Astérisque

ANNE BROISE

Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites

Astérisque, tome 238 (1996), p. 1-109
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__238__R1_0>

238 ASTÉRISQUE

1996

ÉTUDES SPECTRALES D'OPÉRATEURS DE TRANSFERT ET APPLICATIONS

Anne BROISE, Françoise DAL'BO et Marc PEIGNÉ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Les deux articles de ce volume sont consacrés à l'étude de deux aspects différents de systèmes dynamiques hyperboliques pour des situations explicites. Le premier article aborde les propriétés stochastiques des sommes de Birkhoff d'une fonction régulière le long des trajectoires d'une transformation dilatante T de l'intervalle, la mesure de référence étant la mesure de Lebesgue. Le deuxième article considère l'asymptotique du nombre de trajectoires périodiques ; la situation considérée est celle du flot géodésique sur certaines surfaces à courbure négative, non compactes mais d'aire finie. Les deux aspects sont étudiés par une méthode commune, celle de la théorie spectrale des opérateurs de transfert.

Dans le premier cas cet opérateur n'est autre que l'adjoint P de la transformation T par rapport à la mesure de Lebesgue ; si f est la fonction régulière donnée, l'étude de la loi des sommes de Birkhoff $S_n(x) = \sum_0^{n-1} f \circ T^k(x)$ se ramène à celle de l'itération des opérateurs « transformés de Fourier » P_λ définis par $P_\lambda \varphi = P\left[e^{i\lambda f}\varphi\right]$. Les deux problèmes principaux étudiés sont celui du théorème central limite et celui du théorème limite local. L'étude du premier problème met en jeu la famille des opérateurs P_λ pour λ petit ; elle est menée sous des conditions très générales concernant la partition (dénombrable) de l'intervalle définie par T et elle aboutit à un théorème central limite avec reste de la forme $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Une difficulté importante qui apparaît et est contournée, est le manque d'informations précises sur la densité de la mesure T-invariante dans le cas d'une partition dénombrable. Dans l'étude du théorème local il est essentiel de contrôler le spectre P_λ pour tout λ réel ; ceci dépend d'une inégalité fonctionnelle introduite pour $\lambda = 0$ par Doeblin et Fortet dans l'étude des chaînes à liaisons complètes. Cette étude met en évidence certaines équations fonctionnelles satisfaites par f qui sont discutées en utilisant les points périodiques de T. L'article se présente comme un travail de synthèse et les principaux résultats nouveaux sont relatifs au cas d'une partition dénombrable comme celle par exemple de la transformation « en fraction continue ».

Le deuxième article est basé sur la méthode du codage et la représentation du flot géodésique comme flot spécial au-dessus d'une certaine transformation dilatante T définie sur le bord du disque ; cette transformation traduit la dynamique du groupe fondamental sur le bord et est analogue à la transformation en « fraction continue ». Le principal résultat dit que le nombre de géodésiques fermées de longueur au plus a est équivalent à $\frac{e^{ha}}{ha}$ où h est l'exposant critique de la série de Poincaré correspondante, comme dans le cas général des surfaces compactes. Le nombre de géodésiques fermées de longueur au plus a s'exprime à l'aide des potentiels (ou de la résolvante) de l'opérateur adjoint de T par rapport à la mesure naturelle. L'asymptotique recherchée dépend alors d'une étude précise du spectre d'opérateurs de la forme P_λ pour tout λ réel. La fonction f qui intervient ici est la fonction plafond du flot spécial et contrairement à la situation précédente, elle est bornée mais de taille contrôlée. La situation géométrique explicite permet l'étude du spectre P_λ ; elle fait appel en particulier à la propriété de mélange du flot géodésique qui se trouve donc établie au cours de cette étude. Les difficultés principales sont liées à la non compacité de la surface qui se traduit ici par le fait que la fonction f est non bornée et la partition associée à T infinie. L'article se présente comme une première étape de l'étude de ce sujet complexe par la méthode des opérateurs de transfert. Ce sujet est étudié par de très nombreux auteurs, en général par la méthode de la fonction zêta ou bien par la formule des traces. On peut, par exemple, citer le travail de Parry et Pollicott qui fait l'objet d'un volume de cette série où l'on trouvera de nombreuses références. L'étude prend comme point de départ le cas de la formule modulaire qui a l'avantage de se prêter à une étude très explicite ; le résultat obtenu est nouveau dans le cas considéré par les auteurs d'une perturbation de la courbure constante et la méthode peut s'étendre de manière beaucoup plus générale. Clairement, il s'agit là de cas très particuliers où l'asymptotique mentionnée plus haut reste valable. Le domaine de validité d'une telle asymptotique n'est pas entièrement connu mais la méthode des opérateurs de transfert permet au moins d'aborder cette question pour les variétés non compactes géométriquement finies même en courbure variable.

Dans de nombreuses situations naturelles, la présence de singularités ne permet pas l'application immédiate du formalisme thermodynamique. La méthode des opérateurs de transfert est cependant assez souple pour permettre des variantes comme celles développées ici. Elle permet aussi de traduire de manière analytique certaines propriétés géométriques, elle admet des interprétations probabilistes utiles et son formalisme s'étend naturellement au cas où la fonction f est à valeurs matricielles au lieu d'être à valeurs réelles comme c'est en particulier le cas dans l'étude des produits de matrices aléatoires. Elle est donc susceptible d'applications nouvelles dans des situations de type hyperbolique de plus grande dimension.

Y. Guivarc'h

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE ET THÉORÈMES LIMITES

Anne BROISE

On fait ici un travail de synthèse sur les transformations dilatantes de l'intervalle ayant une partition finie ou dénombrable. On montre l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue pour une classe de transformations dilatantes plus large que celle étudiée habituellement. Ensuite, on montre des théorèmes limites central et local, on donne la vitesse de convergence et des conditions d'annulation de la variance basées sur les points périodiques de la transformation. On précise les théorèmes limites obtenus par des théorèmes de grands écarts. Enfin on montre comment s'appliquent ces théorèmes sur divers exemples de transformations.

A synthesis on interval expanding maps is done. We prove the existence of invariant measures which are absolutely continued with respect to Lebesgue measure for a larger class of expanding maps. Then we prove central and local limit theorems, we give the convergence rate and some conditions on the variance annulation based on the periodic points of the map. We precise these limit theorems by large deviation theorems. To conclude we show how to apply these theorems on various examples.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce travail est une synthèse des théorèmes limites pour les transformations dilatantes de l'intervalle : existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, théorèmes limites central et local, vitesse de convergence. Ensuite, on complète les théorèmes limites obtenus par des théorèmes de grands écarts. Il s'agit d'un prolongement du travail de J. Rousseau-Egèle [RE]. Cette dernière étude est complète pour le cas des transformations dilatantes de l'intervalle ayant une partition finie, car la densité de la mesure invariante est alors assez bien connue. Ce n'est pas le cas des transformations dilatantes de l'intervalle ayant une partition infinie dénombrable sous les hypothèses de J. Rousseau-Egèle sauf dans certains cas bien particuliers.

On étend ici les énoncés au cas général des transformations dilatantes ayant une partition dénombrable sous des hypothèses qui généralisent de façon naturelle celles données par A. Lasota et J. Yorke [L.Y] dans le cas des partitions finies. Les hypothèses faites par J. Rousseau-Egèle sur la densité des mesures invariantes permettent de se ramener à des opérateurs markoviens. Comme il est difficile de préciser les mesures invariantes pour une transformation dilatante quelconque, on a évité d'employer ces hypothèses dans la preuve des résultats annoncés. Ici, on envisage surtout le cas des transformations dilatantes admettant une partition dénombrable; mais cette étude contient évidemment comme cas particulier celle des transformations ayant une partition finie, ce qui justifie ce travail de synthèse.

On se donne une transformation dilatante T de $[0,1]$ (ici le lecteur peut supposer que T est monotone, dilatante et de classe C^2 sur un ensemble fini ou dénombrable d'intervalles). Dans un premier temps, on construit hm, la mesure de probabilité invariante par T absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m ; sa densité h est à variation bornée. La construction de hm se fait par l'étude spectrale de l'opérateur de Perron-Frobenius Φ associé à T, comme Φ préserve les fonctions à variation bornée, on peut utiliser le théorème de C. Ionescu-Tulcea et G. Marinescu [IT.M]. On prouve une inégalité d'un type considéré par W. Doeblin et R. Fortet [D.F], en généralisant la démonstration de A. Lasota et J. Yorke [L.Y].

On suppose alors que le système (T, hm) est ergodique (donc que 1 est une valeur propre simple de Φ), on doit d'ailleurs pouvoir s'affranchir de cette hypothèse —voir K. Ishitani [I] ainsi que T. Li et J. Yorke [L.Y]— en se restreignant aux différentes classes ergodiques de T.

On se donne maintenant une fonction f à variation bornée, on note $S_nf = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ et on pose $\sigma^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 (S_nf)^2 hdm \geq 0$; si σ n'est pas nul (voir plus loin) alors, on démontre que les sommes S_nf suivent :

- un théorème limite central avec vitesse de convergence :

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} \left| hm\left[\left\{x \in [0,1] \colon \frac{S_nf(x) - nm(fh)}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right\}\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-t^2/2}dt\right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

- un théorème limite local : pour tout intervalle Δ de $\mathbb{R}$ de longueur finie, uniformément en z dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sigma\sqrt{n}hm[\{x \in [0,1] \colon z + S_nf(x) - nm(fh) \in \Delta\}] - \frac{m(\Delta)}{2\pi} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}}\right| = 0,$$

et on précise ces deux théorèmes à l'aide de deux théorèmes de grands écarts. Pour faire cela, on adapte la méthode spectrale de S.V. Nagaev [N], qui a déjà été utilisée par Y. Guivarc'h et J. Hardy dans le cas des difféomorphismes d'Anosov [G.H] et par E. Le Page pour les produits de matrices aléatoires [L]. Elle consiste à normaliser l'opérateur Φ, c'est-à-dire à le rendre markovien en posant :

$$Pg = \frac{\Phi(gh)}{h}$$

et à considérer la chaîne de Markov associée à P. On obtient des théorèmes limites en perturbant P et en faisant des développements limités en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur perturbé. Pour pouvoir normaliser Φ, voir [I], [Mo], [RE], on doit supposer que sur $\{h \neq 0\}$, $\frac{1}{h}$ est encore à variation bornée, pour que P préserve lui aussi l'espace vectoriel des fonctions à variation bornée. G. Keller [Ke], R. Adler et L. Flatto [A.F], [M.P.V] ont donné des conditions sur T pour que cette hypothèse soit satisfaite. Comme en général on peut difficilement préciser les propriétés de h, on ne sait pas si elle est vérifiée pour les transformations admettant une partition dénombrable. Dans la classe de transformations dilatantes choisies ici, il existe d'ailleurs des contre-exemples, on en donnera un. On ne va donc pas normaliser Φ, mais le perturber directement et utiliser la méthode des développements limités. La technique employée permet aussi de donner des conditions précises sur f pour que σ ne soit pas nul, en utilisant des points périodiques de T. Ces conditions sont essentielles dans les théorèmes précédents et sont nouvelles. Finalement on donne quelques exemples d'applications de ces théorèmes, en particulier pour les β-transformations et la transformation « fraction continue ».

Ce travail complète donc l'article de J. Rousseau-Egèle. Il généralise les travaux de T. Morita [Mo] qui considère des transformations dilatantes qui ont une partition dénombrable « markovienne », il peut alors se ramener à des opérateurs markoviens. On pourrait envisager une application à des généralisation des travaux de V. Baladi et G. Keller [B.K] ainsi qu'à ceux de F. Hofbauer et G. Keller [H.K] pour des transformations dilatantes avec une partition dénombrable. Pour être complet, il faut signaler l'approche de M. Rychlik [Ry] pour obtenir des propriétés supplémentaires de la densité de la mesure invariante pour des transformations dilatantes de l'intervalle avec des propriétés plus restrictives que celles introduites ici sans utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu. Dans tous les travaux que l'on vient de citer, on se place dans des espaces de fonctions à variation bornée ; d'autres espaces fonctionnels ont été envisagés, par exemple K. Krzyzewski et W. Szlenk [Kr1], [Kr2], [Kr.S] utilisent des fonctions différentiables. Ils obtiennent alors d'autres propriétés pour la densité h de la mesure invariante, c'est le cas aussi de D. Mayer [Ma] et de R. Mañé [M]. Bien sûr les conditions sur les transformations envisagées sont différentes de celles adoptées ici.

J'ai réalisé en partie ce travail à l'IRMAR à l'Université de Rennes I pendant que je préparais ma thèse. C'est avec plaisir que je me permets de remercier ici Yves Guivarc'h pour tout ce que j'ai appris en travaillant avec lui.

1 NOTATIONS ET PREMIÈRES DÉFINITIONS

On note l'intervalle $[0,1]$ par I. On munit I de la tribu de ses boréliens $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue m. On note $L^1(m)$ l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ qui sont intégrables sur I.

Définition 1.1. — *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on dit que f est à variation bornée si :*

$$v(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|$$

est fini, on prend le supremum sur l'ensemble des subdivisions finies de I $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, n dans N^*.

Un élément f de $L^1(m)$ est dit à variation bornée si

$$v(f) = \inf_{g \in \overline{f}} v(g)$$

est fini, on prend l'infimum sur la classe de f modulo m, $\overline{f} = \{g : I \to \mathbb{C} : f = g \ m\text{-p.p.}\}$.

On note V l'ensemble $\{f \in L^1(m) \colon v(f) < \infty\}$.

Remarque. — On peut considérer que V est l'ensemble des fonctions continues à droite sur I, ayant un nombre au plus dénombrable de sauts dans I. À chaque élément f de V, on peut associer une mesure μ dont la variation totale est bornée telle que pour tout x de I, $f(x) = \mu([0,x])$.

V est un sous espace de $L^1(m)$ qui n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ [car la suite de fonctions $f_n(x) = \sin \frac{1}{x} \mathbf{1}_{]1/n,1]}(x)$ est dans V mais elle converge vers $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ qui appartient à $L^1(m)$ mais n'est pas dans V].

On définit alors la norme $\|\cdot\|_v$ sur V par :

$$\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1.$$

Cette norme rend l'espace $(V, \|\cdot\|_v)$ complet car la boule unité de l'espace des mesures dont la variation totale est bornée est compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures à variation totale bornée.

On a pour tout f de V, pour tout x, y dans I :

$$|f|(x) - |f|(y) \leq v(f),$$

on a donc :

$$\int_0^1 [|f|(x) - |f|(y)]dy = |f|(x) - \|f\|_1 \leq v(f).$$

Ainsi $\|f\|_\infty - \|f\|_1 \leq v(f)$ c'est-à-dire $\|f\|_\infty \leq \|f\|_v$. On en déduit qu'une suite $(f_n)_{n>0}$ d'éléments de V qui converge dans V vers f converge uniformément sur I.

Comme si f et g sont dans V, on a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_\infty$ et comme pour une subdivision $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ finie de I on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_i) - (fg)(a_{i+1})| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} [|f(a_i)||g(a_i) - g(a_{i+1})| + |g(a_i)||f(a_i) - f(a_{i+1})|] \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_i) - g(a_{i+1})| + \|g\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|. \end{aligned}$$

On en déduit que : $v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f)$, et donc :

$$\begin{aligned} \|fg\|_v &\leq \|f\|_\infty \|g\|_v + \|g\|_\infty \|f\|_v \\ \|fg\|_v &\leq 2\|f\|_v \|g\|_v. \end{aligned}$$

On construit maintenant une classe de transformations dilatantes pour lesquelles on pourra montrer le théorème limite central.

2 UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DILATANTES

2.1 Définition de $\mathcal{C}$

On va maintenant donner la classe des transformations dilatantes sur laquelle on travaillera ensuite. Dans un premier temps, on va définir la partition associée à une transformation.

On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications de I dans lui-même, vérifiant la condition suivante :

> Il existe une partition finie ou dénombrable de I : $(I_j)_{j\in J}$ telle que la restriction de T à chaque intervalle I_j se prolonge en une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur $\overline{I}_j$.

On remarque que si T est dans $\mathcal{D}$, alors :

- il existe une partition, parmi toutes celles qui vérifient la condition précédente, qui est la plus grossière (ou la moins fine) ; on l'appellera *la partition associée à* T, on la notera $(I_j)_{j\in J}$;
- pour tout entier $k > 0$, T^k est aussi dans $\mathcal{D}$ (car T envoie I dans I). La partition associée à T^k est d'ailleurs un raffinement de la partition associée à T.

Dans toute la suite on ne travaillera qu'avec des applications de $\mathcal{D}$.

On appelle alors $\mathcal{C}$ la classe des applications T de I dans lui-même qui appartiennent à $\mathcal{D}$ et telles que :

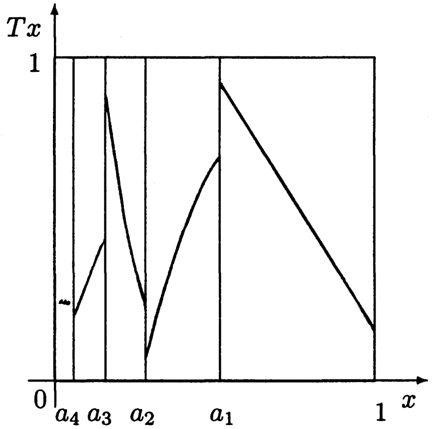
(1) La restriction de T à I_j est strictement monotone et se prolonge en une application dérivable à dérivée lipschitzienne sur $\overline{I}_j$ où $(I_j)_{j\in J}$ est la partition de I associée à T .

(2) Il existe un entier $n_0 > 0$, tel que $\gamma = \inf_{j\in J_{n_0}} \inf_{x\in I_j} |(T^{n_0})'(x)| > 2$, où $(I_j)_{j\in J_{n_0}}$ est la partition associée à T^{n_0}.

(3) $\inf_{j\in J_{n_0}} \; m(T^{n_0}(\overline{I}_j)) > 0$.

(4) $\sup_{j\in J_{n_0}} \sup_{x\neq y\in I_j} \left|\frac{(T^{n_0})'(x)-(T^{n_0})'(y)}{x-y}\right| = K < \infty$.

Par exemple :



Ces hypothèses sont suffisantes pour démontrer l'existence d'une mesure invariante par T absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ainsi que le théorème limite central. Par contre, pour démontrer le théorème limite local on a besoin d'une condition apparemment beaucoup plus restrictive, on prendra T dans $\mathcal{C}'$ où $\mathcal{C}'$ est la classe des applications T de $\mathcal{C}$ vérifiant la condition supplémentaire suivante :

(3′) Pour tout $k > 0$, $\inf_{j\in J_k} m(T^k(\overline{I}_j)) > 0$, où $(I_j)_{j\in J_k}$ est la partition associée à T^k.

Remarques. —

Quand la partition associée à T est finie, les conditions (3), (3′) et (4) sont évidentes.

Si pour tout j de J, $T(I_j) = I$, alors (3) et (3′) sont vérifiées.

La condition (4) entraîne que pour tout $N > 0$,

$$\sup\left|\frac{(T^{Nn_0})'(x) - (T^{Nn_0})'(y)}{x-y}\right| = K^N < \infty.$$

Si T est dans $\mathcal{C}'$, alors pour tout entier $n > 0$, T^n est aussi dans $\mathcal{C}'$.

Si les restrictions de T aux ensembles I_j se prolongent de façon C^2 sur $\overline{I}_j$, on peut remplacer la condition (4) par la condition (4′) suivante :

$$\sup\left|\frac{(T^{n_0})''(x)}{[(T^{n_0})']^2(x)}\right| = K' < \infty.$$

On note $\bar{I}_j = [a_j, a_{j+1}]$. Au point a_j, T n'est pas définie a priori, cependant, on dira souvent que T est définie sur chaque intervalle fermé de la partition en prenant aux bords de l'intervalle la valeur limite, par exemple ici :

$$T(a_j) = \lim_{x \to a_j, x > a_j} T(x).$$

La condition (3′) est nécessaire pour démontrer le théorème limite local (voir la proposition 9.1). Il suffit par contre pour démontrer l'existence d'une mesure invariante ou le théorème limite central pour T de supposer (3) (voir la proposition 4.1).

2.2 Exemples d'éléments de $\mathcal{C}$

- **Les β-transformations** : elles sont définies par $Tx = \beta x[1]$ où β est un réel strictement supérieur à 1. La partition associée à T est $0 < \frac{1}{\beta} < \cdots < \frac{[\beta]}{\beta} \leq 1$. Sur chaque intervalle : $[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta}]$ où $0 \leq j \leq [\beta] - 1$ et sur $[\frac{[\beta]}{\beta}, 1]$, T est linéaire donc on a (1), $\gamma = \beta > 1$ par hypothèse d'où (2) (on prend le plus petit entier n_0 tel que $\beta^{n_0} > 2$) et comme la subdivision est finie, T est dans $\mathcal{C}$.

- On vérifie aisément que **la généralisation des β-transformations** : les applications $Tx = \beta x + \alpha\ [1]$ où $\beta > 1, 0 \leq \alpha < 1$ sont encore dans $\mathcal{C}$.

- **Les applications linéaires par morceaux** telles qu'il existe une partition (I_k) finie ou dénombrable telle que $T(I_k) = I$, T est linéaire sur I_k et $|T'x| \geq 1 + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ sont aussi des éléments de $\mathcal{C}$. (Là aussi, on prend le plus petit entier n_0 tel que $(1+\varepsilon)^{n_0} > 2$.)

- **La transformation « fraction continue »** : elle est définie par $T(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1] Tx = \{\frac{1}{x}\}$. La partition de I associée à T est $(I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et sur I_n, $Tx = \frac{1}{x} - n$ qui est une fonction de classe C^∞ strictement monotone sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, d'où (1). Pour tout $n > 0$, $T(I_n) = I$, d'où (3). On remarque que $T'(1) = -1$.
  On a :

  $$\inf_{x \in \cup I_n} |(T \circ T)'(x)| = 4,$$

  en effet $T'x = -\frac{1}{x^2}$ sur $\cup_n I_n, T''x = \frac{2}{x^3}$, et

  $$(T \circ T)'(x) = T'(Tx)T'(x) = \frac{1}{(Tx)^2}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(1-nx)^2} \text{ si } x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[.$$

  Alors :

  $$\inf_{x \in \cup I_n} |(T^2)'(x)| = \inf_{n>0} \inf_{x \in I_n} \frac{1}{(1-nx)^2} = \inf_{n>0} \frac{1}{(1-\frac{n}{n+1})^2} = 4,$$

d'où (2)

$$\begin{aligned}
(T^2)''(x) &= T''(x)T'(Tx) + T''(Tx)(T'(x))^2 \\
&= \frac{-1}{(Tx)^2}\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(Tx)^3}\frac{1}{x^4} = \frac{2(1-xTx)}{x^4(Tx)^3} \\
\frac{(T^2)''(x)}{[(T^2)'(x)]^2} &= 2(1-xTx)Tx = 2nx(\frac{1}{x}-n) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].
\end{aligned}$$

D'où $\sup_{x\in\cup I_n}\left|\frac{(T^2)''(x)}{[(T^2)'(x)]^2}\right| = \sup_{n>0}\frac{2n}{n+1} = 2 < \infty$. Ainsi T est dans $\mathcal{C}$.

Remarque. — Il existe des transformations T qui vérifient (1), (2) et (3) mais qui n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$, en effet : soit T définie par

$$\begin{cases}
T0 &= 0 \\
Tx &= \frac{1}{n}\log(nx+b_n) + a_n \text{ sur } [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \ n \geq 2 \\
Tx &= 4x - 2 \text{ sur } [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\
Tx &= 4x - 3 \text{ sur } [\frac{3}{4}, 1]
\end{cases}$$

avec $a_n = \frac{1}{n}\log[(n+1)(e^n-1)]$ et $b_n = \frac{e^n\frac{n}{n+1}-1}{1-e^n}$, ils sont choisis de façon à ce que $T(\frac{1}{n}) = 1$, $T(\frac{1}{n+1}) = 0$, d'où (3). Sur I_n, T est une fonction de classe C^2, on a :

$$T'x = \frac{1}{nx + \frac{e^n\frac{n}{n+1}-1}{1-e^n}}$$

qui est une fonction décroissante sur $]-\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$ où

$$x_0 = \frac{e^n n/(n+1) - 1}{n(e^n-1)}$$

comme on a : $-\infty < x_0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \infty$ et comme sur $]x_0, \infty[$, $T'x$ est dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que T est strictement croissante sur I_n, la condition (1) est donc vérifiée

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in I}|T'x| &= \inf\{\inf_{n>2} T'(\frac{1}{n}), 4\} = \inf\{4, \frac{(e^n-1)(n+1)}{(n+1)(e^n-1) - e^n n + n + 1}\} \\
&= \inf\{4, (1-e^{-n})(n+1), n > 2\} = 3(1-e^{-2})
\end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto (x+1)(1-e^{-x})$ est strictement croissante sur $[1, \infty]$.
$\gamma = 3(1-e^{-2}) = 2,59 > 2$, la condition (2) est donc vérifiée. Mais la condition (4) n'est pas vérifiée, en effet :

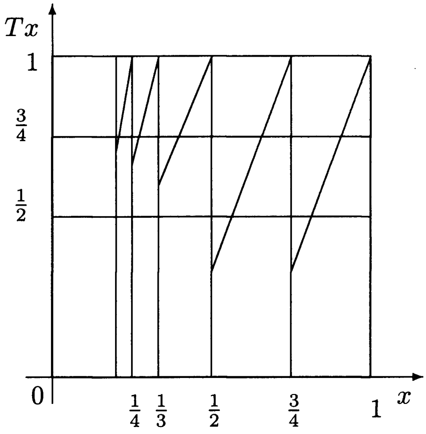
$$\left|\frac{T'(x) - T'(y)}{x-y}\right| = n \text{ sur } I_n \text{ pour } n \geq 2.$$

On a donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\sup_{x\neq y\in I_n}\left|\frac{T'(x)-T'(y)}{x-y}\right| = \infty.$$

Remarque. — Il existe des transformations T qui sont dans $\mathcal{C}$ mais qui n'appartiennent pas à $\mathcal{C}'$. On en donne maintenant un exemple qui reprend une idée de A. Boubakri. On définit la transformation linéaire par morceaux T par :

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ Tx = \frac{8}{3}x - \frac{5}{3} \text{ sur } I_0 = [\frac{3}{4}, 1] \\ Tx = \frac{8}{3}x - 1 \text{ sur } I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ Tx = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \text{ sur } I_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \\ Tx = a_n(x - \frac{1}{n}) + 1 \text{ sur } I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \text{ pour } n \geq 3. \end{cases}$$



On choisit a_n de façon à ce que T envoie I_n sur $[\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, 1]$, on prend $a_n = \frac{(n+1)(n^2+2)}{4n}$. Toutes les pentes des applications linéaires sont plus grandes que 2. Ceci montre que T est dans $\mathcal{C}$ et aussi que $n_0 = 1$.

T envoie

$$\begin{cases} I_0 \text{ et } I_1 \text{ sur } [\frac{1}{3}, 1] = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \\ I_2 \text{ sur } [\frac{5}{9}, 1] = [\frac{5}{9}, \frac{3}{4}] \cup I_0 \text{ et } [\frac{5}{9}, \frac{3}{4}] \subset I_1 \\ I_n \text{ sur } [\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, 1] = [\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, \frac{3}{4}] \cup I_0 \text{ et } [\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, \frac{3}{4}] \subset I_1 \text{ si } n \geq 3. \end{cases}$$

Alors pour construire la partition associée à T^2, on découpe I_0 et I_1 en trois intervalles : $I_{i,j} = I_i \cap T^{-1}(I_j)$ où i vaut 0 ou 1, j vaut 0, 1 ou 2. Par contre, pour $n \geq 2$, on découpe I_n en deux intervalles : $I_{n,i} = I_n \cap T^{-1}(I_i)$ où i vaut 0 ou 1. Pour $n > 2$, T envoie $I_{n,1}$ sur $[\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, \frac{3}{4}]$, T^2 l'envoie sur $[1 - \frac{4}{3n^2}, 1]$. Ainsi $\inf m(T^2(I_{i,j})) = \inf_{n>3} \frac{4}{3n^2} = 0$, ce qui prouve que T n'est pas dans $\mathcal{C}'$. Pour cette transformation on va montrer le théorème limite central mais pas le théorème limite local.

3 L'OPÉRATEUR DE PERRON-FROBENIUS

On considère un élément T de $\mathcal{C}$, on définit alors l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T, $\Phi_T \colon L^1(m) \to L^1(m)$ par :

$$\int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T dm \quad \text{où } f \in L^1(m) \text{ et } g \in L^\infty(m).$$

Les principales propriétés de Φ_T sont :

(i) Φ_T est un opérateur linéaire continu de $L^1(m)$.

(ii) Φ_T est positif : $f \geq 0 \Rightarrow \Phi_T f \geq 0$, donc $|\Phi_T f| \leq \Phi_T |f|$ pour f dans V.

(iii) Φ_T est une contraction de $L^1(m)$.

(iv) Φ_T préserve l'intégrale : $\int_0^1 \Phi_T f dm = \int_0^1 f dm$.

(v) $\Phi_{T^n} = (\Phi_T)^n$.

(vi) $\Phi_T f = f$ si et seulement si T laisse la mesure $\mu = fm$ invariante.

Démonstration de (iii) et de (vi) : Pour f dans $L^1(m)$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Phi_T f\|_1 &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm \right| \leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_0^1 |f| \cdot |g \circ T| dm \\ &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|f\|_1 \|g \circ T\|_\infty \leq \|f\|_1. \end{aligned}$$

Si $\Phi_T f = f$ alors pour tout g de $L^\infty(m)$ on a : $\int_0^1 fg dm = \int_0^1 fg \circ T dm$ en particulier pour $g = \mathbf{1}_A$, avec A dans $\mathcal{B}$ on a

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Si $\mu = fm$ est invariante par T, pour tout g de $L^\infty(m)$ on a :

$$\int_0^1 g \circ T d\mu = \int_0^1 g d\mu \qquad \text{i.e. : } \int_0^1 fg \circ T dm = \int_0^1 fg dm \qquad \text{d'où } \Phi_T f = f.$$

$\square$

Remarque. — m est une mesure invariante par T si et seulement si $\Phi_T 1 = 1$.

Les conditions imposées aux transformations T de $\mathcal{C}$ permettent une écriture explicite de Φ_T, pour m-presque tout x de I on a :

$$\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x),$$

où $\sigma_j : T(I_j) \to I_j$ est la réciproque de T restreinte à I_j. En effet, l'égalité de définition de Φ_T donne par changement de variables pour tout f de $L^1(m)$, pour tout g de $L^\infty(m)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f \cdot g \circ T dm &= \sum_{j \in J} \int_{I_j} f \cdot g \circ T dm \\
&= \sum_{j \in J} \int_{T^{-1}(I_j)} f(\sigma_j y) g(y) \frac{1}{|T'(\sigma_j y)|} dm(y) \\
&= \sum_{j \in J} \int_I f(\sigma_j x) g(x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) dm(x) \\
&= \int_I [\sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x)] g(x) dm(x)
\end{aligned}$$

[par le théorème de la convergence monotone dans le cas d'une subdivision dénombrable et en découpant f en $f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives.] D'où :

$$\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \ m\text{-p.p.}$$

Désormais on note Φ à la place de Φ_T et on définit pour tout x de I

$$\Phi f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

4 LE THÉORÈME DE IONESCU-TULCEA ET MARINESCU

4.1 Les hypothèses

Ce théorème permet de faire la décomposition spectrale de Φ et de montrer l'existence d'une mesure invariante pour T et absolument continue par rapport m. On énonce d'abord ses hypothèses.

Les hypothèses. — $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{V}$ est contenu dans $\mathcal{L}$, ils vérifient de plus l'hypothèse :

(a) si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge dans $\mathcal{L}$ vers f et si pour tout $n \geq 0$ $\|f_n\|_{\mathcal{V}} \leq C$, alors f est dans $\mathcal{V}$ et on a $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq C$.

Φ est un opérateur de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ qui laisse stable $\mathcal{V}$ et qui est borné par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, il vérifie les conditions :

(b) $\sup_{n\geq 0}\{\|\Phi^n f\|_{\mathcal{L}}, f \in \mathcal{V}, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\} \leq H < \infty$.

(c) Il existe $n_0 \geq 0, \alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tels que :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

(d) si V est une partie bornée de $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ alors $\Phi^{n_0} V$ est relativement compacte dans $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)_{\mathcal{L}})$.

Avant d'énoncer et de prouver le théorème de Marinescu et Ionescu-Tulcea, on remarque que :

Proposition 4.1. — *Si T est dans $\mathcal{C}$, Φ vérifie les hypothèses (a), (b), (c) et (d).*

Démonstration. — On prend pour $\mathcal{L}$ l'espace $L^1(m)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et pour $\mathcal{V}$ le sous espace de $\mathcal{L}$ constitué des fonctions dont la variation est finie, on le munit de la norme $\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1$, c'est en fait $(V, \|\cdot\|_v)$.

(a) - On a $A = \{f \in L^1(m) \colon \|f\|_v \leq C\}$ est une partie compacte de $L^1(m)$. On le voit en remarquant que toute fonction à variation bornée peut être considérée comme la fonction de répartition d'une mesure μ non nécessairement positive. On dispose de la convergence faible des mesures.

Soit $(\phi_n)_{n\geq 0}$ une suite de A on associe alors une suite de mesures $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de variation totale bornée sur $[0,1]$. Il existe donc une sous-suite de mesures $(\mu_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge faiblement vers μ. Soit $\phi(x) = \mu([0,x])$, comme l'ensemble des points de discontinuité de μ est dénombrable, on en déduit que $\phi_{n_k} \to \phi$ p.s. Les ϕ_n sont bornées on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue et alors : $\phi_n \to \phi$ dans $L^1(m)$ et $\|\phi\|_v \leq C$, d'où la compacité de A dans $L^1(m)$.

Soit alors une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de points de A qui converge vers f un élément de $L^1(m)$ et telle que $\|f_n\|_v \leq C$. On a alors $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ et $\|f_n\|_v \leq C$. Comme A est compacte dans $L^1(m)$ alors f est dans A, donc f est dans V et vérifie $\|f\|_v \leq C$.

(b) - Comme Φ est une contraction de $L^1(m)$, on a pour f dans V, $\|\Phi f\|_1 \leq \|f\|_1$ ainsi $\sup_{n\geq 0}\{\|\Phi^n f\|_1, f \in V, \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1 < \infty$.

(c) - Pour démontrer la condition de Doeblin-Fortet, on s'inspire des travaux de Lasota et Yorke [L.Y] pour une transformation dilatante à subdivision finie.
On sait qu'il existe un entier $n_0 > 0$, tel que $\inf |(T^{n_0})'(x)| = \gamma > 2$. On considère alors la transformation T^{n_0}. L'opérateur de Perron-Frobenius associé est Φ^{n_0}, que l'on va écrire ainsi :

$$\Phi^{n_0} f(x) = \sum_{j\in J_{n_0}} f(\sigma_j x) \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T^{n_0}(\overline{I}_j)}(x).$$

où $(I_j)_{j\in J_{n_0}}$ est la partition associée à T^{n_0}, σ_j la réciproque de la restriction de T à I_j. Soit f un élément de V fixé, on calcule la variation de $\Phi^{n_0} f$:

$$\begin{aligned} v(\Phi^{n_0} f) &= v\left[\sum_{j\in J_{n_0}} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|}\right) \circ \sigma_j . \mathbf{1}_{T^{n_0}(\overline{I}_j)}\right] \\ &\leq \sum_{j\in J_{n_0}} v\left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|}\right) \circ \sigma_j . \mathbf{1}_{T^{n_0}(\overline{I}_j)}\right]. \end{aligned}$$

On pose $T^{n_0}(\overline{I}_j) = [a_j, b_j]$. Comme $(\frac{f}{|(T^{n_0})'|}) \circ \sigma_j$ est une fonction à variation bornée sur I, on en déduit que :

$$v\left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|}\right) \circ \sigma_j \mathbf{1}_{[a_j,b_j]}\right] \leq v_{[a_j,b_j]}\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j\right) + \left|\frac{f}{(T^{n_0})'}\right|(\sigma_j a_j) + \left|\frac{f}{(T^{n_0})'}\right|(\sigma_j b_j)$$

où $v_{[a_j,b_j]}(g)$ désigne la variation de la fonction g sur l'intervalle $[a_j, b_j]$. On a :

$$\left|\frac{f}{(T^{n_0})'}\right|(\sigma_j a_j) + \left|\frac{f}{(T^{n_0})'}\right|(\sigma_j b_j) \leq v_{[a_j,b_j]}\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j\right) + 2 \inf_{x\in[a_j,b_j]} \left|\frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j x)\right|$$

et

$$\begin{aligned} \inf_{x\in[a_j,b_j]} \left|\frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j x)\right| &\leq \frac{1}{b_j - a_j} \int_{[a_j,b_j]} \left|\frac{f}{(T^{n_0})'}\right|(\sigma_j x) dm(x) \\ &\leq \frac{1}{m(T^{n_0}(\overline{I}_j))} \int_{\overline{I}_j} |f| dm \end{aligned}$$

par changement de variable.
D'après (3), on sait qu'il existe $\delta > 0$, tel que $\inf_{j\in J_{n_0}} m\left(T^{n_0}(\overline{I_j})\right) = \delta > 0$. Donc :

$$v\left(\Phi^{n_0} f\right) \leq 2 \sum_{j\in J_{n_0}} v_{[a_j,b_j]}\left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|}\right)\circ \sigma_j\right] + \frac{2}{\delta}\|f\|_1$$

On calcule maintenant

$$v_{[a_j,b_j]}\left[\left(\frac{f}{(T^{n_0})'}\right)\circ\sigma_j\right] = \sup_{\theta\in S_j}\sum_{\ell=1}^{m}\left|\frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_\ell) - \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_{\ell-1})\right|$$

où $\theta = (\theta_\ell)_{0\leq\ell<m}$ est une subdivision finie de $[a_j, b_j]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{m}\left|\frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_\ell)\right. &- \left.\frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_{\ell-1})\right| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{m}|f(\sigma_j\theta_\ell) - f(\sigma_j\theta_{\ell-1})|\frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j\theta_\ell)|} \\
&+ \sum_{\ell=1}^{m}|f(\sigma_j\theta_{\ell-1})|\left|\frac{1}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_\ell) - \frac{1}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_{\ell-1})\right| \\
&\leq \sup_{1\leq\ell\leq m}\left|\frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j\theta_\ell)}\right|\sum_{\ell=1}^{m}|f\circ\sigma_j(\theta_\ell) - f\circ\sigma_j(\theta_{\ell-1})| \\
&+ \sup_{1\leq\ell\leq m}\left|\frac{\frac{1}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_\ell) - \frac{1}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_{\ell-1})}{\theta_\ell - \theta_{\ell-1}}\right| \\
&\cdot \sum_{\ell=1}^{m}|f\circ\sigma_j(\theta_{\ell-1})|.|\theta_\ell - \theta_{\ell-1}|.
\end{aligned}$$

On passe alors à la limite et on prend le supremum sur l'ensemble des subdivisions finies de $[a_j, b_j]$: S_j. Comme on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sup_{1\leq\ell\leq m}\left|\frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j\theta_\ell)}\right| \leq \sup\left|\frac{1}{(T^{n_0})'(\sigma_j x)}\right| \leq \frac{1}{\gamma}\ ; \\
c = &\sup_{1\leq\ell\leq m}\left|\frac{\frac{1}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_\ell) - \frac{1}{(T^{n_0})'}(\sigma_j\theta_{\ell-1})}{\theta_\ell - \theta_{\ell-1}}\right| \\
\leq &\sup_{1\leq\ell\leq m}\left|\frac{(T^{n_0})'(\sigma_j\theta_\ell) - (T^{n_0})'(\sigma_j\theta_{\ell-1})}{(\theta_\ell - \theta_{\ell-1})(T^{n_0})'(\sigma_j\theta_\ell)(T^{n_0})'(\sigma_j\theta_{\ell-1})}\right| \leq \frac{K}{\gamma^2} < \infty\ ; \\
&\sup_{S_j}\sum_{\ell=1}^{m}|f\circ\sigma_j(\theta_\ell) - f\circ\sigma_j(\theta_{\ell-1})| = v_{I_j}(f)\ ; \\
&\sup_{S_j}\sum_{\ell=1}^{m}|f\circ\sigma_j(\theta_{\ell-1})|.|\theta_\ell - \theta_{\ell-1}| = \int_{\overline{I_j}}|f|dm.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$v\left(\Phi^{n_0} f\right) \leq 2\left(\frac{1}{\gamma} v(f)+\frac{K}{\gamma^2}\|f\|_1\right)+\frac{2}{\delta}\|f\|_1 .$$

Alors :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_v \leq \alpha\|f\|_v+\beta\|f\|_1$$

avec $\alpha = \frac{2}{\gamma} < \frac{2}{2} = 1$ et $0 \leq \beta < \infty$.

On remarque ici que dans le cas d'une partition dénombrable, l'hypothèse (4) sur T est nécessaire. En fait, les hypothèses qu'on a prises pour les éléments de $\mathcal{C}$ sont les plus faibles possibles pour faire la démonstration de la proposition 4.1 en suivant la méthode de Lasota et Yorke [L.Y] et sa généralisation donnée par Kowalski [Ko].

On remarque aussi que si pour tout j de J, $T^{n_0}[a_j, b_j] = I$, on a directement :

$$v(\Phi^{n_0} f) \leq \frac{1}{\gamma} v(f)+\frac{K}{\gamma^2}\|f\|_1 .$$

(d) - Si V est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$, comme Φ est un opérateur borné de V alors $\Phi^{n_0} V$ est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$ donc de $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$.

On en déduit alors que $\Phi^{n_0} V$ est une partie relativement compacte de $(V, \|.\|_v)$ car d'après la preuve du (a) l'injection de $(V, \|\cdot\|_v)$ dans $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$ est compacte. □

4.2 Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu

Théorème 4.2. — *Sous les hypothèses (a), (b), (c) et (d), Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 : $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et Φ s'écrit alors :*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i + \Psi.$$

Les Φ_i sont des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{V}$ dans $\Phi_i(\mathcal{V})$ qui est de dimension finie et est contenu dans $\mathcal{V}$. Ψ est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{V}$ qui a un rayon spectral $\rho(\Psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. De plus on a :

$$\Psi\Phi_i = \Phi_i\Psi = 0 \Phi_i\Phi_j = 0 \ si \ \ i \neq j \Phi_i^2 = \Phi_i .$$

On peut alors écrire : $\Phi^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \Phi_i + \Psi^n$ pour tout $n > 0$.

Démonstration. — La démonstration donnée ici reprend celle de C. Ionescu-Tulcea et G. Marinescu dans [IT.M], on peut aussi se reporter au travail de H. Hennion dans [H]. Elle se fait en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE : on démontre que Φ a un nombre fini de valeurs propres de module 1 et que les espaces propres associés sont de dimension finie.

Lemme 4.3. — *Soit $m \geq 1$ alors, $\|\Phi^{m n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + L\|f\|_{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. — D'après les hypothèses (b) et (c) pour tout entier m on a :

$$\|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H < \infty \text{ donc } \|\Phi^m f\|_{\mathcal{L}} \leq H\|f\|_{\mathcal{L}} \text{ et } \|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Alors, pour $m \geq 1$, on a :

$$\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta H\|f\|_{\mathcal{L}}$$

par récurrence on obtient alors :

$$\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta H(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1})\|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ on en déduit que $\beta H(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}) \leq \frac{\beta H}{1-\alpha}$. □
On en déduit alors le lemme 4.4.

Lemme 4.4. — *Les normes $(\|\Phi_1^n\|_{\mathcal{V}})_{n\geq 1}$ sont uniformément bornées.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.3 si $m \geq 0$, on a :

$$\|\Phi^{mn_0}\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m + L.$$

Comme Φ est un opérateur borné par rapport à la norme de $\mathcal{V}$, il en est de même pour $\Phi^n, n < n_0$, il existe donc $M > 0$ tel que, $\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} \leq M < \infty$ pour $n < n_0$. D'où $\{\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}}\}_{n\geq 0}$ est uniformément bornée. □
On note pour tout λ de $\mathbb{C}$,

$$\mathcal{V}(\lambda) = \{f \in \mathcal{V} : \Phi f = \lambda f\}$$

c'est l'espace propre associé à λ, si $\mathcal{V}(\lambda) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre de Φ.

Lemme 4.5. — *$\mathcal{V}(\lambda)$ est de dimension finie si $|\lambda| = 1$.*

Démonstration. — Pour cela, on montre que $X = \mathcal{V}(\lambda) \cap \{f \in \mathcal{V} : \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\}$ est compact. Soit f dans X, on a donc : $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ et $\Phi f = \lambda f$. Alors on a :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|\lambda^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ alors on a : $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$. X est donc une partie bornée de $\mathcal{V}$, par (d) elle est transformée en une partie compacte de $\mathcal{L}$ par Φ^{n_0}. Mais X est invariant par Φ^{n_0}. X est donc une partie compacte de $\mathcal{L}$ donc $\dim \mathcal{V}(\lambda)$ est finie. □

Lemme 4.6. — *Φ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1.*

Démonstration. — Dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de valeurs propres distinctes de module 1 : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots \lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Pour tout n, on choisit f_n dans $\mathcal{V}(\lambda_n), f_n \neq 0$. Les $(f_n)_{n\geq 0}$ sont linéairement indépendants (dans $\mathcal{L}$ comme dans $\mathcal{V}$). On note $X(n) = \text{vect}\ \{f_1, \ldots, f_n\}$. $X(n)$ est strictement inclus dans $X(n+1)$. Le lemme de F. Riesz prouve alors l'existence d'une suite $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ telle que $\|g_n\|_{\mathcal{L}} = 1$ et $\|g_n - f\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{2}$ où f est dans $X(n-1)$ et g_n dans $X(n)$. Si une fonction f est dans $X(n)$, elle s'écrit : $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, alors $\Phi^m(f)$ vaut $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m a_i f_i$ et est dans $X(n)$. Si f est dans $X(m)$ alors pour tout entier $p > 0$, $\frac{1}{\lambda_m^p}\Phi^p(f) - f$ est dans $X(m-1)$. En effet

$$\frac{1}{\lambda_m^p}\Phi^p f - f = \sum_{i=1}^{m} a_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^p f - \sum_{i=1}^{m} a_i f_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i((\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^p - 1) f_i.$$

Pour $n \geq n_0$, on a :

$$\|\frac{1}{\lambda_j^n}\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} = \|\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{k(n)}\|g_j\|_{\mathcal{V}} + L\|g_j\|_{\mathcal{L}} = \alpha^{k(n)}\|g_j\|_{\mathcal{V}} + L.$$

Comme $0 < \alpha < 1$, il existe alors $n(j) > 0$ tel que pour tout $n \geq n(j)$ et $n \geq n_0$,

$$\alpha^{k(n)}\|g_j\|_{\mathcal{V}} \leq 1.$$

On en déduit que l'ensemble $\{\frac{1}{\lambda_j^n}\Phi^n g_j, j \in \mathbb{N}^*, n \geq \sup\{n(j), n_0\}\}$ est la transformée par Φ^{n_0} d'une partie bornée de $\mathcal{V}$, d'après (4) c'est donc une partie compacte de $\mathcal{L}$, il existe donc deux sous-suites (j_s) et (n_s) croissantes de (j) et (n) telles que la suite $(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s})_{s>0}$ converge dans $\mathcal{L}$. Mais :

$$\begin{aligned} D &= \left\| \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s} - \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}}\Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} \right\|_{\mathcal{L}} \\ D &= \left\| g_{j_{s+1}} + (\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}}\Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}} - \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s}) \right\|_{\mathcal{L}} . \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}}\Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}}$ est dans $X(j_{s+1} - 1)$ et comme $\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s}$ est dans $X(j_s)$ qui est contenu dans $X(j_{s+1} - 1)$ on en déduit que $D \geq \frac{1}{2}$ par hypothèse sur la suite $(g_n)_{n\geq 0}$. Ceci contredit le fait que $(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s})$ converge dans $\mathcal{L}$ et donc il existe un nombre fini de valeurs propres de module 1. □

2ÈME ÉTAPE : On construit les opérateurs Φ_λ.

Lemme 4.7. — *Quelque soit le nombre complexe λ de module 1, quelque soit f dans $\mathcal{V}$, il existe $\overline{f}$ dans $\mathcal{V}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f - \overline{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Démonstration. — Soit $\overline{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{L} \colon \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_{\mathcal{L}} = 0$ avec $(g_n)_{n>0}$ une suite de $\mathcal{V}\}$, $\overline{\mathcal{V}}$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{V}}}$ qui est la restriction à $\overline{\mathcal{V}}$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. L'opérateur Φ préserve l'espace $\mathcal{V}$ et il existe $H > 0$, tel que pour tout entier $m \geq 1$, on ait $\|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H$, par le théorème de Hahn-Banach il existe un prolongement $\hat{\Phi}$ de Φ à $\overline{\mathcal{V}}$ qui vérifie pour tout f de $\mathcal{V}$, pour tout entier $m > 0$:

$$\hat{\Phi}^m f = \Phi^m f \text{ et } \|\hat{\Phi}^m\|_{\overline{\mathcal{V}}} \leq H.$$

Le lemme 4.4 entraîne que les normes $\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}} m \geq 1$ sont uniformément bornées par $M = \sup_{1\leq m<\infty} \|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$. Pour f dans $\mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|\hat{\Phi}^k f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{n-1}{n} M\|f\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{n}\|f\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \begin{cases} \|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M \leq 1 \\ M\|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie bornée de $\mathcal{V}$ par (d) elle est transformée par Φ^{n_0} en une partie compacte de $\mathcal{L}$. C'est

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f, n > 0\}.$$

On peut donc en extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{L}$ donc dans $\overline{\mathcal{V}}$. Il existe donc une suite $(n_p)_p$ strictement croissante d'entiers et une fonction $\overline{f}$ de $\overline{\mathcal{V}}$ telle que :

$$\lim_{p\to\infty} \left\| \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(f) - \overline{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

On montre maintenant que $\overline{f}$ est dans $\mathcal{V}$, on observe que :

$$\left\| \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f \right\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{V}} \leq M\|f\|_{\mathcal{V}}.$$

$\overline{f}$ est donc limite dans $\mathcal{L}$ d'une suite de points de $\mathcal{V}$ qui sont bornés par $M\|f\|_{\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{V}$, l'hypothèse (a) permet de conclure que $\overline{f}$ est dans $\mathcal{V}$ et $\|\overline{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M\|f\|_{\mathcal{V}}$.
En fait, on montre que la suite $f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f$ converge aussi dans $\mathcal{L}$ et donc dans $\overline{\mathcal{V}}$ vers $\overline{f}$, on remarque d'abord que :

$$\Phi\overline{f} = \lambda\overline{f}.$$

En effet, on a :

$$\|\Phi f_{n_p} - \lambda f_{n_p}\|_{\mathcal{L}} = \left\| \frac{1}{n_p} \left(\sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \frac{\Phi^{k+1} f}{\lambda^k} - \sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \frac{\Phi^k f}{\lambda^{k-1}} \right) \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{2}{n_p}\|f\|_{\mathcal{L}}.$$

On montre ensuite que la suite f_n converge dans $\overline{\mathcal{V}}$ vers $\overline{f}$, on a :

$$f = \overline{f} + (f - \overline{f}).$$

Alors :

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k[\overline{f} + (f-\overline{f})] = \overline{f} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(f-\overline{f}).$$

Il suffit donc de montrer que la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(f-\overline{f})$ converge dans $\overline{\mathcal{V}}$ vers 0 pour conclure. On remarque que la suite :

$$[I - \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k]f = (I-\frac{\Phi}{\lambda})[I + \frac{\Phi}{\lambda} + \cdots + \frac{\Phi^{n_0-1}}{\lambda^{n_0-1}} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}\frac{\Phi^{n_0+k-1}}{\lambda^{n_0+k-1}}]f$$

converge vers $f-\overline{f}$ dans $\overline{\mathcal{V}}$, on en déduit donc que : $f-\overline{f}$ est dans la fermeture de $\mathrm{Im}(I-\frac{\Phi}{\lambda})$ prise dans $\overline{\mathcal{V}}$. Il suffit donc de montrer que pour tout g de cet ensemble, la suite $g_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(g)$ converge vers 0. D'abord, si g est dans $\mathrm{Im}(I-\frac{\Phi}{\lambda})$, il existe z dans $\mathcal{V}$ tel que $g=(I-\frac{\Phi}{\lambda})z$. Alors :

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{n}\left\|\frac{1}{\lambda^{n_0}}\Phi^{n_0}z - \frac{1}{\lambda^{n_0+n-1}}\Phi^{n_0+n-1}z\right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{2}{n}\|z\|_{\mathcal{L}}.$$

Maintenant si g est dans la fermeture de $\mathrm{Im}(I-\frac{\Phi}{\lambda})$, il existe $g' = (I-\frac{\Phi}{\lambda})z$, z dans $\mathcal{V}$ tel que $\|g-g'\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}} = \left\|\frac{1}{n}(\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{\Phi^k}{\lambda^k}(g-g') + \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{\Phi^k}{\lambda^k}(g'))\right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{n}\|z\|_{\mathcal{L}}.$$

Cette suite tend vers 0, ce qui termine la démonstration. □

On peut alors poser pour tout f de $\mathcal{V}$, $\overline{f} = \Phi_\lambda f$, Φ_λ est un opérateur linéaire, il envoie $\mathcal{V}$ dans $\Phi_\lambda(\mathcal{V})$ qui est contenu dans $\mathcal{V}$. L'inégalité $\|\overline{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M\|f\|_{\mathcal{V}}$ entraîne alors que

$$\|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{V}} \leq M \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1.$$

On a aussi, pour tout n :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{\Phi^k f}{\lambda^k}\right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\|\Phi^k f\|_{\mathcal{L}} \leq H\|f\|_{\mathcal{L}},$$

on a donc :

$$\|\Phi_\lambda f\|_{\mathcal{L}} \leq H\|f\|_{\mathcal{L}} \text{ et donc } \|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{L}} \leq H.$$

3ÈME ÉTAPE : On démontre les dernières assertions du théorème.

Lemme 4.8. — *L'image de $\mathcal{V}$ par Φ_λ est $\mathcal{V}(\lambda)$.*

Démonstration. — Soit f dans $\mathcal{V}(\lambda)$, on a : $\Phi^k f = \lambda^k f, k \geq 1$. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} f = f \Rightarrow \Phi_\lambda f = f.$$

Ainsi $\mathcal{V}(\lambda)$ est contenu dans $\Phi_\lambda(\mathcal{V})$. Soit f dans $\Phi_\lambda(\mathcal{V})$ alors il existe g dans $\mathcal{V}$ tel que $f = \Phi_\lambda g$ pour tout $n > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\Phi[\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(g)] &= \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^{k+1}(g)\\ &= \frac{n+1}{n}\lambda\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n_0+n}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(g) - \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda^{n_0-1}}\Phi^{n_0}g.\end{aligned}$$

On passe alors à la limite dans $\mathcal{L}$, on obtient : $\Phi_\lambda f = \lambda f$. On en déduit alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, non valeur propre de Φ, $\Phi_\lambda = 0$. □

Lemme 4.9. — *Soit λ une valeur propre de module 1 de Φ alors $\Phi_\lambda^2 = \Phi_\lambda$.*

Démonstration. — Soit f dans $\mathcal{V}$ alors $\Phi_\lambda f$ est dans $\mathcal{V}(\lambda)$ comme si f est dans $\mathcal{V}(\lambda)$ on a : $\Phi_\lambda f = f$ on en déduit alors que $\Phi_\lambda^2 f = \Phi_\lambda f$. Φ_λ est donc une projection de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}(\lambda)$. □

Lemme 4.10. — *Si μ et λ sont distinctes alors $\Phi_\lambda\Phi_\mu = 0$.*

Démonstration. — Si f est dans $\mathcal{V}$, alors $\Phi_\mu f$ est dans $\mathcal{V}(\mu)$, ce qui entraîne que $\Phi_\lambda\Phi_\mu f$ est dans $\mathcal{V}(\mu) \cap \mathcal{V}(\lambda) = \{0\}$. On peut alors décomposer $\mathcal{V}$ en :

$$\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \oplus \mathcal{W}.$$

On note maintenant Φ_i à la place de Φ_{λ_i}. Les Φ_i sont des projections de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}(\lambda_i)$ qui sont de dimension finie. Une fonction f de $\mathcal{V}$ s'écrit alors de façon unique

$$f = \Phi_1 f + \cdots + \Phi_p f + g \text{ où } g \text{ appartient à } \mathcal{W}.$$

Alors pour tout $m > 0$ on a :

$$\Phi^m f = \lambda_1^m \Phi_1 f + \cdots + \lambda_p^m \Phi_p f + \Phi^m g,$$

en effet : si on note σ la projection de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$, on pose $\Psi f = \Phi g = \Phi\sigma f = \sigma\Phi f$. On a $\sigma\Psi = \Psi$ car Ψ préserve l'espace $\mathcal{W}$. On a donc : $\Phi^m\sigma = \Psi^m$ ce qui entraîne $\Psi\Phi_i = \Phi_i\Psi = 0$ car $\mathcal{V}(\lambda_i) \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Par construction, Ψ n'a pas de valeur propre de module 1 dans $\mathcal{V}$. C'est un opérateur borné de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{L}$ on a :

$$\|\Psi^m\|_{\mathcal{L}} = \|\Phi^m - \lambda_1^m\Phi_1 - \cdots - \lambda_p^m\Phi_p\|_{\mathcal{L}} \leq \|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} + \|\Phi_1\|_{\mathcal{L}} + \cdots + \|\Phi_p\|_{\mathcal{L}},$$

d'où $\|\Psi^m\|_{\mathcal{L}} \leq (p+1)M$. De même on a : $\|\Psi^m\|_{\mathcal{V}} \leq (p+1)H$. Ainsi $\Psi(\mathcal{V})$ est contenu dans $\mathcal{V}$ et Ψ a un rayon spectral $\rho(\Psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. □

4.3 Conséquences

D'après la proposition 4.1, on peut appliquer ce théorème à Φ. On s'intéresse à la valeur $\lambda = 1$, on définit alors $h = \Phi_1(1)$. Comme la fonction 1 est un élément de V, d'après la démonstration du théorème (2ème étape) on sait que h est dans V, il reste à montrer que h n'est pas nulle. On a $\int_0^1 hdm = 1$. En effet h est définie comme la limite dans $\mathcal{V}$ des fonctions $h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1)$. La propriété (iv) de l'opérateur de Perron-Frobenius entraîne que pour tout $n > 0$,

$$\int_0^1 h_n dm = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \int_0^1 \Phi^k(1)dm = 1.$$

Comme h est dans V donc dans $L^1(m)$, on en déduit alors que $\int_0^1 hdm = 1$ donc que h n'est pas nulle. Par construction h est positive d'après (ii) et (iv). On en déduit alors que Φ admet 1 pour valeur propre et qu'une fonction propre associée est h.

4.4 Exemples et remarques

***Exemples.* —**

- La transformation « fraction continue » :

  $$\text{sur }]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[, \text{ on a : } Tx = \frac{1}{x} - n.$$

  La réciproque vaut donc :

  $$\sigma_n x = \frac{1}{x+n} \text{ et } \sigma_n' x = \frac{-1}{(x+n)^2}.$$

  L'opérateur Φ vaut alors :

  $$\Phi f(x) = \sum_{n\geq 1} f(\frac{1}{x+n})\frac{1}{(x+n)^2} \text{ et } h(x) = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}$$

  car $\int_0^1 h(x)\,dx = 1$ et on vérifie aisément que :

  $$\Phi h(x) = \frac{1}{\log 2}\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}) = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}.$$

- Dans le cas d'une transformation linéaire par morceaux et vérifiant $T(\overline{I_j}) = I$, on a $h = 1$ et m est T-invariante.
- Pour les β-transformations, si $\beta \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 0$, $\Phi f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\beta-1} f(\frac{x+k}{\beta})$ et $\Phi 1 = 1$ donc $h = 1$.

Remarque 1. — La fonction h n'est pas obligatoirement strictement positive, par exemple si on prend $Tx = \beta x + \alpha[1], \beta^2 = \beta + 1$, $\beta > 0$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$. On a :

$$h = \frac{1}{5}(3 + 4\beta)(\mathbf{1}_{[0,(2-\beta)/2[} + \mathbf{1}_{[\beta/2,1[}) + \frac{1}{5}(3\beta + 1)(\mathbf{1}_{[(2-\beta)/2,(\beta-1)/2[} + \mathbf{1}_{[\alpha,\beta/2[}).$$

On a ainsi construit une mesure hm absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue mais non nécessairement équivalente à m tel que (T, hm) soit un système dynamique.

Remarque 2. — Dans le cas où la partition est finie, G. Keller [Ke] a montré que $\{h \neq 0\}$ est une réunion finie d'intervalles ouverts et qu'il existe $D > 0$ tel que sur $\{h \neq 0\}$, on a :

$$1/D \leq h(x) \leq D.$$

L'hypothèse de partition finie est capitale et la démonstration de Keller [Ke] ne peut pas être généralisée au cas dénombrable. Cela tient essentiellement au fait suivant : si $\{x_n, n \in \mathfrak{D}\}$ est une famille dénombrable de réels strictement positifs alors $a = \inf_{n\in\mathfrak{D}} x_n$ est positif ou nul tandis que dans le cas d'une famille finie il est strictement positif.

Un élément T de $\mathcal{C}$ sera dit markovien s'il vérifie de plus la condition suivante :

Dans le cas d'une partition finie :

(5f) Pour tout $j \in J$, il existe $K_j \subset J$ tel que $T(\bar{I}_j) = \cup_{k\in K_j} \bar{I}_k$ et il existe un entier $p > 0$ tel que pour tout $j \in J$, $T^p(\bar{I}_j) = I$.

Dans le cas d'une partition dénombrable :

(5d) Pour tout $j \in J$, $T(\bar{I}_j) = I$.

Dans le cadre markovien le "folklore theorem" donne des résultats analogues à celui de Keller :

Théorème. — *Si $T \in \mathcal{C}$ est markovien, alors T admet une mesure invariante hm équivalente à la mesure de Lebesgue et ergodique. De plus la densité h est continue par morceaux les discontinuités ont lieu uniquement aux points de séparation de la partition et il existe $D > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{D} \leq h(x) \leq D.$$

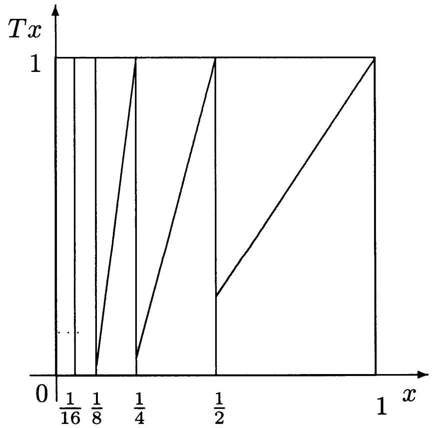
La démonstration est donnée dans [A.F] dans le cas d'une partition finie et dans [M.P.V] dans le cas d'une partition dénombrable.

Si on remplace la condition (5d) par la condition (5d′) suivante :

(5d′) L'ensemble $\{T(\bar{I}_j), j \in J\}$ est constitué d'un nombre fini d'intervalles distincts et $\{T(a_j) \colon j \in J\}$ est contenu dans $\{a_j \colon j \in J\}$.

Si on suppose que le système (T, hm) est mélangeant et que le support de h est I, alors la fonction $\frac{1}{h}$ est à variation bornée. Ce dernier résultat a été montré par Morita dans [Mo].

Remarque 3. — Dans le cas d'une partition finie comme dans le cas markovien, la fonction $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est dans V, on peut donc normaliser l'opérateur Φ ou éventuellement sa restriction à $\{h \neq 0\}$ en posant $Pg = \frac{\Phi(gh)}{h}$, ce qui simplifie les calculs car P est markovien. Cependant dans $\mathcal{C}$ il existe des éléments tels que $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ n'appartient pas à V. On va maintenant en donner un exemple qui montre bien que l'hypothèse (3) suffit pour que l'hypothèse $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est à variation bornée ne soit pas réalisée. Cet exemple est capital ici, car il justifie aussi la façon dont seront menées les démonstrations dans toute la suite : on ne normalisera pas l'opérateur Φ pour qu'il devienne markovien. Cet exemple vérifie aussi l'hypothèse (3′) et alors les théorèmes limites central et local sont vérifiés pour cette transformation. On prend la transformation T linéaire par morceaux suivante :



$$\text{si } x \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}], Tx = a_n x + b_n, n > 0$$

$$\text{avec } a_n = 2^n - \frac{1}{2^n} \text{ et } b_n = \frac{2}{4^n} - 1.$$

T envoie l'intervalle $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ dans $[\frac{1}{4^n}, 1]$. L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est :

$$\Phi f(x) = \sum_{n>0} f(\frac{x - b_n}{a_n})\frac{1}{a_n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n},1]}(x).$$

T est bien dans $\mathcal{C}$ et donc il existe h dans V, h positive et d'intégrale 1 telle que $\Phi h = h$, h est la limite dans V de la suite

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi^k 1.$$

On a :

$$\Phi\mathbf{1}(x) = \sum_{n>0} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n},1]}(x).$$

On remarque que :

$$\mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n},1]}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}]}(x),$$

ce qui prouve d'ailleurs que T est dans $\mathcal{C}'$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\Phi\mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}]}(x) &= \sum_{n>0} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}]}(\frac{x-b_n}{a_n}) \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n},1]}(x) \\
&= \sum_{n>0} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}]\cap[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]}(\frac{x-b_n}{a_n}) \\
&= \frac{1}{a_k} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}]}(\frac{x-b_k}{a_k}) = \frac{1}{a_k} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^k},1]}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\Phi^2\mathbf{1}(x) = \sum_{k_1>0} \sum_{k_2=1}^{2k_1} \frac{1}{a_{k_1}a_{k_2}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_2}},1]}(x).$$

Par récurrence, on obtient alors pour tout entier $\ell > 0$,

$$\Phi^\ell\mathbf{1}(x) = \sum_{k_1>0} \sum_{k_2=1}^{2k_1} \cdots \sum_{k_\ell=1}^{2k_{\ell-1}} \frac{1}{a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_\ell}},1]}(x).$$

Ce que l'on peut aussi écrire en utilisant le théorème de Fubini :

$$\Phi^\ell\mathbf{1}(x) = \sum_{k_\ell>0} \sum_{k_{\ell-1}\geq\frac{k_\ell}{2}} \sum_{k_{\ell-2}\geq\frac{k_{\ell-1}}{2}} \cdots \sum_{k_1\geq\frac{k_2}{2}} \frac{1}{a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_\ell}},1]}(x),$$

ou encore :

$$\Phi^\ell\mathbf{1}(x) = \sum_{k_1>0} \sum_{k_2\geq\frac{k_1}{2}} \sum_{k_3\geq\frac{k_2}{2}} \cdots \sum_{k_\ell\geq\frac{k_{\ell-1}}{2}} \frac{1}{a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_1}},1]}(x).$$

Ainsi :

$$h_n(x) = \sum_{k>0} p_k(n) \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^k},1]}(x),$$

avec

$$p_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} (\sum_{k_2\geq\frac{k}{2}} \sum_{k_3\geq\frac{k_2}{2}} \cdots \sum_{k_\ell\geq\frac{k_{\ell-1}}{2}} \frac{1}{a_k a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}}).$$

On remarque que les $p_k(n)$ sont strictement positifs car les a_k le sont. On peut donc chercher h sous la forme :

$$h(x) = \sum_{k>0} p_k \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^k},1]}(x) \text{ avec } p_k = \lim_{n\to\infty} p_k(n) \geq 0.$$

p_k existe bien car la fonction h existe dans V, on en déduit aussi que la série $\sum_{k>0} p_k$ est finie, c'est la valeur de h sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, 1]$. Comme $\Phi h = h$, on a :

$$\Phi h(x) = \sum_{k>0} p_k \sum_{\ell=1}^{2k} \frac{1}{a_\ell} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^\ell},1]}(x) = \sum_{\ell>0} \sum_{k\geq \frac{\ell}{2}} \frac{p_k}{a_\ell} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^\ell},1]}(x) = \sum_{\ell>0} p_\ell \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^\ell},1]}(x) = h(x).$$

Ainsi on a pour tout $\ell > 0$:

$$p_\ell = \sum_{k\geq\frac{\ell}{2}} \frac{p_k}{a_\ell} = \frac{1}{a_\ell} \sum_{k\geq\frac{\ell}{2}} p_k.$$

Comme la suite des a_ℓ est croissante et comme les p_k sont positifs ou nuls, on en déduit alors que les p_k forment une suite positive décroissante elle est donc convergente vers 0 car la somme $\sum_{k>0} p_k$ est finie. On montre maintenant que les p_k ne sont pas nuls, on suppose le contraire : il existe donc un plus petit entier $\ell > 0$ tel que $p_\ell = 0$, la relation précédente entraîne alors que :

$$p_\ell = \frac{1}{a_\ell} \sum_{k\geq\frac{\ell}{2}} p_k = 0$$

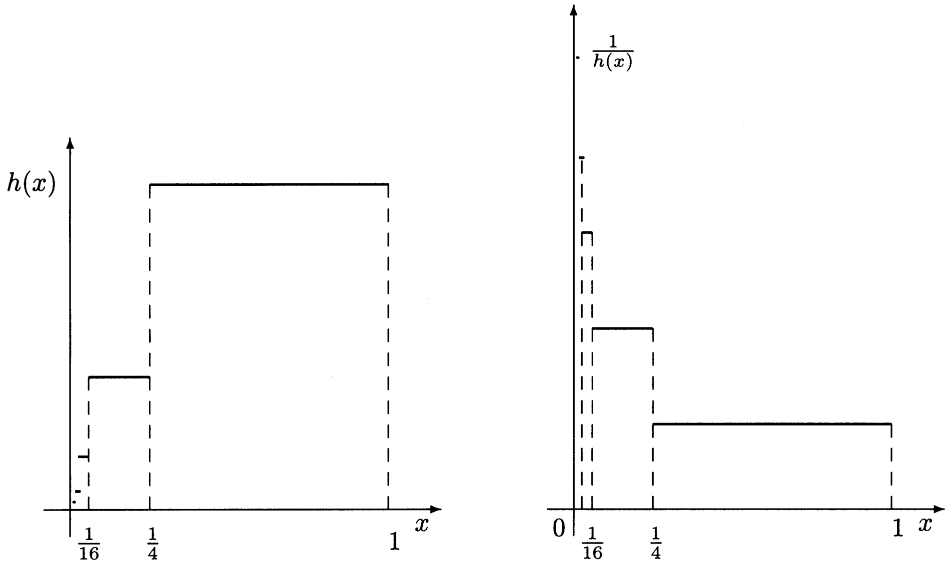
et donc :

$$p_{[\frac{\ell+1}{2}]} = \cdots = p_{\ell-1} = 0,$$

ce qui contredit le fait que ℓ soit le plus petit possible, ainsi p_ℓ est strictement positif. On en déduit que pour tout x non nul de I, $h(x)$ n'est pas nul en effet il existe un entier n_x tel que x soit dans l'intervalle $[4^{-n_x}, 4^{-(n_x-1)}]$ et alors $h(x) = \sum_{k\geq n_x} p_k$. Cette dernière égalité montre alors que :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$

D'autre part, comme 0 n'est dans aucun des intervalles $[\frac{1}{4^n}, 1]$, on a $h(0) = 0$ et donc $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ n'est pas dans V car h est continue et s'annule en 0.



On rappelle ici que T est dans $\mathcal{C}'$, les théorèmes limites central et local sont donc vérifiés pour cette transformation.

4.5 Hypothèse sur le système $(I, \mathcal{B}, T, hm)$

> Dans toute la suite, on suppose que 1 *est une valeur propre simple de* Φ. Tant que l'on ne le précisera pas (jusqu'au théorème limite local), on suppose que T est dans $\mathcal{C}$ et non pas dans $\mathcal{C}'$.

Alors le système $(I, \mathcal{B}, T, hm)$ est ergodique. On en déduit :

Proposition 4.11. — *Les autres valeurs propres de module 1 de Φ sont toutes simples et sont des racines p-ièmes de l'unité. De plus, il existe une fonction v de $L^2(hm)$ de module 1 sur I telle que pour tout $0 < j < p$, $v^j h$ est dans V, $v^p \equiv 1$ et $\Phi(v^j h) = \lambda^j v^j h$ où $\lambda = e^{2i\pi/p}$.*

La décomposition spectrale de Φ donnée par le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu peut alors s'écrire, pour f dans V et pour $k > 0$,

$$\Phi^k(f) = \Phi_0(f) + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(f) + \Psi^k(f)$$

où Φ_j est la projection de V sur l'espace $\mathbb{C}v^j h$.

Démonstration. — D'abord on montre que s'il existe u non nul dans V tel que $\Phi u = \lambda u$, avec λ de module 1, distinct de 1 alors il existe v dans $L^2(hm)$ ne s'annulant pas sur I tel que $u = vh$. En effet $|\Phi u| = |u|$, mais d'après (ii) $|\Phi u| \leq \Phi|u|$ donc

$\Phi|u| \geq |u| \geq 0$. D'après (iv) $\int_0^1 \Phi|u|dm = \int_0^1 |u|dm$. Ainsi $\Phi|u| = |u|$ m-p.p. donc on a $\Phi|u| = |u|$ dans V, comme 1 est valeur propre simple de Φ associée à h, on en déduit que $|u| = kh$ où k est une constante positive, qu'on peut toujours choisir égale à 1. On peut donc écrire $u = vh$, v est une fonction de module 1 de $L^2(hm)$ avec vh dans V et on a :

$$\Phi(vh) = \lambda vh.$$

Sur $\{h \neq 0\}$, on peut poser $P(v) = \frac{\Phi(vh)}{h}$. P admet T pour adjoint dans $L^2(hm)$ et est une contraction de $L^2(hm)$, en effet, si on note $\langle v, w\rangle_{hm}$ le produit scalaire de $L^2(hm)$:

$$\langle Pv, w\rangle_{hm} = \int_0^1 \Phi(vh) \cdot wdm = \int_0^1 v \cdot w \circ Thdm = \langle v, w \circ T\rangle_{hm}$$

$$\|Pv\|_{2,hm} = \sup_{\|w\|_{2,hm} \leq 1} |\langle Pv, w\rangle_{hm}|.$$

Comme

$$\begin{aligned} |\langle Pv, w\rangle_{hm}| &= |\int_0^1 \Phi(vh)wdm| = |\int_0^1 v \cdot w \circ Thdm| \leq \int_0^1 |v \cdot w \circ T|hdm \\ &\leq [\int_0^1 v^2 hdm]^{\frac{1}{2}} [\int_0^1 w^2 \circ Thdm]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{2,hm}\|w\|_{2,hm}, \end{aligned}$$

on a donc :

$$\|Pv\|_{2,hm} \leq \|v\|_{2,hm}.$$

Soit, maintenant, $\lambda \neq 1$ une valeur propre de module 1 de Φ. Il existe donc v dans $L^2(hm)$, ne s'annulant pas sur I et vh dans V qui vérifie :

$$\Phi(vh) = \lambda vh \text{ donc } Pv = \lambda v,$$

λ est donc une valeur propre de module 1 de P. v est un point fixe de l'opérateur $\frac{P}{\lambda}$ qui est une contraction de $L^2(hm)$ car $|\lambda| = 1$. Son adjoint dans $L^2(hm)$ est λT, en effet :

$$\begin{aligned} \langle \tfrac{P}{\lambda}v, w\rangle_{hm} &= \tfrac{1}{\lambda} \int_0^1 \Phi(vh)wdm = \tfrac{1}{\lambda} \int_0^1 v \cdot w \circ Thdm \\ &= \tfrac{1}{\lambda}\langle v, w \circ T\rangle_{hm} = \langle v, \tfrac{1}{\lambda} w \circ T\rangle_{hm} \end{aligned}$$

et $\lambda\overline{\lambda} = 1$ d'où $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$. Dans un espace de Hilbert, les points fixes d'une contraction sont ceux de son adjoint. Ainsi

$$\lambda v \circ T = v.$$

Si v_1 est dans V et vérifie aussi $\lambda v_1 \circ T = v_1$ alors comme v ne s'annule pas sur I on a :

$$(\frac{v_1}{v}) \circ T = \frac{v_1}{v}.$$

Alors

$$\Phi(\frac{v_1}{v} \circ T \cdot h) = \Phi(\frac{v_1}{v} \cdot h) \text{ i.e. } \frac{v_1}{v}h = \Phi(\frac{v_1}{v} \cdot h).$$

Donc $\frac{v_1}{v}$ est une constante et $\frac{P}{\lambda}$ n'admet qu'un espace vectoriel de dimension 1 comme invariant, c'est-à-dire λ est une valeur propre simple de P et donc de Φ.

On montre maintenant que les valeurs propres de Φ sont les racines p-ièmes de l'unité. Si $a \neq 1$ est une valeur propre de Φ de module 1 associée à vh, on a pour tout x de I :

$$av(x)h(x) = \sum_{j \in J} v(\sigma_j x) \frac{h(\sigma_j x)}{|T(\sigma_j x)'|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

Pour tout x de $\{h \neq 0\}$, l'équation précédente représente un barycentre de points de module 1 qui reste de module 1 donc, pour tout x de I tel que $h(\sigma_j x)\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \neq 0$ et $h(x) \neq 0$ on a :

$$av(x) = v(\sigma_j x).$$

On a aussi, pour tout $n > 0$, pour tout j de J :

$$a^n v^n(x) = v^n(\sigma_j x),$$

donc

$$\Phi(v^n h) = a^n v^n h.$$

$v^n h$ est dans $L^2(hm)$, V est dense dans $L^2(hm)$, $v^n h$ peut s'écrire à une constante multiplicative près comme la limite de la suite $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a^{nj}} \Phi^j(\varphi)$ où φ est une fonction quelconque bien choisie de V, d'après la preuve du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu cette suite admet une limite dans V, $v^n h$ est donc dans V et est une fonction propre de Φ associée à a^n. Comme Φ n'admet que p valeurs propres de module 1 distinctes, on en déduit qu'elles forment un groupe fini de cardinal p du disque unité. Ainsi :

$$\{1, \lambda_2, ..., \lambda_p\} = \{1, \lambda, ..., \lambda^{p-1}\}$$

avec $\lambda = e^{2i\pi/p}$. Les fonctions propres s'écrivent h, vh,..., $v^{p-1}h$, comme elles sont simples, on en déduit que $v^p \equiv 1$. □

On veut maintenant démontrer le théorème limite central suivant : soit f un élément de V à valeurs réelles, on pose

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k,$$

sous l'hypothèse

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm > 0$$

et si $m(fh) = 0$ on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-u^2/2} du \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathbb{R}.$$

D'après la méthode des fonctions caractéristiques de Paul Lévy, il suffit de prouver que pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm = e^{-t^2/2}.$$

On remarque que :

$$\int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm = \int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot h \cdot 1 \circ T^n dm = \int_0^1 \Phi^n [e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot h] dm.$$

On est donc amené à étudier $\Phi^n[e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot h]$ et pour cela à construire un nouvel opérateur $\Phi_f(i\theta)$ vérifiant pour tout g de V et tout θ réel :

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[e^{i\theta S_n f} g].$$

5 LES PERTURBATIONS DE L'OPÉRATEUR Φ

On perturbe l'opérateur Φ : soit f une fonction réelle appartenant à V, pour tout θ dans $\mathbb{C}$, on définit l'opérateur $\Phi_f(\theta)$ par :

$$\Phi_f(\theta)(g) = \Phi[\exp(\theta f) \cdot g] \text{ où } g \text{ est dans } V.$$

Proposition 5.1. — *L'opérateur $\Phi_f(\theta)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(P1) $\Phi_f(0) = \Phi$.

(P2) Pour tout θ de $\mathbb{C}$, $\Phi_f(\theta)$ est un opérateur continu de V.

(P3) L'application $\theta \mapsto \Phi_f(\theta)$ est analytique.

(P4) Pour tout entier $n > 0$, pour tout complexe θ, on a l'égalité m-presque partout :

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \cdot g] \quad \text{où } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

La propriété (P4) permet de faire l'étude de $S_n f$ en utilisant les propriétés spectrales de $\Phi_f(\theta)$.

Démonstration. —

(P2) : On montre d'abord que si f est dans V et θ dans $\mathbb{C}$ alors $\exp(\theta f)$ est dans V. On a :

$$\|\exp(\theta f)\|_1 = \int_0^1 |\exp(\theta f)|dm = \int_0^1 \exp(Re\theta f)dm \leq \exp(|Re\theta|\|f\|_v) < \infty,$$

donc $\exp(\theta f)$ est dans $L^1(m)$. Pour toute subdivision $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ finie de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} |\exp(\theta f)(a_i) - \exp(\theta f)(a_{i+1})| &= \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\exp(\theta f(a_{i-1})) - \exp(\theta f(a_i))}{f(a_i) - f(a_{i-1})}\right| |f(a_i) - f(a_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \sup_{x\in f(I)} [|\theta \exp(\theta x)|].\end{aligned}$$

Ainsi
$$v[\exp(\theta f)] \leq K_f|\theta|v(f) < \infty.$$
On fixe maintenant θ dans $\mathbb{C}$ et g dans V
$$\|\Phi_f(\theta)(g)\|_v \leq \|\Phi\|_v \cdot \|\exp(\theta f)\cdot g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(\theta f)\|_v \cdot \|g\|_v.$$
D'où la continuité de $\Phi_f(\theta)$ dans V et on a : $\|\Phi_f(\theta)\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(\theta f)\|_v$.

(P3) : Comme
$$\|\frac{\theta^n}{n!}\Phi(f^n\cdot g)\|_v \leq \frac{|\theta|^n}{n!}\|\Phi\|_v \cdot \|f^n g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|g\|_v \frac{[2|\theta|\cdot\|f\|_v]^n}{n!},$$
la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\Phi(f^n g)$ est normalement convergente dans V et sa limite vaut $\Phi_f(\theta)(g)$. Ainsi la fonction $\theta \mapsto \Phi_f(\theta)$ est analytique.

(P4) : On montre d'abord que pour f, g dans V l'on a :
$$\Phi[f\circ T\cdot g] = f\cdot\Phi g \ m\text{-presque partout.}$$
Si f est dans V et ϕ dans $L^\infty(m)$, on note $\langle f,\phi\rangle$ pour $\int_0^1 f\phi dm$. On a par définition de Φ,
$$\begin{aligned}\langle\Phi(f\circ T\cdot g),\phi\rangle &= \langle f\circ T\cdot g, \phi\circ T\rangle\\ &= \langle g,(f\cdot\phi)\circ T\rangle \text{ car } f\in V\Rightarrow f\in L^\infty(m)\\ &= \langle\Phi g,\phi\cdot f\rangle = \langle f\cdot\Phi g,\phi\rangle.\end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout ϕ de $L^\infty(m)$, on en déduit que $\Phi[f\circ T\cdot g] = f\cdot\Phi g$ m-presque partout. On peut alors démontrer (P4) par récurrence sur n :
c'est vrai au rang 1 par définition de $\Phi_f(\theta)$.
On suppose que $\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n[\exp(\theta S_n f)\cdot g]$ m-p.p.
Alors, il existe N_1 dans $\mathcal{B}, m(N_1) = 0$ et sur $I\setminus N_1$ on a :
$$\begin{aligned}\Phi_f^{n+1}(\theta)(g) &= \Phi_f^n(\theta)[\Phi_f(\theta)(g)]\\ &= \Phi^n[\exp(\theta S_n f)\cdot\Phi_f(\theta)(g)]\\ &= \Phi^n[\exp(\theta S_n f)\Phi(\exp(\theta f)g)].\end{aligned}$$
Il existe N_2 dans $\mathcal{B}$ tel que $m(N_2) = 0$ et sur $I\setminus N_2$ on a :
$$\begin{aligned}\Phi[\exp(\theta f)\cdot g]\exp(\theta S_n f) &= \Phi[\exp(\theta S_n f)\circ T\cdot\exp(\theta f)\cdot g]\\ &= \Phi[\exp(\theta S_{n+1} f)\cdot g].\end{aligned}$$
Soit alors $N_3 = N_1\cup N_2$, on a : $m(N_3) = 0$ et sur $I\setminus N_3$,
$$\Phi_f^{n+1}(\theta)(g) = \Phi^n[\Phi((\exp\theta S_{n+1}f)\cdot g)] = \Phi^{n+1}[\exp(\theta S_{n+1}f)g]. \quad \square$$

Le spectre de $\Phi_f(\theta)$ est donné par le théorème des perturbations.

Proposition 5.2. — *Il existe un réel $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, alors pour tout $n \geq 1$, pour tout g de V, on peut écrire :*

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \lambda_0^n(\theta)\Phi_0(\theta)(g) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g).$$

Avec :

- *les applications $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$, $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ et $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$ sont analytiques dans un voisinage de $\theta = 0$;*
- *$\lambda_k(0) = \lambda^k$ et $\lambda_k(\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(\theta)$ de module plus grand que $\frac{2+\rho(\Psi)}{3} = \rho_2$;*
- *les opérateurs $\Phi_k(\theta)$ sont des projections de V sur le sous espace propre $V(\lambda_k(\theta))$ qui est de dimension 1 et $\Phi_k(0) = \Phi_k$, $(\Phi_0(f) = m(fh) \cdot h)$;*
- *l'opérateur $\Psi_f(\theta)$ est un opérateur sur V de rayon spectral $\rho(\Psi_f(\theta)) \leq \rho_2$, $\Psi_f(0) = \Psi$ et pour tout $0 \leq k \leq p-1$:*

$$\Psi_f(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Psi_f(\theta) = 0 \text{ et } \|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_v \leq C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Démonstration. — Elle est reprise du chapître VII du livre de Dunford et Schwartz [D.S].

Résultats préliminaires

Notations. — $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des opérateurs de V à valeurs dans V.

Si Φ est dans $\mathfrak{D}$, on note :

$$\begin{aligned} \rho(\Phi) &= \{z \in \mathbb{C} \colon \lambda I - \Phi \text{ est inversible dans } \mathfrak{D}\} \\ \sigma(\Phi) &= \mathbb{C} \setminus \rho(\Phi). \end{aligned}$$

Si z est dans $\rho(\Phi)$, $R(z, \Phi) = (zI - \Phi)^{-1}$ existe dans V. $\mathfrak{F}(\Phi)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f qui sont analytiques dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$. Si f est dans $\mathfrak{F}(\Phi)$, si U est un ouvert qui contient $\sigma(\Phi)$ dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan orientés positivement et si $U \cup B$ est contenu dans le domaine d'analycité de f, alors $f(\Phi)$ est défini par :

$$f(\Phi) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B f(z)R(z, \Phi)dz.$$

Cette égalité est la généralisation de la formule de Cauchy dans $\mathbb{C}$, elle est la clé de toute la démonstration.

Lemme 5.3. — *L'ensemble $\mathfrak{G}$ des éléments de $\mathfrak{D}$ qui admettent un inverse dans $\mathfrak{D}$ est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs dans $\mathfrak{D}$. De plus l'application $\begin{cases} \mathfrak{G} & \to \mathfrak{G} \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}$ est un homéomorphisme pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs dans $\mathfrak{D}$.*

Démonstration. — On rappelle d'abord que dans V, on a :

$$\|AB\|_v \leq 2\|A\|_v\|B\|_v.$$

$\mathcal{G}$ n'est pas vide, car l'opérateur identité est dans $\mathcal{G}$. On montre que si A est dans $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}$ contient la sphère $S_A = \{B \in \mathcal{D} \colon \|B - A\|_v < \frac{1}{4}\|A^{-1}\|_v^{-1}\}$. Si B est dans S_A, B^{-1} vaut $A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}((A-B)A^{-1})^n$ et alors :

$$\begin{aligned}
\|B^{-1} - A^{-1}\|_v &\leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} \|((A-B)A^{-1})^n\|_v \\
&\leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \|A-B\|_v^n \cdot \|A^{-1}\|_v^n \\
&\leq C\|A-B\|_v \text{ car } B \text{ est dans } S_A
\end{aligned}$$

$$\text{ainsi } \begin{cases} \mathcal{G} & \to \mathcal{G} \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases} \text{ est un homéomorphisme.} \ \square$$

Corollaire 5.4. — *Si Φ_0 et Φ sont dans $\mathcal{D}$, si z est dans $\rho(\Phi)$ et si $\|\Phi - \Phi_0\|_v < \frac{1}{4}\|R(z,\Phi)\|_v^{-1}$ alors z est dans $\rho(\Phi_0)$ et :*

$$R(z,\Phi_0) = R(z,\Phi)\sum_{n=0}^{\infty}[(\Phi - \Phi_0)R(z,\Phi)]^n.$$

On a pour z et z', $z \neq z'$, dans $\rho(\Phi)$:

$$R(z,\Phi)R(z',\Phi) = \frac{1}{z'-z}[R(z,\Phi) - R(z',\Phi)].$$

En effet :

$$(zI - \Phi)R(z,\Phi)R(z',\Phi)(z'I - \Phi) = I$$

$$\text{et } (zI-\Phi)[R(z,\Phi) - R(z',\Phi)](z'I - \Phi) = [z'I - \Phi - zI + \Phi] = (z'-z)I.$$

Lemme 5.5. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ dont l'adhérence est contenue dans $\rho(\Phi)$, alors il existe $r > 0$ tel que si $|\theta| < r$, on a :*

$$\overline{U} \subset \rho(\Phi_f(\theta))$$

et pour tout z de U, $\theta \mapsto R(z,\Phi_f(\theta))$ est une fonction analytique au voisinage de $\theta = 0$.

Démonstration. — D'après le corollaire 5.4, on sait que pour tout z de $\rho(\Phi)$,

$$\text{si } \|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \frac{1}{4}\|R(z,\Phi)\|_v^{-1} \text{ alors } z \in \rho(\Phi_f(\theta)).$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ dont l'adhérence est contenue dans $\rho(\Phi)$, alors pour tout λ de $\overline{U}$, $R(\lambda, \Phi)$ est dans V et n'est pas nul. Comme :

$$\lim_{|z|\to\infty} \|R(z,\Phi)\|_v = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|} \|(I - \frac{\Phi}{z})^{-1}\|_v = 0,$$

on a alors :

$$\delta = \inf_{z\in\overline{U}} \frac{1}{4} \|R(z,\Phi)\|_v^{-1} > 0.$$

Maintenant, si pour tout z de $\overline{U}$, on a :

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \delta$$

on en déduit que :

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \frac{1}{4} \|R(z,\Phi)\|_v^{-1}$$

et donc z est dans $\rho(\Phi_f(\theta))$, ainsi $\overline{U}$ est contenu dans $\rho(\Phi_f(\theta))$.

De plus $R(z, \Phi_f(\theta)) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(\theta))R(z, \Phi)]^n$ est une série qui converge normalement pour $\|\cdot\|_v$ et pour la norme de la convergence uniforme des opérateurs de $\mathfrak{D}$. Comme la fonction $\theta \mapsto \Phi - \Phi_f(\theta)$ est analytique au voisinage de 0, on en déduit alors que $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est analytique pour tout z de U dès que $\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \delta$. Cette condition, à cause de (P1) et (P4) revient à $|\theta| < r$. D'où le lemme 5.5. □

Lemme 5.6. — *Soit g un élément de $\mathfrak{F}(\Phi)$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $|\theta| < r$, g est dans $\mathfrak{F}(\Phi_f(\theta))$ et $g(\Phi_f(\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ au voisinage de $\theta = 0$.*

Démonstration. — Soit U un voisinage de $\sigma(\Phi)$ sur lequel g est analytique. Soit U_1 un voisinage de $\sigma(\Phi)$ dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs de Jordan orientés positivement et tel que $U_1 \cup B$ soit contenu dans U. D'après le lemme précédent, il existe un réel $r > 0$ tel que si $|\theta| < r$ alors la fonction $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est analytique le long de B et la série $R(z, \Phi_f(\theta)) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(\theta))R(z, \Phi)]^n$ converge uniformément pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs de $\mathfrak{D}$ et normalement dans $(V, \|\cdot\|_v)$. Ainsi

$$g(\Phi_f(\theta)) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B g(z) R(z, \Phi_f(\theta)) dz$$

se développe au voisinage de 0 en une série entière en θ et donc $g(\Phi_f(\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ si $|\theta| < r$.

Démonstration de la Proposition 5.2. —

On construit dans un premier temps les opérateurs $\Phi_k(\theta)$ et $M(\theta)$. Les points $(\lambda^k)_{0\le k\le p-1}$ sont des points isolés du spectre de Φ, pour tout k, il existe donc un réel $r_k > 0$ tel que :

$$B(\lambda^k, r_k) \cap \sigma(\Phi) = \{\lambda^k\},$$

on prend par exemple $r_k = \inf\{\frac{1-\rho(\Psi)}{3}, \frac{|\lambda^k-\lambda^j|}{2} j \neq k\}$. Ainsi les cercles $(C(\lambda^k, r_k))_k$ et $C(0, \frac{2\rho(\Psi)+1}{3}) = C(0, \rho_2)$ sont entièrement contenus dans $\rho(\Phi)$. On note B la réunion de tous ces cercles, c'est une courbe constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan, on va supposer que B est orientée positivement.

Pour $0 \leq k \leq p-1$, on définit les opérateurs :

$$\Phi_k(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz.$$

$$M(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,\rho_2)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz.$$

Comme pour tout z de B, la fonction $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est analytique au voisinage de $\theta = 0$, on en déduit qu'il existe un réel $\theta_0 > 0$ tel que les fonctions $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ et $\theta \mapsto M(\theta)$ sont analytiques sur $\{|\theta| < \theta_0\}$.

On remarque l'opérateur $\Phi_k(\theta)$ ne dépend pas du domaine d'intégration choisi, on peut prendre n'importe quel arc rectifiable de Jordan contenu dans $\rho(\Phi)$ dont l'intérieur ne contient que le point λ^k de $\sigma(\Phi)$. Il en est de même pour $M(\theta)$. On peut donc écrire que :

$$\Phi_k(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz'$$

avec $0 < r'_k < r_k$.

On peut alors montrer que ces opérateurs sont des projections :

$$\begin{aligned}
\Phi_k(\theta)\Phi_k(\theta) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz' \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C(\lambda^k, r_k) \times C(\lambda^k, r'_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) R(z', \Phi_f(\theta)) dz' dz \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C(\lambda^k, r_k) \times C(\lambda^k, r'_k)} \frac{[R(z, \Phi_f(\theta)) - R(z', \Phi_f(\theta))]}{z' - z} dz' dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} \frac{dz}{z - z'} dz' \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta))] \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} \frac{dz'}{z' - z} dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz' = \Phi_k(\theta)
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini et le théorème des résidus. De la même façon on obtient :

$$\Phi_k(\theta)M(\theta) = M(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Phi_j(\theta) = 0, \quad M(\theta)M(\theta) = M(\theta).$$

De plus pour $|\theta| < \theta_0$ on peut écrire :

$$I = \Phi_0(\theta) + \Phi_1(\theta) + \cdots + \Phi_{p-1}(\theta) + M(\theta)$$

où les fonctions $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ et $\theta \mapsto M(\theta)$ sont analytiques en θ et $\Phi_k(0) = \Phi_k$.

On montre maintenant qu'il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que si $|\theta| < b_k$ alors $\dim \Phi_k(\theta)(V) = \dim \Phi_k(V) = 1$.

Comme $\Phi_k(0) = \Phi_k$ et comme $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ est analytique en θ au voisinage de 0, il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que :

$$\text{si } |\theta| < b_k \text{ alors } \|\Phi_k(\theta) - \Phi_k\|_v < 1.$$

Si on suppose que $\dim \Phi_k(\theta)(V) \geq 2$, alors il existe h_1 et h_2 dans $\Phi_k(\theta)(V)$ qui sont linéairement indépendantes. Comme $\dim \Phi_k(V) = 1$, il existe un scalaire λ tel que : $\Phi_k(h_1) = \lambda \Phi_k(h_2)$, on pose $h = h_1 - \lambda h_2$. h n'est pas nulle et appartient à V. Comme on a : $[\Phi_k - \Phi_k(\theta)](h) = -h$, la condition $\|\Phi_k - \Phi_k(\theta)\|_v < 1$ n'est pas valable. Donc si $|\theta| < b_k$ on a :

$$\dim \Phi_k(\theta)(V) = 1.$$

On construit maintenant les fonctions $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$. Soit g_k une base $\Phi_k(V)$, il existe $0 < \bar{b}_k \leq b_k$ tel que si $|\theta| < \bar{b}_k$ alors $\Phi_k(\theta)(g_k)$ est une base de $\Phi_k(\theta)(V)$. En effet $\Phi_k(g_k) = g_k$ qui n'est pas nulle en $\theta = 0$ donc elle n'est pas nulle dans un voisinage de 0 car $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ est analytique en θ. $\Phi_k(\theta)(g_k)$ est donc bien une base de $\Phi_k(\theta)(V)$ si $|\theta| < \bar{b}_k$. On a alors pour $|\theta| < \bar{b}_k$:

$$\Phi_f(\theta)[\Phi_k(\theta)(g_k)] = \Phi_k(\theta)[\Phi_f(\theta)(g_k)] = \lambda_k(\theta)\Phi_k(\theta)(g_k).$$

La fonction $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ vaut λ_k en 0 et est analytique en θ comme produit de fonctions analytiques en θ. On en déduit alors qu'il existe $0 < \bar{\bar{b}}_k \leq \bar{b}_k$ tel que si $|\theta| < \bar{\bar{b}}_k$ alors $\lambda_k(\theta)$ est dans $B(\lambda^k, r_k)$. On a alors démontré que $\lambda_k(\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(\theta)$ et que l'espace propre associé $\Phi_k(\theta)(V)$ est de dimension 1 pour $|\theta| \leq \bar{\bar{b}}_k$.

On construit maintenant l'opérateur $\Psi_f(\theta)$. On pose d'abord

$$a = \inf\{\bar{\bar{b}}_k, 1 \leq k \leq p\},$$

a est strictement positif. Pour $|\theta| < a$, on a, si $k \neq j$:

$$\Phi_k(\theta)\Phi_j(\theta) = 0.$$

On pose maintenant $\Psi_f(\theta) = M(\theta)\Phi_f(\theta) = \Phi_f(\theta)M(\theta)$. Pour $|\theta| < a$, la fonction $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$ est analytique en θ comme composée de fonctions analytiques en θ et on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout g de V :

$$|\theta| < a \Rightarrow \Phi_f^n(\theta)(g) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g).$$

Comme $\Phi_f(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B zR(z, \Phi_f(\theta))dz$ et comme $\Psi_f(\theta) = \Phi_f(\theta)M(\theta)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \Psi_f(\theta) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_B zR(z, \Phi_f(\theta))M(\theta)dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,\rho_2)} zR(z, \Phi_f(\theta))dz \end{aligned}$$

car on a $R(z, \Phi_f(\theta))M(\theta) = 0$ le long de $C(\lambda^k, r_k)$ et $R(z, \Phi_f(\theta))M(\theta) = R(z, \Phi_f(\theta))$ le long de $C(0, \rho_2)$. On a donc de même pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\Psi_f^n(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,\rho_2)} z^n R(z, \Phi_f(\theta))dz = \frac{1}{2\pi}\rho_2^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(n+1)} R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))d\alpha.$$

Alors :

$$\|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_v \leq \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))(h)\|_v d\alpha.$$

Mais $R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))(h)$ vaut 0 en $\theta = 0$. Comme $\theta \mapsto R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))$ est un opérateur analytique pour tout α de $[0, 2\pi]$ on en déduit que :

$$\|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))\|_v \leq C|\theta|$$

avec

$$C = \sup_{\substack{\alpha\in[0,2\pi] \\ |\theta|<a}} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi)(\frac{\Phi - \Phi_f(\theta)}{\theta})R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))\|_v$$

comme $\theta \mapsto \frac{\Phi - \Phi_f(\theta)}{\theta}$ est analytique en θ, la constante C est finie. Alors on a :

$$\|\Psi_f^n(\theta)(h)\| \leq \int_0^{2\pi} C|\theta| d\alpha \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} = C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 5.2. □

Remarques. —

Si θ est un imaginaire pur alors $|e^{\theta f}| = 1$, on a donc

$$\|\Phi_f(\theta)\|_1 \leq \|\Phi\|_1 \leq 1 \text{ et donc } |\lambda_k(\theta)| \leq 1.$$

L'hypothèse, les valeurs propres de Φ de module 1 sont simples, est capitale pour avoir $\theta \longmapsto \lambda_k(\theta)$ est analytique en θ dans un voisinage de $\theta = 0$. Sinon, si λ^k est une valeur propre de module 1 de multiplicité m, on a $\theta \longmapsto \lambda_k(\theta)$ est une fonction analytique de la variable $\theta^{1/m}$.

Ici on a fait la démonstration avec une perturbation analytique, on aurait très bien pu prendre une famille d'opérateurs qui dépend de θ de façon C^k, $k \geq 0$ dans un voisinage de $\theta = 0$. On aurait alors les mêmes conclusions en remplaçant « analytique dans un voisinage de $\theta = 0$ » par « de classe C^k dans un voisinage de $\theta = 0$ ». On peut même améliorer un peu l'étude spectrale de $\Phi_f(\theta)$.

On va prouver la proposition suivante, elle servira quand on démontrera les théorèmes de grands écarts :

Proposition 5.7. — *Il existe un réel $0 < b < a$, tel que pour tout nombre complexe $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, avec $|\theta_1| < b$, l'opérateur $\Phi_f(\theta_1 + i\theta_2)$ a un ensemble fini $G(\theta_1 + i\theta_2)$ de valeurs propres de module $|\lambda(\theta_1)|$ où $|\lambda(\theta_1)| = \sup_{0 \leq k \leq p-1} |\lambda_k(\theta_1)|$. On peut alors écrire, pour tout g de V, pour tout entier n,*

$$\Phi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g) = \sum_{\mu \in G(\theta_1 + i\theta_2)} \mu^n \Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)(g) + \Psi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g)$$

où $\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)$ est le projecteur de V sur $V(\mu)$ qui est de dimension finie et où $\Psi_f(\theta_1 + i\theta_2)$ est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à $|\lambda(\theta_1)|$, ils vérifient de plus :

$$\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)\Phi_{\mu'}(\theta_1 + i\theta_2) = 0 \quad si\ \mu \neq \mu',$$

$$\Phi_\mu^2(\theta_1 + i\theta_2) = \Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)$$

$$\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)\Psi_f(\theta_1 + i\theta_2) = \Psi_f(\theta_1 + i\theta_2)\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2) = 0.$$

Remarques. —

Pour θ dans $\mathbb{R}$, $|\theta| < b$ l'opérateur $\Phi_f(\theta)$ vérifie aussi le théorème des perturbations, c'est-à-dire que l'on peut développer, au voisinage de $\alpha = 0$, $\Phi_f(\theta + i\alpha)$ en α.

Ce résultat est uniquement local, on utilise pour le démontrer uniquement le fait que T est dans $\mathcal{C}$ et non pas la condition plus forte $(3')$ que vérifient les éléments de $\mathcal{C}'$.

Démonstration. — On va utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu ; on l'applique à l'opérateur $\frac{1}{\lambda(\theta_1)}\Phi_f(\theta_1 + i\theta_2)$ où $\lambda(\theta_1)$ désigne la valeur propre de $\Phi_f(\theta_1)$ qui réalise le supremum :

$$|\lambda(\theta_1)| = \sup_{0 \leq k \leq p-1} |\lambda_k(\theta_1)|.$$

On doit donc vérifier les conditions (b) et (c) du théorème 4.2. Soit g dans V, on a :

$$|\Phi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g)| = |\Phi^n(e^{(\theta_1 + i\theta_2)S_n f} g)| \leq \Phi^n(e^{\theta_1 S_n f}|g|) = \Phi_f^n(\theta_1)(|g|).$$

D'après le théorème des perturbations, comme $|\theta_1| < a$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_f^n(\theta_1)(|g|) &= \sum_{k=0}^{p-1}[\lambda_k(\theta_1)]^n \Phi_k(\theta_1)(|g|) + \Psi_f^n(\theta_1)(|g|)\\ &\leq |\lambda(\theta_1)|^n \sum_{k=0}^{p-1} \Phi_k(\theta_1)(|g|) + \Psi_f^n(\theta_1)(|g|).\end{aligned}$$

Donc :

$$\|\frac{\Phi_f^n(\theta_1+i\theta_2)(g)}{\lambda^n(\theta_1)}\|_1 \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|\Phi_k(\theta_1)(|g|)\|_1 + \|\Psi_f^n(\theta_1)(|g|)\|_1.$$

Comme Φ_k est une projection, on a :

$$\|\Phi_k(\theta_1)(|g|)\|_1 \leq \|g\|_1.$$

Comme Ψ_f est un opérateur de rayon spectral strictement plus petit que 1 sur V, on a :

$$\|\Psi_f^n(\theta_1)(|g|)\|_1 \leq C\|g\|_1.$$

Donc il existe H tel que

$$\sup_{n>0}\{\|\frac{\Phi_f^n(\theta_1+i\theta_2)(g)}{\lambda^n(\theta_1)}\|_1, \|g\|_1 \leq 1, g \in V\} \leq H < \infty.$$

On vérifie maintenant la condition de Doeblin-Fortet, il suffit de montrer qu'il existe $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ tels que pour g dans V, on ait :

$$v(\frac{\Phi_f^{n_0}(\theta_1+i\theta_2)(g)}{\lambda^{n_0}(\theta_1)}) \leq \alpha v(g) + \beta\|g\|_1.$$

Or

$$v(\frac{\Phi_f^{n_0}(\theta_1+\theta_2)(g)}{\lambda^{n_0}(\theta_1)}) = \frac{1}{|\lambda(\theta_1)|^{n_0}} \sup\sum_{\ell=1}^{m} |\Phi_f^{n_0}(\theta_1+i\theta_2)(g)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1+i\theta_2)(g)(a_{\ell+1})|.$$

Comme :

$$\begin{aligned}&|\Phi_f^{n_0}(\theta_1+i\theta_2)(g)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1+i\theta_2)(g)(a_{\ell+1})|\\ &= |\sum_{j\in J_{n_0}} [[[\frac{e^{(\theta_1+i\theta_2)S_{n_0}f}\cdot g}{|(T^{n_0})'|}] \circ \sigma_j \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)}](a_\ell)\\ &- [[\frac{e^{(\theta_1+i\theta_2)S_{n_0}f}\cdot g}{|(T^{n_0})'|}] \circ \sigma_j \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)}](a_{\ell-1})]|\\ &\leq |\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_{\ell-1})| + 2|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_\ell)|\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}
|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_\ell) \quad &- \quad \Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_{\ell-1})| \\
&\leq \quad |\Phi^{n_0}(|g|)(a_\ell) - \Phi^{n_0}(|g|)(a_{\ell-1})| \cdot \sup|e^{\theta_1 S_{n_0} f}| \\
&+ \quad |e^{\theta_1 S_{n_0} f(a_\ell)} - e^{\theta_1 S_{n_0} f(a_{\ell-1})}| \cdot \sum_{j \in J_{n_0}} |\frac{g}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)}|(a_{\ell-1}) \\
&\leq \quad [\sup e^{\theta_1 f}]^{n_0} [|\Phi^{n_0}(|g|)(a_\ell) - \Phi^{n_0}(|g|)(a_{\ell-1})| \\
&+ \quad 2 \sum_{j \in J_{n_0}} |\frac{g}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j(a_{\ell-1}) \mathbf{1}_{T^{n_0}(I_j)}(a_{\ell-1})|].
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$v(\frac{\Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)}{[\lambda(\theta_1)]^{n_0}}) \leq \frac{1}{|\lambda(\theta_1)|^{n_0}} [[\sup e^{\theta_1 f}]^{n_0} [v(\Phi^{n_0}(|g|)) + 2\|g\|_1] + 2\|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)\|_1].$$

Mais il existe $K(f, \theta_1, n_0)$ et $K_1(n_0)$ tels que

$$\|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)\|_1 \leq K(f, \theta_1, n_0)\|g\|_1,$$

$$v(\Phi^{n_0}|g|) \leq \frac{2}{\gamma} v(g) + K_1(n_0)\|g\|_1.$$

Comme il existe $0 < b < a$ tel que si $|\theta_1| < b$

$$[\frac{\sup e^{\theta_1 f}}{|\lambda(\theta_1)|}] < 1,$$

alors comme $\gamma > 2$:

$$\alpha = \frac{2}{\gamma} [\frac{\sup e^{\theta_1 f}}{|\lambda(\theta_1)|}]^{n_0} < 1.$$

Alors :

$$0 < \beta = [K(f, \theta_1, n_0) + (K_1(n_0) + 2) \cdot (\sup e^{\theta_1 f})^{n_0}] \frac{1}{|\lambda(\theta_1)|} < \infty.$$

On applique alors le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, on a donc les résultats annoncés. □

On dispose maintenant de tous les outils, on peut alors démontrer le théorème limite central.

6 THÉORÈME LIMITE CENTRAL

Jusqu'ici, on n'a eu besoin que de l'hypothèse (3) et non (3′) pour démontrer les résultats précédents qui sont les seuls qui vont servir dans la démonstration du théorème limite central. On fixe donc une transformation T de $\mathcal{C}$ et on rappelle que le système dynamique $(I, \mathcal{B}, T, hm)$ est ergodique. On fixe f un élément de V, à valeurs réelles, on suppose, quitte à lui enlever une constante, que $m(fh) = 0$. On veut étudier le comportement des sommes

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k.$$

On va d'abord démontrer le résultat capital de cette partie.

6.1 Calcul de la variance

Proposition 6.1. — *La suite $M_N = \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 hdm$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$, soit σ^2 sa limite. On a les équivalences suivantes.*

$$\begin{aligned} \sigma^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f = u - u \circ T \text{ dans } L^2(hm), \text{ avec } u \text{ dans } L^2(hm) \text{ et } uh \text{ dans } V \\ &\Leftrightarrow \quad fh = uh - u \circ T \cdot h \text{ dans } V. \end{aligned}$$

Démonstration. — Elle se fait en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE : On démontre l'existence de la limite de la suite $(M_N)_{N>0}$

$$\begin{aligned} M_N &= \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 hdm = \frac{1}{N} \langle S_N f, S_N f \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, f \circ T^\ell \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \left[N \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \right] \end{aligned}$$

car la mesure hm est invariante par T.

On désigne par P l'opérateur adjoint de T par rapport à la mesure hm dans l'espace de Hilbert $L^2(hm)$, P est défini par l'égalité :

$$\langle Pf, g\rangle_{hm} = \langle f, g\circ T\rangle_{hm} \ f, g \text{ appartenant à } L^2(hm).$$

Les deux remarques suivantes vont permettre de donner la décomposition spectrale de P au point f.

Remarque 1. **—**

Si f et g sont dans V, alors P est aussi l'opérateur adjoint de T pour la dualité $L^1(hm)$-$L^\infty(hm)$.

Si f est dans V, donc dans $L^1(hm)$ et $L^2(hm)$ on a :

$$Pf\cdot h = \Phi(fh) \ m\text{-p.p.}$$

et donc :

$$Pf = \frac{\Phi(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}} \ hm\text{-p.p.}$$

Comme f est dans V, on en déduit que pour tout $k>0$, on a :

$$\begin{aligned}
P^k f &= \frac{\Phi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}\\
&= m(fh)\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}} + \sum_{j=2}^{p}\lambda_j^k\frac{\Phi_j(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}\\
P^k f &= \sum_{j=2}^{p}\lambda_j^k\frac{\Phi_j(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}
\end{aligned}$$

où :

$$\left\|\frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}\right\|_{1,hm} \le \|\Psi^k(fh)\|_v \le \rho^k\|fh\|_v \le C_f\rho^k\|f\|_{1,hm}$$

avec $0<\rho<1$. Comme $\|fh\|_v = \|fh\|_1 + v(fh) = \|f\|_{1,hm} + v(fh)$. $v(fh)$ étant fini, il existe donc une constante $C_f \ge 1$ telle que $v(fh) \le (C_f - 1)\|f\|_{1,hm}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
M_N &= \langle f, f\rangle_{hm} + 2\sum_{k=1}^{N-1}(1-\frac{k}{N})\langle f\circ T^k, f\rangle_{hm}\\
&= -\langle f, f\rangle_{hm} + 2\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})\langle f, P^k f\rangle_{hm}\\
&= -\langle f, f\rangle_{hm} + 2\langle\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f, f\rangle_{hm}
\end{aligned}$$

Maintenant, on démontre que la suite $(\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f)_{N>0}$ converge dans $L^1(hm)$. D'après la décomposition spectrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f = \sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})[\sum_{j=1}^{p-1}\lambda^{jk}\Phi_j(fh)+\Psi^k(fh)]\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}.$$

Comme $\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^k = \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}$ et comme $\sum_{k=0}^{N-1}k\lambda^k = -\frac{N\lambda^N}{1-\lambda}-\frac{1}{1-\lambda}+\frac{1-\lambda^{N+1}}{(1-\lambda)^2}$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f &= \sum_{j=1}^{p-1}[\frac{1}{1-\lambda^j}+\frac{1}{N}\frac{1}{1-\lambda^j}-\frac{1}{N}\frac{1-\lambda^{j(N+1)}}{(1-\lambda^j)^2}]\frac{\Phi_j(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}\\ &+ \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}k\frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}.\end{aligned}$$

Comme :

$$\left\|\frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}\right\|_{1,hm} \leq C_f\rho^k\|f\|_{1,hm},$$

on en déduit que les suites $\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Psi^k(fh)}{h}$ et $\sum_{k=0}^{N-1}k\frac{\Psi^k(fh)}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ sont convergentes dans $L^1(hm)$.

Comme $\lim_{N\to\infty}[\frac{1}{1-\lambda^j}+\frac{1}{N}\frac{1}{1-\lambda^j}-\frac{1}{N}\frac{1-\lambda^{j(N+1)}}{(1-\lambda^j)^2}] = \frac{1}{1-\lambda^j}$, on en déduit la convergence dans $L^1(hm)$ de la suite $\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f$, soit G dans $L^1(hm)$ sa limite. G vérifie $(I-P)G=f$. D'ailleurs :

$$G = \frac{1}{h}[\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{1-\lambda^j}\Phi_j(fh)+\sum_{k=0}^{\infty}\Psi^k(fh)]\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}.$$

Exactement de la même façon, on montre que $h\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f$ converge dans V, sa limite vaut Gh. Ainsi on en déduit que la suite M_N admet une limite σ^2 dans $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\sigma^2 = 2\langle G,f\rangle_{hm}-\langle f,f\rangle_{hm}$$

avec G dans $L^1(hm)$, Gh appartenant à V et $(I-P)G=f$. On a aussi :

$$\sigma^2 = 2[\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{1-\lambda^j}\langle\Phi_j(fh),f\rangle_m+\sum_{k=0}^{\infty}\langle\Psi^k(fh),f\rangle_m]-\langle f,f\rangle_{hm}.$$

2ÈME ÉTAPE : On suppose que $\sigma^2=0$, on montre les deux assertions annoncées.

Lemme 6.2. — *La suite $(S_N f)_{N>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(hm)$.*

Démonstration. — Comme σ^2 est nul, on a :

$$\begin{aligned}\|S_N f\|_{2,hm}^2 &= NM_N \\ &= -2N\sum_{k=N}^{\infty}\langle\Psi^k(fh), f\rangle_m - 2\sum_{k=0}^{N-1} k\langle\Psi^k(fh), f\rangle_m \\ &+ 2\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\lambda^j(\lambda^{jN}-1)}{(1-\lambda^j)^2}\langle\Phi_j(fh), f\rangle_m.\end{aligned}$$

On a :

$$|\langle\Psi^k(fh), f\rangle_m| = |\int_0^1 \Psi^k(fh)\cdot f dm| \leq \|\Psi^k(fh)\|_v \cdot \|f\|_1 \leq C\rho^k$$

avec $0 < \rho < 1$. Donc :

$$|N\sum_{k=N}^{\infty}\langle\Psi^k(fh), f\rangle_m| \leq CN\frac{\rho^N}{1-\rho}$$

$$|\sum_{k=0}^{N-1} k\langle\Psi^k(fh), f\rangle_m| \leq C\sum_{k=0}^{N-1} k\rho^k = C[\frac{\rho(1-\rho^N)}{(1-\rho)^2} - \frac{N\rho^N}{1-\rho}].$$

λ est de module 1 donc $|1-\lambda^{jN}| \leq 2$. Ainsi :

$$\|S_N f\|_{2,hm}^2 \leq \frac{2C}{(1-\rho)^2} + 2\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{|1-\lambda^j|^2}|\langle\Phi_j(fh), f\rangle_m| \leq r^2. \quad \square$$

Lemme 6.3. — *Pour tout g de $L^2(hm)$, pour tout $0 \leq j \leq p-1$, il existe S_j dans $L^2(hm) \cap L^1(hm)$, $m(S_j h) = 0$ tel que l'on ait :*

$$\lim_{N\to\infty}\langle S_{Np+j} f, g\rangle_{hm} = \langle S_j, g\rangle_{hm}.$$

Démonstration. — Pour tout $N > 0$, pour tout g de $L^2(hm)$ tel que gh soit dans V, on a :

$$\langle S_N f, g\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1-\lambda^{iN}}{1-\lambda^i}\langle f, \Phi_i(gh)\rangle_m + \sum_{k=0}^{N-1}\langle f, \Psi^k(gh)\rangle_m.$$

Comme la suite $\sum_{k=0}^{N-1}\langle f, \Psi^k(gh)\rangle_m$ est convergente et comme $\lambda^p = 1$, on en déduit que pour $0 \leq j \leq p-1$, les suites $(\langle S_{Np+j} f, g\rangle_{hm})_{N>0}$ sont convergentes.

On prend maintenant g dans $L^2(hm)$, gh n'est pas nécessairement dans V. V est dense dans $L^2(hm)$. D'après le lemme 6.2, la suite $(S_{Np+j} f)_{N>0}$ est uniformément bornée par r dans $L^2(hm)$, on en déduit alors que la convergence de la suite $(\langle S_{Np+j} f, g\rangle_{hm})_{N>0}$.

On en déduit donc que les suites $S_{Np+j}f$ sont faiblement convergentes dans $L^2(hm)$, on appelle S_j leurs limites faibles, elles sont dans $L^2(hm)$. Alors comme 1 est dans $L^2(hm)$, on en déduit que :

$$\langle S_j, 1\rangle_{hm} = \lim_{N\to\infty} \langle S_{Np+j}f, 1\rangle_{hm}.$$

Or

$$\langle S_N f, 1\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f\circ T^k, 1\rangle_{hm} = N\langle f, 1\rangle_{hm} = 0,$$

donc $\langle S_j, 1\rangle_{hm} = m(S_j h) = 0$. Comme la fonction signe de S_j est dans $L^2(hm)$ on en déduit que $m(|S_j|h)$ est fini, donc que S_j est dans $L^1(hm)$. □

Lemme 6.4. — *On a : $f = S - S\circ T$ dans $L^2(hm)$ avec $S = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} S_j$.*

Démonstration. — Pour tout $N > 0$, pour tout $0 \le j \le p-1$ on a :

$$f - f\circ T^{Np+j} = S_{Np+j}f - S_{Np+j}f\circ T.$$

Donc, pour tout g de $L^2(hm)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle f - f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} &= \langle S_{Np+j}f - S_{Np+j}f\circ T, g\rangle_{hm} \\
&= \langle S_{Np+j}f, g\rangle_{hm} - \langle S_{Np+j}f\circ T, g\rangle_{hm} \\
&= \langle S_{Np+j}f, g\rangle_{hm} - \langle S_{Np+j}f, Pg\rangle_{hm}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{N\to\infty} \langle f - f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} = \langle S_j, g\rangle_{hm} - \langle S_j, Pg\rangle_{hm}$$

donc

$$\lim_{N\to\infty} \langle f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} = -\langle S_j, g\rangle_{hm} + \langle S_j\circ T, g\rangle_{hm} + \langle f, g\rangle_{hm}.$$

Or $\langle f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} = \langle f\circ T^{Np+j}, gh\rangle_m$.
D'abord si gh est dans V on a : $\langle f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} = \langle f, \Phi^{Np+j}(gh)\rangle_m$ que l'on peut décomposer :

$$\begin{aligned}
\langle f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{(Np+j)i}\langle \Phi_i(gh), f\rangle_m + m(gh)\langle h, f\rangle_m \\
&+ \langle \Psi^{Np+j}(gh), f\rangle_m \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij}\langle \Phi_i(gh), f\rangle_m + \langle \Psi^{Np+j}(gh), f\rangle_m.
\end{aligned}$$

On a $\lim_{N\to\infty}\langle \Psi^N(gh), f\rangle_m = 0$ car Ψ a un rayon spectral $\rho < 1$, donc

$$\lim_{N\to\infty} \langle f\circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij}\langle \Phi_i(gh), f\rangle_m.$$

Maintenant si gh n'est pas dans V, gh est donc simplement dans $L^2(hm)$. V est dense dans $L^2(hm)$, il existe donc une suite d'éléments de V qui approche uniformément gh dans $L^2(hm)$. On en déduit que l'on a aussi :

$$\lim_{N\to\infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f\rangle_m.$$

Donc pour tout g dans $L^2(hm)$, pour tout $0 \leq j \leq p-1$, on a :

$$\langle f, g\rangle_{hm} = \langle S_j - S_j \circ T, g\rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f\rangle_m.$$

On fait la somme de ces p équations, comme $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{ij} = 0$, on en déduit que, pour tout g de $L^2(hm)$, on a :

$$\langle f, g\rangle_{hm} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j - S_j \circ T, g\rangle_{hm}.$$

C'est-à-dire $f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$, en posant $S = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} S_j$. □

Maintenant on veut calculer explicitement S.

Lemme 6.5. — *On a : $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$.*

Démonstration. — On sait que S est dans $L^2(hm)$, donc $S \circ T$ est aussi dans $L^2(hm)$ car

$$\int_I (S \circ T)^2 hdm = \int_I S^2 \circ Thdm = \int_I S^2 hdm < \infty.$$

Par définition de P on a pour tout g de $L^2(hm)$:

$$\langle P(S \circ T), g\rangle_{hm} = \langle S \circ T, g \circ T\rangle_{hm} = \langle S, g\rangle_{hm}$$

et donc $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$. □

Lemme 6.6. — *$S = f - G$ dans $L^1(hm)$ et $Sh = (f - G)h$ dans V.*

Démonstration. — Des lemmes 6.4 et 6.5, on déduit que pour tout $0 \leq j \leq p-1$, pour tout $N > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{Np+j} P^k f = P^{Np+j} S - S \text{ dans } L^2(hm).$$

Donc pour tout g de $L^2(hm)$, on a :

$$\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g\rangle_{hm} - \langle f, g\rangle_{hm} = \langle P^{Np+j} S, g\rangle_{hm} - \langle S, g\rangle_{hm}.$$

On a :

$$\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1-\lambda^{i(j+1)}}{1-\lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g\rangle_m + \sum_{k=0}^{Np+j} \langle \Psi^k(fh), g\rangle_m.$$

On appelle u la fonction de $L^2(hm)$ telle que uh appartient à V et $(I-\Psi)(uh) = fh$. On a alors :

$$\lim_{N\to\infty} \langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1-\lambda^{i(j+1)}}{1-\lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g\rangle_m + \langle u, g\rangle_{hm}.$$

S est dans $L^2(hm)$, V est dense dans $L^2(hm)$, quitte à approcher uniformément S par une suite d'éléments de V, on a donc :

$$\lim_{N\to\infty} \langle P^{Np+j} S, g\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(Sh), g\rangle_m.$$

Ainsi pour tout g de $L^2(hm)$, pour tout $0 \le j \le p-1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1-\lambda^{i(j+1)}}{1-\lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g\rangle_m + \langle u, g\rangle_{hm} - \langle f, g\rangle_{hm} = -\langle S, g\rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(Sh), g\rangle_m.$$

On fait la somme de ces p équations, on obtient, pour tout g de $L^2(hm)$:

$$\langle S, g\rangle_{hm} = \langle f-u, g\rangle_{hm} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{1-\lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g\rangle_m = \langle f-G, g\rangle_{hm}.$$

Donc dans $L^2(hm)$, S est égal à $f-G$, où G vérifie $(I-P)G = f$, comme fh et Gh sont dans V, on en déduit que Sh est aussi dans V. □

3ÈME ÉTAPE : On démontre la réciproque. Si $f = u\circ T - u$, avec u dans $L^2(hm)$ et uh dans V. Alors $S_N f = u\circ T^N - u$. Donc

$$\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{N}} S_N f)^2 h dm = \frac{1}{N} \int_0^1 (u^2\circ T^N - 2u\circ T^N \cdot u + u^2) h dm$$

qui tend bien vers 0 quand N tend vers $+\infty$ donc $\sigma^2 = 0$. □

On peut alors démontrer le théorème limite central.

6.2 Le théorème limite central

Définition 6.7. — *On dit qu'une fonction f de V, $m(fh) = 0$, vérifie l'hypothèse (H) s'il existe u dans $L^2(hm)$ avec uh dans V tel que*

$$f = u - u\circ T \ \textit{dans}\ L^2(hm) \ \textit{ou}\ fh = uh - u\circ T\cdot h \ \textit{dans}\ V.$$

Théorème 6.8. — *Soit f dans V, si $f - m(fh)$ ne vérifie pas (H), alors pour tout réel v, on a :*

$$\lim_{N\to\infty} hm[\frac{S_N f - Nm(fh)}{\sigma\sqrt{N}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-t^2/2}dt.$$

Démonstration. — La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes.
1ÈRE ÉTAPE : On montre que $\lambda_0'(0) = hm(f)$.
D'après la proposition 5.2 pour tout $|\theta| < a$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp(i\theta S_n f)hdm &= \int_0^1 \Phi^n(\exp(i\theta S_n f)h)dm = \int_0^1 \Phi_f^n(i\theta)(h)dm \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k^n(i\theta)\int_0^1 \Phi_k(i\theta)(h)dm + \int_0^1 \Psi^n(i\theta)(h)dm.\end{aligned}$$

Toutes les fonctions écrites sont analytiques en θ. On fixe t dans $\mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand, on a : $|\frac{t}{n}| < a$. Alors :

$$\int_0^1 \exp(it\frac{S_n f}{n})hdm = \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k^n(\frac{it}{n})\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h)dm + \int_0^1 \Psi^n(\frac{it}{n})(h)dm.$$

On peut alors développer $\int_0^1 \exp(it\frac{S_n f}{n})hdm$:

$$\begin{aligned}\lambda_k^n(\frac{it}{n}) &= [\lambda^k + \frac{it}{n}\lambda_k'(0) - \frac{t^2}{2n^2}\lambda_k''(0) + \frac{t^2}{n^2}\varepsilon(\frac{it}{n})]^n \text{ avec } \lim_{n\to\infty}\varepsilon(\frac{it}{n}) = 0 \\ &= \lambda^{nk}\exp(it\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k})\left[1 - \frac{t^2}{2n}(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda^{2k}}) + \frac{t^2}{n^2}\overline{\varepsilon}(\frac{it}{n})\right]\end{aligned}$$

$$\Phi_k(\frac{it}{n}) = \Phi_k + \frac{it}{n}\Phi_k^{(1)} + \frac{it}{n}\varepsilon(\frac{it}{n})$$

où $\Phi_k^{(1)}$ et $\varepsilon(\frac{it}{n})$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n\to\infty}\|\varepsilon(\frac{it}{n})\|_v = 0$. Alors :

$$\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h)dm = \int_0^1 \Phi_k(h)dm + \frac{it}{n}\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm + \frac{it}{n}\overline{\varepsilon}(\frac{it}{n}),$$

$$\text{avec} \qquad \lim_{n\to\infty}\overline{\varepsilon}(\frac{it}{n}) = 0 \text{ et } \int_0^1 \Phi_k(h)dm = \begin{cases}0 & \text{si } k \neq 0\\ 1 & \text{si } k = 0.\end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp(it\frac{S_n f}{n})hdm &= \exp(it\lambda_0'(0)) + \frac{it}{n}\int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h)dm\cdot\exp(it\lambda_0'(0)) \\ &- \frac{t^2}{2n}(\lambda_0''(0) - \lambda_0'^2(0))\exp(it\lambda_0'(0)) \\ &+ \frac{it}{n}\sum_{k=1}^{p-1}\lambda^{nk}\exp(it\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k})\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm \\ &+ \int_0^1 \Psi^n(\frac{it}{n})(h)dm + \frac{it}{n}\varepsilon(\frac{it}{n}).\end{aligned}$$

Comme $\|\Psi^n(\frac{it}{n})(h)\|_v \leq |\frac{t}{n}|C\rho_2^{n+1}$, on peut passer à la limite dans le second membre, on obtient alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{n})hdm = \exp[it\lambda_0'(0)].$$

Mais le théorème de Birkhoff entraîne, comme $(I,\mathcal{B},T,hm)$ est un système dynamique ergodique et comme f est dans $L^1(m)$ donc dans $L^1(hm)$, que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_nf}{n} = m(fh)\ hm\text{-p.p}\ ,$$

cette dernière fonction étant hm-intégrable on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{n})hdm = \exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda_0'(0)).$$

Ainsi pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda_0'(0))$, donc $m(fh) = \lambda_0'(0)$ que l'on suppose pour la suite de la preuve égale à 0. □

2ÈME ÉTAPE : On démontre que $\sigma^2 = \lambda_0''(0)$. Il est bien connu que :

$$\int_0^1 [\frac{S_nf}{\sqrt{n}}]^2 hdm = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm]_{|t=0}.$$

On fixe t dans $\mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand :

$$\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm = \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm + \int_0^1 \Psi^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm,$$

on peut alors faire un développement de $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm$, car toutes les fonctions écrites sont analytiques en $\frac{t}{\sqrt{n}}$. Pour dériver le premier terme on utilise $(uv)'' = u''v + uv'' + 2u'v'$, avec $u(t) = \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})$ et $v(t) = \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm$. Si $k \neq 0$, on a :

$$v(0) = 0, u(0) = \lambda^{nk},\ u'(0) = i\sqrt{n}\lambda^{k(n-1)}\lambda_k'(0).$$

On a aussi :

$$\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) = \frac{it}{\sqrt{n}}\Phi_k^{(1)}(h) - \frac{t^2}{2n}\Phi_k^{(2)}(h) + \frac{t^2}{n}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)$$

où les opérateurs $\Phi_k^{(1)}$, $\Phi_k^{(2)}$ et $\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})$ sont des opérateurs bornés de V et où : $\lim_{n\to\infty}\|\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})\|_v = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm]_{|t=0} = &- \lambda^{nk}\frac{1}{n}\int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h)dm \\ &- 2\lambda^{(n-1)k}\lambda_k'(0)\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm.\end{aligned}$$

Si $k = 0, v(0) = 1, u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -\lambda_0''(0)$.

$$v'(0) = \frac{i}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h)dm \text{ et } v''(0) = \frac{-1}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h)dm.$$

On sait que :

$$\Psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,\rho_2)} \lambda^n R(\lambda, \Phi_f(\frac{it}{\sqrt{n}}))(h)d\lambda.$$

La fonction $\theta \mapsto R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est analytique si $|\theta| < a$, il existe donc $N > 0$ tel que $n > N$ entraîne que :

$$R(\lambda, \Phi(\frac{it}{\sqrt{n}})) = R(\lambda, \Phi) - \frac{it}{\sqrt{n}} R^{(1)}(\lambda, \Phi) - \frac{t^2}{2n} R^{(2)}(\lambda, \Phi) + \frac{t^2}{n} \overline{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})$$

où les opérateurs $R^{(1)}(\lambda, \Phi), R^{(2)}(\lambda, \Phi)$ et $\overline{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n\to\infty} \|\overline{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)\|_v = 0$. Ainsi :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \Psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm_{|t=0} = \frac{1}{n}\frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\rho_2,0)} \lambda^n R^{(2)}(\lambda)d\lambda$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm &= \lambda_0''(0) + 2\sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{k(n-1)} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm \\ &+ \frac{1}{n}[\int_0^1 \Phi_1^{(2)}(h)dm + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h)dm] + \frac{\varepsilon(n)}{n}.\end{aligned}$$

Comme $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm$. Et comme dans le second terme tout a une limite sauf éventuellement le terme borné $2\sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n-1)k} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm$ qui « tourne », on en déduit qu'il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Et donc :

$$\sigma^2 = \lambda_0''(0). \quad \square$$

3ÈME ÉTAPE : On démontre que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = \exp(\frac{-t^2\sigma^2}{2})$.

On fixe t dans $\mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand, on peut écrire d'après la proposition 5.2 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm &= \lambda_0^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_0(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm + \int_0^1 \Psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm.\end{aligned}$$

On a : $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = 0$ comme dans la 1ère étape,

$$\begin{aligned}
[\lambda_0(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= [1-\frac{t^2}{2n}\lambda_0''(0)-\frac{it^3}{6n\sqrt{n}}\lambda_0'''(0)+\frac{t^3}{n\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n \\
&= e^{-t^2\lambda_0''(0)/2}[1-\frac{it^3}{\sqrt{n}}\lambda_0'''(0)+\frac{t^3}{6\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})] \\
&\quad \text{avec } \lim_{n\to\infty}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})=0,
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \Phi_0(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = 1+\frac{it}{\sqrt{n}}\int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h)dm+\frac{it}{\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}}).$$

Pour $k\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
[\lambda_k(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= \lambda^{nk}[1-\frac{it}{\sqrt{n}}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}-\frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}-\frac{it^3}{6n\sqrt{n}}\frac{\lambda_k'''(0)}{\lambda^k}+\frac{it^3}{n\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n \\
&= \lambda^{nk}\exp[\sqrt{n}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}it-t^2(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}+\frac{2\lambda_k'(0)}{\lambda^{2k}})] \\
&\cdot \quad [1-\frac{it^3}{6\sqrt{n}}B_k+\frac{it^3}{\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})],
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = \frac{it}{\sqrt{n}}\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm+\frac{it}{\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}}).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm =& e^{-t^2\lambda_0''(0)/2} \\
&+\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{p-1}\lambda^{kn}e^{it\lambda_k'(0)\frac{\sqrt{n}}{\lambda^k}}e^{-t^2[A_k]}\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm+o(\frac{1}{\sqrt{n}}).
\end{aligned}$$

Comme la fonction $\theta\mapsto\lambda_k(i\theta)$ est analytique et comme il existe $a>0$ tel que si $|\theta|<a$, on a $|\lambda_k(i\theta)|\leq 1$, on en déduit que $\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}$ est réel. En effet :

$$\lambda_k(i\theta)=\lambda^k[1+i\theta\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}-\frac{\theta^2}{2}\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}+o(\theta^2)].$$

On passe au module :

$$1\geq[1-\theta Im\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)-\frac{\theta^2}{2}Re\left(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}\right)]^2+[\theta Re\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)-\frac{\theta^2}{2}Im\left(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}\right)]^2+o(\theta^2)$$

d'où

$$1\geq 1-2\theta Im\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)+\theta^2[[Re\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)]^2+[Im\left(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}\right)]^2-Re\left(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}\right)]+o(\theta^2)$$

ce qui est possible uniquement si $Im\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k} = 0$. Donc on peut passer à la limite et on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = e^{-t^2\frac{\lambda_0''(0)}{2}} = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{2}}. \quad \square$$

4ÈME ÉTAPE : Conclusion.
On a démontré que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{2}}.$$

On a donc aussi : $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}})hdm = e^{\frac{-t^2}{2}}$ qui est la transformée de Fourier de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. La méthode des fonctions caractéristiques de Paul Lévy entraîne alors la convergence en loi de $\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc pour tout v de $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} hm[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}}du. \quad \square$$

Remarque. — Le théorème limite central reste valable pour toute mesure de probabilité $\nu = h_1hm$ avec h_1h dans V. Alors, pour f dans V, $m(fh) = 0$ et ne vérifiant pas (H), pour tout réel v, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \nu[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

La démonstration est exactement celle qui précède, il suffit de montrer que l'on a pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h_1h)dm = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{\sqrt{n}})d\nu = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Les développements limités précédents restent valables et donnent :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h_1h)dm &= e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\int_0^1 \Phi_0(h_1h)dm \\ &+ \frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{p-1}\lambda^{kn}e^{it\lambda_k'(0)\frac{\sqrt{n}}{\lambda^k}}e^{-t^2[A_k]}\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(hh_1)dm + o(\frac{1}{\sqrt{n}}).\end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 \Phi_0(h_1h)dm = m(h_1h) = 1$, on a le résultat voulu en passant à la limite.

Application. — Si on sait que la fonction $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est dans V, on prend

$$h_1 = \mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}\frac{1}{h}\frac{1}{m(\{h\neq 0\})}$$

on obtient alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m[\{\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\} \cap \{h \neq 0\}]}{m(\{h \neq 0\})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{\frac{-u^2}{2}} du.$$

Par exemple pour la transformation fraction continue, on a :

$$h(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x} \text{ donc } \{h \neq 0\} = I \text{ et } m(\{h \neq 0\}) = 1.$$

On a donc pour tout f de V, $m(fh) = 0$, f ne vérifiant pas (H), pour tout réel v :

$$\lim_{n\to\infty} m[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\lim_{n\to\infty} hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Pour la transformation $T(x) = \beta x + \alpha[1]$, $\beta = (1+\sqrt{5})/2$, $\alpha = (3-\beta)/2$, on a : $\{h = 0\} = [(\beta-1)/2, \alpha]$ et $m(\{h \neq 0\}) = \beta - 1$. Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} m\big[\{\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\} \setminus [(\beta-1)/2, \alpha]\big] = \frac{\beta-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\lim_{n\to\infty} hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

7 REMARQUES À PROPOS DE L'HYPOTHÈSE (H)

Pratiquement, pour appliquer le théorème central limite à une fonction f, on doit être capable de décider si elle vérifie l'hypothèse (H) ou non.

Remarque 1. — Dans le cas où f est une *fonction continue sauf en un nombre dénombrable* (au plus) *de points de* I : $\mathfrak{S}_f$, on peut préciser (H). Si $f = u - u \circ T$ hm-p.p ($m(fh) = 0$), la proposition 6.1 et le lemme 6.6 donnent la valeur de u :

$$u = S = \frac{1}{h}[\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^j(hf) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{1-\lambda^k} \Phi_k(fh)] \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}.$$

On peut maintenant trouver les points de discontinuité de u, ils correspondent aux points de discontinuité de h, de $(\Psi^j(fh))_{j\in\mathbb{N}^*}$ et de $(\Phi_k(fh))_{2\leq k\leq p}$ [ce sont les points de discontinuité de $(\Phi^j(fh))_{j\geq n_0}$ car :

$$\Phi_k(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^j \frac{(fh)}{\lambda^{kj}} \text{ dans } V,$$

on utilise ici le fait que si $f_n \to f$ dans V alors $f_n \to f$ uniformément sur I].
Points de discontinuité de h, h est définie comme la limite dans V de la suite :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1),$$

ses points de discontinuité sont donc ceux des fonctions $(\Phi^k(1))$. On a :

$$\Phi(1)(x) = \sum_{j\in J} \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x),$$

la fonction $x \mapsto \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}$ étant continue sur I, les points de discontinuité de $\Phi(1)$ sont donc les $\{T(aj), j \in J\}$. L'ensemble des sauts de h est donc :

$$\mathfrak{S}_h = \{T^n(a_j) | j \in J, n \geq 1\}.$$

Points de discontinuité de $\Phi(fh)$, on a :

$$\Phi(fh)(x) = \sum_{j\in J}(fh)(\sigma_j x)\frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

Les sauts de $\Phi(fh)$ sont alors les sauts de $(f\circ\sigma_j)_{j\in J}$ donc l'ensemble $T(\mathfrak{I}_f)$, ceux de $(h\circ\sigma_j)_{j\in J}$ donc $T(\mathfrak{I}_h)$ et l'ensemble $\{T(a_j)\}_{j\in J}$. Donc :

$$\mathfrak{I}_{\Phi(fh)} = T(\mathfrak{I}_h \cup \mathfrak{I}_f \cup \{a_j\}_{j\in J}).$$

Alors les sauts de Φ_k sont dans l'ensemble :

$$\cup_{n\geq n_0} T^n[\mathfrak{I}_h \cup \mathfrak{I}_f \cup \{a_j\}_{j\in J}].$$

Comme $\Psi^n(fh) = \Phi^n(fh) - \lambda^n\Phi_1(fh) - \cdots - \lambda^{n(p-1)}\Phi_{p-1}(fh)$ car $m(fh)=0$ on a :

$$\mathfrak{I}_u = \bigcup_{n\geq 1} T^n[\mathfrak{I}_h \cup \mathfrak{I}_f \cup \{a_j\}_{j\in J}].$$

Soit $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_u \cup \mathfrak{I}_f \cup T^{-1}(\mathfrak{I}_u)$. C'est un ensemble dénombrable de points de I et sur $(I\setminus\{h\neq 0\})\setminus\mathfrak{I}$ on a $f = u - u\circ T$. $\mathfrak{I}$ se compose de l'ensemble des images par $T^n, n\geq 0$, des points de discontinuité de f et des points de la subdivision de I associée à T :

$$\mathfrak{I} = \bigcup_{n\geq 0} T^n[\{a_j, j\in J\}\cup\mathfrak{I}_f].$$

Ainsi si on est capable de montrer qu'un point y T-périodique de période k n'est pas dans $\mathfrak{I}\cup T^{-1}(\mathfrak{I})\cup\cdots\cup T^{-k}(\mathfrak{I})$, on peut utiliser le test des points périodiques pour décider si f vérifie la condition (H) ou non : on calcule $a = S_k f(y)$, si a n'est pas nul alors f ne vérifie pas (H), si $a=0$, éventuellement, f vérifie (H).

Remarque 2. — Dans le cas où h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h\neq 0\}$, la fonction $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est dans V alors :

$$u = G - f = \frac{1}{h}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\Psi^j(fh) + \sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{1-\lambda^j}\Phi_j(fh)\right]\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$$

est dans V.
L'équation : $fh = uh - u\circ T\cdot h$ dans V revient donc à : $f = u - u\circ T$ dans V et donc $u\circ T = u - f$ est dans V. Ceci n'est pas possible si la subdivision associée à T admet un nombre dénombrable de morceaux.
Ainsi on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 7.1. — *Si T est une transformation dilatante telle que :*

1. *la partition associée admet un nombre dénombrable de morceaux;*
2. *h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h\neq 0\}$.*

Alors pour toute fonction non constante de V, on peut appliquer le théorème limite central .

Cette proposition s'applique par exemple à la transformation « fraction continue ».

Une classe intéressante de fonctions f est celle des indicateurs de borélien, on a :

Proposition 7.2. — *Si* $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ *est dans* V*, si* f *est l'indicatrice d'un borélien* A *de* $\mathcal{B}$*, si* $f - hm(A)$ *vérifie (H), donc s'il existe* u *de* V *tel que* $f - hm(A) = u \circ T - u$ *alors :*
1. ou $hm(A) = 0$ *ou* 1
2. ou il existe $1 \leq k \leq p-1$ *tel que* $hm(A) = \frac{k}{p}$.

Démonstration. — On suppose donc que $f - hm(A) = uoT - u$ avec u dans V. On a alors :

$$e^{2i\pi[f-hm(A)]} = e^{[u\circ T-u]2i\pi}$$

f vaut 0 ou 1, donc :

$$e^{-2\pi i hm(A)} = e^{2i\pi(u\circ T-u)}.$$

Ainsi, on a :

$$\Phi(e^{2iu\pi} \circ T.h) = e^{2iu\pi} \cdot h = e^{-2i\pi hm(A)}\Phi(e^{2iu\pi} \cdot h),$$

car $e^{iu2\pi}.h$ est dans V. Donc, $e^{2i\pi hm(A)}$ est une valeur propre de module 1 de Φ, elle vaut donc 1 ou $\lambda^k, 1 \leq k \leq p-1$.
Si $e^{2i\pi hm(A)} = 1$, alors comme $hm(A)$ est dans $[0,1]$, on a : $hm(A) = 0$ ou 1.
Si $e^{2i\pi hm(A)} = \lambda^k$ alors $hm(A) = \frac{k}{p}$. □

Cette proposition s'applique par exemple aux transformations linéaires par morceaux suivantes $T\colon x \mapsto \beta x + \alpha[1]$, avec $\alpha = 0$ et $\beta > 1$ ou $\alpha \in]0,1[$ et $\beta > 2$. Ce sont les cas où elles sont faiblement mélangeantes, voir Wilkinson [W]. On en déduit qu'on peut appliquer le théorème limite central à l'indicatrice de n'importe quel intervalle non vide strictement contenu dans $[0,1]$.

8 LA VITESSE DE CONVERGENCE

La méthode employée pour démontrer le théorème central limite permet aussi de donner la vitesse de convergence.

Théorème 8.1. — *Sous les hypothèses du théorème 6.8 et si $m(fh) = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration. — Elle repose sur l'inégalité de Berry-Esseen [F] qui peut s'écrire ici :
Il existe $K > 0$ tel que pour tout $U > 0$, tout n vérifiant $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on a :

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{K}{U} + \frac{1}{\pi} \int_{-U}^{U} \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du.$$

Comme $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, alors pour tout u dans $[-U, U]$ qui vérifie $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut alors utiliser la proposition 5.2, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{iu\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} hdm &= \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm \\
&= \lambda_0^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_0(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm \\
&+ \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm + \int_0^1 \Psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|\int_0^1 e^{iu\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}| &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})||\int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \\
&+ |\int_0^1 \Psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \\
&+ |\lambda_0^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_0(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm - e^{-\frac{u^2}{2}}|.
\end{aligned}$$

Les applications $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \mapsto \lambda_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ sont analytiques. Les opérateurs $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \mapsto \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ et $\Psi_f(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ sont analytiques on a alors :

$$|\int_0^1 \Psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \leq \frac{C\rho_2^{n+1}}{\sigma\sqrt{n}}|u|.$$

D'après les calculs de la 3ème étape de la preuve du théorème limite central on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_0^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})\int_0^1 \Phi_0(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm \quad &- \quad e^{-\frac{u^2}{2}}| = |e^{-\frac{u^2}{2}}[\frac{-iu^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\lambda_0''(0) \\ &+ \quad \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}\int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h)dm + \frac{k}{\sqrt{n}}\varepsilon(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})]| \\ &\leq \quad e^{-\frac{u^2}{2}}[\frac{A|u|^3}{\sqrt{n}} + \frac{B|u|}{\sqrt{n}}]. \end{aligned}$$

$|\lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})\int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \leq \exp[-\frac{u^2}{\sigma^2}C_k^2]D_k\frac{|u|}{\sqrt{n}}$ où C_k est dans $\mathbb{R}$. On peut alors intégrer

$$\int_{-U}^{U} \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}}hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|}du \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-U}^{U}[e^{-\frac{u^2}{2}}(Au^2+B)+\sum_{k=2}^{p} D_k e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}C_k^2}+\frac{C\rho_2^{n+1}}{\sigma}]du$$

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2\pi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-U}^{U} \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}}hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|}du \quad &\leq \quad (\frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{n}})\sqrt{2\pi}\sum_{k=2}^{p} D_k\frac{\sigma\sqrt{n}}{C_k\sqrt{n}} + \frac{2C\rho_2^{n+1}U}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \quad \frac{C_1}{\sqrt{n}} + C_2\rho_2^{n+1}\frac{U}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sup_{v\in\mathbb{R}}|hm[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}}du| \leq \frac{K}{U} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + C_2\rho_2^{n+1}\frac{U}{\sqrt{n}}$$

et ceci pour $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut prendre $U = \alpha\sqrt{n}\sigma$ avec $\alpha < a$. On a alors :

$$\sup_{v\in\mathbb{R}}|hm[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}}du| \leq \frac{K}{\sigma\alpha\sqrt{n}} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + \frac{C_2\rho_2^{n+1}}{\sigma\alpha}$$

comme ρ_2^{n+1} est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\rho_2 < 1$ on a le résultat voulu en posant $C = \frac{K}{\sigma\alpha} + \frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\sigma\alpha}$:

$$\sup_{v\in\mathbb{R}}|hm[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}}du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

On remarque ici qu'il suffit que T soit dans $\mathcal{C}$ pour montrer ce résultat, l'hypothèse $(3')$ n'a pas encore servi.

9 THÉORÈME LIMITE LOCAL

Jusqu'ici, seule l'hypothèse (3) a servi, maintenant on va utiliser l'hypothèse plus forte (3′). On suppose donc que T est dans $\mathcal{C}'$ et bien sûr que le système dynamique $(I, \mathcal{B}, T, hm)$ est ergodique. Soit f une fonction à variation bornée et à valeurs réelles fixée. D'abord on va prouver un résultat préliminaire, il donne la décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ pour tout θ de $\mathbb{R}$ et non plus simplement au voisinage de $\theta = 0$ comme dans le théorème des perturbations. Ce résultat spectral étant prouvé, on pourra alors démontrer un théorème limite local en adaptant simplement la méthode de Rousseau-Egèle [RE].

9.1 Décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$

Proposition 9.1. — *Pour tout θ de $\mathbb{R}$, l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu.*

Il faut déjà remarquer que ce résultat est beaucoup plus fort que ceux de la partie 6, car il est global, on verra ici que l'hypothèse (3) ne suffit plus et que l'on va vraiment utiliser (3′).

Démonstration. — On remarque qu'il suffit de vérifier l'inégalité de Doeblin-Fortet, car $\Phi_f(i\theta)(g) = \Phi(e^{i\theta f}g)$ si g est dans V. Il suffit donc de montrer qu'il existe un entier $N > 0$ et des constantes $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < \infty$, tels que pour g dans V on ait :

$$v(\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g)) \leq \alpha v(g) + \beta \|g\|_1.$$

La démonstration est à peu près la même que celle de la proposition 4.1. On fixe g dans V, θ dans $\mathbb{R}$, on écrit :

$$\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g) = \Phi^{Nn_0}(e^{i\theta S_{Nn_0} f} \cdot g)$$

$$\Phi^{Nn_0}(g)(x) = \sum_{j \in J_{Nn_0}} [\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{T^{Nn_0}(\bar{I}_j)}](x).$$

Ici la partition $(I_j)_{j\in J_{Nn_0}}$ est relative à la transformation T^{Nn_0} les $(\sigma_j)_{j\in J_{Nn_0}}$ sont les réciproques partielles de T^{Nn_0}. Ainsi :

$$\begin{aligned} v(\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g)) &= v[\sum_{j\in J_{Nn_0}} (\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|})\circ\sigma_j\cdot \mathbf{1}_{T^{Nn_0}(\bar I_j)}] \\ &\leq \sum_{j\in J_{Nn_0}} v[\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j\cdot \mathbf{1}_{T^{Nn_0}(\bar I_j)}]. \end{aligned}$$

Dès que la partition associée à T contient un nombre infini de morceaux, la fonction $S_{Nn_0}f$ n'est plus à variation bornée sur I ; par contre, $S_{Nn_0}f$ est à variation bornée sur $T^{Nn_0}(\bar I_j)$ pour tout $j\in J_{Nn_0}$. On peut donc utiliser la propriété suivante dès que φ est à variation bornée au moins sur $[a,b]$, on a :

$$v[\varphi\cdot\mathbf{1}_{[a,b]}]\leq|\varphi(a)|+|\varphi(b)|+v_{[a,b]}(\varphi),$$

où $v_{[a,b]}(\varphi)$ désigne la variation de φ dans l'intervalle $[a,b]$. On désigne par $[a_j,b_j]$ l'intervalle $T^{Nn_0}(\bar I_j)$, j étant dans J_{Nn_0}. Alors,

$$\begin{aligned} v[\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j\cdot\mathbf{1}_{[a_j,b_j]}] &\leq v_{[a_j,b_j]}[\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j] \\ &+ |\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(a_j)|+|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(b_j)|. \end{aligned}$$

D'après les calculs faits dans la proposition 4.1, on a :

$$|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(a_j)|+|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(b_j)|\leq\frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+(\frac{K^N}{\gamma^{2N}}+\frac{2}{\delta})\int_{I_j}|g|dm.$$

Où

$$\delta=\inf_{j\in J_{Nn_0}}[m(T^{Nn_0}(\bar I_j))]>0,$$
$$K=\sup|\frac{(T^{n_0})'(x)-(T^{n_0})'(y)}{x-y}|<\infty,$$

on prend le supremum pour x et y dans le même intervalle I_j quelconque de la partition de T^{n_0}, x distinct de y. Il reste donc à majorer : $v_{[a_j,b_j]}[\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j]$ $=A_j$.

$$A_j=\sup_S\sum_{\ell=1}^m|\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(\alpha_\ell)-\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(\alpha_{\ell-1})|$$

où $(\alpha_\ell)_{0\leq \ell\leq m}$ est une subdivision finie de l'intervalle $[a_j,b_j]$ et S est l'ensemble de toutes ces subdivisions. Mais :

$$\begin{aligned}
|\frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(\alpha_\ell) \quad &- \quad \frac{g\cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\circ\sigma_j(\alpha_{\ell-1})| \\
&\leq \quad \frac{|g\circ\sigma_j(\alpha_\ell)-g\circ\sigma_j(\alpha_{\ell-1})|}{|(T^{Nn_0})'\circ\sigma_j(\alpha_\ell)|} \\
&+ \quad |g\circ\sigma_j(\alpha_\ell)||\frac{1}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(\alpha_\ell)-\frac{1}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(\alpha_{\ell-1})| \\
&+ \quad \sum_{k=0}^{Nn_0-1}|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}(\sigma_j\alpha_{\ell-1})(e^{i\theta f(T^k(\sigma_j\alpha_\ell))}-e^{i\theta f(T^k(\sigma_j\alpha_{\ell-1}))})|.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$A_j\leq \frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+\frac{K^N}{\gamma^{2N}}\int_{I_j}|g|dm+|\theta|Nn_0v(f)\sup_{x\in[a_j,b_j]}[|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}|\circ\sigma_j(x)].$$

Comme g est à variation finie, on peut toujours supposer que $|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j|$ atteint son supremum sur $[a_j,b_j]$, ne serait-ce que par valeur limite, au point $x_j\in[a_j,b_j]$. Or :

$$\begin{aligned}
|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j|(x_j) \quad &\leq \quad \frac{1}{2}[|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(x_j)-\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(a_j)| \\
&+ \quad |\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(b_j)-\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(x_j)| \\
&+ \quad |\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(a_j)|+|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j(b_j)|] \\
&\leq \quad \frac{1}{2}[v_{[a_j,b_j]}(|\frac{g}{(T^{Nn_0})'}\circ\sigma_j|)+\frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+(\frac{K^N}{\gamma^{2N}}+\frac{2}{\delta})\int_{I_j}|g|dm] \\
&\leq \quad \frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+(\frac{K^N}{\gamma^{2N}}+\frac{1}{\delta})\int_{I_j}|g|dm.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$A_j\leq \frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+\frac{K^N}{\gamma^{2N}}\int_{I_j}|g|dm+Nn_0v(f)|\theta|[\frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+(\frac{K^N}{\gamma^{2N}}+\frac{1}{\delta})\int_{I_j}|g|dm].$$

Donc :

$$\begin{aligned}
v[\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g)] \quad &\leq \quad \sum_{j\in J_{Nn_0}}[\frac{1}{\gamma^N}v_{I_j}(g)+(\frac{K^N}{\gamma^{2N}}+\frac{1}{\delta})\int_{I_j}|g|dm][2+Nn_0v(f)|\theta|] \\
&\leq \quad [2+Nn_0v(f)|\theta|][\frac{1}{\gamma^N}v(g)+(\frac{K^N}{\gamma^{2N}}+\frac{1}{\delta})\|g\|_1].
\end{aligned}$$

On a : $0<\frac{1}{\gamma}<\frac{1}{2}$, donc

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2+Nn_0v(f)|\theta|}{\gamma^N}=0,$$

f et θ étant fixés, on en déduit l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\alpha = \frac{2 + Nn_0 v(f)|\theta|}{\gamma^N} < 1.$$

D'autre part, comme δ n'est pas nul, (c'est l'hypothèse (3')), le nombre $\beta = (\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{1}{\delta})(2 + Nn_0 v(f)|\theta|)$ est fini. On en déduit alors la décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$. Pour tout θ de $\mathbb{R}$, pour tout f de V fixés, si g est dans V, n dans $\mathbb{N}$ alors :

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \sum_{\xi \in E(\theta)} \lambda_\xi^n \Phi_\xi(g) + R_f^n(i\theta)(g)$$

où $E(\theta)$ est un ensemble fini, éventuellement vide, λ_ξ est une valeur propre de module 1 de $\Phi_f(i\theta), \Phi_\xi$ est le projecteur de V sur le sous-espace propre $V(\lambda_\xi)$ qui est de dimension finie. $R_f(i\theta)$ est un opérateur de V dans V de rayon spectral strictement plus petit que 1, il vérifie pour ξ dans $E(\theta)$, $\Phi_\xi \circ R_f(i\theta) = R_f(i\theta) \circ \Phi_\xi = 0$. Il faut remarquer qu'en général pour θ grand, il n'y a pas de valeur propre de module 1 et que $\Phi_f(i\theta)$ est un opérateur de rayon spectral strictement plus petit que 1. On remarque ici que l'on a vraiment utilisé l'hypothèse (3'), si on avait simplement supposer l'hypothèse affaiblie (3) : $\inf_{j \in J_{n_0}} m(T^{n_0}(\overline{I}_j)) = \delta > 0$, comme on peut le faire pour démontrer que Φ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, on aurait déduit de

$$\alpha = \frac{2 + n_0 v(f)|\theta|}{\gamma} < 1$$

l'existence d'un $\theta_0 > 0$ tel que pour $|\theta| < \theta_0$, $\Phi_f(i\theta)$ vérifie le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, celà ne suffirait pas pour montrer alors le théorème limite local car on a vraiment besoin d'avoir la décomposition spectrale de $\Phi_f(i\theta)$ pour θ grand et non pas simplement dans un voisinage de 0. □

9.2 Le théorème limite local

On va maintenant pouvoir démontrer un théorème limite local pour T une transformation de $\mathcal{C}'$

Théorème 9.2. — *On se place sous les hypothèses du théorème limite central pour f. On suppose de plus que pour tout θ de $\mathbb{R}^*$, l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ n'admet aucune valeur propre de module 1. Alors pour tout intervalle fini Δ de $\mathbb{R}$, uniformément en z, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n} hm[\{x \in I \colon z + S_n f - nm(fh) \in \Delta\}] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}} m(\Delta)| = 0.$$

Démonstration. — Quitte à enlever une constante à f, on peut toujours supposer que $m(fh) = 0$, il suffit donc de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n} hm[\{x \in I \colon z + S_n f \in \Delta\}] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}} m(\Delta)| = 0.$$

On définit la suite de mesures $(\nu_n)_{n>0}$ par :

$$\nu_n(g) = \sigma\sqrt{n}e^{\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \int_0^1 g(z + S_n f)h\, dm.$$

Ce théorème limite local est donc une conséquence de la convergence vague de la suite (ν_n) vers la mesure de Lebesgue $\frac{m}{\sqrt{2\pi}}$. En effet on aura alors, pour tout borélien Δ, donc en particulier tout intervalle fini Δ de $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(\Delta) = \frac{m(\Delta)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Donc uniformément en z réel, au voisinage de $n = \infty$,

$$\sigma\sqrt{n}hm[z + S_n f \in \Delta] \sim \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}}}{\sqrt{2\pi}} m(\Delta).$$

Il est bien connu que pour prouver une convergence vague, il suffit de tester sur $\mathcal{H}$, l'ensemble des fonctions de $L^1_m(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est continue à support compact, voir par exemple Breiman [B]. $\mathcal{H}$ n'est pas vide car il contient $\lambda \longmapsto (\frac{\sin\lambda}{\lambda})^2$. On fixe g un élément de $\mathcal{H}$, on suppose que le support de $\hat{g}$ est dans $[-\delta, \delta]$, où :

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-itx}\, dx.$$

Le théorème d'inversion s'écrit alors :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t)e^{itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(t)e^{itx} dt.$$

Pour montrer le théorème limite local, il suffit de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f)hdm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}} dt| = \lim_{n\to\infty} |\frac{A_n(z)}{\sqrt{2\pi}}| = 0.$$

D'abord, on a :

$$\begin{aligned} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-t^2/2} dt, \\ \hat{g}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt, \\ g(z + S_n f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(t)e^{it(z+S_n f)} dt. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_nf)hdm &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1[\int_{-\delta}^{+\delta}\hat{g}(t)e^{it(z+S_nf)}dt]hdm\\ &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta}\hat{g}(t)e^{itz}[\int_0^1 e^{itS_nf}hdm]dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{+\delta\sigma\sqrt{n}}\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}}[\int_0^1 e^{it\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}}hdm]dt.\end{aligned}$$

En appliquant successivement le théorème de Fubini et le théorème du changement de variable. On remarque que :

$$\int_0^1 e^{it\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}}hdm = \langle e^{\frac{itS_nf}{\sigma\sqrt{n}}},1\rangle_{hm} = \langle\Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m.$$

Ainsi :

$$\sigma\sqrt{n}\int_0^1 g(z+S_nf)hdm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{+\delta\sigma\sqrt{n}}\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}}\langle\Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m dt.$$

On a alors :

$$A_n(z) = \int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{+\delta\sigma\sqrt{n}}\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}}\langle\Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m dt - \hat{g}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\frac{z}{\sigma\sqrt{n}}}e^{-t^2/2}dt.$$

Pour calculer la limite on va séparer deux cas : t est proche de 0, on appliquera le théorème des perturbations, t est assez éloigné de 0, on utilisera l'hypothèse $\Phi_f(it)$ n'admet pas de valeurs propre de module 1.

1ÈRE ÉTAPE : t est proche de 0, le théorème des perturbations permet d'écrire

$$\begin{aligned}\langle\Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m &= \lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m\\ &+ \sum_{j=1}^{p-1}\lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m + \langle\Psi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m.\end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto [\lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m + \langle\Psi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m]\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})$ que l'on nomme U_n converge vers $\hat{g}(0)e^{-t^2/2}$ de manière dominée pour $|\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| < \alpha, \alpha > 0$. En effet, on a déjà vu que :

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}) = e^{-t^2/2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Psi_f(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h),1\rangle_m = 0.$$

De plus, il existe $\alpha_0 > 0$, tel que : si $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est dans $]-\alpha_0, \alpha_0[$ alors :

$$|\lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m - e^{-t^2/2}| \leq C_1 e^{-t^2/4},$$
$$|\langle\Psi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m| \leq C_2\rho_2^n < C_3 e^{-t^2/4}.$$

Ainsi :

$$|\lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m + \langle\Psi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m - e^{-t^2/2}| \leq C_4 e^{-t^2/4}.$$

La fonction $\hat{g}$ est continue sur $[-\delta, \delta]$, il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que : si $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est dans $]-\alpha_2, \alpha_2[$ alors :

$$|\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - \hat{g}(0)| \leq 1.$$

Donc, il existe $\alpha = \inf\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$ tel que si : $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est dans $]-\alpha, \alpha[$ on ait :

$$|U_n(t) - \hat{g}(0)e^{-t^2/2}| \leq C_4 e^{-t^2/4}\|\hat{g}\|_\infty + e^{-t^2/2}.$$

Cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\alpha\sigma\sqrt{n}}^{+\alpha\sigma\sqrt{n}} [U_n(t) - \hat{g}(0)e^{-t^2/2}]e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} = 0.$$

2ÈME ÉTAPE : On s'occupe maintenant des termes :

$$\int_{-\alpha\sigma\sqrt{n}}^{+\alpha\sigma\sqrt{n}} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}}\lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})dt.$$

Comme :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m = 0 \quad \text{car } \Phi_j h = 0, \\ |\lambda_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})| \leq 1, \\ \hat{g} \text{ est bornée.} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout t fixé :

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) = 0.$$

$\lambda_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})$ est une valeur propre de $\Phi_f(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})$, son module est donc strictement plus petit que 1 sauf pour $t = 0$. Donc, si $0 < \varepsilon \leq |\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| \leq \alpha$ alors :

$$|\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})| \leq C\rho^n \leq C' e^{-t^2/4}.$$

Quitte à changer C', on peut supposer que cette majoration est aussi valable sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue entraîne alors que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\alpha\sigma\sqrt{n}}^{+\alpha\sigma\sqrt{n}} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}) \langle \Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \hat{g}(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}) dt = 0.$$

3ÈME ÉTAPE : On suppose maintenant $\alpha < |\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| < \delta$. Comme, on a fait l'hypothèse que $\Phi_f(it)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 si $t \neq 0$, le rayon spectral de l'opérateur $\Phi_f(it)$ est donc strictement plus petit que 1. Il existe donc $0 < \rho < 1$ tel que si $\alpha < |\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| < \delta$, alors :

$$|\langle \Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m| < C\rho^n.$$

Ainsi :

$$|\int_{\alpha < |\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| < \delta} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \langle \Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) dt| \leq C'\rho^n\sqrt{n},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers ∞.
4ÈME ÉTAPE : Il reste $\int_{|t|>\alpha\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\hat{g}(0) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} dt$ à étudier. Cette dernière intégrale tend vers 0 quand n tend vers ∞, car elle est majorée par $\int_{|t|>\alpha\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}|\hat{g}(0)|dt$ qui est le reste d'une intégrale convergente.
Ainsi $\lim_{n\to\infty} |A_n(z)| = 0$. Ceci achève la preuve du théorème limite local. □

9.3 Conditions sur f pour que $\Phi_f(it)$ n'ait pas de valeur propre de module 1

On va maintenant discuter l'hypothèse faite pour démontrer le théorème limite local : $\Phi_f(it)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 si $t \neq 0$. On va prouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\Phi_f(it)$ ne vérifie pas cette hypothèse.

Proposition 9.3. — *Soit f dans $V, hm(f) = 0$, soit ξ dans $\mathbb{R}, \xi \neq 0$, les conditions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) il existe r dans $[0, 2\pi[, g$ dans $V, g \neq 0$: $\Phi_f(i\xi)(g) = e^{ir}g$

(2) il existe φ à valeurs réelles vérifiant $e^{i\varphi}h$ dans V telle que :

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi\circ T} e^{-i\varphi} \ hm\text{-}p.p.$$

Démonstration. — *(2) ⇒ (1)*
On a : $e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi\circ T} e^{-i\varphi}$ hm-p.p. avec $e^{i\varphi}h$ appartenant à V. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_f(i\xi)(e^{i\varphi}h) &= e^{ir}\Phi(e^{i\varphi\circ T}e^{-i\varphi}e^{i\varphi}h) \ m\text{-p.p.} \\ &= e^{ir}\Phi(e^{i\varphi\circ T}h) = e^{ir}\Phi(e^{i\varphi}\circ Th) \ \ m\text{-p.p.} \\ &= e^{ir}e^{i\varphi} \ hm\text{-p.p.} \end{aligned}$$

Il existe donc g dans $V, g = e^{i\varphi}$ hm-p.p. tel que $\Phi_f(i\xi)(g) = e^{ir}g$.

(1) ⇒ (2)

On a : $\Phi_f(i\xi)(g) = e^{ir}g$, donc :

$$|g| = |\Phi_f(i\xi)(g)| = |\Phi(e^{i\xi f} \cdot g)| \leq \Phi|g|.$$

Comme $m(|g|) = m(\Phi|g|)$, on en déduit que $\Phi|g| = |g|$ m-p.p. et donc que $|g| = kh$ où k est une constante positive (on va prendre $k = 1$). On peut donc écrire que $g = e^{i\varphi}$ hm-p.p. où φ est à valeurs réelles, $e^{i\varphi}h$ est dans V. La condition (1) entraîne alors qu'il existe N dans $\mathcal{B}, hm(N) = 0$, il existe φ à valeurs réelles, $e^{i\varphi}h$ dans V tels que pour tout x de $I \setminus N$, on ait :

$$\Phi(e^{i\xi f}e^{i\varphi}h)(x) = e^{ir}e^{i\varphi(x)}h(x).$$

ou :

$$(*) \qquad \sum_{j\in J} e^{i\xi f(\sigma_j x)}e^{i\varphi(\sigma_j x)}h(\sigma_j x)\frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) = e^{ir}e^{i\varphi(x)}h(x).$$

Comme pour tout x de I,

$$h(x) = \sum_{j\in J} h(\sigma_j x)\frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x)$$

l'équation $(*)$ représente donc pour tout x de $\{h \neq 0\} \cap (I \setminus N)$ un barycentre de points de module 1 qui reste de module 1 ; ceci n'est possible uniquement si on a l'égalité de tous ces points. Ainsi, pour tout x dans $\{h \neq 0\} \cap (I \setminus N)$, pour tout j de J tel que x soit dans $T(\bar{I}_j)$, on a :

$$e^{i\xi f(\sigma_j x)}e^{i\varphi(\sigma_j x)} = e^{ir}e^{i\varphi(x)}.$$

Donc, pour tout y de $\cup_{j\in J}\sigma_j[\{h \neq 0\}\backslash N] = T^{-1}[\{h \neq 0\}\backslash N]$, on a :

$$e^{i\xi f(y)} = e^{ir}e^{i\varphi\circ T(y)}e^{-i\varphi(y)}.$$

De plus on a : $T^{-1}(\{h \neq 0\}) \subset \{h \neq 0\}$. En effet, si x est dans $\{h \neq 0\}$ alors :

$$0 \neq h(x) = \sum_{j\in J} h(\sigma_j x)\frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x),$$

il existe donc j dans J tel que :

$$h(\sigma_j x) \neq 0 \text{ et } x \text{ est dans } T(\bar{I}_j),$$

donc tel que $\sigma_j x$ soit dans $\{h \neq 0\}$, c'est-à-dire x dans $T(\{h \neq 0\})$. Comme $hm[T^{-1}\{h \neq 0\}] = hm[\{h \neq 0\}] = 1$, il existe N_1 dans $\mathcal{B}$ tel que $T^{-1}[\{h \neq 0\}] = \{h \neq 0\} \setminus N_1$ avec $hm(N_1) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} T^{-1}[\{h \neq 0\}] &= T^{-1}\{h \neq 0\} \setminus T^{-1}(N) \\ &= \{h \neq 0\} \setminus N_1 \setminus T^{-1}(N) \\ &= I \setminus [\{h = 0\} \cup N_1 \cup T^{-1}(N)]. \end{aligned}$$

Il existe donc $\bar{N} = \{h = 0\} \cup N_1 \cup T^{-1}(N), hm(\bar{N}) = 0$ tel que pour tout x de $I \setminus \bar{N}$ on ait :

$$e^{i\xi f(x)} = e^{ir} e^{i\varphi\circ T(x)} e^{-i\varphi(x)}.$$

Ainsi il existe φ à valeurs réelles, $e^{i\varphi}h$ appartenant à V, telle que

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi\circ T} e^{-i\varphi} \ hm\text{-p.p.} \ \square$$

Pratiquement f de V est une fonction continue sur I, sauf en un nombre (au plus) dénombrable de points de I, soit $\mathfrak{I}_f$ cet ensemble. $e^{i\varphi}h$ est dans V, on peut donc aussi supposer que l'on a une représentation continue sauf en un nombre (au plus) dénombrable de points de I. À l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, on peut préciser dans quel ensemble sont contenus les points de discontinuité de $e^{i\varphi}$. D'abord, on remarque que e^{ir} est une valeur propre simple de $\Phi_f(i\xi)$ dans V. Sinon il existerait φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, $e^{i\varphi_1}h$, $e^{i\varphi_1}h$ dans V, telles que :

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi_1\circ T} e^{-i\varphi_1} = e^{ir} e^{i\varphi_2\circ T} e^{-i\varphi_2} \ hm\text{-p.p.}$$

D'où

$$\Phi(e^{i(\varphi_1-\varphi_2)\circ T}h) = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}h = \Phi(e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}h)$$

et donc $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = k$ ce qui contredit le fait que $\Phi_f(\xi)$ admet e^{ir} comme valeur propre multiple dans V. On en déduit alors que $e^{i\varphi}h$ est l'unique solution (à une constante multiplicative près) de l'équation $K(\psi) = \psi$ où K est l'opérateur de V dans V défini comme la limite de la suite d'opérateurs de V dans V :

$$\left(\sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} e^{-irk} \Phi_f^k(i\xi) \right)_{N\geq 1}.$$

Comme e^{ir} est une valeur propre simple de $\Phi_f(i\xi)$, K est un projecteur sur l'espace vectoriel engendré par $e^{i\varphi}h$. Alors pour tout ψ de $V, K(\psi) = c(\psi)e^{i\varphi}h$. On choisit ψ dans V, continue sur I et telle que $c(\psi) = 1$. On a alors, pour tout x de I,

$$e^{i\varphi}h(x) = \lim_{N\to\infty} [\sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} e^{-irk} \Phi_f^k(i\xi)(\psi)](x).$$

On connaît donc les points de discontinuité de $e^{i\varphi}h$ dans I, ils appartiennent à

$$\mathfrak{I} = \bigcup_{n\geq 1} T^n[\mathfrak{I}_f \cup \{a_j\}_{j\in J}].$$

Ceux de $e^{i\varphi}$ sont donc dans $\{h = 0\} \cup \mathfrak{I}$ (qui est un ensemble de mesure nulle). Ainsi dans le cas, où f est continue sauf en un nombre au plus dénombrable de points de I, l'équation

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi\circ T} e^{-i\varphi} \ hm\text{-p.p.}$$

revient donc à l'équation suivante : pour tout x de $I \setminus [\{h = 0\} \cup \mathfrak{I}]$,

$$e^{i\xi f(x)} = e^{ir} e^{i\varphi\circ T(x)} e^{-i\varphi(x)}.$$

Maintenant, on peut préciser comment vérifier si $\Phi_f(i\xi)$ admet une valeur propre de module 1. On prend deux points T-périodiques x et y n'appartenant pas à $\mathfrak{I} \cup T^{-1}(\mathfrak{I}) \cup \cdots \cup T^{-p}(\mathfrak{I})$ où p est la plus petite période commune de x et y. On calcule pour ξ de $\mathbb{R}^*$, $e^{\frac{i\xi S_p f}{p}}$ en x et y. Si $e^{\frac{i\xi S_p f}{p}}(x) \neq e^{\frac{i\xi S_p f}{p}}(y)$, alors $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1.

Si maintenant on suppose que h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h \neq 0\}$, on peut préciser la proposition 9.3.

Proposition 9.4. — *On suppose que $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est dans V. S'il existe t de $\mathbb{R}^*$ et s de $\mathbb{R}^*$ tels que $\Phi_f(it)$ et $\Phi_f(is)$ admettent une valeur propre de module 1 alors $\Phi_f(i(t+s))$ admet aussi une valeur propre de module 1.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente on a :

$$\begin{aligned} e^{itf} &= e^{ir_t} e^{i\varphi_t \circ T} e^{-i\varphi_t} \ hm\text{-p.p.} \\ e^{isf} &= e^{ir_s} e^{i\varphi_s \circ T} e^{-i\varphi_s} \ hm\text{-p.p.} \end{aligned}$$

où φ_t, φ_s sont dans V et prennent des valeurs réelles, car $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est dans V. Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} e^{i(t+s)f} &= e^{i(r_t+r_s)} e^{i(\varphi_t+\varphi_s)\circ T} e^{-i(\varphi_t+\varphi_s)} \ hm\text{-p.p.} \\ &= e^{ir_{t+s}} e^{i\varphi_{t+s}\circ T} e^{-i\varphi_{t+s}} \ hm\text{-p.p.} \end{aligned}$$

où $e^{i\varphi_{t+s}}$ est dans V et φ_{t+s} prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $t+s \neq 0$, on en déduit que $\Phi_f(i(t+s))$ admet une valeur propre de module 1. □

Corollaire 9.5. — *On suppose que $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h\neq 0\}}$ est dans V. Alors, $G = \{t \in \mathbb{R} \colon \Phi_f(it)$ admet une valeur propre de module 1$\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.*

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont de la forme $G = \{n\theta, n \in \mathbb{Z}\}$ ou $\mathbb{R}$.

D'après les calculs de la 3ème étape de la démonstration du théorème limite central, dans un voisinage de $\theta = 0$ on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_k(i\theta)| &= 1 - 2\theta Im[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] \\ &+ \theta^2 [Re^2[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] + Im^2[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] - Re[\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}]] + o(\theta^2). \end{aligned}$$

Comme $|\lambda_k(i\theta)| \leq 1$ on en déduit donc que :

$$Im[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] = 0, \ Re^2[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] + Im^2[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] - Re[\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}] \leq 0.$$

Donc si pour tout $1 \leq k \leq p-1$ on a : $Re^2[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] + Im^2[\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda^k}] - Re[\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^k}] < 0$, on en déduit que dans un voisinage de $\theta = 0$, l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ n'admet pas de valeur propre de module 1, il existe donc un plus petit $\theta_0 > 0$, éventuellement infini tel que $0 < |\theta| < \theta_0$ entraîne $\Phi_f(i\theta)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 et éventuellement (si θ_0 est fini) $\Phi_f(i\theta_0)$ admet une valeur propre de module 1. On en déduit alors que $G = \{n\theta_0, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$.

9.4 Théorème limite local dans le cas d'une fonction à valeurs entières

Maintenant, on va montrer que si $f = k - m(kh)$ où k est dans V et prend des valeurs entières, on a aussi un théorème limite local. (On ne suppose plus que h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h \neq 0\}$.)

Théorème 9.6. — *Si $f = k - m(kh)$ ne vérifie pas (H), alors uniformément en z réel, pour tout intervalle fini Δ de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n} hm[z + S_n f \in \Delta] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_\Delta(z - nm(kh) + \ell)| = 0.$$

Démonstration. — Comme dans le théorème limite local, il suffit de montrer que si g est dans $\mathcal{H}$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell)| = 0.$$

Comme g est dans $\mathcal{H}$ on a,

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t) e^{itz} \langle \Phi_f^n(it)(h), 1\rangle_m dt.$$

Comme $S_n f = S_n k - nm(kh)$, on a :

$$\Phi_f^n(it)(h) = \Phi^n(e^{itS_n f} \cdot h) = \Phi^n(e^{itS_n k} \cdot h) e^{-itm(kh)n} = e^{-itm(kh)n} \Phi_k^n(it)(h).$$

Comme k ne prend que des valeurs entières, alors la fonction $t \mapsto \langle \Phi_f^n(it)(h), 1\rangle_m$ est périodique de période 2π. Alors :

$$\begin{aligned}
A &= \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm \\
&= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi+2\ell\pi}^{+\pi+2\ell\pi} \hat{g}(t) e^{itz} e^{-itm(kh)n} \langle \Phi_k^n(it)(h), 1\rangle_m dt \\
&= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{g}(t + 2\ell\pi) e^{i(t+2\ell\pi)(z-nm(kh))} \langle \Phi_k^n(it)(h), 1\rangle_m dt \\
&= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} G(t) e^{itz} \langle \Phi_f^n(it)(h), 1\rangle_m dt,
\end{aligned}$$

où $G(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t + 2\ell\pi) e^{i2\ell\pi(z-nm(kh))}$ et donc

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma\sqrt{n}\pi}^{+\sigma\sqrt{n}\pi} G(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \langle \Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m dt.$$

La formule sommatoire de Poisson entraîne que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g[\frac{x+2\pi\ell}{2\pi}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(2\pi n)e^{inx}.$$

Pour $x = 2\pi(z - nm(kh))$, on obtient :

$$G(0) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(2\pi\ell)e^{i\ell(z-nm(kh))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} G(0)dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&|\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f)hdm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell)| \\
\leq \; & |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma\sqrt{n}\pi}^{+\sigma\sqrt{n}\pi} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} [G(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m - e^{-t^2/2}G(0)]dt| \\
+ \; & \frac{|G(0)|}{\sqrt{2\pi}} | \int_{|t|<\sigma\sqrt{n}\pi} e^{-t^2/2} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} dt|.
\end{aligned}$$

Maintenant on refait exactement le même raisonnement que dans le théorème précédent car G est une fonction continue (c'est une somme finie de fonctions continues car g est dans $\mathcal{H}$), on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}} |\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f)hdm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell)| = 0,$$

ce qui achève la preuve. □

10 THÉORÈME DES GRANDS ÉCARTS

10.1 Introduction, définition de $\tilde{T}$ et $\tilde{\Phi}$

Le but de cette partie est de donner un équivalent au voisinage de $n = +\infty$ de la quantité $hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon]$ où ε est positif, assez petit et où f est dans V, $m(fh) = 0$. Cela permettra d'avoir le comportement de $hm[\frac{S_n f}{\sqrt{n}} > x]$ quand n tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $+\infty$ comme $\sqrt{n}$ c'est-à-dire

$$\lim_{n,x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{n}} = \varepsilon > 0.$$

Pour montrer les résultats de cette partie, on s'est aidé de l'article de E. Le Page [L] pour les produits de matrices aléatoires. Afin de pouvoir exprimer facilement $hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon]$, on introduit le produit croisé associé à T et f. On pose :

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \qquad & I \times \mathbb{R} \to I \times \mathbb{R} \\ & (x,t) \mapsto (Tx, t + f(x)). \end{aligned}$$

On remarque que pour $n \geq 0$, $\tilde{T}^n(x,t) = (T^n(x), t + S_n f(x))$.

On définit l'adjoint $\tilde{\Phi}$ de $\tilde{T}$ par rapport à la mesure $m \otimes l$ où l est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tous g_1 de $L^1_{m\otimes l}(I \times \mathbb{R})$, g_2 de $L^\infty_{m\otimes l}(I \times \mathbb{R})$ on a :

$$\langle \tilde{\Phi} g_1, g_2 \rangle_{m\otimes l} = \langle g_1, g_2 \circ \tilde{T} \rangle_{m\otimes l}.$$

Alors pour tout g de $L^1_{m\otimes l}(I \times \mathbb{R})$, on obtient :

$$\tilde{\Phi} g(x,t) = \sum_{j \in J} g(\sigma_j x, t - f(\sigma_j x)) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

Remarque. — Si $g(x,t) = g_1(x) g_2(t)$ avec g_1 dans V, on a :

$$\int_I \tilde{\Phi} g(x,0) dm(x) = \int_I g(x, -f(x)) dm(x).$$

On en déduit alors que :

Proposition 10.1. — *Pour tout f de V, on a :*

$$hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon] = \int_I \tilde{\Phi}^n(\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]} \cdot h)(x,0)dm(x).$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon] &= \int_I \mathbf{1}_{\{S_n f > n\varepsilon\}}(x)h(x)dm(x) \\ &= \int_I h(x)\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]}(-S_n f(x))dm(x) \\ &= \int_I \tilde{\Phi}^n(h \cdot \mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]})(x,0)dm(x) \end{aligned}$$

en utilisant la remarque précédente pour $g(x,t) = h(x)\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]}(t)$. □

Pour démontrer le théorème des grands écarts, dans le cas de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi μ, on utilise le procédé de relativisation de Cramèr [F], [C]. Cela consiste à choisir un t dans $\mathbb{R}$ tel que $\tilde{\mu}(t) = \int e^{tx} d\mu(x)$ soit fini et à construire une nouvelle mesure de probabilité ${}^t\mu$ de la façon suivante :

$${}^t\mu(\,dx) = \frac{e^{tx}\mu(\,dx)}{\tilde{\mu}(t)}.$$

Les résultats que l'on obtient pour la marche aléatoire de probabilité ${}^t\mu$ donnent alors des résultats similaires pour la marche associée à μ. On va faire à peu près la même chose ici. Ce qui va jouer le rôle de la transformée de Laplace ici est l'existence de l'opérateur $\Phi_f(\theta)$, θ dans $\mathbb{R}$.

10.2 Relativisation du noyau $\tilde{\Phi}$

D'après la théorie des perturbations, on connaît la décomposition spectrale dans V de $\Phi_f(\theta)$ pour tout réel θ, $|\theta| < a$, il a pour valeurs propres $\lambda_0(\theta)$, $\lambda_1(\theta)$, $\cdots$, $\lambda_{p-1}(\theta)$, elles sont simples associées aux fonctions propres $h_0(\theta)$, $h_1(\theta)$, $\cdots$, $h_{p-1}(\theta)$. De plus les fonctions $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ et $\theta \mapsto h_k(\theta)$ sont continues. Les autres valeurs spectrales de $\Phi_f(\theta)$ sont celles de l'opérateur $\Psi_f(\theta)$ qui est de rayon spectral $\rho_\theta \leq \rho < 1$. Si a est suffisament petit, comme $\lambda_0(0) = 1$ et $h_0(0) = h$ par continuité on peut toujours supposer que $|\theta| < a$ entraîne :

$$\begin{cases} \lambda_0(\theta) > 0, h_0(\theta) \geq 0 \\ \{h_0(\theta) = 0\} \subseteq \{h = 0\}, \end{cases}$$

car la convergence dans V entraîne la convergence uniforme et car $h_1(\theta)$ et h admettent des représentants continus par morceaux ayant un nombre dénombrable de sauts. On a, de plus, le résultat suivant :

Proposition 10.2. — *Si $|\theta| < a$, alors $\lambda_0(\theta)$ est la valeur propre dominante de $\Phi_f(\theta)$.*

Démonstration. — Pour tout $k \leq p-1$, on a :

$$\Phi_f(\theta)h_k(\theta) = \lambda_k(\theta)h_k(\theta).$$

On définit sur $\{h_0(\theta) \neq 0\}$ l'opérateur Q_θ suivant : pour φ dans V :

$$Q_\theta\varphi = \frac{\Phi_f(\theta)(\varphi \cdot h_0(\theta))}{\lambda_0(\theta)h_0(\theta)}.$$

Comme $\{h_0(\theta) \neq 0\}$ contient $\{h \neq 0\}$, on restreint l'étude de Q_θ à $\{h \neq 0\}$. Pour x dans $\{h \neq 0\}$, on a :

$$Q_\theta\varphi(x) = \sum_{j \in J} \frac{e^{\theta f(\sigma_j x)} h_0(\theta)(\sigma_j x)\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x)}{\lambda_0(\theta)h_0(\theta)(x)|T'(\sigma_j x)|}\varphi(\sigma_j x),$$

Q_θ est un opérateur positif markovien sur $\{h \neq 0\}$. On a pour $1 < k \leq p-1$,

$$Q_\theta\left(\frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}\right) = \frac{\lambda_k(\theta)}{\lambda_0(\theta)} \cdot \frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}.$$

Donc :

$$\left\|\frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}\mathbf{1}_{\{h_0(\theta)\neq 0\}}\right\|_v \geq \left\|Q_\theta\left(\frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}\right)\mathbf{1}_{\{h_0(\theta)\neq 0\}}\right\|_v = \left|\frac{\lambda_k(\theta)}{\lambda_0(\theta)}\right| \cdot \left\|\frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}\mathbf{1}_{\{h_0(\theta)\neq 0\}}\right\|_v.$$

Ce qui entraîne :

$$|\lambda_k(\theta)| \leq |\lambda_0(\theta)| = \lambda_0(\theta). \quad \square$$

On note maintenant h_θ et λ_θ à la place de $h_0(\theta)$ et $\lambda_0(\theta)$. Dans toute la suite, on notera pour $r \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e_r : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ & t \mapsto e^{rt}. \end{aligned}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}, |\theta| < a$, fixé, on définit

$$\begin{aligned} \varphi_\theta : \quad & I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (x,t) \mapsto h_\theta(x)e_{-\theta}(t), \end{aligned}$$

φ_θ est une fonction propre de $\tilde{\Phi}$ associée à la valeur propre λ_θ. En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}\varphi_\theta(x,t) &= \sum_{j \in J} \varphi_\theta(\sigma_j x, t - f(\sigma_j x))\frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}\mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \\ &= e_{-\theta}(t)\Phi_f(\theta)h_\theta(x) \\ &= \lambda_\theta\varphi_\theta(x,t). \end{aligned}$$

Sur $\{h \neq 0\}, h_\theta$ ne s'annule pas, on peut donc construire un opérateur markovien sur $\{h \neq 0\}$ en posant : pour φ dans V :

$$(*) \qquad {}^\theta\tilde{\Phi}(\varphi) = \frac{\tilde{\Phi}(\varphi\varphi_\theta)}{\lambda_\theta\varphi_\theta}.$$

Remarque. — ${}^{\theta}\tilde{\Phi}(\varphi)(x)$ n'est défini que si x est dans $\{h \neq 0\}$. Ce n'est pas génant car dans la suite, on ne l'appliquera qu'à des fonctions $\varphi = g \cdot h$ où g est telle que pour tout t de $\mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est dans V.

Proposition 10.3. — *Soit $({}^{\theta}X_n, {}^{\theta}S_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov de noyau de transition ${}^{\theta}\tilde{\Phi}$, alors on a :*

$$hm[S_n f > n\varepsilon] = [\lambda_\theta e^{-\theta\varepsilon}]^n E_{0,h_\theta}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} \cdot e_\theta)({}^{\theta}S_n + n\varepsilon)\frac{h}{h_\theta}({}^{\theta}X_n)]$$

$E_{0,h_\theta}(g({}^{\theta}S_n, {}^{\theta}X_n))$ désigne l'espérance de la variable $g({}^{\theta}S_n, {}^{\theta}X_n)$ par rapport à la mesure $h_\theta m$ quand $({}^{\theta}S_0, {}^{\theta}X_0) = (0,0)$.

Démonstration. — On sait que :

$$\begin{aligned}
hm[S_n f > n\varepsilon] &= \int_I \tilde{\Phi}^n[\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]} \cdot h](x,0)dm(x) \\
&= \int_{\{h\neq 0\}} \tilde{\Phi}^n[\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]} \cdot h](x,0)dm(x) \\
&= \lambda_\theta^n \int_{\{h\neq 0\}} {}^{\theta}\tilde{\Phi}^n[\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]} \cdot \frac{h}{h_\theta} \cdot e_\theta](x,0)h_\theta(x)dm(x) \\
&= \lambda_\theta^n E_{0,h_\theta}[(\mathbf{1}_{[-\infty,-n\varepsilon]} \cdot e_\theta)({}^{\theta}S_n)\frac{h}{h_\theta}({}^{\theta}X_n)] \\
&= [\lambda_\theta e^{-\theta\varepsilon}]^n E_{0,h_\theta}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} \cdot e_\theta)({}^{\theta}S_n + n\varepsilon)\frac{h}{h_\theta}({}^{\theta}X_n)],
\end{aligned}$$

on utilise ici la formule de relativisation $(*)$ précédente. □

10.3 Étude de la chaîne $({}^{\theta}X_n, {}^{\theta}S_n)_{n\geq 0}$

Dans ce paragraphe, on va démontrer que la chaîne $({}^{\theta}X_n, {}^{\theta}S_n)_{n\geq 0}$ vérifie une loi des grands nombres, un théorème limite central et un théorème limite local fonctionnels, ils permettent d'obtenir les équivalents de $hm[S_n f > n\varepsilon]$ grâce à un bon choix de θ. D'abord, on va démontrer deux résultats sur l'opérateur $\Phi_f(\theta + i\alpha), \alpha$ dans $\mathbb{R}$.

Lemme 10.4. — *Pour tout α de $\mathbb{R}$, on a : pour g dans V*

$$E_{0,h_\theta}[e_{-i\alpha}({}^{\theta}S_n)(g \cdot h)({}^{\theta}X_n)] = \frac{1}{\lambda_\theta^n}\int_I \Phi_f^n(\theta + i\alpha)(h_\theta g \cdot h)(x)dm(x).$$

De plus, on peut développer cette expression au voisinage de $\alpha = 0$.

Démonstration. — On a, d'après la formule de relativisation $(*)$:

$$
\begin{aligned}
E_{0,h_\theta}[e_{-i\alpha}(^\theta S_n)(g\cdot h)(^\theta X_n)] &= \int_{\{h\neq 0\}}^{\theta} \tilde{\Phi}^n[e_{-i\alpha}g\cdot h](x,0)h_\theta(x)dm(x)\\
&= \frac{1}{\lambda_\theta^n}\int_{\{h\neq 0\}} \tilde{\Phi}^n[e_{-i\alpha}e_{-\theta}h_\theta g\cdot h](x,0)\frac{h_\theta(x)}{\varphi_\theta(x,0)}dm(x)\\
&= \frac{1}{\lambda_\theta^n}\int_I \tilde{\Phi}^n[e_{-(\theta+i\alpha)}h_\theta g\cdot h](x,0)dm(x).
\end{aligned}
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}^n[e_{-(\theta+i\alpha)}h_\theta g\cdot h](x,0) &= \Phi^n[e_{(\theta+i\alpha)}(S_nf)h_\theta g\cdot h](x)\\
&= \Phi_f^n(\theta+i\alpha)(h_\theta g\cdot h)(x).
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
E_{0,h_\theta}[e_{-i\alpha}(^\theta S_n)(g\cdot h)(^\theta X_n)] = \frac{1}{\lambda_\theta^n}\int_I \Phi_f^n(\theta+i\alpha)(h_\theta g\cdot h)(x)dm(x).
$$

D'après le théorème des perturbations 5.7, on sait que l'on peut développer $\Phi_f^n(\theta+i\alpha)$ au voisinage de $\alpha=0$. On a pour g dans V, pour α assez petit :

$$
\Phi_f(\theta+i\alpha)(g) = \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k(\theta+i\alpha)\Phi_k(\theta+i\alpha)(g) + \Psi_f(\theta+i\alpha)(g),
$$

avec :

$$
\begin{cases}
\lambda_k(\theta+i\alpha) = \lambda_k(\theta) + i\alpha\lambda_k'(\theta) - \frac{\alpha^2}{2}\lambda_k''(\theta) + \alpha^2\varepsilon(\alpha)\\[2ex]
\Phi_k(\theta+i\alpha)(g) = \Phi_k(\theta)(g) + i\alpha\Phi_k^{(1)}(\theta)(g) - \frac{\alpha^2}{2}\Phi_k^{(2)}(\theta)(g) + \alpha^2\varepsilon_k(\alpha)(g)\\[2ex]
\Psi_f(\theta+i\alpha) \text{ a pour rayon spectral } \rho_2\leq\rho<1,
\end{cases}
$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

On notera dans toute la suite :

$$
\lambda_0(\theta+i\alpha) = \lambda_{\theta+i\alpha} = \lambda_\theta + i\alpha\lambda_\theta' - \frac{\alpha^2}{2}\lambda_\theta'' + \alpha^2\varepsilon(\alpha)
$$

et ν_θ la mesure de probabilité définie pour tout g de V, g s'annulant avec h par :

$$
\Phi_1(\theta)(g) = \nu_\theta\left(\frac{g}{h_\theta}\right)h_\theta.
$$

Lemme 10.5. — *On suppose que pour tout ξ de $\mathbb{R}^*$, l'opérateur $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1. Alors pour tout α dans $\mathbb{R}^*$, l'opérateur*

$$
Q_\alpha\colon g\in V\mapsto Q_\alpha(g) = \frac{\Phi_f(\theta+i\alpha)(gh_\theta)}{\lambda_\theta h_\theta}\in V
$$

qui est défini sur $\{h\neq 0\}$ est de rayon spectral strictement plus petit que 1.

Démonstration. — On suppose le contraire : il existe g dans V, r dans $\mathbb{R}$ tels que $Q_\alpha g = e^{ir}g$. Alors :

$$|\Phi_f(\theta + i\alpha)(gh_\theta)| = \lambda_\theta h_\theta |g|.$$

Mais :

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\theta + i\alpha)(gh_\theta)| &= |\Phi[e^{(\theta+i\alpha)f}gh_\theta]| \\ &\leq \Phi[e^{\theta f}|g|h_\theta] \\ &\leq \Phi(\theta)(|g|h_\theta). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\Phi(\theta)(|g|h_\theta) \geq \lambda_\theta h_\theta |g|.$$

On intègre par rapport à la mesure ν_θ qui invariante pour Q_0, on obtient donc :

$$\nu_\theta(|g|) \leq \nu_\theta(\frac{\Phi_f(\theta)(|g|h_\theta)}{\lambda_\theta h_\theta}) = \nu_\theta(|g|).$$

On a donc l'égalité :

$$\Phi(\theta)(|g|h_\theta) = \lambda_\theta h_\theta |g| \ hm\text{-p.p.}$$

Ainsi $g = e^{i\varphi}$ où φ est à valeurs réelles. L'équation $Q_\alpha g = e^{ir}g$ devient alors, pour x de $\{h \neq 0\}$:

$$\sum_{j\in J} e^{i\alpha f(\sigma_j x)} e^{i\varphi(\sigma_j x)} [\frac{e^{\theta f(\sigma_j x)} h_\theta(\sigma_j x)}{\lambda_\theta h_\theta(x)|T'(\sigma_j x)|}] \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) = e^{ir} e^{i\varphi(x)}.$$

On a un barycentre de points de module 1 qui reste de module 1 donc pour tout x de $T(\bar{I}_j) \cap \{h \neq 0\}$, j dans J, on a :

$$e^{i\alpha f(\sigma_j x)} e^{i\varphi(\sigma_j x)} = e^{ir} e^{i\varphi(x)}.$$

Ce qui revient à $e^{i\alpha f} = e^{ir} e^{i\varphi} e^{-i\varphi \circ T}$ hm-p.p. Ceci contredit l'hypothèse $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 si $\xi \neq 0$. □

Le lemme suivant permettra, par la suite, de montrer une loi des grands nombres et un théorème limite central pour la marche considérée :

Lemme 10.6. — *On a :*

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,h_\theta}[e_{-i\frac{\alpha}{n}}({}^\theta S_n) h({}^\theta X_n)] = e^{+i\alpha \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta}} \nu_\theta(h),$$

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,h_\theta}[e_{-i\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}({}^\theta S_n - \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta} n) h({}^\theta X_n)] = e^{-\frac{\alpha^2}{2}[\frac{\lambda''_\theta \lambda_\theta - (\lambda'_\theta)^2}{\lambda_\theta^2}]} \nu_\theta(h).$$

Démonstration. — On applique le lemme 10.4 avec $\alpha = \frac{\alpha}{n}$, $g = 1$.

$$E_{0,h_\theta}[e_{-i\frac{\alpha}{n}}({}^\theta S_n) h({}^\theta X_n)] = \frac{1}{\lambda_\theta^n} \int_I \Phi_f^n(\theta + i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta)(x) dm(x) = A(n, \theta).$$

que l'on développe pour n assez grand.

$$\begin{aligned}A(n,\theta) &= \frac{1}{\lambda_\theta^n}\langle \Phi_f^n(\theta+i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta),1\rangle_m \\ &= \frac{1}{\lambda_\theta^n}[\lambda_\theta + i\frac{\alpha}{n}\lambda'_\theta + \frac{\alpha}{n}\varepsilon(\frac{\alpha}{n})]^n \cdot [\nu_\theta(h) + i\frac{\alpha}{n}\langle \Phi_1^{(1)}(hh_\theta),1\rangle_m + \frac{\alpha}{n}\langle\varepsilon(\frac{\alpha}{n})(hh_\theta),1\rangle_m] \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1}(\frac{\lambda_k(\theta+i\alpha)}{\lambda_\theta})^n\langle\Phi_k(\theta+i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta),1\rangle_m + \langle\Psi_f^n(\theta+i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta),1\rangle_m.\end{aligned}$$

On passe alors à la limite quand n tend vers $+\infty$, à cause du lemme 10.5 et comme :

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Psi_f^n(\theta+i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta),1\rangle_m = 0,$$

on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,h_\theta}[e_{-i\frac{\alpha}{n}}({}^\theta S_n)h({}^\theta X_n)] = e^{+i\alpha\frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta}}\nu_\theta(h).$$

Pour le second résultat, on développe jusqu'au rang 2, on emploie exactement les mêmes arguments, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,h_\theta}[e_{-i\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}({}^\theta S_n - \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta}n)h({}^\theta X_n)] = e^{-\frac{\alpha^2}{2}[\frac{\lambda''_\theta\lambda_\theta-(\lambda'_\theta)^2}{\lambda_\theta^2}]}\nu_\theta(h). \quad \square$$

On va noter

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\lambda''_\theta\lambda_\theta - (\lambda'_\theta)^2}{\lambda_\theta^2}.$$

En $\theta = 0$, σ_θ^2 vaut σ^2 qui est strictement positif, il existe donc un intervalle centré en 0 sur lequel σ_θ^2 est strictement positif, car la fonction $\theta \mapsto \sigma_\theta^2$ est continue au voisinage de 0.

Remarque. — On peut aussi faire la preuve du lemme 10.6 sans utiliser le lemme 10.5 mais c'est un peu plus long. On raisonne comme dans la démonstration du théorème limite central pour $S_n f$, (donc sous des hypothèses un peu plus larges pour f).

On va maintenant montrer un théorème limite local fonctionnel pour la suite de variables aléatoires $({}^\theta X_n, {}^\theta S_n)$, on choisit $|\theta| < a$ tel que $\sigma_\theta > 0$.

Lemme 10.7. — *Pour toute fonction g continue à support compact sur $\mathbb{R}$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{R}}|\sqrt{2\pi n}\sigma_\theta E_{0,h_\theta}[g(z+{}^\theta S_n - n\varepsilon)\frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] - e^{-\frac{z^2}{2n\sigma_\theta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt\nu_\theta(h)| = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour g dans $\mathcal{H}$, $\hat{g}$ est donc continue à support compact par exemple dans $[-\delta,+\delta]$. On a :

$$g(z+{}^\theta S_n - n\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta}\hat{g}(u)e^{i(z+{}^\theta S_n-n\varepsilon)u}du.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&E_{0,h_\theta}[g(z+{}^\theta S_n - n\varepsilon)\frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] \\
&\quad = E_{0,h_\theta}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta}\hat{g}(u)e^{i(z+{}^\theta S_n - n\varepsilon)u}du\frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta}E_{0,h_\theta}[e_{iu}(\frac{{}^\theta S_n}{-}n\varepsilon)h({}^\theta X_n)h_\theta({}^\theta X_n)]\hat{g}(u)e^{iuz}du.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
C_n &= E_{0,h_\theta}[g(z+{}^\theta S_n - n\varepsilon)\frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}]\sqrt{2\pi n}\sigma_\theta - e^{-\frac{z^2}{2n\sigma_\theta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt\nu_\theta(h) \\
&= \int_{-\delta\sqrt{n}\sigma_\theta}^{+\delta\sqrt{n}\sigma_\theta}\hat{g}(\frac{u}{\sqrt{n}\sigma_\theta})e^{i\frac{uz}{\sqrt{n}\sigma_\theta}}E_{0,h_\theta}[e_{iu}(\frac{{}^\theta S_n - n\varepsilon}{\sqrt{n}\sigma_\theta})\frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}]du \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}e^{i\frac{uz}{\sigma\sqrt{n}}}du\hat{g}(0)\nu_\theta(h).
\end{aligned}$$

On passe à la limite en utilisant le lemme 10.5, comme dans le théorème limite local pour S_nf et on a le résultat voulu exactement pour les mêmes raisons. □

10.4 Théorèmes des grands écarts

On peut alors démontrer deux versions du théorème des grands écarts, on remarque d'abord que pour $|\theta| < a$, la fonction $\psi\colon \theta \mapsto \log\lambda_\theta$ est bien définie. De plus on a :

$$\begin{aligned}
&\psi(0) = 0, \\
&\psi'(0) = \frac{\lambda_0'}{\lambda_0} = m(fh) = 0, \\
&\psi''(0) = \frac{\lambda_0''}{\lambda_0} - (\frac{\lambda_0'}{\lambda_0})^2 = \sigma^2 > 0, \\
&\psi''(\theta) = \sigma_\theta^2.
\end{aligned}$$

Au voisinage de $\theta = 0$, la fonction ψ est donc strictement convexe. On suppose avoir choisi a suffisament petit pour que ψ soit strictement convexe sur $[-a,+a]$. On choisit maintenant ε dans $]0,\frac{\psi(a)}{a}[$. La droite $y = t\varepsilon$ coupe alors la courbe $y = \psi(t)$ en 2 points : 0 et $\theta_\varepsilon > 0$. Comme ψ est une fonction convexe, θ_ε vérifie l'équation :

$$\psi'(\theta_\varepsilon) = \varepsilon.$$

On peut alors montrer les deux résultats suivants :

Théorème 10.8. — *Si pour tout ξ de $\mathbb{R}^*$, $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1, alors :*

$$\lim_{n\to\infty}(hm[\frac{S_nf}{n} > \varepsilon])^{\frac{1}{n}} = \lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon}.$$

Théorème 10.9. — *Sous les mêmes hypothèses pour f, au voisinage de $n = +\infty$, on a :*

$$hm[\frac{S_nf}{n} > \varepsilon] \sim \frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon} e^{-\theta_\varepsilon \varepsilon})^n \nu_{\theta_\varepsilon}(h)}{\sqrt{2\pi n}\theta_\varepsilon \sigma_{\theta_\varepsilon}}.$$

Démonstration du théorème 10.8. — La proposition 10.3 entraîne que :

$$hm[\frac{S_nf}{n} > \varepsilon] = (\lambda_\theta e^{-\theta\varepsilon})^n E_{0,h_\theta}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_\theta)({}^\theta S_n + n\varepsilon)\frac{h}{h_\theta}({}^\theta X_n)].$$

D'après le lemme 10.6,

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,h_\theta}[e_{i\frac{\alpha}{n}}({}^\theta S_n + n\varepsilon)\frac{h}{h_\theta}({}^\theta X_n)] = e^{i\alpha(\psi'(\theta)-\varepsilon)}\nu_\theta(h),$$

pour $\theta = \theta_\varepsilon$, on en déduit que la chaîne $(({}^\theta S_n + n\varepsilon, {}^\theta X_n))_{n\geq 0}$ vérifie la loi des grands nombres :

$$\frac{{}^\theta S_n + n\varepsilon}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

On en déduit alors que :

$$[E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})({}^{\theta_\varepsilon} S_n + n\varepsilon)\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)]]^{\frac{1}{n}} \geq E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})(\frac{{}^{\theta_\varepsilon} S_n}{+} n\varepsilon n)[\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)]^{\frac{1}{n}}].$$

Comme la quantité $\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)$ est bornée et comme

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})(\frac{{}^\theta S_n + n\varepsilon}{n})] = 1,$$

on en déduit alors que :

$$\limsup_{n\to\infty} [E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})(\frac{{}^{\theta_\varepsilon} S_n + n\varepsilon}{n})\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)]]^{\frac{1}{n}} \geq 1.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
[E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})(\frac{{}^{\theta_\varepsilon} S_n + n\varepsilon}{n})\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)]]^{\frac{1}{n}} &\leq [E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)]]^{\frac{1}{n}} \\
&\leq [\nu_{\theta_\varepsilon}(h) + \eta]^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

qui converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} hm[S_nf > n\varepsilon]^{\frac{1}{n}} = e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon} \cdot \lambda_{\theta_\varepsilon}. \quad \square$$

Démonstration du théorème 10.9. — La fonction $t \mapsto e^{-\theta_\varepsilon t}\mathbf{1}_{\{t\leq 0\}}$ est directement Riemann-intégrable. Le lemme 10.7 est donc encore valable pour cette fonction, pour $\theta = \theta_\varepsilon$, $z = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |\sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon} E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})(\frac{{}^{\theta_\varepsilon} S_n + n\varepsilon}{n})\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}({}^{\theta_\varepsilon} X_n)] - \int_{-\infty}^0 e^{-\theta_\varepsilon t}dt \cdot \nu_{\theta_\varepsilon}(h)| = 0.$$

Donc la limite quand n tend vers $+\infty$ de la quantité suivante :

$$|\sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon}(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}\cdot e_{\theta_\varepsilon})(\frac{^{\theta_\varepsilon}S_n+n\varepsilon}{n})\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}(^{\theta_\varepsilon}X_n)]-\frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n}{\theta_\varepsilon}\nu_{\theta_\varepsilon}(h)|$$

est nulle. Car :

$$\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon}=e^{(\psi(\theta_\varepsilon)-\theta_\varepsilon\varepsilon)}<1$$

et car :

$$\theta_\varepsilon\varepsilon-\psi(\theta_\varepsilon)=\sup_{t\in[0,a]}[t\varepsilon-\psi(t)]>0.$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty}|\sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon}hm[S_nf>n\varepsilon]-\frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n}{\theta_\varepsilon}\nu_{\theta_\varepsilon}(h)|=0.$$

Donc, au voisinage de $n=+\infty$, on a :

$$hm[S_nf>n\varepsilon]\sim\frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n\nu_{\theta_\varepsilon}(h)}{\theta_\varepsilon\sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon}}.\quad\square$$

Remarque. — On peut aussi avoir en utilisant des méthodes similaires la vitesse de convergence dans le théorème limite central pour la marche $(^\theta S_n,^\theta X_n)$. On obtient alors un théorème des grands écarts un peu plus précis mais tout à fait analogue à celui obtenu pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, voir par exemple Crépel [C] et Feller [F]. Les calculs étant ici longs et peu intéressants, on s'en dispensera.

11 APPLICATIONS SUR DES EXEMPLES

11.1 Premier exemple : La transformation $Tx = 2x[1]$

La mesure m est invariante par T. L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est :

$$\Phi f(x) = \frac{1}{2}[f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})].$$

On va prendre plusieurs types de fonctions et voir si on peut leur appliquer les théorèmes limites précédents.

11.1.1 Les polynômes de degré 1 : $f(x) = ax + b$

Quitte à enlever une constante, on peut supposer que $m(f) = \frac{a}{2} + b = 0$, donc que $f(x) = \alpha(2x - 1)$, α dans $\mathbb{R}^*$. Dans ce cas on peut calculer directement σ^2 :

$$\sigma^2 = \langle f, f\rangle_m + 2\sum_{k=1}^{\infty}\langle f, f\circ T^k\rangle_m.$$

On a :

$$\langle f, f\rangle_m = \alpha^2 \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \frac{\alpha^2}{3},$$

pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle f, f\circ T^k\rangle_m &= \alpha^2 \int_0^1 (2x-1)(2T^kx - 1)\, dx \\
&= \alpha^2[4\int_0^1 xT^kx\, dx - 2\int_0^1 x\, dx - 2\int_0^1 T^kx\, dx + 1] \\
&= \alpha^2[4\int_0^1 xT^kx\, dx - 1],
\end{aligned}$$

on a de plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xT^k x\,dx &= \int_0^1 x\{2^k x\}\,dx = \sum_{p=0}^{2^k-1}\int_{p/2^k}^{(p+1)/2^k} x(2^k x - p)\,dx \\ &= \sum_{p=0}^{2^k-1}[\frac{2^k}{3}((\frac{p+1}{2^k})^3 - (\frac{p}{2^k})^3) - \frac{p}{2}((\frac{p+1}{2^k})^2 - (\frac{p}{2^k})^2)] \\ &= \frac{1}{2^{2k}}\sum_{p=0}^{2^k-1}(\frac{1}{3}+\frac{p}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\frac{1}{2^k},\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle f, f\circ T^k\rangle_m = \alpha^2\frac{1}{3}\frac{1}{2^k}.$$

Ainsi $\sigma^2 = \frac{\alpha^2}{3}[1 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2}] = \alpha^2 > 0$, pour tout polynôme de degré 1, on peut appliquer le théorème limite central. Pour appliquer le théorème limite local, il faut trouver les valeurs propres de module 1 de $\Phi_f(i\xi)$. On a pour x de I, g dans V :

$$\Phi_f(i\xi)(g)(x) = \frac{1}{2}e^{i\xi\alpha x}[e^{-i\xi\alpha}g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2})].$$

On remarque que pour $g(x) = e^{2i\xi\alpha x}$ on a :

$$\Phi_f(i\xi)(g)(x) = \cos(\xi\alpha)g(x).$$

g est donc une fonction propre associée à la valeur propre $\cos(\xi\alpha)$, qui est de module 1 si ξ est dans $\frac{\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$. À l'aide du test des points périodiques, on voit qu'il n'y a pas d'autres valeurs de ξ pour lesquelles $\Phi_f(i\xi)$ admet des valeurs propres de module 1, on cherche à résoudre dans $]0,\frac{\pi}{\alpha}[$ l'équation $e^{i\xi S_1 f(1)} = e^{i\xi S_2 f(1/3)/2}$, c'est-à-dire $e^{i\xi\alpha} = 1$, ses solutions dans $\mathbb{R}$ appartiennent à $\frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$ qui ne rencontre pas $]0,\frac{\pi}{\alpha}[$. Alors f s'écrit $u - u\circ T + \alpha k$, u dans V, k dans V à valeurs entières, $m(k) = 0$, on peut même préciser que $u(x) = -2\alpha x$ et que $k(x) = \mathbf{1}_{[1/2,1]}(x) - \mathbf{1}_{[0,1/2]}(x)$. u n'étant pas nul, on ne peut donc pas appliquer le théorème limite local à f polynôme de degré 1.

11.1.2 Les polynômes de degré 2

On prend $f(x) = \alpha(3x^2 - 1) + \beta(2x - 1)$. On trouve par un calcul analogue.

$$\sigma^2 = \beta^2 + \frac{8}{3}\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha\beta$$

qui est positif si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ car

$$\Delta = (\frac{5}{2})^2 - 4\cdot\frac{8}{3} = -\frac{53}{12} < 0.$$

On a donc le théorème limite central. Pour le théorème limite local, on résoud l'équation

$$(*) \qquad e^{i\xi S_k f(p)/k} = e^{i\xi S_{k'}(p')/k'}$$

où p et p' sont des points périodiques de T de période k et k', pour $p=0$ et $p=1$, on trouve ξ dans $\frac{2\pi}{3\alpha+2\beta}\mathbb{Z}$, pour $p=0$ et $p=1/3$, on trouve ξ dans $\frac{12\pi}{5\alpha+6\beta}\mathbb{Z}$. Si $\frac{6(3\alpha+2\beta)}{5\alpha+6\beta}$ n'est ni un entier ni l'inverse d'un entier, alors on a le théorème limite local.

11.1.3 Les indicateurs d'intervalle : $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, $(a,b) \neq (0,1)$, $0 \leq a < b \leq 1$

La proposition 7.2 entraîne le théorème limite central car $m([a,b]) = b-a$ est dans $]0,1[$. La fonction f étant à valeurs entières, telle que $f-m(f)$ ne s'écrit pas $u-u\circ T$, on a alors le 2ème théorème limite local pour f et T : uniformément en z, pour tout intervalle fini Δ de $\mathbb{R}$, au voisinage de $n=+\infty$, on a :

$$m(\{x\in I : \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{[a,b]}(T^k x) \in z+n(b-a)+\Delta\}) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\frac{e^{\frac{-z^2}{\sigma^2 n}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}_{\Delta}(z-n(b-a)+\ell).$$

11.1.4 Les fonctions $f = a\mathbf{1}_{[0,1/3]} + b\mathbf{1}_{[1/3,2/3]}$, $ab \neq 0$, $|b/a|$ non inclus dans $\{n, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$

On a $\mathfrak{I} = \{1/3, 2/3\}$, f ne s'écrit pas $u-u\circ T+\frac{a+b}{3}$ avec u dans V en effet $1/7$ est un point 3-périodique n'appartenant pas à $\mathfrak{I}\cup T^{-1}(\mathfrak{I})\cup T^{-2}(\mathfrak{I})$ et

$$\frac{S_3 f(1/7)}{3} - \frac{a+b}{3} = \frac{f(1/7)+f(2/7)+f(4/7)}{3} - \frac{a+b}{3} = \frac{a}{3} \neq 0.$$

On a donc le théorème limite central. f n'est pas à valeurs entières car $|b/a|$ et $|a/b|$ ne sont pas dans $\mathbb{N}$. On résoud l'équation

$$(*) \qquad e^{i\xi S_k f(p)/k} = e^{i\xi S_{k'}(p')/k'}$$

où p et p' sont des points périodiques de T de période k et k' n'appartenant pas à $\cup_{\ell<k}T^{-\ell}(\mathfrak{I})$ et $\cup_{\ell<k'}T^{-\ell}(\mathfrak{I})$. Pour $p=3/7$, $p'=7/15$ on trouve : ξ dans $\frac{24\pi}{b}\mathbb{Z}$. Pour $p=1/7$, $p'=1/15$ on trouve : ξ dans $\frac{24\pi}{b-a}\mathbb{Z}$.
Les sous groupes $\frac{24\pi}{b}\mathbb{Z}$ et $\frac{24\pi}{b-a}\mathbb{Z}$ sont d'intersection non réduite à 0 s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{24\pi}{b} = \frac{24\pi}{b-a}k \Rightarrow a = (1-k)b \text{ ou } \frac{24\pi}{b}k = \frac{24\pi}{b-a} \Rightarrow b = \frac{k}{k-1}a.$$

Ce qui est impossible. On peut donc appliquer le 1er théorème limite local à f et T. Donc uniformément en z réel, pour tout intervalle fini Δ de $\mathbb{R}$, au voisinage de $n=+\infty$, on a :

$$m(\{x\in I\colon S_n f(x) \in z+n(b-a)+\Delta\}) \sim \frac{e^{\frac{-z^2}{\sigma^2 n}}}{\sigma\sqrt{n}}\frac{m(\Delta)}{\sqrt{2\pi}}.$$

11.1.5 Les polynômes trigonométriques

On choisit pour fonction f un polynôme trigonométrique, on l'écrit :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(2k\pi x)+\sum_{\ell=1}^{N}b_\ell\sin(2\pi\ell x).$$

On a $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

Conditions sur les a_k, b_ℓ pour que f vérifie la condition (H)

On suppose $f=\phi-\phi\circ T$. ϕ admet un développement en série trigonométrique :

$$\phi(x)=\sum_{k}\alpha_k\cos(2\pi kx)+\sum_{\ell}\beta_\ell\sin(2\pi\ell x).$$

On a :

$$\begin{aligned}\phi(x)-\phi(Tx) &= \sum_k\alpha_k\cos(2\pi kx)+\sum_\ell\beta_\ell\sin(2\pi\ell x)\\ &- \sum_k\alpha_k\cos(4\pi kx)-\sum_\ell\beta_\ell\sin(4\pi\ell x)\\ &= \sum_k(\alpha_{2k}-\alpha_k)\cos(4\pi kx)+\sum_k\alpha_{2k+1}\cos(2(2k+1)\pi x)\\ &+ \sum_\ell(\beta_{2\ell}-\beta_\ell)\sin(4\pi\ell x)+\sum_\ell\beta_{2\ell+1}\sin(2(2\ell+1)\pi x).\end{aligned}$$

Ainsi si $f=\phi-\phi\circ T$, on a :

$$1\le k\le\left[\frac{N}{2}\right]\begin{cases}a_{2k} & =\alpha_{2k}-\alpha_k\\ a_{2k+1} & =\alpha_{2k+1}\end{cases}\quad \text{et } k>N\quad \alpha_k=0$$

$$1\le \ell\le\left[\frac{M}{2}\right]\begin{cases}b_{2\ell} & =\beta_{2\ell}-\beta_\ell\\ b_{2\ell+1} & =\beta_{2\ell+1}\end{cases}\quad \text{et } \ell>M\quad \beta_\ell=0.$$

On en déduit alors que : si $2^k\le N$ donc si $k\le\frac{\log N}{\log 2}$, on a :

$$\alpha_1=a_1,\alpha_2=a_1+a_2,\dots,\alpha_{2^k}=\sum_{\ell=0}^{k}a_{2^\ell},$$

et donc

$$\alpha_{2^k}=\sum_{\ell=0}^{[\log N/\log 2]}a_{2^\ell}\ \text{si } 2^k>N.$$

De même, pour : $2^k\le\frac{N}{3}$ donc pour $k\le\frac{\log N-\log 3}{2}$, on a :

$$\alpha_3=a_3,\alpha_6=a_3+a_6,\alpha_{12}=a_3+a_6+a_{12},\dots,\alpha_{3\cdot 2^k}=\sum_{\ell=0}^{k}a_{3\cdot 2^\ell}$$

et donc :

$$\alpha_{3\cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log 3)/\log 2]} a_{3\cdot 2^\ell} \text{ si } 3\cdot 2^k > N.$$

On obtient donc les relations suivantes pour $f = \phi - \phi \circ T$:

1. $\sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log k)/\log 2]} a_{k2^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de 2 compris entre 1 et N.
2. $\sum_{\ell=0}^{[(\log M - \log k)/\log 2]} b_{k2^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de 2 compris entre 1 et M.

Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, on sait alors que σ^2 est strictement positif. Ici, on peut même calculer la valeur exacte de σ^2 :

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2 dm + 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 f f\circ T^k dm.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 \cos(2k\pi x)\cos(2q\pi x)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\
\textstyle\int_0^1 \sin(2k\pi x)\sin(2q\pi x)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\
\textstyle\int_0^1 \sin(2k\pi x)\cos(2q\pi x)\,dx &= 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^2 dm &= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell^2], \\
\int_0^1 f f\circ T^p dm &= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{[N/2^p]} a_k a_{k2^p} + \sum_{\ell=1}^{[M/2^p]} b_\ell b_{\ell 2^p}].
\end{aligned}$$

Dans le cas où $[\frac{N}{2^p}]$ ou $[\frac{M}{2^p}]$ est nul on impose à la somme correspondante d'être nulle. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell^2] + \sum_{p=1}^{\infty}[\sum_{k=1}^{[N/2^p]} a_{k2^p} a_k + \sum_{\ell=1}^{[M/2^p]} b_{\ell 2^p} b_\ell] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{1\le k \text{ impair } \le N} [\sum_{p=0}^{[(\log N - \log k)/\log 2]} a_{k2^p}]^2 + \sum_{1\le \ell \text{ impair } \le M} [\sum_{p=0}^{[(\log M - \log k)/\log 2]} b_{\ell 2^p}]^2].
\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème central limite et même donner la vitesse de convergence pour f un polynôme trigonométrique.

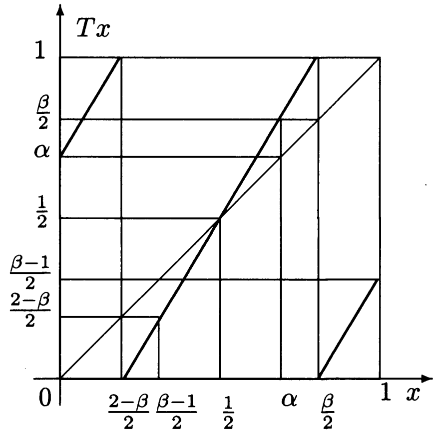
Remarque. — On obtient des résultats analogues si on prend pour transformation $T(x) = rx[1]$, avec r un entier supérieur à 2.

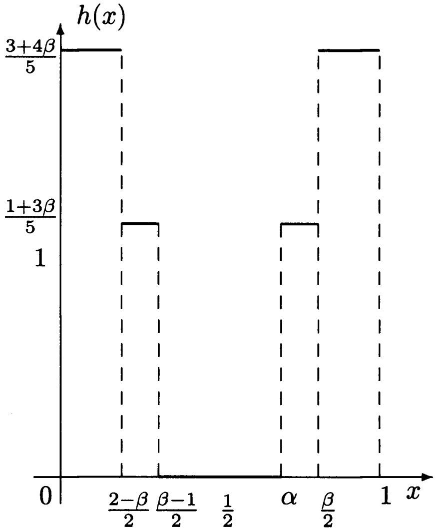
11.2 Deuxième exemple : La transformation $Tx = \beta x + \alpha[1]$, $\beta > 0$, $\beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$

On a

$$h(x) = \frac{3+4\beta}{5}[\mathbf{1}_{[0,\frac{2-\beta}{2}]}(x) + \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2},1]}(x)] + \frac{1+3\beta}{5}[\mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2},\frac{\beta-1}{2}]}(x) + \mathbf{1}_{[\alpha,\frac{\beta}{2}]}(x)].$$

La fonction h a pour points de discontinuité l'ensemble $\{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}$. Cet ensemble est invariant par T.





Si on prend f une fonction continue sur I, $\mathfrak{I}_f$ est alors vide et

$$\mathfrak{I} = \cup_{n\geq 0} T^n\{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\} = \{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}.$$

On peut donc appliquer le test des points périodiques à f en prenant des points n'appartenant pas à $\mathfrak{I}$ ni à $[\frac{\beta-1}{2}, \alpha]$ qui est l'ensemble $\{h = 0\}$.

Ainsi on peut appliquer le théorème central limite à T et f « bien choisie » continue sur I. C'est un exemple de β-transformation tel que le système (T, μ) est ergodique et non faiblement mélangeant, voir Wilkinson[W].

Par exemple, pour un polynôme de degré 1 $f(x) = ax + b$, on a :

$$\mu(f) = \int_0^1 f(x)h(x)\,dx = \frac{a}{2} + b = 0 \text{ si } \frac{a}{2} = -b.$$

On se limite à $f(x) = \frac{1-\beta}{2}(2x-1)$, on remarque que si $u(x) = x$ alors on a :

$$u(x) - u(Tx) = \begin{cases} (1-\beta)x - \frac{3-\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}(2x-1) - 1 & \text{sur } [0, \frac{2-\beta}{2}] \\ (1-\beta)x - \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}(2x-1) & \text{sur } [\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}] \\ (1-\beta)x + \frac{1+\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}(2x-1) + 1 & \text{sur } [\frac{\beta}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = u(x) - u(Tx) + k(x)$, avec : $k(x) = \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2},1]}(x) - \mathbf{1}_{[0,\frac{2-\beta}{2}]}(x)$.
On remarque que si $v(x) = \mathbf{1}_{[0,\frac{\beta-1}{2}]}(x) - \mathbf{1}_{[\alpha,1]}(x)$, alors :

$$v \circ T - v = \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2},1]} + \mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2},\gamma]} - \mathbf{1}_{[0,\frac{2-\beta}{2}]} - \mathbf{1}_{[\delta,\frac{\beta-1}{2}]} - \mathbf{1}_{[0,\frac{\beta-1}{2}]} + \mathbf{1}_{[\alpha,1]}$$

avec $T\gamma = \frac{\beta-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$ et $T\delta = \alpha$, $\frac{1}{2} < \delta < \alpha$. Donc :

$$v \circ T - v = 2(\mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2},1]} - \mathbf{1}_{[0,\frac{2-\beta}{2}]}) + (\mathbf{1}_{[\frac{\beta-1}{2},\gamma]} - \mathbf{1}_{[\delta,\alpha]}) = 2k + w.$$

Comme $\{h = 0\} =]\frac{\beta-1}{2}, \alpha[$, on en déduit que hm-p.p.

$$k(x) = \frac{1}{2}[v(Tx) - v(x)],$$

donc que $f = \phi - \phi \circ T$ hm-presque partout, ainsi pour un polynôme de degré 1, $\sigma = 0$.

Si maintenant, on prend $f(x) = \cos(2\pi x)$, on a : $\mu(f) = -2\frac{3+4\beta}{5}\sin(\pi\beta)$. Pour le point 2-périodique $p = \frac{2\beta-3}{2}$, on a :

$$S_2 f(p) - 2\mu(f) = -2\cos(2\pi\beta) + 4\frac{3+4\beta}{5}\sin(\pi\beta) \neq 0.$$

Donc on a le théorème limite central pour f.

11.3 Troisième exemple : Les transformations « homographiques par morceaux »

Ce sont des généralisations de la transformation « fraction continue » : $T_1 x = \{\frac{1}{x}\}$. La proposition suivante donne toutes les bijections de $[0,1]$ qui sont des homographies :

Proposition 11.1. — *Si φ est une bijection croissante de $[0,1]$ qui est une homographie, alors il existe un paramètre α de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :*

$$\varphi(x) = \frac{\alpha x}{(\alpha - \frac{1}{\alpha})x + \frac{1}{\alpha}} = f_\alpha(x).$$

Alors les bijections de $[0,1]$ qui sont des homographies sont de la forme f_α ou $1 - f_\alpha$.

Démonstration. — φ est entièrement déterminée par $(\varphi(0), \varphi(1)) = (0,1)$ et par $\varphi'(0) = \alpha^2$ où α est dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui donne le résultat annoncé. □

Pour α dans $\mathbb{R}_+^*$, on définit les transformations de l'intervalle suivantes :

$$T_\alpha = T_1 \circ f_{\frac{1}{\alpha}}.$$

Alors pour tout x de I, on a :

$$T_\alpha(x) = \{\alpha^2(\frac{1}{x} - 1)\},$$

en effet :

$$\frac{1}{f_{\frac{1}{\alpha}}(x)} = \frac{(1/\alpha - \alpha)x + \alpha}{x/\alpha} = 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{x} = \alpha^2(\frac{1}{x} - 1) + 1.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 11.2. — *Pour tout α de $\mathbb{R}_+^*$, T_α est dans $\mathcal{C}$ et la densité de la mesure invariante est*

$$h_\alpha(x) = \frac{1}{\log(1 + 1/\alpha^2)} \frac{1}{x + \alpha^2}.$$

Démonstration. — L'appartenance à $\mathcal{C}$ des transformations T_α se montre exactement comme celle de T_1. Pour calculer la densité de la mesure invariante, on calcule l'opérateur de Perron-Frobenius associé, il vaut :

$$\Phi_\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\frac{\alpha^2}{x + n + \alpha^2}) \frac{\alpha^2}{(x + n + \alpha^2)^2},$$

on vérifie aisément que h_α est solution de $\Phi_\alpha h_\alpha = h_\alpha$. $\square$

Remarque. — Pour $\alpha \neq 1$, il n'existe pas de bijection φ strictement monotone de I telle que :

$$T_\alpha = \varphi^{-1} \circ T_1 \circ \varphi.$$

Sinon, on aurait :

$$h_\alpha = h \circ \varphi \cdot |\varphi'| \quad \text{avec } h(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1 + x},$$

et donc :

$$\varphi_\varepsilon(x) = C(x + \alpha^2)^{\varepsilon c_\alpha} - 1 \quad \text{avec } c_\alpha = \frac{\log 2}{\log(1 + 1/\alpha^2)}$$

$\varepsilon = 1$ si φ est croissante, $\varepsilon = -1$ si elle est décroissante, C est une constante déterminée par $\varphi_1(0) = 0$ et $\varphi_{-1}(1) = 0$. On trouve :

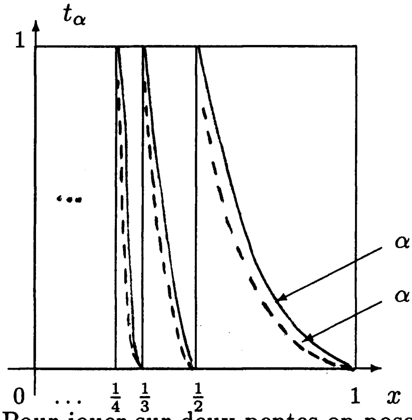
$$\varphi_1(x) = \left(\frac{x + \alpha^2}{\alpha^2}\right)^{c_\alpha} - 1 \quad \text{et } \varphi_{-1}(x) = \left(\frac{x + \alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^{-c_\alpha} - 1.$$

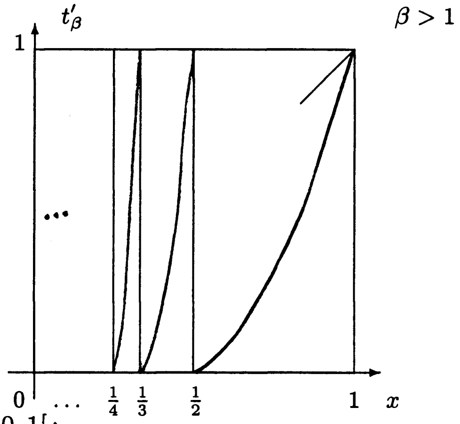
On calcule alors $\varphi_\varepsilon^{-1} \circ T_1 \circ \varphi_\varepsilon$ pour les bijections que l'on a trouvées, on remarque que l'on ne retrouve pas la quantité T_α, on en déduit alors que T_α et T_1 ne sont pas conjuguées (au sens où il n'existe pas de bijection φ strictement monotone de I telle que $T_\alpha = \varphi^{-1} \circ T_1 \circ \varphi$).

Pour avoir des transformations croissantes par morceaux, on compose T_β par $g(x) = 1 - x$, on trouve pour β dans $]1, +\infty[$:

$$T'_\beta(x) = 1 - \{\beta^2(\frac{1}{x} - 1)\} \quad \text{et } h'_\beta(x) = \frac{-1}{\log(1 - 1/\beta^2)} \frac{1}{\beta^2 - x}.$$

Pour représenter ces transformations, il est plus facile de se ramener à une partition fixe. Ici la partition associée à T_α est : $I = \cup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{\alpha^2}{\alpha^2+n+1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+n}]$.
On passe de cette partition à la partition : $I = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ par l'homographie f_α. On a : $T_\alpha = f_\alpha \circ t_\alpha \circ f_{1/\alpha}$, où t_α est la transformation qui consiste à joindre le point $(\frac{1}{n+1}, 1)$ au point $(\frac{1}{n}, 0)$ de façon homographique, avec pour pente $\frac{-n^2}{\alpha^2}$ au point $(\frac{1}{n}, 0)$. On fait de même pour T'_β, on définit t'_β en inversant les rôles de 0 et de 1. On représente ici les transformations t_α et t'_β.



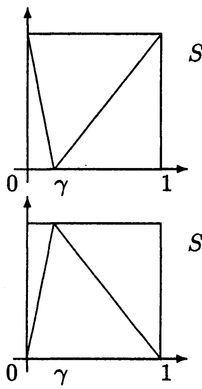


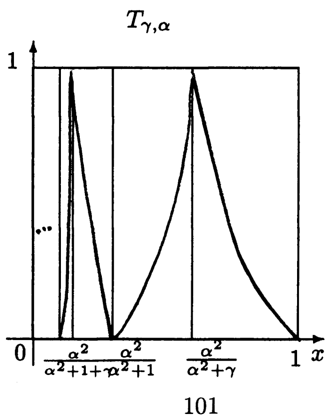
Pour jouer sur deux pentes on pose pour $\gamma \in]0, 1[$:

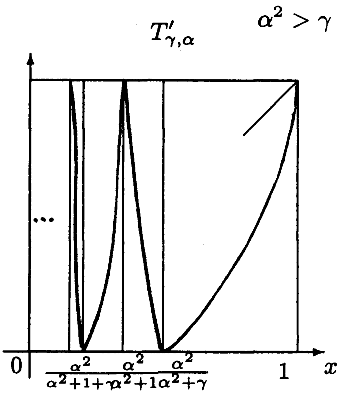
$$S_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{x}{\gamma} & \text{sur } [0,\gamma] \\ \frac{1-x}{1-\gamma} & \text{sur } [\gamma, 1] \end{cases}$$

$$S'_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-x}{\gamma} & \text{sur } [0,\gamma] \\ \frac{x-\gamma}{1-\gamma} & \text{sur } [\gamma, 1]. \end{cases}$$

En composant S_γ ou S'_γ par T_α, on peut jouer sur 2 pentes, avoir 2 paramètres et avoir une transformation continue sur I. On note $T_{\gamma,\alpha} = S_\gamma \circ T_\alpha$ et $T'_{\gamma,\alpha} = S'_\gamma \circ T_\alpha$. Pour que $T'_{\gamma,\alpha}$ soit dans $\mathcal{C}$, il faut supposer que $\alpha^2 > \gamma$ car 1 est un point fixe et car la pente en 1 vaut $\frac{\alpha^2}{\gamma}$.







L'opérateur de Perron-Frobenius associé vaut :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\gamma,\alpha} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(\frac{\alpha^2}{\gamma x + n + \alpha^2}) \frac{\alpha^2 \gamma}{(\gamma x + n + \alpha^2)^2} \\
&\quad + f(\frac{\alpha^2}{(\gamma - 1)x + n + \alpha^2 + 1}) \frac{\alpha^2 (1-\gamma)}{((\gamma - 1)x + n + \alpha^2 + 1)^2}] \\
\Phi'_{\gamma,\alpha} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(\frac{\alpha^2}{\gamma - \gamma x + n + \alpha^2}) \frac{\alpha^2 \gamma}{(\gamma - \gamma x + n + \alpha^2)^2} \\
&\quad + f(\frac{\alpha^2}{(1-\gamma)x + n + \gamma + \alpha^2}) \frac{\alpha^2 (1-\gamma)}{((1-\gamma)x + n + \gamma + \alpha^2)^2}].
\end{aligned}$$

On pose

$$g_A(x) = \frac{1}{(A + 1/\alpha^2)x + 1} \frac{1}{Ax + 1} = \alpha^2 [\frac{1}{x + \frac{1}{A + 1/\alpha^2}} - \frac{1}{x + \frac{1}{A}}]$$

g_A est dans V si $A \geq -1$. Pour trouver les densités des mesures de probabilité invariantes par les $T_{\gamma,\alpha}$ on calcule les images de g_A par $\Phi_{\gamma,\alpha}$ et par $\Phi'_{\gamma,\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\gamma,\alpha} g_A(x) &= \frac{\alpha^2 \gamma}{A\alpha^2 + \gamma x + \alpha^2} + \frac{\alpha^2 (1-\gamma)}{A\alpha^2 + (\gamma - 1)x + 1 + \alpha^2} \\
&= \alpha^2 [\frac{1}{x + \frac{\alpha^2(1+A)}{\gamma}} - \frac{1}{x - \frac{1 + \alpha^2(1+A)}{1-\gamma}}] \\
\Phi'_{\gamma,\alpha} g_A(x) &= \frac{\alpha^2 \gamma}{A\alpha^2 + \gamma - \gamma x + \alpha^2} + \frac{\alpha^2 (1-\gamma)}{A\alpha^2 + (1-\gamma)x + 1 + \alpha^2 + \gamma} \\
&= \alpha^2 [\frac{1}{x + \frac{\alpha^2(1+A) + \gamma}{1-\gamma}} - \frac{1}{x - \frac{\alpha^2(1+A)+\gamma}{\gamma}}].
\end{aligned}$$

Ainsi g_A est une fonction propre de $\Phi_{\gamma,\alpha}$ associée à 1 si :

$$\frac{\alpha^2(1+A)}{\gamma} = \frac{1}{A + 1/\alpha^2} \text{ et } -\frac{(A+1)\alpha^2 + 1}{1-\gamma} = \frac{1}{A}$$

donc si $\alpha^2 A^2 + (\alpha^2 + 1)A + 1 - \gamma = 0$, pour que g_A soit dans V on doit prendre

$$A = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2 \gamma}{-}} (\alpha^2 + 1) 2\alpha^2.$$

De même g_A est une fonction propre de $\Phi'_{\gamma,\alpha}$ associée à 1 si :

$$\frac{\alpha^2(A+1) + \gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{A + 1/\alpha^2} \text{ et } -\frac{(A+1)\alpha^2 + \gamma}{\gamma} = \frac{1}{A}$$

d'où si :

$$\alpha^2 A^2 + (\alpha^2 + \gamma + 1)A + \frac{\gamma}{\alpha^2} + \gamma = 0 \text{ et } \alpha^2 A^2 + (\alpha^2 + \gamma)A + \gamma = 0.$$

$A = -\frac{\gamma}{\alpha^2}$ est l'unique solution du système. Comme on a supposé que $\alpha^2 > \gamma$, on en déduit que h_A est bien dans V et est la densité de la mesure invariante par $T'_{\gamma,\alpha}$.

Dans tous ces cas, la densité h de la mesure invariante est majorée par une constante strictement positive sur $[0,1]$, alors $\frac{1}{h}$ est encore dans V, on en déduit d'après la proposition 7.1 que l'on peut appliquer le théorème limite central à toute fonction f non constante de V. D'après la proposition 9.3, on sait que l'opérateur $\Phi_f(i\xi)$ admet une valeur propre de module 1 s'il existe φ à valeurs réelles, avec $e^{i\varphi} \cdot h$ dans V telle que :

$$e^{if} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi} \ hm\text{-p.p.}$$

Comme f et $\frac{1}{h}$ sont dans V on en déduit que $e^{i\varphi \circ T}$ et $e^{i\varphi}$ sont toutes les deux dans V, ceci n'est possible que si $e^{i\varphi}$ est constante et donc si f est à valeurs entières. Ainsi pour toute fonction f de V, on peut appliquer un théorème limite local, le second si f est à valeurs entières, le premier sinon.

On a trouvé par le calcul la valeur explicite des densités des mesures invariantes par T_α, T'_β, $T_{\gamma,\alpha}$, $T'_{\gamma,\alpha}$. On va maintenant essayer d'expliquer pourquoi la densité a une forme aussi simple. Dans un premier temps, on va se restreindre au cas de T_α. D'abord, on va voir comment on code les points de l'intervalle I à l'aide de T_α ; ensuite, on va prolonger T_α de façon à ce qu'elle devienne bijective, cela consiste en fait à trouver un ensemble $\mathcal{P}$ qui représente tous les « passés » d'un point quelconque de I, on notera $\tilde{T_\alpha}$ cette bijection. Alors l'action de $\tilde{T_\alpha}$ sur $I \times \mathcal{P}$ n'est rien d'autre que l'action d'un semi-groupe contenu dans $Sl(2,\mathbb{R})$. Ainsi, la mesure de Liouville resteinte à $I \times \mathcal{P}$ est invariante par $\tilde{T_\alpha}$, on obtient alors naturellement en projettant cette mesure sur I la mesure invariante par T_α.

Le cas des transformations T'_β, $T_{\gamma,\alpha}$, $T'_{\gamma,\alpha}$ se traite de la même façon, la principale difficulté est de trouver l'expression explicite de l'ensemble $\mathcal{P}$ qui représente tous les « passés » possibles de I.

L'intérêt de la construction faite pour T_α est qu'on peut définir « le » développement en fractions continues dans $\mathbb{Z}(\alpha)$ d'un point de I et aussi qu'on peut poursuivre l'analogie avec les fractions continues classiques ($\alpha = 1$) en construisant une dissection de Farey associée à T_α et interpréter l'action de T_α sur les géodésiques du demi-plan de Poincaré qui pour extrémités x dans I et y dans $\mathcal{P}$.

La principale différence avec le cas classique est qu'ici on utilise uniquement un semi-groupe de matrices de $Sl(2,\mathbb{R})$ et non un groupe : $Sl(2,\mathbb{Z})$ pour faire cette construction, voir C. Series [S1] [S2] et R. Moeckel [Moe]. Le fait d'utiliser uniquement un semi-groupe entraîne que l'ensemble limite n'est pas $\mathbb{R}$ mais $I \cup \mathcal{P}$. Cependant, le fait que le semi-groupe soit en quelque sorte discret permet de faire le même type de raisonnement que dans le cas de $Sl(2,\mathbb{Z})$ qui lui est discret. Il faut aussi noter qu'en général le groupe associé à T_α n'est lui pas discret.

Pour x dans I, on a :

$$\begin{aligned} T_\alpha x &= \{\alpha^2(\tfrac{1}{x} - 1)\} \\ &= \alpha^2(\frac{1}{x} - 1) - n_1 \text{ si } x \text{ est dans } [\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+n_1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+n_1}], n_1 \geq 0. \end{aligned}$$

On a alors si x est dans $[\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+n_1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+n_1}]$, $n_1 \geq 0$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2}{T_\alpha x + n_1 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{\frac{T_\alpha x}{\alpha} + \frac{n_1}{\alpha} + \alpha} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha + \frac{n}{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \frac{T_\alpha x}{\alpha} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n_1} \cdot \frac{T_\alpha x}{\alpha}. \end{aligned}$$

où $M \cdot z$ désigne l'action de la matrice M sur le complexe z :

$$M \cdot z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On note M_α et N_α les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $T_\alpha x$ n'est pas nul, on peut recommencer, on trouve :

$$x = \alpha M_\alpha N_\alpha^{n_1} M_\alpha N_\alpha^{n_2} \cdot \frac{T_\alpha^2 x}{\alpha}.$$

Plus généralement si pour tout k, $T_\alpha^k x$ est défini, on trouve :

$$x = \alpha M_\alpha N_\alpha^{n_1} M_\alpha N_\alpha^{n_2} \cdots M_\alpha N_\alpha^{n_k} \cdot \frac{T_\alpha^k x}{\alpha}$$

$$\text{et } x = \alpha \lim_{k\to\infty} M_\alpha N_\alpha^{n_1} M_\alpha N_\alpha^{n_2} \cdots M_\alpha N_\alpha^{n_k} \cdot 0.$$

Ainsi x est entièrement déterminé par la suite des entiers $(n_i)_{i>0}$ et T_α n'est rien d'autre que le décalage de la suite (n_i). Pour rendre T_α bijective, on considère le décalage sur les suites indexées par $\mathbb{Z}$ et non plus par $\mathbb{N}^*$ et donc on considère le passé $\mathcal{P}$ des points x de I.

Si y est dans $\mathcal{P}$, alors on peut écrire que :

$$y = \lim_{k\to\infty} \alpha N_\alpha^{-n_0} M_\alpha^{-1} N_\alpha^{-n_{-1}} M_\alpha^{-1} \cdots N_\alpha^{-n_{-k}} M_\alpha^{-1} \cdot 0,$$

comme $N_\alpha^{-1} M_\alpha^{-1} = M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-1}$, on a aussi :

$$y = \lim_{k\to\infty} \alpha M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n_0} M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n_{-1}} \cdots M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n_{-k}} \cdot 0,$$

$\frac{1}{\alpha}\mathcal{P}$ est donc l'ensemble limite du semi-groupe engendré par $\{M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n} \; : n \geq 0\}$, donc $\mathcal{P}$ n'est rien d'autre que l'intervalle $]-\infty, -\alpha^2]$. On remarque l'on peut voir I comme l'ensemble limite du semi-groupe engendré par $\{M_\alpha N_\alpha^n \; : n \geq 0\}$. On définit alors le prolongement naturel de T_α par :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\alpha \; &: I \times \mathcal{P} \to I \times \mathcal{P} \\ &(x, y) \mapsto (T_\alpha x, \alpha^2(\tfrac{1}{y} - 1) - n_1(x)). \end{aligned}$$

$\tilde{T}_\alpha$ est bijectif et correspond au décalage sur la suite bilatère qui détermine entièrement le couple (x, y). Il n'est pas difficile alors de vérifier que la mesure de Liouville sur $I \times \mathcal{P}$: $d\nu(x,y) = \frac{dxdy}{(x-y)^2}$ est invariante par $\tilde{T}_\alpha$. En la projettant sur la première coordonnée on en déduit la mesure invariante par T_α, c'est $h_\alpha m$, en effet :

$$\int_{-\infty}^{-\alpha^2} \frac{dy}{(x-y)^2} = \frac{1}{x+\alpha^2}.$$

On peut alors continuer l'analogie avec la transformation « fraction continue » et adapter la vision géométrique faite dans le travail de F. Dal'bo et M. Peigné qui suit.

Bibliographie

[A.F] ADLER (R), FLATTO (L). — *Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics.* Bull. Amer. Math. Soc., 25, p. 229–334, 1992.

[B.K] BALADI (V), KELLER (G). — *Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations.* Commun. Math. Phys. 127, p. 459–477, 1990.

[B] BREIMAN (L). — *Probability.* Addison-Wesley, 1968.

[C] CRÉPEL (P). — *Loi des grands écarts pour les marches aléatoires sur* $\mathbb{R}$. Séminaire de probabilités de Rennes, 1978.

[D] DOEBLIN (W). — *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues.* Compositio Math, 7, p. 353–371, 1940.

[D.F] DOEBLIN (W), FORTET (R). — *Sur les chaînes à liaisons complètes.* Bulletin Soc. Math. Fr., t. 69, p. 132–148, 1937.

[D.S] DUNFORD (N), SCHWARTZ (J.-T). — *Linear operators, part I.* Interscience, New York, 1958.

[F] FELLER (W). — *An introduction to probability theory and its applications, vol. II.* J.Wiley, New-York, 1966.

[G.K] GNEDENKO (B.-V), KOLMOGOROV (A.-N). — *Limit distributions for sums of independent random variables.* Addison Wesley Reading, 1954.

[G.H] GUIVARC'H (Y), HARDY (J). — *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov.* Annales de l'Institut Henri Poincaré, 24, p. 73–98, 1988.

[H] HENNION (H). — *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens.* Proceedings of the A.M.S., 118, p. 622–634, 1993.

[H.K] HOFBAUER (F), KELLER (G). — *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformation.* Math. Zeitschrift, 180, p. 119-140, 1982.

[I.L] IBRAGIMOV (I.-A), LINNIK (YU.-V). — *Independent and stationnary sequences of random variables.* Wolters-Noordhoff, 1971.

[IT.M] IONESCU-TULCEA (C.-T), MARINESCU (G). — *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complétement continues.* Ann. Math., 52, p. 140–147, 1950.

[I] ISHITANI (H). — *A central limit theorem of mixed type for a class of 1-dimensional transformations.* Hiroshima Math. J., 16, p. 161–188, 1986.

[Ka] KAC (M). — *On the distribution of the values of sums of the type* $\sum f(2^k t)$. Ann. Math., 47, p. 33–49, 1946.

[Ke] KELLER (G). — *Piecewise monotonic transformations and exactness.* Séminaires de Probabilités de Rennes, 1978.

[Ko] KOWALSKI (Z.-S). — *Ergodic properties of piecewise monotonic transformations.* S.M.F., Astérisque 49, p. 145–149, 1977.

[Kr1] KRZYZEWSKI (K). — *On expanding mappings.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sc. Math., Astr. et Phys. vol. XIX, n. 1, p. 23–24, 1971.

[Kr2] KRZYZEWSKI (K). — *Note on topological entropy.* Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences, série des sc. math., astr. et phys. vol. XVI, n. 6, p. 465–467, 1968.

[Kr.S] KRZYZEWSKI (K), SZLENK (W). — *On invariant measures for expanding differentiable mappings.* Studia mathematica, vol. 33, p. 83–92, 1969.

[L.Y] LASOTA (A), YORKE (J.-A). — *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., 186, p. 481–488, 1973.

[L] LE PAGE (E). — *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires.* Lecture Notes in Math., 928, p. 258–303, 1982.

[L.Y] LI (T), YORKE (J.-A). — *Ergodic transformations from an interval into itself.* Trans. Amer. Math. Soc., 235, p. 182–192, 1978.

[M] MAÑÉ (R). — *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Springer Verlag, 1987.

[Ma] MAYER (D). — *Approach to equilibrium for locally expanding maps in* $\mathbb{R}^k$. Commun. Math. Phys. 95, p. 1–15, 1984.

[Moe] MOECKEL (R). — *Geodesics on modular surfaces and continued fractions.* Ergod. Th. & Dynam. Sys., 2, p. 69–83, 1982.

[Mo] MORITA (T). — *Local limit theorem and distribution of periodic orbits of Lasota-Yorke transformations with infinite Markov partition.* J. Math. Soc. Japan, 46, p. 309–343, 1994.

[M.P.V] MOSER (J), PHILLIPS (E), VARADHAN (S). — *Ergodic Theory.* Seminar, Courant Inst. Math. Sci. New-York Univ., p. 111–120, 1975.

[N] NAGAEV (S.-V). — *Some limit theorems for Markov chains.* Theor. Prob. Appl., 2, p. 378–416, 1957.

[P] PARRY (W). — *Representation for real numbers.* Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 15, p. 95–105, 1964.

[S1] SERIES (C). — *The modular surface and continued fractions.* J. London Math. Soc.,31, p. 69–80, 1985.

[S2] SERIES (C). — *Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature.* Ergod. Th. & Dynam. Sys., 6, p. 601–625, 1986.

[R] RENYI (A). — *Representation for real numbers and their ergodic properties.* Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 8, p. 477–493, 1957.

[RE] ROUSSEAU-EGELE (J). — *Un théorème de la limite locale pour une classe de tranformations dilatantes et monotones par morceaux.* Annals of Probability, 3, p. 772–788, 1983.

[Ry] RYCHLIK (M). — *Bounded variation and invariant measures.* Studia mathematica, vol. 76, p. 69–80, 1983.

[W] WILKINSON (K.-M). — *Ergodic properties of certain linear mod one transformations.* Advances in Mathematics, 14, p. 64–72, 1974.

Anne BROISE
Université de Paris-Sud
Topologie et Dynamique
C.N.R.S. - U.R.A. 1169
Mathématique bat 425
91405 ORSAY cedex
`broise@topo.math.u-psud.fr`