie de $M_P^1(F)\backslash M_P^1(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \times \cdots \times M_P^{|P|}(F)\backslash M_P^{|P|}(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ constituée des $(m_P^1, \ldots, m_P^{|P|})$ tels que ${}^{\mu}\overline{Q}^{m_P^1} = M_P^1, \ldots, {}^{\mu}\overline{Q}^{m_P^{|P|}} = M_P^{|P|}$ est compacte d'après le lemme 1 du paragraphe V.1b, l'intégrale ci–dessus est effectivement convergente.

Enfin, comme il y a convergence absolue, la seconde assertion est équivalente à la première, avec l'égalité $I_\chi^s(h) = \sum_c I_c^s(h)$.

(ii) Soit γ_c un représentant de la classe de conjugaison c.

Soit P le sous–groupe parabolique de G attaché à la filtration de $E = D^r$ par les sous-modules $\operatorname{Ker}\mu(\gamma_c)$, $\operatorname{Ker}\mu^2(\gamma_c), \dots$ Comme c n'est pas elliptique, P est non trivial. On peut supposer qu'il est standard.

Soit Z le sous–schéma fermé de M_P constitué des éléments dont le polyôme minimal est μ. Bien sûr, on a $\gamma_c \in Z(F)N_P(F)$.

Soit x n'importe quelle place dans $|X|\backslash T_a$. Dans $Z(F_x)N_P(F_x)$ le sous–ensemble des points g_x conjugués de γ_c est un ouvert de Zariski puisque défini par la condition que $\mu(g_x)$ soit de rang maximal. Par conséquent, on peut choisir une fonction localement constante à support compact h, de la forme $h_x \otimes h^x$, positive, invariante par conjugaison par K, ne s'annulant pas en γ_c et telle que h_x s'annule en tous les points de $G(F_x)$ qui sont conjugués d'un élément de $Z(F_x)N_P(F_x)$ sans l'être de γ_c.

De ce choix, il résulte que pour toute constante $\mu \geq 0$ assez grande en fonction de h et pour tout réel $s > 0$, on a

$$I_c^s(h) \geq \frac{1}{\operatorname{vol}(N_P(\mathbb{A}) \cap K)} \int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dm_P \cdot \mathbb{1}({}^\mu\overline{Q}^{m_P} = P)$$
$$\sum_{\gamma \in Z(F)} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(m_P^1) - \mu(m_P))} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(m_P^{-1}\gamma m_P n_P)\,.$$

Comme l'intégrale

$$\int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dm_P \cdot \mathbb{1}({}^\mu\overline{Q}^{m_P} = P) \sum_{\gamma \in Z(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(m_P^{-1}\gamma m_P n_P)$$

diverge, on voit que $\lim_{s \to +\infty} I_c^s(h) = +\infty$.

(iii) résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque la double sommation sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et sur c_μ

$$I_{c_\mu}(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma \in c_\mu} h(g^{-1}\gamma g)$$

est absolument convergente et que, d'après le lemme 5 (ii), il existe une constante $\mu_1 \geq 0$ ne dépendant que du support de h telle que

$$h(g^{-1}\gamma g) \neq 0 \Longrightarrow \mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g) - \mu(g) \geq -\mu_1\,.$$

(iv) D'après l'hypothèse sur h et le corollaire 6, on a pour toute constante μ assez grande en fonction de h et pour tout réel $s \geq 0$:

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g)-\mu(g))} h(g^{-1}\gamma g)$$

$$= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \mathbb{1}({}^{\mu}\overline{Q}^g = G) \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \chi_\gamma = \chi}} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g)-\mu(g))} h(g^{-1}\gamma g)$$

Et la seconde expression est évidemment continue en la variable $s \geq 0$ puisque le quotient $G(F)\backslash\{g \in G(\mathbb{A}),\ {}^{\mu}\overline{Q}^g = G\}/a^{\mathbb{Z}}$ est compact. C'est ce qu'on voulait.

□

d) Décomposition par classes de conjugaison et par places

On conserve les notations des deux sous–paragraphes précédents.

Commençons par montrer :

LEMME 8. — *Pour toute classe de conjugaison c dans $G(F)$ de polynôme caractéristique χ, notons μ^{n_c} le polynôme minimal de c et choisissons γ_c un représentant de c tel que le sous–groupe parabolique P_c de G respectant la filtration par les*

$$E_i^c = \operatorname{Ker} \mu(\gamma_c)^i\,, \quad 0 \leq i \leq n_c\,,$$

et les

$$E_{i,j}^c = \operatorname{Ker} \mu(\gamma_c)^i + (\operatorname{Im} \mu(\gamma_c)^j \cap \operatorname{Ker} \mu(\gamma_c)^{i+1})\,,\ 0 \leq i \leq n_c\,,\ 0 \leq j \leq n_c - i\,,$$

soit standard.

Alors :

(i) *Le sous–schéma en groupes G_{γ_c} de G des commutateurs de γ_c est contenu dans P_c.*

De plus, le groupe $G_{\gamma_c}(\mathbb{A})$ est unimodulaire. On peut le munir d'une mesure de Haar dg_{γ_c}.

(ii) *Pour g un élément de $G(\mathbb{A})$ et $\mathcal{E}^g$ le $\mathcal{D}$–Module localement libre de fibre générique $E = D^r$ qui lui est associé, notons*

$$\varphi_c(g) = \varphi_c(\mathcal{E}^g) = \frac{1}{r}\Big(\sum_{0 \leq j < n_c} \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}} \mathcal{E}^g\Big)$$

où chaque $\mathcal{E}'_{0,j}$, $0 \le j \le n_c$, *désigne le plus grand sous–*$\mathcal{D}$*–Module de* $\mathcal{E}^g \cap E^c_{0,j}$ *stable par l'action à droite de* $\mathcal{D}'$.

Ceci étant posé, l'intégrale

$$\mathcal{I}^s_c(g) = \int_{G_{\gamma_c}(F)\backslash G_{\gamma_c}(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg_{\gamma_c} \cdot q^{-s(\mu^+_{\gamma_c,\mu,\mathcal{D}'}(g_{\gamma_c}g)-\mu(g_{\gamma_c}g))}$$

est convergente pour tout réel $s > 0$, *et elle est de la forme*

$$q^{-s\varphi_c(g)} I^s_c$$

où I^s_c *est un réel positif qui ne dépend que de* s.

Démonstration :

(i) La première assertion a été prouvée dans le lemme 1 (i) et la seconde dans la proposition 2 (i).

(ii) On sait d'après la proposition 7 (i) que pour toute fonction localement constante à support compact h sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et tout réel $s > 0$ converge l'intégrale

$$I^s_c(h) = \int_{G_{\gamma_c}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \frac{dg}{dg_{\gamma_c}} \cdot \mathcal{I}^s_c(g) h(g^{-1}\gamma_c g) .$$

Comme l'expression intégrale $\mathcal{I}^s_c(g)$ en la variable g est invariante à droite par K, on voit qu'elle doit converger pour tout g.

Pour $s > 0$, il s'agit maintenant de montrer que l'expression

$$q^{s\varphi_c(g)} \mathcal{I}^s_c(g)$$

est indépendante de $g \in G(\mathbb{A})$.

Etant donné g un élément de $G(\mathbb{A})$, soit $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_{0,0}$ le plus grand sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{E}^g \cap E^c_1 = \mathcal{E}^g \cap E^c_{0,0}$ stable par l'action à droite de $\mathcal{D}'$. Considérons g' un élément quelconque de $G(\mathbb{A})$ tel que $\mathcal{E}^{g'} \cap E^c_1 = \mathcal{E}'_1$. A fortiori, pour tout j, $0 \le j < n_c$, $\mathcal{E}^{g'} \cap E^c_{0,j}$ se confond avec $\mathcal{E}'_{0,j}$ le plus grand sous–$\mathcal{D}$–Module de $\mathcal{E}^g \cap E^c_{0,j}$ stable par $\mathcal{D}'$.

Maintenant, pour tout $g_{\gamma_c} \in G_{\gamma_c}(\mathbb{A}) \subseteq P_c(\mathbb{A})$, $\mathcal{E}^{g_{\gamma_c} g'} \cap E^c_1$ est égal au transformé de $\mathcal{E}'_1$ par la restriction de g_{γ_c} à $E^c_1 \otimes_F \mathbb{A}$ et il est stable par $\mathcal{D}'$. De même, $\mathcal{E}^{g_{\gamma_c} g} \cap E^c_1$ est égal au transformé de $\mathcal{E}^g \cap E^c_1$ par cette restriction, et le plus grand sous–$\mathcal{D}$–Module stable par $\mathcal{D}'$ qu'il contienne est égal au transformé de $\mathcal{E}'_1$.

D'après le lemme 5 (i), on voit donc que

$$\mu^{+}_{\gamma_c,\mu,\mathcal{D}'}(g_{\gamma_c}g') = \mu^{+}_{\gamma_c,\mu,\mathcal{D}'}(g_{\gamma_c}g)\,, \quad \forall g_{\gamma_c} \in G_{\gamma_c}(\mathbb{A})\,.$$

On en déduit

$$\mathcal{I}^s_c(g') = \mathcal{I}^s_c(g)\; q^{s\frac{1}{r}(\deg(\det g') - \deg(\det g))}\,.$$

Mais par ailleurs on a aussi

$$\varphi_c(g') = \varphi_c(g) - \frac{1}{r}(\deg(\det g') - \deg(\det g))\,.$$

Ainsi, on voit que

$$q^{s\varphi_c(g)}\mathcal{I}^s_c(g) = q^{s\varphi_c(g')}\mathcal{I}^s_c(g')\,.$$

D'autre part, d'après la maximalité de la $\mathcal{O}_X$–Algèbre finie $\mathcal{D}'$, deux $\mathcal{D}$–Modules localement libres de fibre générique E^c_1 qui sont stables par $\mathcal{D}'$ peuvent toujours être transformés l'un en l'autre par un automorphisme de $E^c_1 \otimes_F \mathbb{A}$ qui commute avec γ_c et respecte la filtration par les $E^c_{0,j} \otimes_F \mathbb{A}$. Or, d'après la proposition 2 (ii), un tel automorphisme peut s'écrire comme la restriction à $E^c_1 \otimes_F \mathbb{A}$ d'un élément de $G_{\gamma_c}(\mathbb{A})$.

Ainsi on a pu prendre g' de la forme

$$g' = g_{\gamma_c} g^0$$

où $g_{\gamma_c} \in G_{\gamma_c}(\mathbb{A})$ et g^0 est un élément fixé de $G(\mathbb{A})$.

Pour conclure, il suffit donc de prouver que les fonctions $g \longmapsto \mathcal{I}^s_c(g)$ et $g \longmapsto \varphi_c(g)$ sont invariantes à gauche par $G_{\gamma_c}(\mathbb{A})$.

En ce qui concerne $\mathcal{I}^s_c(g)$, c'est évident sur la définition puisque dg_{γ_c} est une mesure de Haar.

Et pour ce qui est de $\varphi_c(g)$, écrivons

$$\begin{aligned}\varphi_c(g) = \varphi_c(\mathcal{E}^g) &= \frac{1}{r}\Big(\sum_{0 \leq j < n_c} \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}} \mathcal{E}^g\Big) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{0 \leq j < n_c} (\deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E^c_j \backslash \mathcal{E}^g \cap E^c_{j+1}))\,.\end{aligned}$$

Sur cette écriture, l'invariance à gauche par $G_{\gamma_c}(\mathbb{A})$ apparaît immédiatement, comme conséquence du lemme 1 (ii).

□

Rassemblons quelques renseignements sur les fonctions φ_c :

LEMME 9. — *Soit c une classe de conjugaison dans $G(F)$ de polynôme caractéristique χ. Avec les notations du lemme 8, on a :*

(i) *Pour toute partie compacte S de $G(\mathbb{A})$, la fonction $\varphi_c : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{Q}$ est minorée sur le sous-ensemble $\{g \in G(\mathbb{A}),\ g^{-1}\gamma_c g \in S\}$ par une constante qui ne dépend que de S.*

(ii) *On peut associer à toute place x de F une fonction*

$$\varphi_{c,x} : G(F_x) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

invariante à gauche par $G_{\gamma_c}(F_x)$ et telle que pour tout $g = (g_x)_{x\in|X|} \in G(\mathbb{A})$, la somme

$$\sum_{x\in|X|} \varphi_{c,x}(g_x)$$

soit finie et égale à $\varphi_c(g)$.

(iii) *Pour tout place x de F et toute partie compacte S_x de $G(F_x)$, la fonction $\varphi_{c,x} : G(F_x) \to \mathbb{Q}$ est minorée sur le sous-ensemble $\{g_x \in G(F_x),\ g_x^{-1}\gamma_c g_x \in S_x\}$ par une constante qui ne dépend que de S_x.*

Démonstration :

(i) Soit donc g un élément de $G(\mathbb{A})$ tel que $g^{-1}\gamma_c g \in S$. Avec les notations du lemme 8 (ii), on a

$$\varphi_c(g) = \frac{1}{r}\Big(\sum_{0\le j<n_c} \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}} \mathcal{E}^g \Big)\,.$$

D'après le lemme 4, les différences $\deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}'_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E^c_{0,j})$ sont bornées par une constante qui ne dépend que de S, de sorte qu'il suffit de minorer

$$\begin{aligned} &\sum_{0\le j<n_c} \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E^c_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}} \mathcal{E}^g \\ = &\sum_{0\le j<n_c} (\deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E^c_{0,j}) - \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E^c_j \backslash \mathcal{E}^g \cap E^c_{j+1})). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer S par KSK, on peut supposer que g est dans $P_c(\mathbb{A})$. Alors d'après le lemme 1 (ii), l'élément

$$g^{-1}\mu(\gamma_c)^j g = \mu(g^{-1}\gamma_c g)^j$$

induit pour tout j, $0 \leq j < n_c$, un homomorphisme bien défini

$$E_j^c \backslash E_{j+1}^c \otimes_F \mathbb{A} \longrightarrow E_{0,j}^c \otimes_F \mathbb{A}$$

et $E_j^c \backslash E_{j+1}^c$ et $E_{0,j}^c$ peuvent être identifiés via $\mu(\gamma_c)^j$. Cet homomorphisme doit rester dans une partie compacte qui ne dépend que de S, et $\deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E_j^c \backslash \mathcal{E}^g \cap E_{j+1}^c) - \deg_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^g \cap E_{0,j}^c)$ apparaît comme le degré de son déterminant dans $\mathbb{A}^\times$. D'où le résultat.

(ii) Pour x une place de F et g_x un élément de $G(F_x)$, notons $\mathcal{E}_x$ le réseau $g_x(\mathcal{D}_x^r)$ dans $E \otimes_F F_x$. Et pour tout j, $0 \leq j < n_c$, notons $(\mathcal{E}'_{0,j})_x$ le plus grand sous–$\mathcal{D}_x$–module de $\mathcal{E}_x \cap (E_{0,j}^c \otimes_F F_x)$ qui soit stable par l'action à droite de $\mathcal{D}'_x = \mathcal{D}' \otimes O_x$.

Posons

$$\varphi_{c,x}(g_x) = \frac{1}{r}\Big(\sum_{0 \leq j < n_c} \deg_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{E}'_{0,j})_x - \deg_{\mathcal{D}_x} \mathcal{E}_x \Big)$$

où, si chaque réseau $(\mathcal{E}'_{0,j})_x$ est représenté par une matrice $(g'_{0,j})_x$, on a posé

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{E}'_{0,j})_x &= -\deg(x)x(\det(g'_{0,j})_x)\,, \quad 0 \leq j < n_c\,, \\ \deg_{\mathcal{D}_x} \mathcal{E}_x &= -\deg(x)x(\det g_x)\,. \end{aligned}$$

Il est évident sur les définitions que si $(g_x)_{x \in |X|} = g \in G(\mathbb{A})$, la somme $\sum_{x \in |X|} \varphi_{c,x}(g_x)$ est finie et égale à $\varphi_c(g)$.

L'invariance à gauche par $G_{\gamma_c}(F_x)$ de chaque fonction $\varphi_{c,x}$ résulte du lemme 1 (ii) et de la formule

$$\varphi_{c,x}(g_x) = \frac{1}{r} \sum_{0 \leq j < n_c} (\deg_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{E}'_{0,j})_x - \deg_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{E}_x \cap E_j^c \otimes_F F_x \backslash \mathcal{E}_x \cap E_{j+1}^c \otimes_F F_x))\,.$$

(iii) est une conséquence formelle de (i) et (ii).

$\square$

Choisissons pour toute place x de F une mesure de Haar $dg_{\gamma_c,x}$ sur le groupe unimodulaire $G_{\gamma_c}(F_x)$, de façon que la mesure de Haar dg_{γ_c} sur $G_{\gamma_c}(\mathbb{A})$ soit induite par le produit des $dg_{\gamma_c,x}$, $x \in |X|$. Puis, pour tout ensemble fini $T \subseteq |X|$ de places de F, notons $dg_{\gamma_c,T}$ [resp. $dg_{\gamma_c}^T$] la mesure de Haar sur $G_{\gamma_c}(\mathbb{A}_T)$ [resp. $G_{\gamma_c}(\mathbb{A}^T)$], produit des $dg_{\gamma_c,x}, x \in T$ [resp. $x \in |X| \backslash T$]. Introduisons aussi la fonction

$$\varphi_{c,T} : G(\mathbb{A}_T) \longrightarrow \mathbb{Q} \quad g_T = (g_x)_{x \in T} \longmapsto \sum_{x \in T} \varphi_{c,x}(g_x)$$

$$[\text{resp. } \varphi_c^T : G(\mathbb{A}^T) \longrightarrow \mathbb{Q} \quad g^T = (g_x)_{x \in |X| \backslash T} \longmapsto \sum_{x \in |X| \backslash T} \varphi_{c,x}(g_x)]\,.$$

Ceci étant posé, on a :

LEMME 10. — *Soient T un ensemble fini de places de F et h_T une fonction localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A}_T)$.*

Alors pour toute classe de conjugaison c dans $G(F)$ de polynôme caractéristique χ et pour tout réel $s \geq 0$, l'intégrale

$$I^s_{c,T}(h_T) = \int_{G_{\gamma_c}(\mathbb{A}_T)\backslash G(\mathbb{A}_T)} \frac{dg_T}{dg_{\gamma_c,T}} \cdot q^{-s\varphi_{c,T}(g_T)} h_T(g_T^{-1}\gamma_c g_T)$$

est convergente.

De plus, c'est une fonction continue de la variable $s \geq 0$.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 et du lemme 9 (iii).

□

Maintenant, prouvons :

THÉORÈME 11. — *Soit c une classe de conjugaison dans $G(F)$ de polynôme caractéristique χ.*

(i) *Soient $T_1, \ldots, T_n$ des parties finies disjointes de $|X|$ et $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$.*

Soit $h = h_{T_1} \otimes \cdots \otimes h_{T_n} \otimes h^T$ une fonction produit tensoriel de fonctions localement constantes à support compact sur $G(\mathbb{A}_{T_1}), \ldots, G(\mathbb{A}_{T_n}), G(\mathbb{A}^T)$.

Alors, pour tout réel $s > 0$, l'intégrale

$$I^{T,s}_c(h^T) = \int_{G_{\gamma_c}(\mathbb{A}^T)\backslash G(\mathbb{A}^T)} \frac{dg^T}{dg^T_{\gamma_c}} \cdot q^{-s\varphi^T_c(g^T)} h^T((g^T)^{-1}\gamma_c g^T)$$

est convergente, et on a

$$I^s_c(h) = I^s_{c,T_1}(h_{T_1}) \cdots I^s_{c,T_n}(h_{T_n}) I^{T,s}_c(h^T) I^s_c\,.$$

(ii) *Si la classe c n'est pas elliptique, alors pour toute partie finie T de $|X|$ et pour toute fonction positive h^T localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A}^T)$ qui ne s'annule pas uniformément sur la classe de conjugaison de γ_c, on a*

$$\lim_{s\to 0} I^{T,s}_c(h^T) I^s_c = +\infty\,.$$

(iii) *Soit h une fonction localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et inadaptée à χ en au moins une place au sens de la proposition* 7 (iv).

Alors l'expression

$$I^s_c(h)$$

possède une limite finie quand s tend vers 0.

(iv) *Si la classe c n'est pas elliptique, alors pour toute place x et toute fonction h_x localement constante à support compact sur $G(F_x)$ inadaptée à χ, on a*

$$\lim_{s\to 0} I^s_{c,x}(h_x) = 0\,.$$

Démonstration :

(i) On sait d'après la proposition 7 (i) que pour tout $s > 0$ converge l'intégrale

$$I^s_c(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\gamma\in c} q^{-s(\mu^+_{\gamma,\mu,\mathcal{D}'}(g)-\mu(g))} h(g^{-1}\gamma_c g)\,.$$

Comme il y a encore convergence lorsqu'on remplace h par sa valeur absolue, on voit que dans l'expression de $I^s_c(h)$ il y a convergence absolue pour la double sommation sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et sur c.

Par changement de variable, on obtient alors

$$I^s_c(h) = \int_{G_{\gamma_c}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \frac{dg}{dg_{\gamma_c}} \cdot \mathcal{I}^s_c(g) h(g^{-1}\gamma_c g)\,.$$

La conclusion résulte maintenant du lemme 8 (ii) et du lemme 9 (ii).

(ii) D'après la proposition 7 (ii), il existe une fonction $h' \geq 0$ localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})$ qui vérifie

$$\lim_{s\to 0} I^s_c(h') = +\infty\,.$$

Or il existe certainement un sous–ensemble fini $T' \supseteq T$ de $|X|$ ainsi que des fonctions $h^{T'} \geq 0$ sur $G(\mathbb{A}^{T'})$, $h_{T'\backslash T}$ sur $G(\mathbb{A}_{T'\backslash T})$ et $h'_{T'} \geq 0$ sur $G(\mathbb{A}_{T'})$ telles que

$$h^T = h_{T'\backslash T} \otimes h^{T'} \quad \text{et} \quad h' = h'_{T'} \otimes h^{T'}\,.$$

D'après (i), on a pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned} I^s_c(h') &= I^s_{c,T'}(h'_{T'}) I^{T',s}_c(h^{T'}) I^s_c \\ \text{et} \quad I^{T,s}_c(h^T)\mathcal{I}^s_c &= I^s_{c,T'\backslash T}(h_{T'\backslash T}) I^{T',s}_c(h^{T'}) I^s_c\,. \end{aligned}$$

D'après le lemme 10, l'expression $I^s_{c,T'}(h'_{T'})$ possède une limite quand s tend vers 0. On en tire

$$\lim_{s\to 0} I^{T',s}_c(h^{T'}) I^s_c = +\infty\,.$$

D'autre part, il résulte de l'hypothèse sur h^T que la limite de l'expression $I^s_{c,T'\backslash T}(h_{T'\backslash T})$ quand s tend vers 0 doit être strictement positive.

D'où la conclusion.

(iii) Ainsi il existe une place 0 de F telle que h soit de la forme $h = h_0 \otimes h^0$, où h_0, h^0 sont des fonctions sur $G(F_0)$, $G(\mathbb{A}^0)$ et h_0 est inadaptée à χ. De plus, on peut certainement écrire h^0 sous la forme $h^0 = h_x \otimes h^{0,x}$ où x est une place distincte de 0 et h_x, $h^{0,x}$ sont deux fonctions sur $G(F_x)$, $G(\mathbb{A}^{0,x})$.

D'après (i), on a pour tout $s > 0$,

$$I_c^s(h) = I_{c,0}^s(h_0) I_{c,x}^s(h_x) I_c^{\{0,x\},s}(h^{0,x}) I_c^s \,.$$

Et d'après le lemme 10, on sait que l'expression $I_{c,x}^s(h_x)$ possède une limite finie quand s tend vers 0.

Donc il suffit de prouver que le produit

$$I_{c,0}^s(h_0) I_c^{\{0,x\},s}(h^{0,x}) I_c^s$$

possède une limite finie quand s tend vers 0.

Nous allons le montrer par récurrence descendante sur la dimension d_c de la classe de conjugaison de γ_c dans $G(F_x)$. Ainsi, supposons le résultat déjà vérifié pour les classes de conjugaison de dimensions strictement plus grandes.

On sait que la classe de conjugaison de γ_c dans $G(F_x)$ est un ouvert de Zariski dans la réunion des classes de conjugaison d'éléments $\gamma_{c'}$ qui sont de dimension $d_{c'} \leq d_c$. Donc il existe une fonction $h'_x \geq 0$ sur $G(F_x)$, ne s'annulant pas uniformément sur la classe de conjugaison de γ_c mais s'annulant sur les classes de conjugaison des $\gamma_{c'}$ avec $c' \neq c$ et $d_{c'} \leq d_c$.

D'après la proposition 7 (iv), on sait que l'expression

$$\begin{aligned} I_\chi^s(h_0 \otimes h'_x \otimes h^{0,x}) &= \sum_{c'} I_{c'}^s(h_0 \otimes h'_x \otimes h^{0,x}) \\ &= \sum_{c'} I_{c',0}^s(h_0) I_{c',x}^s(h'_x) I_{c'}^{\{0,x\},s}(h^{0,x}) I_{c'}^s \end{aligned}$$

possède une limite quand s tend vers 0.

Par choix de h'_x, on a $I_{c',x}^s(h'_x) = 0$ pour tout $s > 0$ et toute classe $c' \neq c$ vérifiant $d_{c'} \leq d_c$. On sait aussi d'après le lemme 10 que toutes les expressions $I_{c',x}^s(h'_x)$ possèdent une limite finie quand s tend vers 0, et d'après le choix de h'_x cette limite est strictement positive pour $c' = c$.

Enfin, l'hypothèse de récurrence est que pour toute classe c' telle que $d_{c'} > d_c$, l'expression

$$I_{c',0}^s(h_0) I_{c'}^{\{0,x\},s}(h^{0,x}) I_{c'}^s$$

possède une limite finie quand s tend vers 0.

Le résultat pour c s'en déduit aussitôt.

(iv) D'après (ii), il existe une fonction $h^x \geq 0$ sur $G(\mathbb{A}^x)$ telle que

$$\lim_{s \to 0} I_c^{x,s}(h^x) I_c^s = +\infty \, .$$

Or, d'après (iii), on sait que l'expression

$$I_c^s(h_x \otimes h^x) = I_{c,x}^s(h_x) I_c^{x,s}(h^x) I_c^s$$

possède une limite finie quand s tend vers 0. D'où la conclusion.

$\square$

Remarque :

Bien que nous n'en ayions nul besoin ici, on pourrait préciser le comportement des diverses fonctions de la variable s que nous avons introduites. Tout d'abord il est évident sur les définitions que la variable s peut être prise dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Puis on pourrait montrer :

• Sous les hypothèses du lemme 10, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $I_{c,T}^s(h_T)$ soit définie et holomorphe dans le domaine $\operatorname{Re} s > -\varepsilon$.

• Rappelons que pour c une classe de conjugaison de polynôme caractéristique χ, μ^{n_c} désigne son polynôme minimal, et notons $k_c \leq n_c$ le rang du centre du plus grand quotient réductif du groupe de commutateurs G_{γ_c}.

Alors la fonction I_c^s est définie et holomorphe dans le domaine $\operatorname{Re} s > 0$, et elle admet au voisinage de 0 un prolongement méromorphe avec un pôle d'ordre $k_c - 1$.

• Pour T et h^T comme dans le théorème 11 (ii), la fonction $I_c^{T,s}(h^T)$ s'écrit comme un produit eulérien de fonctions holomorphes. Elle est définie et holomorphe dans le domaine $\operatorname{Re} s > 0$ et elle admet au voisinage de 0 un prolongement méromorphe avec un pôle d'ordre $n_c - k_c$.

• Pour h comme dans le théorème 11 (iii), la fonction $I_c^s(h)$ possède au voisinage de 0 un prolongement analytique.

• Pour x une place de F et h_x une fonction comme dans le théorème 11 (iv), les points précédents impliquent que la fonction $I_{c,x}^s(h_x)$ admet au point 0 un zéro d'ordre au moins $(k_c - 1) + (n_c - k_c) = n_c - 1$.

$\square$

Démonstration de la partie (ii) du théorème 10 du paragraphe V.2d :

On considère donc une fonction h de la forme $h_\infty \otimes h^{\infty,0} \otimes h_0$ où $\infty, 0$ sont deux places distinctes de F, h_∞, $h^{\infty,0}$, h_0 sont des fonctions sur $G(F_\infty)$, $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$, $G(F_0)$ et h_∞, h_0 sont inadaptées à χ.

Avec les notations de la proposition 7, on veut prouver

$$I_\chi(h) = I_{c_\mu}(h)\,.$$

D'après la proposition 7 (iv) et (iii), on sait

$$I_\chi(h) = \lim_{s\to 0} I_\chi^s(h)\,, \quad I_{c_\mu}(h) = \lim_{s\to 0} I_{c_\mu}^s(h)\,.$$

Comme pour tout $s > 0$, on a

$$I_\chi^s(h) = \sum_c I_c^s(h)\,,$$

il suffit de montrer que, pour toute classe $c \neq c_\mu$,

$$\lim_{s\to 0} I_c^s(h) = 0\,.$$

Or d'après le théorème 11 (i), on a, pour tout $s > 0$,

$$I_c^s(h) = I_{c,\infty}^s(h_\infty) I_c^{\{\infty,0\},s}(h^{\infty,0}) I_{c,0}^s(h_0) I_c^s\,,$$

et d'après le théorème 11 (iii) et (iv), on sait que l'expression

$$I_c^{\{\infty,0\},s}(h^{\infty,0}) I_{c,0}^s(h_0) I_c^s$$

possède une limite finie quand s tend vers 0, et que

$$\lim_{s\to 0} I_{c,\infty}^s(h_\infty) = 0\,.$$

Ceci termine la démonstration.

$\square$

Remarque :

Esquissons une autre démonstration du théorème 10 du paragraphe V.2d qui s'inspire des méthodes d'Arthur (voir [Laumon] chapitre 10 pour le cas des corps de fonctions).

Considérons comme fixées une fonction $h^{\infty,0}$ sur $G(\mathbb{A}^{\infty,0})$ et une fonction h_0 sur $G(F_0)$ inadaptée à χ. D'après la proposition 3 du paragraphe V.2b, la fonctionnelle

$$h_\infty \longmapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{\gamma\in G(F)\\ \chi_\gamma=\chi}} (h_\infty \otimes h^{\infty,0} \otimes h_0)(g^{-1}\gamma g)$$

est bien définie et elle est évidemment invariante par conjugaison.

D'après un théorème de Harish–Chandra et Shalika (voir [Laumon] lemme 10.6.5), elle peut donc s'écrire

$$h_\infty \longmapsto \sum_c \alpha_c \int_{G_{\gamma_c}(F_\infty)\backslash G(F_\infty)} \frac{dg_\infty}{dg_{\gamma_c,\infty}} \cdot h_\infty(g_\infty^{-1}\gamma_c g_\infty)$$

où les γ_c sont des représentants des classes de conjugaison c de $G(F)$ dont le polynôme caractéristique est χ et les α_c sont des coefficients réels.

Supposons maintenant que h_∞ est inadaptée à χ.

Dans le cas (i) où χ a plusieurs facteurs premiers distincts, toutes les intégrales de h_∞ sur les orbites des γ_c sont nulles, ce qui donne le résultat annoncé.

Dans le cas (ii) où χ est une puissance d'un polynôme irréductible μ, toutes les intégrales orbitales de h_∞ considérées s'annulent, sauf celle qui correspond à la classe de conjugaison elliptique c_μ.

Il reste à déterminer le coefficient α_{c_μ} ce qui est possible (mais nullement évident) par les méthodes d'Arthur.

$\square$

Chapitre VI

Formule des traces d'Arthur–Selberg et conjecture de Ramanujan–Petersson

1. — Rappels sur la décomposition spectrale de Langlands

a) Notations

On fixe toujours X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. On note F le corps des fonctions de X, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, $O_{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{A}$ son sous-anneau des entiers et $a \in \mathbb{A}^\times$ un élément de degré non nul dont les composantes valent 1 en dehors d'un ensemble fini T_a de places de F.

On fixe également D une algèbre centrale simple sur F de dimension d^2, $\mathcal{D}_{\mathbb{A}} \subseteq D_{\mathbb{A}} = D \otimes_F \mathbb{A}$ un ordre maximal et $r \geq 1$ un entier. On note G le schéma en groupes sur F des automorphismes de $E = D^r$ et $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$ qui est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(\mathbb{A})$.

Soit M_0 le sous-groupe de Lévi de G associé à la décomposition en somme directe $E = D \oplus \cdots \oplus D$. On désigne par $\mathcal{P}_0$ [resp. $\mathcal{M}_0$] l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques de G [resp. de leurs sous–groupes de Lévi] qui contiennent M_0. Et soit $P_0 \in \mathcal{P}_0$ le sous-groupe parabolique minimal associé à la filtration $0 \subsetneq D \subsetneq D^2 \subsetneq \cdots \subsetneq D^r = E$.

Tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}_0$ admet un unique sous-groupe de Lévi M_P qui soit dans $\mathcal{M}_0$. En particulier $M_{P_0} = M_0$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_0$ [resp. $P \in \mathcal{P}_0$] on note Z_M son centre [resp. $Z_P = Z_{M_P}$ le centre de M_P]. On note en particulier $Z_{P_0} = Z_{M_0} = Z_0$.

On désigne par $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$ l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques de G. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, on note N_P son radical unipotent.

Introduisons encore $W \subset G(F)$ le groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, r\}$ et $W_M = W \cap M(F)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_0$.

Pour M, M' deux éléments de $\mathcal{M}_0$, on notera $\mathrm{Hom}(M, M')$ l'ensemble des doubles classes $\sigma \in W_{M'} \backslash W / W_M$ telles que $\sigma M \sigma^{-1} \subseteq M'$. Si $M = M_1 \times \cdots \times M_\ell$ et $M' = M'_1 \times \cdots \times M'_{\ell'}$ sont les décompositions de M et M' en produits de facteurs simples de rangs $r_1, \ldots, r_\ell$ et $r'_1, \ldots, r'_{\ell'}$, cet ensemble $\mathrm{Hom}(M, M')$ s'identifie à celui des applications

$\sigma : \{1, 2, \ldots, \ell\} \to \{1, 2, \ldots, \ell'\}$ telles que $r'_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ \sigma(i) = j}} r_i$, $1 \leq j \leq \ell'$. Pour $M, M', M'' \in \mathcal{M}_0$ on peut donc composer les éléments de $\mathrm{Hom}(M, M')$ et $\mathrm{Hom}(M', M'')$ si bien que $\mathcal{M}_0$ devient une catégorie. Il en est de même de $\mathcal{P}_0$ si on pose pour tous $P, P' \in \mathcal{P}_0$, $\mathrm{Hom}(P, P') = \mathrm{Hom}(M_P, M_{P'})$.

b) Degrés. Polygones. Groupes de caractères

Pour tout $M \in \mathcal{M}_0$, on dispose de l'homomorphisme de degré

$$\deg_M : M(\mathbb{A}) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}^{\times |M|} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}^{|M|}$$

où $|M|$ désigne le nombre de facteurs simples de M.

Puis, pour $P \in \mathcal{P}_0$, on dispose de l'homomorphisme composé

$$\deg_P : P(\mathbb{A}) \longrightarrow M_P(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg_{M_P}} \mathbb{Z}^{|P|}$$

où $|P| = |M_P|$. On notera encore $\deg_P$ l'unique prolongement de $\deg_P$ en une application $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{Z}^{|P|}$ qui soit invariante à droite par K.

Cette application $\deg_P$ permet aussi d'associer à tout élément $g \in P(F)\backslash G(\mathbb{A})/KZ_G(\mathbb{A})$ un polygone (normalisé) p_P^g. Si $M_P = M_1 \times \cdots \times M_{|P|}$, $r_1, r_2, \ldots, r_{|P|}$ sont les rangs de $M_1, \ldots, M_{|P|}$ et $\deg_P(g) = (\deg_1(g), \ldots, \deg_{|P|}(g))$ dans $\mathbb{Z}^{|P|}$, c'est l'unique application $[0, r] \to \mathbb{R}$ s'annulant aux points 0 et r et qui sur chaque intervalle $[r_1 + \cdots + r_{i-1}, r_1 + \cdots + r_i]$ est affine de pente $\dfrac{\deg_i(g)}{r_i} - \dfrac{\deg(g)}{r}$.

Toujours pour un tel $P \in \mathcal{P}_0$, on notera Λ_P le groupe de Lie complexe commutatif constitué des caractères $M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times$ qui se factorisent à travers l'homomorphisme surjectif

$$\deg_P : M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to (\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(r_1, \ldots, r_{|P|})d\mathbb{Z}\,.$$

Λ_P s'écrit canoniquement $\Lambda_P = \mathrm{Im}\Lambda_P \times \mathrm{Re}\Lambda_P$ où $\mathrm{Im}\Lambda_P$ désigne le sous-groupe de Lie réel compact des caractères unitaires et $\mathrm{Re}\Lambda_P$ le sous-groupe de Lie réel linéaire des caractères à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$. On notera $d\lambda_P$ la mesure de Haar sur le groupe compact $\mathrm{Im}\Lambda_P$ qui lui attribue le volume 1.

Plus haut, nous avons prolongé $\deg_P$ en une application sur tout $G(\mathbb{A})$ invariante à droite par K. Nous ferons de même avec les éléments de Λ_P.

On notera $\rho_P \in \mathrm{Re}\Lambda_P$ la racine carrée du caractère modulaire de $M_P(\mathbb{A})$ par lequel $M_P(\mathbb{A})$ agit sur les mesures de Haar dn_P de $N_P(\mathbb{A})$: $m_P \cdot dn_P \cdot m_P^{-1} = \rho_P^2(m_P) \cdot dn_P$, $\forall m_P \in M_P(\mathbb{A})$.

Si P, Q sont deux objets de $\mathcal{P}_0$ avec $P \subseteq Q$, l'inclusion $M_P(\mathbb{A}) \subseteq M_Q(\mathbb{A})$ induit une immersion naturelle $\Lambda_Q \hookrightarrow \Lambda_P$.

Il y a aussi une inclusion $Z_Q(\mathbb{A}) \subseteq Z_P(\mathbb{A}) \subseteq M_P(\mathbb{A})$ et on note $\mathrm{Re}\Lambda_P^Q$ le sous-groupe de Lie réel de $\mathrm{Re}\Lambda_P$ constitué des caractères qui sont triviaux sur $Z_Q(\mathbb{A})$. On vérifie facilement que $\mathrm{Re}\Lambda_P = \mathrm{Re}\Lambda_Q \times \mathrm{Re}\Lambda_P^Q$.

On note Λ_P^Q le sous-groupe de Lie complexe connexe de Λ_P engendré par $\mathrm{Re}\Lambda_P^Q$. Il se décompose naturellement en $\Lambda_P^Q = \mathrm{Im}\Lambda_P^Q \times \mathrm{Re}\Lambda_P^Q$ avec $\mathrm{Im}\Lambda_P^Q \subseteq \mathrm{Im}\Lambda_P$, $\mathrm{Im}\Lambda_P = \mathrm{Im}\Lambda_Q \mathrm{Im}\Lambda_P^Q$ et $\mathrm{Im}\Lambda_Q \cap \mathrm{Im}\Lambda_P^Q$ est fini.

Pour tout $P \in \mathcal{P}_0$ avec $r_1, \ldots, r_{|P|}$ les rangs des facteurs simples de M_P, introduisons encore la notion de composantes d'un caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$ se factorisant à travers l'homomorphisme surjectif $\deg_P : M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to (\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(r_1, \ldots, r_{|P|})d\mathbb{Z}$. Pour tout indice $i \in \{1, 2, \ldots, |P|\}$ on appelle i-ème composante de $\lambda_P \in \Lambda_P$ et on note λ_P^i l'image par l'homomorphisme $(\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(r_1, \ldots, r_{|P|})d\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ de l'élément $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où l'unique 1 est placé en i-ème position.

Etant donné $\lambda_P \in \Lambda_P$, on notera $|\lambda_P| \gg 1$ [resp. $|\lambda_P| > 1$, resp. $|\lambda_P| \geq 1$] si pour tout indice i, $1 \leq i < |P|$, on a

$$|\lambda_P^i| > |\lambda_P^{i+1}|$$

$$\text{[resp. } \prod_{1 \leq j \leq i} |\lambda_P^j|^{\frac{r_j}{r_1 + \cdots + r_i}} > \prod_{i < j \leq |P|} |\lambda_P^j|^{\frac{r_j}{r_{i+1} + \cdots + r_{|P|}}},$$

$$\text{resp. } \prod_{1 \leq j \leq i} |\lambda_P^j|^{\frac{r_j}{r_1 + \cdots + r_i}} \geq \prod_{i < j \leq |P|} |\lambda_P^j|^{\frac{r_j}{r_{i+1} + \cdots + r_{|P|}}}].$$

On a évidemment les implications

$$|\lambda_P| \gg 1 \Longrightarrow |\lambda_P| > 1 \Longrightarrow |\lambda_P| \geq 1 \ .$$

Et ces trois relations sont compatibles avec la multiplication dans Λ_P.

Remarquons aussi que la relation $|\lambda_P| \geq 1$ [resp. $|\lambda_P| > 1$, resp. $|\lambda_P| \gg 1$] est équivalente à ce que pour tout élément $g \in P(F)\backslash G(\mathbb{A})/KZ_G(\mathbb{A})$ dont le polygone est concave [resp. concave et non nul, resp. ≥ 0 et non nul], on ait $|\lambda_P(g)| \geq 1$ [resp. $|\lambda_P(g)| > 1$, resp. $|\lambda_P(g)| > 1$].

Enfin, si P, Q sont deux objets de $\mathcal{P}_0$ avec $P \subseteq Q$, les relations $|\cdot| \geq 1$, $|\cdot| > 1$ sont compatibles avec l'immersion $\Lambda_Q \hookrightarrow \Lambda_P$. Pour $\lambda_P^Q \in \Lambda_P^Q$

on notera $|\lambda_P^Q| \geq 1$ [resp. $|\lambda_P^Q| > 1$] si λ_P^Q vérifie cette relation en tant qu'élément de Λ_P. Et on notera $|\lambda_P^Q| \gg 1$ s'il existe $\lambda_Q \in \Lambda_Q$ tel que le caractère $\lambda_Q\, \lambda_P^Q \in \Lambda_P$ vérifie $|\lambda_Q \lambda_P^Q| \gg 1$.

c) Paires discrètes

Munissons le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ de l'unique mesure de Haar dg dont la restriction dk au sous-groupe ouvert compact maximal $K = \mathrm{GL}_r(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$ est de volume 1. Plus généralement, pour tout $M \in \mathcal{M}_0$ soit dm la mesure de Haar sur $M(\mathbb{A})$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal $K_M = K \cap M(\mathbb{A})$. Et pour tout $P \in \mathcal{P}$ soit dn_P la mesure de Haar sur $N_P(\mathbb{A})$ pour laquelle le quotient compact $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$ est de volume 1.

Pour tout $P \in \mathcal{P}_0$, soit $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ l'espace des fonctions de carré intégrable $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$, muni de l'action à droite de $G(\mathbb{A})$. Afin d'énoncer la décomposition spectrale due à Langlands de ces espaces, nous avons besoin de la notion de paire discrète.

Considérons donc M un objet de $\mathcal{M}_0$, $\chi : Z_M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times$ un caractère central de $M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et K' un sous-groupe ouvert de K. Notons $L^2_{K'}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)$ l'espace des fonctions $\varphi : M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ telles que :

- φ est invariante à droite par $K' \cap M(\mathbb{A}) \subseteq K \cap M(\mathbb{A})$,
- $\varphi(zm) = \chi(z)\varphi(m)$, $\forall z \in Z_M(\mathbb{A})$, $\forall m \in M(\mathbb{A})$,
- en notant $|\chi| : M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}_+^\times$ l'unique caractère qui prolonge le module de $\chi : Z_M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times$, la norme $\|\frac{\varphi}{|\chi|}\|$ définie par

$$\|\frac{\varphi}{|\chi|}\|^2 = \frac{rd|\deg(a)|}{(r_1 d|\deg(a)|)\cdots(r_{|M|}d|\deg(a)|)} \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})/(a^{\mathbb{Z}})^{|P|}} dm \cdot \frac{|\varphi(m)|^2}{|\chi|^2(m)}$$

(où $r_1, \ldots, r_{|M|}$ désignent les rangs des facteurs simples de M) est finie.

Puis notons $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)$ la réunion filtrante des $L^2_{K'}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)$ quand K' décrit la famille des sous-groupes ouverts de K, munie de l'action à droite de $M(\mathbb{A})$. D'après Langlands (voir [Mœglin, Waldspurger, 1994] théorème VI.2.1) cet espace s'écrit naturellement comme la somme directe d'une partie "discrète" $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)_{\mathrm{disc}}$ et d'une partie "continue".

THÉORÈME 1. — *Pour tout $M \in \mathcal{M}_0$ et tout caractère central $\chi : Z_M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times$, la représentation $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)_{\mathrm{disc}}$ de $M(\mathbb{A})$ est admissible.*

Esquisse de démonstration :

Il s'agit de prouver que pour tout sous-groupe ouvert K' de K le sous-espace de $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)_{\mathrm{disc}}$ constitué des formes invariantes à droite par $K' \cap M(\mathbb{A})$ est de dimension finie.

Or, d'après Langlands, ces formes discrètes s'obtiennent comme résidus des séries d'Eisenstein construites à partir des formes cuspidales sur les $M_Q(F)(N_Q(\mathbb{A}) \cap M(\mathbb{A}))\backslash M(\mathrm{A})$ avec $Q \in \mathcal{P}_0$, $M_Q \subseteq M$.

De plus, les formes cuspidales invariantes à droite par les $M_Q(\mathbb{A}) \cap K'$ constituent des espaces de dimensions finies et comme chacun des $\mathrm{Im}\Lambda_Q$ est compact, chaque série d'Eisenstein ne donne naissance par résidus qu'à un nombre fini de formes discrètes. $\square$

Chaque représentation $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)_{\mathrm{disc}}$, étant admissible, s'écrit canoniquement comme une somme directe de sous–représentations isotypiques dont les facteurs irréductibles sont non isomorphes de l'une à l'autre et qu'on appellera les composantes discrètes de $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi)$.

DÉFINITION 2. — *On appelle paire discrète (P, π) la donnée d'un $P \in \mathcal{P}_0$ et d'une représentation admissible isotypique π de $M_P(\mathbb{A})$ qui soit une composante discrète de $L^2_\infty(M(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi_\pi)$ si $\chi_\pi : Z_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times$ désigne le caractère central de π.*

Considérons (P, π) une paire discrète et $P \xrightarrow{\sigma} P'$ un isomorphisme dans $\mathcal{P}_0$ c'est-à-dire une double classe $\sigma \in W_{M_{P'}}\backslash W/W_{M_P}$ représentée par une permutation $w \in W$ vérifiant $wM_Pw^{-1} = M_{P'}$. Alors $\pi' = \{\varphi(w^{-1}\cdot w), \varphi \in \pi\}$ ne dépend pas du représentant choisi w de σ et s'inscrit dans une paire discrète (P', π'). On notera dans ce cas $\pi' = \sigma(\pi)$.

DÉFINITION 3. — *On dit que deux paires discrètes (P, π) et (P', π') sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $\sigma : P \to P'$ dans $\mathcal{P}_0$ et un caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$ tels que*

$$\pi' = \sigma(\pi \otimes \lambda_P) = \sigma(\pi) \otimes \sigma(\lambda_P) \ .$$

Introduisons enfin les groupes de fixateurs d'une paire discrète (P, π).

On note $\mathrm{Fixe}(\pi)$ [resp. $\mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$ pour $\sigma : P \to P'$ un morphisme de $\mathcal{P}_0$] le groupe fini des couples (τ, μ_P) dans $\mathrm{Aut}_{\mathcal{P}_0}(P) \times \Lambda_P$ qui vérifient

$$\tau(\pi \otimes \mu_P) = \pi \quad [\text{resp. et } \sigma\tau = \sigma] \ ,$$

avec la loi de composition

$$(\tau^2, \mu_P^2)(\tau^1, \mu_P^1) = (\tau^2\tau^1, (\tau^1)^{-1}(\mu_P^2)\mu_P^1) \ .$$

Bien sûr chaque $\mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$ est contenu dans $\mathrm{Fixe}(\pi)$ et il contient le groupe fini $\mathrm{Fixe}_P(\pi)$ des caractères $\mu_P \in \Lambda_P$ vérifiant $\pi \otimes \mu_P = \pi$.

d) Séries d'Eisenstein. Opérateurs d'entrelacement

Si (P, π) est une paire discrète et K' un sous-groupe ouvert de K, on notera $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ l'espace des fonctions φ : $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ invariantes à droite par K' et telles que pour tout $k \in K$ la fonction

$$\varphi_k : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C} \quad m \mapsto \rho_P(m)^{-1}\varphi(mk)$$

soit dans le sous-espace $\pi \subseteq L^2_\infty(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \chi_\pi)$. On note $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ la réunion filtrante des espaces $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ quand K' décrit la famille des sous-groupes ouverts de K.

$L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ est muni de la norme hermitienne $\varphi \mapsto \|\frac{\varphi}{|\chi_\pi|}\|$ définie par

$$\|\frac{\varphi}{|\chi_\pi|}\|^2 = \int_K dk \cdot \|\frac{\varphi_k}{|\chi_\pi|}\|^2 \, .$$

Remarquons que pour tout $\lambda_P \in \Lambda_P$, $\pi \otimes \lambda_P = \{\varphi\lambda_P, \varphi \in \pi\}$, donc aussi

$$\begin{gathered} L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi \otimes \lambda_P) = \\ \{\varphi\lambda_P, \varphi \in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)\}\, . \end{gathered}$$

Venons-en aux séries d'Eisentein.

Considérons P, P' deux objets de $\mathcal{P}_0$ avec $P \subseteq P'$. Pour $\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une fonction, on introduit la série $E_P^{P'}(\varphi)(g) = \sum_{\delta \in P(F)\backslash P'(F)} \varphi(\delta g)$, $g \in M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$. Et pour tout $\lambda_P \in \Lambda_P$, on note $E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P) = E_P^{P'}(\varphi\lambda_P)$. On prouve facilement que si la fonction $\lambda_P \mapsto E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ est définie en un point $\lambda_P^0 \in \Lambda_P$, alors elle l'est sur l'ouvert des $\lambda_P \in \Lambda_P$ vérifiant $|\lambda_P| \gg |\lambda_P^0|$ et elle est holomorphe sur cet ouvert. On note encore $E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ son plus grand prolongement méromorphe.

On a le résultat fondamental dû à Langlands :

THÉORÈME 4. — *Pour toute paire discrète (P, π), tout $P' \in \mathcal{P}_0$ avec $P \subseteq P'$ et toute fonction $\varphi \in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$, la série* *d'Eisenstein*

$$E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P) : g \mapsto \sum_{\delta \in P(F)\backslash P'(F)} (\varphi\lambda_P)(\delta g)$$

est convergente dans l'ouvert $|\lambda_P| \gg \frac{\rho_P}{|\chi_\pi|}$.

De plus, elle admet un prolongement méromorphe à Λ_P *tout entier.* □

Puis introduisons les opérateurs d'entrelacement.

Considérons cette fois deux objets $P, P' \in \mathcal{P}_0$ tels que $M_P = M_{P'}$. Pour $\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une fonction, on introduit l'intégrale

$$M_P^{P'}(\varphi)(g) = \int_{N_P(\mathbb{A})\cap N_{P'}(\mathbb{A})\backslash N_{P'}(\mathbb{A})} \frac{dn_{P'}}{dn_{P,P'}} \cdot \varphi(n_{P'}g), g \in G(\mathbb{A}) \ ,$$

où $dn_{P,P'}$ désigne la mesure de Haar sur $N_P(\mathbb{A}) \cap N_{P'}(\mathbb{A})$ pour laquelle le quotient compact $N_P(F) \cap N_{P'}(F)\backslash N_P(\mathbb{A}) \cap N_{P'}(\mathbb{A})$ est de volume 1. Et pour tout $\lambda_P \in \Lambda_P$ auquel est évidemment associé l'unique $\lambda_{P'} \in \Lambda_{P'}$ dont la restriction à $M_{P'}(\mathbb{A}) = M_P(\mathbb{A})$ se confonde avec celle de λ_P, on note $M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P) = M_P^{P'}(\varphi\lambda_P)\lambda_{P'}^{-1}$.

Ici encore on prouve que si la fonction $\lambda_P \mapsto M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ est définie en un point $\lambda_P^0 \in \Lambda_P$, elle l'est sur l'ouvert des $\lambda_P \in \Lambda_P$ vérifiant $|\lambda_P| \gg |\lambda_P^0|$ et elle est holomorphe dans cet ouvert. On note toujours $M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ son plus grand prolongement méromorphe.

On a le résultat fondamental dû à Langlands :

THÉORÈME 5. — *Soient* (P, π) *une paire discrète,* P' *un objet de* $\mathcal{P}_0$ *tel que* $M_{P'} = M_P$ *et* φ *une fonction dans* $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$. *Alors :*

(i) *L'intégrale*

$$M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P) : g \mapsto \int_{N_P(\mathbb{A})\cap N_{P'}(\mathbb{A})\backslash N_{P'}(\mathbb{A})} \frac{dn_{P'}}{dn_{P,P'}} \cdot (\varphi\lambda_P)(n_{P'}g)\lambda_{P'}^{-1}(g)$$

est convergente dans l'ouvert $|\lambda_P| \gg \frac{\rho_P}{|\chi_\pi|}$.

De plus, la fonction $M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ *admet un prolongement méromorphe à* Λ_P *tout entier. Elle prend ses valeurs dans* $L^2_\infty(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi')$ *où* (P', π') *est la paire discrète qui correspond à* (P, π) *via l'identité* $M_{P'}(\mathbb{A}) = M_P(\mathbb{A})$.

(ii) *Pour tout* $P'' \in \mathcal{P}_0$ *tel qu'à la fois* $P \subseteq P''$ *et* $P' \subseteq P''$*, on a l'égalité suivante entre fonctions méromorphes de la variable* $\lambda_P \in \Lambda_P$ *:*

$$E_{P'}^{P''}(M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P), \lambda_{P'}) = E_P^{P''}(\varphi, \lambda_P)$$

(iii) *Pour tout* $P'' \in \mathcal{P}_0$ *tel que* $M_{P''} = M_{P'} = M_P$, *on a l'égalité suivante entre fonctions méromorphes de la variable* $\lambda_P \in \Lambda_P$:

$$M_{P'}^{P''}(M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P), \lambda_{P'}) = M_P^{P''}(\varphi, \lambda_P)$$

En particulier on a quand $P'' = P$:

$$M_{P'}^{P}(M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P), \lambda_{P'}) = \varphi$$

□

Etant donnée (P, π) une paire discrète, on dira que π est unitaire si $|\chi_\pi| = 1$. Toujours d'après Langlands, on a :

THÉORÈME 6. — *Soient* (P, π) *une paire discrète telle que* π *soit unitaire et* φ *une fonction dans* $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$. *Alors :*

(i) *Pour tout* $P' \supseteq P$ *dans* $\mathcal{P}_0$, *la fonction méromorphe sur* Λ_P

$$\lambda_P \mapsto E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$$

est régulière sur le tore imaginaire $\mathrm{Im}\Lambda_P$.

(ii) *Pour tout* $P' \in \mathcal{P}_0$ *tel que* $M_{P'} = M_P$, *la fonction méromorphe sur* Λ_P

$$\lambda_P \mapsto M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$$

est régulière sur le tore imaginaire $\mathrm{Im}\Lambda_P$.

De plus, on a pour tout $\lambda_P \in \mathrm{Im}\Lambda_P$:

$$\|M_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)\| = \|\varphi\|$$

□

Introduisons maintenant de nouveaux opérateurs qui généralisent les $E_P^{P'}$ et les $M_P^{P'}$.

Considérons (P, π) une paire discrète, φ une fonction dans $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ et $\sigma : P \to P'$ un morphisme de $\mathcal{P}_0$. Ainsi σ est-il une double classe dans $W_{M_{P'}}\backslash W/W_{M_P}$ telle que $\sigma M_P \sigma^{-1} \subseteq M_{P'}$. Choisissons $w \in W$ un représentant de σ.

Envisageons d'abord le cas où σ est un isomorphisme c'est-à-dire où $\sigma M_P \sigma^{-1} = M_{P'}$ soit $w M_P w^{-1} = M_{P'}$. Alors on définit une fonction méromorphe $\lambda_P \mapsto M_{P,\sigma}^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ sur Λ_P par la formule

$$M_{P,\sigma}^{P'}(\varphi, \lambda_P)(g) = M_P^{w^{-1}P'w}(\varphi, \lambda_P)(w^{-1}g) \ , \ \forall g \in G(\mathbb{A}) \ .$$

En effet cette expression ne dépend pas du représentant choisi w de σ. D'après le théorème 5 (i) les fonctions $M_{P,\sigma}^{P'}(\varphi,\lambda_P)$ sont dans $L^2_\infty(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\sigma(\pi))$.

Envisageons maintenant le cas général d'un morphisme quelconque $\sigma : P \to P'$. Il existe certainement $\overline{P} \in \mathcal{P}_0$ tel que $\overline{P} \subseteq P'$ et $M_{\overline{P}} = wM_Pw^{-1}$. Si $\overline{\sigma} : P \to \overline{P}$ désigne le morphisme de $\mathcal{P}_0$ induit par $w \in W$, on définit une fonction méromorphe $\lambda_P \mapsto E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi,\lambda_P)$ sur Λ_P par la formule

$$E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi,\lambda_P) = E_{\overline{P}}^{P'}(M_{P,\overline{\sigma}}^{\overline{P}}(\varphi,\lambda_P),\overline{\sigma}(\lambda_P)) \ .$$

En effet, d'après le théorème 5 (ii) et (iii), cette expression ne dépend pas du choix du représentant $w \in W$ et de $\overline{P} \in \mathcal{P}_0$.

Ayant désormais construit tous les opérateurs $M_P^{P'}(\cdot,\lambda_P)$ et $E_{P,\sigma}^{P'}(\cdot,\lambda_P)$, on remarque que le théorème 5 (ii) et (iii) se traduit pour eux par les propriétés de fonctorialité suivantes :

- Si $\sigma : P \to P'$ est un isomorphisme de $\mathcal{P}_0$ et $\sigma' : P' \to P''$ est un morphisme de $\mathcal{P}_0$, on a :

$$E_{P',\sigma'}^{P''}(M_{P,\sigma}^{P'}(\varphi,\lambda_P),\sigma(\lambda_P)) = E_{P,\sigma'\sigma}^{P''}(\varphi,\lambda_P)$$

- Si $\sigma : P \to P'$ et $\sigma' : P' \to P''$ sont deux isomorphismes de $\mathcal{P}_0$, on a :

$$M_{P',\sigma'}^{P''}(M_{P,\sigma}^{P'}(\varphi,\lambda_P),\sigma(\lambda_P)) = M_{P,\sigma'\sigma}^{P''}(\varphi,\lambda_P)$$

e) La décomposition spectrale de Langlands

Introduisons de nouveaux espaces, dits de fonctions de Paley-Wiener.

Etant donnés (P,π) une paire discrète, K' un sous-groupe ouvert de K [resp. et $\sigma : P \to P'$ un morphisme de $\mathcal{P}_0$], soit $L^2_{K'}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$ l'espace [resp. soit $L^2_{K',\sigma}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)$ $N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$ le sous-espace] des fonctions

$$\Phi : \mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$$

telles que :

- la fonction $\lambda_P \mapsto \Phi(\lambda_P,\cdot)$ est une combinaison linéaire finie à coefficients dans $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$ de caractères du tore $\mathrm{Im}\Lambda_P$,

• pour tout $\lambda_P \in \Lambda_P$ et tout $\mu_P \in \mathrm{Fixe}_P(\pi)$ [resp. tout $(\tau, \mu_P) \in \mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$], on a

$$\Phi(\lambda_P\mu_P, \cdot) = \Phi(\lambda_P, \cdot)$$
$$[\text{resp.}\, M^P_{P,\tau}(\Phi(\lambda_P\mu_P, \cdot), \lambda_P\mu_P) = \Phi(\tau(\lambda_P), \cdot)]\,.$$

Notons aussi $L^2_\infty(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ l'espace [resp. $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ le sous-espace] réunion filtrante des $L^2_{K'}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ [resp. des $L^2_{K',\sigma}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$] quand K' décrit la famille des sous-groupes ouverts de K.

Sur cet espace $L^2_\infty(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ on peut mettre la norme hermitienne $\Phi \mapsto \|\frac{\Phi}{|\chi_\pi|}\|$ définie par

$$\|\frac{\Phi}{|\chi_\pi|}\|^2 = \int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \|\frac{\Phi(\lambda_P, \cdot)}{|\chi_\pi|}\|^2\,.$$

Son complété [resp. le complété de chaque sous-espace $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$] pour cette norme est noté $L^2(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ [resp. $L^2_\sigma(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)\,N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$].

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition spectrale de Langlands :

THÉORÈME 7. — *Soit P' un objet de $\mathcal{P}_0$.*

Alors pour toute paire discrète (P, π) avec π unitaire et pour tout morphisme $\sigma : P \to P'$ de $\mathcal{P}$, l'application définie sur $L^2_\infty(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)\,N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ par la formule

$$\Phi \mapsto |\mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)|^{-1/2} \int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot E^{P'}_{P,\sigma}(\Phi(\lambda_P, \cdot), \lambda_P)$$

induit une isométrie du sous-espace $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ sur un sous-espace de $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ et elle est nulle sur le supplémentaire orthogonal de ce sous-espace dans $L^2_\infty(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$. Elle induit par suite une isométrie du sous-espace complété $L^2_\sigma(\mathrm{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ sur un sous-espace fermé de $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$.

Enfin $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ est la somme directe hilbertienne de ces sous-espaces fermés quand (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes avec π unitaire et quand σ décrit un ensemble de représentants des orbites dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P, P')$ sous l'action à droite de $\mathrm{Fixe}(\pi)$. □

f) Expression spectrale des noyaux

Dans tout ce paragraphe on considère $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une fonction à support compact invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K.

Pour tout objet P de $\mathcal{P}_0$, l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi * h$ de convolution à droite par h dans l'espace des fonctions localement intégrables de $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ admet un noyau qui s'écrit

$$K_{h,P}(g',g) = \sum_{\gamma\in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} dn_P \cdot h(g^{-1}\gamma n_P g') \ .$$

Et pour tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$ on dispose aussi de l'opérateur composé

$$\varphi \mapsto ((\varphi\lambda_P) * h)\lambda_P^{-1} = h(\varphi, \lambda_P) \ .$$

Il est immédiat que pour toute paire discrète (P, π) chacun de ces opérateurs envoie l'espace $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ dans le sous-espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$. Or d'après le théorème 1 il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de paires discrètes (P, π) pour lesquelles l'espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ soit non nul et chacun de ces espaces est de dimension finie. De ces considérations et du théorème 7, on déduit :

COROLLAIRE 8. — *Pour tout $P' \in \mathcal{P}_0$ et pour toute fonction $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ à support compact et invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K, le noyau de l'opérateur de convolution à droite par h dans $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ s'écrit sous la forme*

$$K_{h,P'}(g',g) = \sum_{(P,\pi)} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)} \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')} \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(\pi)|}$$
$$\int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot E^{P'}_{P,\sigma}(h(\varphi,\lambda_P),\lambda_P)(g')\overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_P)(g)}$$

où (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes avec π unitaire et où $\mathcal{B}_{K'}(P, \pi)$ désigne une base orthonormée finie de chaque espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$. $\square$

Nous aurons également besoin d'une variante du corollaire 8 s'appliquant à un type particulier de fonctions $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ comme ci-dessus.

Considérons h une telle fonction qui soit adaptée à un homomorphisme $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}$ au sens du paragraphe V.1e. Comme on a vu, pour tout $P \in \mathcal{P}_0$, le noyau $K_{h,P}$ se décompose de manière naturelle en une somme

$$K_{h,P} = \sum_{1 \le i \le |P|} K_{h,P}^i .$$

Pour tout indice i, $1 \le i \le |P|$, on dispose dans l'espace des fonctions localement intégrables de $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ de l'opérateur de noyau $K_{h,P}^i$

$$\varphi \mapsto \varphi *^i h$$

où

$$(\varphi *^i h)(g') = \int_{M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}} \frac{dg}{dn_P} \cdot K_{h,P}^i(g', g)\varphi(g) \ , \ \forall g' \in G(\mathbb{A}) .$$

Et pour tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$, on dispose aussi de l'opérateur composé $\varphi \mapsto h^i(\varphi, \lambda_P) = ((\varphi\lambda_P) *^i h)\lambda_P^{-1}$. Ici encore, pour toute paire discrète (P, π), chacun de ces opérateurs envoie $L_\infty^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}, \pi)$ dans le sous-espace $L_{K'}^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}, \pi)$.

Avec ces hypothèses et ces notations, on déduit encore du théorème 7 la variante suivante du corollaire 8 :

COROLLAIRE 8'. — *Soient $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}$ un homomorphisme et $h : G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction à support compact, invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K et adaptée à ε.*

Alors pour tout $P' \in \mathcal{P}_0$ et pour tout indice i', $1 \le i' \le |P'|$, le noyau $K_{h,P'}^{i'}$ s'écrit sous la forme

$$K_{h,P'}^{i'}(g', g) = \sum_{(P,\pi)} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{K'}(P,\pi)} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')} \sum_{\substack{1 \le i \le |P| \\ \sigma(i) = i'}}$$

$$\frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(\pi)|} \int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot E_{P,\sigma}^{P'}(h^i(\varphi, \lambda_P), \lambda_P)(g')\overline{E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi, \lambda_P)(g)}$$

où (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes avec π unitaire et où $\mathcal{B}_{K'}(P, \pi)$ désigne une base orthonormée finie de chaque espace $L_{K'}^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^\mathbb{Z}, \pi)$. □

2. — La formule des traces d'Arthur-Selberg : le côté spectral

a) Une assertion d'intégrabilité

Le présent paragraphe 2 repose sur la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Soient* (P,π) *une paire discrète avec* π *unitaire,* K' *un sous-groupe ouvert de* K*,* $\lambda_P \mapsto \varphi(\lambda_P)$ *une fonction analytique sur* $\mathrm{Im}\Lambda_P$ *à valeurs dans l'espace de dimension finie* $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$*,* φ *un élément de ce même espace* $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$*,* $\{p\}$ *une famille compacte de polygones* $p:[0,r]\to\mathbb{R}$ *et* $\{\alpha\}$ *une partie compacte de* $\mathbb{R}$*.*

Alors il existe sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ *une fonction positive intégrable qui majore en modules toutes les fonctions*

$$g\mapsto K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(\lambda_1,\lambda_2,g)=\sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_0\\ P'\supseteq P_0}}(-1)^{|P'|-1}\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')}\sum_{\delta\in P'(F)\backslash G(F)}$$

$$\mathbb{1}(p^{\delta g}_{P'}>_{P'}p-\alpha p^{\sigma(i)}_{P'})\int d\lambda_P\cdot E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1\lambda_P),\lambda_1\lambda_P)(\delta g)\overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_2\lambda_P)(\delta g)}$$

quand p,α *décrivent respectivement* $\{p\}$*,* $\{\alpha\}$*,* λ_1,λ_2 *décrivent un certain voisinage de* $\mathrm{Im}\Lambda_P$ *dans* Λ_P *et* i *décrit* $\{1,2,\dots,|P|\}$*.* □

Avant de procéder à la démonstration de cette proposition, notons-en tout de suite deux conséquences qui s'obtiennent par combinaison avec les corollaires 8 et 8' du paragraphe VI.1f :

COROLLAIRE 2. — *Pour toute fonction* $h:G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{C}$ *à support compact et invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert* K' *de* K *et pour tout polygone* $p:[0,r]\to\mathbb{R}$*, l'intégrale* $\mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ *de la fonction à support compact sur* $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$

$$g\mapsto\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_0\\ P\supseteq P_0}}(-1)^{|P|-1}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\mathbb{1}(p^{\delta g}_P>_P p)K_{h,P}(\delta g,\delta g)$$

est égale à la somme finie

$$\sum_{(P,\pi)}\frac{1}{|\operatorname{Fixe}(\pi)|}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}}dg\cdot K^{\leq p,0}_{h(\varphi,\cdot),\varphi}(1,1,g)$$

où (P,π) *décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes avec* π *unitaire, et* $\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)$ *désigne une base orthonormée finie de chacun des espaces* $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$*.* □

COROLLAIRE 2'. — *Soit $h : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ une fonction à support compact, invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K et adaptée à un certain homomorphisme $\varepsilon : \mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$.*

Alors pour tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ et pour tout nombre réel α, l'intégrale $\mathrm{Tr}_\alpha^{\leq p}(h)$ de la fonction à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$

$$g \mapsto \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_0\\ P\supseteq P_0}} (-1)^{|P|-1} \sum_{1\leq i\leq |P|} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_P^{\delta g} >_P p - \alpha p_P^i) K_{h,P}^i(\delta g, \delta g)$$

est égale à la somme finie

$$\sum_{(P,\pi)} \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(\pi)|} \sum_{1\leq i\leq |P|} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot K_{h^i(\varphi,\cdot),\varphi}^{\leq p,\alpha,i}(1,1,g)$$

où (P,π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires discrètes avec π unitaire, et $\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)$ désigne une base orthonormée finie de chacun des espaces $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$. □

b) Démonstration de ladite intégrabilité

D'après Langlands la fonction $\lambda_P \mapsto \varphi(\lambda_P)$ à valeurs dans [resp. l'élément φ de] l'espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$ est de la forme

$$\varphi(\lambda_P) = \operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} E_{\widetilde{P}}^P(\widetilde{\varphi}(\lambda_P),\cdot) \quad [\text{resp. } \varphi = \operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} E_{\widetilde{P}}^P(\widetilde{\varphi},\cdot)]$$

où

- $(\widetilde{P},\widetilde{\pi})$ est une paire discrète telle que $\widetilde{P}\subseteq P$ et que $\widetilde{\pi}$ soit unitaire cuspidale,
- $\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}}$ est un opérateur de résidus en un point $\widetilde{\lambda}$ dans $\Lambda_{\widetilde{P}}^P$ tel que $|\widetilde{\lambda}|>1$,
- $\lambda_P \mapsto \widetilde{\varphi}(\lambda_P)$ est une fonction analytique à valeurs dans [resp. $\widetilde{\varphi}$ est un élément de] l'espace $L^2_{K'}(M_{\widetilde{P}}(F)N_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\widetilde{\pi})$.

Bien sûr l'inclusion $\widetilde{P}\subseteq P$ induit un morphisme de $\mathcal{P}_0$. Son composé avec tout morphisme $\sigma : P\to P'$ de $\mathcal{P}_0$ sera noté $\widetilde{\sigma} : \widetilde{P}\to P'$. D'autre part, pour $i\in\{1,2,\dots,|P|\}$, choisissons un $\widetilde{i}\in\{1,2,\dots,|\widetilde{P}|\}$ antécédent de i via l'inclusion $\widetilde{P}\subseteq P$.

Nous sommes amenés, pour tous $\lambda_1\in\Lambda_P$, $\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2\in\Lambda_{\widetilde{P}}$, à considérer la fonction sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ qui associe à tout $g\in G(\mathbb{A})$ la somme

$$\sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_0\\ P'\supseteq P_0}} (-1)^{|P'|-1} \sum_{\sigma\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')} \sum_{\delta\in P'(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p_{P'}^{\delta g} >_{P'} p - \alpha p_{P'}^{\sigma(i)})$$

$$\int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P),\widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g)\overline{E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g)}\ .$$

Nous allons d'abord transformer ces expressions en un point $g \in G(\mathbb{A})$ fixé.

Encore une fois, associons à tout $P' \supseteq P_0$ dans $\mathcal{P}_0$ et tout $\delta \in P'(F)\backslash G(F)$ le raffinement canonique $\overline{Q}^g_{\delta^{-1}P'\delta} = \overline{Q}$ de $(g, \delta^{-1}P'\delta)$. Et si $\mu \geq 0$ est une constante, on dispose aussi de la filtration ${}^{\mu}\overline{Q}^g_{\delta^{-1}P'\delta} = \overline{Q}^{\mu}$ avec donc $\overline{Q} \subseteq \overline{Q}^{\mu} \subseteq \delta^{-1}P'\delta$. De plus le couple $(\overline{Q},\overline{Q}^{\mu})$ peut être écrit sous la forme $\overline{Q} = \overline{\delta}^{-1}\overline{P}\,\overline{\delta}$, $\overline{Q}^{\mu} = \overline{\delta}^{-1}\overline{P}^{\mu}\overline{\delta}$ où $P_0 \subseteq \overline{P} \subseteq \overline{P}^{\mu}$, $\overline{\delta} \in \overline{P}(F)\backslash G(F)$.

En regroupant les termes, notre expression se récrit

$$\sum_{\substack{\overline{P},\overline{P}^{\mu}\in\mathcal{P}_0\\ \overline{P}^{\mu}\supseteq\overline{P}\supseteq P_0}} \sum_{\overline{\delta}\in\overline{P}(F)\backslash G(F)} \sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_0\\ \overline{Q}^{\overline{\delta}g}_{P'}=\overline{P},\,{}^{\mu}\overline{Q}^{\overline{\delta}g}_{P'}=\overline{P}^{\mu}}} (-1)^{|P'|-1} \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')}$$

$$\mathbb{1}(p^{\overline{\delta}g}_{P'} >_{P'} p - \alpha p^{\sigma(i)}_{P'}) \int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P),\widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\overline{\delta}g)\overline{E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\overline{\delta}g)}.$$

Or d'après le corollaire 6 du paragraphe V.1d et si la constante $\mu \geq 0$ est choisie assez grande en fonction du sous-groupe ouvert K' de K, on peut substituer aux séries d'Eisenstein leurs termes constants de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P),\widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\overline{\delta}g) &= \int_{N_{\overline{P}^{\mu}}(F)\backslash N_{\overline{P}^{\mu}}(\mathbb{A})} dn_{\overline{P}^{\mu}} \cdot E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P),\widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(n_{\overline{P}^{\mu}}\overline{\delta}g)\\ &= \sum_{\substack{\sigma_1\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},\overline{P}^{\mu})\\ \sigma_1'=\widetilde{\sigma}}} E^{\overline{P}^{\mu}}_{P,\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P),\widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\overline{\delta}g)\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\overline{\delta}g) &= \int_{N_{\overline{P}^{\mu}}(F)\backslash N_{\overline{P}^{\mu}}(\mathbb{A})} dn_{\overline{P}^{\mu}} \cdot E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(n_{\overline{P}^{\mu}}\overline{\delta}g)\\ &= \sum_{\substack{\sigma_2\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},\overline{P}^{\mu})\\ \sigma_2'=\widetilde{\sigma}}} E^{\overline{P}^{\mu}}_{P,\sigma_2}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\overline{\delta}g) \end{aligned}$$

où on note $\sigma_1',\sigma_2' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},P')$ les composés de tous morphismes $\sigma_1,\sigma_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},\overline{P}^{\mu})$ avec le morphisme de $\mathcal{P}_0$ induit par l'inclusion $\overline{P}^{\mu} \subseteq P'$.

Il est clair d'autre part que si la constante $\mu \geq 0$ est assez grande en fonction des compacts $\{p\}$ et $\{\alpha\}$, alors, pour tous $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')$, $\sigma_1,\sigma_2 \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},\overline{P}^\mu)$, les égalités $\sigma_1' = \widetilde{\sigma} = \sigma_2'$ impliquent les équivalences

$$p_{\overline{P}^\mu}^{\overline{\delta}g} >_{\overline{P}^\mu} p - \alpha p_{\overline{P}^\mu}^{\sigma_1(\tilde{i})} \Longleftrightarrow p_{P'}^{\overline{\delta}g} >_{P'} p - \alpha p_{P'}^{\sigma(i)} \Longleftrightarrow p_{\overline{P}^\mu}^{\overline{\delta}g} >_{\overline{P}^\mu} p - \alpha p_{\overline{P}^\mu}^{\sigma_2(\tilde{i})}.$$

Ainsi notre expression se récrit-elle encore

$$\sum_{\substack{\overline{P},\overline{P}^\mu\in\mathcal{P}_0\\ \overline{P}^\mu\supseteq\overline{P}\supseteq P_0}} \sum_{\overline{\delta}\in\overline{P}(F)\backslash G(F)} \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},\overline{P}^\mu)} \mathbb{1}(p_{\overline{P}^\mu}^{\overline{\delta}g} >_{\overline{P}^\mu} p - \alpha p_{\overline{P}^\mu}^{\sigma_1(\tilde{i})})$$

$$\left(\sum_{\begin{cases} P'\in\mathcal{P}_0\\ \overline{Q}_{P'}^{\overline{\delta}g}=\overline{P},{}^\mu\overline{Q}_{P'}^{\overline{\delta}g}=\overline{P}^\mu\\ \exists\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P'),\sigma_1'=\widetilde{\sigma}=\sigma_2'\end{cases}} (-1)^{|P'|-1}\right)\int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P\cdot$$

$$E_{\widetilde{P},\sigma_1}^{\overline{P}^\mu}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P),\widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\overline{\delta}g)\overline{E_{\widetilde{P},\sigma_2}^{\overline{P}^\mu}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\overline{\delta}g)}.$$

Or on a le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient $\mu \geq 0$ une constante, P, $\widetilde{P}$, $\overline{P}$, $\overline{P}^\mu$ des éléments de $\mathcal{P}_0$ vérifiant $\widetilde{P} \subseteq P$ et $P_0 \subseteq \overline{P} \subseteq \overline{P}^\mu$, σ_1,σ_2 deux morphismes dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P},\overline{P}^\mu)$ et g un élément de $G(\mathbb{A})$. Alors :*

(i) *L'ensemble $\{P' \in \mathcal{P}_0,\ \overline{Q}_{P'}^g = \overline{P} \wedge {}^\mu\overline{Q}_{P'}^g = \overline{P}^\mu\}$ ou bien est vide ou bien est égal à $\{P' \in \mathcal{P}_0, \overline{P}^\mu \subseteq P' \subseteq \overline{P}'\}$ pour un unique $\overline{P}' \supseteq \overline{P}^\mu$ dans $\mathcal{P}_0$.*

(ii) *Pour tout $\overline{P}' \supseteq \overline{P}^\mu$ dans $\mathcal{P}_0$, la somme*

$$\sum_{\begin{cases} P'\in\mathcal{P}_0\\ \overline{P}^\mu\subseteq P'\subseteq\overline{P}'\\ \exists\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P'),\sigma_1'=\widetilde{\sigma}=\sigma_2'\end{cases}} (-1)^{|P'|-1}$$

vaut ou bien 0 ou bien $(-1)^{|\overline{P}'|-1}$.

Et le second cas se produit si et seulement si les homomorphismes $\sigma_1^* : \mathrm{Re}\Lambda_{\widetilde{P}} \to \mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}$, $\sigma_2^* : \mathrm{Re}\Lambda_{\widetilde{P}} \to \mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}$ induits par les inclusions $Z_{\overline{P}^\mu} \hookrightarrow \sigma_1 Z_{\widetilde{P}}\sigma_1^{-1}$, $Z_{\overline{P}^\mu} \hookrightarrow \sigma_2 Z_{\widetilde{P}}\sigma_2^{-1}$ vérifient les conditions suivantes :

- *σ_1^* et σ_2^* envoient le sous-groupe $\mathrm{Re}\Lambda_{\widetilde{P}}^P$ de $\mathrm{Re}\Lambda_{\widetilde{P}}$ dans le sous-groupe $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'}$ de $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}$,*

• *l'homomorphisme* $\sigma_1^*/\sigma_2^* : \lambda_{\widetilde{P}} \mapsto \sigma_1^*(\lambda_{\widetilde{P}})\sigma_2^*(\lambda_{\widetilde{P}})^{-1}$ *envoie* $\mathrm{Re}\Lambda_{\widetilde{P}}$ *dans le sous-groupe* $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'}$ *de* $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}$,

• *le sous-groupe engendré dans* $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'} \subseteq \mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}$ *par* $\sigma_1^*(\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}^{P})$, $\sigma_2^*(\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}^{P})$ *et* $(\sigma_1^*/\sigma_2^*)(\mathrm{Re}\,\Lambda_P)$ *rencontre le cône des caractères* $\lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'} < 1$.

Démonstration du lemme 3 :

(i) Il est clair que l'ensemble $\{P' \in \mathcal{P}_0, \overline{Q}_{P'}^g = \overline{P} \wedge {}^\mu\overline{Q}_{P'}^g = \overline{P}^\mu\}$ est non vide si et seulement si il contient l'élément $\overline{P}^\mu$.

Dans ce cas, introduisons les ensembles

$$\begin{aligned}
\overline{I} &= \{\mathrm{rg}\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}\ ,\ 1 \le i < |\overline{P}|\}\ ,\\
\overline{I}_0 &= \{\mathrm{rg}\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}\ ,\ \mu(\mathcal{E}_{i-1}^{g,\overline{P}}\backslash\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}) > \mu(\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}\backslash\mathcal{E}_{i+1}^{g,\overline{P}})\}\ ,\\
\overline{I}_\mu &= \{\mathrm{rg}\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}\ ,\ \mu(\mathcal{E}_{i-1}^{g,\overline{P}}\backslash\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}) > \mu + \mu(\mathcal{E}_i^{g,\overline{P}}\backslash\mathcal{E}_{i+1}^{g,\overline{P}})\}\ ,\\
I &= \{\mathrm{rg}\mathcal{E}_j^{g,\overline{P}^\mu}\ ,\ 1 \le j < |\overline{P}^\mu|\}\ ,
\end{aligned}$$

avec donc $\overline{I}\backslash\overline{I}_0 \coprod \overline{I}_\mu \subseteq I \subseteq \overline{I}$.

Et pour tout $P' \supseteq \overline{P}$ dans $\mathcal{P}_0$, notons $I_{P'} = \{\mathrm{rg}\mathcal{E}_j^{g,P'}, 1 \le j < |P'|\}$. L'application $P' \mapsto I_{P'}$ définit une bijection sur l'ensemble des parties de $\overline{I}$ et pour tout $P' \supseteq \overline{P}$ les conditions $\overline{Q}_{P'}^g = \overline{P}$ et ${}^\mu\overline{Q}_{P'}^g = \overline{P}^\mu$ sont équivalentes à $I\backslash\overline{I}_\mu \subseteq I_{P'} \subseteq I$ c'est-à-dire $\overline{P}' \subseteq P' \subseteq \overline{P}^\mu$ si $\overline{P}' \supseteq \overline{P}$ est défini par $I_{\overline{P}'} = I'\backslash\overline{I}_\mu$.

(ii) De la même façon, l'ensemble des $P' \in \mathcal{P}_0$ tels que

$$\begin{cases} \overline{P}^\mu \subseteq P' \subseteq \overline{P}' \\ \exists \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P, P'), \sigma_1' = \widetilde{\sigma} = \sigma_2' \end{cases}$$

ou bien est vide ou bien est égal à $\{P' \in \mathcal{P}_0, \overline{P}'' \subseteq P' \subseteq \overline{P}'\}$ pour un certain $\overline{P}'' \in \mathcal{P}_0$ vérifiant $\overline{P}^\mu \subseteq \overline{P}'' \subseteq \overline{P}'$. Et on a

$$\sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}_0 \\ \overline{P}'' \subseteq P' \subseteq \overline{P}'}} (-1)^{|P'|-1} = \sum_{I_{\overline{P}'} \subseteq I_{P'} \subseteq I_{\overline{P}''}} (-1)^{\# I_{P'}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{P}'' \subsetneq \overline{P}' \\ (-1)^{|\overline{P}'|-1} & \text{si } \overline{P}'' = \overline{P}' \end{cases}$$

d'où la première assertion.

Le second cas est réalisé si et seulement si le sous-ensemble envisagé de $\mathcal{P}_0$ a $\overline{P}'$ comme unique élément. Or la première condition de l'énoncé portant sur σ_1^* et σ_2^* traduit le fait que les deux morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P}, \overline{P}')$

induits par σ_1 et σ_2 se factorisent chacun dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P, \overline{P}')$. La seconde condition portant sur σ_1^*/σ_2^* traduit le fait que σ_1 et σ_2 induisent le même morphisme dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P}, \overline{P}')$. Et la troisième condition traduit le fait que l'ensemble considéré n'a d'autre élément que $\overline{P}'$. $\square$

Suite de la démonstration de la proposition 1 : Rappelons que nous avons déjà fixé la constante $\mu \geq 0$ en fonction du sous-groupe ouvert K' de K et des compacts $\{p\}$ et $\{\alpha\}$. Fixons également des éléments $\overline{P}$, $\overline{P}^\mu$, $\overline{P}' \in \mathcal{P}_0$ vérifiant $P_0 \subseteq \overline{P} \subseteq \overline{P}^\mu \subseteq \overline{P}'$. Disons que deux morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P}, \overline{P}^\mu)$ sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par composition avec un élément de $\mathrm{Aut}(\widetilde{P})$ commutant avec l'inclusion $\widetilde{P} \subseteq P$ et fixant $\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\lambda}$. Cette relation est compatible avec les conditions du lemme 3 (ii). Faisons donc décrire à σ_1 et σ_2 deux classes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(\widetilde{P}, \overline{P}^\mu)$ qui satisfassent ces conditions.

Il nous suffit maintenant de prouver que lorsque p décrit $\{p\}$, α décrit $\{\alpha\}$, j décrit $\{1, 2, \ldots, |\overline{P}^\mu|\}$ et λ_1, λ_2 décrivent un certain voisinage de $\mathrm{Im}\Lambda_P$ dans Λ_P, les fonctions

$$g \mapsto \mathbb{1}(p^g_{\overline{P}^\mu} >_{\overline{P}^\mu} p - \alpha p^j_{\overline{P}^\mu}) \int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_1} E^{\overline{P}^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \cdot\lambda_1\lambda_P)(g)$$
$$\overline{\mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_2} E^{\overline{P}^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\varphi}, \cdot\lambda_2\overline{\lambda}_P^{-1})(g)}$$

sur l'ouvert U dans $\overline{P}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ constitué des élément g tels que $\{P' \in \mathcal{P}_0, \overline{Q}^g_{P'} = \overline{P} \wedge {}^\mu\overline{Q}^g_{P'} = \overline{P}^\mu\} = \{P' \in \mathcal{P}_0, \overline{P}^\mu \subseteq P' \subseteq \overline{P}'\}$ sont uniformément majorées en modules par une fonction intégrable.

On remarque que l'opérateur d'intégration $\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_P\cdot$ ci-dessus est appliqué à des fonctions analytiques de la variable $\lambda_P \in \Lambda_P$ si bien que le contour $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ peut être déplacé. Pour tout $\lambda_0 \in \mathrm{Re}\,\Lambda_P$ proche de 1, nos fonctions s'écrivent encore sous la forme :

$$g \mapsto \mathbb{1}(p^g_{\overline{P}^\mu} >_{\overline{P}^\mu} p - \alpha p^j_{\overline{P}^\mu}) \int_{\mathrm{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_1} E^{\overline{P}^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_0\lambda_P), \cdot\lambda_1\lambda_0\lambda_P)(g)$$
$$\overline{\mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_2} E^{\overline{P}^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\varphi}, \cdot\lambda_2\lambda_0^{-1}\overline{\lambda}_P^{-1})(g)}$$

D'autre part, nous pouvons évidemment nous limiter au cas où les deux résidus qui apparaissent dans cette expression ne sont pas identiquement nuls. Mais alors on déduit de [Mœglin, Waldspurger, 1994] proposition V.3.15 et proposition VI.1.6 (c), que pour tous σ_1, σ_2 dans les classes considérées, pour tout $\widetilde{\lambda}_1$ dans un certain voisinage de $\widetilde{\lambda}$ dans $\Lambda_{\widetilde{P}}^{P}$ et avec les notations du lemme 3 (ii), les caractères $\sigma_1^*(|\widetilde{\lambda}_1|)$ et $\sigma_2^*(|\widetilde{\lambda}_1|)$ dans $\operatorname{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'}$ sont ≤ 1. Comme les conditions du lemme 3 (ii) sont satisfaites, on a pu choisir le caractère $\lambda_0 \in \operatorname{Re}\Lambda_P$ proche de 1 de telle sorte que pour tous σ_1, σ_2 dans les classes considérées, pour tous $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2$ dans un certain voisinage de $\widetilde{\lambda}$ dans $\Lambda_{\widetilde{P}}^{P}$ et pour tous λ_1, λ_2 dans un certain voisinage de $\mathrm{Im}\Lambda_{\mathrm{P}}$ dans Λ_P, le caractère

$$\sigma_1^*(|\widetilde{\lambda}_1|)\sigma_1^*(|\lambda_1|)\sigma_2^*(|\widetilde{\lambda}_2|)\sigma_2^*(|\lambda_2|)(\sigma_1^*/\sigma_2^*)(\lambda_0)$$

dans $\operatorname{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}$ se projette dans $\operatorname{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'}$ sur un élément $\leq \Lambda < 1$ et dans $\operatorname{Re}\Lambda_{\overline{P}'}$ à l'intérieur d'un voisinage V de 1 arbitrairement petit en fonction du voisinage choisi de $\mathrm{Im}\Lambda_P$ dans Λ_P.

Or pour tout $\lambda_P \in \mathrm{Im}\Lambda_P$, la fonction de la variable $g \in G(\mathbb{A})$ qui est le quotient du module de

$$E_{\widetilde{P},\sigma_1}^{\overline{P}^\mu}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_0\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_1\lambda_0\lambda_P)\overline{E_{\widetilde{P},\sigma_2}^{\overline{P}^\mu}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_2\lambda_0^{-1}\overline{\lambda}_P^{-1})}$$

par le caractère

$$\sigma_1^*(|\widetilde{\lambda}_1|)\sigma_1^*(|\lambda_1|)\sigma_2^*(|\widetilde{\lambda}_2|)\sigma_2^*(|\lambda_2|)(\sigma_1^*/\sigma_2^*)(\lambda_0)\rho_{\overline{P}^\mu}^2$$

est invariante à gauche par $M_{\overline{P}^\mu}(F)$, $N_{\overline{P}^\mu}(\mathbb{A})$ et $Z_{\overline{P}^\mu}(\mathbb{A})$. Et le sous-ensemble U' de $\overline{P}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ constitué des éléments $g \in G(\mathbb{A})$ tels que

$$\begin{cases} \bullet g \in U, \text{c'est-à-dire que pour tout } P' \in \mathcal{P}_0 \text{ on a l'équivalence} \\ \qquad \overline{Q}_{P'}^g = \overline{P} \wedge {}^\mu\overline{Q}_{P'}^g = \overline{P}^\mu \iff \overline{P}^\mu \subsetneq P' \subsetneq \overline{P}', \\ \bullet \text{il existe } p \in \{p\}, \alpha \in \{\alpha\} \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots, |\overline{P}^\mu|\} \text{ vérifiant } p_{\overline{P}^\mu}^g >_{\overline{P}^\mu} p - \alpha p_{\overline{P}^\mu}^j, \end{cases}$$

se projette sur une partie compacte de $M_{\overline{P}^\mu}(F)N_{\overline{P}^\mu}(\mathbb{A})Z_{\overline{P}^\mu}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$. On en déduit qu'en sus du caractère $\Lambda < 1$ dans $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}^\mu}^{\overline{P}'}$ et du voisinage V de 1 dans $\mathrm{Re}\Lambda_{\overline{P}'}$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous λ_1, λ_2 dans un voisinage suffisamment petit de $\mathrm{Im}\Lambda_P$ dans Λ_P, pour tout $\lambda_P \in \mathrm{Im}\Lambda_P$ et pour tout $g \in U'$, on ait

$$|\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} E_{\widetilde{P},\sigma_1}^{\overline{P}^\mu}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_0\lambda_P), \cdot\lambda_1\lambda_0\lambda_P)(g)\overline{\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} E_{\widetilde{P},\sigma_2}^{\overline{P}^\mu}(\widetilde{\varphi}, \cdot\lambda_2\lambda_0^{-1}\overline{\lambda}_P^{-1})(g)}|$$
$$\leq C\Lambda(g) \max_{\lambda_{\overline{P}'} \in V}\{\lambda_{\overline{P}'}(g)\}\rho_{\overline{P}^\mu}^2(g) .$$

Or, si le voisinage V de 1 dans $\mathrm{Re}\,\Lambda_{\overline{P}'}$ a été pris assez petit, la fonction sur $U' \subseteq \overline{P}(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$

$$g \mapsto C\Lambda(g) \max_{\lambda_{\overline{P}'}\in V} \{\lambda_{\overline{P}'}(g)\} \rho^2_{\overline{P}^\mu}(g)$$

est intégrable.

Cela termine la démonstration de la proposition 1. □

c) Première transformation des coefficients de Fourier par échange de deux sommations

Nous conservons les hypothèses et les notations de la proposition 1. D'après cette proposition, la fonction

$$\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times \mathrm{Im}\,\Lambda_P \to \mathbb{C} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg.K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$$

est bien définie et analytique. Nous voulons calculer sa valeur en l'élément neutre $(1,1)$. Nous savons que c'est la somme des coefficients de Fourier de cette fonction, c'est-à-dire des intégrales

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi_1(\lambda_1)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \chi_2(\lambda_2) \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A}/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$$

quand (χ_1,χ_2) décrit l'ensemble des couples de caractères de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

Comme les fonctions $(\lambda_1,\lambda_2) \mapsto K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$ sont invariantes par $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ plongé diagonalement dans $\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times \mathrm{Im}\,\Lambda_P$, un coefficient de Fourier comme ci-dessus ne peut être non nul que si χ_1 et χ_2 sont égaux à un même caractère χ de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

D'après la proposition 1, on peut intervertir les sommations $\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_1\cdot$, $\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_2\cdot$ et $\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg\cdot$ si bien qu'après changement des variables λ_1 et λ_2 en λ_1/λ_P et λ_2/λ_P, et comme $\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_P = 1$, le coefficient de Fourier attaché à (χ,χ) s'écrit

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot \sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_0\\ P'\supseteq P_0}} (-1)^{|P'|-1} \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \mathbb{1}(p^{\delta g}_{P'} >_{P'} p - \alpha p^{\sigma(i)}_{P'})$$

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi(\lambda_1)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \chi(\lambda_2) E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(\delta g)\overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_2)(\delta g)}.$$

Or d'après le théorème 7 du paragraphe VI.1e, pour tout $P' \in \mathcal{P}_0$ et tout $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')$, les deux fonctions

$$g \mapsto \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi(\lambda_1)} E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(g),\, g \mapsto \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \overline{\chi(\lambda_2)} E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_2)(g)$$

sont de carré intégrable sur $M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$. Donc le produit de la première et de la conjuguée de la seconde est intégrable sur $M_{P'}(F)$ $N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et a fortiori sur l'ouvert défini par la condition $p^g_{P'} >_{P'} p - \alpha p^{\sigma(i)}_{P'}$. Ainsi notre coefficient de Fourier s'écrit-il encore

$$\sum_{\substack{P'\in\mathcal{P}_0\\ P'\supseteq P_0}} (-1)^{|P'|-1} \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')}$$
$$< \mathbb{1}(p_{P'}^{\cdot} >_{P'} p - \alpha p^{\sigma(i)}_{P'}) \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi(\lambda_1)} E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(\cdot);$$
$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \overline{\chi(\lambda_2)} E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_2)(\cdot) >$$

où $< \cdot;\cdot >$ désigne le produit hermitien dans chaque $L^2(M_{P'}(F)$ $N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$.

Par souci de commodité, nous allons modifier un peu l'indexation de cette somme. Nous avons besoin pour cela de nouvelles notations.

Rappelons d'abord que si $P, P' \in \mathcal{P}_0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')$ se plonge naturellement dans l'ensemble des applications surjectives de l'intervalle $\{1,2,\ldots,|P|\}$ sur l'intervalle $\{1,2,\ldots,|P'|\}$. En sens inverse, si $P\in\mathcal{P}_0$ et σ est une application surjective de l'intervalle $\{1,2,\ldots,|P|\}$ sur un intervalle $\{1,2,\ldots,\ell\}$, il existe un unique $P'\in\mathcal{P}_0$ tel que $|P'|=\ell$ et que, si on écrit les décompositions $M_P = M_1\times\cdots\times M_{|P|}$ et $M_{P'} = M'_1\times\cdots\times M'_\ell$, alors $M_j\subseteq M'_{\sigma(j)}$, $1\le j\le |P|$. On notera dans ce cas $P'=\sigma(P)$ et σ définit un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,\sigma(P))$.

D'autre part, si τ est une permutation d'un ensemble $\{1,2,\ldots,\ell\}$, on notera $\tau^+ : \{1,2,\ldots,\ell\}\to\{1,2,\ldots,\ell^+\}$ [resp. $\tau^- : \{1,2,\ldots,\ell\}\to\{1,2,\ldots,\ell^-\}$] l'unique application surjective telle que $\tau^+(\tau^{-1}(1)) = 1$ [resp. $\tau^-(\tau^{-1}(1)) = 1$] et que pour tout j, $1\le j<\ell$, on ait

$$\begin{aligned}
\tau^+(\tau^{-1}(j{+}1)) &= \tau^+(\tau^{-1}(j)){+}1\ [\text{resp. } \tau^-(\tau^{-1}(j{+}1)) = \tau^-(\tau^{-1}(j))] \\
&\qquad\qquad \text{si } \tau^{-1}(j{+}1) > \tau^{-1}(j)\,, \\
\tau^+(\tau^{-1}(j{+}1)) &= \tau^+(\tau^{-1}(j))\ [\text{resp. } \tau^-(\tau^{-1}(j{+}1)) = \tau^-(\tau^{-1}(j)){+}1] \\
&\qquad\qquad \text{si } \tau^{-1}(j{+}1) < \tau^{-1}(j)\,.
\end{aligned}$$

Quand $\ell = |P|$ pour P un élément de $\mathcal{P}_0$, on disposera donc dans $\mathcal{P}_0$ de $\tau^+(P)$ et $\tau^-(P)$.

Ceci étant posé et fixant un $P\in\mathcal{P}_0$, associons à tout couple (P',σ) où $P'\in\mathcal{P}_0$, $P'\supseteq P_0$ et $\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_0}(P,P')$ le couple (τ,Q) où τ est l'unique permutation de $\{1,2,\ldots,|P|\}$ telle que

- le composé $\sigma\tau^{-1} : \{1, 2, \ldots, |P|\} \to \{1, 2, \ldots, |P'|\}$ soit croissant,
- pour tous $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, |P|\}$, on ait l'implication

$$i_1 < i_2 \wedge \sigma(i_1) = \sigma(i_2) \Longrightarrow \tau(i_1) < \tau(i_2) \ ,$$

et où $Q = \sigma(P)$. Il est clair que cette application définit une bijection sur l'ensemble des couples (τ, Q) où

- τ appartient à l'ensemble $\mathfrak{S}_{|P|}$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$,
- Q est élément de $\mathcal{P}_0$ et $\tau(P) \subseteq Q \subseteq \tau^-(P)$.

Ainsi, nous avons prouvé :

LEMME 4. — *Dans la situation de la proposition* 1 *et pour tous caractères* χ_1, χ_2 *de* $\operatorname{Im}\Lambda_P$, *le coefficient de Fourier*

$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi_1(\lambda_1)} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \chi_2(\lambda_2) \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, g)$$

est nul si $\chi_1 \neq \chi_2$ *et si* $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ *il est égal à*

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_0 \\ \tau(P) \subseteq Q \subseteq \tau^-(P)}} (-1)^{|Q|-1}$$

$$< \mathbb{1}(p_Q^{\cdot} >_Q p - \alpha p^{\tau(i)}_{\tau(P)}) \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi(\lambda_1)} E^Q_{P,\tau}(\varphi(\lambda_1), \lambda_1)(\cdot);$$

$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \overline{\chi(\lambda_2)} E^Q_{P,\tau}(\varphi, \lambda_2)(\cdot) >$$

où $< \cdot ; \cdot >$ *désigne le produit hermitien dans chaque* $L^2(M_Q(F) N_Q(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$.

□

d) Transformées de Fourier des fonctions de troncature. Condition de recollement d'Arthur

Afin de calculer les produits hermitiens qui apparaissent dans le lemme 4, il nous faut écrire chacune des fonctions caractéristiques $\mathbb{1}(p_Q^{\cdot} >_Q p - \alpha p^{\tau(i)}_{\tau(P)})$ comme une expression intégrale en les caractères éléments de $\operatorname{Im}\Lambda_Q$. Les deux lemmes qui suivent affirment l'existence d'une telle écriture et en précisent les propriétés formelles dont nous aurons besoin.

LEMME 5. — *Soit $P \in \mathcal{P}_0$. A tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ et à toute permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}$ de $\{1,2,\ldots,|P|\}$ on peut associer une fonction rationnelle*

$$\widehat{\mathbb{1}}^{p}_{P,\tau} : \Lambda_P \to \mathbb{C}$$

ayant pour dénominateur $\mu_P \mapsto \prod_{1\leq j<|P|} (\mu_P^{\tau^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau^{-1}(j)})$*, de telle sorte que :*

(i) *Pour tout $\mu_0 \ll 1$ dans $\mathrm{Re}\,\Lambda_P$, tout polygone p et toute $\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}$, on a l'égalité suivante entre fonctions sur $M_{\tau(P)}(F)N_{\tau(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$:*

$$\begin{aligned}(-1)^{|\tau^-(P)|-1}\mathbb{1}(\dot{p}_{\tau^-(P)} >_{\tau^-(P)} p, \dot{p}_{\tau^+(P)} \leq_{\tau^+(P)} p) = \\ \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\mu_P \cdot \widehat{\mathbb{1}}^{p}_{P,\tau}(\mu_0\mu_P)\tau(\mu_0\mu_P)(\cdot)\end{aligned}$$

(ii) *Pour tout polygone p, tout entier $i \in \{1,2,\ldots,|P|\}$, tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toutes permutations $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_{|P|}$ telles que $\tau_2\tau_1^{-1}$ soit la transposition de deux entiers adjacents ℓ et $\ell+1$, les deux expressions polynômiales*

$$\widehat{\mathbb{1}}^{p-\alpha p^{\tau_1(i)}_{\tau_1(P)}}_{P,\tau_1}(\mu_P) \prod_{1\leq j<|P|} (\mu_P^{\tau_1^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau_1^{-1}(j)})$$

et

$$\widehat{\mathbb{1}}^{p-\alpha p^{\tau_2(i)}_{\tau_2(P)}}_{P,\tau_2}(\mu_P) \prod_{1\leq j<|P|} (\mu_P^{\tau_2^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau_2^{-1}(j)})$$

prennent la même valeur en tout point $\mu_P \in \Lambda_P$ dont les composantes $\mu_P^{\tau_1^{-1}(\ell+1)} = \mu_P^{\tau_2^{-1}(\ell)}$ et $\mu_P^{\tau_1^{-1}(\ell)} = \mu_P^{\tau_2^{-1}(\ell+1)}$ sont égales.

(iii) *Pour tout entier $i \in \{1,2,\ldots,|P|\}$, il existe un caractère χ^i de Λ_P tel que pour tout polygone p, tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}$, on ait l'égalité suivante entre fonctions rationnelles sur Λ_P :*

$$\widehat{\mathbb{1}}^{p-(\alpha+1)p^{\tau(i)}_{\tau(P)}}_{P,\tau} = \chi^i \widehat{\mathbb{1}}^{p-\alpha p^{\tau(i)}_{\tau(P)}}_{P,\tau}$$

Démonstration : Notons $r_1,\ldots,r_{|P|}$ les rangs des facteurs simples de M_P. Par définition Λ_P est le groupe des caractères de $M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ qui se factorisent à travers l'homomorphisme surjectif $\deg_P : M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}^{|P|}/(r_1,\ldots,r_{|P|})d\mathbb{Z}$ donc Λ_P s'identifie au groupe dual de $\mathbb{Z}^{|P|}/(r_1,\ldots,r_{|P|})d\mathbb{Z}$.

D'autre part, pour tout polygone p et toute $\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}$, l'application $m \mapsto (-1)^{|\tau^-(P)|-1} \mathbb{1}(p^{\tau(m)}_{\tau^-(P)} >_{\tau^-(P)} p, p^{\tau(m)}_{\tau^+(P)} \leq_{\tau^+(P)} p)$ sur $M_P(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ se factorise également à travers $\deg_P$ et peut être vue comme une application sur $\mathbb{Z}^{|P|}/(r_1, \ldots, r_{|P|})d\mathbb{Z}$.

Pour tout $\mu_P \in \Lambda_P$ avec $|\mu_P| \ll 1$, introduisons donc la série convergente

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^{|P|}/(r_1,\ldots,r_{|P|})d\mathbb{Z}} (-1)^{|\tau^-(P)|-1} \mathbb{1}(p^{\tau(m)}_{\tau^-(P)} >_{\tau^-(P)} p, p^{\tau(m)}_{\tau^+(P)} \leq_{\tau^+(P)} p) \mu_P^{-1}(m)$$

$$= \widehat{\mathbb{1}}^p_{P,\tau}(\mu_P).$$

L'assertion (i) est évidente sur cette formule. Le fait que la fonction $\widehat{\mathbb{1}}^p_{P,\tau}$ soit rationnelle de dénominateur $\mu_P \mapsto \prod_{1 \leq j < |P|} (\mu_P^{\tau^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau^{-1}(j)})$ et les assertions (ii) et (iii) résultent de ce que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m > n}} z^m = \frac{z^{n+1}}{1-z} \qquad \text{si } |z| < 1 \, ,$$

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \leq n}} z^m = \frac{z^n}{1 - 1/z} = \frac{z^{n+1}}{z-1} \quad \text{si } |z| > 1 \, .$$

□

On prouve de la même façon le second lemme qui précise les résidus des fonctions $\widehat{\mathbb{1}}^p_{P,\tau}$:

LEMME 6. — *Soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone. Alors à tout $Q \in \mathcal{P}_0$ on peut associer une fonction rationnelle*

$$\widehat{\mathbb{1}}^p_Q : \Lambda_Q \to \mathbb{C}$$

ayant pour dénominateur $\mu_Q \mapsto \prod_{1 \leq j < |Q|} (\mu_Q^{j+1} - \mu_Q^j)$, *de telle sorte que :*

(i) *Pour tout $Q \in \mathcal{P}_0$ et tout $\mu_Q^0 \gg 1$ dans $\mathrm{Re}\, \Lambda_Q$, on a l'égalité suivante entre fonctions sur $M_Q(F)N_Q(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$:*

$$(-1)^{|Q|-1} \mathbb{1}(p^{\cdot}_Q >_Q p) = \int_{\mathrm{Im}\, \Lambda_Q} d\mu_Q \cdot \widehat{\mathbb{1}}^p_Q(\mu_Q^0 \mu_Q)(\mu_Q^0 \mu_Q)(\cdot)$$

(ii) *Pour tout $P \in \mathcal{P}_0$, toute permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}$ de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$, tout caractère $\mu_0 \ll 1$ dans $\mathrm{Re}\,\Lambda_P$, toute famille de caractères $\mu_Q^0 \in \mathrm{Re}\,\Lambda_Q$, $\mu_Q^0 \gg 1$ quand $Q \in \mathcal{P}_0$, $\tau(P) \subseteq Q \subseteq \tau^-(P)$, et toute fonction holomorphe $\psi : \Lambda_P \to \mathbb{C}$, on a la formule de résidus*

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\mu_P \cdot \widehat{\mathbb{1}}^p_{P,\tau}(\mu_0\mu_P)\psi(\mu_0\mu_P) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P}_0 \\ \tau(P) \subseteq Q \subseteq \tau^-(P)}} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_Q} d\mu_Q \cdot \widehat{\mathbb{1}}^p_Q(\mu_Q^0\mu_Q)\psi(\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q))$$

où on a noté τ^{-1} chacun des composés $\Lambda_Q \hookrightarrow \Lambda_{\tau(P)} \xrightarrow[\sim]{\tau^{-1}} \Lambda_P$. □

Signalons tout de suite que la propriété du lemme 5 (ii) nous servira à mettre en œuvre le lemme suivant dû à Arthur :

Lemme 7. — *Soient $P \in \mathcal{P}_0$, Ω un domaine dans Λ_P et $(\psi_\tau : \Omega \to \mathbb{C})$ une famille de fonctions holomorphes indexée par l'ensemble $\mathfrak{S}_{|P|}$ des permutations τ de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ et vérifiant la condition de recollement suivante :*

Si $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_{|P|}$ sont deux permutations telles que $\tau_2\tau_1^{-1}$ soit la transposition de deux entiers adjacents ℓ et $\ell + 1$, les deux fonctions ψ_{τ_1} et ψ_{τ_2} prennent la même valeur en tout point $\mu_P \in \Omega$ dont les composantes $\mu_P^{\tau_1^{-1}(\ell+1)} = \mu_P^{\tau_2^{-1}(\ell)}$ et $\mu_P^{\tau_1^{-1}(\ell)} = \mu_P^{\tau_2^{-1}(\ell+1)}$ sont égales.

Alors la fonction

$$\mu_P \mapsto \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}} \frac{\psi_\tau(\mu_P)}{\prod\limits_{1 \leq j < |P|} (\mu_P^{\tau^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau^{-1}(j)})}$$

est partout définie et holomorphe sur Ω.

Démonstration : Il suffit de prouver que pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \{1, 2, \ldots, |P|\}$, $\ell_1 \neq \ell_2$, l'hypersurface définie par l'équation $\mu_P^{\ell_1} = \mu_P^{\ell_2}$ n'est pas singulière pour la fonction considérée.

Or le groupe fini $\mathfrak{S}_{|P|}$ se décompose naturellement comme une réunion disjointe de singletons $\{\tau\}$ et de paires $\{\tau_1, \tau_2\}$ de telle façon que :

- Pour tout singleton $\{\tau\}$ il n'existe pas d'entier ℓ tel que $\{\ell_1, \ell_2\} = \{\tau^{-1}(\ell), \tau^{-1}(\ell+1)\}$ si bien que l'hypersurface $\mu_P^{\ell_1} = \mu_P^{\ell_2}$ n'est pas singulière pour la fonction

$$\mu_P \mapsto \frac{\psi_\tau(\mu_P)}{\prod\limits_{1 \leq j < |P|} (\mu_P^{\tau^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau^{-1}(j)})} \,.$$

• Pour toute paire $\{\tau_1, \tau_2\}$ il existe un unique entier ℓ tel que $\tau_1^{-1}(\ell) = \ell_1 = \tau_2^{-1}(\ell+1)$, $\tau_1^{-1}(\ell+1) = \ell_2 = \tau_2^{-1}(\ell)$ et $\tau_1^{-1}(j) = \tau_2^{-1}(j)$, $\forall j \neq \ell, \ell+1$, si bien que d'après la condition de recollement l'hypersurface $\mu_P^{\ell_1} = \mu_P^{\ell_2}$ n'est pas singulière pour la fonction

$$\mu_P \mapsto \frac{\psi_{\tau_1}(\mu_P)}{\prod\limits_{1 \leq j < |P|} (\mu_P^{\tau_1^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau_1^{-1}(j)})} + \frac{\psi_{\tau_2}(\mu_P)}{\prod\limits_{1 \leq j < |P|} (\mu_P^{\tau_2^{-1}(j+1)} - \mu_P^{\tau_2^{-1}(j)})} .$$

On conclut en faisant la somme. $\square$

e) Calcul des coefficients de Fourier au moyen de l'isométrie de Langlands

Revenons à la situation de la proposition 1 et du lemme 4. Etant donnés $\tau \in \mathfrak{S}_{|P|}$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ et Q un élément de $\mathcal{P}_0$ vérifiant $\tau(P) \subseteq Q \subseteq \tau^{-}(P)$, nous pouvons maintenant calculer le produit hermitien dans $L^2(M_Q(F)N_Q(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ des deux fonctions

$$(-1)^{|Q|-1} \mathbb{1}(p_Q^{\cdot} >_Q p - \alpha p_{\tau(P)}^{\tau(i)}) \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi(\lambda_1)} E_{P,\tau}^Q(\varphi(\lambda_1), \lambda_1)(\cdot)$$

et

$$\int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_2 \cdot \overline{\chi(\lambda_2)} E_{P,\tau}^Q(\varphi, \lambda_2)(\cdot) .$$

D'après le lemme 6 (i), la première de ces deux fonctions s'écrit

$$\int_{\operatorname{Im} \Lambda_Q} d\mu_Q \cdot \widehat{\mathbb{1}}_Q^{p - \alpha p_{\tau(P)}^{\tau(i)}}(\mu_Q^0 \mu_Q) \int_{\operatorname{Im} \Lambda_P} d\lambda_1 \cdot \overline{\chi(\lambda_1)} E_{P,\tau}^Q(\varphi(\lambda_1), \lambda_1)(\cdot)(\mu_Q^0 \mu_Q)(\cdot)$$

pour μ_Q^0 un caractère $\gg 1$ dans $\operatorname{Re} \Lambda_Q$ que l'on choisit très proche de 1. Rappelons ici que l'élément φ et les $\varphi(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in \operatorname{Im} \Lambda_P$, sont dans l'espace $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ où (P, π) est une paire discrète. Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_P$, $\mu_Q^0 \mu_Q \in \Lambda_Q$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{|P|}$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ telle qu'on ait $\tau\sigma(P) \subseteq Q$ en sus de $\tau(P) \subseteq Q$, on voit que la relation d'égalité entre représentations

$$\tau(\pi) \otimes \tau(\lambda_1) \mu_Q^0 \mu_Q = \tau\sigma(\pi) \otimes \tau\sigma(\lambda_2)$$

est équivalente à ce qu'il existe $\lambda_\pi \in \operatorname{Im} \Lambda_P$ tel que

- $(\sigma, \lambda_\pi) \in \operatorname{Fixe}(\pi) \subseteq \operatorname{Aut}_{\mathcal{P}_0}(P) \times \operatorname{Im} \Lambda_P$,
- $\lambda_1 = \sigma(\lambda_2)/\tau^{-1}(\mu_Q^0 \mu_Q) \sigma(\lambda_\pi)$.

D'après le théorème 7 du paragraphe VI.1e, nous obtenons :

LEMME 8. — *Dans la situation de la proposition* 1 *et pour tout caractère* χ *de* $\operatorname{Im}\Lambda_P$*, le coefficient de Fourier explicité dans le lemme* 4 *est égal à la somme*

$$\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\mathrm{Fixe}(\pi)}\ \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{|P|}}\ \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}_0\\ \tau(P),\tau\sigma(P)\subseteq Q\subseteq\tau^-(P)}}$$

$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_Q} d\mu_Q\cdot\widehat{\mathbb{1}}_Q^{p-\alpha p^{\tau(i)}_{\tau(P)}}(\mu_Q^0\mu_Q)\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_P\cdot\chi(\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$
$$< M^{\tau(P)}_{P,\tau}(\varphi(\sigma(\lambda_P)/\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi)),\sigma(\lambda_P)/\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi));$$
$$M^{\tau(P)}_{P,\tau\sigma}(\varphi,\lambda_P)\tau\sigma(\lambda_\pi) >$$

où chaque μ_Q^0 *est un caractère* $\gg 1$ *dans* $\operatorname{Re}\Lambda_Q$ *choisi très proche de* 1 *et* $<\cdot;\cdot>$ *désigne le produit hermitien dans les espaces* $L^2(M_{\tau(P)}(F)N_{\tau(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\tau(\pi))$. ∎

Fixons un élément $(\sigma,\lambda_\pi)\in\mathrm{Fixe}(\pi)$. Nous allons réindexer la somme sur les $\tau\in\mathfrak{S}_{|P|}$ et les $Q\in\mathcal{P}_0$ vérifiant $\tau(P),\tau\sigma(P)\subseteq Q\subseteq\tau^-(P)$ qui apparaît dans ce lemme.

Commençons par introduire τ_σ l'unique permutation de $\{1,2,\dots,|P|\}$ telle que

- τ_σ transforme chacune des orbites de σ en un intervalle de $\{1,2,\dots,|P|\}$,
- τ_σ est croissante sur chacune des orbites de σ,
- pour tous $j_1,j_2\in\{1,2,\dots,|P|\}$, on a l'implication

$$\min\{\sigma^k(j_1),k\in\mathbb{Z}\}<\min\{\sigma^k(j_2),k\in\mathbb{Z}\}\Longrightarrow\tau_\sigma(j_1)<\tau_\sigma(j_2)\ .$$

Pour $Q\in\mathcal{P}_0$ fixé, il existe au plus une permutation $\tau\in\mathfrak{S}_{|P|}$ telle que $\tau(P)$, $\tau\sigma(P)\subseteq Q\subseteq\tau^-(P)$. C'est le cas si et seulement si il existe une permutation $\tau'\in\mathfrak{S}_{|P|}$, nécessairement unique, vérifiant

- $(*)_\sigma$: τ' transforme en intervalle tout intervalle qui est image par τ_σ d'une orbite de σ et τ' est croissante sur tout tel intervalle,
- $\tau'\tau_\sigma(P)$, $\tau'\tau_\sigma\sigma(P)\subseteq Q\subseteq(\tau')^-\tau_\sigma(P)$.

On introduit alors $\tau''\in\mathfrak{S}_{|P|}$ l'unique permutation telle que $\tau=\tau''\tau'\tau_\sigma$.

D'autre part, on notera $P_\sigma\in\mathcal{P}_0$ le plus petit sous-groupe parabolique contenant tous les $\tau_\sigma\sigma^k(P)$, $k\in\mathbb{Z}$. Il est clair que l'ensemble $\{1,2,\dots,|P_\sigma|\}$ s'identifie à celui des orbites de σ et que le groupe $\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}$ des permutations de cet ensemble est en bijection naturelle avec l'ensemble des permutations $\tau' \in \mathfrak{S}_{|P|}$ qui satisfont la condition $(*)_\sigma$ ci-dessus.

Si maintenant $Q \in \mathcal{P}_0$ et $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_{|P|}$ sont deux permutations se correspondant comme ci-dessus avec $\tau = \tau''\tau'\tau_\sigma$, nous pouvons récrire de la manière suivante un certain nombre des termes qui apparaissent dans l'expression du lemme 8 :

• Comme à la fois $\tau(P) \subseteq Q$ et $\tau'\tau_\sigma(P) \subseteq Q$, on a pour tout $\mu_Q^0\mu_Q \in \Lambda_Q$, $\tau''^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q) = \mu_Q^0\mu_Q$ d'où $\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q) = \tau_\sigma^{-1}\tau'^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)$ et aussi $\widehat{\mathbb{1}}_Q^{p-\alpha p_{\tau(P)}^{\tau(i)}}(\mu_Q^0\mu_Q) = \widehat{\mathbb{1}}_Q^{p-\alpha p_{\tau'\tau_\sigma(P)}^{\tau'\tau_\sigma(i)}}(\mu_Q^0\mu_Q)$.

• Comme $\tau''^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q) = \mu_Q^0\mu_Q$ et d'après les théorèmes 5 (iii) et 6 (ii) du paragraphe VI.1d, on a pour tout $\lambda_P \in \operatorname{Im}\Lambda_P$:

$$\begin{aligned}&< M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\varphi(\sigma(\lambda_P)/\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi)),\sigma(\lambda_P)/\tau^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi)); \\ &\qquad\qquad M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\varphi,\lambda_P)\tau\sigma(\lambda_\pi)> \\ &=< M_{P,\tau'\tau_\sigma}^{\tau'\tau_\sigma(P)}(\varphi(\sigma(\lambda_P)/\tau_\sigma^{-1}\tau'^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi)), \\ &\qquad \sigma(\lambda_P)/\tau_\sigma^{-1}\tau'^{-1}(\mu_Q^0\mu_Q)\sigma(\lambda_\pi)) \; ; \; M_{P,\tau'\tau_\sigma\sigma}^{\tau'\tau_\sigma(P)}(\varphi,\lambda_P)\tau'\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi) >\end{aligned}$$

Procédons donc à ces substitutions dans l'expression du lemme 8. Puis, en gardant fixes un élément $(\sigma, \lambda_\pi) \in \operatorname{Fixe}(\pi)$ et une permutation τ', faisons la somme sur tous les $Q \in \mathcal{P}_0$ vérifiant $\tau'\tau_\sigma(P)$, $\tau'\tau_\sigma\sigma(P) \subseteq Q \subseteq (\tau')^-\tau_\sigma(P)$, condition qui est équivalente à $\tau'(P_\sigma) \subseteq Q \subseteq (\tau')^-(P_\sigma)$. D'après la formule de résidus du lemme 6 (ii), nous obtenons :

LEMME 9. — *Dans la situation de la proposition* 1 *et pour tout caractère* χ *de* $\operatorname{Im}\Lambda_P$*, le coefficient de Fourier du lemme* 4 *est égal à la somme*

$$\begin{aligned}&\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\operatorname{Fixe}(\pi)} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}} d\mu_\sigma \cdot \chi(\tau_\sigma^{-1}(\mu_\sigma^0\mu_\sigma)\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P)) \\ &\qquad\qquad \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}(\mu_\sigma^0\mu_\sigma) \\ &< M_{P,\tau\tau_\sigma}^{\tau\tau_\sigma(P)}(\varphi(\sigma(\lambda_P)/\tau_\sigma^{-1}(\mu_\sigma^0\mu_\sigma)\sigma(\lambda_\pi)),\sigma(\lambda_P)/\tau_\sigma^{-1}(\mu_\sigma^0\mu_\sigma)\sigma(\lambda_\pi)) \; ; \\ &\qquad\qquad M_{P,\tau\tau_\sigma\sigma}^{\tau\tau_\sigma(P)}(\varphi,\lambda_P)\tau\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi) >\end{aligned}$$

où, pour tout $(\sigma, \lambda_\pi) \in \operatorname{Fixe}(\pi)$,

• μ_σ^0 *désigne un caractère* $\ll 1$ *dans* $\mathrm{Re}\,\Lambda_{P_\sigma}$*, choisi très proche de* 1*,*

• *le groupe* $\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}$ *des permutations de* $\{1,2,\ldots,|P_\sigma|\}$ *est identifié à l'ensemble des permutations* τ *de* $\{1,2,\ldots,|P|\}$ *qui satisfont la condition* $(*)_\sigma$ *ci-dessus,*

• i_σ *désigne l'indice dans* $\{1,2,\ldots,|P_\sigma|\}$ *qui correspond à l'indice* $\tau_\sigma(i)$ *dans* $\{1,2,\ldots,|P|\}$ *via l'inclusion* $\tau_\sigma(P) \subseteq P_\sigma$*.* □

Nous pouvons améliorer ce résultat en appliquant le lemme 7 :

COROLLAIRE 10. — *Dans la situation de la proposition* 1 *et du lemme* 9*, et pour tout* $(\sigma,\lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi)$*, la fonction sur* $\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times \Lambda_{P_\sigma}$

$$(\lambda_P,\mu_\sigma) \mapsto \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}(\mu_\sigma)$$
$$< M_{P,\tau\tau_\sigma}^{\tau\tau_\sigma(P)}(\varphi(\sigma(\lambda_P)/\tau_\sigma^{-1}(\mu_\sigma)\sigma(\lambda_\pi)),\sigma(\lambda_P)/\tau_\sigma^{-1}(\mu_\sigma)\sigma(\lambda_\pi))\ ;$$
$$M_{P,\tau\tau_\sigma\sigma}^{\tau\tau_\sigma(P)}(\varphi,\lambda_P)\tau\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi) >$$

est bien définie et analytique dans un voisinage de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times \mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}$*.*

De plus, il est loisible dans la formule du lemme 9 *de prendre tous les caractères* μ_σ^0 *égaux à* 1*.*

Démonstration : La seconde assertion résulte de la première et du lemme 9 par déplacement des contours d'intégration.

Quant à la première assertion, elle résulte du lemme 7. En effet, d'après le lemme 5 (ii), la famille de fonctions

$$\mu_\sigma \mapsto \prod_{1\le j<|P_\sigma|} (\mu_\sigma^{\tau^{-1}(j+1)} - \mu_\sigma^{\tau^{-1}(j)})\widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}(\mu_\sigma)\ ,\ \tau\in\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}\ ,$$

vérifie la condition de recollement du lemme 7 et il en est de même des produits hermitiens intervenant en facteurs d'après les théorèmes 5 (iii) et 6 (ii) du paragraphe VI.1d. □

f) Enoncé des résultats

Nous conservons les notations du paragraphe e. Nous arrivons au bout du calcul entrepris dans les paragraphes c et e :

THÉORÈME 11. — *Sous les hypothèses de la proposition* 1*, l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot K_{\varphi(\cdot),\varphi}^{\le p,\alpha,i}(1,1,g)$$

est égale à la somme

$$\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot \sum_{\lambda_\sigma^\pi}$$

$$\lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1 \\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p^{\tau(i_\sigma)}_{\tau(P_\sigma)}} (\tau_\sigma(\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))\mu_\sigma)$$

$$< M_{P,\tau\tau_\sigma}^{\tau\tau_\sigma(P)}(\varphi(\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma), \tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma);$$

$$M_{P,\tau\tau_\sigma\sigma}^{\tau\tau_\sigma(P)}(\varphi, \tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)\tau\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi^\sigma) >$$

où, pour tout $(\sigma,\lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}_0}(P) \times \mathrm{Im}\,\Lambda_P$, *les* λ_π^σ *décrivent un ensemble d'antécédents par l'application* $\lambda_P \mapsto \tau_\sigma(\sigma(\lambda_P)/\lambda_P\sigma(\lambda_\pi))$ *de l'intersection finie de son image avec* $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}$ *dans* $\mathrm{Im}\,\Lambda_{\tau_\sigma(P)}$.

De plus, tous les termes dans cette somme sont périodiques de période $r!d$ *comme fonctions de* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration : L'intégrale $\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(1,1,g)$ est égale à la somme des coefficients de Fourier de la fonction analytique sur $\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times \mathrm{Im}\,\Lambda_P$:

$$(\lambda_1,\lambda_2) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}} dg \cdot K^{\leq p,\alpha,i}_{\varphi(\cdot),\varphi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$$

Or tous les coefficients de Fourier en dehors de ceux explicités dans le lemme 4 sont nuls. Et ces derniers sont calculés dans le lemme 9 et le corollaire 10.

La formule annoncée en résulte si on remarque que, pour tout $(\sigma,\lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi)$ fixé,

- l'homomorphisme $\mathrm{Im}\,\Lambda_P \to \mathrm{Im}\,\Lambda_P \quad \lambda_P \mapsto \sigma(\lambda_P)/\lambda_P$ admet pour noyau $\tau_\sigma^{-1}(\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma})$ et pour image $\tau_\sigma^{-1}(\mathrm{Im}\,\Lambda^{P_\sigma}_{\tau_\sigma(P)})$,
- les deux sous-groupes $\tau_\sigma^{-1}(\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma})$ et $\tau_\sigma^{-1}(\mathrm{Im}\,\Lambda^{P_\sigma}_{\tau_\sigma(P)})$ engendrent $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ et leur intersection est finie.

Pour ce qui est de la périodicité, rappelons que d'après le lemme 5 (iii), il existe un caractère χ^{i_σ} de Λ_{P_σ} tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}$, on ait l'égalité :

$$\widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-(\alpha+1)p^{\tau(i_\sigma)}_{\tau(P_\sigma)}} = \chi^{i_\sigma}\widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p^{\tau(i_\sigma)}_{\tau(P_\sigma)}}$$

On conclut en remarquant que tous les éléments $\tau_\sigma(\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))$ dans $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}$ ont un ordre qui divise $r!d$. □

Ce théorème va nous permettre de donner une expression spectrale pour les traces tronquées $\mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ [resp. $\mathrm{Tr}_{\alpha}^{\leq p}(h)$] du corollaire 2 [resp. du corollaire 2']. Introduisons d'abord une notion commode :

Appelons quadruplet discret tout quadruplet $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ constitué d'une paire discrète (P, π) et d'un couple $(\sigma, \lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}_0}(P) \times \Lambda_P$.

Disons que deux quadruplets discrets $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ et $(P', \pi', \sigma', \lambda'_{\pi'})$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\tau : P \to P'$ dans $\mathcal{P}_0$ et un caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$ tels que $\pi' = \tau(\pi \otimes \lambda_P)$, $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$ et $\lambda'_{\pi'} = \tau(\lambda_\pi \sigma^{-1}(\lambda_P)/\lambda_P)$.

Disons qu'un quadruplet discret $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ est bon si la représentation π est unitaire (d'où nécessairement $\lambda_\pi \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P$) et si les orbites de $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}_0}(P) \subseteq \mathfrak{S}_{|P|}$ agissant sur $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ sont des intervalles. Dans ce cas, on note $P_\sigma \in \mathcal{P}_0$ le plus petit sous-groupe parabolique contenant tous les $\sigma^k(P)$, $k \in \mathbb{Z}$. Et on convient d'identifier le groupe $\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}$ au sous-ensemble de $\mathfrak{S}_{|P|}$ constitué des permutations τ qui transforment en intervalle tout intervalle de $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ qui est une orbite de σ, et qui sont croissantes sur tout tel intervalle.

On remarque que si (P, π) est une paire discrète avec π unitaire et (σ, λ_π) est un fixateur de π, alors, pour $\tau_\sigma \in \mathfrak{S}_{|P|}$ défini comme dans la discussion qui précède l'énoncé du lemme 9, le quadruplet discret $(\tau_\sigma(P), \tau_\sigma(\pi), \tau_\sigma\sigma\tau_\sigma^{-1}, \tau_\sigma(\lambda_\pi))$ est bon. Ainsi toute classe d'équivalence de quadruplets discrets compte-t-elle au moins un bon représentant.

Enfin, si $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ est un quadruplet discret, on note $\mathrm{Fixe}(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ le sous-groupe commutateur de (σ, λ_π) dans $\mathrm{Fixe}(P, \pi)$. On voit que l'ensemble des $(\sigma', \lambda'_\pi) \in \mathrm{Fixe}(P, \pi)$ tels que les quadruplets discrets $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ et $(P, \pi, \sigma', \lambda'_\pi)$ soient équivalents a pour cardinal le quotient $\dfrac{|\,\mathrm{Fixe}(P, \pi)|}{|\,\mathrm{Fixe}(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)|}$.

En combinant le corollaire 2 et le théorème 11 nous obtenons maintenant :

THÉORÈME 12. — *Sous les hypothèses du corollaire 2, la trace tronquée* $\mathrm{Tr}^{\leq p}(h)$ *est égale à la somme*

$$\sum_{(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)} \frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)|} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot \sum_{\lambda_\pi^\sigma}$$

$$\lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1 \\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}^{p}_{P_\sigma,\tau}(\mu_\sigma \sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma \sigma(\lambda_\pi))$$

$$\mathrm{Tr}_{L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_\sigma\lambda_\pi^\sigma)\tau\sigma(\lambda_\pi^\sigma))^{-1}$$

$$\circ M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma) \circ h(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma)]$$

où $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ décrit un ensemble de bons représentants des classes d'équivalence de quadruplets discrets, et les λ_π^σ décrivent un ensemble d'antécédents par l'application $\lambda_P \mapsto \sigma(\lambda_P)/\lambda_P\sigma(\lambda_\pi)$ de l'intersection finie de son image avec $\operatorname{Im} \Lambda_{P_\sigma}$ dans $\operatorname{Im} \Lambda_P$. □

Nous déduisons de même du corollaire 2' et du théorème 11 :

THÉORÈME 12'. — *Sous les hypothèses du corollaire 2′, la trace tronquée $\operatorname{Tr}_\alpha^{\leq p}(h)$ est égale à la somme*

$$\sum_{(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)} \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)|} \sum_{1 \leq i \leq |P|} \int_{\operatorname{Im} \Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot \sum_{\lambda_\pi^\sigma}$$

$$\lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1 \\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p - \alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}(\mu_\sigma \sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma \sigma(\lambda_\pi))$$

$$\operatorname{Tr}_{L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_\sigma\lambda_\pi^\sigma)\tau\sigma(\lambda_\pi^\sigma))^{-1}$$
$$\circ M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma) \circ h^i(\cdot, \lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma)]$$

où les $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ et les λ_π^σ sont comme dans l'énoncé du théorème 12, et où chaque i_σ désigne l'indice dans $\{1, 2, \ldots, |P_\sigma|\}$ qui correspond à l'indice i dans $\{1, 2, \ldots, |P|\}$ via l'inclusion $P \subseteq P_\sigma$.

De plus, tous les termes dans cette somme sont périodiques de période $r!d$ comme fonctions de $\alpha \in \mathbb{R}$. □

3. — Application à la conjecture de Ramanujan-Petersson

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas où $d = 1$, $D = F$ et $\mathcal{D} = \mathcal{O}_X$, avec donc $G = \mathrm{GL}_r$.

a) Composantes locales. Valeurs propres des opérateurs de Hecke

Si T est un ensemble fini de places de F, notons $\mathbb{A}_T$ le produit des F_x, $x \in T$ [resp. $\mathbb{A}^T$ le produit restreint des F_x, $x \in |X|\backslash T$, relativement aux O_x].

Etant donnés $n \geq 1$ un entier, $T_1, \ldots, T_k$ des parties finies deux à deux disjointes de $|X|$ et $T = T_1 \amalg \cdots \amalg T_k$, toutes représentations admissibles $\pi_{T_1}, \ldots, \pi_{T_k}, \pi^T$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{T_1}), \ldots, \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{T_k}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^T)$ induisent une représentation admissible $\pi_{T_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{T_k} \otimes \pi^T = \pi$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, et réciproquement toute représentation admissible irréductible π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ s'écrit de manière unique (à isomorphisme près) sous cette forme et ses composantes $\pi_{T_1}, \dots, \pi_{T_k}, \pi^T$ sont elles-mêmes admissibles irréductibles. En particulier, on peut associer à une telle représentation π une composante locale π_x (qui donc est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_x)$) en toute place x de F.

Rappelons le résultat suivant (déja contenu dans le théorème 5 et la proposition 6 du paragraphe IV.4b) :

PROPOSITION 1. — *Soient x une place de F, $n \geq 1$ un entier, et π_x une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(F_x)$ qui est non ramifiée au sens que le sous-espace des invariants par $\mathrm{GL}_n(O_x)$ n'est pas nul.*

Alors il existe une famille $\{z_1(\pi_x), \dots, z_n(\pi_x)\}$ d'éléments de $\mathbb{C}^\times$, uniquement déterminée à permutation près, telle que, pour tout $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, la fonction de Drinfeld f^t de niveau t sur $\mathrm{GL}_n(F_x)$ vérifie

$$\mathrm{Tr}_{\pi_x}(f^t) = \begin{cases} z_1(\pi_x)^t + \cdots + z_n(\pi_x)^t & \text{si} \quad t \geq 1\ , \\ \left(\dfrac{z_1(\pi_x)}{q^{\deg(x)(n-1)}}\right)^t + \cdots + \left(\dfrac{z_n(\pi_x)}{q^{\deg(x)(n-1)}}\right)^t & \text{si} \quad t \leq -1\ . \end{cases}$$

De plus, dans le cas où la représentation π_x est unitaire, les deux familles $\{\overline{z_1(\pi_x)}, \dots, \overline{z_n(\pi_x)}\}$ et $\left\{\dfrac{q^{\deg(x)(n-1)}}{z_1(\pi_x)}, \dots, \dfrac{q^{\deg(x)(n-1)}}{z_n(\pi_x)}\right\}$ sont égales à permutation près. A fortiori, la famille $\{|z_1(\pi_x)|, \dots, |z_n(\pi_x)|\}$ est symétrique par rapport à la valeur $q^{\deg(x)(n-1)/2}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$. $\square$

Notons que pour toute représentation admissible irréductible π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, ses composantes locales π_x sont non ramifiées en dehors d'un ensemble fini de places x de F et il leur est attaché des familles $\{z_1(\pi_x), \dots, z_n(\pi_x)\}$. Lorsque π est unitaire, il en est de même de toutes ses composantes locales π_x, si bien que la seconde assertion de la proposition 1 s'applique à toutes les π_x non ramifiées.

Pour toute paire discrète (P, π), la représentation admissible isotypique π de $M_P(\mathbb{A})$ est en fait irréductible d'après [Mœglin, Waldspurger, 1989] (à partir du cas cuspidal traité par Shalika). Si $r_1, \dots, r_{|P|}$ désignent les rangs des différents facteurs de M_P, π s'écrit sous la forme $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_{|P|}$ où $\pi_1, \dots, \pi_{|P|}$ sont des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \dots, \mathrm{GL}_{r_{|P|}}(\mathbb{A})$ qu'on peut appeler les composantes de π.

Nous aurons besoin de l'encadrement suivant, dû à Jacquet et Shalika :

PROPOSITION 2. — *Soit π une composante discrète de $L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$, nécessairement unitaire et irréductible comme représentation de $G(\mathbb{A})$.*

On suppose que π est cuspidale.

Alors, pour toute place x de F où la composante locale π_x est non ramifiée, on a

$$q^{-\frac{1}{2}\deg(x)} < \frac{|z_i(\pi_x)|}{q^{\deg(x)(r-1)/2}} < q^{\frac{1}{2}\deg(x)} \ , \ 1 \leq i \leq r \ .$$

□

b) Rappels sur les zéros et pôles des opérateurs d'entrelacement

Nous rassemblons dans la proposition suivante les résultats connus à ce sujet dont nous aurons besoin :

PROPOSITION 3. — *Soient (P, π) une paire discrète avec π unitaire cuspidale, τ la transposition de deux indices adjacents i et $i+1$ dans $\{1, 2, \ldots, |P|\}$, π_i et π_{i+1} les composantes de π d'indices i et $i+1$.*

Alors :

(i) *La famille d'opérateurs*

$$M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P) : L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi) \longrightarrow L^2_\infty(M_{\tau(P)}(F)N_{\tau(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \tau(\pi))$$

est une fraction rationnelle comme fonction de $\lambda_P \in \Lambda_P$ qui ne dépend que du quotient $\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1}$ des deux composantes λ_P^i et λ_P^{i+1} d'indices i et $i+1$ de λ_P.

(ii) *Si un élément $\lambda_P \in \Lambda_P$ est un pôle de cette fraction rationnelle, il vérifie l'un des termes de l'alternative :*

- *ou bien $|\lambda_P^i|/|\lambda_P^{i+1}| < 1$,*
- *ou bien $|\lambda_P^i|/|\lambda_P^{i+1}| = q$ et les deux représentations $\pi_i \otimes (\lambda_P^i/q)^{\deg(\cdot)}$ et $\pi_{i+1} \otimes (\lambda_P^{i+1})^{\deg(\cdot)}$ sont isomorphes.*

(iii) *Si $s \in \mathbb{C}$ est un zéro de la fonction de Rankin-Selberg $s \mapsto L(s, \pi_i \otimes \check{\pi}_{i+1})$, alors s est dans la bande critique $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ et il existe un zéro $\lambda_P \in \Lambda_P$ de la fraction rationnelle de* (i) *tel que $\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1} = q^s$.*

Démonstration : (i) Il est évident sur la définition que la famille d'opérateurs d'entrelacement $M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P)$ ne dépend que de la variable $\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1}$. C'est une fraction rationnelle d'après [Mœglin, Waldspurger, 1994] proposition IV.1.12.

On sait d'autre part (voir par exemple les paragraphes II.1 et II.2 de [Mœglin, Waldspurger, 1989]) qu'en procédant au changement de variable

$\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1} = q^s$, l'opérateur d'entrelacement $M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{L(s, \pi_i \otimes \check{\pi}_{i+1})}{L(1+s, \pi_i \otimes \check{\pi}_{i+1})\varepsilon(s, \pi_i \otimes \check{\pi}_{i+1})} N_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P)$$

où

• l'opérateur d'entrelacement normalisé $N_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P)$ est une fraction rationnelle en la variable $\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1}$ qui, d'après la proposition I.10 de [Mœglin, Waldspurger, 1989] n'a pas de pôle dans le domaine $|\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1}| \geq 1$,

• $\varepsilon(s, \pi_i \otimes \check{\pi}_{i+1})$ est une puissance de q^s,

• $s \mapsto L(s, \pi_i \otimes \check{\pi}_{i+1})$ est une fraction rationnelle en la variable q^s dont les zéros sont dans la bande critique $0 < \operatorname{Re} s < 1$ et dont les pôles sont simples et sont exactement les $s \in \mathbb{C}$ tels que ou bien $\operatorname{Re} s = 0$ et les représentations $\pi_i \otimes q^{s \deg(\cdot)}$ et π_{i+1} sont isomorphes ou bien $\operatorname{Re} s = 1$ et les représentations $\pi_i \otimes q^{(s-1)\deg(\cdot)}$ et π_{i+1} sont isomorphes.

Les assertions (ii) et (iii) s'en déduisent aussitôt. □

c) Rappels sur les spectres discrets, d'après Mœglin et Waldspurger

Le résultat principal de [Mœglin, Waldspurger, 1989] est :

THÉORÈME 4. — *Soit (P, π) une paire discrète avec π unitaire.*

Alors il existe une paire discrète $(\widetilde{P}, \widetilde{\pi})$ avec $\widetilde{P} \subseteq P$ et $\widetilde{\pi}$ unitaire cuspidale, ainsi qu'un caractère $\widetilde{\lambda}$ dans $\operatorname{Re} \Lambda_{\widetilde{P}}^P \subseteq \operatorname{Re} \Lambda_{\widetilde{P}}$ tels que :

• *Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, |P|\}$ et si on considère l'ensemble J_i des indices $j \in \{1, 2, \ldots, |\widetilde{P}|\}$ qui s'envoient sur i via l'inclusion $\widetilde{P} \subseteq P$, toutes les composantes $\widetilde{\pi}_j$, $j \in J_i$, sont égales.*

• *Le $|\widetilde{P}|$-uplet des composantes de $\widetilde{\lambda}$ dans $\mathbb{R}_+^\times$ est la juxtaposition de $|P|$ uplets de longueurs respectives $\#J_1, \ldots, \#J_{|P|}$ qui sont les $\left(q^{\frac{\#J_i - 1}{2}}, q^{\frac{\#J_i - 3}{2}}, \ldots, q^{\frac{1-\#J_i}{2}}\right)$, $1 \leq i \leq |P|$.*

• *Toute fonction dans $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ s'écrit comme un résidu en le point $\widetilde{\lambda} \in \operatorname{Re} \Lambda_{\widetilde{P}}^P$ d'une série d'Eisenstein $\lambda_{\widetilde{P}}^P \mapsto E_{\widetilde{P}}^P(\widetilde{\varphi}, \lambda_{\widetilde{P}}^P)$, $\lambda_{\widetilde{P}}^P \in \Lambda_{\widetilde{P}}^P$, associée à une fonction*

$$\widetilde{\varphi} \in L^2_\infty(M_{\widetilde{P}}(F)N_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \widetilde{\pi}).$$

□

Afin d'exploiter ce résultat, nous aurons besoin de connaître la forme précise des coefficients constants des fonctions de Drinfeld.

PROPOSITION 5. — *Soient $n \geq 1$ un entier, $P \subseteq \mathrm{GL}_n$ un sous-groupe parabolique semi-standard (c'est-à-dire contenant le tore maximal diagonal), N_P le radical unipotent de P, et $M_P = \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_{|P|}}$ le quotient réductif P/N_P.*

Soient x une place de F, dn_x la mesure de Haar sur $N_P(F_x)$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact $N_P(O_x)$, et $\rho_P : P(F_x) \to \mathbb{R}_+^\times$ la racine carrée du caractère modulaire de $P(F_x)$.

Soient $t \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ un entier et f^t [resp. f_i^t, $1 \leq i \leq |P|$] la fonction de Drinfeld en rang n [resp. n_i] et de niveau t sur $\mathrm{GL}_n(F_x)$ [resp. $\mathrm{GL}_{n_i}(F_x)$].

Alors, pour tout $m = (m^1, \ldots, m^{|P|})$ dans $M_P(F_x) = \mathrm{GL}_{n_1}(F_x) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_{|P|}}(F_x)$, on a :

$$\rho_P(m) \int_{N_P(F_x)} dn_x \cdot f^t(mn_x) = \sum_{1 \leq i \leq |P|} q^{\deg(x)\frac{n-n_i}{2}|t|} f_i^t(m^i) \prod_{\substack{1 \leq j \leq |P| \\ j \neq i}} \mathbb{1}(m^j \in \mathrm{GL}_{n_j}(O_x))$$

Démonstration : Voir par exemple [Laumon] proposition 4.2.5. □

d) Enoncé du théorème principal

Notre but est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *A toute composante π_i, $1 \leq i \leq |P|$, d'une représentation unitaire π s'inscrivant dans une paire discrète (P, π), est attaché un nombre (nécessairement unique) $\varepsilon_{\pi_i} \in \{0, \frac{1}{4}\}$ de telle sorte que :*

(i) *Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, |P|\}$, pour toute place x de F en-dehors de T_a où le facteur local $\pi_{i,x}$ de π_i est non ramifié, la famille $\{z_j(\pi_{i,x})\}$ associée à $\pi_{i,x}$ comme dans la proposition 1 vérifie*

$$|z_j(\pi_{i,x})|^{\frac{1}{\deg(x)}} \in q^{\varepsilon_{\pi_i} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \ , \ \forall j \ .$$

(ii) *Pour toute transposition τ de deux indices adjacents i et $i+1$ dans $\{1, 2, \ldots, |P|\}$, la famille d'opérateurs*

$$M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P) : L_\infty^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi) \longrightarrow L_\infty^2(M_{\tau(P)}(F)N_{\tau(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \tau(\pi))$$

qui est une fraction rationnelle en la variable $\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1}$ de $\mathbb{C}^\times$ est telle que tous ses zéros et pôles vérifient

$$|\lambda_P^i/\lambda_P^{i+1}| \in q^{\varepsilon_{\pi_i} - \varepsilon_{\pi_{i+1}} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \ .$$

□

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, donnons-en tout de suite la conséquence suivante :

THÉORÈME 7. —

(i) *Soit* π *une représentation automorphe cuspidale irréductible unitaire de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. *Alors :*

- *Si* r *est impair,* π *vérifie la conjecture de Ramanujan-Petersson, c'est-à-dire que pour toute place* $x \in |X|$ *où* π *est non ramifiée, on a* $|z_i(\pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}} = q^{\frac{r-1}{2}}$, $1 \leq i \leq r$, *et on pose* $\varepsilon_\pi = 0$.

- *Si* r *est pair, ou bien* π *vérifie la conjecture de Ramanujan-Petersson au sens ci-dessus, et on pose* $\varepsilon_\pi = 0$ *; ou bien, pour toute place* $x \in |X|$ *où* π *est non ramifiée, la moitié parmi les* $|z_i(\pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}}$, $1 \leq i \leq r$, *valent* $q^{\frac{r-1}{2}+\frac{1}{4}}$ *et l'autre moitié* $q^{\frac{r-1}{2}-\frac{1}{4}}$, *et on pose* $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$.

(ii) *Etant données deux telles représentations* π_1, π_2 *de* $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{A})$, *tous les zéros de la fonction de Rankin-Selberg* $s \mapsto L(s, \pi_1 \otimes \check{\pi}_2)$ *sont sur la droite* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ *si* $\varepsilon_{\pi_1} = \varepsilon_{\pi_2}$ *et sur les droites* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Re}\, s = \frac{3}{4}$ *si* $\varepsilon_{\pi_1} \neq \varepsilon_{\pi_2}$.

Démonstration :

(i) Quitte à tensoriser π par un caractère unitaire de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$ se factorisant à travers l'homomorphisme de degré, on peut supposer que (G, π) est une paire discrète avec π unitaire cuspidale et appliquer le théorème 6 (i) combiné à l'encadrement de la proposition 2 et à la propriété de symétrie de la proposition 1.

Si $\varepsilon_\pi = 0$, on voit que pour tout $x \in |X| \backslash T_a$ où π est non ramifiée, tous les $|z_i(\pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}}$ valent $q^{\frac{r-1}{2}}$.

Et si $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$, alors pour tout $x \in |X| \backslash T_a$, la moitié des $|z_i(\pi_x)|^{\frac{1}{\deg(x)}}$ valent $q^{\frac{r-1}{2}+\frac{1}{4}}$ et l'autre moitié $q^{\frac{r-1}{2}-\frac{1}{4}}$, ce qui n'est possible que si r est pair.

Comme l'élément $a \in \mathbb{A}^\times$ a pu être choisi de façon que T_a évite n'importe quel sous-ensemble fini strict de $|X|$, (i) est démontré.

(ii) Ici encore et quitte à tensoriser par un caractère, on peut supposer que $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ s'inscrit dans une paire discrète (P, π) avec $r = r_1 + r_2$ et $|P| = 2$.

On conclut en combinant le théorème 6 (ii) et la proposition 3 (iii). $\square$

e) Commencement de la démonstration : Application de la formule des traces d'Arthur-Selberg, du théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et du théorème de pureté de Deligne

Nous allons démontrer le théorème 6 par récurrence sur le rang $r \geq 1$ de $G = \mathrm{GL}_r$. Supposons donc le résultat déjà connu en tous les rangs $< r$ et cherchons à prouver que toutes les paires discrètes (P, π) de G avec π unitaire le vérifient également.

Montrons d'abord qu'en-dehors du cas où $P = G$ et π est unitaire cuspidale, l'hypothèse de récurrence permet d'associer à toute composante π_i de π un unique $\varepsilon_{\pi_i} \in \{0, \frac{1}{4}\}$ satisfaisant la propriété (i). Il faut distinguer deux cas.

Si $|P| \geq 2$, c'est-à-dire si π a plusieurs composantes, π_i est une représentation admissible irréductible d'un $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{A})$ avec $r_i < r$. Et il existe un caractère unitaire ξ de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{A})$ se factorisant à travers l'homomorphisme de degré tel que $\pi_i \otimes \xi$ soit une composante discrète de la représentation $L^2_\infty(\mathrm{GL}_{r_i}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$. On voit que $\varepsilon_{\pi_i} = \varepsilon_{\pi_i \otimes \xi}$ répond à la question posée.

D'autre part, si $P = G$ mais π n'est pas cuspidale, considérons la paire discrète $(\widetilde{P}, \widetilde{\pi})$ avec $\widetilde{\pi}$ unitaire cuspidale et ici nécessairement $|\widetilde{P}| \geq 2$ qui est associée à (P, π) comme dans le théorème 4. Toutes les composantes $\widetilde{\pi}_j$ de $\widetilde{\pi}$ sont égales et il résulte dudit théorème 4 combiné à la proposition 5 que $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\widetilde{\pi}_j}$ vérifie la propriété (i).

Montrons ensuite qu'en-dehors du cas où $|P| = 2$ et π est unitaire cuspidale, l'hypothèse de récurrence entraîne que toute transposition τ de deux indices adjacents i et $i+1$ vérifie la propriété (ii) relativement aux ε_{π_i} et $\varepsilon_{\pi_{i+1}}$ que nous venons d'exhiber. Ici encore il y a deux cas.

Si $|P| \geq 3$, il existe une paire discrète (P', π') d'un $G' = \mathrm{GL}_{r'}$ avec $r' < r$, $|P'| = 2$ et π' unitaire telle que $\pi'_1 = \pi_i \otimes (\mu_P^i)^{\deg(\cdot)}$, $\pi'_2 = \pi_{i+1} \otimes (\mu_P^{i+1})^{\deg(\cdot)}$ pour un certain $\mu_P \in \operatorname{Im} \Lambda_P$. En notant τ' la transposition des deux indices 1 et 2, on voit donc que les deux fractions rationnelles

$$\lambda_P \longmapsto M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_P) : L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi) \longrightarrow L^2_\infty(M_{\tau(P)}(F)N_{\tau(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \tau(\pi))$$

et

$$\lambda_{P'} \longmapsto M_{P',\tau'}^{\tau'(P')}(\cdot, \lambda_{P'}) : L^2_\infty(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi') \longrightarrow L^2_\infty(M_{\tau'(P')}(F)N_{\tau'(P')}(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \tau'(\pi'))$$

ont mêmes zéros et mêmes pôles si $\mu_P^i\lambda_P^i/\mu_P^{i+1}\lambda_P^{i+1} = \lambda_{P'}^1/\lambda_{P'}^2$. Comme $\varepsilon_{\pi_i} = \varepsilon_{\pi'_1}$ et $\varepsilon_{\pi_{i+1}} = \varepsilon_{\pi'_2}$, la paire discrète (P,π) vérifie bien la propriété (ii).

D'autre part, si $|P| = 2$ mais π n'est pas cuspidale, considérons la paire discrète $(\widetilde{P},\widetilde{\pi})$ avec $\widetilde{\pi}$ unitaire cuspidale et ici nécessairement $|\widetilde{P}| \geq 3$ qui est associée à (P,π) comme dans le théorème 4. J_1 et J_2 désignent les sous-ensembles de $\{1,2,\ldots,|\widetilde{P}|\}$ constitués des indices j s'envoyant respectivement sur 1 et 2 via l'inclusion $\widetilde{P} \subseteq P$. Ainsi, quand j décrit J_1 [resp. J_2], les composantes $\widetilde{\pi}_j$ sont-elles toutes égales et a-t-on nécessairement $\varepsilon_{\pi_1} = \varepsilon_{\widetilde{\pi}_j}$ [resp. $\varepsilon_{\pi_2} = \varepsilon_{\widetilde{\pi}_j}$] d'après la proposition 5. Comme la propriété (ii) est déjà connue pour la paire discrète $(\widetilde{P},\widetilde{\pi})$, il résulte du théorème 4 que la paire (P,π) la vérifie également.

Il nous reste à prouver que, pour toute composante discrète cuspidale π de $L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$, il existe $\varepsilon_\pi \in \{0,\frac{1}{4}\}$ vérifiant la propriété (i), et que, pour toute paire discrète (P,π) de G avec $|P| = 2$ et π unitaire cuspidale, la transposition τ des deux indices 1 et 2 vérifie la propriété (ii) relativement à ε_{π_1} et ε_{π_2} déjà définis.

Nous allons déduire cela de la formule de traces que voici :

LEMME 8. — *Soient $I \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini et $K' = K_I = \operatorname{Ker}[\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_I)]$ le sous-groupe ouvert associé de $K = \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$.*

Soient 0 et ∞ deux points fermés de X ou, si l'on préfère, deux places de F, et $\overline{0}$, $\overline{\infty}$ deux points de $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ au-dessus de $0,\infty$. On suppose que 0 et ∞ sont distincts et ne sont pas dans T_a ni dans le support de I.

Soit $f : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}$ la fonction caractéristique de K' que multiplie $\dfrac{1}{\mathrm{vol}(K')} = [K : K']$. Ainsi f s'écrit-elle $f = f_\infty \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0$ où f_∞, f_0 sont les fonctions caractéristiques de $\mathrm{GL}_r(O_\infty)$, $\mathrm{GL}_r(O_0)$ dans $\mathrm{GL}_r(F_\infty)$, $\mathrm{GL}_r(F_0)$ et $f^{\infty,0}$ est une fonction sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^{\infty,0})/a^{\mathbb{Z}}$.

Soit $u \geq 1$ un entier divisible par $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$.

Soit $f_0^{u'}$ [resp. $f_\infty^{-s'}$] la fonction de Drinfeld de niveau $u' = \dfrac{u}{\deg(0)}$ [resp. $-s' = -\dfrac{u}{\deg(\infty)}$] sur $\mathrm{GL}_r(F_0)$ [resp. $\mathrm{GL}_r(F_\infty)$]. Et soit $f^u : G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}$ la fonction $f_\infty^{-s'} \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0^{u'}$ qui est adaptée à l'homomorphisme ε_0 : $\mathbb{A}^\times/O_{\mathbb{A}}^\times \to \mathbb{R}$ $(a_x)_{x\in|X|} \mapsto \deg(0)0(a_0)$.

Alors, pour tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ assez grand en fonction de K' uniquement, la moyenne de la fonction périodique sur $\mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto \mathrm{Lef}_{\mathcal{O}_X}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,u)$$

est égale à la moyenne de la somme de fonctions périodiques

$$\alpha \mapsto \sum_{(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)} \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)|} \sum_{1\leq i\leq |P|} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot \sum_{\lambda_\pi^\sigma}$$

$$\lim_{\substack{\mu_\sigma\mapsto 1\\ \mu_\sigma\in\Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}}(\mu_\sigma\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))$$

$$\operatorname{Tr}_{L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_\sigma\lambda_\pi^\sigma)\tau\sigma(\lambda_\pi^\sigma))^{-1}\circ$$

$$M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\circ(f^u)^i(\cdot,\lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma)]$$

où les notations sont celles des théorèmes 12 *et* 12′ *du paragraphe* VI.2f.

Démonstration du lemme 8 : C'est la combinaison du théorème 1 du paragraphe V.2a et du théorème 12' du paragraphe VI.2f. □

Dans ce qui suit, nous allons fixer le sous-groupe ouvert $K' = K_I$ de K, les places $0,\infty \in |X|$, les points $\overline{0},\overline{\infty}\in X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ainsi qu'un polygone de troncature p assez grand en fonction de K'.

Nous allons nous attacher à préciser le comportement en le multiple u de deg(0) et deg(∞) des différents termes apparaissant dans la formule du lemme 8.

Voyons d'abord le premier terme :

LEMME 9. — *La moyenne de la fonction périodique*

$$\alpha \mapsto \operatorname{Lef}_{\mathcal{O}_X}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,u)$$

est, comme fonction du multiple u de deg(0) *et* deg(∞), *de la forme*

$$\sum_{\lambda\in\{\lambda\}} c_\lambda \lambda^u$$

où chaque c_λ est une constante dans $\mathbb{C}$ et $\{\lambda\}$ est un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{C}^\times$ dont les modules sont dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$.

Démonstration du lemme 9 : La fonction périodique considérée est en escalier (en fait, elle est localement constante en-dehors de $\frac{1}{(r-1)!}\mathbb{Z}$). Il suffit donc de montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ fixé, la fonction $u\mapsto \operatorname{Lef}_{\mathcal{O}_X}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}(f^{\infty,0},u,u)$ est de la forme requise.

Choisissons $J \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini évitant $0,\infty$ et T_a, contenant I comme sous-schéma fermé et tel que le revêtement galoisien

$\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha\leq p}_{\mathcal{O}_X,J}/a^{\mathbb{Z}}$ du champ $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha\leq p}_{\mathcal{O}_X,I}/a^{\mathbb{Z}}$ soit un schéma quasi–projectif lisse sur $\mathbb{F}_q$. La fonction $f = f_\infty \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0$ peut évidemment s'écrire $f = \sum_i c_i \mathbb{1}_{K_J g_i a^{\mathbb{Z}}}$ où les g_i décrivent un ensemble fini de représentants des classes modulo K_J dans K_I, les $\mathbb{1}_{K_J g_i a^{\mathbb{Z}}}$ désignent les fonctions caractéristiques des classes $K_J g_i a^{\mathbb{Z}}$ dans $G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}$ et les c_i sont des nombres rationnels. Chaque g_i induit un automorphisme de $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha\leq p}_{\mathcal{O}_X,J}$ et par définition

$$\begin{aligned}&\mathrm{Lef}^{r,\overline{p}_{\gamma,\alpha}\leq p}_{\mathcal{O}_X}(f^{\infty,0},u,u)\\ &\qquad = \sum_i c_i \,\mathrm{vol}(K_J)|\,\mathrm{Fixe}(g_i\times \mathrm{Frob}^u, \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha\leq p}_{\mathcal{O}_X,J}/a^{\mathbb{Z}} \times_{(X\times X)} (\overline{0},\overline{\infty}))|.\end{aligned}$$

Soit u_0 le p.p.c.m. de $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$. Pour tout g_i fixé et comme l'automorphisme induit est d'ordre fini et commute avec Frob^{u_0}, on voit par un argument de descente qu'existe un schéma quasi-projectif lisse S sur $\mathbb{F}_{q^{u_0}}$ muni d'un isomorphisme $\mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha\leq p}_{\mathcal{O}_X,J}/a^{\mathbb{Z}} \times_{(X\times X)} (\overline{0},\overline{\infty}) \cong S\otimes_{\mathbb{F}_{q^{u_0}}} \overline{\mathbb{F}}_q$ faisant se correspondre $g_i\times\mathrm{Frob}^{u_0}$ et Frob^{u_0}. Pour tout multiple u de $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$, on peut donc écrire $|\,\mathrm{Fixe}(g_i \times \mathrm{Frob}^u, \mathrm{Cht}^{r,\overline{p}_\alpha\leq p}_{\mathcal{O}_X,J}/a^{\mathbb{Z}} \times_{(X\times X)} (\overline{0},\overline{\infty}))| = |\,\mathrm{Fixe}(\mathrm{Frob}^u, S\otimes_{\mathbb{F}_{q^{u_0}}} \overline{\mathbb{F}}_q)|$.

On conclut en combinant le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et le théorème de pureté de Deligne. □

f) Fin de la démonstration : Identification de la forme des différents termes dans la formule des traces

Commençons par expliciter davantage les termes de traces figurant dans l'énoncé du lemme 8 :

LEMME 10. — *Chacune des expressions*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M^{\tau(P)}_{P,\tau\sigma}(\cdot,\lambda_\sigma\lambda^\sigma_\pi)\tau\sigma(\lambda^\sigma_\pi))^{-1}\\ &\qquad\qquad \circ M^{\tau(P)}_{P,\tau}(\cdot,\lambda^\sigma_\pi\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\circ(f^u)^i(\cdot,\lambda^\sigma_\pi\lambda_\sigma/\mu_\sigma)]\end{aligned}$$

apparaissant dans la formule du lemme 8 *est égale à* 0 *si* π *est ramifiée en* 0 *ou* ∞, *et dans le cas contraire est égale à*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M^{\tau(P)}_{P,\tau\sigma}(\cdot,\lambda_\sigma\lambda^\sigma_\pi)\tau\sigma(\lambda^\sigma_\pi))^{-1}\\ &\circ M^{\tau(P)}_{P,\tau}(\cdot,\lambda^\sigma_\pi\lambda_\sigma/\mu_\sigma)]\ ((\lambda^\sigma_\pi)^i(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)^{i_\sigma})^u q^{\frac{r-r_i}{2}u}\sum_k z_k(\pi_{i,0})^{\frac{u}{\deg(0)}}\\ &\sum_{1\leq j\leq |P|}((\lambda^\sigma_\pi)^j(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)^{j_\sigma})^{-u} q^{\frac{r-r_j}{2}u}\sum_\ell z_\ell(\pi_{j,\infty})^{-\frac{u}{\deg(\infty)}} q^{(r_j-1)u}\end{aligned}$$

où $r_1, \dots, r_{|P|}$ désignent les rangs des différents facteurs de M_P.

Démonstration du lemme 10 : Les fonctions de Drinfeld $f_0^{u'}$ et $f_\infty^{-s'}$ sont invariantes par $\mathrm{GL}_r(O_0)$ et $\mathrm{GL}_r(O_\infty)$ respectivement. Donc ou bien $f_0^{u'}$ [resp. $f_\infty^{-s'}$] agit comme 0 au cas où π est ramifiée en 0 [resp. en ∞], ou bien, au cas où π est non ramifiée, elle agit comme sa trace que multiplie l'opérateur induit par la fonction caractéristique f_0 de $\mathrm{GL}_r(O_0)$ [resp. f_∞ de $\mathrm{GL}_r(O_\infty)$]. Comme $f_\infty \otimes f^{\infty,0} \otimes f_0 = f$ est la fonction caractéristique de K' que multiplie $\dfrac{1}{\mathrm{vol}(K')} = [K : K']$, donc induit l'opérateur de projection orthogonale de $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$ sur le sous-espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$, on conclut d'après la proposition 1 combinée à la proposition 5. □

Puis étudions la dépendance en u de ces termes en distinguant plusieurs cas :

LEMME 11. — *Pour tout quadruplet discret $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ qui est bon et ne s'inscrit pas dans l'un des deux cas suivants :*
- *$P = G$ et π est unitaire cuspidale,*
- *$|P| = 2$, π est unitaire cuspidale et σ est la permutation identique des deux indices 1 et 2,*

et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, |P|\}$, la moyenne de l'expression du lemme 8

$$\alpha \mapsto \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot \sum_{\lambda_\pi^\sigma} \lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1 \\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}} (\mu_\sigma \sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma \sigma(\lambda_\pi))$$
$$\mathrm{Tr}_{L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)} [(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_\sigma \lambda_\pi^\sigma) \tau\sigma(\lambda_\pi^\sigma))^{-1}$$
$$\circ M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot, \lambda_\pi^\sigma \lambda_\sigma/\mu_\sigma) \circ (f^u)^i(\cdot, \lambda_\pi^\sigma \lambda_\sigma/\mu_\sigma)]$$

est, pour tout multiple u assez grand de $\deg(0)$ *et* $\deg(\infty)$, *de la forme*

$$\sum_{\lambda \in \{\lambda\}} c_\lambda \lambda^u$$

où chaque c_λ est une constante dans $\mathbb{C}$ et $\{\lambda\}$ est un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{C}^\times$ dont les modules sont dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$.

Démonstration du lemme 11 : D'après le lemme 10, on peut se limiter au cas où π est non ramifiée en 0 et ∞, et il suffit de prouver que la moyenne de chacune des fonctions périodiques

$$\alpha \mapsto z_k(\pi_{i,0})^{\frac{u}{\deg(0)}} z_\ell(\pi_{j,\infty})^{-\frac{u}{\deg(\infty)}} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma \cdot (\lambda_\sigma^{i_\sigma}/\lambda_\sigma^{j_\sigma})^u$$

$$\lim_{\substack{\mu_\sigma \mapsto 1 \\ \mu_\sigma \in \Lambda_{P_\sigma}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{|P_\sigma|}} \widehat{\mathbb{1}}_{P_\sigma,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P_\sigma)}^{\tau(i_\sigma)}} (\mu_\sigma \sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma \sigma(\lambda_\pi))$$
$$\mathrm{Tr}_{L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_\sigma\lambda_\pi^\sigma)\tau\sigma(\lambda_\pi^\sigma))^{-1}$$
$$\circ M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_\pi^\sigma\lambda_\sigma/\mu_\sigma)]$$

a la forme requise dès lors que u est assez grand.

Or nous savons déjà que $|z_k(\pi_{i,0})|^{\frac{1}{\deg(0)}} \in q^{\varepsilon_{\pi_i}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ et $|z_\ell(\pi_{j,\infty})|^{\frac{1}{\deg(\infty)}} \in q^{\varepsilon_{\pi_j}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$.

Si $i_\sigma = j_\sigma$, i et j sont dans la même orbite de σ si bien que $\varepsilon_{\pi_i} = \varepsilon_{\pi_j}$ et on a terminé.

Si au contraire $i_\sigma \neq j_\sigma$, déplaçons le contour d'intégration $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}$ dans l'opérateur $\displaystyle\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} d\lambda_\sigma\cdot$ de façon à faire tendre le quotient $\lambda_\sigma^{i_\sigma}/\lambda_\sigma^{j_\sigma}$ vers 0. D'après le lemme 7 du paragraphe VI.2d, les seules singularités que l'on rencontre sont celles induites par les pôles des $\lambda_\sigma \mapsto M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_\sigma\lambda_\pi^\sigma)$ et par les zéros des $\lambda_\sigma \mapsto M_{P,\tau\sigma}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_\sigma\lambda_\pi^\sigma)$. Rappelons-nous aussi que tout opérateur d'entrelacement s'écrit comme un composé d'opérateurs d'entrelacement associés à de simples transpositions d'indices adjacents, opérateurs dont nous savons situer les zéros et les pôles.

Ainsi tous les sous-espaces apparaissant dans la formule des résidus doivent-ils satisfaire des équations de la forme $\lambda_\sigma^{i_\sigma^0}/\lambda_\sigma^{i_\sigma^1} = \lambda_1$, $\lambda_\sigma^{i_\sigma^1}/\lambda_\sigma^{i_\sigma^2} = \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma^{i_\sigma^{n-1}}/\lambda_\sigma^{i_\sigma^n} = \lambda_n$ avec $i = i^0, i^1, i^2, \ldots, i^{n-1}, i^n = j$ des indices dans $\{1,2,\ldots,|P|\}$ et $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ des coefficients dans $\mathbb{C}^\times$ qui vérifient $|\lambda_1| \in q^{\varepsilon_{\pi_{i^0}}-\varepsilon_{\pi_{i^1}}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}, \ldots, |\lambda_n| \in q^{\varepsilon_{\pi_{i^{n-1}}}-\varepsilon_{\pi_{i^n}}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$. Quant aux résidus à l'infini, ils sont nuls si u est assez grand. D'où la conclusion. □

LEMME 12. — *Soit $(P,\pi,\sigma,\lambda_\pi)$ un quadruplet discret tel que $P = G$ (si bien que σ est la permutation identique de $\{1\}$ et $P_\sigma = G$) et que π soit unitaire cuspidale.*

Alors, quand λ_σ parcourt le groupe fini $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma} = \mathrm{Im}\,\Lambda_G$, chacune des expressions
$$\mathrm{Tr}_{L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[f^u(\cdot,\lambda_\sigma)]$$
est égale à 0 si π est ramifiée en 0 ou ∞, et dans le cas contraire est égale à

$$\dim_{\mathbb{C}} L^2_{K'}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi) \sum_k z_k(\pi_0)^{\frac{u}{\deg(0)}} q^{(r-1)u} \sum_\ell z_\ell(\pi_\infty)^{-\frac{u}{\deg(\infty)}} .$$

Démonstration du lemme 12 : C'est un cas particulier du lemme 10. $\square$

LEMME 13. — *Soit $(P, \pi, \sigma, \lambda_\pi)$ un quadruplet discret tel que $|P| = 2$, que σ soit la permutation identique de $\{1, 2\}$ (avec donc $P_\sigma = P$) et que π soit unitaire cuspidale.*

On considère la moyenne de la fonction périodique

$$\alpha \mapsto \sum_{i=1,2} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \lim_{\substack{\mu_P \mapsto 1 \\ \mu_P \in \Lambda_P}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_2} \widehat{\mathbb{1}}_{P,\tau}^{p-\alpha p_{\tau(P)}^{\tau(i)}}(\mu_P/\lambda_\pi)$$
$$\operatorname{Tr}_{L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[(M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_P))^{-1} \circ M_{P,\tau}^{\tau(P)}(\cdot,\lambda_P/\mu_P)$$
$$\circ (f^u)^i(\cdot,\lambda_P/\mu_P)] \ .$$

Alors on a suivant les cas :

(i) *Si π est ramifiée en 0 ou ∞, cette moyenne vaut 0.*

(ii) *Si π est non ramifiée en 0 et ∞ et si $\lambda_\pi \neq 1$, cette moyenne est, pour tout multiple u assez grand de* deg(0) *et* deg(∞), *de la forme*

$$\sum_{\lambda \in \{\lambda\}} c_\lambda \lambda^u$$

où chaque c_λ est une constante dans $\mathbb{C}$ et $\{\lambda\}$ est un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{C}^\times$ dont les modules sont dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$.

(iii) *Si π est non ramifiée en 0 et ∞ et si $\lambda_\pi = 1$, cette moyenne est, pour tout multiple u assez grand de* deg(0) *et* deg(∞), *de la forme*

$$\sum_{\lambda \in \{\lambda\}} c_\lambda \lambda^u + \sum_{\lambda \in \{\lambda\}^\pi_{K'}} c'_\lambda \lambda^u \sum_{z \in Z_\lambda} z^u$$

où

- *chaque c_λ est une constante dans $\mathbb{C}$ et $\{\lambda\}$ est un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{C}^\times$ dont les modules sont dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$,*
- *$\{\lambda\}^\pi_{K'}$ désigne l'ensemble fini des $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tels que $|\lambda| < 1$ et que λ s'écrive $\lambda = \lambda_P^1/\lambda_P^2$ ou λ_P^2/λ_P^1 pour λ_P un élément de Λ_P en lequel l'opérateur $M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P) : L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi) \to L^2_{K'}(M_{\tau_0(P)}(F)N_{\tau_0(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\tau_0(\pi))$ associé à la transposition τ_0 des deux indices 1 et 2 admette un zéro ou un pôle,*

• *pour tout* $\lambda \in \{\lambda\}^{\pi}_{K'}$, c'_λ *est une constante réelle* < 0, *et* Z_λ *est un ensemble fini non vide d'éléments de* $\mathbb{C}^\times$ *dont l'ensemble des modules est contenu dans* $q^{\varepsilon_{\pi_1}-\varepsilon_{\pi_2}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ *et symétrique par rapport à* q^{r-1}.

Démonstration du lemme 13 :

(i) est une conséquence immédiate du lemme 10.

(ii) D'après le lemme 10, la fonction considérée s'écrit encore

$$\alpha \mapsto \sum_{i=1,2} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_2} \widehat{\mathbb{1}}_{P,\tau}^{p-\alpha p^{\tau(i)}_{\tau(P)}}(1/\lambda_\pi)$$
$$\dim_{\mathbb{C}} L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$$
$$(\lambda_P^i)^u q^{\frac{r-r_i}{2}u} \sum_k z_k(\pi_{i,0})^{\frac{u}{\deg(0)}} \sum_{j=1,2} (\lambda_P^j)^{-u} q^{\frac{r-r_j}{2}u}$$
$$\sum_\ell z_\ell(\pi_{j,\infty})^{-\frac{u}{\deg(\infty)}} q^{(r_j-1)u}$$

si r_1 et r_2 désignent les rangs des deux facteurs de M_P. C'est donc une somme sur les deux indices $i,j \in \{1,2\}$. Examinons chaque terme isolément.

Quand $i \neq j$, on peut déplacer le contour d'intégration $\operatorname{Im}\Lambda_P$ dans l'opérateur $\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot$ de façon à faire tendre λ_P^i/λ_P^j vers 0 et on ne rencontre jamais de singularité, si bien que ce terme est nul dès lors que u est assez grand.

Et quand $i = j$, le terme a la forme requise puisque $|z_k(\pi_{i,0})|^{\frac{1}{\deg(0)}} \in q^{\varepsilon_{\pi_i}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}, \forall k$ et $|z_\ell(\pi_{j,\infty})|^{\frac{1}{\deg(\infty)}} \in q^{\varepsilon_{\pi_j}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}, \forall \ell$ avec ici $\varepsilon_{\pi_i} = \varepsilon_{\pi_j}$.

(iii) Notons $\lambda_P \mapsto M^{\tau_0(P)}_{P,\tau_0}(\cdot,\lambda_P)'$ la dérivée de la fraction rationnelle $\lambda_P \mapsto M^{\tau_0(P)}_{P,\tau_0}(\cdot,\lambda_P)$ en la variable λ_P^1/λ_P^2.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $i \in \{1,2\}$, les deux fonctions $\mu_P \mapsto \widehat{\mathbb{1}}_{P,\mathrm{id}}^{p-\alpha p_P^i}(\mu_P)$ et $\mu_P \mapsto \widehat{\mathbb{1}}_{P,\tau_0}^{p-\alpha p^{\tau_0(i)}_{\tau_0(P)}}(\mu_P)$ s'écrivent chacune comme le quotient d'une puissance de μ_P^1/μ_P^2 par $1-\mu_P^1/\mu_P^2$ et $\mu_P^1/\mu_P^2 - 1$ respectivement.

On déduit facilement de cette remarque et du lemme 10 que la moyenne de la fonction considérée s'écrit comme la somme de

$$\sum_{i,j=1,2} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \operatorname{Tr}_{L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)} [M^{\tau_0(P)}_{P,\tau_0}(\cdot,\lambda_P)^{-1} \circ M^{\tau_0(P)}_{P,\tau_0}(\cdot,\lambda_P)']$$
$$(\lambda_P^i)^u q^{\frac{r-r_i}{2}u} \sum_k z_k(\pi_{i,0})^{\frac{u}{\deg(0)}} (\lambda_P^j)^{-u} q^{\frac{r-r_j}{2}u} \sum_\ell z_\ell(\pi_{j,\infty})^{-\frac{u}{\deg(\infty)}} q^{(r_j-1)u}$$

et d'une constante fois

$$\sum_{i=1,2} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \dim_{\mathbb{C}} L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}}, \pi)$$

$$(\lambda_P^i)^u q^{\frac{r-r_i}{2}u} \sum_k z_k(\pi_{i,0})^{\frac{u}{\deg(0)}} (\lambda_P^j)^{-u} q^{\frac{r-r_j}{2}u} \sum_\ell z_\ell(\pi_{j,\infty})^{-\frac{u}{\deg(\infty)}} q^{(r_j-1)u}.$$

Le second terme est de la forme rencontrée dans (ii) et pourra être rangé dans la partie $\sum_{\lambda\in\{\lambda\}} c_\lambda \lambda^u$ de l'expression cherchée.

Pour ce qui est du premier terme, remarquons déjà que pour tout (i,j) la famille des modules

$$\left\{ q^{\frac{r-r_i}{2}} |z_k(\pi_{i,0})|^{\frac{1}{\deg(0)}} q^{\frac{r-r_j}{2}} |z_\ell(\pi_{j,\infty})|^{-\frac{1}{\deg(\infty)}} q^{r_j-1} \right\}_{k,\ell}$$

est contenue dans $q^{\varepsilon_{\pi_i}-\varepsilon_{\pi_j}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ et qu'elle est symétrique par rapport à q^{r-1} d'après la proposition 1. Puis distinguons suivant le couple (i,j).

Si $i=j$, on voit que l'expression obtenue peut à son tour être rangée dans la partie $\sum_{\lambda\in\{\lambda\}} c_\lambda \lambda^u$.

Et quand $(i,j)=(1,2)$ [resp. $(2,1)$], déplaçons le contour d'intégration $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ dans l'opérateur $\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_P\cdot$ de façon à faire tendre λ_P^1/λ_P^2 [resp. λ_P^2/λ_P^1] vers 0. Ceci fait apparaître les résidus de la fraction rationnelle

$$\lambda_P \mapsto \mathrm{Tr}_{L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P)^{-1} \circ M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P)']$$

en les $\lambda_P \in \Lambda_P$ vérifiant $|\lambda_P^1/\lambda_P^2| < 1$ [resp. $|\lambda_P^2/\lambda_P^1| < 1$]. Or on vérifie aisément que ladite fraction rationnelle n'est autre que la dérivée logarithmique du déterminant

$$\lambda_P \mapsto \det(M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P))$$

pour n'importe quel choix de bases dans $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)$ et $L^2_{K'}(M_{\tau_0(P)}(F)N_{\tau_0(P)}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\tau_0(\pi))$. D'autre part, les résidus à l'infini s'annulent dès lors que u est assez grand et, pour $(i,j)=(1,2)$ [resp. $(2,1)$], l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_P \cdot \mathrm{Tr}_{L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)}[M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P)^{-1}$$
$$\circ M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P)'](\lambda_P^i/\lambda_P^j)^u$$

est égale à la somme

$$-\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{C}^\times\\|\lambda|<1}} n_\lambda \lambda^u \quad [\text{resp. } \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{C}^\times\\|\lambda|>1}} n_\lambda\lambda^{-u}]$$

où chaque n_λ désigne l'ordre en le point $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ de la fraction rationnelle $\lambda_P \mapsto \det(M_{P,\tau_0}^{\tau_0(P)}(\cdot,\lambda_P))$ en la variable λ_P^1/λ_P^2. On voit que tous les coefficients sont des entiers négatifs sauf quand $|\lambda| < 1$ et $n_\lambda < 0$ [resp. $|\lambda| > 1$ et $n_\lambda > 0$], mais d'après la proposition 3 (ii) du paragraphe VI.3b (complétée par l'équation fonctionnelle des opérateurs d'entrelacement), un tel terme ne peut exister qu'avec $|\lambda| = q^{-1}$ [resp. $|\lambda| = q$] et $\varepsilon_{\pi_1} = \varepsilon_{\pi_2}$ si bien qu'on peut le ranger dans la partie $\sum\limits_{\lambda\in\{\lambda\}} c_\lambda\lambda^u$. D'où la conclusion.

$\square$

Fin de la démonstration du théorème 6 : Rassemblons les renseignements contenus dans les lemmes 8, 9, 11, 12 et 13. On obtient une identité de la forme

$$\sum_\pi c_\pi \dim_{\mathbb{C}} L^2_{K'}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi)\sum_k z_k(\pi_0)^{\frac{u}{\deg(0)}} q^{(r-1)u}\sum_\ell z_\ell(\pi_\infty)^{-\frac{u}{\deg(\infty)}}$$
$$+\sum_{(P,\pi)}\sum_{\lambda\in\{\lambda\}^\pi_{K'}} c'_\lambda\lambda^u\sum_{z\in Z_\lambda} z^u = \sum_{\lambda\in\{\lambda\}} c_\lambda\lambda^u$$

pour tout multiple u assez grand de $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$, où

- π décrit un ensemble de représentants des classes de composantes discrètes cuspidales de $L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}})$ qui sont non ramifiées en 0 et ∞,
- (P,π) décrit un ensemble de représentants des classes de paires discrètes (P,π) avec $|P| = 2$ et π unitaire cuspidale non ramifiée en 0 et ∞,
- les ensembles finis $\{\lambda\}^\pi_{K'}$ et Z_λ, $\lambda \in \{\lambda\}^\pi_{K'}$, sont définis comme dans le lemme 13 (iii),
- les c_π sont des constantes réelles > 0, les c'_λ des constantes réelles < 0, et les c_λ des constantes complexes,
- $\{\lambda\}$ est un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{C}^\times$ dont les modules sont dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$.

De cette identité, nous déduisons que pour toute π vérifiant $L^2_{K'}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/a^{\mathbb{Z}},\pi) \neq 0$, on a

$$|z_k(\pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}}|z_\ell(\pi_\infty)|^{\frac{1}{\deg(\infty)}} \in q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\ ,\ \forall k,\ell\ ,$$

et que pour toute (P, π), on a

$$|\lambda| \in q^{\varepsilon_{\pi_1} - \varepsilon_{\pi_2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \ , \ \forall \lambda \in \{\lambda\}^{\pi}_{K'} \ .$$

En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Commençons par nour rappeler que chaque famille $\{|z_k(\pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}}\}_k$ ou $\{|z_\ell(\pi_\infty)|^{\frac{1}{\deg(\infty)}}\}_\ell$ est symétrique par rapport à $q^{\frac{r-1}{2}}$, qu'aussi chaque famille $\{|z|, z \in Z_\lambda\}$, $\lambda \in \{\lambda\}^{\pi}_{K'}$, est contenue dans $q^{\varepsilon_{\pi_1} - \varepsilon_{\pi_2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ et symétrique par rapport à q^{r-1} et que tous les $|\lambda|$, $\lambda \in \{\lambda\}^{\pi}_{K'}$, sont < 1. Puis considérons la famille réunion disjointe de tous les $|z_k(\pi_0)|^{\frac{1}{\deg(0)}} q^{r-1} |z_\ell(\pi_\infty)|^{-\frac{1}{\deg(\infty)}}$ qui ne sont pas dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ ainsi que la famille réunion disjointe de tous les $\{\lambda z, z \in Z_\lambda\}$ qui ne sont pas contenus dans $q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$. Il résulte de l'identité ci-dessus que ces deux familles sont égales à permutation près. Or la moyenne géométrique de la première est q^{r-1} et celle de la seconde est $< q^{r-1}$. Il y a contradiction.

Comme on peut choisir arbitrairement le sous-groupe ouvert $K' = K_I$ de K et les places 0 et ∞, on a terminé. $\square$

Bibliographie

[E.G.A.] Eléments de Géométrie Algébrique, par Alexandre Grothendieck et Jean Dieudonné ; Publications mathématiques de l'I.H.E.S., n^{os} 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[F.G.A.] Fondements de la Géométrie Algébrique, par Alexandre Grothendieck ; Séminaire Bourbaki, secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[S.G.A.4] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, dirigé par Alexandre Grothendieck et alii ; Théorie des topos et cohomologie étale des schémas ; Exposé XVIII : La formule de dualité globale, par Pierre Deligne ; Springer lecture notes, volume 305, 1973.

[Arthur J., 1978] A trace formula for reductive groups I : terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$, Duke Mathematical Journal 45.

[Bourbaki N., 1958] Eléments de mathématique : Algèbre ; Hermann.

[Cartier P., 1979] Representations of p–adic groups : A survey ; In : Corvallis conference on automorphic forms, representations and L–functions, I ; Proceedings of symposia in pure mathematics, volume 33.

[Curtis C.W. et Reiner I., 1981] Methods of representation theory : with applications to finite groups and orders, I ; Wiley.

[Deligne P., 1980] La conjecture de Weil II, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 52.

[Drinfeld V.G., 1976] Commutative subrings of certain noncommutative rings ; Functional analysis and its applications 10.

[Drinfeld V.G., 1978] Langlands' conjecture for GL(2) over functional fields ; Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki.

[Drinfeld V.G., 1987] Varieties of modules of F–sheaves ; Functional analysis and its applications 21.

[Drinfeld V.G., 1988] The proof of Petersson's conjecture for GL(2) over a global field of characteristic p : Functional analysis and its applications 22.

[Flicker Y. et Kazhdan D., 1989] Geometric Ramanujan conjecture and

Drinfeld reciprocity law, in :Number theory, trace formulas and discrete groups, Academic Press.

[Gelbart S. et Jacquet H., 1979] Forms of GL(2) from the analytic point of view ; In : Corvallis conference on automorphic forms, representations and L–functions, I ; Proceedings of symposia in pure mathematics, volume 33.

[Harder G. et Narasimhan M.S., 1975] On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves ; Mathematische Annalen 212.

[Howe R., 1974] The Fourier transform and germs of characters (case of GL_n over a p–adic field) ; Mathematische Annalen 208.

[Illusie L., 1971] Complexe cotangent et déformations, I ; Springer lecture notes, volume 239.

[Jacobson N., 1985] Basic algebra, I, II ; Freeman.

[Jacquet H., Piatetski-Shapiro L. et Shalika J., 1983] Rankin–Selberg convolutions, American Journal of Mathematics 105.

[Jacquet H. et Shalika J., 1981] On Euler products and the classification of automorphic representations I, II, American Journal of Mathematics 103.

[Laumon G., 1995] Cohomology of Drinfeld modular varieties, I, II ; Cambridge University Press.

[Laumon G. et Moret–Bailly L., 1993] Champs algébriques ; Prépublication de l'Université de Paris–Sud.

[Laumon G., Rapoport M. et Stuhler U., 1993] $\mathcal{D}$–elliptic sheaves and the Langlands correspondence ; Inventiones mathematicae 113.

[Mœglin C. et Waldspurger J.–L., 1989] Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 22.

[Mœglin C. et Waldspurger J.–L., 1994] Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, Une paraphrase de l'écriture, Birkhäuser.

[Mumford D., 1970] Abelian varieties ; Oxfòrd University Press.

[Rogawski J., 1983] Representations of $\mathrm{GL}(n)$ and division algebras over a p–adic field ; Duke mathematical journal 50.

[Seshadri C.S., 1982] Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques ; Astérisque 96, Société Mathématique de France.

[Shahidi F., 1988] Automorphic L–functions, a survey ; In : Automorphic forms, Shimura varieties and L–functions, I ; Proceedings of a conference held at the University of Michigan, Ann Arbor ; Academic Press.

[Stuhler U., 1986] p–adic homogeneous spaces and moduli problems ; Mathematische Zeitschrift 192.

[Waldspurger J.–L., 1985] Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie ; Compositio mathematicae 54.

[Weil A., 1982] Adeles and algebraic groups ; Birkhäuser.

L. LAFFORGUE
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématique, Bât. 425
91405 Orsay Cédex (France)