S. BENACHOUR
B. ROYNETTE
P. VALLOIS

Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$

Astérisque, tome 236 (1996), p. 41-71
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__41_0>

Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = \pm|u_x|$

S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois

Résumé. — A l'aide de techniques probabilistes nous construisons explicitement la solution fondamentale du problème de Cauchy associé à l'équation $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$, lorsque la dimension d'espace d est égale à 1. Puis nous analysons le comportement en norme L^p des solutions de cette équation pour une large classe de données initiales. Le cas où $d \geq 2$ a été étudié aussi et fera l'objet d'une autre publication.

I. Introduction

1. Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u| \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

$$u(0,.) = \mu \text{ dans } \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Ces équations ont un lien avec celles de Navier-Stokes. En effet, lorsque la dimension d'espace est deux, les équations de Navier-Stokes décrivent l'évolution de la vitesse $u = (u_1, u_2)$ d'un fluide de viscosité $\nu > 0$ et incompressible, cf. [L], et s'écrivent :

$$\text{(N.S.)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u.\nabla)u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où p (la pression) est une fonction scalaire, inconnue aussi. Dans ces équations, le tourbillon $\omega = \operatorname{rot} u$ (identifié dans ce cas à une fonction scalaire) joue un rôle essentiel et vérifie l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega = -(u.\nabla)\omega. \tag{T}$$

En supposant u bornée par une constante $C > 0$, on a :

$$|\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega| \leq C|\nabla \omega|.$$

D'où l'intérêt accordé à l'équation (1.1).

2. L'existence et l'unicité de la solution de (1.1), (1.2) dans

$$L^1([0,T], W^{1,1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$$

ont été obtenues par M. Ben Artzi [B] lorsque la donnée initiale est une fonction régulière et par S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre [BBP] quand la donnée initiale μ est dans l'espace $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ des mesures de masse totale finie.

En intégrant l'équation (1.1) dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)| dx$$

et donc : $t \to \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ est décroissante sur $]0,\infty[$. Lorsque μ est une fonction positive, la solution du problème (1.1), (1.2) est positive. Il est donc naturel d'étudier :
- d'une part le comportement asymptotique de $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ lorsque $t \to \infty$
- d'autre part de rechercher si $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ admet un taux de décroissance lorsque $t \to \infty$.

Si μ est une fonction positive, régulière et à support compact, M. Ben Artzi [B] montre que la solution de (1.1), (1.2) vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists C > 0 \text{ tels que : } t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx \leq C \tag{1.3}$$

où α ne dépend que de la dimension d, mais n'est pas précisé, et où C dépend aussi de d et $||\mu||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}$.

Lorsque μ est une mesure positive de masse totale finie, S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre [BBP] montrent que la solution de (1.1), (1.2) vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = 0 \tag{1.4}$$

(1.5) il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tendant vers 0

quand $t \to \infty$ et telle que, pour toute solution positive u de (1.1), (1.2) on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx \leq f(t) \int u(0,x)dx$$

En ce sens, $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ n'admet pas de taux de décroissance.

3. Dans cette étude nous nous proposons d'analyser les solutions de (1.1), (1.2) lorsque la dimension d'espace est égale à un. Notre contribution est essentiellement la construction explicite de la solution du problème de Cauchy (1.1), (1.2) dans les deux cas suivants :

i) la donnée initiale μ est égale à la masse de Dirac à l'origine.
ii) la donnée initiale μ est une mesure positive, de masse totale finie et "profilée" (cf l'alinéa 7 ci-dessous pour une définition précise de ce terme). Pour fixer les idées, lorsque μ est une fonction dérivable, profilée signifie que $\operatorname{sgn} \mu'(x) = -\operatorname{sgn}(x)$.
L'idée de la construction explicite de la solution est la suivante : on remplace l'équation non linéaire (1.1) par l'équation linéarisée :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = (\operatorname{sgn} x).u_x \tag{1.6}$$

$$u(0,.) = \mu(.). \tag{1.7}$$

On résout alors explicitement l'équation linéarisée par une méthode probabiliste, puis on constate que, lorsque μ est profilée, la solution du problème linéaire est également solution du problème non linéaire (1.1), (1.2).

4. La connaissance explicite de la solution de (1.1) (1.2), pour une large classe de mesures μ, jointe à l'utilisation du principe de comparaison, nous permet alors d'étudier de façon fine le comportement de la solution. Plus précisément :
a) dans le théorème 3.3, nous redémontrons, par des arguments probabilistes simples, les résultats (1.4) et (1.5) sur la décroissance vers 0 de $||u(t,.)||_1$ et sur l'inexistence de taux de décroissance; dans les théorèmes 4.1 et 4.4, nous améliorons ce résultat en montrant comment ce taux de décroissance dépend de la "queue de la mesure μ", ie de $\varphi_\mu(t) = \int_{|x|>t} \mu(dx)$

b) lorsque la mesure μ possède un moment exponentiel, ie :

$$C(\mu) = \int_{\mathbb{R}} |x|e^{|x|}\mu(dx) < \infty,$$

nous obtenons (cf. théorème 4.8) la vitesse optimale de décroissance de $||u(t,.)||_1$. Plus précisément, nous montrons l'existence de deux constantes universelles C_1 et C_2 telles que :

$$C_1 C'(\mu) \leq \varliminf_{t\to\infty} t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \leq \varlimsup_{t\to\infty} t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \leq C_2.C(\mu). \tag{1.8}$$

Bien sûr, (1.8) améliore le résultat (1.3) de M. Ben Artzi puisque :
- il donne la vitesse exacte de décroissance de $||u(t,.)||_1$ qui est en $e^{-t/2}\frac{1}{t^{3/2}}$, et qui est donc exponentielle,
- il est vrai pour des mesures à moment exponentiel, et pas seulement pour des mesures à support compact.

Remarquons que l'estimation (1.8) montre un comportement de $||u(t,.)||_1$ très différent de la situation de l'équation de la chaleur. On peut donc dire que, dans (1.1), le terme de convection $-|u_x|$ joue un rôle prépondérant.

La connaissance explicite de la solution de (1.1), (1.2) nous permet également d'obtenir d'autres estimations intéressantes :

c) Lorsque μ est profilée, on a :

$$||u(t,.)||_\infty \leq C\frac{(\log t)^{1/2}}{t}||\mu||_1 \qquad (t \geq 1)$$

$$||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1 \qquad (t \geq 1).$$

5. Dans le dernier paragraphe de ce travail (§ V) nous nous intéressons cette fois à l'équation :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = |u_x| \tag{1.9}$$

$$u(0,.) = \mu(.) \tag{1.10}$$

Les méthodes mises en oeuvre pour étudier (1.1), (1.2) fonctionnent, mutatis mutandis, de la même manière pour (1.9), (1.10). Nous déterminons la solution explicite de (1.9), (1.10) pour des mesures μ profilées et, à partir de cette solution explicite, des estimations de $||u(t,.)||_1$. Par exemple, nous obtenons (théorème 5.4) :

Si μ est profilée et si u est la solution de (1.9), (1.10) :

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}\mu(da) &\leq \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||u(t,.)||_1 \\ &\leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||u(t,.)||_1 \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}|a|\mu(da) \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}\mu(da) &\leq \varliminf_{t\to\infty} ||u(t,.)||_\infty \\ &\leq \varlimsup_{t\to\infty} ||u(t,.)||_\infty \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}|a|\mu(da) \end{aligned} \tag{1.12}$$

où C_1, C_2 sont des constantes universelles.

6. Nous avons choisi, pour ce travail, de nous placer dans le cas où la dimension d vaut 1. Lorsque $d > 1$, l'approche probabiliste choisie ici, continue à être opérationnelle. Cependant, les formules explicites obtenues ne sont plus si simples. En particulier, elles dépendent de fonctionnelles liées au pont de Bessel. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici au cas $d = 1$. Le cas $d > 1$ fera l'objet d'une étude ultérieure (cf. [B.R.V.]).

7. Fixons quelques notations qui seront utilisées au cours de l'article.
- C est une constante universelle.
- Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $W^{1,1}(\mathbb{R})$ si f et f' sont éléments de $L^1(\mathbb{R})$.
- $\|\ \|_p$ désigne la norme de $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.
- $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ est l'ensemble des mesures bornées de $\mathbb{R}$
- δ_a représente la mesure de Dirac au point a.
- Les solutions aux différentes équations aux dérivées partielles considérées dans ce travail seront toujours des fonctions appartenant à
$L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$, pour tout $T > 0$.
- Nous désignons par ψ la fonction :

$$\psi(x) = \int_x^{\infty} \exp(-t^2/2)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Une mesure μ sur $\mathbb{R}$ est dite a-profilée si μ est une distribution tempérée et μ' est une mesure négative sur $(a, +\infty)$ et une mesure positive sur $]-\infty, a)$. Lorsque $a = 0$, on dira que μ est profilée.
- Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{R}_+$, positives. On dira que $f \asymp g$ s'il existe deux constantes $c > 0$ et $c' > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$, on ait $cf(t) \leq g(t) \leq c'f(t)$.

II Construction explicite d'une solution modèle

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$u_t - \tfrac{1}{2}u_{xx} = -|u_x| \qquad \text{dans } (0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$u(0,.) = \delta_0. \tag{2.2}$$

Pour tout $T > 0$, ce problème admet une unique solution u^0 dans $L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$. Le but de cette section est d'écrire explicitement cette solution et puis d'en déduire le comportement asymptotique des normes $\|u^0(t,.)\|_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 2.1
La solution u^0 du problème (2.1), (2.2) *est donnée par :*

$$u^0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{[\frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{x^2}{2t} - |x| - \frac{t}{2})] - \psi(\sqrt{t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}})\} \tag{2.3}$$

où :

$$\psi(x) := \int_x^{+\infty} \exp(-\frac{s^2}{2})\, ds.$$

Démonstration du théorème 2.1
i) L'équation de la chaleur a une vitesse infinie de propagation mais il est légitime de penser que la solution u^0 du problème (2.1), (2.2) garde, pour tout $t > 0$, un "profil analogue" à une gaussienne centrée. Auquel cas nous avons alors :

$$\operatorname{sgn}(u_x(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x) \tag{2.4}$$

où sgn désigne la fonction :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Cela nous amène à considérer le problème "linéarisé":

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \operatorname{sgn}(x).u_x \qquad \text{sur } (0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{2.5}$$

$$u(0,.) = \delta_0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Par une méthode probabiliste nous allons exhiber la solution u^0 du problème de Cauchy linéaire (2.5), (2.6) et constater que u^0 vérifie (2.4). Par suite, cette fonction u^0 est l'unique solution (cf. [BBP]) du problème de Cauchy (2.1), (2.2).
ii) Construisons à présent la solution u^0 du problème de Cauchy (2.5), (2.6). Pour ce faire, on considère l'opérateur différentiel, sur $\mathbb{R}$:

$$Lv = \frac{1}{2}v_{xx} + \operatorname{sgn}(x).v_x$$

dont l'adjoint formel est :

$$L^{(*)}f = \frac{1}{2}f_{xx} - \operatorname{sgn}(x).f_x - 2\delta_0 f.$$

En désignant par u^0 la solution de (2.5), (2.6) et P_t le semi-groupe associé à $L^{(*)}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} u^0(t,x)f(x)dx = P_t f(0). \tag{2.7}$$

D'autre part, soient $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0 et $(X_t; t \geq 0)$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = B_t - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)ds$$

Alors, on a :

$$P_t f(0) = E\{f(X_t)\exp(-2L_t^0)\}$$

où L_t^0 est le temps local en 0 de $(X_t, t \geq 0)$.

Signalons que Karatzas et Shreve ont considéré des équations différentielles où le terme de dérive prend deux valeurs ([KS], 6.5).
Grâce à la formule de Girsanov ([KS], page 191, (5.6)), on tire :

$$P_t f(0) = E\{f(B_t)\exp(-\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)dB_s - \frac{t}{2} - 2\ell_t^0)\}$$

où ℓ_t^0 est le temps local en 0 du mouvement brownien B.

Compte tenu de la formule de Tanaka (cf [KS], p205) :

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s).dB_s + \ell_t^0,$$

on obtient :

$$P_t f(0) = E\{f(B_t)\exp(-|B_t| - \frac{t}{2} - \ell_t^0)\}. \tag{2.8}$$

Désignons par $n(t,x,y)$ la densité du couple $(|B_t|, \ell_t^0)$. Puisque $-B$ est un mouvement brownien, on a donc, d'après (2.7) et (2.8) :

$$u^0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{\exp(-|x| - \frac{t}{2} - y)\}n(t,|x|,y)dy.$$

D'une part $u^0(t,.)$ est une fonction paire et d'autre part la densité $n(t,x,y)$ est bien connue (cf. [RY], p. 227, ex. 2.18). Elle vaut, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$n(t,x,y) = (\frac{2}{\pi t^3})^{1/2}(x+y)\exp(-\frac{(x+y)^2}{2t}).$$

Donc :

$$\begin{aligned}u^0(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\{\exp(-\frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2} - |x|)\}\int_0^{+\infty}(|x|+y)\exp[-\frac{1}{2t}(y^2 + 2|x|y + 2yt)]dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_0^{+\infty}(|x|+y)\exp[-\frac{1}{2t}(t+|x|+y)^2]dy.\end{aligned}$$

Après le changement de variable :

$$z = \frac{t+|x|+y}{\sqrt{t}},$$

on a finalement :

$$u^0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{[\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}})^2)] - \psi(\sqrt{t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}})\}.$$

iii) Il est facile de voir que u^0 est deux fois dérivable en x sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Montrons que la relation (2.4) est vérifiée.
Soit $x > 0$, on a :

$$\sqrt{2\pi}\{\exp\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}})^2\}u_x^0(t,x) = -\frac{x}{t\sqrt{t}}$$

Puisque $u^0(t,.)$ est une fonction paire,

$$\operatorname{sgn}(u_x^0(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on peut vérifier que u^0 est la solution du problème de Cauchy (2.5), (2.6). En effet, on a pour $x > 0$:

$$\sqrt{2\pi}\{\exp\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2\}u_t^0(t,x) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} + \frac{x^2}{2t^2\sqrt{t}} - \frac{x}{2t\sqrt{t}}$$
$$\sqrt{2\pi}\{\exp\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2\}u_{xx}^0(t,x) = -\frac{1}{t\sqrt{t}} + \frac{x^2}{t^2\sqrt{t}} + \frac{x}{t\sqrt{t}}$$

Il est évident alors que (2.5) est réalisée. Pour vérifier la relation (2.6), on remarque que pour toute fonction f continue et à support compact sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\{\exp-\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2\}dx = f(0)$$
$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})dx = 0.$$

Donc : $u^0(0,.) = \delta_0$ et la preuve du théorème (2.1) est achevée.

Remarque (a)
La solution u^0 du problème de Cauchy (2.1), (2.2) est positive sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Cette propriété est une conséquence des deux points suivants :

i) $\lim_{|x|\to+\infty} u^0(t,x) = 0, \qquad \forall t > 0$
ii) $\operatorname{sgn}(u_x^0(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x)$

Remarque (b)
L'équation (2.1) étant invariante par translation, il est clair que la fonction:

$$u^\xi(t,x) := u^0(t,x-\xi)$$

est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{array}{rcll} u_t - \frac{1}{2}u_{xx} & = & -|u_x| & \text{sur }]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,.) & = & \delta_\xi & \text{sur } \mathbb{R} \end{array}$$

où δ_ξ est la distribution de Dirac au point ξ.

Théorème 2.2

Soit u^0 *définie par* (2.3) *la solution du problème de Cauchy* (2.1), (2.2). *Alors,*

$$\|u^0(t,.)\|_\infty \asymp \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}e^{-t/2} \tag{2.9}$$

$$\|u^0(t,.)\|_1 \asymp \frac{1}{(1+t)^{3/2}}e^{-t/2}. \tag{2.10}$$

(cf. dernier point de l'alinéa I.7 pour la signification de $\asymp$).

Démonstration du théorème 2.2

D'après la remarque (a) ci-dessus et (2.3), on a :

$$\|u^0(t,.)\|_\infty = u^0(t,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/2} - \psi(\sqrt{t})].$$

D'après le développement classique :

$$\psi(x) = [\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} + 0(\frac{1}{x^5})]e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \to \infty \tag{2.11}$$

on a :

$$\|u^0(t,.)\|_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \qquad t \to \infty. \tag{2.12}$$

D'autre part, il est évident que :

$$\|u^0(t,.)\|_\infty = u^0(t,0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-t/2}, \qquad t \to 0. \tag{2.13}$$

En regroupant (2.12) et (2.13) on obtient (2.9).

Pour avoir le point (2.10), on observe que $u^0(t,x)$ est paire par rapport à la variable x; il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^0(t,x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\{[\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}})^2)] \\ &\qquad - \psi(\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}})\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(1+t)\psi(\sqrt{t}) - \sqrt{t}e^{-t/2}]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Compte tenu de (2.11) on en déduit que :

$$\|u^0(t,.)\|_1 \sim \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-t/2}, \qquad t \to +\infty. \tag{2.15}$$

D'autre part, en vertu de (2.14), on a :

$$\lim_{t\to 0}\|u^0(t,.)\|_1 = 1. \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16), on déduit le point (2.10). Ceci achève la preuve du théorème 2.2.

Corollaire 2.3
Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$||u^0(t,.)||_p \leq \frac{C}{t^{3/2}}e^{-t/2}, \qquad \forall t > 1.$$

Nous allons maintenant donner une représentation probabiliste de la solution u^0 de (2.1), (2.2) différente de celle utilisée pour la démonstration du théorème 2.1.

Théorème 2.4
Soit $(R_t; t \geq 0)$ un processus de Bessel de dimension 3, (cf. [RY], p.232 ou 409), *issu de* 0. *Alors :*

$$\begin{aligned} &u^0(t,x) = \frac{1}{2}e^{-t/2}E[\frac{1}{R_t}1_{\{x<R_t\}}e^{-R_t}] \qquad \text{si } x \geq 0 \\ &u^0(t,x) = u^0(t,|x|). \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2.4
a) Soit $(X_t; t \geq 0)$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = B_t - \int_0^t \operatorname{sgn} X_s ds$$

Soit ξ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2 :

$$P(\xi \geq t) = e^{-2t}$$

indépendante de (X, B). Définissons Y par :

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{si } L_T \leq \xi \\ \delta & \text{si } L_T > \xi \end{cases}$$

où $(L_t; t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 de X.
Soit f une fonction borélienne bornée définie sur $\mathbb{R}$; on pose $f([\delta]) = 0$. Alors :

$$E(f(Y_t)) = E(f(X_t)1_{\{L_t \leq \xi)\}}) = E(f(X_t)e^{-2L_t}) \tag{2.17}$$

et donc, d'après (2.7), $u^0(t,x)$ est la densité de $Y_t 1_{\{Y_t \in \mathbb{R}\}}$

b) Posons : $\Delta := E(f(X_t)\exp - 2L_t)$
Utilisons à nouveau le théorème de Girsanov; il vient :

$$\Delta = E(f(B_t)\exp(-|B_t| - \ell_t^0 - t/2))$$

où ℓ_t^0 est le temps local en 0 de B.

Par symétrie,

$$\Delta = E(f(-B_t)\exp(-|B_t| - \ell_t^0 - t/2))$$

Si f est une fonction paire, $\Delta = \Delta_+$ où l'on a posé :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}E(f(|B_t|)\exp\, - (|B_t| + \ell_t^0 + t/2)) \tag{2.18}$$

Soit :

$$S_t := \sup_{u \leq t} B_u.$$

D'après le théorème de Lévy, $(|B|, \ell^0)$ a même distribution que $(S - B, S)$
D'où :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}E(f(S_t - B_t)\exp\, - (2S_t - B_t + t/2))$$

Mais d'après le théorème de Pitman, ([RY], theorem 3.5 p.234), $2S - B$ a même distribution que R, où R est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0. De plus : $S_t = \inf\limits_{u \geq t} R_u$. Ecrivant : $S_t - B_t = 2S_t - B_t - S_t$, on obtient donc :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}E(f(R_t - \underline{R}_t)e^{-R_t})e^{-t/2}$$

avec $\underline{R}_t := \inf\limits_{u \geq t} R_u$.
Mais il est classique (cf. [K.S], Corollary 3.6, p.236) que, conditionnellement à $R_t = x, \underline{R}_t$ suit une loi uniforme sur $[0, x]$. $R_t - \underline{R}_t$ suit également une loi uniforme sur $[0, R_t]$ et :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}e^{-t/2}E[\frac{1}{R_t}(\int_0^\infty f(x)1_{\{x<R_t\}}dx).e^{-R_t}]$$

d'où, d'après (2.18), le théorème 2.4.

Remarque (c)

La formule explicite du théorème 2.4 permet de retrouver la formule donnant la dérivée $u_x^0(t,x)$. En effet, la densité de la v.a R_t étant pour $x \geq 0$ égale à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{2t}}x^2$, on a, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u^0(t,x) &= \frac{1}{2}E(\frac{1}{R_t}1_{\{x<R_t\}}e^{-R_t})e^{-t/2} \\ &= \frac{e^{-t/2}}{2t^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty a e^{-a-\frac{a^2}{2t}}da \qquad \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$u_x^0(t,x) = \frac{-x}{t\sqrt{2\pi t}}\exp - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{x}{\sqrt{t}})^2. \tag{2.19}$$

Remarquons aussi que le théorème 2.4 implique :

$$\begin{aligned} ||u^0(t,.)||_1 &= \int_0^\infty E[\frac{1}{R_t}1_{\{x<R_t\}}e^{-R_t}]e^{-t/2}dx \\ &= e^{-t/2}E(e^{-R_t}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}[(1+t)\psi(\sqrt{t}) - \sqrt{t}e^{-t/2}] \end{aligned}$$

et que :

$$||u^0(t,.)||_\infty = u^0(t,0) = \frac{1}{2}E(\frac{1}{R_t}e^{-R_t})e^{-t/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/2} - \psi(\sqrt{t})]$$

formules déjà obtenues dans la preuve du théorème 2.2.

III Solution correspondant à une donnée initiale profilée

Dans ce paragraphe, on considère le problème de Cauchy :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = -|u_x| \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R} \tag{3.1}$$

$$u(0,.) = \mu \qquad \text{sur } \mathbb{R} \tag{3.2}$$

où μ est une mesure positive profilée et de masse totale finie (cf. 1.7 pour la définition d'une mesure profilée).

Comme précédemment, pour tout $T > 0$, le problème (3.1), (3.2) admet une unique solution u dans $L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$. Là aussi, notre objectif est d'écrire explicitement cette solution u et d'en déduire le comportement asymptotique de normes $||u(t,.)||_p, (1 \leq p \leq \infty)$ quand $t \to \infty$.

Théorème 3.1

Soit μ une mesure positive, profilée et de masse totale finie. Alors la solution u du problème (3.1), (3.2) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} u(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|-|x|}\{\exp - \frac{(|x|-|a|)^2}{2t} \\ -\exp - \frac{(|x|+|a|)^2}{2t}\}\mu(da) \\ + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} e^{|a|}\frac{|a|}{s^{3/2}}\{\exp - (\frac{a^2}{2s}+\frac{s}{2})\}u^0(t-s,x)\mu(da) \end{aligned} \tag{3.3}$$

où u^0, donnée par (2.3), *est la solution du problème* (2.1), (2.2)

Démonstration du Théorème 3.1

La démarche est la même que pour le théorème 2.1. On considère le problème linéarisé :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = (\operatorname{sgn} x)u_x \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R} \tag{3.4}$$

$$u(0,.) = \mu \qquad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Si la solution u vérifie :

$$\operatorname{sgn}(u_x) = -\operatorname{sgn}(x)$$

alors u est l'unique solution du problème (3.1), (3.2).

Les mêmes considérations probabilistes que précédemment conduisent cette fois à : pour toute f positive et borélienne sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} E\{f(X_t^a)\exp - 2L_t^0\}\mu(da) \\ &= \int_{\mathbb{R}} E\{f(a+B_t)\exp(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a} - \frac{t}{2})\}\mu(da)\end{aligned} \tag{3.6}$$

où ℓ_t^{-a} désigne le temps local en $-a$ du processus B. On calcule l'espérance ci-dessus en la décomposant en deux parties selon que $t < T_{-a}$ ou $t \geq T_{-a}$, où T_{-a} est le temps d'atteinte pour le processus B du niveau $-a$. Pour $a \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}&E\{f(a+B_t)\exp(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a}); t < T_{-a}\} \\ &= E\{f(a+B_t)\exp(a - a - B_t)\,; \, t < T_{-a}\} \\ &= E\{f(a+B_t)\exp(-B_t)\,; \, t < T_{-a}\}\end{aligned}$$

En vertu du principe de symétrie de D. André (cf. [KS], p 79).

$$\begin{aligned}&E\{f(a+B_t)\exp(-B_t)\,; \, t < T_{-a}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-a}^{+\infty} f(a+x)\exp(-x)[\exp(-\frac{x^2}{2t}) - \exp - \frac{(2a+x)^2}{2t}]dx\end{aligned}$$

D'où on tire le premier terme du second membre de (3.3). D'autre part, pour $t \geq T_{-a}$ on a :

$$\begin{aligned}&E\{f(a+B_t)\exp(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a})\,; \, T_{-a} \leq t\} \\ =&E\{f(a+B_{T_{-a}+t-T_{-a}})\exp[|a| - |a+B_{T_{-a}+t-T_{-a}}| - \ell_{T_{-a}+t-T_{-a}}^{-a}]\,; \, T_{-a} \leq t\}\end{aligned}$$

Puisque :

$$a + B_{T_{-a}} = 0$$

et comme la densité de la variable aléatoire T_{-a} est :

$$g_a(s) = \begin{cases} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

en vertu de la propriété de Markov forte (cf. [RY], III 3)

$$e^{-t/2} E\{f(a+B_t) \exp(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a}) \,;\, T_{-a} \leq t\} \tag{3.8}$$

$$= \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{|a|} [\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})] E\{f(B_{t-s}) \exp(-|B_{t-s}| - \ell_{t-s}^0 - \frac{t-s}{2})\} ds$$

Rappelons que d'après (2.7), (2.8) on a :

$$E\{f(B_{t-s}) \exp(-|B_{t-s}| - \ell_{t-s}^0 - \frac{t-s}{2})\} = \int_{\mathbb{R}} f(x) u^0(t-s,x) dx \tag{3.9}$$

Alors, en regroupant (3.6), (3.8) et (3.9), on a l'expression de la solution u donnée par (3.3).

Il reste à vérifier que l'on a :

$$\operatorname{sgn}(u_x(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x), \qquad \forall (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Pour ce faire, posons :

$$w_1(t,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \frac{|a|}{s^{3/2}} \{\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})\} u^0(t-s,x) \mu(da)$$

$$w_2(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \exp(-|x| - \frac{(|x|-|a|)^2}{2t}) \mu(da)$$

$$w_3(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \exp(-|x| - \frac{(|x|+|a|)^2}{2t}) \mu(da)$$

i) Calcul de $(w_1)_x$, pour $x > 0$.

Compte tenu de (2.19), on a :

$$\begin{aligned}(w_1)_x(t,x) &= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|a|} \mu(da) \{\int_0^t \frac{|a|}{s^{3/2}} [\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})] \frac{x}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} \\ &\qquad \exp - (\frac{x^2}{2(t-s)} + x + \frac{t-s}{2}) ds\} \\ &= -2e^{-x-\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \mu(da) \{\int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} [\exp(-\frac{a^2}{2s})] \frac{x}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} \\ &\qquad \exp(-\frac{x^2}{2(t-s)}) ds\} \\ &= -2e^{-x-\frac{t}{2}} \int_0^{+\infty} e^{|a|} (g_a * g_x)(t) \mu(da).\end{aligned}$$

où g_a est la densité de la variable aléatoire T_a, cf (3.7).

Puisque

$$g_a * g_x = g_{a+x}$$

alors on a :

$$(3.11)\qquad (w_1)_x(t,x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-x-\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{|a|}(|a|+x)\exp-\frac{(|a|+x)^2}{2t}\mu(da)$$

ii) Calcul de $(w_2)_x$, pour $x > 0$.

On a

$$(3.12)\qquad (w_2)_x(t,x) = -\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{|a|}(\frac{x-|a|}{t}+1)\exp[-x-\frac{(x-|a|)^2}{2t}]\mu(da)$$

iii) Calcul de $(w_3)_x$, pour $x > 0$.

On a :

$$(3.13)\qquad (w_3)_x(t,x) = -\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{|a|}(\frac{x+|a|}{t}+1)\exp[-x-\frac{(x+|a|)^2}{2t}]\mu(da)$$

Donc, en regroupant (3.11), (3.12) et (3.13) on a, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u_x(t,x) = {} & \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x-\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}}(1-\frac{|a|+x}{t})\exp[|a|-\frac{(|a|+x)^2}{2t}]\mu(da) \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x-\frac{t}{2}}\int_{\mathbb{R}}(-1+\frac{|a|-x}{t})\exp[|a|-\frac{(|a|-x)^2}{2t}]\mu(da) \end{aligned}$$

et donc, après intégration par parties :

$$(3.14)\qquad u_x(t,x) = \frac{2e^{-t/2-|x|-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{|a|-\frac{a^2}{2t}}\operatorname{sh}\frac{|a|x}{t}\mu'(a)da$$

ce qui prouve (3.10), puisque μ est profilée, et ceci achève la démonstration du théorème (3.1).

Notons que, d'après (3.14)

$$(3.15)\qquad ||u(t,.)||_\infty = u(t,0).$$

Corollaire 3.2

Soit μ une mesure positive, de masse totale finie (mais sans l'hypothèse du profil) et soit u la solution donnée par (3.3) du problème linéaire (3.4), (3.5). Alors u est une sur-solution de l'équation non linéaire (3.1).

Démonstration du corollaire 3.2
On a :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} + |u_x| \geq u_t - \frac{1}{2}u_{xx} - \text{sgn}x.u_x = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de retrouver, par des arguments probabilistes simples, les résultats (1.4), (1.5) de S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre.

Théorème 3.3
1) *Soit μ positive de masse totale finie et u la solution de (3.1), (3.2). Alors :*

$$||u(t,.)||_1 \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{3.16}$$

2) *Soit μ une fonction positive, intégrable et profilée. Pour tout $\lambda > 0$, définissons : $\mu_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda}\mu(\frac{x}{\lambda})$. Soit u_λ la solution de (3.1) avec donnée initiale μ_λ. Alors :*

$$||u_\lambda(t,.)||_1 \underset{\lambda\to\infty}{\to} ||\mu_\lambda||_1 = ||\mu||_1 \tag{3.17}$$

En particulier, il n'existe pas de taux de décroissance, au sens donné en (1.5).

Démonstration du théorème 3.3
1) D'après le corollaire 3.2, pour prouver le point 1 du théorème 3.3, on peut supposer que u est la solution du problème linéaire (3.4), (3.5). Mais on a, d'après (3.6) :

$$||u(t,.)||_1 = \int_{I\!R} E(\exp - 2L_t^0)\mu(da) \tag{3.18}$$

où L_t^0 est le temps local en 0 du processus X solution de :

$$X_t^a = a + B_t - \int_0^t \text{sgn}(X_s^a)ds. \tag{3.19}$$

Mais le processus X, de générateur $\frac{1}{2}f'' - (\text{sgn}x)f'$, admet la mesure $\nu(x)dx = e^{-2|x|}dx$ comme mesure invariante puisque $\frac{\nu'(x)}{2\nu(x)} = -\text{sgn}x$. Il est donc récurrent et $L_t^0 \underset{t\to\infty}{\to} +\infty$ pour tout a. Ainsi,

$$E(\exp - 2L_t^0) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Il suffit alors, pour voir que $||u(t,.)||_1 \to 0$ quand $t \to \infty$, d'appliquer le théorème de Lebesgue.

2) Soit maintenant μ une fonction positive intégrable et profilée. D'après (3.18), on a :

$$\begin{aligned}||u_\lambda(t,.)||_1 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda}\mu(\frac{a}{\lambda})E_a(\exp - 2L_t^0)da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu(a)E_{a\lambda}(\exp - 2L_t^0)da\end{aligned}$$

où P_a désigne la loi du processus X^a solution de (3.19). Il est clair que

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda(\exp - 2L_t^0) = 0,$$

par conséquent,

$$||u_\lambda(t,.)||_1 \underset{\lambda\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(a)da = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\lambda(a)da.$$

Nous venons de voir que lorsque μ est profilée, la solution u du problème linéaire (3.4), (3.5) est automatiquement solution du problème non linéaire (3.1), (3.2). Nous allons montrer ci-dessous que, sous des hypothèses convenables sur μ, (mais μ non profilée), la solution u du problème linéaire "se profile automatiquement", ie qu'il existe $t_0 > 0$ tel que, pour $t > t_0$, u est alors également solution du problème non linéaire.

Proposition 3.4

Soit μ une fonction positive vérifiant :

(H1) *il existe A et C telles que :* $\sup_{-A\le x\le A} |\mu'(a)| \le C$

(H2) *On a :* $\mathrm{sgn}\mu'(a) = -\mathrm{sgn}a$ *pour* $|a| \ge A$ *et*

$$\inf_{2A\le a\le 3A} |\mu'(a)| \ge C(A) \text{ avec } e^A C(A) > C.$$

Alors, pour t assez grand, la solution du problème linéaire (3.4), (3.5) est solution du problème non linéaire (3.1), (3.2).

Notons que nous n'avons pas cherché dans cette proposition à supposer sur μ des hypothèses optimales. On pourrait raffiner (H1), (H2).

Démonstration de la proposition 3.4

Il suffit bien sûr de voir que, pour t assez grand :

$$\mathrm{sgn}(u_x(t,x)) = -\mathrm{sgn}x. \tag{3.20}$$

Supposons, pour simplifier l'écriture, que μ est symétrique. On a, d'après (3.14) :

$$u_x(t,x) = \frac{4e^{-t/2-|x|-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty e^{a-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{sh}\frac{ax}{t}\mu'(a)da$$

(3.20) est une conséquence de (H2) et :

$$|\int_0^A e^{a-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{sh}\frac{ax}{t}\mu'(a)da| \leq |\int_{2A}^{3A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{sh}\frac{ax}{t}\mu'(a)da|$$

et il suffit donc de voir que :

$$C\int_0^A e^{a-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{sh}\frac{ax}{t}da \leq C(A)\int_{2A}^{3A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{sh}\frac{ax}{t}da. \tag{3.21}$$

Mais la fonction $a \to e^{a-\frac{a^2}{2t}}$ atteignant son maximum pour $a = t$, on a, pour tout $t \geq 3A$:

$$\sup_{0\leq a\leq A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} = e^{A-\frac{A^2}{2t}} \text{ et } \inf_{2A\leq a\leq 3A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} = e^{2A-\frac{4A^2}{2t}}$$

ce qui, puisque $e^A C(A) > C$, implique (3.21) et la proposition (3.4).

IV Propriétés asymptotiques des solutions de (3.1), (3.2)

Nous analysons ici les propriétés de la solution u du problème (3.1), (3.2). Nous nous intéressons particulièrement au "taux de décroissance" de $||u(t,.)||_1$. Les théorèmes (4.1) et (4.3) précisent de manière optimale le lien entre ce "taux de décroissance" et la queue de μ, ie la fonction $\varphi_\mu(t) = \int_{|x|>t} \mu(dx)$.

Théorème 4.1

Soit μ une mesure positive de masse totale finie, et u la solution de (3.1), (3.2). Alors :

$$\forall \epsilon \in]0, \frac{1}{2}[, \exists \alpha(\epsilon) : \frac{1}{2} - \epsilon \leq \alpha < \frac{1}{2}, \exists C(\epsilon) > 0, \ 0 < \gamma(\epsilon) < 1$$

tels que :

$$||u(t,.)||_1 \leq C(\epsilon)||\mu||_1 \exp(-t\alpha(\epsilon)) + K\int_{|x|>\gamma(\epsilon).t} \mu(dx). \tag{4.1}$$

Démonstration du théorème 4.1.

D'après le corollaire 3.2, il suffit de prouver (4.1) pour u solution du problème linéaire (3.4), (3.5), et donc u est donnée explicitement par le théorème (3.1). Par ailleurs, il est clair que d'après (3.4), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}||u(t,.)||_1 = -||u_x(t,.)||_1 = \int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)(\mathrm{sgn}x)dx. \tag{4.2}$$

Mais, d'après (3.14), on connaît explicitement u_x :

$$u_x(t,.) = \frac{2e^{-t/2-|x|-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{|a|-\frac{a^2}{2t}}\mathrm{sh}\frac{|a|x}{t}\mu'(a)da.$$

Ainsi (4.2) et la formule explicite de u_x permettent de calculer explicitement $||u(t,.)||_1$. On trouve :

$$||u(t,.)||_1 = C\int_{\mathbb{R}} e^{2|a|}\{\int_t^\infty u^0(s,a)ds\}\mu(da). \tag{4.3}$$

Pour simplifier l'écriture, nous allons supposer μ symétrique. Compte-tenu de l'expression (2.3) de u^0 et de (2.12), on a :

$$\begin{aligned} u^0(s,a) &\le (\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{s+|a|} + \frac{(\sqrt{s})^3}{(s+|a|)^3})\exp(-\frac{s}{2} - |a| - \frac{a^2}{2s}) \\ &\le \frac{2}{\sqrt{s}}\exp[-\frac{s}{2} - |a| - \frac{a^2}{2s}], \qquad \text{pour } s > 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$||u(t,.)||_1 \le C_1\int_0^\infty e^a\{\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})ds\}\mu(da).$$

On décompose l'intégrale par rapport à a en deux parties, $[0,\gamma.t]$ et $[\gamma t,\infty[$. Soit $\epsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\gamma t} e^a\{\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\exp[-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}]ds\}\mu(da) \\ &= \int_0^{\gamma t} e^a\{\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\exp[-\frac{\epsilon}{2}s - \frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}(1-\epsilon)]ds\}\mu(da). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Le maximum de la fonction : $s \to -\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}(1-\epsilon)$ est atteint pour : $s_0 = \frac{a}{\sqrt{1-\epsilon}}$. En choisissant γ tel que $0 < \gamma < \sqrt{1-\epsilon}$, on a :

$$s_0 \le \frac{\gamma t}{\sqrt{1-\epsilon}} < t$$

Donc :

$$\exp[-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}(1-\epsilon)] \le \exp[-\frac{a^2}{2t} - \frac{t}{2}(1-\epsilon)], \qquad \forall s \ge t$$

et par suite :

$$I_1 \le (\int_t^\infty \frac{e^{-\epsilon s/2}}{\sqrt{s}} ds) e^{-\frac{t}{2}(1-\epsilon)} \int_0^{\gamma t} \exp[a - \frac{a^2}{2t}] \mu(da).$$

Puisque le maximum de la fonction $a \to a - \dfrac{a^2}{2t}$ est atteint pour : $a = t$ et compte tenu que : $\gamma t < t\sqrt{1-\epsilon} < t$, on a :

$$\exp(a - \frac{a^2}{2t}) \le \exp(\gamma t - \frac{\gamma^2 t}{2}), \quad 0 \le a \le \gamma t$$

D'où :

$$(4.5) \qquad I_1 \le (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\epsilon s/2}}{\sqrt{s}} ds)(\int_0^{\gamma t} \mu(da) \exp[-\frac{t}{2}(\gamma^2 - 2\gamma + 1 - \epsilon)]$$

D'autre part, d'après la formule classique :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\gamma s}{2} - \frac{a^2}{2s}} ds = \frac{C_0}{\sqrt{\gamma}} e^{-a\sqrt{\gamma}} \qquad \text{pour tout } \gamma > 0,$$

on a :

$$(4.6) \qquad \begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma t}^{+\infty} e^a \{ \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}) ds \} \mu(da) \\ &\le C_0 \int_{\gamma t}^{+\infty} e^a (e^{-a}) \mu(da). \end{aligned}$$

D'où :

$$(4.7) \qquad I_2 \le \int_{\gamma t}^{+\infty} \mu(da)$$

En regroupant (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7), on obtient :

$$||u(t,.)||_1 \le C_2 (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\epsilon s/2}}{\sqrt{s}} ds) ||\mu||_1 [\exp - \frac{t}{2}(\gamma^2 - 2\gamma + 1 - \epsilon)] + \int_{\gamma t}^{+\infty} \mu(da))$$

La démonstration du théorème (4.1) est achevée.

Corollaire 4.2

Soit μ une mesure positive et de masse totale finie. Alors la solution u du problème (3.1), (3.2) vérifie :

$$(4.8) \qquad \lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t,x) dx = 0.$$

Remarquons que ce résultat a déjà été obtenu précédemment (cf. Théorème 3.3.).

Corollaire 4.3

Soit μ une mesure positive, de masse totale finie et vérifiant :

$$\exists \beta > 0 ; \quad \int (1+|a|)^{\beta} \mu(da) \leq C_{\beta} < \infty$$

Alors la solution u du problème (3.1), (3.2) vérifie

$$\exists C > 0 ; \quad ||u(t,.)||_1 \leq C_{\beta} \frac{C}{(1+t)^m}, \quad \forall t > 0. \tag{4.9}$$

Nous étudions maintenant la minoration de $||u(t,.)||_1$.

Théorème 4.4

Soit μ une mesure positive profilée, de masse totale finie et u la solution du problème (3.1), (3.2). Alors :

$$\exists t_0 > 0 ; ||u(t,.)||_1 \geq C \int_{|a|>t} \mu(da), \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.10}$$

où C et t_0 sont deux constantes indépendantes de μ et u.

Démonstration du théorème 4.4.

Pour simplifier, supposons μ symétrique. D'après (4.3), on a :

$$||u(t,.)||_1 = 2C \int_0^{+\infty} e^{2a} (\int_t^{+\infty} u^0(s,a)ds)\mu(da).$$

D'autre part, en vertu de l'expression (2.3) de u^0 et du développement asymptotique (2.12) de la fonction ψ, on a :

$$u^0(s,a) \geq (\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{s+|a|})\exp(-\frac{a^2}{2s} - |a| - \frac{s}{2})$$

pour tout (s,a) dans $[t_0, +\infty[\times I\!R$, où $t_0 > 0$ est assez grand.

Par conséquent, pour $t \geq t_0$, on a :

$$||u(t,.)||_1 \geq 2C \int_t^{+\infty} e^a \{\int_t^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{s}(a+s)}\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})ds\}\mu(da)$$

Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ la fonction : $s \to -\frac{s}{2} - \frac{a^2}{2s}$, atteint son maximum au point $s = a$ et est décroissante sur $[a, +\infty[$. Donc, pour $t \geq t_0$:

$$
\begin{aligned}
||u(t,.)||_1 &\geq 2C \int_t^{+\infty} e^a \Big(\int_a^{a+\sqrt{a}} \frac{a}{\sqrt{s}(a+s)} \exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}) ds \Big) \mu(da) \\
&\geq 2C \int_t^{+\infty} e^a \frac{a\sqrt{a}}{(2a+\sqrt{a})\sqrt{a+\sqrt{a}}} \exp(-\frac{a^2}{2(a+\sqrt{a})} - \frac{a+\sqrt{a}}{2}) \mu(da) \\
&\geq C_1 \int_t^{+\infty} \exp(a - \frac{a^2}{2(a+\sqrt{a})} - \frac{a+\sqrt{a}}{2}) \mu(da).
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que :

$$
a - \frac{a^2}{2(a+\sqrt{a})} - \frac{a+\sqrt{a}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} \geq -\frac{1}{2}, \quad \forall a > 0
$$

et par conséquent, on a :

$$
||u(t,.)||_1 \geq C_2 \int_t^{+\infty} \mu(da), \quad \forall t \geq t_0.
$$

ce qui achève la preuve du théorème 4.4.

Corollaire 4.5.

Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, telle que pour toute solution u positive de (3.1), (3.2), on ait :

$$
\int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx \leq f(t) \int_{\mathbb{R}} u(0,x)dx, \quad \forall t > 0. \tag{4.11}
$$

Ce résultat a déjà été obtenu de manière probabiliste ci-dessus (cf. théorème 3.3).

Démonstration du corollaire 4.5

Soit μ une fonction positive, symétrique, profilée et intégrable et considérons la solution u du problème (3.1), (3.2) avec pour donnée initiale μ.
Pour tout $\lambda > 0$, posons :

$$
\mu_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda}\mu(\frac{a}{\lambda})
$$

et considérons la solution u_λ du problème (3.1), (3.2) avec pour donnée initiale μ_λ.

Compte tenu de (4.10), pour $t \geq t_0$, on a :

$$
||u_\lambda(t,.)||_1 \geq C \int_t^{+\infty} \mu_\lambda(a)da = C \int_{\frac{t}{\lambda}}^{+\infty} \mu(a)da, \quad \forall \lambda > 0
$$

Il suffit de faire tendre λ vers $+\infty$ pour voir que (4.11) ne peut être réalisée.

Remarque

Ce corollaire prouve que, lorsque t tend vers $+\infty$, $||u(t,.)||_1$ tend vers zéro sans "taux de décroissance". Mais le théorème 4.1 précise comment $||u(t,.)||_1$ tend vers 0, lorsque t tend vers $+\infty$, en fonction de la queue de μ.

Théorème 4.6

Soient μ une fonction positive profilée et intégrable et u la solution correspondante du problème de Cauchy (3.1), (3.2) alors :

$$\exists C > 0\,;\ ||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1,\ \forall t \geq 1. \tag{4.12}$$

Notons qu'il y a ici un taux de décroissance en $1/t$, de $||u_x(t,.)||_1$.

Démonstration du théorème 4.6

Pour simplifier, on suppose μ symétrique. Compte tenu de (3.13) et (3.14) on a :

$$||u_x(t,.)||_1 = C\int_0^{+\infty} \mu(a)e^{2a}[\frac{1}{\sqrt{t}}(\exp - \frac{1}{2t}(t+a)^2) - \psi(\frac{t+a}{\sqrt{t}})]da$$

Comme ψ vérifie :

$$\psi(x) \geq (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \geq 1$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} ||u_x(t,.)||_1 &\leq C\int_0^{+\infty} \mu(a)e^{2a}(\exp - \frac{1}{2t}(t+a)^2)[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{t+a} + \frac{(\sqrt{t})^3}{(t+a)^3}]da \\ &\leq \frac{Ce^{-t/2}}{t^{3/2}}\{\int_0^{+\infty} \mu(a)\exp(a - \frac{a^2}{2t})da + \int_0^{+\infty} a\mu(a)\exp(a - \frac{a^2}{2t})da\} \end{aligned}$$

Puisque :

$$\max_{a>0}\{\exp(a - \frac{a^2}{2t})\} = e^{t/2}$$

et en vertu du profil de μ, on a :

$$||\mu||_1 \geq \int_0^a \mu(x)dx \geq a\mu(a)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} ||u_x(t,.)||_1 &\leq \frac{C}{t^{3/2}}||\mu||_1(1 + \int_0^{+\infty} \exp(a - \frac{t}{2} - \frac{a^2}{2t})da) \\ &\leq \frac{C}{t^{3/2}}||\mu||_1(1 + \sqrt{t}\psi(-\sqrt{t})). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1, \qquad \forall t \geq 1.$$

ce qui achève la preuve de ce théorème.

Théorème 4.7
Soit μ une mesure positive vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} e^a(1+a)\mu(da) < +\infty$$

alors, la solution u du problème de Cauchy (3.1), (3.2) vérifie :

$$\exists C > 0\,; \ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \leq C\int_0^{+\infty} e^a(1+a)\mu(da). \tag{4.13}$$

Si de plus μ est profilée alors :

$$\exists C' > 0\,; \ \underline{\lim}_{t\to+\infty}\, t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \geq C'\int_0^{\infty} e^a\mu(da). \tag{4.14}$$

Démonstration du théorème 4.7
Pour simplifier l'écriture, on suppose μ symétrique. Montrons d'abord (4.14). Compte tenu de l'expression de u qui est donnée par (3.3) et de l'estimation (2.10), on a :

$$\begin{aligned}
||u(t,.)||_1 &\geq C\int_0^t\Big(\int_0^{+\infty} e^a\frac{a}{s^{3/2}}[\exp(-\frac{s}{2}-\frac{a^2}{2s})]||u^0(t-s,.)||_1\mu(da)\Big)ds \\
&\geq C\int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}}[\exp(-\frac{s}{2}-\frac{a^2}{2s})]\frac{e^{-\frac{t-s}{2}}}{(1+t-s)^{3/2}}ds\Big)\mu(da) \\
&\geq \frac{Ce^{-t/2}}{(1+t)^{3/2}}\int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{2s}}ds\Big)\mu(da)
\end{aligned}$$

Puisque la fonction g_a définie par (3.7) est une densité de probabilité, il est clair que (4.14) est réalisée. Il reste à montrer (4.13).

Pour ce faire, on utilise de nouveau l'expression (3.3) de u ainsi que l'estimation (2.10) de u^0 et on a :

$$||u(t,.)||_1 \leq C(I_1(t)+I_2(t)) \tag{4.15}$$

où :

$$I_1(t) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x}[\exp-\frac{1}{2t}(x-a)^2 - \exp-\frac{1}{2t}(x+a)^2]dx\Big)\mu(da)$$

$$I_2(t) = \int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}}\frac{1}{(1+t-s)^{3/2}}[\exp(-\frac{a^2}{2s}-\frac{s}{2}\frac{t-s}{2})]ds\Big)\mu(da)$$

A l'aide du théorème des accroissements finis on a :

$$I_1(t) \leq \frac{2e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^a (\int_0^{+\infty} (\frac{ax}{t}) e^{-x} dx) \mu(da)$$

Donc :

$$I_1(t) \leq \frac{2e^{-t/2}}{(\sqrt{t})^3} \int_0^{+\infty} a e^a \mu(da). \tag{4.16}$$

Pour majorer $I_2(t)$, on décompose l'intégrale sur $[0, t]$ en deux intégrales: l'une sur $[0, \frac{t}{2}]$ et l'autre sur $[\frac{t}{2}, t]$. On a :

$$\begin{aligned} I_2^1(t) &= e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a (\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds) \mu(da) \\ &\leq \frac{e^{-t/2}}{(1+\frac{t}{2})^{3/2}} \int_0^{+\infty} e^a (\int_0^{t/2} \frac{a}{s^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds) \mu(da). \end{aligned}$$

Puisque g_a définie par (3.7) est une densité de probabilité alors on a :

$$I_2^1(t) \leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} e^a \mu(da). \tag{4.17}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} I_2^2(t) &= e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a (\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds) \mu(da) \\ &\leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} a e^a (\int_{t/2}^{t} \frac{1}{(1+t-s)^{3/2}} ds) \mu(da). \end{aligned}$$

Donc :

$$I_2^2 \leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} a e^a \mu(da) \tag{4.18}$$

Par suite, on a :

$$I_2(t) = I_1^1(t) + I_2^2(t) \leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} a e^a \mu(da). \tag{4.19}$$

On achève la preuve du théorème en regroupant les relations (4.15), (4.16) et (4.19).

Théorème 4.8

Soit μ une mesure positive, profilée et vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} e^a \mu(da) < \infty$$

alors, la solution u du problème de Cauchy (3.1), (3.2) vérifie :

$$\exists C > 0 \,;\, ||u(t,.)||_\infty \le C\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}, \quad \forall t \ge 1. \tag{4.20}$$

Démonstration du théorème 4.8

A nouveau pour simplifier la preuve on suppose que μ est symétrique.
Compte tenu de l'expression de u qui est donnée par (3.3) et de l'estimation (2.9), on a :

$$\begin{aligned} ||u(t,.)||_\infty &= ||u(t,0)|| \\ &\le Ce^{-\frac{t}{2}} \int_0^\infty e^a \Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da). \end{aligned} \tag{4.21}$$

De même que précédemment, on décompose l'intégrale sur $[0,t]$ en deux intégrales : l'une sur $[0,\frac{t}{2}]$ et l'autre sur $[\frac{t}{2},t]$. Pour $t \ge 1$, on a :

$$\begin{aligned} J_1(t) &= e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a \Big(\int_0^{t/2} \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da) \\ &\le C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^a \Big(\int_0^{t/2} \frac{a}{s^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da). \end{aligned}$$

Donc :

$$J_1(t) \le C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^a \mu(da) \tag{4.22}$$

D'autre part :

$$J_2(t) = e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a \Big(\int_{t/2}^t \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da)$$

Donc :

$$J_2(t) \le C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^a \Big(\int_{t/2}^t \frac{a}{\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da).$$

Compte tenu de :

$$\max_{a>0}\{a \exp(-\frac{a^2}{2s})\} = \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{s}$$

On a :

$$J_2(t) \leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}}\int_0^{\infty} e^a (\int_{t/2}^{t} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} ds)\mu(da).$$

Donc :

$$J_2(t) \leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^a \mu(da). \tag{4.23}$$

Finalement, en regroupant (4.21), (4.22) et (4.23), on achève la démonstration du théorème.

V Etude de l'équation $v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = |v_x|$

Dans cette section nous faisons la même étude de cette équation que pour l'équation (3.1). Tout d'abord, signalons que pour toute mesure μ de masse totale finie le problème de Cauchy :

$$v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = |v_x| \quad \text{sur } (0,+\infty)\times \mathbb{R} \tag{5.1}$$

$$v(0,.) = \mu \qquad \text{sur } \mathbb{R} \tag{5.2}$$

admet une unique solution dans $L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$, pour tout $T > 0$ (cf. [BBP]).

Il convient de remarquer que dans ce cas, les solutions positives de (5.1) vérifient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx \geq 0$$

et par suite : $t \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 5.1
La solution du problème de Cauchy :

$$v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = |v_x| \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times \mathbb{R} \tag{5.3}$$

$$v(0,.) = \delta_0 \qquad \text{sur } \mathbb{R} \tag{5.4}$$

est donnée par :

$$v^0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\frac{1}{\sqrt{t}}[\exp -\frac{1}{2t}(|x|-t)^2] + \psi(\frac{|x|-t}{\sqrt{t}})\}. \tag{5.5}$$

La preuve est identique à celle du théorème 2.1, on en trace les grandes lignes seulement. On résout d'abord le problème de Cauchy linéaire :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = -\mathrm{sgn}(x).u_x \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times I\!R \tag{5.6}$$

$$u(0,.) = \delta_0 \qquad \text{sur } I\!R \tag{5.7}$$

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe II, pour toute fonction f régulière, on a :

$$\int_{I\!R} v^0(t,x)f(x)dx = P_t f(0) = E\{f(X_t)\exp 2L_t^0(X)\}$$

où :

$$X_t = B_t + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_{I\!R} v^0(t,x)f(x)dx &= E\{f(B_t)\exp[\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)dB_s - \frac{t}{2} + 2\ell_t^0]\}\\ &= E\{f(B_t)\exp[|B_t| - \frac{t}{2} + \ell_t^0]\}.\end{aligned}$$

D'où on tire (5.5).

Puis on observe que pour tout $x \neq 0$, on a :

$$v_x^0(t,x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{t^{3/2}}\exp[-\frac{1}{2t}(|x|-t)^2]$$

donc, v^0 est une solution de l'équation (5.3).

L'analogue du théorème 2.2 est :

Théorème 5.2

La solution v^0 du problème de Cauchy (5.3), (5.4) vérifie :

$$||v^0(t,.)||_\infty \asymp \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}$$

$$||v^0(t,.)||_1 \asymp (1+t)$$

On notera que le comportement de $||v^0(t,.)||$ est radicalement différent de celui de $||u^0(t,.)||$.

Théorème 5.3

Soit μ une mesure positive, profilée et de masse totale finie et soit v la solution du problème (5.1), (5.2). Alors :

$$
\begin{aligned}
v(t,x) = {} & \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{I\!R} \mu(a) e^{|x|-|a|} \{\exp - \frac{1}{2t}(|x|-|a|)^2 - \exp - \frac{1}{2t}(|x|+|a|)^2\} da \\
& + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{I\!R} \mu(a) e^{|a|} \left(\int_0^t \frac{|a|}{s^{3/2}} [\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})] v^0(t-s,x) ds \right) da
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Démonstration abrégée

On obtient cette fonction v en résolvant le problème de Cauchy linéaire :

$$v_t - \frac{1}{2} v_{xx} = -\mathrm{sgn}(x).v_x \tag{5.9}$$

$$v(0,.) = \mu \tag{5.10}$$

puis on vérifie que l'on a, (au moins formellement) :

$$v_x(t,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{|x|-\frac{t}{2}} \int_{I\!R} [\exp(-|a| - \frac{a^2+x^2}{2t})] \mathrm{sh}(\frac{|a|x}{t}) \mu'(a) da.$$

En particulier, lorsque μ est profilée, v est alors une solution de l'équation (5.1).

Remarque (a)

Soient μ une mesure positive, de masse totale finie mais “non profilée” et v la solution correspondante, donnée par (5.8), du problème de Cauchy <u>linéaire</u> (5.9), (5.10). Alors, v est une sous-solution de l'équation non linéaire (5.1).

En effet, on a :

$$v_t - \frac{1}{2} v_{xx} - |v_x| \le v_t - \frac{1}{2} v_{xx} + \mathrm{sgn}(x).v_x = 0. \tag{5.11}$$

Remarque (b)

Soit μ une fonction positive, de masse totale finie et anti-profilée (i.e. vérifiant : $\mathrm{sgn}(\mu'(a)) = \mathrm{sgn}(a)$ et soit v la fonction correspondante donnée par (5.8). Alors v est une solution de l'équation :

$$u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = -|u_x|.$$

Par des méthodes analogues à celles du paragraphe IV, on a :

Théorème 5.4

Soient μ une mesure positive profilée et de masse totale finie et v donnée par (5.8), la solution correspondante du problème de Cauchy (5.1), (5.2). Alors il existe une constante $C > 0$, telle que :

$$\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}} \mu(a)e^{-2|a|}da \le \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||v(t,.)||_p$$
$$\le \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||v(t,.)||_p \le C\int_{\mathbb{R}} \mu(a)e^{-2|a|}da$$

pour tout p dans $[1, +\infty]$.

Remarquons en particulier, d'après la remarque (a) et le théorème 5.4, pour toute mesure positive, $||v(t,.)||_1 \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. Il se pose alors, de manière naturelle, la question de l'existence d'un taux de croissance. La réponse est négative, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 5.5
Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : $f(t) > 1$, telle que pour toute solution u positive et profilée de (5.1), on ait :

$$\int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx \ge f(t)\int_{\mathbb{R}} v(0,x)dx\ .$$

En particulier, il n'existe pas de taux de croissance.

Démonstration abrégée
Soit μ une fonction profilée positive, pour tout $\lambda > 0$ définissons :

$$\mu_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda}\mu(\frac{a}{\lambda}).$$

Soit v_λ la solution de (5.1) avec donnée initiale égale à μ_λ.

Alors :

$$||v_\lambda(t,.)||_1 \underset{\lambda\to\infty}{\to} ||\mu_\lambda||_1 = ||\mu||_1.$$

Références

[B] **M. BenArtzi** : *Global existence and decay for a nonlinear parabolic equation.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 19, n°8, 763-768, (1992).

[BBP] **S. Benachour, H. Brezis, M. Pierre** : Communication privée.

[BRV] **S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois** : *Asymptotic estimates of $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $d \ge 2$.* J. Funct. Anal., à paraître.

[CW] **M. Chipot, F. B. Weissler** : *Some blow-up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term.* Siam J. Math. Anal. vol 20, n°4, 886-907, (1989).

[EZ] **M. Escobedo, E. Zuazua** : *Large time behaviour for a convection-diffusion equation in* $I\!R^N$. J. Funct. Analysis 100, 119-161, (1991).

[KS] **I. Karatzas, S. E. Shreve** : *Brownian motion and stochastic calculus.* Graduate Texts in Math. Second Edition. Springer Verlag New-York, (1991).

[L] **P. L. Lions** : *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equation.* Pitman Research notes in Math. 69, (1982).

[PL] **M. Pierre, T. P. Liu** : *Source solutions and asymptotic behavior in conservation laws.* J.Diff. Equations, 51,419-441, (1984).

[K] **O. Kavian** : *Remarks on the large time behavior of a non linear diffusion equation.* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire 4, n°5, 423-452, (1987).

[GK] **Y. Giga, T. Kambé** : *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flows and its applications to vortex formation.* Comm. Math. Phys. 117, 549-568, (1988).

[L] **O. A. Ladyzenskaya** : *The mathematical theory of viscous incompressible flows.* Gordon and Breach, (1969).

[RY] **D. Revuz, M. Yor** : *Continuous martingales and Brownian motion.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften n°293. Springer Verlag. Berlin, (1991).

Université de Nancy I
Institue Elie Cartan, UMR 9973
Département de Mathématiques
BP 239
54 506 Vandœuvre-Lès-Nancy