C. DELLACHERIE

Théorie générale du potentiel I

Astérisque, tome 236 (1996), p. 109-124
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__109_0>

Théorie générale du potentiel I

C. Dellacherie

Résumé. — Plus précisément et plus modestement, mais plus longuement, j'avais prévu intituler cet article, dans la lignée de [3], [4] et [5] (en grande partie absorbé),

Rudiments de théorie non (nécessairement) linéaire du potentiel fellerien(ne)

mais, vu les circonstances, je n'ai pu résister à la tentation de réaffirmer mon ambition, mettre à nu les ressorts élémentaires et fondamentaux de toute théorie du potentiel, même si ce projet est encore loin d'être réalisé. Le menu du jour est surtout l'étude du principe du maximum, sous toutes ses formes.

Quasi toute théorie du potentiel sur un espace F a pour essentiel ingrédient l'étude de systèmes d'inéquations de la forme $u \geq u_0$, $Au \geq f_0$ où A est une application d'une partie $\mathcal{D}$ de $\overline{\mathbb{R}}^F$ dans $\overline{\mathbb{R}}^F$ vérifiant deux propriétés de monotonie (δ) et (μ) explicitées ci-dessous et qu'on résumera en disant que A est un *dériveur sousmarkovien* ; pour fixer les idées, penser au cas $u_0 = f_0 = 0$ et $Au = \sup_t(u - P_t u)$, ou $Au = \limsup_{t \to 0}(u - P_t u)/t$, où (P_t) est un semigroupe sousmarkovien,

> Sauf mention du contraire, nos semigroupes seront linéaires ; noter que les dériveurs associés aux semigroupes ont le signe opposé de celui des générateurs infinitésimaux.

les propriétés de monotonie de A étant induites par celles de (P_t). L'étude de tels systèmes peut être fort variée (construction de solutions, existence et régularité d'une solution minimale, points où les inégalités deviennent des égalités, etc.) et mène à toutes les notions classiques

> Du côté des fonctions. La non linéarité fait perdre l'aspect dual, celui des mesures (tout au moins nous ne chercherons pas à y remédier ici).

de théorie du potentiel linéaire (potentiel, réduction, problème de Dirichlet, principes de domination et du maximum) ou souslinéaire (réduite, cône de fonctions, points extrémaux, frontières) tout en y rattachant des choses diverses de l'analyse traditionnelle.

Nous allons étudier dans cette optique l'action d'un dériveur sousmarkovien A sur l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des fonctions *continues* (réelles) sur un espace *compact* F (d'où le nom de *fellerien*) : que $\mathcal{C}(F)$ soit infstable (i.e. stable pour inf) jouera un rôle important, et que tout élément de $\mathcal{C}(F)$ atteigne ses bornes un rôle crucial. Ce cadre peut sembler trop particulier pour être fructueux. Il n'en est rien : on verra que tout dériveur sousmarkovien, quoique souvent naturellement défini sur un domaine restreint, peut être étendu à toute fonction (cf la lim sup dans l'exemple ci-dessus, qui aurait pu être une lim inf), et ce que nous établirons sera valable pour toute extension ; d'autre part on peut ramener de nombreuses situations au cas topologique considéré grâce à une compactification idoine (non nécessairement métrisable).

Nous commençons cependant par quelques généralités sur les dériveurs dans un cadre abstrait afin d'avoir les coudées plus franches pour expliquer précisément ce que sera notre cadre fellerien.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES DÉRIVEURS

Étant donné un ensemble E (muni tacitement d'une structure topologique ou mesurable si besoin est) et une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}^E$ (muni de son ordre partiel habituel), une application A de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ sera appelée un *dériveur sur* $\mathcal{D}$ si elle vérifie, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$ et tout $x \in E$,

$$(\delta) \qquad u \leq v \text{ et } u(x) = v(x) \quad \Longrightarrow \quad Au(x) \geq Av(x)$$

qu'on peut lire *si u est majorée par v, avec égalité en x, alors u est plus "concave" que v en x* et qu'on peut reformuler comme suit

$$u \leq v \quad \Longrightarrow \quad u < v \text{ sur } \{Au < Av\}.$$

Pour x fixé et u, v variables dans $\mathcal{D}$ vérifiant $u(x) = v(x)$, le dériveur A sera dit *dégénéré* en x si on a toujours $Au(x) = Av(x)$, *plat* en x si $u \leq v$ implique toujours $Au(x) = Av(x)$, et *local* en x si $Au(x) \geq Av(x)$ a lieu dès qu'on a $u \leq v$ sur un voisinage de x.

Si E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞, tout opérateur linéaire du second ordre elliptique éventuellement dégénéré (en particulier, parabolique), dont le terme du second ordre est affecté du "bon signe" (par exemple, pour $\lambda(x) \in \mathbb{R}_+$, $\nu(x) \in \mathbb{R}$ et $\mu(x)$ forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $Au(x) = -\lambda(x)\Delta u(x) + \langle \mu(x), \nabla u(x) \rangle + \nu(x)u(x)$ où Δ est le laplacien et ∇ le gradient), est un dériveur local, plat (resp dégénéré comme dériveur) en x s'il y est d'ordre 1 (resp d'ordre 0) ; en fait, (δ) est une formulation abstraite, non linéaire, empruntée à [7], du principe du maximum (ou du minimum) local pour les opérateurs elliptiques du second ordre, lequel caractérise ces opérateurs parmi les opérateurs différentiels linéaires. Voir [2] p.1065 et suivantes.

Lorsque $\mathcal{D}$ est infstable, (δ) équivaut évidemment, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$, à

$$(\wedge) \qquad A(u \wedge v) \;\geq\; Av \text{ sur } \{u \geq v\}$$

qui implique $A(u \wedge v) \geq Au \wedge Av$ (une forme du principe de l'enveloppe inférieure), d'où l'intérêt d'étendre le domaine de A pour avoir cette stabilité, même si elle n'est pas naturelle (et si, en fin de compte, elle n'apparaît plus parce qu'on retombe dans le domaine initial).

On a la même chose, mutatis mutandis, pour sup (par exemple, $A(u \vee v) \leq Au \vee Av$) mais cela jouera un rôle bien moindre parce qu'on a choisi de prendre le signe "$\geq$" dans nos systèmes d'inéquations fondamentaux.

À titre d'exemple, voici une forme du principe complet du maximum (prendre $\alpha = 0$ dans l'énoncé pour retrouver le cas linéaire)

ou plutôt du "superprincipe" de domination habituel en linéaire où l'on compare un potentiel (de fonction positive) à une fonction excessive, le cas de l'énoncé usuel du principe complet du maximum étant celui où la fonction excessive est la somme d'un potentiel et d'une constante positive, ce qui nécessite une situation sousmarkovienne,

qui sera considérablement améliorée plus loin dans notre cadre fellerien.

0 Proposition. *Supposons $\mathcal{D}$ infstable et soient $\alpha, u \in \mathcal{D}$ telles que u soit la plus petite solution dans $\mathcal{D}$ du système en w*

$$w \geq \alpha \ , \ Aw \geq f \text{ où } f = Au.$$

Alors pour tout $v \in \mathcal{D}$ majorant α on a

$$u \leq v \text{ sur } \{Au > Av\} \implies u \leq v \text{ partout.}$$

Démonstration. Si $w = u \wedge v$, on a $Aw \geq Au$ sur $\{u \leq v\}$ et $Aw \geq Av$ sur $\{u \geq v\}$ d'après $(\wedge)$, et donc l'hypothèse $Av \geq Au$ sur $\{u > v\}$ implique $Aw \geq Au$ partout. Si v majore α, on a $w \geq \alpha$, et on conclut $w = u$ par minimalité de u.

Le dériveur A de domaine $\mathcal{D}$ est dit *sousmarkovien* si $\mathcal{D}$ est stable pour les translations par les constantes positives (en abrégé, est *constable*), i.e. si

$$u \in \mathcal{D} \text{ et } t \in \mathbb{R}_+ \implies u + t \in \mathcal{D},$$

et si on a, pour tout $u \in \mathcal{D}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(\mu) \qquad A(u+t) \geq Au \ ;$$

il est dit *markovien en x* si l'inégalité est toujours une égalité en x.

Le cas markovien n'est vraiment intéressant que si $\mathcal{D}$ est stable par les translations par les constantes positives et négatives, ce qui arrive fréquemment d'ailleurs. Par ailleurs, on peut toujours, comme en linéaire, rendre markovien un dériveur sousmarkovien en adjoignant un point (isolé) δ à E et en identifiant $\mathcal{E}$ aux fonctions sur $E \cup \{\delta\}$ nulles en δ.

Tandis que (δ) permet, pour $u \leq v$, de comparer u et v en un point de contact, (μ) sert à mettre tout couple u, v dans cette situation : si $t = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : u \leq v + s\}$, et si cet inf est atteint en un point x (d'où l'intérêt des fonctions continues sur un espace compact), on a $Au(x) \geq A(v+t)(x)$ par (δ) et $A(v+t)(x) \geq Av(x)$ par (μ), d'où $Au(x) \geq Av(x)$ en combinant les deux propriétés, et $Au(x) = Av(x)$ si A est plat et markovien en x (d'où une forme non linéaire du théorème de Rolle).

La propriété (μ), qui en linéaire signifie que les constantes ≥ 0 sont surharmoniques, peut être affaiblie de sorte à retrouver la condition "il existe une fonction surharmonique >0", en remplaçant le semi-groupe des translations par les constantes positives par une famille continue à un paramètre de transformations tendant convenablement vers l'infini. On se limitera ici au cas sousmarkovien non seulement par simplicité (en particulier, le maximum d'une fonction n'est une entité naturelle en théorie du potentiel que dans ce cas) mais aussi parce qu'il est illustré par de nombreux exemples (comme $Au(x) = \Phi(-\Delta u(x), \nabla u(x), u(x), x)$ sur $C^2(\mathbb{R}^n)$ où Φ est une fonction à $1+n+1+n$ arguments réels croissante en le premier et le (1+n+1)-ième). C'est aussi par simplicité qu'on a supposé le domaine d'un dériveur sousmarkovien constable (excluant ainsi a priori $C_0(E)$ pour E localement compact comme domaine) ; comme on va travailler avec des dériveurs étendus à toute fonction, cela n'apportera aucune gêne.

L'exemple fondamental[1] de dériveur, sousmarkovien, A sur un domaine constable est celui de *dériveur élémentaire, sousmarkovien*, où A s'écrit $I-N$, I étant l'identité et N un opérateur croissant ($u \leq v \Rightarrow Nu \leq Nv$), contractant pour la "norme" uniforme (équivaut à $N(u+t) \leq Nu+t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par croissance). Au moins heuristiquement, c'est la brique à partir de laquelle tous les autres dériveurs sont construits à l'aide des propriétés de stabilité que nous recensons sous forme d'une proposition de démonstration évidente.

1 Proposition. *Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou infinie de dériveurs (sousmarkoviens) définis sur un même domaine $\mathcal{D}$ (constable).*

a) Si $h(..., a_i, ...)$ est une fonction de $\overline{\mathbb{R}}^I$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, croissante en l'ensemble de ses arguments, alors l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}$ par

$$Au(x) = h(..., A_i u(x), ...)$$

est un dériveur (sousmarkovien) ;

b) Si I est filtrant et si, pour tout $u \in \mathcal{D}$, la limite simple des Au_i existe, alors l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}$ par

$$Au(x) = \lim_i Au_i(x)$$

est un dériveur (sousmarkovien).

Quelques conséquences immédiates : l'ensemble des dériveurs sousmarkoviens sur $\mathcal{D}$ est stable par somme finie, par produit par une fonction ≥ 0, par inf et par sup (ponctuels) quelconques, par lim inf et par lim sup, par mélange, etc. D'où les exemples classiques de dériveurs construits à partir de dériveurs élémentaires à l'aide d'un semigroupe ou d'une résolvante sousmarkoviens, ou encore ceux fournis par les opérateurs elliptiques du second ordre éventuellement dégénérés (cf [5] pour le détail de leur construction à partir des élémentaires).

Voyons, pour terminer les généralités, comment étendre, à deux points de vue différents, un dériveur sousmarkovien A défini sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$: on va voir comment passer de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}$, puis, supposant E sous-ensemble d'un ensemble F, comment passer de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$.

Voyons d'abord l'extension de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}$, sous la forme d'une proposition de démonstration encore une fois évidente.

2 Proposition. *Soit A un dériveur (sousmarkovien) défini sur $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ (constable) et posons, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{E}$,* avec $\sup \emptyset = -\infty$ *et* $\inf \emptyset = +\infty$,

$$A^\vee u(x) = \sup\{Av(x), v \in \mathcal{D}, v \geq u, v(x) = u(x)\}$$
$$A^\wedge u(x) = \inf\{Av(x), v \in \mathcal{D}, v \leq u, v(x) = u(x)\}.$$

---

[1] Il correspond, du côté des fonctions, à celui de noyau élémentaire de Choquet-Deny en théorie linéaire.

On définit ainsi deux extensions de A en des dériveurs (sousmarkoviens) $A^\vee$ et $A^\wedge$ sur $\mathcal{E}$; de plus, $A^\vee$ est la plus petite et $A^\wedge$ la plus grande possible.

Si $t + \mathcal{D} = \mathcal{D}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il y a aussi conservation du caractère markovien dans **1** et **2**. Il y a une variante évidente de définition de $A^\vee$ et $A^\wedge$ pour que ceux-ci soient locaux si A est local ; par contre, la platitude est en général perdue. En fait, les caractères local ou plat de dériveurs seront peu utilisés par la suite. Par ailleurs, il existe de nombreux cas où il est plus judicieux d'étendre d'abord A à un domaine plus restreint à l'aide d'un procédé fin (dérivée symétrique, dérivée seconde au sens de Schwarz, opérateur de Dynkin, etc.), mais cela aussi sera peu utilisé par la suite.

Il est instructif de regarder ce que donnent (δ) et (μ) quand A est défini sur tout $\mathcal{E}$ (et il n'est pas interdit de considérer le cas où E est fini et A linéaire sur $\mathbb{R}^E$). Quand donc A est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, (δ) dit que, pour tout $x \in E$, la x-ième composante $Au^x = Au(x)$ de Au est une fonction décroissante de l'ensemble $(u^y)_{y \neq x}$ des composantes de u autres que la x-ième tandis que (μ) dit que Au^x est une fonction croissante de u^x, cette croissance arrivant à compenser d'une certaine manière la décroissance précédente.

Considérons enfin l'extension de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$, en supposant E sous-ensemble d'un ensemble F. On posera $\partial E = F \backslash E$ (c'est une écriture suggestive, sans plus) et $\partial\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}^{\partial E}$. Supposons donné un dériveur sousmarkovien B sur $\partial\mathcal{E}$; on définit un dériveur sousmarkovien $\widetilde{A}$ sur toute partie $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $\{u \in \mathcal{F} : u_{|E} \in \mathcal{D}\}$ en posant

$$\widetilde{A}u(x) = A(u_{|E})(x) \text{ pour } x \in E \quad , \quad \widetilde{A}u(x) = B(u_{|\partial E})(x) \text{ pour } x \in \partial E.$$

La plupart du temps, on prend pour B un dériveur dégénéré, par exemple $Bu = u_0$ avec $u_0 \in \partial\mathcal{E}$ fixée (égale à 0 dans le cas linéaire ou souslinéaire), ou $Bu = u_{|\partial E}$ (on dira qu'on a prolongé A à F par l'identité). Dans ce dernier cas, on voit que, dans le problème de Dirichlet

$$\text{trouver } u \in \widetilde{\mathcal{D}} \text{ telle que } A(u_{|E}) = f,\ u_{|\partial E} = \varphi \text{ pour } f \in \mathcal{E},\ \varphi \in \partial\mathcal{E} \text{ données,}$$

on peut grouper les deux conditions en la seule $\widetilde{A}u = \widetilde{f}$ où $\widetilde{f} = f1_E + \varphi 1_{\partial E}$: la condition frontière a disparu parce qu'on lui a donné le même statut qu'à l'autre (ce qui peut être un germanobritannique gift).

II. MISE EN PLACE DU DÉCOR. GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉDUITES

On désigne désormais par F un espace compact, souvent décomposé en deux parts E et $\partial E = F \backslash E$ a priori quelconques (en particulier, éventuellement vides), par $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathrm{F})$ l'espace des fonctions continues de F dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, et par A un dériveur sousmarkovien de $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$ dans $\mathcal{F}$.

Nous supposons A défini sur tout $\mathcal{F}$ mais, comme en analyse traditionnelle, nous n'arriverons à manipuler joyeusement que des fonctions continues (notre théorie est plus riemannienne que besguienne, et en particulier nous devrons nous contenter de la convergence uniforme là où on aimerait voir de la convergence simple bornée). Par ailleurs, dans les exemples, on se contentera souvent de se donner un dériveur par une définition naturelle sur un sous-ensemble implicite de $\mathcal{C}(E)$, laissant au lecteur le soin de l'étendre (en les deux sens).

Pour $u, f \in \mathcal{F}$ on désigne par $\mathfrak{D}_f^u$ ($\mathfrak{D}$ évoquant le mot "domine") l'ensemble des $v \in \mathcal{C}$ solutions du système d'inéquations $v \geq u$, $Av \geq f$ et par $\mathfrak{d}_f^u$ ($\mathfrak{d}$ évoquant la notation ∂ pour "bord") l'ensemble des $x \in F$ pour lesquels existe $v \in \mathfrak{D}_f^u$ tel que $v(x) = u(x)$; on pose pour simplifier $\mathfrak{D}_f = \mathfrak{D}_f^{-\infty}$. D'après ($\mu$), l'ensemble $\mathfrak{D}_f^u$ est non vide pour $\mathfrak{D}_f \neq \emptyset$, et est constable; d'après (δ) équivalent à ($\wedge$), il est infstable.

On appelle *f-réduite* de u la fonction s.c.s. $R_f^u = \inf \mathfrak{D}_f^u$, notée encore $R_f u$ ou $R(f,u)$ selon les circonstances[1]. Pour $f, u \in \mathcal{C}$ avec $\mathfrak{D}_f \neq \emptyset$, le mieux qu'on puisse espérer de $v = R(f,u)$, et on risque d'être déçu, est d'avoir en tout $x \in \mathcal{F}$

$$(Av(x) = f(x) \text{ et } v(x) \geq u(x)) \text{ ou } (Av(x) \geq f(x) \text{ et } v(x) = u(x))\,;$$

c'est vrai au moins si F est fini et A continu. Si, pour $H \subseteq F$, on note $u_{\|H}$ la fonction égale à u sur H et à $-\infty$ sur H^c, alors $v = R(f_{\|E}, u_{\|\partial E})$ est, selon la méthode des fonctions majorantes de Lebesgue-Perron, candidate pour être solution du problème de Dirichlet $Av = f$ sur E, $v = u$ sur ∂E ; elle l'est si F est fini et A continu.

Les objets de la forme $\mathfrak{D}_f^u$, R_f^u et $\mathfrak{d}_f^u$ (à un moindre degré car trop grossier comme frontière) seront parmi nos principaux sujets de préoccupation.

Nos deux axiomes (δ) et (μ) sont trop faibles pour établir des résultats fins, mais il est étonnant de voir tout ce qu'on peut déjà faire avec eux seuls (par exemple, on verra que R_f^u généralise convenablement la notion de réduite de fonction en théorie linéaire ou souslinéaire et celle de potentiel de fonction en théorie linéaire). Il nous manque en particulier (et cela sera évoqué de temps à autre) un axiome de régularité jouant le rôle de l'axiome demandant l'existence d'une base d'ouverts réguliers dans les axiomatiques linéaires classiques de Brelot ou Bauer.

La donnée de A et f permet de définir $\mathfrak{D}_f$ et R_f. En sens inverse, si Γ est une partie non vide et constable de $\mathcal{C}$, on définit sur $\mathcal{F}$ *l'opérateur de Γ-réduite* par

$$R_\Gamma u = \inf\{v \in \Gamma, v \geq u\}$$

(si bien que, pour $\Gamma = \mathfrak{D}_f$, on a $R_f u = R_\Gamma u$). On voit aisément que R_Γ est, au moins sur $\mathcal{C}$, une contraction croissante et idempotente majorant l'identité, si bien que $B = I - R_\Gamma$ est une dériveur élémentaire sousmarkovien vérifiant $Bu \leq 0$ pour tout $u \in \mathcal{C}$. L'ensemble $\{u \in \mathcal{C} : Bu = 0\}$, identique à $\{u \in \mathcal{C} : R_\Gamma u = u\}$, est de la forme $\mathfrak{D}_f$ relativement à B, avec $f = 0$; il contient évidemment Γ et une application simple du lemme de Dini montre qu'il est l'adhérence dans $\mathcal{C}$ du stabilisé de Γ pour inf de sorte que, pour tout $u \in \mathcal{F}$, $R_\Gamma u$ est égal à $R_0 u$ relativement à B.

Lorsque A est surlinéaire sur $\mathcal{C}$ et qu'on prend $f=0$ et u continue, $\mathfrak{D}_f^u - u$ est un cône convexe infstable de fonctions continues contenant les constantes positives, et réciproquement, tout tel cône Γ, fermé, provient comme ci-dessus du dériveur élémentaire associé à l'opérateur souslinéaire de réduite de Γ : on retrouve ainsi la théorie souslinéaire du potentiel fellerienne, qui généralise la théorie de la convexité.

Prenant pour Γ notre $\mathfrak{D}_f$ de départ (relatif à A), on voit que R_f ne détermine pas $\mathfrak{D}_f$ mais son adhérence. On aimerait donc, en se limitant au cas où u et f parcourent

[1] Nos notations pour les réduites entrent parfois en conflit avec des notations traditionnelles quand $f=0$.

$\mathcal{C}$, que $\mathfrak{D}_f$ soit toujours fermé, et même, pour plus d'une raison, avoir toujours $R_f u$ continue et $AR_f u \geq f$ (comme $\mathfrak{D}_f^u$ est infstable et constable, cela implique que $\mathfrak{D}_f$ est fermé). Mais, hors le cas élémentaire, les contre-exemples abondent

Si F est réduit à un point, la notion de dériveur sousmarkovien de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ coïncide avec la notion de fonction monotone croissante de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et la régularité recherchée est la continuité à droite de la fonction.

et il faudrait ajouter un axiome convenable de régularité pour obtenir ces propriétés. Néanmoins, nous saurons tant bien que mal faire sans dans notre étude du principe du maximum.

Dans le cas linéaire, lorsque A étend l'opposé du générateur infinitésimal d'un semigroupe fellerien et qu'on prend $f=0$ et u continue, les propriétés voulues peuvent être obtenues : on sait, d'après Mokobodzki, que $R_0 u$ est continue, et on peut montrer que $AR_0 u$ est ≥ 0 et que $\mathfrak{D}_0$ est fermé pour la convergence simple bornée si A est une extension obtenue par un procédé fin utilisant l'opérateur de Dynkin, tout au moins lorqu'il y a suffisamment d'ouverts réguliers pour le problème de Dirichlet. On en dira un peu plus au n°7.

Si R_f^u est continue, $\mathfrak{d}_f^u$ est égal à $\{u = R_f^u\}$, et si AR_f^u est $\geq f$, $\{u = R_f^u\}$ est inclus dans $\{Au \geq f\}$. *En tout cas,* et c'est ce qui nous importe principalement pour la suite, il est toujours vrai, pour $u, f \in \mathcal{F}$, que *l'ensemble $\mathfrak{d}_f^u$ est inclus dans $\{u = R_f^u\}$ d'après sa définition, et aussi dans $\{Au \geq f\}$ d'après (δ).*

Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{C}$ constable, non vide ; on dira que ∂E est un ensemble Γ-*porteur* pour u s'il *porte* la Γ-réduite de u, i.e. si on a $R_\Gamma u = R_\Gamma(u_{\|\partial E})$, soit encore si

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \text{ et } v \in \Gamma \implies u \leq v \text{ partout.}$$

Le préfixe "Γ-" sera remplacé par "f-" si $\Gamma = \mathfrak{D}_f$; la mention de u sera omise s'il n'y a pas d'ambiguïté. Un ensemble Γ-porteur est encore $\widetilde{\Gamma}$-porteur si $\widetilde{\Gamma}$ est le plus petit fermé infstable de $\mathcal{C}$ contenant Γ. Un surensemble ou une partie dense d'un ensemble Γ-porteur est encore Γ-porteur (en particulier, ∂E est Γ-porteur ssi $\overline{\partial E}$ l'est). Enfin, l'intersection d'une famille filtrante décroissante de fermés Γ-porteurs est encore un fermé Γ-porteur (utiliser (μ) et le lemme de Dini). Voici un exemple dérangeant que l'on retrouvera au §V et au §VII : on prend $F = \{1,2,3\}$, $u = 0$, et pour Γ l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $v(2) \leq v(1) \wedge v(3)$; alors $\{1,3\}$ et $\{2\}$ sont tous deux des fermés Γ-porteurs pour u tandis que $\emptyset$ ne l'est pas.

Dans le cas souslinéaire, Γ est un cône convexe infstable et constable, et on retrouve pour $u=0$ la notion classique d'ensemble de Šilov. Cependant, nous venons de voir que, dans le cas général, il peut ne pas exister de frontière de Šilov.

Au §III on établit et exploite le fait que, pour $u \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{d}_f^u$ porte la f-réduite de u tandis qu'au §IV on étudie de manière systématique la notion d'ensemble porteur pour u quand $f = Au$ (et donc $\mathfrak{d}_f^u = F$ si bien que $\mathfrak{d}_f^u$ n'a plus d'intérêt). Au §V, qui clôt la première partie de notre étude, on dresse le bilan de ce qui est déjà fait de l'étude d'un système fondamental $v \geq u$, $Av \geq f$ et on introduit ce qu'on fera dans la seconde partie. Au §VI sera établi sans doute le meilleur théorème de comparaison possible sous nos axiomes, couvrant à la fois les principes du maximum et les théorèmes de support pour la réduite des théories linéaire et souslinéaire, et aussi une bonne part de §III et §IV. Enfin, au §VII, on abordera la définition et l'étude des points extrémaux et de la frontière de Choquet ; c'est l'endroit où pour la première fois le non linéaire se singularisera par rapport au linéaire ou souslinéaire. En appendice on trouvera une liste de problèmes commentés.

III. THÉORÈMES FAIBLES DE COMPARAISON, THÉORÈME DE ROLLE

Le résultat suivant, dont la démonstration ne fait intervenir que (μ), est une première approche de l'étude des "supports" ou "frontières".

3 Théorème. *Soient $u \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$. Si $v \in \mathfrak{D}_f$ ne majore pas u, alors $\mathfrak{d}_f^u$ contient tout point où $(u-v)^+$ atteint son maximum. En particulier la f-réduite de u est portée par $\mathfrak{d}_f^u$, et donc par $\{u = R_f u\}$ et $\{Au \geq f\}$.*

Démonstration. Supposons qu'on n'a pas $u \leq v$ et soient $\tau = \inf\{t \geq 0 : v + t \geq u\}$, qui est > 0, $v_\tau = v + \tau$, et $\xi \in F$ tel que $v_\tau(\xi) = u(\xi)$: on a $v_\tau \in \mathfrak{D}_f^u$ d'après (μ) et $\xi \in \mathfrak{d}_f^u$, d'où la conclusion, compte tenu de $\mathfrak{d}_f^u \subseteq \{u = R_f^u\}$.

Remarque. On peut obtenir un résultat plus fort en supposant u s.c.s. et v s.c.i. Pour préserver la simplicité de l'exposé, nous tairons le plus souvent ce type de généralisation. Mais, comme R_f^u n'est en général que s.c.s., même pour u et f continues, on ne peut éviter complètement de parler de fonctions s.c.s.

Nous en déduisons à l'aide de (δ) nos premiers principe du maximum et théorème de comparaison.

4 Théorème. *Soient $u, v \in \mathcal{C}$. Si v ne majore pas u, la fonction $(u-v)^+$ atteint son maximum sur $\{Au \geq Av\}$. Ainsi, si on a $u \leq v$* sur *$\{Au \geq Av\}$, alors on a $u \leq v$ partout, et $u < v$ sur $\{Au < Av\}$.*

Démonstration. D'après (δ), on a $\mathfrak{d}_f^u \subseteq \{Au \geq f\}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, et il n'y a plus qu'à faire $f = Av$ au n°**3** ; la précision sur $u < v$, sachant qu'on a $u \leq v$ partout, n'est qu'une reformulation déjà vue de (δ).

Remarque. Si A est strictement sousmarkovien sur $\mathcal{C}$ en tout point de F (i.e. si on a $A(w+t) > Aw$ pour tout $w \in \mathcal{C}$ et tout $t > 0$), alors, avec les notations de **3** et de sa démonstration, on a

$$f(\xi) \leq Av(\xi) < Av_\tau(\xi) \leq Au(\xi)$$

et donc $Au(\xi) > f(\xi)$; ainsi $(u-v)^+$ atteint et a fortiori approche son maximum sur $\{Au > Av\}$, ce qui est bien plus précis que sur $\{Au \geq Av\}$ (mais implique l'injectivité de A). On établira plus loin qu'en général $(u-v)^+$ approche son maximum sur $\{Au > Av\}$ *augmenté* d'une frontière plus ou moins minimale ne dépendant que de u : c'est ce qui distinguera les théorèmes forts de comparaison des faibles que nous sommes en train de voir.

5 Corollaire (Théorème faible de comparaison). *Si pour $u, v \in \mathcal{C}$ on a*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \quad , \quad Au < Av \text{ sur } E$$

alors on a $u \leq v$ partout.

Remarque. On a de plus $u < v$ sur E, d'après (δ). Nous avons omis de le mettre dans l'énoncé afin que le faible soit effectivement plus faible que le fort.

L'énoncé suivant provient de [5], où on supposait en plus, par étourderie, satisfaite une propriété d'honnêteté (que l'on retrouvera cependant plus loin éclatée dans notre étude des ensembles à la Šilov).

6 Corollaire (Théorème de Rolle). *Soient $u, v \in \mathcal{C}$ vérifiant $u = v$ sur ∂E. S'il existe $x_1, x_2 \in E$ (éventuellement confondus) tels que*

$$u(x_1) \leq v(x_1) \quad , \quad u(x_2) \geq v(x_2)$$

alors il existe $\xi_1, \xi_2 \in E$ tels que

$$Au(\xi_1) \leq Av(\xi_1) \quad , \quad Au(\xi_2) \geq Av(\xi_2).$$

De plus, on peut imposer $\xi_1 = \xi_2$ si Au et Av sont continues sur E connexe.

Démonstration. Supposons par exemple qu'on puisse trouver un ξ_1 mais pas de ξ_2 dans E. On a donc $Au < Av$ sur E, et $u = v$ sur ∂E par hypothèse, d'où $u < v$ sur E d'après **5**, ce qui contredit l'existence de x_2. Le reste est évident.

On trouvera dans [1] un petit historique et une bibliographie pour d'autres extensions du théorème de Rolle portant sur des opérateurs linéaires. En particulier, Polya a trouvé une condition suffisante (et nécessaire au moins pour $n=2$) intéressante pour qu'un opérateur différentiel linéaire L d'ordre n à coefficients continus sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vérifie : pour toute fonction n fois dérivable u s'annulant $n+1$ fois dans $[a,b]$, il existe $x \in]a,b[$ tel que $Lu(x)=0$.

Remarque. Nous avons esquissé, lors de la définition de (μ), une extension, avec un énoncé aussi fort et une démonstration analogue, du théorème classique de Rolle quand A est markovien et plat ; il est cependant impossible dans le cas général de toujours imposer $\xi_1 = \xi_2$ (penser au cas où E est fini !).

7 Il est instructif de démontrer à l'aide de **6** le théorème classique des accroissements finis : u étant une fonction dérivable sur un intervalle compact $F = [a, b]$, on prend pour v la fonction affine telle que $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$. D'abord, on constate qu'il faut briser la symétrie entre a et b : ou bien on prend $E = [a, b[$ et $\partial E = \{b\}$, puis pour dériveur A l'opposé de la dérivée à droite sur E (qui n'est pas plat en a), et enfin $x_1 = x_2 = a$, ou bien, on prend $E =]a, b]$, $\partial E = \{a\}$, pour A la dérivée à gauche sur E, et enfin $x_1 = x_2 = b$.

Pour le semi-groupe de la translation à gauche dont A est l'opposé du générateur infinitésimal, b est un point intérieur de E pour la topologie fine. Même chose en changeant de main, mais l'interprétation gauche a ici l'avantage que dérivée et dériveur ont même signe si bien que l'analyse traditionnelle s'y trouve plus à l'aise.

On conclut alors que la constante $v' = \frac{u(b)-u(a)}{b-a}$ est une "valeur intermédiaire" de u' sur F. Ensuite, en conservant l'interprétation gauche et en renommant b en x_0 pour marquer la dissymétrie, on voit que "la corde" v de "l'arc u" est la solution du problème à la Dirichlet suivant

$$v_{|\partial E} = u_{|\partial E} \quad , \quad Au \text{ est constante} \quad , \quad v(x_0) = u(x_0).$$

Cela dit, l'intérêt principal en analyse traditionnelle du théorème des accroissements finis est de permettre d'établir la part non évidente, pour u fonction dérivable et

$\tau_h u(x) = u(x-h)$, de l'équivalence

$$\forall x \in E \ \lim_{h\downarrow 0} \frac{u(x) - \tau_h u(x)}{h} \geq 0 \iff \forall h \geq 0 \ \forall x \in E \ u(x) - \tau_h u(x) \geq 0.$$

Ainsi une propriété relative à un dériveur complexe se trouve être équivalente à une propriété commune à des dériveurs élémentaires, donc compatible avec le passage à la limite uniforme et même à la lim inf,

En linéaire, un dériveur élémentaire sousmarkovien de C dans C est forcément de la forme $I-N$ où N est un noyau de théorie de la mesure d'après le théorème de Riesz-Markov, et a donc de bonnes propriétés relativement à la convergence simple. En général, c'est faux ; c'est pourquoi on a évoqué d'abord la convergence uniforme.

ce qui permet par exemple de démontrer le fait suivant : soient (u_n) une suite de fonctions dérivables telle que $u = \liminf_n u_n$ existe et soit dérivable; pour toute fonction continue f telle que $u'_n \geq f$ pour tout n, on a encore $u' \geq f$, soit une sorte de théorème de convergence dominée pour la dérivée. De plus, si on prolonge la définition de la dérivée à toute fonction continue u sur E en remplaçant ci-dessus $\lim_{h\downarrow 0}$ par $\liminf_{h\downarrow 0}$, il est facile de voir (c'est d'ailleurs un cas particulier de **6**) qu'avec cette extension de la dérivée on peut remplacer partout l'hypothèse de dérivabilité par celle de continuité. On a alors, dans le cadre traditionnel, résolu nos difficultés concernant l'opérateur de f-réduite.

L'énoncé **6** peut-il avoir le même usage en général? La réponse, plus qu'esquissée dans [5], est un oui-mais : l'idée est bonne, mais nos axiomes sont trop faibles pour l'exploiter. En gros, il s'agit de construire, pour f continue donnée, une famille de dériveurs élémentaires sousmarkoviens $(A_i)_{i\in I}$ envoyant C dans C telle qu'on ait, pour u continue,

$$\forall x \in E \ Au(x) \geq f \iff \forall i \in I \ \forall x \in E \ A_i u(x) \geq f$$

et, autant que possible, avec I filtrant vérifiant

$$\forall x \in E \ Au(x) = \lim_i A_i u(x),$$

au moins chaque fois que $\lim_i A_i u$ existe dans C.

Pour $f=0$, cela s'obtient, facilement et classiquement, pour le laplacien à l'aide des opérateurs de moyenne. En général, pour un semigroupe fellerien, la construction d'une telle famille revient pratiquement à la démarche de Dynkin dans son étude du générateur infinitésimal, laquelle est une généralisation au semigroupe de la formule de Taylor limitée à son premier terme (ce qui donne en général naissance à du second ordre comme dans la formule d'Itô).

En suivant la démarche précédente, on rencontre pour difficulté principale l'existence de solutions aux problèmes à la Dirichlet généralisant la situation des arcs et des cordes les sous-tendant.

À la difficulté de régularité de frontière, maîtrisée en axiomatique linéaire par un axiome demandant l'existence d'une base formée d'ouverts réguliers, s'ajoute en non linéaire celle de l'existence possible d'explosions (penser au cas où $E=\mathbb{R}^n$ et où $Au=-\Delta u+(\nabla u)^2$).

Nous n'en dirons pas plus ici (voir cependant la liste de problèmes).

IV. ENSEMBLES PORTEURS. THÉORÈMES FORTS DE COMPARAISON

On dira que la fonction $w \geq 0$ *approche son maximum* sur $H \subseteq F$ si H est vide et w nulle, ou si H est non vide et si on a $\sup_{x \in H} w(x) = \sup_{x \in F} w(x)$, soit encore, pour H non vide et $w \in \mathcal{C}$, si w atteint son maximum sur $\overline{H}$; cela servira dans les énoncés de théorèmes de comparaison ou de principes du maximum établis en regardant, pour $u, v \in \mathcal{C}$, le maximum de la fonction $w = (u - v)^+ = (u - v) \vee 0$.

On se donne $u \in \mathcal{C}$; les notions définies dans ce paragraphe seront relatives à u (et à A, bien entendu, qu'on sera cependant amené à faire varier plus loin). On pourrait supposer $u = Au = 0$, quitte à considérer au lieu de A et u le dériveur $w \mapsto A(u + w) - Au$ et la fonction 0, mais nous ne le ferons pas ici.

Le résultat suivant montre que les points de vue théorème de comparaison fort et principe du maximum[1] sont équivalents. Noter que 2), 3) et 4) ne dépendent pas de l'extension éventuelle du dériveur de E à F.

Le fait que ∂E soit porteur dépend par contre de l'extension éventuelle du dériveur de $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(E)$ à $\mathcal{C}(E)$; voir cependant la remarque 2) du **11**.

8 Théorème. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) (Définition de *porteur* (pour u)) *L'ensemble ∂E est (Au-)porteur, i.e. on a $u = R(Au, u_{\|\partial E})$, soit encore, pour tout $v \in \mathcal{C}$,*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \text{ et } Au \leq Av \implies u \leq v \text{ partout ;}$$

2) (Théorème fort de comparaison) *Pour tout $v \in \mathcal{C}$,*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \text{ et } Au \leq Av \text{ sur } E \implies u \leq v \text{ partout}$$

qu'on peut aussi écrire $u = R(Au_{\|E}, u_{\|\partial E})$;

3) (Principe de domination) *Pour tout $v \in \mathcal{C}$,*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \cup (\{Au > Av\} \cap E) \implies u \leq v \text{ partout}$$

(dans lequel on peut évidemment omettre d'écrire "$\cap E$") ;

4) (Principe du maximum) *Pour tout $v \in \mathcal{C}$, la fonction $(u - v)^+$ approche son maximum sur l'ensemble $\partial E \cup (\{Au > Av\} \cap E)$ (dans lequel on peut évidemment omettre d'écrire "$\cap E$").*

Démonstration. Les implications 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) sont triviales. Voyons 1) $\Rightarrow$ 4). Soit $v \in \mathcal{C}$ et posons

$$w = u \wedge (v + \tau) \text{ où } \tau = \inf\{t \geq 0 : v + t \geq u \text{ sur } \{Au > Av\} \cup \partial E\}.$$

On a $u = w$ sur ∂E, et on va montrer qu'on a $Au \leq Aw$ partout, d'où on aura $u \leq w$ partout si ∂E est porteur pour u, et la conclusion d'après la définition de w. Sur $\{w = u\}$, on a $Aw \geq Au$ d'après ($\wedge$). Sur $\{w \neq u\}$, on a d'une part $w = v + \tau$ et donc

[1] Pour des précisions sur notre terminologie, voir le passage en petits caractères suivant **10**.

$Aw \geq A(v+\tau) \geq Av$ d'après ($\wedge$) et (μ), et d'autre part $Av \geq Au$ car, par définition de τ, on a $w = u$ sur $\{Au > Av\}$. C'est fini.

Remarques. 1) L'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2) peut encore se lire : ∂E est porteur pour u ssi u est la plus petite solution du problème de Dirichlet $Av = f$ sur E, $v = u$ sur ∂E pour $f = Au$, ou encore du système $Av \geq f$ sur E, $v \geq u$ sur ∂E.

2) On voit aisément que les notions de porteur pour u relativement à A, à $I - R_{Au}$ et à $I - R_{Au\|_E}$ coïncident (une fois n'est pas coutume !). On peut donc encore écrire huit autres assertions équivalentes en remplaçant "$Au \leq Av$" par "$Rv = v$" et donc "$Au > Av$" par "$Rv > v$" avec $R = R_{Au}$ ou $R = R_{Au\|_E}$.

Le premier corollaire généralise le classique "principe complet du maximum pour les potentiels"

9 Corollaire. *Supposons ∂E porteur et soient $v \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Si on a $u \leq v$ sur ∂E et $u \leq v + t$ sur $\{Au > Av\} \cap E$, alors on a $u \leq v + t$ partout.*

tandis que le second généralise le classique "principe faible du maximum pour les fonctions sousharmoniques"

10 Corollaire. *Supposons ∂E porteur et soit $v \in \mathcal{C}$. Si on a $Au \leq Av$ sur E, alors le maximum de $(u - v)^+$ est approché sur ∂E, ainsi que le minimum de $(v - u)^+$ si de plus A est markovien sur E.*

Démonstration. La première partie est triviale ; la seconde se ramène à la première en considérant le maximum de $(u + t - v)^+$ pour t suffisamment grand.

Dans le cas linéaire, avec $u=f=0$ et sous des conditions adéquates de régularité, on retrouve que la fonction sousharmonique $-v$ atteint son maximum sur ∂E, soit ce qu'on appelle classiquement le principe faible du maximum pour le différencier du fort qui, selon Hopf, affirme, sous une hypothèse de forte ellipticité, que $-v$ est constante dès qu'elle atteint son maximum dans E. Ainsi, le principe faible du maximum est associé au théorème fort de comparaison ! Nous évitons le choc des mots en disant simplement "principe du maximum" dans **8** (et "principe du maximum de Hopf" plus loin) ; cela est d'autant plus justifié que **8** implique aussi le classique principe complet du maximum pour les potentiels dans la mesure où ceux-ci sont les fonctions surharmoniques nulles à la frontière.

Remarque. Au lieu de supposer ∂E porteur pour u relativement à A, on pourrait, ayant retourné la feuille de papier, supposer que ∂E est porteur pour $-v$ relativement au dériveur *conjugué* $\overline{A}$ de A défini par $\overline{A}w = -A(-w)$, markovien là où A l'est.

Les propriétés de **8** révèlent l'intérêt de la notion de porteur mais ne permettent guère en pratique de vérifier qu'un ensemble l'est. Nous allons dégager maintenant un critère commode : ce ne sera qu'une condition suffisante si on travaille avec les notions relatives à A, mais elle sera aussi nécessaire si on travaille avec les notions relatives à $I - R_{Au}$ ou $I - R_{Au\|_E}$.

On dira que u est ***prévisible*** sur $H \subseteq F$ s'il existe dans $\mathcal{C}$ une suite (u_n) ***annonçant*** u sur H, i.e. tendant vers u (uniformément sur F) et vérifiant $Au_n < Au$ sur H.

On peut toujours rendre une suite (u_n) qui annonce u croissante et strictement majorée par u, quitte à remplacer u_n par $v_n = u_n - \|u - u_n\|$ puis v_n par $w_n = v_1 \vee \ldots \vee v_n$, car on a $Aw_n \leq Av_1 \vee \ldots \vee Av_n$ d'après (δ) et $Av_n \leq Au_n$ d'après (μ). Si $H=F$ est réduit à un point, on retrouve la notion de point de croissance à gauche, celle à droite se retrouvant à gauche en considérant le conjugué de A.

Et on dira que u est *accessible* sur E si u est prévisible sur tout compact disjoint de $\overline{\partial E}$ (il suffit évidemment de tester les “gros” compacts). Être prévisible ou accessible sur E ne dépend pas de l'extension éventuelle du dériveur de E à F .

Dans le cas linéaire, u=0 est accessible sur E ouvert ssi, pour tout compact K de E, il existe w continue sur F vérifiant Aw>0 sur K ; c'est donc une propriété de transience faible (vérifiée par exemple par le laplacien sur $E=\mathbb{R}^n$, pour tout n), évidemment satisfaite si A étend l'inverse d'un noyau de Hunt sur E.

11 Théorème. *Pour que ∂E soit porteur, il suffit que u soit accessible sur E.*

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{C}$ et supposons que le maximum M de $(u-v)^+$ ne soit pas approché sur ∂E : il existe un $\varepsilon > 0$ tel que le compact $K = \{x : (u-v)^+(x) \geq M-\varepsilon\}$ soit disjoint de $\overline{\partial E}$. Soit alors (u_n) une suite annonçant u sur K dans $\mathcal{C}$. Pour n suffisamment grand, le maximum de $(u_n-v)^+$ n'est pas approché sur K^c ; il est donc atteint sur $K \cap \{Au_n \geq Av\}$ d'après **4**, a fortiori approché sur $K \cap \{Au > Av\}$. Faisant tendre n vers l'infini, on trouve que le maximum de $(u-v)^+$ est approché sur $K \cap \{Au > Av\}$, d'où la conclusion.

Dans le cas linéaire, lorsque, ∂E étant réduit à un point, A est associé à un semigroupe fellerien sur E admettant un noyau potentiel propre V, **11** implique que, pour $f \geq 0$ continue à support compact, $R^u_f = R(f,0)$ est égale au potentiel Vf de f : en effet, ∂E est porteur, et Vf, qui appartient à $\mathfrak{D}^0_f$ et est nulle sur ∂E, est alors le plus petit élément de $\mathfrak{D}^0_f$.

Remarques. 1) Même dans le cas linéaire avec A local, on peut avoir ∂E fermé porteur alors que u n'est prévisible sur aucun ouvert non vide de E,

C'est le cas, d'après un résultat classique cité dans [6] et [9], si on prend F=[0,1], $\partial E=\{0,1\}$, u=0 et si, D étant un ensemble dénombrable dense dans F, on prend pour A un dériveur étendant convenablement l'application dérivée perturbée $v \mapsto v' 1_{F \setminus D}$.

quoique je ne connaisse aucun exemple “naturel”. Il est par contre tout à fait normal que, selon A, on puisse avoir E ouvert non accessible, ou accessible non prévisible, ou prévisible : dans le cas linéaire où l'on part d'un semigroupe fellerien sur un espace localement compact E, cela correspond en gros aux cas où le noyau potentiel V n'est pas propre, est propre mais non borné, et est borné.

2) Regardons la dépendance de “porteur” et “accessible” d'une éventuelle extension du dériveur de $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(E)$ constable à $\mathcal{C}(E)$, en supposant $u \in \mathcal{C}$ et $u_{|E} \in \mathcal{D}$. Si, dans la définition de “porteur”, on ne regarde que les v vérifiant $v_{|E} \in \mathcal{D}$, on voit que plus $\mathcal{D}$ est grand plus il est difficile pour ∂E d'être porteur pour u alors que si, dans la définition de “prévisible”, on demande de surcroît $u_{n|E} \in \mathcal{D}$ pour tout n, plus $\mathcal{D}$ est grand plus il est facile pour u d'être accessible sur E ; en outre, les énoncés **8**-4) $\Rightarrow$ **8**-1) et **11** restent vrais. Ainsi, en pratique, le caractère porteur de ∂E ne dépend guère de l'extension de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ (et $\mathcal{F}$).

3) Si u est prévisible sur E et si on est passé de E à F en complétant le dériveur par l'identité sur ∂E, alors u est encore prévisible sur F : ainsi l'ensemble vide est porteur et on a donc perdu la frontière... On reviendra sur ce point un peu paradoxal au §V lors de l'introduction à l'étude des frontières.

Par contre, il est clair que l'ensemble vide ne peut pas être porteur si A est markovien sur F, **8**-1) impliquant une certaine injectivité de A. En outre, dans ce cas, tout ensemble de la forme $\{Av \leq Aw\}$ avec $v,w \in \mathcal{C}$ est non vide (appliquer (μ) et (δ) à $v \pm t$).

La suffisance dans l'énoncé suivant s'obtient en appliquant **11** (dans lequel l'arlésien A est considéré comme variable libre) au dériveur élémentaire $I - R$ pour $R = R_{Au}$ ou $R = R_{Au_{\|E}}$ (où A est à nouveau notre dériveur fixé).

12 Théorème. *Pour que ∂E soit porteur, il faut et il suffit que u soit prévisible sur l'ouvert $F\backslash\overline{\partial E}$ relativement au dériveur $I - R_{Au}$, ou $I - R_{Au_{\|E}}$.*

Démonstration. Pour la nécessité, il suffit, à l'aide du lemme d'Urysohn, de prendre pour u_n une fonction continue comprise entre u et $u-\frac{1}{n}$, égale à u sur $\overline{\partial E}$ et strictement inférieure à u ailleurs : ∂E étant porteur, on a $Ru_n = u$ partout et donc $(I-R)u_n < 0$ sur $F\backslash\overline{\partial E}$.

Remarque. Si u est prévisible sur E ouvert relativement à A, ∂E est porteur et donc u est aussi prévisible par rapport à $I - R_{Au}$. Mais cela n'implique pas qu'une suite (u_n) annonçant u sur E relativement à A l'annonce relativement à $I - R_{Au}$! En effet, rien ne permet d'affirmer que $Au > Au_n$ sur E implique $R_{Au}u_n > u_n$ sur E (sauf si $AR_{Au}u_n = Au$, ce qu'on aurait avec un axiome convenable de régularité).

Nous terminons ce paragraphe avec une version non linéaire et non locale du principe du maximum de Hopf.

Nous dirons qu'une partie H de F *ne cerne pas* $x \in E$ (relativement à u) si, pour tout $v \in C$ tel que $(u-v)^+$ atteigne son maximum en x, le maximum de $(u-v)^+$ est approché sur $(\partial E\backslash H) \cup (\{Au > Av\} \cap (E\backslash H))$. Par exemple, si A est markovien sur E, ∂E cerne tout point de E (prendre $v = u - 1$).

13 Théorème. *Supposons que ∂E soit porteur et qu'il n'existe aucun point de E cerné par une partie fermée de ∂E distincte de ∂E. Soit $v \in C$ vérifiant $Au \leq Av$ sur E ; si $(u-v)^+$ atteint son maximum en un point de E, alors elle l'atteint en tout point de ∂E.*

Démonstration. D'après **10**, le maximum M de $(u-v)^+$ est approché sur ∂E. Si $(u-v)^+$ n'est pas constante sur ∂E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H = \{x \in \partial E : (u-v)^+(x) \geq M - \varepsilon\}$ ne soit pas égal à ∂E, ce qui est incompatible avec le fait que H ne cerne aucun point de E.

Comme plus haut au **8**, le résultat n'est intéressant que si on a un moyen commode de vérifier les hypothèses. En voici un, inspiré de l'exposé dans [8] du théorème de Hopf.

14 Théorème. *Pour que ∂E soit porteur et que $H \subseteq F$ ne cerne pas $x \in E$, il suffit qu'il existe dans C une suite (u_n) annonçant u sur E et vérifiant*

$$u(x) - u_n(x) > \inf_{y \in H}(u(y) - u_n(y))$$

pour tout n.

Démonstration. La démonstration est semblable à celle de **11**, qui entraîne déjà que ∂E est porteur. Supposons que $(u-v)^+$ atteigne son maximum en $x \in E$ et soit (u_n) une suite annonçant u sur E de sorte qu'on ait $u(y) - u_n(y) > u(x) - u_n(x)$ pour tout n et tout $y \in H$: on est ainsi assuré que les $(u_n - v)^+$ ne peuvent atteindre leur maximum sur H. Supposons de plus que $(u-v)^+$ n'approche pas son maximum sur ∂E ; alors, pour n grand, les $(u_n - v)^+$ n'approchent pas non plus leur maximum sur ∂E, et finalement n'atteignent pas leur maximum sur $\partial E \cup H$. Les $(u_n - v)^+$, pour n grand, doivent alors atteindre leur maximum dans $E \backslash H$, donc dans $(E\backslash H) \cap \{Au_n \geq Av\}$ et finalement dans $(E\backslash H) \cap \{Au > Av\}$, d'où la conclusion.

Dans le cas linéaire avec $u=0$, K ne cerne pas x dès qu'il existe $w \in C$ vérifiant $Aw>0$ sur E et $w(x)<\inf_K w$. Dans le cas classique où l'on considère un opérateur linéaire du second ordre uniformément elliptique sur un ouvert connexe d'un espace euclidien, on se ramène à étudier l'opérateur dans une boule $E=B(x,r)$ et on prend pour w la fonction $y \mapsto 1-\exp(-\alpha\|y-x\|^2)$ avec α suffisamment grand ; voir [8] pour les détails.

V. ENTRACTE

Donnons-nous $u \in C$ et $f \in \mathcal{F}$, revenons explicitement à la considération du système fondamental d'inégalités (1) $v \geq u$ (2) $Av \geq f$ en $v \in C$ et voyons ce que nous avons pu en dire au §III et au §IV. D'abord, excepté en **3**, on a toujours pris $f = Au$,

Dans le cas linéaire, cela signifie que, sauf en **3**, on a exclusivement étudié l'opérateur potentiel, au détriment de l'opérateur de réduite.

et, dans ce cadre, on a étudié seulement la possibilité d'affaiblir (1) en "$v \geq u$ sur ∂E". On a gagné en passant au **8-2)** l'affaiblissement de (2) en "$Av \geq f$ sur E", mais, dans la pratique, c'est peu de chose car A est souvent dégénéré sur ∂E, soit par construction de A, soit par définition de ∂E.

Si, Γ étant un cône convexe infstable et constable, on prend $A=I-R_\Gamma$ et $u=0$, alors l'ensemble $\partial E=\{x \in F : \forall v \in C \ Av(x)=0\}$ est par définition la frontière de Choquet de Γ.

Ce "peu de chose" se révèlera cependant important dans l'étude des frontières.

Au §VI on va restaurer la formulation générale de (2), et affaiblir à la fois (1) et (2). Plus précisément, on établira le théorème de comparaison suivant, qui redonne, pour $f = Au$, le principe de domination **8-3)**.

Théorème. *Soient $u, v \in C$ et $f \in \mathcal{F}$, et supposons que ∂E est f-porteur pour u et qu'on a $v \geq u$ sur ∂E. Alors on a $v \geq R_f u$ partout dès qu'on a $v \geq R_f u$ sur $\overline{\{Av < f\}}$, et même dès qu'on a $v \geq R_f u$ sur $\{Av < f\}$ si $R_f u$ est continue ou si on a $AR_f u \geq f$.*

Au §VII, on se donne $E \subseteq F$ (éventuellement égal à F) et, considérant le système (1) $v \geq u$ (2) $Av \geq f$ sur E , nous traquerons le $f_{\|E}$-porteur minimal pour u, qui, pour plus d'une raison (cf §II), n'existe généralement pas au sens naïf. Nous notons Γ (resp Γ^+) l'adhérence de $\mathfrak{D}_{f\|E}$ (resp $\mathfrak{D}^0_{f\|E}$) et supposerons ici, pour la commodité de la présentation, que les conditions suivantes sont vérifiées : $u = Au = 0$, A est markovien sur E, Γ sépare les points de F.

La première condition est anodine (cf le début de IV). La seconde, souvent vérifiée quand on s'intéresse aux frontières, permet avec la première de remplacer la considération du maximum de $(u-v)^+$, pour $v \in \Gamma$ ne majorant pas u, par celle du minimum de v pour $v \in \Gamma^+$ (cf IV-**10**). La troisième, elle aussi souvent vérifiée quand on s'intéresse aux frontières, implique que le "préordre du balayage" est un ordre.

On montrera que la *frontière minimale* $\partial_c E$ de E (pour $u = 0$) définie par

$$(\gamma) \qquad x \in \partial_c E \iff \forall y \in F \ x \neq y \Rightarrow \exists v \in \Gamma^+ \ v(x) = 0 \text{ et } v(y) > 0$$

est toujours un Γ-porteur, et que, si ∂E est un fermé Γ-porteur, on a $\partial_c E \subseteq \partial E$ si est vérifiée la condition (β) suivante

Si pour $i = 1, 2$, $K_i \subseteq F$ compact, $v_i \in \Gamma^+$ et $x \in F$ on a $v_i(x) = 0$ et $v_i > 0$ sur K_i, alors il existe $v \in \Gamma^+$ vérifiant $v(x) = 0$ et $v > 0$ sur $K_1 \cup K_2$.

qui écarte un certain nombre de situations pathologiques (comme celle décrite à la fin du §II), et en particulier assure l'existence d'un plus petit fermé Γ-porteur.

Si, Γ étant un cône convexe infstable et constable, on prend $A{=}I{-}R_\Gamma$, $u{=}f{=}0$ et $E{=}F$, alors (γ) est une des définitions possibles de la frontière de Choquet de Γ tandis que (β) est toujours vérifiée ($v{=}v_1{+}v_2$ convient).

La condition (β) permet de renforcer (γ) en

$$x \in \partial_c E \iff \forall K \subseteq F \text{ compact } x \notin K \Rightarrow \exists v \in \Gamma^+ \; v(x) = 0 \text{ et } v > 0 \text{ sur } K,$$

ce qui nous permettra d'établir un lien entre la frontière minimale et les barrières à la Poincaré-Lebesgue.

Cependant, la part la plus intéressante de la théorie de Choquet, la représentation intégrale, est perdue en non linéaire (tout au moins nous ne chercherons pas à y remédier ici).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECKENBACH E.F., BELLMAN R. : Inequalities. Springer 1961

[2] BÉNILAN P. : Opérateurs différentiels linéaires, chapitre V du tome I du "Dautray-Lions", Analyse mathématique et calcul numérique etc., Masson 1984

[3] DELLACHERIE C. : Théorie des processus de production. Sém. Proba. XXIV, L.N.1426, 52-104, Springer 1990

[4] DELLACHERIE C. : Une version non linéaire du théorème de Hunt. Proceedings of the International Conference on Potential Theory, Nagoya 1990, 25-32, de Gruyter 1992

[5] DELLACHERIE C. : Théorie non linéaire du potentiel : un principe unifié de domination et du maximum, et quelques applications. Sém. Proba. XXV, L.N.1485, 1-9, Springer 1991

[6] LOJASIEWICZ S. : An Introduction to the Theory of Real Functions. Wiley 1988

[7] MOKOBODZKI G. : Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs. Sém. Proba. IV, L.N.124, 195-207, Springer 1970

[8] PROTTER M.H., WEINBERGER H.F. : Maximum Principles in Differential Equations. Springer 1984

[9] SAKS S. : Theory of the Integral. Hafner 1937

URA 1378, site Colbert
Université de Rouen
76821 Mont Saint Aignan Cedex