

Astérisque

JEAN-PIERRE OTAL

**Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés
fibrées de dimension 3**

Astérisque, tome 235 (1996)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__235__R1_0

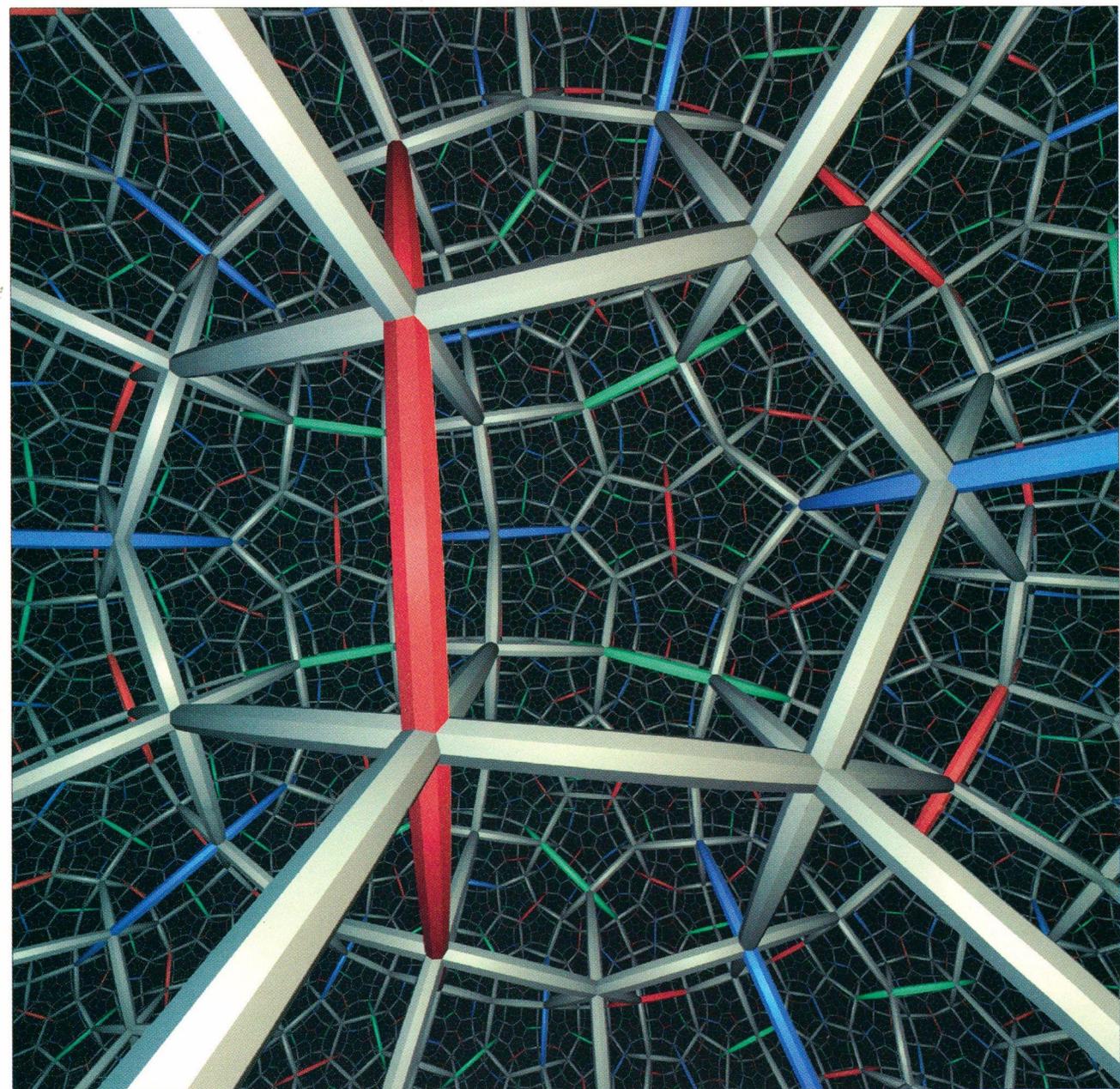
© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>



“Le pavage de l’espace hyperbolique par des dodécaèdres réguliers à angles droits”

“Copyright by The Geometry Center, University of Minnesota. Used with permission.”

235

ASTÉRIQUE

1996

**LE THÉORÈME D'HYPERBOLISATION
POUR LES VARIÉTÉS FIBRÉES
DE DIMENSION 3**

Jean-Pierre OTAL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

INTRODUCTION

Le but de ce livre est de donner une démonstration complète du théorème d’hyperbolisation de Thurston pour les variétés de dimension 3 qui sont fibrées en surfaces. Dans cette introduction, nous allons d’abord situer ce théorème par rapport au théorème d’hyperbolisation dans sa généralité [Thu3]. Ensuite, nous décrirons les étapes principales de la démonstration que nous proposons pour le cas fibré.

Il existe actuellement deux références pour le cas fibré : un exposé de D. Sullivan au séminaire Bourbaki [Su1], et un article non publié de W. Thurston [Thu5]. Dans ce livre, nous suivrons le plan de la démonstration que Thurston propose, mais l’étape essentielle — “le théorème de la limite double” — sera abordée d’une manière nouvelle.

Dans la suite, les variétés seront (sauf indication contraire) toutes orientables et différentiables.

Le théorème d’hyperbolisation de Thurston donne une condition *suffisante* sur la topologie d’une variété compacte de dimension trois pour que son intérieur soit une *variété hyperbolique*, c’est-à-dire, admette une métrique riemannienne complète de courbure constante égale à -1 .

Théorème d’hyperbolisation (cf. [Thu3]). — *Soit M une variété compacte de dimension trois. Si M est irréductible, atoroïdale et suffisamment grande, alors l’intérieur de M est une variété hyperbolique.*

On dit qu’une variété M de dimension trois est *irréductible* si tout plongement $S^2 \rightarrow M$ de la sphère $S^2 = \partial B^3$ se prolonge en un plongement de la boule B^3 .

Une variété de dimension trois M est *atoroïdale* lorsque tout sous-groupe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ du groupe fondamental de M est conjugué à un sous-groupe contenu dans le groupe fondamental d’une composante du bord de M .

Une variété irréductible de dimension trois M est *suffisamment grande* si elle contient une surface *incompressible*, c'est-à-dire une surface orientable S , proprement plongée dans M , de caractéristique d'Euler négative ou nulle, et telle que :

- (i) le groupe fondamental de S s'injecte dans celui de M ;
- (ii) S ne peut pas être déformée dans ∂M .

Par exemple, lorsque M est irréductible et atoroidale, elle est suffisamment grande lorsqu'elle contient une surface de caractéristique d'Euler négative dont le groupe fondamental s'injecte dans celui de M .

L'hypothèse *irréductible* est nécessaire pour que l'intérieur de M porte une métrique hyperbolique. En effet, si l'intérieur de M porte une métrique hyperbolique complète, son revêtement universel est difféomorphe à \mathbb{R}^3 : tout plongement de la sphère dans M se relève en un plongement de la sphère dans \mathbb{R}^3 , lequel se prolonge en un plongement de la boule d'après le théorème d'Alexander. Puisque l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$ sur son revêtement universel est sans point fixe, ce plongement de la boule dans \mathbb{R}^3 se projette en un plongement de la boule dans M .

L'hypothèse *atoroïdale* est, elle aussi, nécessaire : c'est une conséquence immédiate du célèbre lemme de Margoulis qui, appliqué dans ce contexte, classe les sous-groupes abéliens d'un réseau dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (cf. chapitre 1).

Par contre, l'hypothèse *suffisamment grande* n'est pas du tout nécessaire pour que l'intérieur de M soit hyperbolique ; conjecturellement on peut la remplacer par l'hypothèse (nécessaire) que le groupe fondamental de M est infini.

Toutefois, l'hypothèse *suffisamment grande* reste fondamentale pour la démonstration, comme bien souvent en topologie de dimension trois (cf. [Wa]). En effet, lorsqu'on découpe M le long d'une surface orientable et connexe S , on obtient une variété N de dimension trois qui est plus simple en un certain sens. Le bord de N contient deux copies de S ; supposons que l'on sache munir l'intérieur de N d'une structure hyperbolique : W. Thurston a alors observé vers 1977 que le problème du recollement de cette structure hyperbolique sur N en une structure sur M se ramène, dans beaucoup de cas, à un problème de point fixe dans l'espace de Teichmüller de S pour une certaine application, l'*application d'épluchage*.

Théorème de point fixe pour l'application d'épluchage (cf. [Thu3], [McM1]). — *Supposons que la variété N n'est pas difféomorphe à un fibré en intervalles sur une surface compacte ; alors, l'application d'épluchage a un point fixe si et seulement si M est atoroidale.*

Ce théorème très difficile représente le coeur de la démonstration du théorème d'hyperbolisation, lorsque N n'est pas un fibré en intervalles. Il a été démontré par W. Thurston en 1977. En suivant une approche complètement

différente, plus proche de la théorie de Teichmüller classique, Curt McMullen l'a redémontré en 1988 ([McM1]; voir aussi [OP]).

Ce théorème de point fixe ne suffit pas pour démontrer le théorème d'hyperbolisation dans le cas général, car il ne s'applique pas lorsque N est un fibré en intervalles; dans ce cas d'ailleurs l'application d'épluchage n'a pas de point fixe.

Toutefois, Thurston a conjecturé déjà dans les années 1970 qu'une variété M^3 irréductible et atoroidale qui est fibrée en surfaces admet toujours un revêtement fini \widehat{M} contenant une surface incompressible dont le complément n'est pas fibré en intervalles. Si c'est bien le cas, on sait hyperboliser \widehat{M} et ensuite M (cf. [Ka]).

L'existence d'une structure hyperbolique complète dans l'intérieur d'une variété fibrée sur le cercle peut paraître paradoxale. Pour l'apprécier, soit M une variété hyperbolique fibrée sur le cercle avec pour fibre une surface compacte S . Considérons une composante quelconque \widetilde{S} de la préimage de la surface S dans le revêtement universel \mathbb{H}^3 de M .

(a) \widetilde{S} est une surface proprement plongée et difféomorphe au plan : en effet, c'est le revêtement universel de S .

(b) L'adhérence de \widetilde{S} dans le disque fermé $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ contient toute la sphère à l'infini $\partial\mathbb{H}^3 = \overline{\mathbb{C}}$: cela découle du seul fait que le groupe fondamental $\pi_1(S)$ est un sous-groupe distingué et non trivial de $\pi_1(M)$. Ainsi le plongement de \widetilde{S} dans \mathbb{H}^3 est très loin d'être totalement géodésique.

(c) La métrique riemannienne induite sur \widetilde{S} est pourtant quasi-isométrique à celle du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . En effet, la surface S est difféomorphe à une surface hyperbolique d'après le théorème d'uniformisation; puisque S est compacte, son revêtement universel est donc quasi-isométrique à \mathbb{H}^2 .

(d) Il existe une translation hyperbolique t dans \mathbb{H}^3 telle que $t^n(\widetilde{S})$ est disjointe de \widetilde{S} pour tout entier $n \neq 0$: tout t dans $\pi_1(M) - \pi_1(S)$ convient.

On se rend compte qu'il n'est pas facile de trouver un plongement d'une surface \widetilde{S} dans \mathbb{H}^3 qui réunit les propriétés (a)–(d). Le folklore du sujet veut, en fait, qu'ayant constaté ces propriétés apparemment contradictoires, Thurston ait initialement douté de sa conjecture d'hyperbolisation. Mais des exemples émergeaient clairement juste à cet époque.

R. Riley avait montré que le complémentaire dans S^3 d'un voisinage régulier ouvert du noeud de 8 est une variété hyperbolique ([Ri] 1975; cf. chapitre 9); le réseau du groupe des isométries de \mathbb{H}^3 qui lui correspond est d'indice 2 dans un réseau signalé en 1912 par Gieseking, mais largement oublié entretemps (cf. [Gi], [Mi]). En 1975, on savait aussi depuis longtemps que le complémentaire du noeud de 8 est une variété fibrée sur le cercle (par exemple, parce que c'est un noeud alterné qui vérifie le critère de Murasugi, voir [Sta], [Go]). Mais c'est vraisemblablement dans le travail de T. Jorgensen [Jor] publié en 1977 que ces deux points de vue apparurent simultanément

pour la première fois : dans cet article Jorgensen étudie des déformations de la structure hyperbolique du complémentaire du noeud de 8 en utilisant la fibration sur le cercle de son complémentaire. Peu après ces exemples de Jorgensen, Thurston annonçait le théorème d’hyperbolisation sous les hypothèses générales.

Nous allons maintenant décrire les étapes de la démonstration du théorème d’hyperbolisation lorsque la variété M s’obtient par recollement d’un fibré en intervalles N . (Nous reprenons ici les notations introduites avant le théorème de point fixe pour l’application d’épuchage.)

Deux cas se produisent selon que N a une ou deux composantes connexes. Dans le premier cas, la variété M est fibrée sur le cercle. Dans le deuxième cas, M est un “orbifold-fibré” sur l’orbifold $S^1/\{z = \bar{z}\}$ (cf. [Thu1]); toutefois, ce deuxième cas se ramène au premier par un argument de revêtement double et nous le signalons ici pour justifier le titre de ce livre. L’argument, élémentaire, sera donné dans le chapitre 6.

De même, il est possible d’étendre le théorème d’hyperbolisation aux variétés non orientables en s’appuyant sur le revêtement double d’orientation.

Restreignons-nous donc, pour toute la suite de cet introduction, au cas où M est une variété (orientée) fibrée sur le cercle ayant pour fibre une surface compacte S . La variété M est alors décrite par la classe d’isotopie de sa monodromie, qui est un difféomorphisme de S préservant l’orientation.

Dans [Thu2], W. Thurston a classé les difféomorphismes d’une surface compacte en trois familles selon leur comportement dynamique (à isotopie près) : périodiques, réductibles et pseudo-Anosov. Cette classification sera rappelée dans le chapitre 1; elle est complètement exposée dans le livre “Travaux de Thurston sur les surfaces” [FLP]. Lorsque la surface S est fermée, elle se trouve aussi dans “Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston” [CB].

Dans ce cadre, le théorème d’hyperbolisation s’énonce de la façon suivante.

Théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées sur le cercle. — Soit M_ϕ une variété fibrée sur le cercle dont la monodromie est un difféomorphisme pseudo-Anosov ϕ . Alors, l’intérieur de M_ϕ porte une métrique hyperbolique complète de volume fini.

Le problème de la construction d’une métrique hyperbolique sur la variété M_ϕ se ramène à celui de trouver une représentation ρ , fidèle et discrète du groupe fondamental $\pi_1(M_\phi)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, le groupe des isométries préservant l’orientation de \mathbb{H}^3 . En effet, la variété quotient $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(M_\phi))$ est alors une variété irréductible de dimension trois qui a le type d’homotopie de M_ϕ . Ensuite, des résultats topologiques (principalement le théorème de fibration de Stallings) entraînent que ces deux variétés sont difféomorphes (voir chapitre 6).

Si ϕ_* désigne l'action du difféomorphisme ϕ sur le groupe fondamental de la surface S , le théorème de Van Kampen nous dit que le groupe fondamental de M_ϕ admet la présentation suivante :

$$\langle \pi_1(S), t \mid \forall \gamma \in \pi_1(S), t\gamma t^{-1} = \phi_*(\gamma) \rangle .$$

Donc, la donnée d'une représentation du groupe $\pi_1(M_\phi)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ équivaut à celle d'une représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ telle que les deux représentations ρ et $\rho \circ \phi_*$ soient conjuguées par un élément a de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; alors, la représentation du produit libre $\pi_1(S) * \langle t \rangle$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ qui coïncide avec ρ sur $\pi_1(S)$ et qui vaut a sur le générateur du groupe cyclique $\mathcal{T}(S)$, se projette en une représentation de $\pi_1(M_\phi)$.

Lorsqu'une représentation ρ avec cette propriété est fidèle et discrète, il n'est pas difficile de montrer que la représentation de $\pi_1(M_\phi)$ l'est aussi (voir chapitre 6).

Une telle représentation ρ conjuguée à $\rho \circ \phi_*$ ne peut pas appartenir à $\mathcal{T}(S)$, l'espace de Teichmüller de S — qui s'identifie à l'espace des *représentations fuchsienues* de $\pi_1(S)$ — ni à l'espace $\mathcal{QF}(S)$ des *représentations quasi-fuchsienues* de $\pi_1(S)$. En effet, ϕ_* serait alors d'ordre fini modulo les automorphismes intérieurs.

Toutefois, par un procédé d'itération, Thurston trouve la représentation ρ dans l'adhérence de $\mathcal{QF}(S)$ dans l'espace $\mathcal{R}(S)$ de toutes les classes de conjugaison de représentations de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

La théorie d'Ahlfors-Bers permet de paramétrer l'espace $\mathcal{QF}(S)$ comme le produit de deux copies de l'espace de Teichmüller. Fixons un point $\sigma \in \mathcal{T}(S)$ et notons ϕ^* l'action du difféomorphisme ϕ sur $\mathcal{T}(S)$. Considérons alors la suite (ρ_i) dans $\mathcal{QF}(S)$ de coordonnées (σ_i, σ_{-i}) , où $\sigma_i = (\phi^*)^i(\sigma)$, dans le paramétrage d'Ahlfors-Bers.

Le théorème suivant joue un rôle analogue à celui du “théorème de point fixe pour l'application d'épluchage” dans le cas non fibré.

Théorème. — *La suite (ρ_i) est bornée dans $\mathcal{R}(S)$.*

Ce théorème est un cas particulier du “théorème de la limite double” qui sera démontré dans le chapitre 5. La démonstration que nous en donnerons est la partie la plus originale de ce livre. Elle exploite surtout les “arbres réels” introduits par J. Morgan et P. Shalen [MS1]; elle est ainsi complètement différente de la preuve proposée par Thurston, qui utilise la théorie des “surfaces plissées”.

Récemment, Curt McMullen en a donné une autre démonstration [McM2] qui utilise certains des résultats de [Thu1, §9].

En raisonnant par l'absurde, on suppose que la suite de représentations (ρ_i) va à l'infini dans $\mathcal{R}(S)$.

J. Morgan et P. Shalen ont montré comment associer à une telle suite de représentations qui “dégénère”, une action isométrique de $\pi_1(S)$ sur un arbre réel \mathcal{T} [MS1]. Par la suite M. Bestvina et F. Paulin ont donné un nouveau point de vue, plus géométrique, sur cette théorie [Bes], [Pa]. Cette propriété des espaces de représentations sera entièrement démontrée dans le chapitre 2.

Une isométrie g d’un arbre réel \mathcal{T} a une “distance de translation” $\delta(g)$, de même qu’une transformation hyperbolique ou elliptique de l’espace hyperbolique. La propriété fondamentale de l’arbre \mathcal{T} est de traduire géométriquement la “croissance” des longueurs des géodésiques dans une classe de conjugaison de $\pi_1(S)$ donnée. Par définition, si la suite (ρ_i) tend vers l’arbre \mathcal{T} , il existe une suite de réels positifs (ε_i) qui tend vers 0, telle que, pour tout élément g du groupe fondamental $\pi_1(S)$, la suite $(\varepsilon_i \ell_i(g))$ tend vers la distance de translation $\delta(g)$, où $\ell_i(g)$ désigne la distance de translation de $\rho_i(g)$ dans \mathbb{H}^3 (c’est-à-dire la longueur de la géodésique librement homotope à g dans la variété $\mathbb{H}^3/\rho_i(\pi_1(S))$). En particulier, si la distance de translation $\delta(g)$ n’est pas nulle, la suite $(\ell_i(g))$ tend vers l’infini.

Le problème que nous posons alors est de trouver une condition sur une famille d’éléments de $\pi_1(S)$ qui garantisse que la suite $(\ell_i(g))$ tende vers l’infini d’une manière uniforme pour les éléments de cette famille.

Dans ce but, nous introduisons pour une lamination géodésique sur une surface S la notion de “réalisation dans un arbre réel” (chapitre 3). Cette notion satisfait une “propriété de continuité” lors de la convergence d’une suite de représentations vers un arbre réel, au nom de principes généraux sur les variétés à courbure négative; en particulier, nous montrerons au chapitre 4 que si une lamination géodésique λ est réalisée dans l’arbre \mathcal{T} , la longueur des géodésiques dans une classe d’homotopie donnée tend vers l’infini *uniformément* pour toutes les classes d’homotopie “voisines” de λ .

Cette propriété de continuité s’applique aux arbres réels qui apparaissent comme des “limites” de représentations discrètes et fidèles de $\mathcal{R}(S)$. En effet, un tel arbre peut être décrit en termes géométriques: il est isomorphe à l’arbre dual \mathcal{T}_λ d’une lamination géodésique λ sur S . C’est un théorème de R. Skora [Sk] connu depuis 1989; ce théorème non publié sera démontré en détail dans le chapitre 8, d’une part pour rendre l’exposé “autonome”, mais aussi parce que le résultat de [MO] qui est utilisé dans la démonstration n’apparaît pas tel quel dans [MO].

Or, on peut décrire exactement quelles laminations géodésiques sont réalisées dans l’arbre \mathcal{T}_λ , dual d’une lamination géodésique λ (chapitre 3). Par exemple, au moins l’une des deux laminations invariantes d’un pseudo-Anosov (la stable ou l’instable) est réalisée: donc la longueur des courbes voisines de cette lamination tend uniformément vers l’infini.

Une estimation de longueur élémentaire permet ensuite d’aboutir à une contradiction et donc de démontrer le “théorème de la limite double” (chapitre 5).

Donc, en réalité, la suite (ρ_i) contient une sous-suite qui converge vers une représentation ρ_∞ ; comme conséquence de la construction, nous verrons qu'il existe un homéomorphisme *quasi-conforme* Ψ qui conjugue sur \mathbb{C} les actions ρ_∞ et $\rho_\infty \circ \phi_*$ de $\pi_1(S)$. Il nous suffit donc de montrer que Ψ est en fait une transformation conforme. Nous le ferons dans le chapitre 6 en utilisant un théorème de Sullivan [Su3] qui sera démontré dans le chapitre 7.

Dans le chapitre 9, nous donnerons deux exemples de variétés hyperboliques de volume fini fibrées sur le cercle. Le premier, dû à H. Gieseking, est une variété non orientable, construite à partir du tétraèdre idéal régulier dans \mathbb{H}^3 [Gi]: nous explicitons pour cette variété une fibration sur le cercle qui nous a été expliquée par Christine Lescop. Le deuxième exemple est dû à Thurston; il s'obtient à partir du dodécaèdre hyperbolique régulier à angles droits.

Dans l'appendice, nous démontrerons les propriétés des laminations géodésiques qui ont été utilisées dans les chapitres précédents.

La notion d'être "réalisée" pour une lamination géodésique s'étend aux actions de groupes *hyperboliques* (au sens de Gromov) sur les arbres réels et fut motivée par une conjecture de Thurston qui vise à généraliser le théorème de la limite double aux groupes libres; dans [O], on donne une réponse partielle à cette conjecture qui a motivé ce travail.

Je remercie Peter Shalen qui m'a encouragé à rédiger la démonstration du théorème de la limite double donnée dans ce livre. Pour de nombreuses discussions à plusieurs moments pendant son élaboration, je remercie aussi Abdelghani Zeghib, Alexis Marin, Bruno Sevennec, Christine Lescop, Damien Gaboriau, Etienne Ghys, Francis Bonahon, Frédéric Paulin (en particulier pour les figures), Laurent Siebenmann et Michel Boileau.

L'image en couleur qui illumine la page de garde fut créée par Charlie Gunn; elle représente le beau pavage de l'espace hyperbolique par des dodécaèdres à angles droits (cf. chapitre 9) découvert par Schlegel vers 1883 [Schl]. Je suis très reconnaissant à Charlie Gunn de m'avoir transmis cette image, extraite de la vidéo "Not Knot" [GM]. Je remercie aussi Gérard Lasseur qui m'a aidé à exploiter ce fichier volumineux.

Jean-Pierre Otal

CNRS-UMR 128, UMPA, ENS LYON
46, Allée. d'Italie
69364 Lyon, cedex 07, France
Internet : jpotal@umpa.ens-lyon.fr

SOMMAIRE

Chapitre 1. Espaces de Teichmüller et groupes kleinien

1.1. L'espace hyperbolique	1
1.2. Les homéomorphismes quasi-conformes	8
1.3. L'espace de Teichmüller ; l'espace des groupes quasi-fuchsien	11
1.4. La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller	16
1.5. La classification des éléments de $\text{Mod}(S)$	18

Chapitre 2. Dégénérescences de structures hyperboliques et arbres réels

2.1. Arbres réels	21
2.2. Dégénérescences d'actions sur l'espace hyperbolique et arbres réels	27
2.3. Actions à petits stabilisateurs des groupes de surface sur les arbres réels	36

Chapitre 3. Laminations géodésiques et arbres réels

3.1. Réalisation d'une lamination géodésique dans un arbre réel	41
3.2. Démonstration du théorème 3.1.4	47

Chapitre 4. Laminations géodésiques et convergence de Gromov

4.1. Réalisation d'un réseau ferroviaire dans un arbre réel	52
4.2. Fin de la démonstration du théorème 4.0.1	60
4.3. Démonstration du lemme 4.2.2	62

Chapitre 5. Le théorème de la limite double	
5.1. Le lemme d'Ahlfors	68
5.2. Un critère de convergence dans l'espace des groupes quasi-fuchsien	71
Chapitre 6. Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées	
6.1. Construction d'une représentation du sous-groupe $\pi_1(S)$	74
6.2. Etude de l'ensemble limite de la représentation ρ_∞	76
6.3. Construction d'une représentation du groupe $\pi_1(M_\phi)$	86
6.4. Démonstration du théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées	89
Chapitre 7. Le théorème de Sullivan	
7.1. La décomposition de l'action d'un groupe en partie conservative et partie dissipative	94
7.2. L'action d'un groupe kleinien sur un ensemble conservatif	97
7.3. Démonstration du théorème de Sullivan	102
Chapitre 8. Actions des groupes de surface sur les arbres réels	
8.1. Construction d'une application transverse	105
8.2. Construction d'un arbre dual	115
8.3. Construction d'une lamination géodésique mesurée	121
8.4. Démonstration du théorème 8.1.1	123
Chapitre 9. Deux exemples de variétés hyperboliques fibrées sur le cercle	
9.1. La variété de Gieseking	131
9.2. Le dodécaèdre à angles droits	134
Appendice. Les laminations géodésiques	
A.1. Les laminations géodésiques	137
A.2. La géométrie du complémentaire d'une lamination géodésique	142
A.3. Les laminations géodésiques mesurées	144
Bibliographie	153
Index	157

CHAPITRE 1

Espaces de Teichmüller et groupes kleinien

Ce chapitre contient essentiellement des rappels. La première section porte sur les résultats généraux de la géométrie hyperbolique et de la théorie des groupes kleinien que nous utiliserons dans la suite du livre. Dans la section suivante, nous donnons les résultats sur les homéomorphismes quasi-conformes, nécessaires pour introduire l'espace de Teichmüller et les groupes quasi-fuchsien (section 1.3). Dans la section 1.4, nous décrivons la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller par l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées. Dans la dernière section, nous rappelons comment Thurston en déduit la classification à isotopie près des difféomorphismes d'une surface compacte.

1.1 L'espace hyperbolique

Nous renvoyons le lecteur aux traités [Bea], [BP], [Mas] et [OP] pour une exposition plus détaillée des résultats de cette section.

Pour $n \geq 2$, on utilisera le *modèle supérieur* pour décrire l'*espace hyperbolique* de dimension n , c'est-à-dire le demi-espace supérieur

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_n > 0\},$$

muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

C'est une métrique complète de courbure sectionnelle constante égale à -1 . Ses géodésiques sont les droites et les demi-cercles orthogonaux à l'hyperplan $x_n = 0$.

Le bord de l'espace hyperbolique, noté $\partial\mathbb{H}^n$, est la sphère

$$\overline{\mathbb{R}^{n-1}} = \{x_n = 0\} \cup \{\infty\}.$$

On peut aussi définir ce bord de façon intrinsèque comme le quotient de l'espace des géodésiques de \mathbb{H}^n par la relation d'équivalence qui identifie deux géodésiques "asymptotes".

On utilisera aussi le *modèle de Riemann* :

$$\mathbb{D}^n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \sum \xi_i^2 < 1\},$$

muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{4(d\xi_1^2 + \dots + d\xi_n^2)}{(1 - \sum \xi_i^2)^2}.$$

Toute isométrie de \mathbb{H}^n qui préserve l'orientation se prolonge continûment au bord $\partial\mathbb{H}^n$ en une transformation conforme. Le groupe des isométries de \mathbb{H}^n qui préservent l'orientation est isomorphe au groupe de Möbius de dimension $n - 1$; on le note $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Pour $n = 2$ ou 3 , $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ s'identifie ainsi à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ou à $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Dans le modèle supérieur, la métrique hyperbolique se restreint aux hyperplans $x_n = c$ en une métrique plate. L'image d'un tel hyperplan par une isométrie g de \mathbb{H}^n sera appelée une *horosphère* centrée au point $g(\infty)$; l'image du demi-espace $x_n \geq c$ par une isométrie sera appelée une *horoboule*.

Une isométrie g de \mathbb{H}^n qui préserve l'orientation, autre que l'identité, est de l'un des trois types suivants : *elliptique*, lorsqu'elle fixe un point de \mathbb{H}^n , *parabolique*, lorsqu'elle fixe un unique point de $\partial\mathbb{H}^n$, et *hyperbolique*, lorsqu'elle fixe une paire de points distincts de $\partial\mathbb{H}^n$. Dans ce dernier cas, elle laisse aussi invariante la géodésique entre ces deux points, sur laquelle elle agit par translation de longueur $\delta(g)$.

Pour une isométrie parabolique ou elliptique, nous définirons la *distance de translation* d'une isométrie de \mathbb{H}^n par : $\delta(g) = 0$.

Lorsque $n = 2$ ou 3 , l'isométrie g est l'image dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ou $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ d'une matrice \tilde{g} de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. Les isométries hyperboliques sont exactement les images des matrices dont la trace a un module strictement supérieur à 2 : alors si la trace $\text{tr}(\tilde{g})$ s'écrit $\text{tr}(\tilde{g}) = \lambda + 1/\lambda$ avec $|\lambda| > 1$, la distance de translation de g vaut $\delta(g) = 2 \log |\lambda|$. Lorsque $\text{tr}(\tilde{g}) = \pm 2$, g est parabolique; dans les autres cas, g est elliptique.

Définition. — Un *groupe kleinien* est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, de type fini, discret et sans torsion.

Un groupe kleinien ne contient pas d'éléments elliptiques. En effet, les isométries de \mathbb{H}^n qui fixent un point forment un groupe isomorphe au groupe orthogonal $O(n)$; donc un élément elliptique dans un groupe kleinien G aurait des puissances arbitrairement proches de l'identité, ce qui contredirait ou bien que G est sans torsion, ou bien que G est discret. Donc, tout élément d'un groupe kleinien autre que l'identité est soit parabolique, soit hyperbolique.

Un groupe kleinien $G \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agit librement et de façon discontinue sur \mathbb{H}^n (cf. [OP], [Su2]). On peut donc former l'espace quotient $M(G) = \mathbb{H}^n/G$: c'est une *variété hyperbolique*, c'est-à-dire une variété riemannienne complète de courbure sectionnelle constante -1 .

Le lemme de Margoulis.

Le lemme de Margoulis est fondamental pour la compréhension des groupes kleinien.

Définition. — Un groupe est dit *élémentaire* (ou *virtuellement abélien*) lorsqu'il contient un sous-groupe abélien d'indice fini.

Fait 1.1.1. — Soient $g \neq \text{Id}$ et $h \neq \text{Id}$ deux éléments autres que l'identité du groupe des isométries de \mathbb{H}^n , qui engendrent un groupe kleinien $\langle g, h \rangle$. Alors,

- (i) le groupe $\langle g, h \rangle$ est élémentaire si et seulement si g et h ont les mêmes ensembles de points fixes;
- (ii) si les ensembles de points fixes de g et de h s'intersectent, ils coïncident;
- (iii) si le groupe $\langle g, h \rangle$ n'est pas élémentaire, il contient un groupe libre à deux générateurs dont tous les éléments autres que l'identité sont hyperboliques.

Démonstration. — Si g et h engendrent un groupe élémentaire, ils ont des puissances non nulles qui commutent. Comme un élément d'un groupe kleinien a les mêmes points fixes que ses puissances non nulles, on en déduit qu'une puissance non nulle de h fixe $\text{Fix}(g)$, l'ensemble des points fixes de g , et qu'une puissance non nulle de g fixe $\text{Fix}(h)$; ceci n'est possible que si g et h ont *exactement* les mêmes points fixes.

Réciproquement si g et h sont deux éléments hyperboliques qui ont les mêmes points fixes, ils laissent invariante la géodésique $A(g) \subset \mathbb{H}^n$ entre ces deux points et ils agissent par translation sur cette géodésique. Alors, l'homomorphisme $\delta : \langle g, h \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à un élément sa longueur de translation sur $A(g)$ est injectif. Donc le groupe $\langle g, h \rangle$ est cyclique.

Lorsque g et h sont deux éléments paraboliques qui ont leur point fixe commun, alors à conjugaison près, ce sont des transformations euclidiennes de \mathbb{R}^{n-1} ; dans ce cas, le fait 1.1.1 (i) découle du théorème de Bieberbach.

Pour montrer (ii), supposons que g est hyperbolique et que h est parabolique avec pour point fixe le point fixe attractif de g ; alors on voit facilement que la "partie translation" de l'isométrie euclidienne $g^{-i} \circ h \circ g^i$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. Donc le groupe $\langle g, h \rangle$ n'est pas discret.

La propriété (iii) découle d'un lemme de "ping-pong" qui remonte à F. Klein (cf. [LS]). □

Lemme de Margoulis 1.1.2 (cf. [OP], [Thu1]). — Pour tout n , il existe une constante $\varepsilon(n) > 0$, telle que, si $G \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ est un groupe kleinien, le

sous-groupe de G engendré par les éléments qui déplacent un point $x \in \mathbb{H}^n$ de moins que $\varepsilon(n)$ est élémentaire.

La constante $\varepsilon(n)$ produite par le lemme ci-dessus est appelée *la constante de Margoulis pour dimension n* .

Nous allons donner deux applications du lemme de Margoulis.

Soit $\mathcal{R}(G)$ l'ensemble des représentations de G dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. On munit $\mathcal{R}(G)$ de *la topologie algébrique* pour laquelle deux représentations sont proches lorsque leurs valeurs sur les éléments d'une famille génératrice fixée de G sont proches. Dans $\mathcal{R}(G)$, on peut définir le sous-ensemble $\mathcal{DF}(G)$ des représentations fidèles et (d'images) discrètes. On a alors :

Proposition 1.1.3 [Wi]. — *Soit $G \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un groupe kleinien non élémentaire. Alors, $\mathcal{DF}(G)$ est fermé dans $\mathcal{R}(G)$: la limite d'une suite de représentations discrètes et fidèles de G est une représentation discrète et fidèle.*

Démonstration. — Soit (ρ_i) une suite dans $\mathcal{DF}(G)$ qui converge vers une représentation ρ . Montrons d'abord que ρ est fidèle. Supposons, en raisonnant par l'absurde, que $g \neq \text{Id}$ est un élément de G tel que $\rho(g) = \text{Id}$; pour tout $h \neq \text{Id}$ dans G , on a donc $\rho([g, h]) = \text{Id}$. Alors, d'après le lemme de Margoulis, pour i suffisamment grand, $\rho_i(g)$ et $\rho_i([g, h])$ engendrent un groupe élémentaire. D'après le fait 1.1.1, $\rho_i(g)$ et $\rho_i([g, h])$ ont alors les mêmes ensembles de points fixes; de même pour $\rho_i(g^{-1}hg)$ et $\rho_i([g, h])$. Mais alors, $\rho_i(g)$ et $\rho_i(h)$ eux-mêmes ont les mêmes ensembles de points fixes; comme ceci a lieu pour tout $h \in G$, le groupe G est élémentaire, contrairement à l'hypothèse.

De même, pour montrer que ρ est discrète, soit $\{g_1, \dots, g_k\}$ un système de générateurs de G et soit $K \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un compact contenant, pour tout i , les éléments $\rho_i(g_j)$ pour $j = 1, \dots, k$. Soit $U \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un voisinage de l'identité tel que le commutateur entre tout élément de U et tout élément de K agisse sur \mathbb{H}^n en déplaçant l'origine d'une distance inférieure à $\varepsilon(n)$, la constante de Margoulis de dimension n ; supposons aussi que U est choisi suffisamment petit de sorte que tout élément de U translate l'origine de moins que $\varepsilon(n)$. Si ρ n'est pas discrète, il existe pour i suffisamment grand, un élément $h \in G - \{\text{Id}\}$ dont l'image $\rho_i(h)$ est dans U . Donc, d'après le lemme de Margoulis et le choix de U , la première partie du raisonnement entraîne que $\rho_i(h)$ et $\rho_i(g_j)$ ont les mêmes ensembles de points fixes. Ceci ayant lieu pour tout générateur g_j , le groupe G est élémentaire. \square

Le lemme de Margoulis permet aussi de décrire la géométrie de la *partie mince* d'une variété hyperbolique complète.

Définition. — Soit $\varepsilon > 0$ et soit $M(G) = \mathbb{H}^n/G$ une variété hyperbolique complète; la *partie ε -mince* de $M(G)$ est l'ensemble des points par lesquels il passe un lacet non homotope à 0 de longueur inférieure à ε .

De manière équivalente, la partie ε -mince est l'image dans $M(G)$ des points de \mathbb{H}^n qui sont translatés d'une distance inférieure à ε par un élément de $G - \{\text{Id}\}$. On la note $M(G)^{[0, \varepsilon]}$ et $M(G)^{[\varepsilon, \infty[}$ l'adhérence de son complémentaire; $M(G)^{[\varepsilon, \infty[}$ est appelée la *partie ε -épaisse* de $M(G)$.

Pour simplifier la description de $M(G)^{[0, \varepsilon]}$, nous supposons que $M(G)$ est une variété hyperbolique de dimension 3.

Quelle est la topologie de l'ensemble des points de \mathbb{H}^3 qui sont translatés d'une distance inférieure à ε par un élément $g \in G - \{\text{Id}\}$?

Si g est un élément hyperbolique, c'est un tube T de rayon constant autour de l'axe de g . Supposons que la constante ε est inférieure à la constante de Margoulis $\varepsilon(3)$. Si un élément $h \in G$ vérifie : $h(T) \cap T \neq \emptyset$, alors d'après le lemme de Margoulis, g et h engendrent un groupe élémentaire : donc h est dans le sous-groupe élémentaire maximal $\langle\langle g \rangle\rangle$ contenant g . D'après la démonstration du fait 1.1.1 (i), le groupe $\langle\langle g \rangle\rangle$ est cyclique. La réunion des tubes correspondant à tous les éléments de $\langle\langle g \rangle\rangle$ est un tube T_ε , voisinage de rayon constant de l'axe de g . La projection du revêtement $\mathbb{H}^3 \rightarrow M(G)$ restreinte à T_ε se factorise à travers un plongement du quotient de T_ε par le groupe $\langle\langle g \rangle\rangle$. L'image de T_ε dans $M(G)$ est donc difféomorphe à un tore solide.

Lorsque g est un élément parabolique, l'ensemble des points de \mathbb{H}^3 translatés d'une distance moindre que ε par g est une horoboule H . Le sous-groupe élémentaire maximal $\langle\langle g \rangle\rangle$ contenant g est un groupe parabolique, isomorphe soit à \mathbb{Z} soit à $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Notons H_ε l'ensemble des points translatés d'une distance inférieure à ε par un élément de $\langle\langle g \rangle\rangle$. Comme dans le cas précédent, la projection de revêtement restreinte à H_ε se factorise à travers un plongement du quotient de H_ε par $\langle\langle g \rangle\rangle$.

Si $\langle\langle g \rangle\rangle$ est un groupe cyclique, cette image est un cylindre difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty[$; si $\langle\langle g \rangle\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, le quotient est difféomorphe à $S^1 \times S^1 \times [0, \infty[$. On appellera un tel quotient un *cusp* et on dira que ce cusp est *de type \mathbb{Z}* , $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ selon la nature du sous-groupe parabolique en question. La réunion des cusps est appelée la *partie ε -cuspidale* de la variété $M(G)$.

L'ensemble limite et le domaine de discontinuité d'un groupe kleinien.

L'*ensemble limite* $L(G)$ d'un groupe kleinien G est l'adhérence dans $\partial\mathbb{H}^n$ de l'ensemble des points fixes des éléments de $G - \{\text{Id}\}$: c'est donc le plus petit fermé de $\partial\mathbb{H}^n$ non vide, invariant par G . Le *domaine de discontinuité* $\Omega(G)$ est le complémentaire dans $\partial\mathbb{H}^n$ de $L(G)$.

D'après le fait 1.1.1, l'ensemble limite de G a un cardinal égal à 1 ou 2 si et seulement si G est élémentaire; dans les autres cas, le fait 1.1.1 (iii) entraîne que c'est un fermé sans points isolés. Puisqu'un élément de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) - \{\text{Id}\}$ a les mêmes points fixes que ses puissances non nulles, il découle de la définition même que l'ensemble limite d'un groupe G est le même que celui de chacun de ses sous-groupes d'indice fini.

Pour le moment, on a associé au groupe kleinien G la variété hyperbolique complète $M(G) = \mathbb{H}^n/G$. Lorsque le domaine de discontinuité $\Omega(G)$ n'est pas vide, on peut aussi lui associer une variété à bord. Pour cela, notons $C(G)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble limite $L(G)$ dans $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$. L'intersection de cette enveloppe convexe avec \mathbb{H}^n est vide si et seulement si $L(G)$ est réduit à un seul point : nous supposons dans la suite que ce n'est pas le cas, ce qui se passe par exemple lorsque G n'est pas élémentaire.

L'application $r : \mathbb{H}^n \rightarrow C(G)$ qui associe au point $p \in \mathbb{H}^n$, le point $r(p) \in C(G)$ le plus proche de p se prolonge continûment à la réunion $\mathbb{H}^n \cup \Omega(G)$; l'application r est *naturelle*, c'est-à-dire qu'elle commute avec l'action de G . Puisque l'action de G sur \mathbb{H}^n est discontinue, il en est de même pour l'action de G sur $C(G)$. Comme la rétraction r est naturelle et continue, on en déduit que l'action de G sur la réunion $\mathbb{H}^n \cup \Omega(G)$ est discontinue. Ainsi, lorsque $\Omega(G)$ n'est pas vide, on peut considérer la variété à bord $\overline{M(G)} = (\mathbb{H}^n \cup \Omega(G))/G$. Le quotient $C(G)/G$ est une variété topologique appelée le *coeur de Nielsen* de $M(G)$; ce n'est pas nécessairement une variété de dimension n . On la remplacera souvent par son δ -voisinage $C_\delta(G)$ ($\delta > 0$ étant fixé), c'est-à-dire par l'ensemble des points de \mathbb{H}^n à distance inférieure à δ de $C(G)$. On vérifie facilement que, pour tout $\delta > 0$, $C_\delta(G)$ est une variété à bord de classe C^1 , de dimension n , et que son bord est strictement convexe. Il existe une rétraction naturelle $r_\delta : (\mathbb{H}^n \cup \Omega(G)) \rightarrow C_\delta(G)$ qui est définie de la même manière que la rétraction r .

Ainsi, lorsque le domaine de discontinuité de G n'est pas vide, on peut aussi associer au groupe kleinien G le quotient $N_\delta(G) = C_\delta(G)/G$: c'est une variété à bord convexe, de classe C^1 , contenue dans $M(G)$ et qui porte une métrique hyperbolique dans son intérieur. A cause de la convexité du bord de $C_\delta(G)$, la variété $N_\delta(G)$ contient toutes les géodésiques fermées de $M(G)$. Pour la même raison, les fibres de la rétraction r_δ sont des demi-droites; on en déduit que l'adhérence du complémentaire de $N_\delta(G)$ dans $M(G)$ est difféomorphe au produit $\partial N_\delta(G) \times [0, \infty[$. En particulier, les variétés $N_\delta(G)$ et $\overline{M(G)}$ sont difféomorphes.

Le théorème de finitude d'Ahlfors.

Soit $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ un groupe kleinien dont le domaine de discontinuité $\Omega(G) \subset \overline{\mathbb{C}}$ n'est pas vide. L'action de G sur $\Omega(G)$ est conforme, propre et discontinue : le quotient $\Omega(G)/G$ est donc une surface de Riemann.

Définition. — Une surface de Riemann de type fini est *hyperbolique*, lorsque chacune de ses composantes connexes a une caractéristique d'Euler strictement négative. Une surface de Riemann est dite *de type fini* si elle est conformétement équivalente au complémentaire d'un nombre fini de points dans une surface de Riemann compacte; ces points sont appelés les *pointes*.

D'après le théorème d'uniformisation de Riemann, une surface de Riemann connexe est hyperbolique dès qu'elle est différente de l'une des surfaces \mathbb{C} ,

$\bar{\mathbb{C}}$, \mathbb{C}^* , ou d'un tore. Si une des composantes connexes de $\Omega(G)/G$ était de ce type, le cardinal de l'ensemble limite $L(G)$ serait inférieur à 2, ce qui équivaut à dire que le groupe G est élémentaire (cf. fait 1.1.1). Donc, la surface de Riemann $\Omega(G)/G$ est hyperbolique si et seulement si le groupe G n'est pas élémentaire et a un domaine de discontinuité non vide.

Le théorème de finitude d'Ahlfors (cf. [Ahl1], [OP]) est un outil fondamental pour l'étude des groupes kleinien dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Théorème de finitude d'Ahlfors 1.1.4. — *Soit $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ un groupe kleinien non élémentaire dont le domaine de discontinuité n'est pas vide; alors, la surface de Riemann $\Omega(G)/G$ est une surface de type fini.*

Le théorème de finitude entraîne en particulier que lorsque $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe kleinien, le bord de la variété $\overline{M(G)}$ est une surface de type topologique fini; il en est donc de même pour le bord de la variété $N_\delta(G)$.

La démonstration du théorème de finitude utilise en particulier :

Lemme d'Ahlfors 1.1.5. — *Soit γ un élément du groupe fondamental d'une composante de $\Omega(G)/G = \partial\overline{M(G)}$, représenté par un petit lacet qui entoure une pointe de $\Omega(G)/G$; alors l'image de γ dans le groupe $G = \pi_1(\overline{M(G)})$ par l'homomorphisme d'inclusion est un élément parabolique.*

Une variante de ce lemme d'Ahlfors sera démontrée dans le chapitre 5 (lemme 5.1.1).

Lorsque $n = 3$, on peut combiner le théorème de finitude et la description des composantes de la partie cuspidale pour décrire l'intersection des cusps de $M(G)^{0,\varepsilon}$ avec la variété à bord convexe $N_\delta(G)$, lorsque $\varepsilon > 0$ est une constante inférieure à la constante de Margoulis $\varepsilon(3)$.

Proposition 1.1.6 (cf. [Mor1], [OP]). — *Soit $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ un groupe kleinien. Alors, l'intersection des préimages des composantes de la partie cuspidale de $M(G)$ avec le coeur de Nielsen $N(G)$ est de l'un des deux types suivants, selon la nature du cusp considéré :*

(i) *si \tilde{C} est une horoboule qui relève un cusp $C \subset M(G)$ de type $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, il existe une horoboule concentrique $\tilde{C}' \subset \tilde{C}$ qui est entièrement contenue dans $C(G)$;*

(ii) *si un cusp $C \subset M(G)$ de type \mathbb{Z} est isométrique au quotient d'une horoboule $\tilde{C} = H_{z_0} = \{(x, y, z) \mid z \geq z_0\}$ par la translation*

$$(x, y, z) \rightarrow (x + 1, y, z),$$

alors il existe $z'_0 \geq z_0$ tel que l'intersection de $C(G)$ avec $H_{z'_0}$ soit égale à l'ensemble des triplets

$$\{(x, y, z) \mid z \geq z'_0, \quad y_0 \leq y \leq y_1\}$$

pour deux constantes y_0 et y_1 , éventuellement infinies.

Dans la proposition précédente, la situation (ii) signifie que l'intersection du coeur de Nielsen $N(G)$ avec un cusp concentrique du cusp C est connexe et que son bord intersecte C selon 0, 1 ou 2 anneaux totalement géodésiques.

D'après cette proposition, pour tout $\delta > 0$, chaque bout de $\partial N_\delta(G)$ est contenu dans une composante de $M(G)^{[0, \varepsilon]}$ et intersecte ce cusp comme l'ensemble des points à distance égale à δ d'un anneau totalement géodésique.

1.2 Les homéomorphismes quasi-conformes

Définitions. — Soit $\phi : U \rightarrow V$ un homéomorphisme préservant l'orientation entre deux ouverts de \mathbb{C} . On dit que ϕ est *quasi-conforme* lorsqu'il vérifie :

- (i) les dérivées de ϕ par rapport à x et y au sens des distributions appartiennent à L^2_{loc} ;
- (ii) si on pose :

$$\partial\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\partial}\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$

alors il existe une fonction $\mu \in L^\infty(U, \mathbb{C})$ de norme $\|\mu\|_\infty < 1$ telle qu'on ait pour presque tout point $z \in U$:

$$\bar{\partial}\phi(z) = \mu(z)\partial\phi(z).$$

On dit que ϕ est K -quasi-conforme lorsque la norme de μ dans $L^\infty(U)$ vérifie :

$$\frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty} \leq K.$$

On appelle la fonction μ le *coefficient de Beltrami* de ϕ . La quantité

$$\frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}$$

est appelée l'*excentricité* de ϕ .

L'excentricité d'un homéomorphisme quasi-conforme de ϕ mesure en quelques sortes le défaut de ϕ à être conforme :

Proposition 1.2.1 (cf. [Ahl2], [OP]). — *Un homéomorphisme entre ouverts de \mathbb{C} est 1-quasi-conforme si et seulement si c'est un isomorphisme conforme.*

Supposons que l'homéomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ est de classe C^1 ; alors, en tout point $z \in U$ les images des petits cercles centrés au point z sont

des ellipses à peu près similaires à l'ellipse au point $\phi(z)$ dont le rapport des longueurs des axes est :

$$\frac{1 + \left| \frac{\bar{\partial}\phi}{\partial\phi}(z) \right|}{1 - \left| \frac{\bar{\partial}\phi}{\partial\phi}(z) \right|}.$$

Donc, un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{C} est K -quasi-conforme lorsque les cercles infinitésimaux en tout point sont envoyées sur des ellipses infinitésimales d'excentricité inférieure à K .

Notons qu'un autre invariant de cette ellipse est la direction du grand axe : l'angle de cette direction avec l'axe des x est égal à :

$$\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\bar{\partial}\phi}{\partial\phi}(z) \right).$$

Si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ sont deux homéomorphismes quasi-conformes, le composé $g \circ f : U \rightarrow W$ est quasi-conforme et son excentricité vérifie presque partout :

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + (\mu_g \circ f) \frac{\bar{\partial}f}{\partial f}}{1 + \bar{\mu}_f (\mu_g \circ f) \frac{\bar{\partial}f}{\partial f}}.$$

Si g est K_2 -quasi-conforme et si f est K_1 -quasi-conforme, on en déduit que $g \circ f$ est $K_1 K_2$ -quasi-conforme.

De même, si $f : U \rightarrow V$ est K -quasi-conforme, alors $f^{-1} : V \rightarrow U$ est aussi K -quasi-conforme : son coefficient de Beltrami vérifie :

$$\mu_{f^{-1}} \circ f = \frac{\partial f}{\bar{\partial}f} \mu_f.$$

Donc, si $\phi : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme quasi-conforme de coefficient de Beltrami μ et si $g : V \rightarrow W$ est un homéomorphisme conforme, alors $g \circ \phi : U \rightarrow W$ est un homéomorphisme quasi-conforme de coefficient de Beltrami μ . On peut, à partir de cette remarque, définir la propriété d'être quasi-conforme pour un homéomorphisme qui préserve l'orientation entre deux surfaces de Riemann, par exemple pour un homéomorphisme préservant l'orientation de la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$.

Dans le chapitre 6, nous utiliserons le résultat suivant :

Proposition 1.2.2 (cf. [Ahl2]). —

(i) *Tout homéomorphisme quasi-conforme ϕ du demi-plan \mathbb{H}^2 se prolonge continûment en un homéomorphisme de $\mathbb{H}^2 \cup \bar{\mathbb{R}}$ et le prolongement de ϕ^{-1} est l'inverse du prolongement de ϕ .*

(ii) Soit (ϕ_i) une suite d'homéomorphismes K -quasi-conformes de $\bar{\mathbb{C}}$ (respectivement de \mathbb{H}^2) tels que les suites $(\phi_i(0))$, $(\phi_i(1))$, et $(\phi_i(\infty))$ convergent dans $\bar{\mathbb{C}}$ vers trois points distincts; alors, la suite (ϕ_i) contient une sous-suite qui converge uniformément vers un homéomorphisme K -quasi-conforme de $\bar{\mathbb{C}}$ (respectivement de \mathbb{H}^2).

L'intérêt principal des homéomorphismes quasi-conformes provient du théorème suivant, dû à L. Ahlfors et L. Bers dans cette version :

Théorème d'Ahlfors-Bers 1.2.3 (cf. [Ahl2], [OP]). — Soit μ une fonction de $L^\infty(\bar{\mathbb{C}})$ de norme strictement inférieure à 1. Alors, il existe un unique homéomorphisme quasi-conforme $\phi = \phi_\mu$ de $\bar{\mathbb{C}}$ qui vérifie :

- (i) $\frac{\bar{\partial}\phi}{\partial\phi}(z) = \mu(z)$ pour presque tout point z ;
- (ii) ϕ fixe les trois points 0, 1 et ∞ .

De plus, la fonction $\mu \mapsto \phi_\mu$ est continue, lorsque l'ensemble des homéomorphismes de $\bar{\mathbb{C}}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme.

L'équation (i) s'appelle l'équation de Beltrami.

La partie "existence" dans le théorème d'Ahlfors-Bers dit que l'on peut trouver des homéomorphismes quasi-conformes sur $\bar{\mathbb{C}}$ dont le coefficient de Beltrami est prescrit à l'avance. Puisque le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur les triplets, il existe donc un unique homéomorphisme quasi-conforme de $\bar{\mathbb{C}}$, qui satisfait l'équation (i) et qui prend des valeurs données à l'avance sur les points 0, 1 et ∞ .

La partie "unicité" du théorème d'Ahlfors-Bers entraîne :

Corollaire 1.2.4. — Soit μ une fonction de $L^\infty(\mathbb{H}^2)$ de norme strictement inférieure à 1. Il existe un unique homéomorphisme quasi-conforme $\phi = \phi_\mu$ du demi-espace \mathbb{H}^2 qui vérifie :

- (i) $\frac{\bar{\partial}\phi}{\partial\phi}(z) = \mu(z)$ pour presque tout z ;
- (ii) le prolongement de ϕ à l'axe réel fixe les trois points 0, 1 et ∞ .

De plus, la fonction $\mu \mapsto \phi_\mu$ est continue, lorsque l'ensemble des homéomorphismes de l'adhérence de \mathbb{H}^2 est muni de la topologie de la convergence uniforme.

Voici maintenant quelques propriétés vérifiées par les homéomorphismes quasi-conformes, que nous utiliserons dans la suite.

Fait 1.2.5 (cf. [Ahl2], [OP]). — Soit $\phi : U \rightarrow V$ un homéomorphisme quasi-conforme entre ouverts de $\bar{\mathbb{C}}$. Alors :

- (i) ϕ préserve les ensembles de mesure nulle;

(ii) la restriction de ϕ à presque toutes les droites verticales et à presque toutes les droites horizontales est absolument continue.

Le résultat suivant découle du théorème d'Ahlfors-Bers :

Fait 1.2.6. — Soit ϕ un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation et laisse l'axe réel invariant; alors si les restrictions de ϕ aux demi-espaces supérieur et inférieur sont quasi-conformes, ϕ est quasi-conforme.

1.3 L'espace de Teichmüller ; l'espace des groupes quasi-fuchsien

Pour le moment, nous n'avons pas donné d'exemples de groupes kleinien. Soit S une surface compacte orientable de caractéristique d'Euler strictement négative. Alors, l'intérieur de S est homéomorphe au complémentaire Σ d'un nombre fini (éventuellement nul) de points dans une surface compacte fermée Σ' ; munissons Σ de la structure conforme induite par une métrique riemannienne sur Σ' . D'après le théorème d'uniformisation de Riemann, le revêtement universel de Σ est conformément équivalent au demi-espace \mathbb{H}^2 , et le groupe fondamental de Σ s'identifie ainsi à un sous-groupe discret du groupe des automorphismes conformes de \mathbb{H}^2 , c'est-à-dire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

De cette manière, l'intérieur de la surface compacte S de caractéristique d'Euler strictement négative s'identifie au quotient \mathbb{H}^2/Γ du demi-espace \mathbb{H}^2 par un groupe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, discret et sans torsion, et porte donc une métrique hyperbolique complète. Puisque la structure conforme sur Σ est induite par une structure riemannienne sur Σ' , on voit facilement que chaque lacet de S , librement homotope dans une composante de ∂S agit sur \mathbb{H}^2 comme un élément parabolique.

Ainsi, d'après le lemme de Margoules, chaque bout de l'intérieur de S est contenu dans le quotient d'une bande $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid y \geq y_0\}$ par la translation $(x, y) \rightarrow (x+1, y)$. Un calcul de volume facile montre que le volume du quotient de cette bande pour la métrique hyperbolique est fini : donc, le volume de la surface \mathbb{H}^2/Γ est fini.

Définition. — Un groupe kleinien $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que le quotient \mathbb{H}^2/Γ a un volume fini sera appelé un *groupe fuchsien*.

L'ensemble limite d'un groupe fuchsien est égal à $\partial\mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{R}}$; plus généralement, si un groupe kleinien $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ a un domaine de discontinuité non vide, le volume de la variété hyperbolique complète $M(G) = \mathbb{H}^n/G$ est infini, puisque l'action de G sur $\mathbb{H}^n \cup \Omega(G)$ est discontinue.

Normalisation de Γ .

Nous supposons dans tout ce livre que les points 0, 1 et ∞ sont des points fixes d'éléments de Γ . Plus précisément, pour deux éléments hyperboliques g

et h de Γ qui engendrent un groupe libre à deux générateurs, nous supposons que 0 est le point fixe attractif de g , ∞ celui de gh , et que 1 est le point fixe répulsif de h .

L'espace de Teichmüller.

Une *déformation fuchsienne* de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un couple (ρ, ϕ) , où ρ est une représentation de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et où ϕ est un homéomorphisme quasi-conforme *normalisé* du demi-espace \mathbb{H}^2 dans lui-même, qui conjugue Γ et $\rho(\Gamma)$, c'est-à-dire tel que :

- (i) pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\rho(\gamma) = \phi \circ \gamma \circ \phi^{-1}$;
- (ii) l'extension continue de ϕ à l'axe réel fixe les trois points 0 , 1 et ∞ .

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des déformations fuchiennes de Γ par : $(\rho, \phi) \simeq (\rho', \phi')$ si et seulement si on a : $\rho = \rho'$.

Observons que le prolongement de ϕ à l'axe réel (resp. de ϕ') conjugue l'action de Γ à celle de $\rho(\Gamma)$ (resp. de $\rho'(\Gamma)$). La densité des points fixes de Γ dans l'axe réel entraîne alors que $\rho = \rho'$ si et seulement si les prolongements de ϕ et ϕ' à l'axe réel coïncident.

Le quotient de l'ensemble des déformations fuchiennes de Γ par cette relation d'équivalence est appelé *l'espace de Teichmüller* du groupe Γ ; on le note $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Si (ρ, ϕ) est une déformation fuchsienne de Γ , le groupe $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, puisque son action sur \mathbb{H}^2 est topologiquement conjuguée à celle de Γ . L'homéomorphisme ϕ passe au quotient en un homéomorphisme de \mathbb{H}^2/Γ vers $\mathbb{H}^2/\rho(\Gamma)$. Un élément $\gamma \in \Gamma$ est parabolique si et seulement si $\rho(\gamma)$ l'est aussi : en effet les éléments paraboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont caractérisés par le fait qu'ils ont un seul point fixe dans $\overline{\mathbb{R}}$. On en déduit que les bouts de $\mathbb{H}^2/\rho(\Gamma)$ sont contenus dans des cusps et donc que la surface $\mathbb{H}^2/\rho(\Gamma)$ est de volume fini. D'après la formule de Gauss-Bonnet, ce volume est indépendant de la représentation ρ ; il est égal à $\pi|\chi(S)|$.

La distance de Teichmüller.

On définit sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ une distance en posant, si σ_1 et σ_2 sont deux éléments de $\mathcal{T}(\Gamma)$:

$$d(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2} \inf \log K(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}).$$

Dans la formule ci-dessus, l'infimum est pris parmi tous les représentants de $\sigma_1 = (\rho_1, \phi_1)$ et $\sigma_2 = (\rho_2, \phi_2)$ et $K(\psi)$ désigne l'excentricité de l'homéomorphisme quasi-conforme ψ .

Que d sépare les points découle directement de la proposition 1.2.2 (ii). L'inégalité triangulaire découle de la formule :

$$K(\psi' \circ \psi) \leq K(\psi')K(\psi);$$

la symétrie, de $K(\psi^{-1}) = K(\psi)$.

Cette distance est appelée la *distance de Teichmüller*; il découle encore de la proposition 1.2.2 (ii) que l'espace $\mathcal{T}(\Gamma)$ est un espace métrique complet.

La propriété suivante relie la distance de Teichmüller, de nature analytique, aux longueurs des géodésiques des métriques hyperboliques sous-jacentes :

Proposition 1.3.1 (cf. [Ahl2], [Ga]). — Soit $(\rho, \phi) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ un point de l'espace de Teichmüller à distance inférieure à C de l'origine (Id, Id) . Alors, pour tout élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$e^{-2C} \ell(\gamma) \leq \ell_\sigma(\gamma) \leq e^{2C} \ell(\gamma).$$

Dans la proposition ci-dessus, $\ell_\sigma(\gamma)$ désigne la distance de translation de l'élément hyperbolique $\rho(\gamma) \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$; $\ell(\gamma)$ celle de γ dans \mathbb{H}^2 .

L'espace des déformations quasi-fuchsiennes de Γ .

L'espace de Teichmüller possède une généralisation immédiate.

Une *déformation quasi-fuchsienne* de Γ est la donnée d'un couple (ρ, ϕ) où ρ est une représentation de Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ et où ϕ est un homéomorphisme quasi-conforme de $\bar{\mathbb{C}}$ qui conjugue les représentations Γ et $\rho(\Gamma)$ et qui fixe les trois points $0, 1$ et ∞ .

C'est donc la même définition que pour les déformations fuchsiennes, sauf qu'ici la conjugaison ϕ est définie sur toute la sphère $\bar{\mathbb{C}}$.

On introduit sur l'ensemble des déformations quasi-fuchsiennes de Γ la relation d'équivalence suivante : $(\rho_1, \phi_1) \simeq (\rho_2, \phi_2)$ si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$.

L'espace des classes d'équivalence de déformations quasi-fuchsiennes de Γ sera noté $\mathcal{QF}(\Gamma)$.

Les déformations quasi-fuchsiennes de Γ *respectent* les éléments paraboliques : un élément $\gamma \in \Gamma$ est parabolique si et seulement si son image $\rho(\gamma)$ l'est, lorsque (ρ, ϕ) est une déformation quasi-fuchsienne de Γ .

Par définition, $\mathcal{QF}(\Gamma)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{R}(\Gamma)$ des représentations de Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

L'isomorphisme d'Ahlfors-Bers.

Cet isomorphisme fournit un paramétrage de $\mathcal{QF}(\Gamma)$ par le produit de deux copies de l'espace de Teichmüller.

Soit (ρ, ϕ) une déformation quasi-fuchsienne de Γ . Le théorème d'uniformisation de Riemann dit que le domaine simplement connexe du plan $\phi(\mathbb{H}^2)$ est conformément équivalent au demi-plan supérieur par un isomorphisme conforme $\phi_+ : \phi(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathbb{H}^2$. Puisque la frontière de $\phi(\mathbb{H}^2)$ dans $\bar{\mathbb{C}}$ est une courbe de Jordan, la représentation conforme ϕ_+ se prolonge à la frontière d'après le théorème de Carathéodory; on peut choisir cette représentation conforme de sorte que son extension fixe les trois points $0, 1$ et ∞ . Alors $(\phi_+ \circ \rho \circ \phi_+^{-1}, \phi_+ \circ \phi)$ est une déformation fuchsienne de Γ .

De même, si ϕ_- est une représentation conforme normalisée de l'image du demi-espace inférieur $\phi(\mathbb{H}^2)$ sur le demi-espace inférieur $\overline{\mathbb{H}^2}$, l'homéomorphisme $\phi_- \circ \phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ est quasi-conforme et conjugue les actions de Γ et de $\phi_- \circ \rho(\Gamma) \circ \phi_-^{-1}$ sur $\overline{\mathbb{H}^2}$. Le couple $(\phi_- \circ \rho \circ \phi_-^{-1}, \phi_- \circ \phi)$ est donc une déformation fuchsienne de Γ que l'on considère agissant sur le demi-espace inférieur $\overline{\mathbb{H}^2}$: on notera $\mathcal{T}(\overline{\Gamma})$ cet espace, qui est naturellement isomorphe à $\mathcal{T}(\Gamma)$ par la conjugaison complexe.

Il découle immédiatement des définitions que les classes d'équivalence de ces deux déformations fuchiennes de Γ ne dépendent que de la classe d'équivalence de (ρ, ϕ) .

Définition. — L'application $\mathcal{B} : \Omega\mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\Gamma) \times \mathcal{T}(\overline{\Gamma})$ définie par :

$$\mathcal{B}(\rho) = (\phi_+ \circ \rho \circ (\phi_+)^{-1}, \phi_- \circ \rho \circ (\phi_-)^{-1})$$

est appelée l'*application d'Ahlfors-Bers*.

Proposition 1.3.2 (cf. [Ga], [OP]). — L'application \mathcal{B} est une bijection.

Démonstration. — Nous n'utiliserons dans ce livre que la surjectivité de \mathcal{B} : montrons comment cette surjectivité découle directement du théorème d'Ahlfors-Bers.

Soit $(\sigma^+, \sigma^-) \in \mathcal{T}(\Gamma) \times \mathcal{T}(\overline{\Gamma})$. Supposons que $\sigma^+ = (\rho^+, \phi^+)$ où $\phi^+ = \phi_{\mu^+}$ pour une fonction $\mu^+ \in L^\infty(\mathbb{H}^2)$ de norme strictement inférieure à 1 ; de même $\sigma^- = (\rho^-, \phi^-)$ où $\phi^- = \phi_{\mu^-}$, pour une fonction $\mu^- \in L^\infty(\overline{\mathbb{H}^2})$ de norme strictement inférieure à 1.

Définissons une fonction mesurable sur le plan \mathbb{C} par : $\mu = \mu^+$ sur \mathbb{H}^2 et $\mu = \mu^-$ dans $\overline{\mathbb{H}^2}$. Soit Φ l'homéomorphisme quasi-conforme normalisé d'excentricité μ fourni par le théorème d'Ahlfors-Bers : il conjugue la représentation Id du groupe Γ à une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

On vérifie immédiatement que : $\mathcal{B}(\rho, \Phi) = (\sigma^+, \sigma^-)$. □

L'action du groupe modulaire de la surface S sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ et sur $\Omega\mathcal{F}(\Gamma)$.

Soit S une surface compacte et identifions l'intérieur de S au quotient \mathbb{H}^2/Γ du demi-espace \mathbb{H}^2 par un groupe fuchsien Γ . Soit f un difféomorphisme de la surface compacte S ; on peut isotoper f pour qu'il induise un difféomorphisme bilipshitz de l'intérieur de S . Tout relevé \tilde{f} de f au demi-plan \mathbb{H}^2 est alors un difféomorphisme bilipschitz ; en particulier \tilde{f} et \tilde{f}^{-1} sont des homéomorphismes quasi-conformes du demi-plan \mathbb{H}^2 .

Si $\sigma = (\rho, \phi)$ est une déformation fuchsienne de Γ , $\phi \circ \tilde{f}^{-1}$ est un homéomorphisme de \mathbb{H}^2 qui conjugue Γ en un sous-groupe de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$; soit a^{-1} l'élément de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui prend les mêmes valeurs que $\phi \circ \tilde{f}^{-1}$ sur les points 0, 1 et ∞ . Alors, l'homéomorphisme quasi-conforme $a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1}$ conjugue la représentation Id de Γ à une représentation $\rho_{\tilde{f}}$: le couple $(\rho_{\tilde{f}}, a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})$ est une déformation fuchsienne de Γ . On voit immédiatement que la classe de

cette déformation fuchsienne ne dépend que de la classe de (ρ, ϕ) dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Cette classe ne dépend pas non plus du relevé particulier \tilde{f} . En effet, pour chaque relevé \tilde{f} de f , il existe un automorphisme f_* de Γ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait :

$$\tilde{f}(\gamma(z)) = f_*(\gamma)\tilde{f}(z).$$

Donc, la représentation $\rho_{\tilde{f}}$ est conjuguée dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à la représentation $f^*(\rho) : \gamma \rightarrow \rho \circ (f_*)^{-1}(\gamma)$. Si \tilde{f} et \tilde{f}' sont deux relevés de f , les automorphismes f_* et f'_* diffèrent par un automorphisme intérieur de Γ ; alors, les représentations $\rho_{\tilde{f}}$ et $\rho_{\tilde{f}'}$ sont conjuguées dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. On en déduit que le point $(\rho_{\tilde{f}}, a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})$ ne dépend pas du relevé \tilde{f} .

Pour la même raison, la classe de $(\rho_{\tilde{f}}, a \circ \phi \circ \tilde{f}^{-1})$ ne dépend que de la classe d'isotopie (d'homotopie) du difféomorphisme f . En effet, par la théorie des revêtements, les automorphismes de $\pi_1(S) \simeq \Gamma$ associés à des relevés \tilde{f}_1^{-1} et \tilde{f}_2^{-1} de deux difféomorphismes homotopes f_1 et f_2 diffèrent par un automorphisme intérieur de Γ . On peut alors appliquer l'argument précédent.

On notera $f^*(\sigma)$ le point associé à σ .

Il découle immédiatement de la définition de la distance de Teichmüller, que f^* est une isométrie de l'espace métrique $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Définition. — Le *groupe modulaire de la surface S* est l'ensemble des classes d'isotopie de difféomorphismes préservant l'orientation de S : c'est un groupe que l'on note $\mathrm{Mod}(S)$.

L'application $[f] \rightarrow f^*$ définit une action à gauche de $\mathrm{Mod}(S)$ sur $\mathcal{T}(\Gamma)$; on l'appellera *l'action naturelle du groupe modulaire* sur $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Au niveau des représentations, si f_* est l'action de f sur le groupe fondamental $\pi_1(S) \simeq \Gamma$, la représentation fuchsienne $f^*(\rho, \phi)$ est conjuguée à la représentation $\gamma \rightarrow \rho \circ (f_*)^{-1}(\gamma)$, bien définie à conjugaison près dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

On définit de même une action du groupe modulaire sur l'espace des déformations quasi-fuchsienues de Γ . Pour cela, on utilise les coordonnées d'Ahlfors-Bers et on pose pour tout difféomorphisme f représentant une classe de $\mathrm{Mod}(S)$: $f^*(\sigma_+, \sigma_-) = (f^*(\sigma_+), f^*(\sigma_-))$.

Alors, comme dans le cas de l'espace de Teichmüller, si (ρ, ϕ) est une déformation quasi-fuchsienne de Γ , la représentation $f^*(\rho, \phi)$ est conjuguée à la représentation $\gamma \rightarrow \rho \circ (f^*)^{-1}(\gamma)$.

1.4 La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller

L'ensemble \mathcal{C} des classes de conjugaison des éléments non paraboliques de $\Gamma - \{\text{Id}\}$ s'identifie naturellement à l'ensemble des géodésiques fermées de la surface \mathbb{H}^2/Γ .

Notons \mathbb{R}_+ les réels positifs. Au point $\sigma = (\rho, \phi) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, on associe le point $\mathcal{L}(\sigma) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ dont la coordonnée sur la classe $\langle \gamma \rangle$ est égale à la distance de translation $\ell_\sigma(\gamma)$ de $\rho(\gamma)$ dans \mathbb{H}^2 : ceci définit une application \mathcal{L} de $\mathcal{T}(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$.

L'image de $\mathcal{T}(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ n'est pas relativement compacte. Pour compactifier $\mathcal{T}(\Gamma)$, Thurston considère $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$, l'espace projectif sur $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$, défini comme le quotient de l'ensemble des points $v \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ dont les coordonnées ne sont pas toutes nulles, par la relation d'équivalence : $v \simeq v'$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v' = \lambda v$.

Si π est la projection canonique de $\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$, alors Thurston a montré que l'image $\pi \circ \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Gamma))$ est relativement compacte et a donné une interprétation géométrique des points dans la frontière de l'image : ces points sont les *laminations géodésiques mesurées*.

Nous allons maintenant décrire cette compactification.

Les laminations géodésiques mesurées.

On étudie en détail les laminations géodésiques dans l'appendice, qui peut-être lu indépendamment des autres chapitres.

L'espace des laminations géodésiques mesurées est noté $\mathcal{ML}(S)$; la topologie sur cet espace est étudiée dans la section A.3 de l'appendice. L'exemple le plus simple d'une lamination géodésique est celui d'une géodésique fermée γ sans points doubles sur la surface \mathbb{H}^2/Γ . On fait de cette géodésique une lamination géodésique mesurée en lui associant un nombre réel strictement positif α ; l'élément de $\mathcal{ML}(S)$ sera appelé une "géodésique simple pondérée" et on le notera $\alpha\gamma$.

L'une des propriétés des laminations géodésiques est l'existence d'une fonction *nombre d'intersection* qui permet de mesurer la "longueur" des courbes fermées de S : pour tout élément $\gamma \in \mathcal{C}$, et pour toute lamination géodésique mesurée λ , on définit le nombre d'intersection $i(\lambda, \gamma)$ (cf. A.3). La fonction *nombre d'intersection* permet de définir une application $\mathcal{J} : \mathcal{ML}(S) \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$, qui associe à chaque lamination géodésique mesurée λ , le point dont la coordonnée d'indice γ est le nombre d'intersection $i(\gamma, \lambda)$.

Il existe une action naturelle des réels positifs sur $\mathcal{ML}(S)$; le quotient de $\mathcal{ML}(S)$ par cette action est appelé l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées et noté $\mathcal{PML}(S)$.

L'application \mathcal{J} est "homogène" et passe donc au quotient en une application $\pi \circ \mathcal{J} : \mathcal{PML}(S) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$.

Thurston a montré :

Théorème de compactification 1.4.1 (cf. [Thu2], [FLP, exposés VIII et XI]). — Les applications $\pi \circ \mathcal{L}$ et $\pi \circ \mathcal{J}$ sont des plongements respectifs de $\mathcal{T}(\Gamma)$ et de $\mathcal{PML}(S)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}})$ d'images disjointes. La réunion de leurs images est homéomorphe à une boule.

Ce théorème est démontré dans les références indiquées pour un plongement légèrement modifié : on remplace l'ensemble \mathcal{C} par l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ des classes de conjugaison représentées par des courbes simples sur \mathbb{H}^2/Γ . Toutefois les arguments contenus dans ces références entraînent le théorème ci-dessus.

L'énoncé du théorème de compactification comprend deux parties.

La première décrit le "taux de croissance" des longueurs des courbes pour une suite (σ_i) qui tend vers l'infini dans l'espace de Teichmüller : c'est le résultat suivant, qui a aussi été obtenu par J. Morgan et P. Shalen [MS1] en utilisant des techniques d'arbres réels (cf. chapitres 2 et 3).

Théorème 1.4.2. — Soit (σ_i) une suite dans $\mathcal{T}(\Gamma)$; alors, quitte à extraire une sous-suite, on a l'alternative suivante :

- (i) la suite (σ_i) converge dans $\mathcal{T}(\Gamma)$;
- (ii) il existe une lamination géodésique mesurée λ et une suite (ε_i) tendant vers 0 telle que, pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$, on a :

$$\varepsilon_i \ell_{\sigma_i}(\gamma) \rightarrow i(\lambda, \gamma).$$

Définition. — Dans la situation (ii), on dit que la suite (σ_i) converge vers la lamination géodésique mesurée λ au sens de Thurston.

La deuxième partie du théorème de compactification décrit la topologie de la compactification obtenue de l'espace de Teichmüller : c'est la partie la plus délicate. Voici un lemme important qui intervient dans cette démonstration et que nous utiliserons dans le chapitre 5.

Proposition 1.4.3 (cf. [Thu2], [FLP, exposé VIII, cor. 2.3]). — Soit (σ_i) une suite dans $\mathcal{T}(\Gamma)$ qui converge au sens de Thurston vers une lamination géodésique mesurée λ . Alors il existe une suite de géodésiques fermées sans points doubles $\gamma_i \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ telle que :

- (i) la suite (γ_i) converge vers λ dans l'espace projectif $\mathcal{PML}(S)$;
- (ii) on a $\ell_{\sigma_i}(\gamma_i)/\ell(\gamma_i) \rightarrow 0$.

Nous donnerons dans la prochaine section une démonstration d'un cas particulier de cette proposition.

1.5 La classification des éléments de $\text{Mod}(S)$

Nous allons maintenant rappeler la classification à isotopie près des difféomorphismes des surfaces compactes (cf. [FLP, exposés IX et XI], [CB]).

Chaque élément ϕ de $\text{Mod}(S)$ agit sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ et son action se prolonge continûment en un homéomorphisme ϕ^* de la compactification de Thurston $\overline{\mathcal{T}(\Gamma)}$ (cf. [FLP]). Puisque cette compactification est une boule, l'élément ϕ^* a un point fixe, d'après le théorème de Brouwer. La classification des éléments de $\text{Mod}(S)$ se fait selon la nature de ce point fixe.

Cas périodique.

Si ϕ^* a point fixe dans $\mathcal{T}(\Gamma)$, la classe d'isotopie de ϕ est représentée par une isométrie de la métrique hyperbolique correspondante. Ce représentant est d'ordre fini : donc ϕ est isotope à un difféomorphisme périodique de S .

Sinon, ϕ^* a au moins un point fixe sur le bord, c'est-à-dire dans l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées. On montre alors qu'on a l'alternative suivante.

Cas réductible.

L'homéomorphisme ϕ^* laisse invariante une "multicourbe" de S (cf. A.3) : en d'autres termes, la classe d'isotopie de ϕ contient un difféomorphisme qui permute une collection finie de géodésiques simples et disjointes.

Cas pseudo-Anosov.

Un point fixe de ϕ^* est une lamination mesurée "arationnelle" (cf. appendice). On montre alors que ϕ^* fixe deux laminations mesurées arationnelles λ^+ et λ^- , appelées respectivement *la lamination stable* et *la lamination instable*, lamination de ϕ . Ces deux laminations "s'intersectent" (cf. A.3), et il existe une constante $k > 1$ telle que pour tout élément $\gamma \in \mathcal{C}$, on a :

$$i(\phi_*(\gamma), \lambda^+) = \frac{1}{k} i(\gamma, \lambda^+), \quad i(\phi_*(\gamma), \lambda^-) = ki(\gamma, \lambda^-). \quad (1)$$

Remarque. — Puisque λ^+ est arationnelle, pour tout élément $\gamma \in \mathcal{C}$, on a : $i(\gamma, \lambda^+) \neq 0$ (cf. A.3). L'égalité (1) entraîne donc qu'aucune puissance non nulle d'un pseudo-Anosov ne laisse invariant un élément de \mathcal{C} . Ceci montre que le cas pseudo-Anosov est disjoint des deux autres cas ; ceci montre aussi qu'une puissance non nulle d'un pseudo-Anosov est un pseudo-Anosov.

La dynamique d'un pseudo-Anosov sur l'espace de Teichmüller compactifié "ressemble" à celle d'un élément hyperbolique du groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sur l'espace hyperbolique. Ceci est suggéré par le résultat suivant :

Proposition 1.5.1 (cf. [FLP]). — Soit $\phi \in \text{Mod}(S)$ un élément pseudo-Anosov.

(i) Pour tout $\sigma \in \mathcal{T}(\Gamma)$, on a :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\phi^*)^i(\sigma) = \lambda^+, \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} (\phi^*)^i(\sigma) = \lambda^-,$$

au sens de Thurston.

(ii) Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$ représenté par une courbe simple, on a :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{(\phi_*)^i(\gamma)}{\ell((\phi_*)^i(\gamma))} \rightarrow \lambda^+ \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{(\phi_*)^i(\gamma)}{\ell((\phi_*)^i(\gamma))} \rightarrow \lambda^-$$

pour la topologie de $\mathcal{ML}(S)$.

Dans (ii), $\ell((\phi_*)^i(\gamma))$ désigne la longueur de la géodésique dans la classe de conjugaison $(\phi_*)^i(\gamma)$ pour la métrique de référence \mathbb{H}^2/Γ .

Un cas particulier de la proposition 1.4.3.

Voici maintenant une démonstration de la proposition 1.4.3 dans le cas où la suite (σ_i) s'obtient en itérant une structure de référence $\sigma \in \mathcal{T}(\Gamma)$ par les puissances positives ou négatives d'un pseudo-Anosov. Supposons par exemple que $\sigma_i = (\phi^*)^i(\sigma)$ pour $i > 0$ et soit $\gamma \in \mathcal{C}$ un élément représenté par une géodésique fermée sans points doubles; soit γ_i la géodésique dans la classe d'homotopie de $(\phi_*)^i(\gamma)$. Alors, d'après la définition de l'action de $\text{Mod}(S)$ sur $\mathcal{T}(\Gamma)$, on a pour tout i : $\ell_{\sigma_i}(\gamma_i) = \ell_{\sigma}(\gamma)$. Donc la suite $\ell_{\sigma_i}(\gamma_i)/\ell(\gamma_i)$ tend vers 0, puisque $\ell(\gamma_i)$ tend vers l'infini; en effet, pour toute constante C , la surface \mathbb{H}^2/Γ ne contient qu'un nombre fini de géodésiques de longueur inférieure à C et un pseudo-Anosov ne laisse invariante aucune classe de conjugaison d'éléments de Γ . D'après la proposition 1.5.1, la suite $\gamma_i/\ell(\gamma_i)$ tend vers λ^+ dans $\mathcal{PML}(S)$. La suite (γ_i) vérifie donc les conclusions de la proposition 1.4.3.

Nous utiliserons aussi dans le chapitre 6 le résultat suivant :

Proposition 1.5.2. — Soit $\phi \in \text{Mod}(S)$ un élément pseudo-Anosov; soit $S' \rightarrow S$ un revêtement fini dans lequel ϕ se relève en un élément $\psi \in \text{Mod}(S')$. Alors ψ est pseudo-Anosov.

Démonstration. — Soit $\phi_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$ un automorphisme représentant l'action de ϕ sur Γ . L'image du groupe fondamental de S' dans $\pi_1(S) \simeq \Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini Γ' laissé invariant par un conjugué de ϕ_* : on note ψ_* la restriction de ce conjugué à Γ' .

Pour montrer que le relevé ψ est pseudo-Anosov, il nous suffit de montrer, d'après la classification, que ψ n'est ni réductible, ni d'ordre fini. Si ψ est réductible, il existe une classe de conjugaison non triviale $\gamma' \in \Gamma'$ telle qu'une puissance non nulle $(\psi_*)^k$ de ψ_* laisse γ' invariante à conjugaison près. Donc une puissance de ϕ_* laisse un élément de \mathcal{C} invariant : c'est impossible d'après la caractérisation d'un pseudo-Anosov.

1. ESPACES DE TEICHMÜLLER ET GROUPES KLEINIENS

Si ψ est périodique, alors ψ_* est d'ordre fini, à conjugaison près. Donc une puissance non nulle de ψ_* agit par l'identité sur les classes de conjugaison de Γ' . C'est de nouveau impossible. \square

CHAPITRE 2

Dégénérescences de structures hyperboliques et arbres réels

Dans ce chapitre, nous allons expliquer comment les actions isométriques d'un groupe G sur les arbres réels permettent de compactifier l'espace des représentations fidèles et discrètes de G dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^n . Pour $n = 2, 3$, cette propriété importante des espaces de représentations a été découverte par J. Morgan et P. Shalen [MS1], poursuivant l'étude, faite par M. Culler et P. Shalen [CS], du cas où l'espace des représentations à conjugaison près est de dimension 1. Cette propriété a été ensuite étendue au cas où n est quelconque par J. Morgan [Mor2]. Depuis, on comprend différemment la convergence d'une suite de représentations vers un arbre, notamment grâce à M. Bestvina [Bes] et F. Paulin [Pa], qui l'interprètent en des termes plus géométriques; nous énoncerons ce résultat puis en démontrerons un cas particulier, tout à fait élémentaire, mais suffisant pour les applications.

Dans la dernière section, nous nous restreindrons au cas où G est isomorphe à un groupe fuchsien : alors, on peut décrire exactement les arbres qui apparaissent à la limite. Nous énoncerons ce théorème fondamental qui sera démontré au chapitre 8.

2.1 Arbres réels

Définition. — Un *arbre réel* est un espace métrique (\mathcal{J}, d) tel qu'entre deux points quelconques x et y , il existe toujours un *unique* arc, et tel que cet arc est isométrique à un intervalle de \mathbb{R} . Cet arc est alors isométrique à l'intervalle $[0, d(x, y)]$. On l'appelle le *segment* entre les points x et y ; on le note xy .

L'exemple le plus simple d'arbre réel est celui d'un arbre simplicial que l'on munit d'une distance en décrétant que chaque arête est isométrique à l'intervalle $[0, 1]$ (cf. [CS], [Ser]). Nous décrirons d'autres exemples dans la section 3.

Un partie connexe $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est convexe : le segment xy joignant deux points quelconques de \mathcal{A} est contenu dans \mathcal{A} . Supposons que la partie \mathcal{A} est en outre fermée; alors, si $x \in \mathcal{A}$ est un point arbitraire et si $y \in \mathcal{T}$, on voit que l'intersection $xy \cap \mathcal{A}$ est un segment xz , pour un unique point $z \in \mathcal{A}$. Le point z s'appelle la *projection* de y sur \mathcal{A} .

La classification des isométries d'un arbre réel ressemble à celle des isométries de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .

Une isométrie g qui n'a pas de points fixes laisse invariante une *unique* droite plongée dans \mathcal{T} , isométrique à \mathbb{R} , sur laquelle elle agit comme une translation. Pour voir cela, considérons un point quelconque $p \in \mathcal{T}$. L'intersection des segments $pg(p)$ et $g(p)g^2(p)$ est égale à un segment $g(a)g(p)$. Si g n'a pas de points fixes on a : $d(p, a) \leq d(p, g(a))$. On en déduit que les segments $g^i(a)g^{i+1}(a)$ ont des intérieurs disjoints et que leur réunion est une droite plongée sur laquelle g agit comme une translation de longueur $\delta(g) = d(a, g(a))$. On appelle cette droite invariante l'*axe de l'isométrie* g et on le note $A(g)$. Une isométrie qui n'a pas de points fixes est dite *hyperbolique*.

Une isométrie g qui a un point fixe est dite *elliptique*, et on pose alors : $\delta(g) = 0$.

On a dans tous les cas : $\delta(g) = \inf\{d(x, g(x)), x \in \mathcal{T}\}$, ce qui entraîne immédiatement que $\delta(g)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g dans le groupe des isométries de \mathcal{T} . On appelle $\delta(g)$ la *distance de translation de l'isométrie* g .

Dans la suite, G désignera un groupe de type fini.

Nous utiliserons le procédé suivant, dû à I. Chiswell [Ch] pour décrire l'action d'un groupe G sur un arbre réel \mathcal{T} à partir d'une certaine donnée numérique.

Soit $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action isométrique de G sur un arbre réel; soit p un point de \mathcal{T} . Posons pour $g \in G$: $|g| = d(p, g(p))$. Etant donnés deux éléments g et g' dans G , définissons :

$$[g, g'] = \frac{1}{2}(|g| + |g'| - |g^{-1}g'|).$$

Ainsi, $[g, g'] \geq 0$ est la longueur de l'intersection des segments $pg(p)$ et $pg'(p)$; c'est aussi la distance au point p de la projection de $g'(p)$ sur le segment $pg(p)$.

Théorème 2.1.1 [Ch]. — *Soit G un groupe agissant isométriquement sur un arbre réel \mathcal{T} ; soit $p \in \mathcal{T}$ et posons $|g| = d(p, g(p))$. Alors la fonction $|\cdot| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) $|\text{Id}| = 0$;
- (ii) $|g| = |g^{-1}|$;
- (iii) si $[g, g'] < [g, g'']$, alors $[g, g'] = [g', g'']$.

Réciproquement, si une fonction $|\cdot| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie ces trois propriétés, il existe une action de G sur un arbre réel \mathcal{T} et un point $p \in \mathcal{T}$ tels que, pour tout $g \in G$, on ait : $|g| = d(p, g(p))$.

Définition. — Une fonction $|\cdot| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés précédentes sera appelée une *fonction longueur* sur G au sens de Chiswell.

Démonstration. — Pour voir que les trois propriétés sont nécessaires, seul le dernier point demande une justification : son hypothèse signifie que la projection du point $g'(p)$ sur le segment $pg(p)$ est strictement plus proche de p que la projection du point $g''(p)$ sur le même segment. Mais alors, la projection de $g'(p)$ sur $pg(p)$ est égale à la projection de $g'(p)$ sur $pg''(p)$: donc $[g, g'] = [g', g'']$.

Avant de démontrer la réciproque, signalons qu'on n'a pas besoin de supposer que la fonction $|\cdot|$ prend des valeurs positives (cf. [Ch, p.451]). En effet, $[1, g] = 0$ d'après (i) et (ii). Donc, d'après (iii), $[g, g'] \geq 0$ pour tout g, g' ; d'où, $|g| = [g, g] \geq 0$.

Considérons maintenant la réunion disjointe d'intervalles de \mathbb{R}_+ :

$$X = \sqcup_{g \in G} [0, |g|].$$

Soit \mathcal{R} la relation sur X qui identifie isométriquement les segments $[0, |g|]$ et $[0, |g'|]$ le long de l'intervalle $[0, [g, g']]$. Cette relation est réflexive d'après (i), symétrique d'après (ii), transitive d'après (iii) : c'est donc une relation d'équivalence.

On munit l'espace quotient \mathcal{T} d'une distance. Si $x \in [0, |g|]$ et $y \in [0, |g'|]$, on pose $d(x, y) = |x - y|$ lorsque x ou y est inférieur à $[g, g']$. Si x et y sont supérieurs à $[g, g']$, on pose $d(x, y) = x + y - 2[g, g']$. Toujours d'après (iii), cette définition ne dépend que des classes d'équivalence de x et y dans X/\mathcal{R} . Pour voir que c'est une distance, seulement l'inégalité triangulaire nécessite une vérification. Si on se donne g, g' et g'' des éléments de G et trois points x, y et z respectivement contenus dans $[0, |g|]$, $[0, |g'|]$, $[0, |g''|]$, on a quatre cas de figures distingués par $[g, g'] < [g, g'']$, $[g, g'] > [g, g'']$, et lorsque $[g, g'] = [g, g'']$ selon que $[g', g''] < [g, g']$ ou $[g', g''] = [g, g']$. La vérification dans chacun de ces cas est laissée au lecteur.

Lemme 2.1.2. — L'espace \mathcal{T} muni de la distance d est un arbre réel.

Démonstration. — Indexons les éléments de G par les entiers ; par construction l'espace quotient \mathcal{T} est réunion croissante des espaces \mathcal{T}_i obtenus en quotientant la réunion disjointe des intervalles $[0, |g_k|]$, pour $k = 0, \dots, i$ par la relation \mathcal{R} . L'inclusion de \mathcal{T}_i dans \mathcal{T}_{i+1} est isométrique.

Notons $p \in \mathcal{T}_i$ l'image du point 0. Pour $k \leq i$, la projection de chaque segment $[0, |g_k|]$ dans \mathcal{T}_i est une isométrie. Donc tout point $x \in \mathcal{T}_i$ peut être joint à p par un intervalle px isométrique à $[0, d(p, x)]$; la définition de la distance d montre que, pour x et y dans \mathcal{T}_i , il existe un point z tel que

$px \cap py = pz$. On en déduit une rétraction de \mathcal{T}_i sur le point p ; ainsi, chaque quotient \mathcal{T}_i , muni de la distance induite, est un arbre réel (simplicial).

Donc, il existe un arc plongé *unique* joignant deux points x et y de \mathcal{T}_i : celui-ci est isométrique au segment $[0, d(x, y)]$. Si x et y sont deux points distincts de \mathcal{T} , ils sont contenus dans un même arbre \mathcal{T}_i , pour i suffisamment grand; ce sont donc les extrémités d'un segment plongé xy contenu dans \mathcal{T}_i et isométrique à $[0, d(x, y)]$. Pour montrer que \mathcal{T} est un arbre réel, nous allons voir qu'il existe un seul arc *plongé* qui joint deux points x et y .

Pour cela, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ l'ensemble (dénombrable) formé des classes d'équivalence dans \mathcal{T} des points de la forme $[g, g'] \in [0, |g|]$, lorsque g et g' décrivent G .

Affirmation 2.1.3. — *Tout point de $xy - xy \cap \mathcal{B}$ disconnecte les points x et y dans l'arbre \mathcal{T} .*

Démonstration. — Pour tout $j \geq i$, le segment xy est contenu dans \mathcal{T}_j . Puisque \mathcal{T}_j est un arbre réel, et que xy est un fermé connexe, on peut considérer la projection π_j de \mathcal{T}_j vers xy ; pour tout j , on voit facilement que l'application π_j décroît la distance. Puisque les inclusions $\mathcal{T}_j \rightarrow \mathcal{T}_{j+1}$ sont isométriques, les applications π_j et π_{j+1} coïncident sur \mathcal{T}_j : elles se recollent donc en une application π définie sur \mathcal{T} qui contracte la distance et est donc continue. D'après la définition de l'ensemble \mathcal{B} , si $q \in xy$ n'appartient pas à \mathcal{B} , alors q est le seul point $z \in \mathcal{T}$ tel que $\pi(z) = q$; donc $\mathcal{T} - \{q\}$ est réunion de deux ouverts disjoints U_x et U_y , qui contiennent respectivement les points x et y , et qui sont définis par :

$$U_x = \{z \mid d(x, \pi(z)) < d(x, q)\}$$

$$U_y = \{z \mid d(y, \pi(z)) < d(y, q)\}. \quad \square$$

Puisque \mathcal{B} est dénombrable, l'intersection $xy - \mathcal{B} \cap xy$ est dense dans xy . D'après l'affirmation 2.1.3, tout chemin continu qui joint x à y dans \mathcal{T} doit contenir $xy - \mathcal{B} \cap xy$. Par densité, il doit aussi contenir tout le segment xy . Il existe donc un unique arc plongé dans \mathcal{T} qui joint x à y : \mathcal{T} est un arbre réel. \square

Pour terminer la démonstration du théorème 2.1.1, nous allons construire une action isométrique de G sur l'arbre \mathcal{T} .

On notera dorénavant $g(p)$ l'image du point $|g| \in [0, |g|]$ par l'application quotient $X \rightarrow X/\mathcal{R}$; remarquons que $h(p) = h'(p)$ si et seulement si $|h^{-1}h'| = 0$.

Le groupe G agit naturellement sur l'ensemble des points $\{h(p)\} \subset \mathcal{T}$: si $g \in G$, on pose $g(h(p)) = gh(p)$. Par définition, la distance dans \mathcal{T} entre deux points $h(p)$ et $h'(p)$ est égale à $|h^{-1}h'|$. Donc, d'une part l'action de G sur l'orbite $\{h(p)\}$ est bien définie et d'autre part c'est une isométrie. Il y a maintenant une seule façon de prolonger cette action à tout l'arbre \mathcal{T} en

une isométrie. Pour cela, notons que, par construction, tout point $x \in \mathcal{T}$ est contenu dans un segment $ph(p)$; puisque \mathcal{T} est un arbre, pour tout $g \in G$, les deux points $g(p)$ et $gh(p)$ sont joints par un unique segment, isométrique au segment $ph(p)$. On définit alors l'application g sur le segment $ph(p)$ comme l'unique isométrie entre ces deux segments qui envoie p sur $g(p)$ et $h(p)$ sur $gh(p)$. Cette définition ne dépend pas du point $h(p)$. Que cette action de g est isométrique se vérifie rapidement. Par construction, on a : $d(p, g(p)) = |g|$.

Ceci démontre le théorème 2.1.1. \square

Définition. — Une action isométrique de G sur un arbre réel \mathcal{T} est dite *minimale* lorsque G ne laisse invariant aucun arbre non vide strictement inclus dans \mathcal{T} .

Une action d'un groupe G sur un arbre \mathcal{T} contient toujours un sous-arbre invariant sur lequel l'action de G est minimale. En effet, si le groupe G ne contient que des éléments elliptiques, il existe un point fixe global pour l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ (cf. [MS1], [Ser]); l'action de G sur ce point est minimale.

Si le groupe G possède des éléments hyperboliques, l'action de G sur \mathcal{T} laisse invariante la réunion des axes $A(g)$ des éléments hyperboliques g . La réunion de ces axes est connexe : en effet on montre facilement que si g et g' sont deux isométries hyperboliques dont les axes sont disjoints, l'élément gg' est hyperbolique et son axe intersecte chacun des axes $A(g)$ et $A(g')$. Donc la réunion des axes des éléments hyperboliques de G est un arbre : c'est l'arbre invariant minimal pour l'action de G .

Voyons maintenant quelle condition sur une fonction longueur au sens de Chiswell garantit que l'action fournie par le théorème de 2.1.1 est une action minimale.

Fait 2.1.4. — Avec les notations du théorème 2.1.1, on a pour tout élément $g \in G$:

$$\delta(g) = \sup\{0, |g^2| - |g|\}.$$

Démonstration. — Soit $g \in G$ une isométrie elliptique de \mathcal{T} . L'ensemble des points fixes de g , $\text{Fix}(g)$, est non vide et convexe : le segment de \mathcal{T} qui joint deux points fixes de g est contenu dans $\text{Fix}(g)$. Joignons le point p à sa projection sur $\text{Fix}(g)$ par un segment d'intérieur disjoint de $\text{Fix}(g)$ et de longueur α . Alors, $|g| = 2\alpha$ et $|g^2| \leq 2\alpha$.

De même si g a un axe de translation $A(g)$, on joint p à cet axe par un segment de longueur $\alpha > 0$. On a alors : $|g| = 2\alpha + \delta(g)$ et $|g^2| = 2\alpha + 2\delta(g)$. D'où le résultat. \square

En particulier, si pour tout élément $g \in G$, on a : $|g| \geq |g^2|$, alors tout élément de G est elliptique; comme nous avons déjà vu, le groupe G a alors un point fixe global. L'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est dite *triviale* dans ce cas.

Lemme 2.1.5. — *L'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ construite dans le théorème 2.1.1 est minimale si et seulement s'il existe un élément $g \in G$ tel que $|g^2| = 2|g|$ et $|g| \neq 0$.*

Démonstration. — D'après la démonstration du théorème 2.1.1, l'action construite dans ce théorème est minimale si et seulement si le point p est dans l'axe d'un élément $g \in G$. La condition $|g^2| = 2|g|$ est alors nécessaire. Réciproquement, les points de l'axe de g sont exactement les points $x \in \mathcal{T}$ tels que $d(x, g(x)) = \delta(g)$. D'après le fait 2.1.4, le point p est donc sur l'axe de g lorsque $|g^2| = 2|g|$. \square

Définition. — On dit que deux actions $G \times \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ et $G \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$ sont *isométriques* lorsqu'il existe une isométrie de \mathcal{T}_1 vers \mathcal{T}_2 qui conjugue les deux actions de G .

Le théorème 2.1.1 dit qu'on peut reconstruire une action d'un groupe G sur un arbre réel à partir d'une fonction longueur au sens de Chiswell. En fait, dans la démonstration, on a reconstruit un arbre *pointé* : si deux actions minimales $G \times \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ et $G \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$ ont les mêmes fonctions longueurs, associées à des points-base respectifs p_1 et p_2 , alors elles sont isométriques par une isométrie qui envoie p_1 sur p_2 .

Nous allons donner maintenant une condition plus intrinsèque, indépendante du choix d'un point base.

Notons \mathcal{C} l'ensemble des classes de conjugaison des éléments de G différents de l'identité. On définit une application Δ de l'ensemble des classes d'isométrie d'actions minimales $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ vers l'espace produit $(\mathbb{R}_+)^{\mathcal{C}}$ en associant à l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ le point $\Delta(\mathcal{T})$ dont la coordonnée d'indice $\langle g \rangle$, pour $\langle g \rangle \in \mathcal{C}$, est la distance de translation $\delta(g)$ d'un élément g dans la classe de conjugaison $\langle g \rangle$.

Définition. — Une action non triviale $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est dite *irréductible* si l'intersection des axes de deux éléments quelconques de G qui ne commutent pas est, ou bien vide, ou bien un intervalle compact.

Proposition 2.1.6 [CM]. — *L'application Δ , restreinte aux actions minimales et irréductibles, est injective : la donnée des distances de translation $\delta(g)$ permet de reconstruire, à isométrie près, l'arbre \mathcal{T} muni d'une action minimale de G .*

Dans [CM], ce résultat est montré en se ramenant aux hypothèses du théorème de Chiswell, c'est-à-dire en montrant l'existence d'un point $p \in \mathcal{T}$ tel que la fonction longueur associée à ce point s'exprime à l'aide de la fonction distance de translation de l'action. L'hypothèse "irréductible" intervient dans le choix de ce point.

Définition. — On dit qu'une action est à *petits stabilisateurs d'arêtes*, lorsque tout sous-groupe de G qui laisse invariant un segment non dégénéré de \mathcal{T} est élémentaire, c'est-à-dire contient un sous-groupe abélien d'indice fini.

Lorsque G est isomorphe à un groupe kleinien non élémentaire, une action à petits stabilisateurs d'arêtes est toujours irréductible (cf. fait 1.1.1).

2.2 Dégénérescences d'actions sur l'espace hyperbolique et arbres réels

Dans la suite G désignera un groupe non élémentaire de type fini.

Soit ρ une représentation du groupe G dans le groupe des isométries de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , que nous voyons aussi comme une action par isométries du groupe G sur \mathbb{H}^n . Notons toujours \mathcal{C} l'ensemble des classes de conjugaison de G . On associe à ρ le point $\mathcal{L}(\rho)$ de $(\mathbb{R}_+)^{\mathcal{C}}$ dont la coordonnée d'indice $\langle g \rangle$ est la *distance de translation* de $\rho(g)$ dans \mathbb{H}^n , pour un élément $g \in \langle g \rangle$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(\rho)(g) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, \rho(g)(x)).$$

Le résultat fondamental de J. Morgan et P. Shalen ([MS1] pour les cas $n = 2$ ou 3, [Mor2] pour n quelconque) s'énonce alors :

Théorème 2.2.1. — Soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles du groupe G dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Alors, quitte à en extraire une sous-suite, on a l'alternative suivante :

- (i) la suite (ρ_i) converge à conjugaison près vers une représentation de G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$;
- (ii) il existe une action minimale non triviale de G sur un arbre réel \mathcal{T} , et une suite ε_i tendant vers 0 telle que $\varepsilon_i \mathcal{L}(\rho_i) \rightarrow \Delta(\mathcal{T})$.

Définition. — On dira qu'une suite de représentations fidèles (ρ_i) du groupe G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ converge au sens de Morgan-Shalen vers l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ lorsqu'on est dans la situation (ii).

Les démonstrations contenues dans [MS1] ou [Mor2] du théorème 2.2.1 utilisent des techniques de géométrie algébrique. Par la suite, M. Bestvina [Bes] et F. Paulin [Pa] ont donné indépendamment une autre façon d'interpréter la convergence d'une suite de représentations vers un arbre réel.

Pour motiver la démonstration que nous donnerons du théorème 2.2.1, nous allons expliquer comment F. Paulin munit l'ensemble des classes d'isométries d'actions d'un groupe G sur un espace métrique d'une topologie et les propriétés de compacité de cette topologie.

On commence par définir la notion d' ε -approximation entre deux espaces métriques (X, d) et (X', d') .

Définition. — Soit $\varepsilon > 0$. Une ε -*approximation* entre les deux espaces (X, d) et (X', d') est une relation sur le produit $X \times X'$ surjective (tout point de X (resp. X') est en relation avec un point de X' (resp. de X)) telle que :

$$\forall x, y \in X, \quad \forall x', y' \in X', \quad x \mathcal{R} x' \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} y' \Rightarrow |d(x, y) - d'(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Soit $(G \times X_i \rightarrow X_i)$ une suite d'actions du groupe G sur les espaces métriques (X_i, d_i) . On dit que cette suite *converge au sens de Gromov* vers l'action $G \times X_\infty \rightarrow X_\infty$ si, pour tout compact $K_\infty \subset X_\infty$, pour toute partie finie $P \subset G$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe lorsque i est suffisamment grand, un compact $K_i \subset X_i$, et une ε -approximation \mathcal{R}_i entre K_i et K_∞ qui est P -*équivariante*, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall x \in K_\infty, \quad \forall \gamma \in P, \quad \forall x_i \in K_i, \quad \forall y_i \in K_i, \\ \{ x \mathcal{R}_i x_i, \quad \gamma(x) \in K_\infty, \quad \text{et} \quad \gamma(x) \mathcal{R}_i y_i \} \quad \Longrightarrow \quad d(\gamma(x_i), y_i) \leq \varepsilon.$$

On identifiera dans la suite une représentation du groupe G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ avec l'action de G sur \mathbb{H}^n qui lui correspond.

Dans [Pa], on trouve un critère de précompacité très général pour la topologie de Gromov qui entraîne en particulier :

Théorème 2.2.2. — Soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles et discrètes de G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. Alors, (ρ_i) converge vers l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ au sens de Morgan-Shalen si et seulement s'il existe une suite (ε_i) tendant vers 0 telle que la suite d'actions (ρ_i) du groupe G sur les espaces $\varepsilon_i \mathbb{H}^n$ converge au sens de Gromov vers l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note $\varepsilon \mathbb{H}^n$ l'espace hyperbolique muni de la distance contractée du facteur ε .

Nous allons maintenant montrer un résultat, plus faible que le théorème ci-dessus, mais qui sera suffisant pour les applications que nous ferons dans le chapitre 4; son énoncé est proche de celui de M. Bestvina.

La construction de l'arbre reposera sur le théorème 2.1.1.

Analogue à la fonction longueur au sens de Chiswell d'une action de G sur un arbre \mathcal{T} , on peut associer à la représentation ρ et à un point $x \in \mathbb{H}^n$ une "fonction longueur" $|\cdot|_\rho$. Pour cela, on se donne un point base $x \in \mathbb{H}^n$ et on définit $|g|_\rho = d(x, \rho(g)(x))$. Cette fonction vérifie les axiomes (i) et (ii) d'une fonction longueur au sens de Chiswell mais pas (iii). Nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition 2.2.3. — Soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles et discrètes du groupe G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$; alors, quitte à en extraire une sous-suite, on a l'alternative :

- (i) la suite (ρ_i) converge à conjugaison près;
- (ii) il existe une action minimale non triviale de G sur un arbre réel \mathcal{T} , des points $p_i \in \mathbb{H}^n$, $p \in \mathcal{T}$, et une suite (ε_i) qui tend vers 0, tels que, si

$|\cdot|_{\rho_i}$ est la fonction longueur de la représentation ρ_i associée au point p_i , alors les fonctions $\varepsilon_i |\cdot|_{\rho_i}$ associées aux points p_i convergent vers la fonction longueur $|\cdot|$ de l'arbre \mathcal{T} associée au point p .

Dans l'énoncé précédent, la convergence des fonctions $|\cdot|_{\rho_i}$ est prise au sens de la topologie faible. Nous dirons dans la situation (ii) que la suite (ρ_i) converge au sens de Gromov vers l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$.

Démonstration. — On commence par un lemme, contenu dans [Bes] et [Pa] qui va permettre de choisir le point p_i .

Fait 2.2.4. — Soit G un groupe de type fini non élémentaire et soit $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_k\}$ une partie génératrice de G ; soit ρ une représentation fidèle et discrète de G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Alors, il existe un point $x \in \mathbb{H}^n$ qui minimise la fonction

$$\max_j \{d(x, \rho(g_j)(x))\}.$$

Démonstration. — Pour tout élément g_j , la fonction $d(x, \rho(g_j)(x))$ sur \mathbb{H}^n tend vers l'infini lorsque x tend vers un point du bord $\partial\mathbb{H}^n$ autre que le ou les deux points fixes de g_j . Puisque le groupe G n'est pas élémentaire, pour tout point de $\partial\mathbb{H}^n$, il existe un élément $\rho(g_j)$ qui ne fixe pas ce point (fait 1.1.1). Donc, la fonction $\max_j \{d(x, \rho(g_j)(x))\}$ est propre; elle atteint son minimum en un point $x \in \mathbb{H}^n$. \square

Pour démontrer la proposition 2.2.3, nous supposons dorénavant, quitte à conjuguer la représentation ρ_i , que le point x dans l'énoncé du fait 2.2.4 est l'origine 0 de l'espace hyperbolique dans le modèle de Riemann. Posons alors :

$$\frac{1}{\varepsilon_i} = \max_j \{d(0, \rho_i(g_j)(0))\}.$$

On distingue alors deux cas.

Premier cas. — La suite ε_i est minorée par une constante strictement positive $1/M$.

Alors, pour tout $j = 1, \dots, r$, chaque isométrie $\rho_i(g_j)$ translate l'origine 0 d'une distance inférieure à M . Les isométries de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ qui bougent l'origine de moins que M forment un compact. Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les isométries $\rho_i(g_j)$ convergent vers une isométrie $\rho(g_j)$. On en déduit que les représentations ρ_i convergent vers une représentation ρ .

Deuxième cas. — Il existe une sous-suite de (ε_i) qui tend vers 0.

Considérons la fonction longueur $|\cdot|_{\rho_i}$ associée au point 0.

Lemme 2.2.5. — *Quitte à extraire une sous-suite, la suite de fonctions $\varepsilon_i |\cdot|_{\rho_i}$ converge faiblement vers une fonction longueur au sens de Chiswell non triviale sur G .*

Démonstration. — Par construction, pour les éléments $g_j \in \{g_1, \dots, g_k\} = \mathcal{G}$, on a $\varepsilon_i |g_j|_{\rho_i} \leq 1$, la valeur 1 étant atteinte pour l'un de ces éléments.

Soit $g \in G$ un élément décomposé sur la famille génératrice $\{g_1, \dots, g_k\}$ comme un produit $g = g_{i_1} \cdots g_{i_r}$ de $r = r(g)$ éléments.

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout i :

$$\begin{aligned} d(0, \rho_i(g)(0)) \\ \leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \cdots g_{i_{r-1}})(0)) + d(\rho_i(g_{i_1} \cdots g_{i_{r-1}})(0), \rho_i(g_{i_1} \cdots g_{i_r})(0)). \end{aligned}$$

Donc :

$$|g|_{\rho_i} \leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \cdots g_{i_{r-1}})(0)) + d(0, \rho_i(g_{i_r})(0)).$$

D'où par récurrence, $\varepsilon_i |g|_{\rho_i} \leq r(g)$.

Par un procédé d'extraction diagonale, on peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite que, pour tout $g \in G$, $\varepsilon_i |g|_{\rho_i}$ converge vers un nombre positif que nous noterons $|g|$.

Nous allons montrer que la fonction $|\cdot| : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction longueur au sens de Chiswell. Les deux propriétés (i) et (ii) sont claires. Pour démontrer (iii), on utilise un lemme de géométrie hyperbolique sur les triangles géodésiques.

Lemme 2.2.6. — *Soit $0 < \alpha \leq \pi$; il existe une constante $c(\alpha)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L = L(\alpha, \varepsilon)$ de sorte que, pour tout triangle géodésique ABC dont l'angle \widehat{B} appartient à l'intervalle $[\alpha, \pi]$, et dont la longueur du côté BC est supérieure à L , on ait :*

- (i) $|AB + BC - AC| \leq c(\alpha)$;
- (ii) l'angle en \widehat{C} est inférieur à ε .

Démonstration. — Dans le triangle géodésique ABC , on a (cf. [Bea]) :

$$\cosh(AC) = \cosh(AB) \cosh(BC) - \cos(\widehat{B}) \sinh(AB) \sinh(BC).$$

Donc si les longueurs AB et BC sont supérieures à 1, on a :

$$C_1(\alpha) e^{AB+BC} \leq \cosh(AC) \leq C_2(\alpha) e^{AB+BC},$$

pour deux constantes non nulles $C_1(\alpha)$ et $C_2(\alpha)$. On en déduit que pour tout triangle ABC dont l'angle \widehat{B} est supérieur à $\alpha > 0$, les conclusions de (i) sont satisfaites.

Ceci entraîne (ii) lorsque la longueur BC est assez grande. □

Corollaire 2.2.7. — *Soit $0 < \alpha < \pi/2$. Il existe des constantes M et L telles que pour tout polygone géodésique $ABCD \subset \mathbb{H}^n$ dont les angles \widehat{B} et \widehat{C} sont*

compris entre α et $\pi - \alpha$ et tel que la longueur du côté BC est supérieure à L , on a :

$$|AB + BC + CD - AD| \leq M .$$

Démonstration. — Pour démontrer le corollaire, on décompose le polygone $ABCD$ en deux triangles ABC et ACD . On applique le lemme 2.2.6 tel quel au triangle ABC , puis au triangle ACD dès que l'angle de celui-ci au point C est supérieur à $\alpha/2$. \square

Considérons maintenant un triangle géodésique $0\rho_i(g)(0)\rho_i(g')(0)$, pour g et g' dans G . Soit $\pi^i(g')$ la "projection" de $\rho_i(g')(0)$ sur le segment $0\rho_i(g)(0)$, c'est-à-dire le point du segment $0\rho_i(g)(0)$ le plus proche de $\rho_i(g')(0)$.

Alors, si ce point est dans l'intérieur de $0\rho_i(g)(0)$, chacun des deux triangles géodésiques $0\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$ et $\rho_i(g)(0)\pi^i(g')\rho_i(g')(0)$ est rectangle en $\pi^i(g')$. Si ce point est l'une des extrémités de $0\rho_i(g)(0)$, le triangle $0\rho_i(g)(0)\rho_i(g')(0)$ a un angle supérieur à $\pi/2$ en 0 ou en $\rho_i(g)(0)$.

Rappelons la notation : $[g, g'] = \frac{1}{2}(|g| + |g'| - |g^{-1}g'|)$.

Lemme 2.2.8. — On a :

$$[g, g'] = \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i d(0, \pi^i(g')) .$$

Démonstration. — Soit $\ell_i = d(\pi^i(g'), 0)$ et $\ell'_i = d(\pi^i(g'), \rho_i(g)(0))$. On a $\ell_i + \ell'_i = |g|_{\rho_i}$. Supposons dans un premier temps qu'aucune des deux distances ℓ_i et ℓ'_i n'est bornée supérieurement. Alors, d'après le lemme 2.2.6, on a, pour i suffisamment grand ,

$$\begin{aligned} | |g'|_{\rho_i} - \ell_i - d(\pi^i(g'), \rho_i(g')(0)) | &\leq c(\pi/2) , \\ | |g^{-1}g'|_{\rho_i} - \ell'_i - d(\pi^i(g'), \rho_i(g')(0)) | &\leq c(\pi/2) . \end{aligned}$$

D'où :

$$|2\ell_i - |g'|_{\rho_i} - |g|_{\rho_i} + |g^{-1}g'|_{\rho_i}| \leq 2c(\pi/2) .$$

Après multiplication par ε_i , on obtient le lemme 2.2.8 dans ce cas.

Supposons maintenant que l'une des quantités ℓ_i ou ℓ'_i est majorée par une constante N indépendante de i ; alors les deux inégalités précédentes restent vraies en remplaçant la constante $c(\pi/2)$ par $c(\pi/2) + 2N$.

On en déduit le lemme 2.2.8. \square

Considérons maintenant trois éléments g , g' et g'' dans G tels que :

$$[g, g'] < [g, g''] .$$

Si $\pi^i(g')$ et $\pi^i(g'')$ sont les projections des points $\rho_i(g')(0)$ et $\rho_i(g'')(0)$ sur le segment $0\rho_i(g)(0)$, on a d'après le lemme 2.2.8 :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(\pi^i(g'), \pi^i(g'')) = \infty .$$

Appliquons le corollaire 2.2.7 au rectangle géodésique

$$\rho_i(g'')(0)\pi^i(g'')\pi^i(g')\rho_i(g')(0),$$

dont les angles aux sommets $\pi^i(g'')$ et $\pi^i(g')$ sont supérieurs à $\pi/2$. Pour i suffisamment grand, on aura :

$$| |(g')^{-1}g''|_{\rho_i} - d(\pi^i(g''), \rho_i(g'')(0)) \ d(\pi^i(g'), \pi^i(g'')) - d(\pi^i(g'), \rho_i(g')(0)) | \leq M.$$

D'autre part, d'après le lemme 2.2.6 ,

$$| |g''|_{\rho_i} - d(0, \pi^i(g'')) - d(\rho_i(g'')(0), \pi^i(g'')) | \leq c(\pi/2)$$

et

$$| |g'|_{\rho_i} - d(0, \pi^i(g')) - d(\rho_i(g')(0), \pi^i(g')) | \leq c(\pi/2) + 2N.$$

D'où, après multiplication par ε_i , et en faisant tendre i vers l'infini :

$$[g', g''] = \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i d(0, \pi^i(g')).$$

D'après le lemme 2.2.8, on a donc : $[g, g'] = [g', g'']$.

Ainsi la fonction $|\cdot|$ est une fonction longueur sur G au sens de Chiswell ; elle n'est pas identiquement nulle par construction. \square

D'après le théorème 2.1.1, il existe une action de G sur un arbre réel \mathcal{T} et un point $p \in \mathcal{T}$ tel que la fonction $|\cdot|$ soit la fonction longueur de l'arbre \mathcal{T} pointé en p . Nous allons maintenant étudier cette action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$.

Théorème 2.2.9. — *Sous les hypothèses de la proposition 2.2.3, cette action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est minimale et à petits stabilisateurs d'arêtes.*

Démonstration. — Pour voir que l'action est minimale, il nous suffit de trouver, d'après le lemme 2.1.5, un élément $g \in G$ tel que $|g^2| = 2|g| \neq 0$.

Rappelons que, dans notre normalisation, l'origine $0 \in \mathbb{H}^n$ a la propriété de minimiser la fonction $\max_j \{d(x, \rho_i(g_j)(x))\}$, où g_j décrit la partie génératrice \mathcal{G} . Soient g_1, \dots, g_k des éléments pour lesquels ce minimum est atteint ; pour chacun d'eux, on a $|g_j| \neq 0$ et en particulier : $|g_j|_{\rho_i} \rightarrow \infty$.

Supposons que le point p n'est sur l'axe d'aucun des éléments g_j , pour $1 \leq j \leq k$; considérons le triangle $0\rho_i(g_j)(0)\rho_i(g_j^2)(0)$. Si l'angle de ce triangle au sommet $\rho_i(g_j)(0)$ est minoré par une constante $\alpha > 0$ indépendante de i , on a, d'après le lemme 2.2.6 :

$$| |g_j^2|_{\rho_i} - 2|g_j|_{\rho_i} | \leq c(\alpha),$$

et donc après multiplication par ε_i , et en faisant tendre i vers l'infini : $|g_j^2| = 2|g_j|$.

On peut donc supposer que, dans chaque triangle

$$0\rho_i(g_j)(0)\rho_i(g_j^2)(0),$$

l'angle au sommet $\rho_i(g_j)(0)$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

Remarquons que le gradient de chaque fonction $d(\cdot, \rho_i(g_j)(\cdot))$ au point x est colinéaire au vecteur en x , tangent à la géodésique qui joint x à l'axe de $\rho_i(g_j)$ si c'est un élément hyperbolique, ou à son point fixe, si c'est un élément parabolique. Donc, puisque l'origine est un minimum de la fonction $\max_j \{d(\cdot, \rho_i(g_j)(\cdot))\}$, il existe au moins deux éléments, disons g_1 et g_2 , tels que les vecteurs gradients des deux fonctions correspondantes en 0 fassent entre eux un angle supérieur à $\pi/2$.

D'après le lemme 2.2.6, on a $|g_1 g_2| \neq 0$; donc, lorsque i tend vers l'infini :

$$d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2)(0)) \rightarrow \infty$$

et les angles en $\rho_i(g_1^{-1})(0)$ et $\rho_i(g_2)(0)$ du triangle

$$0\rho_i(g_1^{-1})(0)\rho_i(g_2)(0)$$

tendent vers 0.

Alors, pour tout i suffisamment grand, l'élément $\rho_i(g_2 g_1)$ envoie le point $\rho_i(g_1^{-1})(0)$ sur $\rho_i(g_2)(0)$ de telle sorte que l'image du vecteur tangent au point $\rho_i(g_1^{-1})(0)$ à la géodésique $\rho_i(g_1^{-1})(0)0$ fasse un angle supérieur à $\pi/4$ avec le vecteur tangent au point $\rho_i(g_2)(0)$ à la géodésique $0\rho_i(g_2)(0)$. Par une nouvelle application du lemme 2.2.6, on déduit que

$$|d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2 g_1 g_2)(0)) - 2d(\rho_i(g_1^{-1})(0), \rho_i(g_2)(0))| \leq C(\pi/8),$$

pour i suffisamment grand et donc que : $|(g_1 g_2)^2| = 2|g_1 g_2| \neq 0$.

Ceci montre que l'action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est minimale; montrons maintenant que cette action est à petits stabilisateurs d'arêtes, en suivant F. Paulin.

Rappelons que si un groupe kleinien n'est pas élémentaire, il contient un groupe libre à deux générateurs, engendré par deux éléments g et h (fait 1.1.1).

D'après la construction de l'arbre \mathcal{T} , on peut supposer qu'une arête κ invariante par g et h est contenue dans l'intérieur d'un segment $pf(p)$, quitte à la restreindre. Alors, la projection de $g(p)$ sur $pf(p)$ est "avant" κ et celle de $gf(p)$ est "au-delà" de l'arête κ .

Pour $\gamma \in G$ et $0 < x < 1$, on notera $x\gamma(p)$ le point de l'arête $p\gamma(p)$ à distance $xd(p, \gamma(p))$ de p . Alors l'arête κ est l'ensemble des points $xf(p)$, pour x dans un certain intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$: on la notera $[a, b]f(p)$.

On notera γ_i^g (resp. γ_i^{gf}) la géodésique paramétrée à vitesse unité entre 0 et $\rho_i(g)(0)$ (resp. entre 0 et $\rho_i(gf)(0)$); donc $\rho_i(g) \circ \gamma_i^g$ est la géodésique paramétrée à vitesse unité qui joint $\rho_i(g)(0)$ et $\rho_i(gf)(0)$.

Lemme 2.2.10. — *Soit $a < a' < b' < b$; soit $\varepsilon > 0$; alors, si i est suffisamment grand, lorsque*

$$a'd(0, \rho_i(f)(0)) \leq t \leq b'd(0, \rho_i(f)(0)),$$

on a :

$$d(\rho_i(g) \circ \gamma_i^f(t), \gamma_i^f(t + d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0))) \leq \varepsilon.$$

Démonstration. — D'après le lemme 2.2.8, la projection de $\rho_i(gf)(0)$ sur le segment $0\rho_i(f)(0)$ est à une distance ℓ_i de 0 telle que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ell_i}{d(0, \rho_i(f)(0))} \geq b.$$

En particulier, la distance du point $\gamma_i^f(b'd(0, \rho_i(f)(0)))$ à cette projection tend vers l'infini.

Donc, pour i suffisamment grand, on a, si $t \leq b'd(0, \rho_i(f)(0))$:

$$d(\gamma_i^f(t), \gamma_i^{gf}(t)) \leq \varepsilon/2.$$

De même en raisonnant avec le triangle géodésique $0\rho_i(gf)(0)\rho_i(g)(0)$, on obtient lorsque i est suffisamment grand et pour $t \geq a'd(0, \rho_i(f)(0))$:

$$d(\gamma_i^{gf}(t), \rho_i(g) \circ \gamma_i^f(t + d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0))) \leq \varepsilon/2.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient le lemme. \square

Remarquons que la différence $d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0))$ même si elle peut tendre vers l'infini en valeur absolue, reste négligeable par rapport à $d(0, \rho_i(f)(0))$, puisque dans l'arbre \mathcal{T} , on a $d(p, f(p)) = d(p, gf(p))$.

Le lemme 2.2.10 nous dit que sur l'intervalle

$$[a'd(0, \rho_i(f)(0))b'd(0, \rho_i(f)(0))] \subset [0\rho_i(f)(0)]$$

l'isométrie g est ε -proche de la translation de longueur

$$d(0, \rho_i(f)(0)) - d(0, \rho_i(gf)(0)).$$

Alors, sur un intervalle $[a''d(0, \rho_i(f)(0))b''d(0, \rho_i(f)(0))]$ strictement inclus dans l'intervalle $[a'd(0, \rho_i(f)(0))b'd(0, \rho_i(f)(0))]$, le commutateur $[g, h]$ bouge les points d'une distance inférieure à 4ε , pour i suffisamment grand; de même pour le commutateur $[g, h^2]$. Donc, si la constante ε est suffisamment petite par rapport à la constante de Margoulis (cf. chapitre 1), on obtient une contradiction, puisque les éléments $[g, h]$ et $[g, h^2]$ n'engendrent pas un groupe élémentaire. \square

Avant de passer à l'étude du cas particulier où G est isomorphe à un groupe fuchsien, nous allons terminer cette section par un résultat qui montre que l'arbre fourni par la proposition 2.2.3 (ii) est isomorphe à celui fourni par le théorème 2.2.1.

Proposition 2.2.11. — Soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles et discrètes de G dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ et (ε_i) une suite tendant vers 0 telle que $\varepsilon_i \cdot |\cdot|_{\rho_i}$ converge vers une fonction longueur au sens de Chiswell associée à une action $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$; alors $\varepsilon_i \mathcal{L}(\rho_i) \rightarrow \Delta(\mathcal{T})$ pour la topologie produit de $(\mathbb{R}_+)^c$.

Démonstration. — On utilise la construction de l'axe ou de l'ensemble des points fixes d'une isométrie d'un arbre réel (cf. section 2.1).

Si $\delta(g) \neq 0$, la projection q de $g^2(p)$ sur le segment $pg(p)$ est strictement plus proche de $g(p)$ que de p , et le segment $qg(q)$ est un domaine fondamental pour l'action de g sur son axe. On a : $\delta(g) = d(q, g(q))$.

Soit q_i la projection orthogonale de $\rho_i(g^2)(0)$ sur la géodésique $0\rho_i(g)(0)$. Puisque la distance de q_i à 0 est beaucoup plus grande que la distance de q_i à $\rho_i(g)(0)$, l'angle de la géodésique $q_i\rho_i(g)(q_i)$ au point $\rho_i(g)(q_i)$ avec la géodésique $\rho_i(g)(q_i)\rho_i(g^2)(0)$ tend vers 0 (d'après le lemme 2.2.6). De même, au point q_i , la géodésique $q_i\rho_i(g)(q_i)$ fait un angle avec la géodésique $q_i\rho_i(g^2)(0)$ qui tend vers 0 et on a :

$$\varepsilon_i d(q_i, \rho_i(g)(q_i)) \rightarrow d(q, g(q)) = \delta(g).$$

Donc la géodésique brisée de \mathbb{H}^n obtenue en recollant les arcs géodésiques $\rho_i(g^p)(q_i)\rho_i(g^{p+1})(q_i)$ a des coins proches de $\pi/2$ lorsque i tend vers l'infini. On en déduit que $\rho_i(g)$ est un élément hyperbolique et que sa distance de translation diffère de $d(q_i, \rho_i(g)(q_i))$ par une constante bornée (cf. proposition 4.3.1). Donc, dans ce cas :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i \ell_{\rho_i}(g) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i d(q_i, \rho_i(g)(q_i)) = \delta(g).$$

Lorsque $\delta(g) = 0$, la projection de $g^2(p)$ sur $pg(p)$ est plus proche de p que de $g(p)$. Soit q_i le milieu de la géodésique $0\rho_i(g)(0)$ et soit $\pi_i(g^2)$ la projection de $\rho_i(g^2)(0)$ sur la géodésique $0\rho_i(g)(0)$. Alors on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i d(\rho_i(g)(0), \pi_i(g^2)) \geq \frac{1}{2} d(p, g(p)). \quad (1)$$

D'après la formule de Gauss-Bonnet, l'aire de tout triangle géodésique est inférieure à π (cf. [Bea]); il existe une constante universelle C telle que tout point d'un côté d'un triangle hyperbolique est à une distance inférieure à C d'un point sur un autre côté. Dans le triangle $\pi_i(g^2)\rho_i(g)(0)\rho_i(g^2)(0)$, le point $\rho_i(g)(q_i)$ est à distance inférieure à C d'un point z_i sur l'un des autres côtés. Le lemme 2.2.6 et l'inégalité (1) entraînent que la distance $d(z_i, q_i)$ est négligeable devant $d(0, \rho_i(g)(0))$. D'où :

$$\varepsilon_i d(q_i, \rho_i(g)(q_i)) \rightarrow 0,$$

et donc :

$$\varepsilon_i \ell_{\rho_i}(g) \rightarrow 0 = \delta(g). \quad \square$$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous restreindre au cas où G est isomorphe à un groupe fuchsien Γ . Si (ρ_i) est une suite de représentations fidèles et discrètes de Γ dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ qui ne contient pas de sous-suite convergente, elle converge, quitte à en extraire une sous-suite vers

une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} . Cette action est à petits stabilisateurs d'arêtes, d'après le théorème 2.2.9.

Lorsque le groupe fuchsien Γ contient des éléments paraboliques, nous supposons que la suite (ρ_i) "respecte les paraboliques" : c'est-à-dire que pour tout élément parabolique $\gamma \in \Gamma$, l'élément $\rho_i(\gamma)$ est aussi parabolique. Alors, pour tout i , on a : $\ell_{\rho_i}(\gamma) = 0$. Donc, d'après la proposition 2.2.11, la distance de translation dans \mathcal{T} d'un élément parabolique $\gamma \in \Gamma$ vérifie : $\delta(\gamma) = 0$.

En résumé :

Proposition 2.2.12. — *Soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles et discrètes du groupe fuchsien Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$; supposons que chaque représentation ρ_i respecte les paraboliques. Alors, quitte à extraire une sous-suite, on a l'alternative :*

- (i) *la suite (ρ_i) converge à conjugaison près vers une représentation de Γ dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^n ;*
- (ii) *la suite (ρ_i) converge au sens de Gromov vers une action non triviale $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ du groupe Γ sur un arbre réel \mathcal{T} : de plus cette action est à petits stabilisateurs d'arêtes et chaque élément parabolique $\gamma \in \Gamma$ a une distance de translation nulle dans \mathcal{T} . □*

2.3 Actions à petits stabilisateurs d'arêtes des groupes fuchsien sur les arbres réels

Lorsque Γ est un groupe fuchsien, un théorème de R. Skora [Sk] décrit exactement les actions $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ qui vérifient les conclusions de la proposition 2.2.12 (ii). Ce théorème sera démontré dans le chapitre 8. Mais nous allons maintenant donner le modèle géométrique de ces actions dont nous aurons besoin dans les prochains chapitres.

Soient Γ un groupe fuchsien agissant sur le demi-espace \mathbb{H}^2 , et $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique mesurée (cf. A.3). Nous allons montrer comment associer à λ une action de Γ sur un arbre réel. Dans le chapitre 8, nous donnerons une construction du même type, mais pour des laminations mesurées qui ne sont pas nécessairement géodésiques. Dans le cadre présent, la construction est très simplifiée par le fait que les feuilles de λ sont des géodésiques.

D'après la proposition A.3.4, la lamination λ se décompose comme la réunion disjointe d'un nombre fini de *composantes minimales* : chaque composante minimale est ou bien une géodésique fermée ou bien un "minimal exceptionnel". Nous allons modifier la lamination λ en remplaçant chaque géodésique fermée ℓ par la famille des courbes équidistantes de ℓ à distance $t \leq r$: on munit ce "paquet de feuilles" d'une mesure transverse sans atomes, de support plein et de masse totale égale au poids transverse de la courbe ℓ .

Pour r suffisamment petit, on obtient ainsi un fermé λ' qui est la réunion disjointe des minimaux exceptionnels de λ et de “paquets de feuilles compactes”, chaque courbe d’un même paquet étant dans la classe d’homotopie d’une géodésique fermée de λ .

Considérons la préimage $\tilde{\lambda}'$ de λ' dans \mathbb{H}^2 . Chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$ est, ou bien une feuille de la préimage $\tilde{\lambda}$, ou bien une courbe à distance constante $t \leq r$ d’une géodésique qui relève une géodésique fermée de λ .

Fait 2.3.1. — *Deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ ont des adhérences dans \mathbb{H}^2 disjointes.*

Démonstration. — Par construction, chaque composante de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ est contenue dans une unique composante de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$. Si deux composantes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ avaient des adhérences qui s’intersectaient, il en serait de même pour les adhérences des deux composantes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$ qui les contiennent. Celles-ci s’intersecteraient donc le long d’une géodésique qui relève une feuille isolée de λ . Mais les seules feuilles isolées de λ sont les feuilles compactes; à cause de la modification apportée à λ près de ses feuilles compactes, on voit que c’est impossible. \square

On définit alors une partition \mathcal{T} de \mathbb{H}^2 en fermés : chaque fermé est, ou bien l’adhérence d’une composante $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$, ou bien une feuille de $\tilde{\lambda}'$ qui n’est pas dans l’adhérence d’une composante du complémentaire de $\tilde{\lambda}'$ dans \mathbb{H}^2 . C’est bien une partition d’après le fait 2.3.1.

L’action de Γ sur \mathbb{H}^2 induit une action sur \mathcal{T} . L’ensemble \mathcal{T} ne dépend pas du choix de l’épaississement λ' . En effet, si λ' et λ'' sont deux épaississements de λ , il existe un homéomorphisme de la surface \mathbb{H}^2/Γ , isotope à l’identité qui envoie λ' sur λ'' en transportant les mesures transverses; un relevé de cet homéomorphisme à \mathbb{H}^2 induit une bijection Γ -équivariante entre les partitions respectivement associées à $\tilde{\lambda}'$ et à $\tilde{\lambda}''$.

Nous allons munir l’ensemble \mathcal{T} d’une distance qui en fera un arbre réel. Considérons deux points de \mathcal{T} qui sont des adhérences de composantes C et C' du complémentaire de $\tilde{\lambda}'$; si la taille de l’épaississement λ' est suffisamment petite, il existe des points $x \in C$ et $x' \in C'$ tels que la géodésique $xx' \subset \mathbb{H}^2$ soit transverse à $\tilde{\lambda}'$ et intersecte chaque feuille en au plus un point. L’intersection de chaque fermé de \mathcal{T} et de xx' est donc un intervalle. La mesure transverse à $\tilde{\lambda}'$ dépose sur la géodésique xx' une mesure positive supportée sur $xx' \cap \tilde{\lambda}'$. Par intégration, cette mesure induit une distance sur l’ensemble des fermés de \mathcal{T} qui intersectent xx' .

On vérifie facilement que cette distance ne dépend pas des points x , x' , et de l’épaississement $\tilde{\lambda}'$. D’autre part, si F et F' sont deux fermés de \mathcal{T} , il existe deux fermés C et C' qui sont des adhérences de composantes du complémentaires de $\tilde{\lambda}'$ tels que F et F' séparent C de C' dans \mathbb{H}^2 (il suffit pour le voir, d’utiliser que l’ensemble limite du groupe Γ est égal à $\partial\mathbb{H}^2$).

Donc, la construction précédente définit un nombre $d(F, F')$ pour deux fermés de \mathcal{T} arbitraires; à nouveau, $d(F, F')$ ne dépend pas du choix des points C et C' .

Si λ' et λ'' sont deux épaississements de λ , il existe une bijection naturelle Γ -équivariante entre les partitions associées à ces épaississements qui préserve la fonction d .

Proposition 2.3.2. — *La fonction d est une distance qui fait de \mathcal{T} un arbre réel; l'action naturelle de Γ sur \mathcal{T} est isométrique.*

Démonstration. — Pour voir que la fonction d définit bien une distance, seule l'inégalité triangulaire demande une vérification. En raisonnant comme pour la définition de d , on voit que si l'épaississement λ' est suffisamment petit, il existe trois points $x \in C$, $x' \in C'$ et $x'' \in C''$ tels que les géodésiques xx' , xx'' et $x'x''$ intersectent chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$ en au plus un point. Alors, chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$ qui intersecte l'arc xx'' en un seul point intersecte aussi la réunion $xx' \cup x'x''$ en un seul point; d'où $d(C, C'') \leq d(C, C') + d(C', C'')$. La fonction d est donc une distance; elle est invariante par Γ puisque la mesure transverse $\tilde{\lambda}'$ l'est.

Soient C et C' deux fermés de \mathcal{T} ; soit xx' une géodésique de \mathbb{H}^2 entre un point $x \in C$ et un point $x' \in C'$ qui intersecte chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$ en au plus un point (comme dans la construction de d). Soit CC' l'ensemble des fermés de \mathcal{T} qui intersectent le segment géodésique xx' ; par construction, l'application $F \rightarrow \mathbb{R}$, qui associe au fermé F la distance $d(C, F)$, est une isométrie de CC' sur l'intervalle $[0, d(C, C')]$.

Nous appellerons l'arc ainsi construit entre les points C et C' le segment CC' .

Fait 2.3.3. — *L'intersection de deux segments CC' et CC'' est un segment.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que les points du segment CC' sont exactement les fermés de la partition \mathcal{T} qui intersectent l'arc géodésique xx' . Donc, l'intersection des segments CC' et CC'' est égale à l'ensemble des fermés de \mathcal{T} qui intersectent xx' et xx'' .

Puisque $\tilde{\lambda}'$ est un fermé, il existe une feuille $\ell \in \tilde{\lambda}'$ contenue dans un fermé $D \in \mathcal{T}$ telle que les feuilles de $\tilde{\lambda}'$ qui intersectent à la fois xx' et xx'' sont celles qui intersectent $x(\ell \cap xx')$. Alors, on a : $CC' \cap CC'' = CD$. \square

Pour terminer la démonstration de la proposition 2.3.2, il suffit de fixer un point $C \in \mathcal{T}$ et d'observer que \mathcal{T} est égal à la réunion des segments $C\gamma(C)$. D'après le fait 2.3.3, la réunion d'un nombre fini de ces segments est un arbre simplicial; la démonstration du lemme 2.1.2 montre alors que \mathcal{T} est un arbre réel. \square

Nous utiliserons dans le prochain chapitre le résultat suivant :

Fait 2.3.4. — *L'application canonique $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ est continue.*

Démonstration. — Soit $(x_i) \in \mathbb{H}^2$ une suite qui converge vers un point x_∞ ; il suffit d'étudier le cas où les points x_i (resp. x_∞) sont contenus dans des feuilles ℓ_i (resp. ℓ_∞) de $\tilde{\lambda}'$. Si la feuille ℓ_∞ est dans un "paquet de feuilles parallèles", les feuilles ℓ_i sont contenues dans le même paquet. Lorsque la feuille ℓ_∞ est dans la préimage d'un minimal exceptionnel de λ , tout arc transverse à ℓ_∞ intersecte les feuilles ℓ_i pour i suffisamment grand. Dans les deux cas, le fait 2.3.4 découle du fait que la mesure transverse à $\tilde{\lambda}'$ est sans atomes. \square

Rappelons que l'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ne dépend pas, à isométrie près, du choix de l'épaississement λ' . Elle *ne dépend que* de la lamination géodésique mesurée λ .

Définition. — L'arbre construit précédemment est appelé *l'arbre dual de la lamination géodésique mesurée λ* : on le note \mathcal{T}_λ . Une action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ isométrique à l'action $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ pour une certaine lamination géodésique mesurée $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ est dite *géométrique*.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de R. Skora qui sera démontré au chapitre 8.

Théorème 2.3.5 [Sk]. — *Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action minimale, non triviale et à petits stabilisateurs d'arêtes du groupe fuchsien Γ sur un arbre réel \mathcal{T} qui vérifie : pour tout élément parabolique $\gamma \in \Gamma$, la distance de translation de γ dans \mathcal{T} est nulle. Alors, l'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est géométrique.*

CHAPITRE 3

Laminations géodésiques et arbres réels

Dans ce chapitre, nous étudions les actions d'un groupe fuchsien Γ sur un arbre réel \mathcal{T} . Nous introduisons la propriété d'être *réalisée dans l'arbre* \mathcal{T} pour une lamination géodésique sur la surface \mathbb{H}^2/Γ : l'intérêt principal de cette notion est une propriété de "continuité" pour la topologie de Gromov, qui sera établie dans le chapitre 4. Dans la section 3.2, nous décrirons quelles laminations géodésiques sont réalisées dans le cas où l'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est *géométrique*.

3.1 Réalisation d'une lamination géodésique dans un arbre réel

Soit Γ un groupe fuchsien agissant sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 . Si $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} , il existe toujours une application continue Γ -équivariante $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$: c'est le cas par définition, lorsque l'action est géométrique (cf. 2.3), mais c'est aussi vrai en général (proposition 8.1.2).

Soit $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique et soit $\tilde{\mu}$ la préimage de μ dans le demi-plan \mathbb{H}^2 .

Définition. — La lamination géodésique μ est dite *réalisée* dans \mathcal{T} s'il existe une application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ continue et Γ -équivariante dont la restriction à chaque feuille de $\tilde{\mu}$ est injective. Une application f avec ces qualités est appelée une *réalisation de la lamination μ dans l'arbre \mathcal{T}* .

Exemple. — Si $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ est une géodésique fermée simple, telle que la distance de translation dans \mathcal{T} d'un élément $\bar{\mu} \in \Gamma$ représenté par μ n'est pas nulle, alors μ est réalisée. Pour voir ceci, choisissons une triangulation de la surface \mathbb{H}^2/Γ telle que la courbe fermée μ soit contenue dans le 1-squelette. On commence alors par définir une application Γ -équivariante f sur la préimage du 1-squelette de sorte que sa restriction à chaque composante

connexe de la préimage de μ soit un homéomorphisme : il suffit pour cela de se donner un homéomorphisme entre μ et la courbe, quotient de l'axe $A(\bar{\mu})$ par l'élément $\bar{\mu}$. Ainsi définie sur le 1-squelette, l'application se prolonge toujours en une application équivariante définie sur \mathbb{H}^2 (cf. proposition 8.1.2).

Lorsque l'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est "géométrique", on peut décrire exactement quelles sont les laminations géodésiques réalisées. Commençons par donner une autre définition, apparemment plus faible.

Définition. — Une lamination géodésique est dite *faiblement réalisée* lorsqu'il existe une application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ continue et Γ -équivariante dont la restriction aux feuilles de $\tilde{\mu}$ est *monotone*. L'application f s'appelle alors une *réalisation faible de la lamination μ dans l'arbre \mathcal{T}* .

Définition. — Une application définie sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathcal{T} est dite *monotone* lorsque la préimage de chaque point de son image est un intervalle borné.

La définition suivante va nous permettre de donner des exemples de laminations faiblement réalisées dans un arbre.

Définition. — On dit que la lamination mesurée μ *intersecte* la lamination λ lorsque chaque feuille du support de μ intersecte transversalement une feuille du support de λ (cf. A.3).

Proposition 3.1.1. — Soit $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ une action du groupe Γ sur l'arbre dual de la lamination géodésique mesurée λ ; soit $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique mesurée qui intersecte λ . Alors μ est faiblement réalisée dans \mathcal{T}_λ .

Démonstration. — Rappelons que la construction de l'arbre dual \mathcal{T}_λ de la lamination géodésique λ utilise un "épaississement" λ' de λ et fournit une application continue, Γ -équivariante du disque \mathbb{H}^2 dans \mathcal{T}_λ : cette application a la propriété que la préimage d'un point de \mathcal{T}_λ est, ou bien une feuille de $\tilde{\lambda}'$ ou bien l'adhérence d'une composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$.

L'hypothèse que μ intersecte λ entraîne :

Lemme 3.1.2. — Il existe un épaississement λ' de λ tel que pour chaque feuille ℓ de $\tilde{\mu}$, on a :

- (i) ℓ intersecte transversalement chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$ en au plus un point ;
- (ii) l'intersection de ℓ avec l'adhérence de chaque composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ est soit vide, soit un intervalle borné.

Démonstration. — Le choix d'un épaississement λ' dépend en particulier d'un nombre réel r : on remplace alors chaque géodésique fermée g de λ par la famille des courbes à distance constante $t \leq r$ de g . Notons λ_r la lamination géodésique λ ainsi modifiée (cf. section 2.3).

Une géodésique ℓ de $\tilde{\mu}$ intersecte chaque géodésique de $\tilde{\lambda}$ en au plus un point; l'intersection de ℓ et d'une feuille de $\lambda_r - \tilde{\lambda}$ (à distance $t \leq r$ d'une géodésique $\tilde{\gamma} \in \tilde{\lambda}$), est soit vide, soit un point d'intersection tangentielle, soit un point d'intersection transverse, soit deux points.

Si cette intersection est formée d'un point d'intersection tangentielle ou de deux points, la feuille ℓ est à une distance inférieure à r de la géodésique $\tilde{\gamma}$ et est disjointe, mais non asymptote, de cette même géodésique. Notons $\gamma \in \Gamma$ un élément hyperbolique qui stabilise la géodésique $\tilde{\gamma}$. Il existe une constante $r = r(\gamma) > 0$ telle que, si une géodésique ℓ de \mathbb{H}^2 est disjointe, non asymptote de $\tilde{\gamma}$ et est à une distance inférieure à r de $\tilde{\gamma}$, alors, on a : $\ell \cap \gamma(\ell) \neq \emptyset$ (cf. fait A.2.5). Comme la lamination λ ne contient qu'un nombre fini de "paquets" de feuilles parallèles, on en déduit que pour r suffisamment petit, l'épaississement λ_r vérifie le lemme 3.1.2 (i).

Puisque chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$ disconnecte \mathbb{H}^2 , l'intersection de ℓ avec l'adhérence d'une composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ est soit vide, soit un intervalle. Une demi-géodésique contenue dans ℓ ne peut pas être entièrement contenue dans une composante de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$: sinon l'adhérence de sa projection sur la surface contiendrait une feuille qui, ou bien est disjointe du support de λ , ou bien y est contenue. C'est contraire à l'hypothèse que μ intersecte λ . Donc l'intersection de ℓ et d'une composante de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$ est un intervalle borné. Ceci démontre le lemme 3.1.2. \square

Si l'application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ est l'application canonique construite à partir de l'épaississement λ' fourni par le lemme 3.1.2, elle réalise μ dans \mathcal{T} . \square

Nous aurons besoin d'un énoncé un peu plus général que celui de la proposition 3.1.1.

Corollaire 3.1.3. — *Soit \mathcal{T}_λ l'arbre dual de λ , une lamination géodésique mesurée. Soit $\mu \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique, réunion du support d'une lamination mesurée $\bar{\mu}$ et d'un nombre fini de géodésiques non compactes; supposons que $\bar{\mu}$ intersecte la lamination λ . Alors, la lamination μ est faiblement réalisée dans \mathcal{T} .*

Démonstration. — En effet, la démonstration du lemme 3.1.2 permet de choisir un épaississement λ' tel que chaque feuille de $\tilde{\mu}$ intersecte transversalement en au plus un point chaque feuille de $\tilde{\lambda}'$. Chaque demi-feuille de $\mu - \bar{\mu}$ "spirale" sur une composante de $\bar{\mu}$ (fait A.3.7). Puisque $\bar{\mu}$ intersecte λ , une demi-feuille de $\tilde{\mu}$ ne peut être entièrement contenue dans une composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}'$. Donc μ est réalisée dans l'arbre \mathcal{T}_λ , d'après la démonstration de la proposition 3.1.1. \square

Nous allons montrer maintenant que la propriété d'être faiblement réalisée est équivalente à la propriété, apparemment plus forte, d'être réalisée.

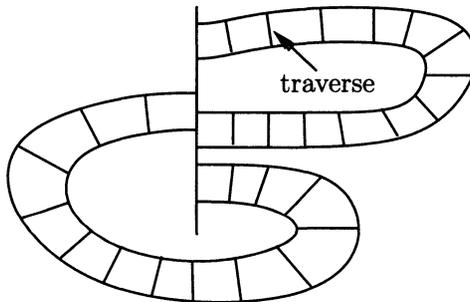
Théorème 3.1.4. — Soit \mathcal{T} l'arbre dual d'une lamination géodésique mesurée λ ; soit μ une lamination géodésique vérifiant les mêmes hypothèses que dans le corollaire 3.1.3. Alors μ est réalisée dans l'arbre \mathcal{T} .

Nous allons montrer que l'application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ qui réalise faiblement μ peut être homotopée en une application qui réalise μ . Nous aurons besoin de la notion de réseau ferroviaire (cf. [Bo], [Pe]).

Définitions. — Un réseau ferroviaire dans la surface \mathbb{H}^2/Γ est la donnée d'une famille \mathcal{R} formée d'un nombre fini de "rectangles" R_i tels que :

- (i) chaque rectangle R_i est l'image d'un rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$ par une immersion qui identifie au plus les côtés verticaux $0 \times [0, 1]$ et $1 \times [0, 1]$ le long d'un intervalle non réduit à un point;
- (ii) deux rectangles de \mathcal{R} s'intersectent au plus le long d'un intervalle non réduit à un point qui est contenu dans l'un de leurs côtés verticaux;
- (iii) chaque composante connexe de la réunion des images des côtés verticaux est un arc plongé dans \mathbb{H}^2/Γ .

Figure 3-1



On appellera une composante connexe de la réunion des images des côtés verticaux un *aiguillage*.

Chaque rectangle R_i est feuilleté par les segments $p \times [0, 1]$, qu'on appelle les *traverses* : on appellera ce feuilletage le *feuilletage par les traverses* (cf. figure 3-1).

Une lamination géodésique μ est portée par un réseau ferroviaire \mathcal{R} lorsque :

- (i) μ est contenue dans la réunion des rectangles de \mathcal{R} ;
- (ii) pour tout rectangle R_i , l'intersection $\mu \cap R_i$ est non vide, contenue dans l'image de $[0, 1] \times]0, 1[$ et chaque feuille de μ est transverse aux traverses.

Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} . Un réseau ferroviaire \mathcal{R} est dit *réalisé* dans l'arbre \mathcal{T} s'il existe une application continue Γ -équivariante $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, telle que (cf. figure 3-2) :

- (i) la restriction de f à tout rectangle \tilde{R}_i dans la préimage de \mathcal{R} est constante sur les traverses;

- (ii) la restriction de f à tout segment contenu dans un rectangle \tilde{R}_i transversalement aux traverses est injective;
- (iii) les segments de \mathcal{T} , images par f de deux rectangles adjacents de la préimage de \mathcal{R} situés de deux côtés différents du même relevé d'un aiguillage, ont des intérieurs disjoints.

On dit alors que l'application f est une *réalisation* du réseau \mathcal{R} dans \mathcal{T} .

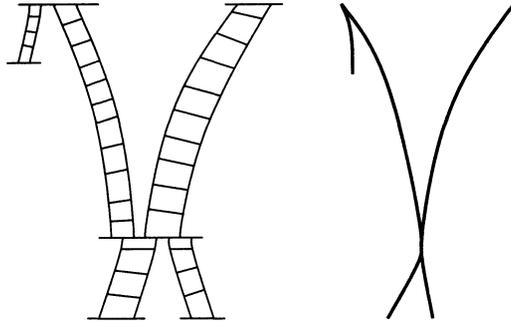


Figure 3-2

Les propriétés vérifiées par une réalisation entraînent immédiatement que la restriction de f à tout arc immergé dans la réunion des rectangles \tilde{R}_i transversalement au feuilletage par les traverses est injective. Le résultat suivant découle des définitions.

Fait 3.1.5. — Si \mathcal{R} est un réseau ferroviaire réalisé dans l'arbre \mathcal{T} , alors toute lamination géodésique portée par \mathcal{R} est réalisée dans \mathcal{T} .

On aura besoin aussi de la notion de réseau ferroviaire “faiblement réalisé” dans un arbre.

Définition. — Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} . Un réseau ferroviaire \mathcal{R} est dit *faiblement réalisé* dans l'arbre \mathcal{T} s'il existe une application continue $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, Γ -équivariante et telle que :

- (i) la restriction de f à chaque rectangle \tilde{R}_i est constante sur les traverses;
- (ii) la restriction de f à tout segment $[0, 1] \times p$ contenu dans un rectangle \tilde{R}_i est monotone, non constante;
- (iii) les segments de \mathcal{T} , images par f de deux rectangles de la préimage de \mathcal{R} situés de deux côtés différents du même relevé d'un aiguillage, ont des intérieurs disjoints.

On dit alors que l'application f est une *réalisation faible* du réseau \mathcal{R} dans \mathcal{T} .

Cette définition équivaut à dire que la restriction de f à tout droite proprement plongée dans la réunion des rectangles \tilde{R}_i de façon transverse au feuilletage par les traverses, est monotone.

Lemme 3.1.6. — Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} ; soit \mathcal{R} un réseau ferroviaire faiblement réalisé dans \mathcal{T} . Alors \mathcal{R} est réalisé dans \mathcal{T} .

Démonstration. — Soit f une réalisation faible de \mathcal{R} dans l'arbre \mathcal{T} . Soit \tilde{R}_i le relevé à \mathbb{H}^2 d'un rectangle de \mathcal{R} . Par hypothèse, la restriction de f à ce rectangle est une application constante sur les traverses $p \times [0, 1]$ et monotone sur le segment $[0, 1] \times 0$. On peut homotoper la restriction $f|_{\tilde{R}_i}$ relativement aux côtés verticaux en une application constante sur les traverses, et dont la restriction au segment $[0, 1] \times 0$ soit un paramétrage du segment $f(0, 0)f(1, 0)$.

Pour recoller ces homotopies, on utilise le résultat suivant :

Fait 3.1.7. — Chaque rectangle de \mathcal{R} se relève à \mathbb{H}^2 en un rectangle plongé.

Démonstration. — Si le relevé \tilde{R}_i d'un rectangle de \mathcal{R} n'était pas plongé, alors ses deux côtés verticaux s'intersecteraient dans \mathbb{H}^2 . Choisissons un arc α , contenu dans \tilde{R}_i , transverse au feuilletage par les traverses et dont les deux extrémités sont dans cette intersection. Puisque f est constante sur les traverses, les images des deux extrémités de α seraient égales. Donc l'image $f(\alpha)$ serait un point, puisque la restriction de f à α est une application monotone. Ceci contredirait que la restriction de f à α est non constante. \square

D'après le fait 3.1.7, chaque rectangle \tilde{R}_i est plongé et d'après la définition d'un réseau ferroviaire, deux tels rectangles s'intersectent au plus le long d'un intervalle contenu dans un côté vertical. Donc, les diverses applications que nous venons de définir sur chacun des rectangles \tilde{R}_i se recollent en une application continue f' qui est Γ -équivariante et définie sur la réunion des rectangles \tilde{R}_i . Chaque composante du complémentaire de cette réunion est une surface dont le bord est contenu dans la réunion des côtés horizontaux des rectangles \tilde{R}_i . Par construction, sur chaque relevé de ces courbes de bord les applications f' et f ont la même image (seules les applications diffèrent). Donc, après une homotopie supportée dans un collier autour de ces courbes, on peut supposer que les applications f et f' sont égales sur le bord d'un voisinage régulier de la préimage de \mathcal{R} dans \mathbb{H}^2 . On définit alors l'application f' dans le complémentaire de ce voisinage comme égale à f .

Il nous reste à voir que l'application f' est une réalisation du réseau ferroviaire \mathcal{R} . Ceci provient directement de la construction. En effet, l'application f' est constante sur les traverses, et injective sur chaque segment contenu dans un rectangle de manière transverse aux traverses : les images de deux rectangles qui sont situés de deux côtés différents d'un même aiguillage sont des segments de \mathcal{T} d'intérieurs disjoints, puisque les images respectives de ces rectangles par f et par f' sont égales et que cette propriété est déjà vérifiée par f . \square

3.2 Démonstration du théorème 3.1.4

Pour démontrer le théorème 3.1.4, il nous suffit de voir d'après le lemme 3.1.6 et le fait 3.1.5, que toute lamination géodésique μ faiblement réalisée dans \mathcal{T} est portée par un réseau ferroviaire faiblement réalisé dans \mathcal{T} .

Par hypothèse, la lamination μ est réunion d'un nombre fini de géodésiques non compactes et du support d'une lamination mesurée $\bar{\mu}$.

Cette dernière se décompose en la réunion disjointe d'un nombre fini de composantes qui sont, ou bien des géodésiques fermées compactes, ou bien des minimaux exceptionnels; chaque bout d'une géodésique de $\mu - \bar{\mu}$ "spirale" sur une composante de la lamination mesurée $\bar{\mu}$ (fait A.3.7).

Nous utiliserons l'application f construite dans la démonstration du corollaire 3.1.3 pour montrer que μ était faiblement réalisée.

Il existe alors des arcs plongés $\kappa_i \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$, transverses à μ , en nombre égal au nombre des composantes de $\bar{\mu}$ et tels que :

- (i) chaque arc κ_i intersecte transversalement une seule composante de $\bar{\mu}$;
- (ii) l'application f est constante sur chaque relevé à \mathbb{H}^2 d'un arc κ_i .

Ces arcs κ_i sont simplement des arcs contenus dans des feuilles de λ , qui intersectent μ et de longueur suffisamment courte de sorte qu'ils vérifient (i).

Notation. — Si v est un point sur une feuille de $\tilde{\mu}$, on notera $v+T$ et $v-T$ les deux points sur la feuille passant par v , situés à la distance T de v .

Puisque la lamination μ est faiblement réalisée, l'application f est monotone et non constante sur chaque feuille de $\tilde{\mu}$. Il existe donc, pour tout $v \in \tilde{\mu}$ un temps $T(v) > 0$ tel que les points $v + T(v)$ et $v - T(v)$ ont des images différentes dans \mathcal{T} ; puisque f est monotone, les images des points $v + t$ et $v - t$ sont alors différentes pour $t \geq T(v)$. Puisque f est équivariante, continue et que le support de μ est compact, on peut choisir un réel $T > 0$ commun à tous les points $v \in \tilde{\mu}$.

Il existe alors, par continuité, un nombre $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall t > T, \quad \forall v \in \tilde{\mu}, \quad d(f(v-t), f(v+t)) > \alpha.$$

Chaque demi-géodésique contenue dans une feuille de $\mu - \bar{\mu}$ s'accumule sur une composante minimale de $\bar{\mu}$ (fait A.3.7) : choisissons sur chaque feuille ℓ de $\mu - \bar{\mu}$ un intervalle k_ℓ de longueur supérieure à $2T$. On peut supposer, quitte à les rétrécir, que les arcs κ_i sont disjoints de ces intervalles k_ℓ .

Considérons un arc κ_i qui intersecte une composante de $\bar{\mu}$ qui est un *minimal exceptionnel* (cf. A.3). Soit ℓ une feuille de $\bar{\mu}$ qui intersecte κ_i ; soit $p \in \ell \cap \kappa_i$. Puisque c'est une feuille d'un minimal exceptionnel, ℓ n'est pas compacte. Donc, quitte à remplacer l'arc κ_i par un arc plus petit qui contient p , on peut supposer que chacun des deux intervalles $[p-2T, p[\subset \ell$

et $]p, p+2T] \subset \ell$ n'intersecte pas κ_i . Par continuité toute feuille ℓ' qui intersecte κ_i en un point p' contenu dans un voisinage $\mathcal{V}(p)$ de p dans κ_i vérifiera la même propriété, c'est-à-dire que les intervalles $[p' - 2T, p'[$ et $]p', p' + 2T]$ contenus dans la feuille de μ passant par le point p' n'intersectent pas κ_i . On remplacera l'arc κ_i par ce voisinage que nous noterons toujours κ_i .

On ne peut pas faire la même construction avec l'arc κ_i transverse à une composante de $\bar{\mu}$ qui est une feuille compacte, pour la simple raison que la feuille compacte en question peut très bien avoir une longueur inférieure à $2T$. Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément représenté par cette feuille compacte : puisque la lamination μ est faiblement réalisée dans \mathcal{T} , la distance de translation de l'élément γ dans \mathcal{T} n'est pas nulle. Donc la distance dans \mathcal{T} entre l'image d'un relevé de κ_i situé sur l'axe de γ et celle de son translaté par γ n'est pas nulle, égale exactement à la distance de translation $\delta(\gamma)$ de l'élément γ dans \mathcal{T} .

Notons pour chacun des arcs κ_i , κ_i^+ et κ_i^- les deux côtés de κ_i dans la surface S : on considèrera un point de $\kappa_i^\pm \cap \mu$ comme un vecteur unitaire tangent à μ .

Pour chaque point x de $\kappa_i^\pm \cap \bar{\mu}$, la demi-feuille de $\bar{\mu}$ qui est issue dans la direction x intersecte κ_i en un premier point x' ; par continuité les demi-feuilles de μ issues dans une direction voisine intersecteront κ_i^\pm la première fois dans une direction voisine. Ainsi on obtient deux intervalles fermés I_x , et $I_{x'}$ contenus dans κ_i^+ ou κ_i^- qui ont la propriété que chaque demi-feuille issue de I_x intersecte une première fois κ_i^\pm en un point de $I_{x'}$ et réciproquement.

Si ces intervalles sont choisis suffisamment petits et si leurs extrémités sont disjointes de μ , les intervalles I_x et $I_{x'}$ sont les deux côtés verticaux d'un rectangle R_x image de $[0, 1] \times [0, 1]$ par une immersion qui identifie au plus deux intervalles sur les côtés verticaux ; la trace de μ sur ce rectangle est transverse aux traverses et l'intersection $\mu \cap R_x$ est contenue dans $[0, 1] \times]0, 1[$ (cf. figure 3-3).

Pour chaque vecteur $x \in \kappa_i^\pm \cap (\mu - \bar{\mu})$, l'argument est toujours valable à condition que la demi-feuille de μ issue de x rencontre l'arc κ_i . Si ce n'est plus le cas, elle rencontre une première fois un autre intervalle κ_j^\pm en un point x' . On considère alors un intervalle $I_x \subset \kappa_i^\pm$ tel que l'intersection $I_x \cap \mu$ soit réduite à p et un intervalle $I_{x'} \subset \kappa_j^\pm$ dont l'intersection avec μ soit réduite à x' (rappelons que les feuilles de $\mu - \bar{\mu}$ sont isolées).

Finalement chaque point de $\mu \cap (\cup \kappa_i^\pm)$ est contenu dans l'intérieur d'un intervalle $I_x \subset \kappa_i^\pm$; par construction, les extrémités de ces intervalles sont disjointes de μ . La trace des intervalles I_x sur $\mu \cap (\cup \kappa_i^\pm)$ est donc un recouvrement ouvert du compact $\mu \cap (\cup \kappa_i^\pm)$ dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. En prenant des intersections, on peut se ramener au cas où les intervalles de ce recouvrement fini ont des intérieurs disjoints. On obtient ainsi des rectangles R_i dont les côtés verticaux sont contenus dans la réunion

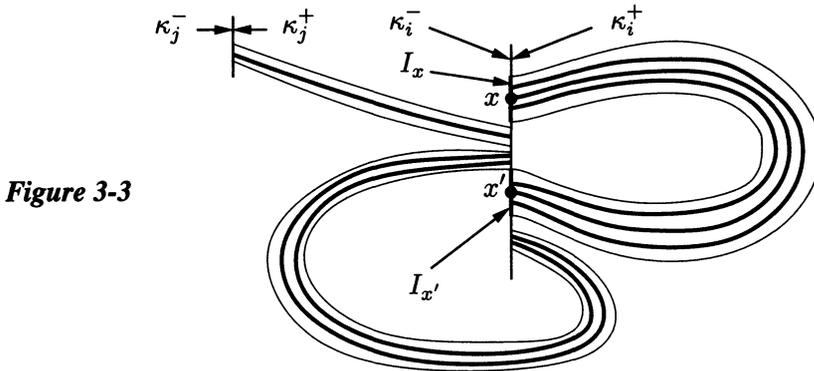


Figure 3-3

des arcs κ_i ; par une petite isotopie de ces rectangles, constante sur les côtés verticaux, l'intersection de deux tels rectangles est contenue dans un côté vertical. La réunion de ces rectangles définit donc un réseau ferroviaire \mathcal{R} . Par construction, la trace de la lamination μ sur chacun de ces rectangles est transverse au feuilletage par les traverses : donc la lamination μ est portée par le réseau \mathcal{R} .

Pour terminer, nous allons construire à partir de l'application f qui réalise faiblement μ une application qui réalise $\tilde{\mu}$. La préimage de \mathcal{R} dans le disque \mathbb{H}^2 est une réunion de rectangles; soit R_i un tel relevé. Les côtés verticaux de \tilde{R}_i sont contenus dans des arcs $\tilde{\kappa}_j$; par construction, l'application f est constante sur chacun de ces arcs. Donc, l'image par l'application f de chaque composante connexe de $\tilde{\mu} \cap \tilde{R}_i$ est un segment $a_i b_i \subset \mathcal{T}$ qui ne dépend que de \tilde{R}_i .

Fait 3.2.1. — Les points a_i et b_i sont distincts.

Démonstration. — Si l'un des côtés du rectangle R_i n'est pas contenu dans un intervalle κ_i transverse à une feuille compacte de $\tilde{\mu}$, chaque composante de $\mu \cap R_i$ a une longueur supérieure à $2T$; les points a_i et b_i sont distincts d'après le choix de la constante T .

Lorsque les deux côtés verticaux de R_i sont contenus dans un arc transverse à une courbe fermée γ de $\tilde{\mu}$, l'un des côtés verticaux de \tilde{R}_i est égal au translaté de l'autre par l'élément γ . Les points a_i et b_i sont donc distincts puisque la distance de translation de γ n'est pas nulle. \square

On définit maintenant une application f' sur le rectangle \tilde{R}_i en imposant que f' soit constante sur chaque traverse et que sa restriction à une composante de $\tilde{\mu} \cap \tilde{R}_i$ soit un homéomorphisme sur le segment de \mathcal{T} qui joint les images par f des deux côtés verticaux de \tilde{R}_i .

On peut imposer que l'application f' soit équivariante sur la préimage de R_i . C'est possible puisque les rectangles R_i , s'ils ne sont pas plongés, se recoupent au plus le long d'un intervalle contenu dans un côté vertical et que

sur les côtés verticaux des rectangles dans la préimage de \mathcal{R} , l'application f' coïncide avec f .

Toujours pour cette dernière raison, les applications f' définies sur les divers rectangles \tilde{R}_i se recollent en une application continue équivariante qu'on notera encore f' .

Pour prolonger l'application ainsi définie au complémentaire de la réunion des rectangles R_i , on considère une triangulation de S telle que la réunion des rectangles R_i soit une réunion de 2-cellules. On peut alors prolonger l'application f' définie sur la réunion des rectangles \tilde{R}_i en une application continue, Γ -équivariante à valeurs dans \mathcal{T} (cf. proposition 8.1.2). Par construction, cette application réalise \mathcal{R} .

La lamination géodésique μ est portée par le réseau \mathcal{R} . Donc d'après le fait 3.1.5, f' réalise μ . Ceci termine la démonstration du théorème 3.1.4.

Nous utiliserons le théorème 3.1.4 sous la forme suivante :

Proposition 3.2.2. — *Soit \mathcal{T}_λ l'arbre dual d'une lamination géodésique mesurée λ ; soit μ une lamination géodésique qui contient le support d'une lamination géodésique mesurée arationnelle $\bar{\mu}$ qui intersecte λ . Alors μ est réalisée dans l'arbre \mathcal{T}_λ .*

Démonstration. — Puisque la lamination mesurée $\bar{\mu}$ est arationnelle, son complémentaire dans μ ne contient qu'un nombre fini de géodésiques et celles-ci sont toutes non compactes (fait A.3.9). La proposition 3.2.2 découle donc du théorème 3.1.4. \square

CHAPITRE 4

Laminations géodésiques et topologie de Gromov

Soit Γ un groupe fuchsien et soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles et discrètes de Γ dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ qui converge au sens de Gromov vers une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} . D'après la proposition 2.2.11, si $\gamma \in \Gamma$ est un élément dont la distance de translation dans l'arbre \mathcal{T} est non nulle, alors la suite $(\ell_i(\gamma))$ des longueurs des géodésiques de $\mathbb{H}^n/\rho_i(\Gamma)$ dans la classe d'homotopie de γ tend vers l'infini. Nous aurons besoin dans la démonstration du théorème de la limite double, d'un critère qui permette de contrôler la convergence de la suite $(\ell_i(\gamma))$ vers l'infini d'une manière *uniforme* en γ . Pour ceci, nous utiliserons les résultats du chapitre précédent sur la réalisation des laminations géodésiques dans les arbres réels et étudierons le comportement de la notion de réalisation vis-à-vis de la topologie de Gromov.

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 4.0.1. — *Soit \mathcal{T}_λ l'arbre dual d'une lamination géodésique mesurée $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$; soit (ρ_i) une suite de représentations fidèles et discrètes de Γ dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ qui converge au sens de Gromov vers l'action de Γ sur l'arbre \mathcal{T}_λ ; soit $\bar{\mu}$ une lamination géodésique mesurée arationnelle qui intersecte λ . Alors, pour tout $N > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\bar{\mu})$ de $\bar{\mu}$ dans l'espace projectif $\mathcal{PML}(S)$ tel que, pour toutes les géodésiques μ' contenues dans $\mathcal{V}(\bar{\mu})$ et pour tout i suffisamment grand, on a :*

$$\frac{\ell_i(\mu')}{\ell(\mu')} \geq N.$$

Dans l'énoncé précédent, l'intérieur de la surface compacte S est identifié au quotient du demi-plan \mathbb{H}^2 par le groupe fuchsien Γ ; $\ell(\mu')$ désigne la longueur de la géodésique μ' dans la surface \mathbb{H}^2/Γ , $\ell_i(\mu')$ désigne la longueur de la géodésique de la variété $\mathbb{H}^n/\rho_i(\Gamma)$ dans la même classe d'homotopie que μ' .

Pour démontrer le théorème 4.0.1, on raisonnera par l'absurde. Il existe alors une constante N et une suite de géodésiques (μ_i) qui tend vers $\bar{\mu}$ dans $\mathcal{PML}(S)$ telles que :

$$\frac{\ell_i(\mu_i)}{\ell(\mu_i)} \leq N.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les géodésiques μ_i convergent pour la topologie de Hausdorff vers une lamination géodésique μ ; la lamination μ contient le support de la lamination géodésique mesurée $\bar{\mu}$ (affirmation A.3.2).

Puisque la lamination $\bar{\mu}$ est arationnelle et qu'elle intersecte λ , la lamination μ est réalisée dans l'arbre \mathcal{T}_λ (proposition 3.2.2). En fait, d'après la démonstration du théorème 3.1.4, la réalisation de la lamination μ se factorise par la réalisation d'un réseau ferroviaire \mathcal{R} qui porte μ .

La réalisation f du réseau ferroviaire \mathcal{R} vérifie :

- (i) l'image de chaque rectangle de la préimage de \mathcal{R} est un segment non dégénéré de \mathcal{T} ;
- (ii) les images de deux rectangles \tilde{R}_1 et \tilde{R}_2 qui s'intersectent le long d'un intervalle (contenu dans un côté vertical) se recollent en un segment de \mathcal{T} .

La première partie de la démonstration du théorème 4.0.1 consiste à montrer qu'il existe une application Γ -équivariante $f_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^n$, avec des propriétés comparables à celles de f . Pour cela, nous allons introduire la notion de "réalisation d'un réseau ferroviaire \mathcal{R} pour une action de Γ sur l'espace hyperbolique".

4.1 Réalisation d'un réseau ferroviaire dans une variété hyperbolique

Rappelons que la convergence des représentations ρ_i vers l'arbre \mathcal{T}_λ au sens de Gromov signifie l'existence d'une suite de nombres réels (ε_i) tendant vers 0 telle que les fonctions longueurs des actions ρ_i du groupe Γ sur la variété $\varepsilon_i \mathbb{H}^n$ convergent vers la fonction longueur de l'action de Γ sur l'arbre \mathcal{T}_λ (cf. proposition 2.2.3).

Posons $\varepsilon_i \mathbb{H}^n = X_i$ et notons d_i la distance de X_i ; observons que X_i est une variété simplement connexe à courbure sectionnelle constante, égale à $-1/\varepsilon_i^2$.

Soit $\mathcal{R} = \{R_j\}$ un réseau ferroviaire contenu dans la surface \mathbb{H}^2/Γ .

Définition. — Soit δ un nombre réel positif inférieur à π . Une δ -réalisation du réseau \mathcal{R} pour l'action (X_i, ρ_i) est une application continue, Γ -équivariante $F : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$ telle que :

- (i) F est constante sur les traverses des rectangles relevés \tilde{R}_j ;

- (ii) dans chaque rectangle $\tilde{R}_j \simeq [0, 1] \times [0, 1]$, la restriction de F à $[0, 1] \times 0$ est injective et son image est une géodésique de X_i ;
- (iii) si deux rectangles \tilde{R}_1 et \tilde{R}_2 sont situés dans \mathbb{H}^2 de deux côtés différents d'un même aiguillage κ , les géodésiques $F(\tilde{R}_1)$ et $F(\tilde{R}_2)$ qui s'intersectent au point $F(\kappa)$ ont des vecteurs tangents qui font en ce point un angle contenu dans l'intervalle $[\pi - \delta, \pi]$.

Remarquons tout de suite que si $F : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$ est une δ -réalisation du réseau ferroviaire \mathcal{R} et si $\tilde{\gamma}$ est une géodésique dans la préimage d'une géodésique γ portée par le réseau \mathcal{R} , la courbe $F(\tilde{\gamma})$ se projette dans $X_i/\rho_i(\Gamma)$ sur une géodésique brisée $F(\gamma)^*$ dont les angles aux coins sont tous dans l'intervalle $[\pi - \delta, \pi]$ et dont chaque côté a la longueur de l'un des segments géodésiques $F(\tilde{R}_j)$. Lorsque δ est "petit" en fonction du plus petit de ces côtés, la géodésique fermée homotope à $F(\gamma)^*$ est "proche" de $F(\gamma)^*$ et les longueurs de ces deux courbes sont du même ordre de grandeur. Cette propriété bien connue des variétés de courbure négative sera expliquée à la fin du chapitre et entraînera le théorème 4.0.1.

Si une lamination géodésique μ est portée par un réseau ferroviaire \mathcal{R} qui est réalisé dans l'arbre \mathcal{T} , on aimerait en déduire une δ -réalisation du réseau \mathcal{R} pour les actions (X_i, ρ_i) , lorsque i est suffisamment grand. Toutefois cette dernière propriété ne semble pas nécessairement vraie et on va devoir modifier le réseau \mathcal{R} en un nouveau réseau qui porte encore μ pour qu'elle le soit. Cette modification est l'opération de "subdivision" que nous allons maintenant décrire.

Définition de l'opération de subdivision. — Soit $\mathcal{R} = \{R_j\}$ un réseau ferroviaire portant une lamination géodésique μ . Alors, par définition, chaque rectangle de \mathcal{R} est l'image du rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$ par une immersion qui identifie au plus un intervalle de $0 \times [0, 1]$ avec un intervalle de $1 \times [0, 1]$. On commence par définir les aiguillages d'un nouveau réseau \mathcal{R}' comme les arcs $1/2 \times [0, 1]$, pour tous les rectangles R_j de \mathcal{R} .

Chaque côté vertical A d'un rectangle R_j intersecte les côtés verticaux d'autres rectangles R_k , et éventuellement l'autre côté vertical du rectangle R_j en des intervalles d'intérieurs disjoints $I_1, \dots, I_r, \dots, I_\ell$. Pour tout point p de ∂I_r dans l'intérieur de A , soit k_p un arc disjoint de μ , transverse au feuilletage vertical de R_j , dont une extrémité est le point p et l'autre est dans le segment $1/2 \times [0, 1]$. Par découpage de R_j le long des arcs k_p , on obtient une réunion de rectangles plongés, dont un côté vertical est l'intervalle $A \cap I_r$ et l'autre côté vertical est contenu dans $1/2 \times [0, 1]$.

Ne conservons maintenant parmi les rectangles obtenus que ceux qui intersectent la lamination μ . Chaque composante de $A \cap I_r$ est dans le bord d'exactement deux de ces rectangles R_r^1 et R_r^2 ; la réunion de ces deux rectangles (plongés) est un rectangle R_r' immergé par une application qui identifie éventuellement deux intervalles contenus dans les côtés verticaux; en fait, R_r'

est un rectangle plongé sauf dans le cas où ses deux côtés verticaux sont contenus dans la même traverse, auquel cas ils s'intersectent au plus le long d'un intervalle. Sur chacun des rectangles R_r^1 et R_r^2 , le feuilletage vertical de \mathcal{R} induit un feuilletage en intervalles; ces deux feuilletages se recollent en un feuilletage équivalent au feuilletage vertical sur R_r' . Par construction, la lamination μ intersecte le rectangle R_r' transversalement à ce feuilletage vertical et est disjointe des deux côtés horizontaux.

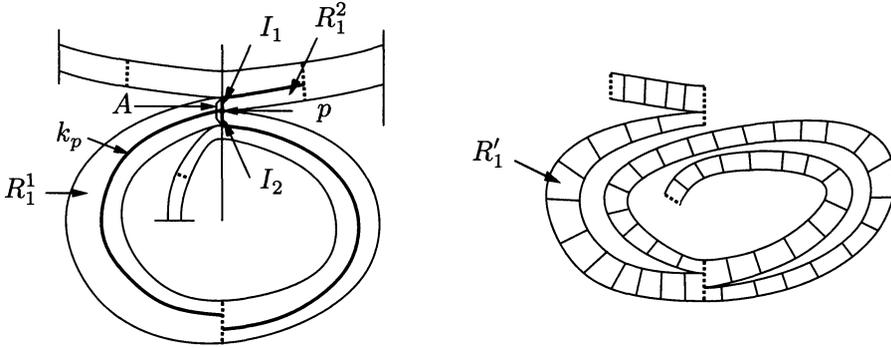


Figure 4-1

Soit \mathcal{R}' la collection des rectangles R_r' (cf. figure 4-1). Tout côté vertical d'un rectangle de \mathcal{R}' est contenu dans la traverse médiane d'un rectangle de \mathcal{R} ; après une isotopie, deux rectangles quelconques de \mathcal{R}' s'intersecteront uniquement le long de leurs côtés verticaux. Alors \mathcal{R}' est un réseau ferroviaire qui porte μ : nous l'appellerons *la première subdivision de \mathcal{R} le long de μ* .

Proposition 4.1.1. — Soit \mathcal{T}_λ l'arbre dual d'une lamination géodésique mesurée $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ et soit (ρ_i) une suite de représentations de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ qui converge vers l'arbre \mathcal{T}_λ au sens de Gromov; soit μ une lamination géodésique qui contient le support d'une lamination arationnelle $\bar{\mu}$ qui intersecte λ . Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $i_0(\delta)$, tel que si $i \geq i_0(\delta)$, la lamination μ est portée par un réseau ferroviaire \mathcal{R}' qui est δ -réalisé pour l'action (X_i, ρ_i) .

Cette proposition reste vraie lorsqu'on suppose, plus généralement, que μ est formée d'un nombre fini de géodésiques non compactes et du support d'une lamination géodésique mesurée. Mais comme nous ne l'utiliserons que lorsque μ est arationnelle, nous ne la démontrerons que dans ce cas. La démonstration dans le cas général suivrait exactement la même démarche.

Démonstration. — Le support de la lamination mesurée arationnelle $\bar{\mu}$ est un minimal exceptionnel (fait A.3.8). D'après la démonstration du théorème 3.1.4, on peut supposer que la lamination μ est portée par un réseau ferroviaire \mathcal{R} qui a un seul aiguillage κ et qui est réalisé dans l'arbre \mathcal{T}_λ .

Toujours d'après la démonstration du théorème 3.1.4, l'aiguillage κ est une transversale de $\bar{\mu}$ contenue dans une feuille de λ' , pour un certain épaisseur

ment λ' de λ . Rappelons que dans la construction du réseau ferroviaire \mathcal{R} , on peut choisir comme aiguillage κ une transversale de $\bar{\mu}$, contenue dans n'importe quelle feuille de λ' .

Soit $p \in \mathcal{T}_\lambda$ le point fourni par la proposition 2.2.3. D'après la description de l'arbre \mathcal{T}_λ , le point p est l'image d'une certaine feuille de $\tilde{\lambda}'$ par l'application canonique $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$. Choisissons l'aiguillage κ contenu dans l'image de cette feuille sur la surface \mathbb{H}^2/Γ .

Le réseau \mathcal{R} étant construit à partir de cet aiguillage, soit \mathcal{R}' la première subdivision de \mathcal{R} le long de μ ; nous allons maintenant construire, lorsque i est suffisamment grand, une δ -réalisation de \mathcal{R}' pour les actions (X_i, ρ_i) .

Soit f la réalisation de \mathcal{R} et choisissons dans le revêtement universel \mathbb{H}^2 , un relevé $\tilde{\kappa}$ de κ de sorte que $p = f(\tilde{\kappa})$.

Nommons les deux côtés de l'arc $\tilde{\kappa}$ dans \mathbb{H}^2 respectivement côté positif et côté négatif : un rectangle de $\tilde{\mathcal{R}}$ sera dit *positif* ou *négatif* selon qu'il est issu de $\tilde{\kappa}$ du côté positif ou du côté négatif.

Alors, puisque f est une réalisation du réseau \mathcal{R} dans \mathcal{T} , les images par f d'un rectangle positif et d'un rectangle négatif sont deux segments non dégénérés de \mathcal{T} qui s'intersectent uniquement au point p .

Rappelons que dans le revêtement universel \mathbb{H}^2 , chaque rectangle relevé \tilde{R}_j est plongé (fait 3.1.7). Puisque l'application f est équivariante et que le réseau ferroviaire \mathcal{R} a un seul aiguillage, chaque rectangle de la préimage de \mathcal{R} qui intersecte $\tilde{\kappa}$ a l'un de ses côtés verticaux contenu dans l'arc $\tilde{\kappa}$ et l'autre contenu dans un translaté $g(\tilde{\kappa})$ de cet arc.

Soit $\mathcal{G} \subset \Gamma$ l'ensemble fini des éléments g tels qu'un rectangle dans $\tilde{\mathcal{R}}$ qui intersecte $\tilde{\kappa}$ intersecte aussi $g(\tilde{\kappa})$; un élément de \mathcal{G} sera dit *positif* ou *négatif* selon que le rectangle en question est positif ou négatif.

Soit $\varepsilon > 0$ une constante que nous préciserons plus tard.

D'après la proposition 2.2.3, il existe $i_0 = i_0(\varepsilon)$ et un point $p_i \in X_i$ tel que pour tout $i \geq i_0$, on ait, lorsque g et g' appartiennent à $\mathcal{G} \cup \{\text{Id}\}$:

$$|d_i(g(p_i), g'(p_i)) - d(g(p), g'(p))| \leq \varepsilon.$$

Si g^j et $g^{j'}$ sont deux éléments de \mathcal{G} respectivement positif et négatif, on a dans l'arbre \mathcal{T}_λ :

$$d(g^j(p), g^{j'}(p)) = d(g^j(p), p) + d(p, g^{j'}(p)),$$

donc pour $i \geq i_0$:

$$|d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d_i(g^j(p_i), p_i) - d_i(p_i, g^{j'}(p_i))| \leq 3\varepsilon.$$

En particulier,

$$d_i(g^j(p_i), p_i) + d_i(p_i, g^{j'}(p_i)) - 3\varepsilon \leq d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)). \quad (1)$$

Supposons maintenant que la constante ε vérifie :

$$10\varepsilon \leq m = \inf\{d(p, g(p)) \mid g \in \mathcal{G}\}.$$

Pour $i \geq i_0$, les distances $d_i(g(p_i), p_i)$ pour $g \in \mathcal{G}$ sont supérieures à $m - \varepsilon$ et on aura donc, lorsque g^j et $g^{j'}$ sont deux éléments respectivement positif et négatif :

$$\sup\{d_i(g^j(p_i), p_i), d_i(p_i, g^{j'}(p_i))\} \leq d_i(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)). \quad (2)$$

La constante ε étant fixée comme ci-dessus, on a :

Lemme 4.1.2. — Pour $g^j \in \mathcal{G}$, soit z_i^j le milieu de la géodésique $p_i g^j(p_i)$. Alors si g^j et $g^{j'}$ sont deux éléments respectivement positif et négatif, les angles aux sommets z_i^j et $z_i^{j'}$ du triangle $p_i z_i^j z_i^{j'}$ tendent vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

Démonstration. — Pour $i \geq i_0$, on a :

$$|d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d(g^j(p_i), p_i) - d(p_i, g^{j'}(p_i))| \leq 3 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}. \quad (3)$$

Les distances $d(g^j(p_i), p_i)$ pour $g^j \in \mathcal{G}$ sont toutes supérieures à $9\varepsilon/\varepsilon_i$. Donc l'inégalité (3) dit que dans le triangle $g^j(p_i)p_i g^{j'}(p_i)$, le défaut dans l'inégalité triangulaire est "petit" par rapport aux longueurs des côtés.

D'après le lemme 2.2.6, on sait que parmi tous les triangles ABC , qui sont rectangles en B , la quantité $|d(A, B) + d(B, C) - d(A, C)|$ est majorée par une constante indépendante des longueurs des côtés.

Notons \tilde{p}_i la projection orthogonale du point p_i sur la géodésique passant par les points $g^j(p_i)$ et $g^{j'}(p_i)$. On a donc :

$$d(p_i, g^j(p_i)) = d(p_i, \tilde{p}_i) + d(\tilde{p}_i, g^j(p_i)) + O(1),$$

et

$$d(p_i, g^{j'}(p_i)) = d(p_i, \tilde{p}_i) + d(\tilde{p}_i, g^{j'}(p_i)) + O(1).$$

Pour déduire des deux inégalités ci-dessus une majoration de la différence

$$d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d(g^j(p_i), p_i) - d(p_i, g^{j'}(p_i)),$$

deux cas peuvent se produire selon que la projection \tilde{p}_i est contenue ou non dans l'intervalle $[g^j(p_i)g^{j'}(p_i)]$.

Premier cas. — $\tilde{p}_i \notin [g^j(p_i)g^{j'}(p_i)]$.

Alors on aurait, par exemple :

$$d(p_i, g^{j'}(p_i)) \geq d(g^j(p_i), p_i) + d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) + O(1).$$

Puisque les distances $d(p_i, g^{j'}(p_i))$ sont minorées par $9\varepsilon/\varepsilon_i$, on aurait donc pour i suffisamment grand :

$$d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) < d(g^{j'}(p_i), p_i).$$

C'est impossible d'après l'inégalité (2).

Deuxième cas. — $\tilde{p}_i \in [g^j(p_i)g^{j'}(p_i)]$.

On a alors :

$$|d(g^j(p_i), g^{j'}(p_i)) - d(g^j(p_i), p_i) - d(p_i, g^{j'}(p_i))| = 2d(\tilde{p}_i, p_i) + O(1).$$

Ainsi pour i suffisamment grand, on a, d'après l'inégalité (1) :

$$2d(\tilde{p}_i, p_i) \leq \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_i} \leq \frac{1}{2} \inf \{d(p_i, g^j(p_i)), d(p_i, g^{j'}(p_i))\} = \inf \{d(p_i, z_i^j), d(p_i, z_i^{j'})\}.$$

Considérons le triangle $z_i^j p_i z_i^{j'}$ et la projection orthogonale p'_i du sommet p_i sur la géodésique passant par les points z_i^j et $z_i^{j'}$.

La distance du point p_i au segment $z_i^j z_i^{j'}$ est inférieure à la distance de p_i à \tilde{p}_i . Donc, la projection orthogonale de p_i sur la géodésique passant par z_i^j et $z_i^{j'}$ est dans l'intérieur du segment $z_i^j z_i^{j'}$ et

$$d(p_i, p'_i) \leq \frac{1}{2} \inf \{d(p_i, z_i^j), d(p_i, z_i^{j'})\}.$$

Considérons alors les triangles $z_i^j p_i p'_i$ et $z_i^{j'} p_i p'_i$, tous deux rectangles au point p'_i . L'égalité des sinus (cf. [Bea]) appliquée au premier de ces triangles donne :

$$\sinh d(p_i, z_i^j) = \frac{\sinh d(p_i, p'_i)}{\sin p_i z_i^j p'_i}.$$

Donc puisque

$$\frac{\sinh d(p_i, z_i^j)}{\sinh d(p_i, p'_i)} \geq \exp(d(p_i, z_i^j) - d(p_i, p'_i)) \geq \exp \frac{d(p_i, z_i^j)}{2},$$

l'angle $p_i z_i^j p'_i$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

Par le même raisonnement, l'angle $p_i z_i^{j'} p'_i$ tend aussi vers 0. Ceci termine la démonstration du lemme 4.1.2. \square

Nous aurons aussi besoin du complément suivant à la fin de la démonstration du théorème 4.0.1.

Complément 4.1.3. — *Toujours sous l'hypothèse que $10\varepsilon \leq m$, et avec les notations du lemme 4.1.2, la distance $d_i(z_i^j, z_i^{j'})$ est supérieure à $m/3$, pour tout i suffisamment grand.*

Démonstration. — On raisonne avec les triangles $p_i z_i^j p'_i$ et $p_i z_i^{j'} p'_i$.

L'inégalité triangulaire donne :

$$d_i(z_i^j, p'_i) \geq d_i(p_i, z_i^j) - d_i(p_i, p'_i) \geq \frac{1}{2} d_i(p_i, z_i^j) \geq \frac{m - \varepsilon}{4}.$$

Ajoutée à la même inégalité pour le triangle $p_i z_i^j p_i'$, elle entraîne que :

$$d_i(z_i^j, z_i^{j'}) \geq \frac{m - \varepsilon}{2} \geq \frac{m}{3}. \quad \square$$

Nous allons utiliser les deux résultats précédents pour démontrer la proposition 4.1.1 et construire une δ -réalisation du réseau \mathcal{R}' pour l'action (X_i, ρ_i) .

On commence par construire une réalisation du réseau \mathcal{R} pour l'action (X_i, ρ_i) ; ce ne sera pas une δ -réalisation pour un petit δ , mais nous montrons comment obtenir à partir d'elle une δ -réalisation de la première subdivision \mathcal{R}' de \mathcal{R} .

Rappelons que chaque rectangle de la préimage de \mathcal{R} qui rencontre $\tilde{\kappa}$ a un côté vertical dans $\tilde{\kappa}$ et l'autre dans l'image $g^j(\tilde{\kappa})$, pour un élément $g^j \in \mathcal{G}$; nommons \tilde{R}_j un tel rectangle. Le relevé du paramétrage de chaque rectangle de \mathcal{R} est un difféomorphisme du produit $[0, 1] \times [0, 1]$ sur un rectangle de la préimage de \mathcal{R} (fait 4.1.4).

Pour $g^j \in \mathcal{G}$, envoyons un rectangle \tilde{R}_j de $\tilde{\mathcal{R}}$ dont les côtés verticaux sont dans $\tilde{\kappa}$ et dans $g^j(\tilde{\kappa})$, sur la géodésique de X_i dont les extrémités sont p_i et $g^j(p_i)$, par une application constante sur les traverses et qui induit sur l'intervalle $[0, 1] \times 0$ un paramétrage à vitesse constante de la géodésique $p_i g^j(p_i)$. Cette application se prolonge de manière unique en une application continue à valeurs dans X_i , Γ -équivariante et définie sur la réunion des rectangles de $\tilde{\mathcal{R}}$. Cette application se prolonge à son tour en une application continue équivariante $f_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$, car X_i est contractile. L'application f_i est une réalisation du réseau \mathcal{R} , mais rien ne permet de contrôler si c'est une δ -réalisation pour un petit δ .

Tout rectangle de la préimage de \mathcal{R}' est équivalent, modulo l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 , à un rectangle \tilde{R}' dont l'intérieur intersecte $\tilde{\kappa}$; les côtés verticaux du rectangle \tilde{R}' sont contenus dans les traverses médianes de deux rectangles \tilde{R}_j et $\tilde{R}_{j'}$ où g^j et $g^{j'}$ sont deux éléments respectivement positif et négatif de \mathcal{G} .

Par construction, le feuilletage par les traverses du rectangle \tilde{R}' n'est autre que la trace du feuilletage par les traverses des rectangles \tilde{R}_j et $\tilde{R}_{j'}$.

Considérons alors la restriction de la réalisation f_i au rectangle \tilde{R}' de \mathcal{R}' . C'est une application constante sur les traverses, mais l'image $f_i(\tilde{R}')$ est la réunion des deux géodésiques $z_i^{j'} p_i$ et $p_i z_i^j$, où z_i^j et $z_i^{j'}$ sont les milieux respectifs des segments $p_i g^j(p_i)$ et $p_i g^{j'}(p_i)$. Cette image n'est donc pas une géodésique, mais une géodésique brisée au point $p_i = f_i(\tilde{\kappa})$.

Par une homotopie constante sur les côtés verticaux de \tilde{R}' , déformons l'application f_i sur chaque rectangle de la préimage de \mathcal{R}' en une application, constante sur les traverses et qui paramètre à vitesse constante le segment géodésique $z_i^j z_i^{j'}$. Puisque les rectangles de $\tilde{\mathcal{R}'}$ s'intersectent au plus sur les côtés verticaux, sur lesquels la nouvelle application coïncide avec f_i , ces modifications sur tous les rectangles de la préimage de \mathcal{R}' se recollent en une application continue, constante sur les traverses et Γ -équivariante. Cette

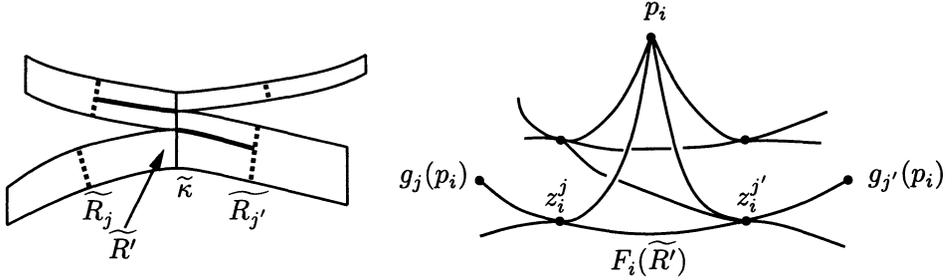


Figure 4-2

application se prolonge à son tour en une application F_i de \mathbb{H}^2 dans X_i qui est une δ' -réalisation du réseau \mathcal{R}' dans X_i pour une certaine constante δ' (cf. figure 4-2).

Affirmation 4.1.4. — Pour tout $\delta \in]0, \pi[$, il existe $i_0(\delta)$, tel que si $i \geq i_0(\delta)$, on a :

- (i) l'application F_i est une δ -réalisation de \mathcal{R}' dans X_i ;
- (ii) il existe une constante $m' > 0$ telle que les longueurs des géodésiques $F_i(\tilde{R}')$ sont supérieures à m' , pour tout rectangle \tilde{R}' de $\tilde{\mathcal{R}}'$.

Démonstration. — Soit $\delta > 0$. Il nous suffit de montrer que si \tilde{R}'_1 et \tilde{R}'_2 sont deux rectangles de $\tilde{\mathcal{R}}'$ situés de deux côtés différents d'un aiguillage $\tilde{\kappa}'$, les géodésiques images de \tilde{R}'_1 et \tilde{R}'_2 font un angle au point $F_i(\tilde{\kappa}')$ qui appartient à l'intervalle $[\pi - \delta, \pi]$.

La constante ε étant choisie inférieure à $m/10$, où $m > 0$ est un minorant des longueurs des segments $f_i(\tilde{R})$, appliquons le lemme 4.1.2.

Pour tout δ , il existe alors $i_0(\delta)$ tel que pour $i \geq i_0(\delta)$, les angles aux sommets z_i^j et $z_i^{j'}$ des triangles $z_i^j p_i z_i^{j'}$ qui apparaissent dans la construction de l'application F_i sont inférieurs à $\delta/2$, pour tous les rectangles dans la préimage de \mathcal{R}' .

Par construction, si l'aiguillage $\tilde{\kappa}'$ est contenu dans le rectangle R_j , où $g_j \in \mathcal{G}$ est un élément négatif, on a : $F_i(\tilde{\kappa}') = z_i^j$ et l'image de l'un des rectangles \tilde{R}'_1 ou \tilde{R}'_2 , par exemple \tilde{R}'_1 , est la géodésique $z_i^j z_i^{j'}$. Le vecteur tangent au point $F_i(\tilde{\kappa}')$ de cette géodésique fait donc un angle inférieur à $\delta/2$ avec le vecteur unitaire tangent v à la géodésique $g_j(p_i)p_i$ au point z_i^j . Mais alors, l'image du rectangle \tilde{R}'_2 fait un angle au point $F_i(\tilde{\kappa}')$ avec le vecteur $-v$ qui est inférieur à $\delta/2$. D'où la première partie de l'affirmation 4.1.4.

L'image par F_i de chaque rectangle de $\tilde{\mathcal{R}}'$ est isométrique à une géodésique $z_i^j z_i^{j'}$, où g^j et $g^{j'}$ sont deux éléments de \mathcal{G} respectivement positif et négatif. Le complément 4.1.3 entraîne alors la deuxième partie de l'affirmation 4.1.4. □

Ceci termine la démonstration de la proposition 4.1.1. □

4.2 Fin de la démonstration du théorème 4.0.1

Supposons, en raisonnant par l'absurde, que le théorème est faux. Il existe alors une constante N et une suite de géodésiques (μ_i) qui converge vers $\bar{\mu}$ dans l'espace $\mathcal{PML}(S)$ telles que :

$$\frac{\ell_i(\mu_i)}{\ell(\mu_i)} \leq N.$$

La suite (μ_i) converge vers une lamination géodésique μ pour la topologie de Hausdorff. La lamination μ contient le support de $\bar{\mu}$ (affirmation A.3.2).

Plaçons-nous dans la situation fournie par la proposition 4.1.1 où le réseau ferroviaire \mathcal{R}' porte μ . On a alors :

Lemme 4.2.1. — *Il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mu)$ de la lamination μ dans l'espace des laminations géodésiques muni de la topologie de Hausdorff, tel que toute lamination géodésique contenue dans $\mathcal{V}(\mu)$ est portée par le réseau \mathcal{R}' .*

Démonstration. — La lamination μ est portée par \mathcal{R}' . Donc elle est contenue dans la réunion des rectangles de \mathcal{R}' et la trace de μ sur chaque rectangle $\simeq [0, 1] \times [0, 1]$ de \mathcal{R}' est contenue dans $[0, 1] \times]0, 1[$. Par définition de la convergence de Hausdorff, il en est de même pour toutes les laminations géodésiques dans un voisinage de μ : elles sont contenues dans la réunion des rectangles de \mathcal{R}' et leur intersection avec chaque rectangle de \mathcal{R}' est contenue dans $[0, 1] \times]0, 1[$.

L'angle entre une traverse de \mathcal{R}' et une feuille de μ est minoré par une constante non nulle ; il en est de même pour les laminations géodésiques dans un voisinage de μ , ce qui garantit que ces laminations sont transverses au feuilletage par les traverses.

Donc, toutes les laminations dans un voisinage de μ pour la topologie de Hausdorff sont portées par \mathcal{R}' . \square

Soit γ une géodésique fermée portée par \mathcal{R}' ; rappelons que $\ell(\gamma)$ désigne la longueur de γ pour la métrique hyperbolique de référence sur la surface \mathbb{H}^2/Γ .

Soit R'_j un rectangle de la famille \mathcal{R}' ; la longueur de tous les segments de l'intersection de γ avec R'_j est majorée par une constante ℓ_j , indépendante de γ .

Donc on a :

$$\ell(\gamma) \leq \sum c_j(\gamma)\ell_j,$$

où $c_j(\gamma)$ désigne le nombre de composantes connexes de l'intersection de γ avec le rectangle R'_j , c'est-à-dire le "nombre de passages" de γ dans le rectangle R'_j .

Soit $\delta > 0$ une constante inférieure à $\pi/4$ qui sera fixée dans toute la suite.

Appliquons la proposition 4.1.1. Pour $i \geq i_0(\delta)$, soit $F_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow X_i$ une δ -réalisation de \mathcal{R}' qui vérifie en outre les conclusions de l'affirmation 4.1.4.

Si γ est une courbe fermée portée par \mathcal{R}' , la courbe $F_i(\tilde{\gamma})$ se projette dans la variété $X_i/\rho_i(\Gamma)$ en une courbe fermée $F_i^*(\gamma)$ dans la même classe d'homotopie que γ . La projection $F_i^*(\gamma)$ est une géodésique par morceaux, réunion de segments géodésiques de longueur ℓ_j^i , où ℓ_j^i est la longueur dans la variété X_i de l'image par F_i d'un rectangle relevant R_j' . L'angle de $F_i^*(\gamma)$ en chacun de ses coins, appartient à l'intervalle $[\pi - \delta, \pi]$.

La longueur de la courbe $F_i^*(\gamma)$ est égale à :

$$\ell(F_i^*(\gamma)) = \sum c_j(\gamma)\ell_j^i. \quad (3)$$

Notons $\bar{F}_i(\gamma)$ la géodésique fermée de $X_i/\rho_i(\Gamma)$ qui est librement homotope à $F_i^*(\gamma)$.

Le lemme suivant sera démontré dans la dernière section de ce chapitre.

Lemme 4.2.2. — *Pour toute constante $0 < \eta < 1$, il existe $i_0(\eta)$ tel que, si $i \geq i_0(\eta)$ et si F_i est une δ -réalisation de \mathcal{R}' dans X_i on a, pour toute courbe fermée γ portée par \mathcal{R}' :*

$$\ell(\bar{F}_i(\gamma)) \geq \eta \ell(F_i^*(\gamma)).$$

Voyons maintenant comment ce résultat permet d'obtenir une contradiction et de démontrer le théorème 4.0.1.

Appliquons-le avec la constante $\eta = 1/2$ par exemple. D'après le lemme 4.2.2, pour $i \geq i_0$, on aura donc, pour toute géodésique fermée γ portée par \mathcal{R}' :

$$\ell(\bar{F}_i(\gamma)) \geq \frac{1}{2} \ell(F_i^*(\gamma)).$$

Puisque la métrique de $X_i/\rho_i(\Gamma)$ n'est pas la métrique hyperbolique de courbure constante -1 , mais la métrique hyperbolique contractée d'un facteur ε_i , on a donc :

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{1}{2\varepsilon_i} \ell(F_i^*(\gamma)).$$

Donc, d'après la formule (3) et l'affirmation 4.1.4, on a :

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{1}{2\varepsilon_i} \sum c_j(\gamma)m'.$$

Si on pose $\ell = \sup\{\ell_j\}$, on a donc :

$$\sum c_j(\gamma)m' \geq \frac{m'}{\ell} \sum c_j(\gamma)\ell_j \geq \frac{m'}{\ell} \ell(\gamma).$$

Donc, pour $i \geq i_0$, toute géodésique fermée γ portée par le réseau ferroviaire \mathcal{R}' vérifie :

$$\ell_i(\gamma) \geq \frac{1}{2\varepsilon_i} \frac{m'}{\ell} \ell(\gamma). \quad (3)$$

Pour i suffisamment grand, les géodésiques μ_i sont portées par \mathcal{R}' d'après le lemme 4.2.1. Donc l'inégalité (3) fournit une contradiction puisque la suite (ε_i) tend vers 0.

Ceci termine la démonstration du théorème 4.0.1. \square

Remarque. — Comme il n'y a qu'un nombre fini de laminations géodésiques μ qui contiennent le support de $\bar{\mu}$ (cf. appendice), on déduit de la démonstration du théorème 4.0.1 qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}(\bar{\mu})$ de la lamination $\bar{\mu}$ dans $\mathcal{PML}(S)$ tel que la suite $\ell_i(\gamma)/\ell(\gamma)$ tend vers l'infini uniformément sur les multicourbes γ contenues dans $\mathcal{V}(\bar{\mu})$.

4.3 Démonstration du lemme 4.2.2

Le lemme 4.2.2. résulte du résultat bien connu suivant, où la constante δ est fixée, inférieure à $\pi/4$.

Proposition 4.3.1. — *Soit M une variété hyperbolique complète; soit $c \subset M$ une courbe fermée, réunion de segments géodésiques de longueurs supérieures à L , et dont l'angle en chaque coin appartient à l'intervalle $[\pi - \delta, \pi]$. Alors, pour toute constante $0 < \eta < 1$, il existe une constante $L(\eta)$ telle que si $L \geq L(\eta)$, la courbe c est homotope à une géodésique fermée \bar{c} de longueur supérieure à $\eta \ell(c)$, où $\ell(c)$ désigne la longueur de la courbe c .*

Notons que les constantes qui entrent en jeu sont indépendantes du nombre de segments géodésiques qui forment la courbe c .

La proposition 4.3.1 entraîne immédiatement le lemme 4.2.2, dès que i est suffisamment grand. En effet, les longueurs ℓ_i^j des segments qui composent $F_i^*(\gamma)$ sont supérieures à une constante $m' \neq 0$ (affirmation 4.1.4), et donc les longueurs des ces segments pour la métrique hyperbolique de $\mathbb{H}^n/\rho_i(\Gamma)$, supérieures à m'/ε_i tendent vers l'infini avec i , de sorte qu'on peut appliquer la proposition 4.3.1 à la courbe $F_i^*(\gamma)$.

Démonstration. — Relevons la courbe c à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .

Nous allons d'abord montrer que si les constantes δ et L sont respectivement assez petites et assez grandes, la courbe c n'est pas homotope à 0, et ne représente pas non plus un élément parabolique du groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$: puisque dans le cadre du lemme 4.2.2, nous savons déjà que la courbe c n'est pas homotope à 0, nous laisserons ce dernier cas au lecteur.

Considérons un relevé \tilde{c} de la courbe c à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . Si c représentait un élément parabolique, \tilde{c} serait invariante par un élément para-

bolique h qui a un point fixe unique p dans la sphère à l'infini $\partial\mathbb{H}^n$. Menons par tous les coins z_i de \tilde{c} la géodésique jusqu'au point q . La courbe c étant orientée, on peut alors considérer le triangle $z_{i+1}z_ip$, où z_{i+1} est le coin suivant z_i lorsqu'on parcourt la courbe \tilde{c} en suivant l'orientation.

La démonstration du lemme suivant est laissée au lecteur (voir la démonstration du fait 4.3.4).

Fait 4.3.2. — Soit $0 < \delta < \pi/2$. Il existe une constante $C_1(\delta)$ telle que si l'angle en z_i du triangle $z_{i-1}z_ip$ est supérieur à $\pi/2$ et si le côté z_iz_{i-1} a une longueur supérieure à $C_1(\delta)$, alors, l'angle en z_{i-1} du même triangle est inférieur à $\pi/2 - \delta$ et l'horosphère centrée en p qui passe par z_{i-1} est extérieure à celle passant par z_i .

On déduit de ce résultat que, si les segments z_iz_{i+1} ont tous une longueur supérieure à $C_1(\delta)$, alors les angles $z_{i+1}z_ip$ sont tous compris entre $\pi/2 - \delta$ et $\pi/2$. En effet, dans le cas contraire, puisque les angles aux coins de la courbe \tilde{c} appartiennent à l'intervalle $[\pi - \delta, \pi]$, l'angle $z_{i-1}z_ip$ par exemple serait supérieur à $\pi/2$. D'après la première partie du fait 4.3.2, l'angle $z_{i-2}z_{i-1}p$ serait supérieur à $\pi/2$. Mais alors, en itérant ce raisonnement, la deuxième partie du fait 4.3.2 dirait que le point z_i "s'éloigne" du point p lorsque i tend vers $-\infty$, contredisant que la courbe \tilde{c} est invariante par un élément fixant le point p .

Dans le même esprit que le fait 4.3.2, on a (cf. fait 4.3.5) :

Fait 4.3.3. — Pour tout $0 < \delta < \pi/2$, il existe une constante $C_2(\delta)$ telle que si $z_iz_{i+1}p$ est un triangle dont les angles en z_i et z_{i+1} sont compris entre $\pi/2 - \delta$ et $\pi/2$, la longueur du segment z_iz_{i+1} est inférieure à $C_2(\delta)$.

On voit donc que si la longueur de chaque côté de la courbe c est supérieure à $\sup\{C_1(\delta), C_2(\delta)\}$, alors c ne peut pas représenter un élément parabolique du groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

On va utiliser un raisonnement du même type pour démontrer la proposition 4.3.1. Soit c^* la géodésique de \mathbb{H}^n ayant les mêmes extrémités que la géodésique brisée \tilde{c} qui relève c . Considérons les points z'_i , projections orthogonales sur la géodésique c^* des coins z_i de la courbe (orientée) \tilde{c} . Les quadrilatères gauches $z_iz'_iz'_{i-1}z_{i-1}$ de \mathbb{H}^n sont rectangles aux points z'_i et z'_{i-1} . Avec ces notations, on a (cf. fait 4.3.2) :

Fait 4.3.4. — Soit $0 < \delta < \pi/2$. Il existe une constante $C_3(\delta)$ telle que si le côté z_iz_{i-1} du quadrilatère $z_iz'_iz'_{i-1}z_{i-1}$ a une longueur supérieure à $C_3(\delta)$ et si l'angle en z_i est supérieur à $\pi/2 + \delta/2$, alors l'angle en z_{i-1} est inférieur à $\pi/2 - \delta/2$ et la distance $d(z_{i-1}, z'_{i-1})$ est strictement supérieure à $d(z_i, z'_i)$.

Démonstration. — Dans le cas contraire, il existerait une suite de contre-exemples pour lesquels la distance z_iz_{i-1} tend vers l'infini. Conjuguons la figure par une isométrie de \mathbb{H}^n de sorte que le point z_i soit l'origine O de \mathbb{H}^n .

Premier cas. — la suite $(d(z_i, z'_i))$ tend vers l'infini.

Alors, quitte à extraire une sous-suite, la suite des quadrilatères $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ converge vers un triangle OPQ où $P \in \partial\mathbb{H}^n$ est la limite de la suite (z_{i-1}) et où $Q \in \partial\mathbb{H}^n$ est la limite de la suite (z'_i) , qui est aussi la limite de la suite (z'_{i-1}) . Donc, par continuité, la suite des angles en z_{i-1} des quadrilatères $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ tend vers 0.

Puisque le quadrilatère est rectangle en z'_i , on a :

$$d(z_i, z'_i) < d(z_i, z'_{i-1}).$$

D'autre part, l'angle en O est supérieur à $\pi/2 + \delta/2$, par continuité; donc, pour i suffisamment grand, l'angle en z_i du triangle $z_{i-1} z_i z'_{i-1}$ est supérieur à $\pi/2$. Donc, $d(z_{i-1}, z'_{i-1}) > d(z_i, z'_i)$ pour i suffisamment grand. Finalement $d(z_i, z'_i) < d(z_{i-1}, z'_{i-1})$.

Deuxième cas. — la suite $(d(z_i, z'_i))$ est bornée.

Quitte à extraire une sous-suite, les quadrilatères $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ convergent cette fois vers un quadrilatère $OPQR$, où $P \in \partial\mathbb{H}^n$ est la limite de la suite (z_{i-1}) , $Q \in \mathbb{H}^n$ celle de la suite (z'_i) et $R \in (\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n)$ celle de la suite (z'_{i-1}) .

Comme précédemment, l'angle en z_{i-1} tend vers 0.

Le point z'_{i-1} est contenu dans l'hyperplan totalement géodésique \mathcal{P} orthogonal à la direction $z_i z'_i$ passant par le point z'_i ; donc, la distance $d(z_{i-1}, z'_{i-1})$ est supérieure à la distance $d(z_{i-1}, \mathcal{P})$ de z_{i-1} à \mathcal{P} . Puisque l'angle $z'_i z_i z_{i-1}$ est strictement supérieur à $\pi/2$, on a :

$$d(z_{i-1}, \mathcal{P}) \geq d(z_i, z'_i).$$

Donc, de nouveau : $d(z_{i-1}, z'_{i-1}) \geq d(z_i, z'_i)$.

Dans les deux cas, on voit donc que la suite de contre-exemples n'en est pas une. \square

Reprenons la démonstration de la proposition 4.3.1. Si la longueur de tous les côtés de la courbe c est supérieure à $C_3(\delta)$, les angles $z'_i z_i z_{i-1}$ appartiennent à l'intervalle $[\pi/2 - \delta/2, \pi/2 + \delta/2]$. En effet, si par exemple l'angle $z'_i z_i z_{i-1}$ était supérieur à $\pi/2 + \delta/2$, l'angle $z_i z_{i-1} z'_{i-1}$ serait inférieur à $\pi/2 - \delta/2$, d'après le fait 4.3.4, et donc l'angle $z'_{i-1} z_{i-1} z_{i-2}$ serait supérieur à $\pi/2 + \delta/2$. En itérant on trouverait que la suite des distances $(d(z_i, z'_i))$ est strictement croissante lorsque i décroît, ce qui contredirait le fait que \tilde{c} est à distance bornée de la géodésique c^* .

Pour terminer, on utilise le résultat suivant dont la démonstration est analogue à celle du fait 4.3.4.

Fait 4.3.5. — Soit $0 < \delta < \pi/2$. Il existe des constantes $K > 0$ et $C_4(\delta)$ telles que si les angles en z_i et z_{i-1} du quadrilatère $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ appartiennent à

l'intervalle $[\pi/2 - \delta/2, \pi/2 + \delta/2]$, et si la distance $d(z_i, z_{i-1})$ est supérieure à $C_4(\delta)$, alors les deux distances $d(z_i, z'_i)$ et $d(z_{i-1}, z'_{i-1})$ sont inférieures à K .

Pour démontrer la proposition 4.3.1, supposons d'abord que la constante L est supérieure à $C_i(\delta)$, pour $i = 1, 2, 3, 4$. La longueur de la courbe c se calcule comme la somme des longueurs des projections $z'_i z'_{i+1}$ des côtés de c , une fois que l'on sait que ces projections sont des intervalles d'intérieurs disjoints. Pour montrer que c'est bien le cas, considérons deux quadrilatères successifs $z_i z'_i z'_{i-1} z_{i-1}$ et $z_i z'_i z'_{i+1} z_{i+1}$. Le vecteur tangent à $z_i z_{i+1}$ (resp. à $z_i z_{i-1}$) au point z_i est proche du vecteur tangent à $z_i z'_{i+1}$ (resp. à $z_i z'_{i-1}$), lorsque les longueurs des côtés de c sont assez grandes (cf. lemme 2.2.6). Si les points z'_{i+1} et z'_{i-1} étaient situés du même côté du point z'_i sur la géodésique c^* , les vecteurs tangents en z_i des géodésiques $z_i z'_{i+1}$ et $z_i z'_{i-1}$ feraient entre eux un petit angle. Donc, on contredirait la propriété de la courbe \tilde{c} que ses coins sont compris entre $\pi - \delta$ et π .

Soit maintenant $\eta < 1$, et posons $L(\eta) = \sup\{C_i(\delta), 2K/(1 - \eta)\}$.

Alors, si les longueurs des côtés de la courbe c sont supérieures à $L(\eta)$, on a :

$$\frac{d(z'_i, z'_{i-1})}{d(z_i, z_{i-1})} \geq \frac{d(z_i, z_{i-1}) - 2K}{d(z_i, z_{i-1})} \geq \eta.$$

Puisque la longueur de la géodésique fermée \bar{c} , homotope à c est la somme des longueurs des projections $z'_i z'_{i-1}$, on en déduit la proposition 4.3.1. \square

CHAPITRE 5

Le théorème de la limite double

Nous allons appliquer le théorème 4.0.1 pour démontrer une version du “théorème de la limite double” de Thurston [Thu5].

Soit S une surface compacte dont l’intérieur est identifié au quotient \mathbb{H}^2/Γ du plan hyperbolique par un groupe fuchsien Γ . Dans le chapitre 1, on a défini l’espace $\mathcal{QF}(\Gamma)$ des déformations quasi-fuchsiennes de Γ . Par construction, cet espace est naturellement contenu dans l’espace des représentations $\mathcal{R}(\Gamma)$ du groupe Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Le théorème de la limite double donne une condition suffisante pour qu’une suite $(\sigma_i^+, \sigma_i^-) \in \mathcal{QF}(\Gamma)$ converge dans $\mathcal{R}(\Gamma)$. Il permet de construire des représentations “exotiques” de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; des exemples avec des propriétés analogues, avaient été obtenus par L. Bers, mais par des méthodes non constructives [Ber].

Théorème de la limite double 5.0.1. — Soit $\rho_i = (\sigma_i^+, \sigma_i^-)$ une suite dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$. Supposons que dans la compactification de Thurston de l’espace de Teichmüller, on a : $(\sigma_i^+) \rightarrow \lambda^+$ et $(\sigma_i^-) \rightarrow \lambda^-$, pour deux laminations géodésiques mesurées λ^+ et λ^- qui remplissent la surface \mathbb{H}^2/Γ . Alors la suite ρ_i contient une sous-suite qui converge dans $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Voici une définition de la propriété de remplissage pour des laminations.

Définition. — Soient λ^+ et λ^- deux laminations géodésiques mesurées contenues dans \mathbb{H}^2/Γ dont les supports s’intersectent ; on dit qu’elles “remplissent la surface \mathbb{H}^2/Γ ” si chaque composante connexe du complémentaire de la réunion $\lambda^+ \cup \lambda^-$ dans \mathbb{H}^2/Γ est, ou bien un disque dont la frontière est la réunion d’un nombre fini de segments géodésiques, ou bien un anneau contenant un cusp de \mathbb{H}^2/Γ .

Exemple. — Si λ^+ et λ^- sont 2 laminations arationnelles qui s’intersectent, on peut montrer qu’elles remplissent \mathbb{H}^2/Γ (fait A.3.10). En parti-

culier, les deux laminations invariantes λ^+ et λ^- d'un pseudo-Anosov remplissent \mathbb{H}^2/Γ .

Mais nous ne développerons pas cette propriété car nous donnerons la démonstration du théorème de la limite double uniquement dans le cas où les laminations λ^+ et λ^- sont arationnelles (théorème 5.2.1).

Dans la première section, nous expliquerons un lemme d'Ahlfors qui relie les longueurs des géodésiques dans une classe d'homotopie donnée : $\ell_\rho(\gamma)$, celle dans la variété hyperbolique $\mathbb{H}^3/\rho_{(\sigma^+, \sigma^-)}(\Gamma)$ et $\ell^+(\gamma)$, $\ell^-(\gamma)$, celles dans les surfaces hyperboliques σ^+ et σ^- . Ce lemme est utilisé dans la démonstration du théorème de la limite double. Nous l'illustrerons en montrant que les parties de $\mathcal{QF}(\Gamma)$ de la forme $\sigma^+ \times \mathcal{T}(\Gamma)$ sont relativement compactes dans $\mathcal{R}(\Gamma)$, ce qui permet de définir la *compactification de Bers* de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Dans la deuxième section, nous démontrerons le théorème de la limite double dans le cas où les deux laminations $\ell^+(\gamma)$ et $\ell^-(\gamma)$ sont arationnelles.

5.1 Le lemme d'Ahlfors

Soit $(\sigma^+, \sigma^-) \in \mathcal{T}(\Gamma) \times \mathcal{T}(\bar{\Gamma})$. Soit ρ la représentation dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$ qui correspond à (σ^+, σ^-) par l'isomorphisme d'Ahlfors-Bers (proposition 1.3.2); soient ρ^+ , ρ^- les représentations fuchsienues respectivement associées à σ^+ et à σ^- .

Si $\gamma \in \Gamma$ est un élément hyperbolique, on note $\ell_\rho(\gamma)$ la distance de translation de l'élément $\rho(\gamma)$ dans \mathbb{H}^3 ; on note respectivement $\ell^+(\gamma)$ et $\ell^-(\gamma)$ celle de $\rho^+(\gamma)$ dans \mathbb{H}^2 et celle de $\rho^-(\gamma)$ dans \mathbb{H}^2 .

Le lemme d'Ahlfors (cf. [Ahl1]) dit alors :

Lemme 5.1.1. — *On a : $\ell_\rho(\gamma) \leq 2 \inf\{\ell^+(\gamma), \ell^-(\gamma)\}$.*

Démonstration. — Montrons par exemple : $\ell_\rho(\gamma) \leq 2\ell^+(\gamma)$.

Il existe un homéomorphisme conforme f entre le demi-plan supérieur \mathbb{H}^2 et la composante $\Omega^+(\rho(\Gamma))$ du domaine de discontinuité de $\rho(\Gamma)$ qui conjugue l'action du groupe fuchsien $\rho^+(\Gamma)$ avec celle du groupe $\rho(\Gamma)$.

Quitte à conjuguer le groupe $\rho^+(\Gamma)$ par un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et le groupe $\rho(\Gamma)$ par un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, on peut supposer que $\rho^+(\gamma)$ agit par l'homothétie $z \rightarrow e^{\ell^+(\gamma)}z$ sur \mathbb{H}^2 et que $\rho(\gamma)$ agit par l'homothétie $z \rightarrow e^{(\ell_\rho(\gamma)+i\alpha)}z$ sur $\Omega^+(\rho(\Gamma))$ (α est la partie rotationnelle de la transformation hyperbolique $\rho(\gamma)$).

La représentation conforme f vérifie alors :

$$f(e^{\ell^+(\gamma)}z) = e^{(\ell_\rho(\gamma)+i\alpha)}z.$$

Le domaine $\Omega^+(\rho(\Gamma))$ contient $0 \in \mathbb{C}$ dans sa frontière. Donc, pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, la distance du point $f(z)$ à la frontière de $f(\mathbb{H}^2)$ est inférieure à $|f(z)|$.

On déduit alors du lemme du 1/4 de Koebe (cf. [Ru]) que la dérivée f' vérifie :

$$\frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|f'(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{2}{\Im z}.$$

Par intégration de cette inégalité sur le segment $[i, e^{\ell^+(\gamma)}i]$ contenu dans l'axe imaginaire, on obtient :

$$\ell_\rho(\gamma) \leq 2\ell^+(\gamma).$$

Le même raisonnement donne aussi : $\ell_\rho(\gamma) \leq 2\ell^-(\gamma)$. □

Nous allons appliquer ce lemme à la proposition suivante :

Proposition 5.1.2. — *Soit K un compact de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Alors $K \times \mathcal{T}(\Gamma)$ est borné dans $\mathcal{R}(\Gamma)$.*

Lorsque le compact K est réduit à un point, cette proposition permet de compactifier l'espace de Teichmüller : c'est la compactification de Bers. Signalons que d'après un théorème de S. Kerckhoff et W. Thurston, cette compactification n'est pas "naturelle" c'est-à-dire que l'action du groupe modulaire $\text{Mod}(S)$ sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ ne s'y prolonge pas continûment à la frontière [KT].

Démonstration. — Soit K un compact de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Alors, pour toute structure σ^+ dans K et pour toute courbe fermée γ , il existe une constante $c(\gamma, K)$ telle que la longueur $\ell_{\sigma^+}(\gamma)$ de la géodésique de la métrique hyperbolique σ^+ dans la classe d'homotopie de γ vérifie : $\ell_{\sigma^+}(\gamma) \leq c(\gamma, K)$.

En effet, par définition de la distance de Teichmüller sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ (cf. chapitre 1), il existe une constante $C(K)$ telle que pour toute déformation fuchsienne $\sigma^+ \in K$, il existe un homéomorphisme ψ_{σ^+} du demi-espace \mathbb{H}^2 , qui est $C(K)$ -quasi-conforme et qui conjugue l'action du groupe $\rho_{\sigma^+}(\Gamma)$ à celle du groupe Γ .

D'après la proposition 1.3.1, on a donc, pour tout élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma$:

$$\ell_{\sigma^+}(\gamma) \leq e^{2C(K)}\ell(\gamma) = c(\gamma, K). \tag{1}$$

L'inégalité (1) et le lemme 5.1.1 entraînent que si $\rho = (\sigma^+, \sigma^-) \in K \times \mathcal{T}(\Gamma)$, on a : $\forall \gamma, \ell_\rho(\gamma) \leq c(\gamma, K)$.

La proposition 5.1.2 découle alors du lemme suivant.

Lemme 5.1.3. — *Soit (ρ_i) une suite de déformations quasi-fuchsienues dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une constante $c(\gamma, K)$ telle que : $\ell_{\rho_i}(\gamma) \leq c(\gamma, K)$. Alors (ρ_i) contient une sous-suite qui converge dans $\mathcal{R}(\Gamma)$.*

Démonstration. — Ce lemme découle des résultats généraux du chapitre 2 (théorème 2.2.1), mais nous allons en donner une démonstration élémentaire. D'autre part, le théorème 2.2.1 ne donne la convergence d'une sous-suite qu'à conjugaison près; la raison pour laquelle on a vraiment convergence dans le lemme 5.1.3 est que les représentations dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$ sont normalisées (cf. section 1.3).

Rappelons qu'on a choisi deux éléments hyperboliques g et h dans Γ qui engendrent un groupe libre et qu'on a imposé que $0 \in \mathbb{C}$ soit le point fixe attractif de $\rho(g)$, ∞ le point fixe attractif de $\rho(h)$ et $1 \in \mathbb{C}$ le point fixe répulsif de $\rho(gh)$. Montrons dans un premier temps que les représentations ρ_i , restreintes au sous-groupe $\langle g, h \rangle$ engendré par g et h , convergent sous les hypothèses du lemme 5.1.3. Les éléments $\rho(g)$ et $\rho(h)$ sont des transformations de Möbius qui s'écrivent respectivement :

$$z \rightarrow \frac{z}{\alpha z + \beta} \quad \text{et} \quad z \rightarrow az + b,$$

avec $|\beta| > 1$ et $|a| > 1$.

La distance de translation de l'élément hyperbolique $\rho(g)$ est égale à $\log |\beta|$ et celle de $\rho(h)$, égale à $\log |a|$. Les deux quantités $\log |\beta|$ et $\log |a|$ sont donc positives et bornées lorsque ρ vérifie les hypothèses du lemme 5.1.3. Si de plus, la distance de translation de $\rho(gh)$ est bornée, on en déduit que la quantité $|\alpha b|$ est aussi bornée.

Dire que $\rho(gh)$ fixe 1 signifie que : $a + b = \alpha(a + b) + \beta$. Les estimations ci-dessus entraînent alors que les quatre coefficients a , b , α et β sont bornés sous les hypothèses du lemme 5.1.3.

Donc, la suite des restrictions des représentations ρ_i au sous-groupe $\langle g, h \rangle$ converge, quitte à extraire une sous-suite, vers une représentation ρ_∞ ; ρ_∞ est discrète et fidèle (proposition 1.1.3). En particulier, le groupe $\rho_\infty(\langle g, h \rangle)$ contient deux éléments hyperboliques qui ne commutent pas (fait 1.1.1); notons-les $\rho_\infty(m)$ et $\rho_\infty(n)$. Puisque ces éléments ne commutent pas, leurs points fixes sont distincts deux-à-deux; ceci signifie, que si $M_\infty \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ relève $\rho_\infty(m)$ et $N_\infty \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ relève $\rho_\infty(n)$, les directions propres de M_∞ et N_∞ sont distinctes.

Alors, les quatre matrices M_∞ , M_∞^2 , N_∞ , N_∞^2 sont indépendantes et engendrent $M_2(\mathbb{C})$. Donc les quatre formes linéaires $M \rightarrow \mathrm{tr}(MM_\infty)$, $M \rightarrow \mathrm{tr}(MN_\infty)$, $M \rightarrow \mathrm{tr}(MM_\infty^2)$, $M \rightarrow \mathrm{tr}(MN_\infty^2)$, sont indépendantes et engendrent le dual de $M_2(\mathbb{C})$. Si M_i , N_i , sont des relevés de $\rho_i(m)$, $\rho_i(n)$, les quatre formes définies de la même façon à partir des matrices M_i et N_i , convergent vers celles définies à l'aide de M_∞ et N_∞ .

Soit $\langle b^1, \dots, b^k \rangle$ un système générateur du groupe Γ . Pour un élément b^j de ce système générateur, soit B_i^j un relevé à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de $\rho_i(b^j)$. Alors la trace $\mathrm{tr}(M_i B_i^j)$ est bornée indépendamment de i . En effet $M_i B_i^j$ relève $\rho_i(m b^j)$, dont la distance de translation est bornée (cf. chapitre 1); d'après la formule

qui exprime la trace d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en fonction de la distance de translation de sa projection dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, on voit que la trace $\mathrm{tr}(M_i B_i^j)$ est bornée. De même pour les autres traces : $\mathrm{tr}(M_i^2 B_i^j)$, $\mathrm{tr}(N_i B_i^j)$ et $\mathrm{tr}(N_i^2 B_i^j)$.

On en déduit que les relevés B_i^j restent dans un compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Donc, la suite de représentations (ρ_i) contient une sous-suite convergente. \square

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.1.2. \square

5.2 Un critère de convergence dans l'espace des groupes quasi-fuchsien

Nous allons montrer la version suivante du "théorème de la limite double".

Théorème 5.2.1. — Soit $\rho_i = (\sigma_i^+, \sigma_i^-)$ une suite dans $\Omega\mathcal{F}(\Gamma)$ telle que $\sigma_i^+ \rightarrow \lambda^+$ et $\sigma_i^- \rightarrow \lambda^-$ dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller; supposons que les laminations mesurées λ^+ et λ^- sont arationnelles et qu'elles s'intersectent. Alors la suite (ρ_i) contient une sous-suite qui converge dans $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Démonstration. — Nous allons démontrer ce théorème en raisonnant par l'absurde et en utilisant les principaux résultats des chapitres précédents.

D'après l'une des propriétés de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$ (proposition 1.4.3), il existe une suite de géodésiques sans points doubles (γ_i^+) (resp. (γ_i^-)) qui tend vers λ^+ (resp. vers λ^-) dans l'espace projectif $\mathcal{PML}(S)$ et telle que :

$$\frac{\ell_i^+(\gamma_i^+)}{\ell(\gamma_i^+)} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ell_i^-(\gamma_i^-)}{\ell(\gamma_i^-)} \rightarrow 0.$$

Ici $\ell_i^+(\gamma)$ (resp. $\ell_i^-(\gamma)$) désigne la longueur de la géodésique γ pour la métrique σ_i^+ (resp. σ_i^-) et $\ell(\gamma)$ désigne la longueur pour la métrique de référence \mathbb{H}^2/Γ sur l'intérieur de S .

Remarque. — Rappelons que lorsque $\phi \in \mathrm{Mod}(S)$ est un pseudo-Anosov et que la suite σ_i^+ (resp. σ_i^-) est égale à $(\phi^*)^i(\sigma)$ (resp. $(\phi^*)^{-i}(\sigma)$) on peut choisir γ_i^+ (resp. γ_i^-) égale à la géodésique de \mathbb{H}^2/Γ dans la classe d'homotopie $(\phi_*)^i(\gamma)$ (resp. $(\phi_*)^{-i}(\gamma)$), pour une géodésique fermée simple $\gamma \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ (cf. section 1.5).

D'après le lemme d'Ahlfors (lemme 5.1.1), on a, en notant $\ell_i(\gamma)$ la distance de translation de l'élément $\rho_i(\gamma)$ dans \mathbb{H}^3 :

$$\frac{\ell_i(\gamma_i^+)}{\ell(\gamma_i^+)} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ell_i(\gamma_i^-)}{\ell(\gamma_i^-)} \rightarrow 0.$$

D'après le lemme 5.1.3, si la suite (ρ_i) n'a pas de sous-suites convergentes, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que : $\ell_i(\gamma) \rightarrow \infty$.

D'après le chapitre 2 (théorème 2.2.2; proposition 2.2.3), il existe une suite $(\varepsilon_i) \rightarrow 0$, telle que les actions $(\varepsilon_i \mathbb{H}^3, \rho_i)$ convergent au sens de Gromov vers une action du groupe Γ sur un arbre réel \mathcal{T} .

L'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est à petits stabilisateurs d'arêtes (théorème 2.2.9). Pour chaque élément parabolique $\gamma \in \Gamma$, $\rho_i(\gamma)$ est un élément parabolique (cf. section 1.3); donc la distance de translation dans \mathcal{T} de γ est nulle (proposition 2.2.11). L'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ vérifie les hypothèses du théorème de R. Skora. D'après le théorème 2.1.13, elle est "géométrique" : soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ la lamination géodésique mesurée telle que \mathcal{T} soit isomorphe à l'arbre dual \mathcal{T}_λ de λ .

Si la lamination mesurée λ^+ n'intersecte pas λ , elle a le même support que λ (fait A.3.10). Donc puisque les laminations λ^+ et λ^- s'intersectent, l'une de ces deux laminations, par exemple λ^- , intersecte λ .

D'après le théorème 4.0.1, on a donc, pour tout N , lorsque i est suffisamment grand :

$$\frac{\ell_i(\gamma_i^-)}{\ell(\gamma_i^-)} > N.$$

Cette contradiction termine la démonstration du théorème 5.2.1. □

CHAPITRE 6

Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées

Soit S une surface compacte et $\phi \in \text{Mod}(S)$ un pseudo-Anosov ; notons M_ϕ la variété fibrée sur le cercle obtenue par suspension de ϕ . Pour construire une métrique hyperbolique complète dans l'intérieur de la variété M_ϕ , il nous faut trouver une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M_\phi)$ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ qui soit fidèle et discrète.

Le groupe fondamental $\pi_1(M_\phi)$ est engendré par le groupe $\pi_1(S)$ et par un élément t qui vérifie :

$$\forall g \in \pi_1(S), \quad t g t^{-1} = \phi_*(g),$$

où ϕ_* désigne l'action de ϕ sur le groupe fondamental $\pi_1(S)$.

Dans la première section, on construit la restriction de la représentation cherchée au sous-groupe $\pi_1(S) \subset \pi_1(M_\phi)$. Dans la deuxième section, on étudie certaines des propriétés de cette représentation ; on montrera essentiellement que son ensemble limite est toute la sphère $\bar{\mathbb{C}}$. C'est un résultat assez technique, mais fondamental pour pouvoir appliquer le théorème de Sullivan dans la section suivante ; ce théorème nous permettra de prolonger la représentation construite dans la section 6.1 à tout le groupe $\pi_1(M_\phi)$. Le théorème de Sullivan sera démontré dans le chapitre 7.

Dans la dernière section, on montre le "théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées". D'abord, pour les variétés fibrées sur le cercle, comme M_ϕ . Ensuite, lorsque la variété M contient une surface compacte qui la découpe en la réunion de deux fibrés en intervalles : ce cas se ramène au premier par un argument de revêtement.

6.1 Construction d'une représentation du sous-groupe $\pi_1(S)$

Identifions l'intérieur de la surface compacte S avec le quotient du demi-espace \mathbb{H}^2 par un groupe fuchsien Γ . Si $\phi \in \text{Mod}(S)$ on note ϕ^* l'action de ϕ sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma)$. Notons σ "l'origine" Γ de $\mathcal{T}(\Gamma)$ (c'est-à-dire la classe de la déformation (Id, Id)); considérons la suite de représentations $\rho_i \in \mathcal{QF}(\Gamma)$, dont les coordonnées dans le paramétrage d'Ahlfors-Bers sont $((\phi^*)^{-i}(\sigma), (\phi^*)^i(\sigma))$.

Soit $\phi \in \text{Mod}(S)$ un pseudo-Anosov. D'après la proposition 1.5.1 (i), on a, dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\phi^*)^{-i}(\sigma) = \lambda^- \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} (\phi^*)^i(\sigma) = \lambda^+,$$

où λ^+ et λ^- sont les laminations géodésiques mesurées, respectivement stable et instable de ϕ .

Les laminations λ^- et λ^+ sont toutes les deux arationnelles et s'intersectent (cf. section 1.5).

D'après le théorème 5.2.1, la suite (ρ_i) contient une sous-suite qui converge vers une représentation ρ_∞ dans $\mathcal{R}(\Gamma)$; cette représentation est discrète et fidèle d'après la proposition 1.1.3.

Choisissons un représentant $\phi_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$ de l'action de ϕ sur le groupe fondamental $\pi_1(S) \simeq \Gamma$.

Lemme 6.1.1. — *Il existe une constante ϕ telle que, pour tout i , il existe un homéomorphisme K -quasi-conforme Ψ_i de $\bar{\mathbb{C}}$ vérifiant :*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \Psi_i(\rho_i(\gamma)z) = \rho_i(\phi_*(\gamma))\Psi_i(z).$$

Démonstration. — Choisissons un représentant de la classe d'isotopie de ϕ qui induise un difféomorphisme bilipschitz de l'intérieur \mathbb{H}^2/Γ et qui fixe le point p , image de $(0, 1) \in \mathbb{H}^2$ par l'application de revêtement $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$: on peut supposer que ϕ agit sur le groupe fondamental $\pi_1(S, p) \simeq \Gamma$ par l'automorphisme ϕ_* .

Puisque ϕ est bilipschitz pour la métrique hyperbolique, il est K -quasi-conforme pour une certaine constante K .

Le choix d'un point dans la préimage de p détermine un relevé de ϕ . Un relevé privilégié est celui qui fixe le point $(0, 1)$; c'est un homéomorphisme K -quasi-conforme de \mathbb{H}^2 , $\tilde{\phi}$, qui vérifie pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $z \in \mathbb{H}^2$:

$$\tilde{\phi}(\gamma(z)) = \phi_*(\gamma)\tilde{\phi}(z).$$

En particulier, puisque l'automorphisme ϕ_* commute avec toutes ses puissances, on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $z \in \mathbb{H}^2$:

$$\tilde{\phi}((\phi_*)^i(\gamma)(z)) = (\phi_*)^i(\phi_*(\gamma))\tilde{\phi}(z).$$

Autrement dit, si on note ρ'_i la représentation de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ définie par : $\gamma \rightarrow (\phi_*)^i(\gamma)$, l'homéomorphisme $\tilde{\phi}$ de \mathbb{H}^2 conjugué, pour tout i , la représentation ρ'_i à la représentation $\rho'_i \circ \phi_*$.

De même, le conjugué $\tilde{\phi}'$ de $\tilde{\phi}$ par la conjugaison complexe agit sur le demi-espace inférieur $\overline{\mathbb{H}^2}$ et vérifie, pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}^2}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\tilde{\phi}'((\phi_*)^i(\gamma)(z)) = (\phi_*)^i(\phi_*(\gamma))\tilde{\phi}'(z).$$

Donc, l'homéomorphisme $\tilde{\phi}'$ de $\overline{\mathbb{H}^2}$ conjugué la représentation ρ'_i à la représentation $\rho'_i \circ \phi_*$.

Soit $i > 0$, et notons $\rho_i \in \mathcal{QF}(\Gamma)$ la déformation quasi-fuchsienne de coordonnées $((\phi^*)^{-i}(\sigma), (\phi^*)^i(\sigma))$ dans le paramétrage d'Ahlfors-Bers. Le domaine de discontinuité du groupe $\rho_i(\Gamma)$ a deux composantes connexes Ω^+ et Ω^- ; il existe une (unique) transformation conforme $f^+ : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{H}^2$ qui conjugue les actions ρ_i et ρ'_i de Γ . Puisque la frontière de Ω^+ est une courbe de Jordan, f^+ se prolonge au bord continûment en un homéomorphisme, d'après le théorème de Carathéodory. Donc, l'homéomorphisme $\Psi^+ = (f^+)^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ f^+$ de Ω^+ se prolonge au bord (proposition 1.2.2 (i)) et conjugue les actions ρ_i et $\rho_i \circ \phi_*$ sur l'adhérence $\overline{\Omega^+}$.

De même, il existe une (unique) transformation conforme de Ω^- vers le demi-espace inférieur $\overline{\mathbb{H}^2}$ qui conjugue les actions ρ_i et ρ'_{-i} de Γ . L'homéomorphisme $\Psi^- = (f^-)^{-1} \circ \tilde{\phi}' \circ f^-$ de Ω^- se prolonge au bord et conjugue les actions ρ_i et $\rho_i \circ \phi_*$ sur $\overline{\Omega^-}$.

La frontière de Ω^+ est égale à la frontière de Ω^- : c'est une courbe de Jordan. Les homéomorphismes Ψ^+ et Ψ^- coïncident sur cette courbe de Jordan : ils se recollent donc en un homéomorphisme Ψ_i de $\overline{\mathbb{C}}$.

Par construction, on a :

$$\Psi_i(\rho_i(\gamma)(z)) = \rho_i(\phi_*(\gamma))\Psi_i(z).$$

Donc, Ψ_i conjugue les représentations ρ_i et $\rho_i \circ \phi_*$.

Pour conclure la démonstration, on utilise :

Sous-lemme 6.1.2. — *Pour tout i , l'homéomorphisme Ψ_i est quasi-conforme, et admet le même constante de quasi-conformité que ϕ .*

Démonstration. — Par construction, la restriction de Ψ_i à chacun des deux ouverts Ω^+ et Ω^- est K -quasi-conforme.

Puisque la représentation ρ_i est dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$, elle est quasi-conformément conjuguée à la représentation Id du groupe Γ par un homéomorphisme quasi-conforme F . Il nous suffit de montrer que $G = F \circ \Psi_i \circ F^{-1}$ est quasi-conforme (cf. section 1.2). Or, G est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$ qui laisse \mathbb{R} invariant et qui est quasi-conforme dans les demi-espaces supérieur et inférieur. Donc G est quasi-conforme (fait 1.2.6) ; par conséquent, Ψ_i est quasi-conforme.

L'ensemble limite de $\rho_i(\Gamma)$ est l'image de l'axe réel par un homéomorphisme quasi-conforme du plan ; il est donc de mesure nulle (fait 1.2.5). Donc la constante de quasi-conformité de ρ_i est la même que celle de ses restrictions à Ω^+ et Ω^- : Ψ_i est K -quasi-conforme. \square

Ceci termine la démonstration du lemme 6.1.1. \square

Lemme 6.1.3. — *Quitte à extraire une sous-suite, les homéomorphismes Ψ_i convergent uniformément sur $\bar{\mathbb{C}}$ vers un homéomorphisme K -quasi-conforme Ψ_∞ tel que :*

$$\forall \gamma, \quad \forall z, \quad \Psi_\infty(\rho_\infty(\gamma)(z)) = \rho_\infty(\phi_*(\gamma))\Psi_\infty(z).$$

Démonstration. — Rappelons que les représentations ρ de Γ contenues dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$ sont normalisées aux points 0, 1 et ∞ (cf. section 1.3) : pour deux éléments hyperboliques $g, h \in \Gamma$ qui engendrent un groupe libre de rang 2, 0 est le point fixe attractif de $\rho(g)$, $\rho(\infty)$ le point fixe attractif de h et 1 le point fixe répulsif de $\rho(gh)$.

Puisque Ψ_i conjugue ρ_i à $\rho_i \circ \phi_*$, le point $\Psi_i(0)$ est le point fixe attractif de $\rho_i(\phi_*(g))$, le point $\Psi_i(\infty)$ celui de $\rho_i(\phi_*(h))$ et $\Psi_i(1)$ est le point fixe répulsif de $\rho_i(\phi_*(gh))$.

Comme les représentations ρ_i convergent vers la représentation ρ_∞ , les points $\Psi_i(0)$, $\Psi_i(\infty)$ et $\Psi_i(1)$ convergent vers des points fixes de $\rho_\infty(\phi_*(g))$, $\rho_\infty(\phi_*(h))$ et $\rho_\infty(\phi_*(gh))$.

Remarquons que ces points limites sont trois points distincts de $\bar{\mathbb{C}}$. En effet, la représentation ρ_∞ est discrète et fidèle (proposition 1.1.3) et deux quelconques des éléments g, h et gh engendrent un groupe libre ; leurs ensembles de points fixes sont donc disjoints d'après le fait 1.1.1 (i). Alors, puisque les homéomorphismes Ψ_i sont quasi-conformes avec la même constante de quasi-conformité, la suite Ψ_i contient une sous-suite qui converge uniformément vers un homéomorphisme K -quasi-conforme Ψ_∞ de $\bar{\mathbb{C}}$ (proposition 1.2.2 (ii)). Par continuité, Ψ_∞ vérifie les conclusions du lemme 6.1.3. \square

6.2 Etude de l'ensemble limite de la représentation ρ_∞

Le but de ce chapitre 6 est essentiellement de montrer que l'homéomorphisme quasi-conforme Ψ_∞ construit dans la section précédente est conforme. Ceci résultera d'un théorème de D. Sullivan, mais nous devons pour l'appliquer comprendre davantage l'ensemble limite du groupe $\rho_\infty(\Gamma)$.

Théorème 6.2.1. — *L'ensemble limite du groupe $\rho_\infty(\Gamma)$ est toute la sphère $\bar{\mathbb{C}}$.*

Dans la démonstration de ce théorème, nous serons conduits à étudier la géométrie des bouts d'une variété hyperbolique (cf. [Bo], [Thu1, §8–§9]).

La conclusion de ce théorème est satisfaite pour toutes les représentations ρ_∞ qui sont limites d'une suite de représentations dans $\mathcal{QF}(\Gamma)$ vérifiant les

hypothèses du théorème 5.2.1, mais la démonstration devient alors beaucoup plus difficile. La proposition 6.2.2 ci-dessous nécessite par exemple une approche complètement différente dans le cas général.

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. Soit Ω_0 une composante du domaine de discontinuité Ω de $\rho_\infty(\Gamma)$. On a alors :

Proposition 6.2.2. — *Le sous-groupe G_0 de $\rho_\infty(\Gamma)$ qui stabilise Ω_0 est d'indice fini.*

Démonstration. — D'après le théorème de finitude d'Ahlfors (cf. section 1.1), la surface de Riemann $\Omega/\rho_\infty(\Gamma)$ est une surface de Riemann de type fini ; donc la surface Ω_0/G_0 qui en est une composante connexe est, elle aussi, de type fini. D'après le lemme 6.1.3, l'homéomorphisme Ψ_∞ agit sur Ω comme un homéomorphisme quasi-conforme et induit donc sur la surface $\Omega/\rho_\infty(\Gamma)$ un homéomorphisme quasi-conforme $\overline{\Psi}_\infty$.

Puisque la surface de Riemann $\Omega/\rho_\infty(\Gamma)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, il existe une puissance non nulle $\overline{\Psi}_\infty^k$ de $\overline{\Psi}_\infty$, qui laisse invariante la surface Ω_0/G_0 .

Puisque Ψ_∞ conjugue les représentations ρ_∞ et $\rho_\infty \circ \phi_*$, l'automorphisme $(\phi_*)^k$ agissant sur $\rho_\infty(\Gamma)$ envoie G_0 sur un conjugué de G_0 .

Fait 6.2.3. — *G_0 est un sous-groupe non trivial de $\rho_\infty(\Gamma)$.*

Démonstration. — Supposons qu'on ait : $G_0 = \{\text{Id}\}$. Alors, comme la projection $\Omega_0 \rightarrow \Omega_0/G_0$ est conforme, c'est un *isomorphisme conforme* et donc la surface Ω_0 est une surface de type fini. Puisque Ω_0 est une surface planaire, Ω_0 est alors conformément équivalente au complémentaire d'un ensemble fini de points dans \mathbb{C} . On en déduit que l'ensemble limite $L(\rho_\infty(\Gamma))$ contient des points isolés, ce qui est impossible pour un groupe non élémentaire (cf. section 1.1). \square

Lemme 6.2.4. — *Le groupe fondamental de chacune des composantes du bord $\partial \overline{M}(\rho_\infty(\Gamma)) = \Omega/\rho_\infty(\Gamma)$ s'injecte par l'homomorphisme d'inclusion dans $\rho_\infty(\Gamma)$, le groupe fondamental de la variété $\overline{M}(\rho_\infty(\Gamma))$.*

Démonstration. — Sinon, d'après le théorème du lacet (cf. [He]), il existe un disque proprement plongé D dans $\overline{M}(\rho_\infty(\Gamma))$ dont le bord est une courbe non homotope à 0 sur $\partial \overline{M}(\rho_\infty(\Gamma))$. Si ε est suffisamment petit, le disque D est disjoint des composantes de la partie ε -mince de $M(\rho_\infty(\Gamma))$. En particulier, il est disjoint de la partie ε -cuspidale. Or la représentation ρ_∞ envoie les éléments paraboliques de Γ sur des éléments paraboliques ; donc ce disque D fournit une décomposition non triviale du groupe $\rho_\infty(\Gamma) \simeq \pi_1(S)$ en un produit libre ou en une HNN-extension au-dessus du groupe trivial telle que les éléments représentant les courbes de ∂S sont contenus dans des facteurs de cette décomposition. Une telle décomposition ne peut exister pour le groupe $\pi_1(S)$. \square

Donc le groupe G_0 est égal à l'image du groupe fondamental de Ω_0/G_0 dans $\rho_\infty(\Gamma)$ par l'homomorphisme d'inclusion. Puisque $\Omega_0/\rho_\infty(\Gamma)$ est une surface de type fini et de caractéristique d'Euler strictement négative, le groupe G_0 est de type fini et non cyclique; c'est un sous-groupe de $\rho_\infty(\Gamma)$ invariant, à conjugaison près, par l'action de $(\phi_*)^k$.

Pour conclure, nous allons utiliser le résultat suivant, remarqué par Albert Fathi.

Lemme 6.2.5. — *Soit $\phi \in \text{Mod}(S)$ un pseudo-Anosov; alors tout sous-groupe $G \subset \Gamma$ de type fini, non cyclique, et invariant à conjugaison près par une puissance non nulle de ϕ_* , est d'indice fini.*

Démonstration. — Considérons le revêtement $S_G = \mathbb{H}^2/G$ de la surface \mathbb{H}^2/Γ . Puisque le groupe G est de type fini, S_G est une surface (éventuellement non compacte) dont le groupe fondamental est de type fini. Puisque le groupe G n'est pas cyclique, il n'est pas élémentaire, et on peut considérer le coeur de Nielsen $C(G) \subset S_G$: c'est une surface complète, de volume fini et à bord géodésique. Pour démontrer le lemme ci-dessus, il suffit de montrer que $C(G)$ est égal à S_G , c'est-à-dire que le bord de $C(G)$ est vide; car alors le volume de S_G est fini et G est donc d'indice fini dans Γ .

Puisqu'un conjugué de l'automorphisme $(\phi_*)^k$ préserve G , l'homéomorphisme ϕ^k de \mathbb{H}^2/Γ se relève en un homéomorphisme $\tilde{\phi}^k$ de S_G en induisant sur le groupe fondamental de S_G l'action de $(\phi_*)^k$ sur G .

Si on a : $\partial C(G) \neq \emptyset$, alors, $S_G - C(G)$ est réunion d'un nombre fini d'anneaux. Donc, il existe une puissance non nulle $(\phi_*)^n$ de $(\phi_*)^k$ qui laisse invariantes les classes de conjugaison représentées par les géodésiques de $\partial C(G)$. Comme aucune puissance d'un pseudo-Anosov ne laisse invariante une classe de conjugaison représentée par un élément hyperbolique (cf. section 1.5), on voit donc que le bord de $C(G)$ est nécessairement vide. \square

Donc, d'après le lemme 6.2.5, le groupe G_0 est d'indice fini dans $\rho_\infty(\Gamma)$. Ceci termine la démonstration de la proposition 6.2.2. \square

Soit $\Gamma' \subset \Gamma$ le sous-groupe d'indice fini tel que $G_0 = \rho_\infty(\Gamma')$; soit S' la surface compacte, revêtement fini de S de groupe fondamental Γ' .

Par restriction à Γ' , les représentations ρ_i définissent des éléments de $\mathcal{QF}(\Gamma')$ qui convergent vers la représentation ρ_∞ dans l'espace des représentations $\mathcal{R}(\Gamma')$.

L'ensemble limite de $\rho_\infty(\Gamma')$ est égal à l'ensemble limite de $\rho_\infty(\Gamma)$ car Γ' est d'indice fini dans Γ (cf. section 1.1). Donc Ω_0 est aussi une composante du domaine de discontinuité de $\rho_\infty(\Gamma')$; de plus elle est invariante. Comme, d'après le lemme 6.2.4, Ω_0 est simplement connexe, la surface de Riemann $\Omega_0/\rho_\infty(\Gamma')$ a le même type d'homotopie que \mathbb{H}^2/Γ' . La représentation ρ_∞ envoie les éléments paraboliques de Γ sur des éléments paraboliques. Donc, si $h \in \Gamma'$ est parabolique, $\rho_\infty(h)$ l'est aussi : il lui correspond alors un cusp

de type \mathbb{Z} dans $M(\rho_\infty)$. D'après la proposition 1.1.6, l'intersection du cœur de Nielsen de $M(\rho_\infty)$ avec ce cusp contient un anneau proprement plongé; donc, la surface de Riemann $\Omega_0/\rho_\infty(\Gamma')$ a en fait le type d'homotopie *propre* de \mathbb{H}^2/Γ' .

Puisque cette dernière surface est de type fini, il existe alors un homéomorphisme quasi-conforme entre les surfaces \mathbb{H}^2/Γ' et $\Omega_0/\rho_\infty(\Gamma')$; cet homéomorphisme se relève en un homéomorphisme quasi-conforme de \mathbb{H}^2 sur Ω_0 qui conjugue les actions de Γ' et de $\rho_\infty(\Gamma')$.

Fixons une constante $\delta > 0$. L'image de la surface $\Omega_0/\rho_\infty(\Gamma')$ par la rétraction r_δ est une surface Σ_δ de classe C^1 contenue dans $M(\rho_\infty(\Gamma'))$, qui est le bord d'une variété convexe N_δ (cf. section 1.1); toutes les géodésiques fermées de $M(\rho_\infty(\Gamma'))$ sont contenues dans N_δ et l'inclusion de Σ_δ dans N_δ induit un isomorphisme au niveau du groupe fondamental. Si ε est choisi suffisamment petit, les seules composantes de la partie ε -mince de $M(\rho_\infty(\Gamma'))$ que Σ_δ intersecte sont les cusps (de type \mathbb{Z}) correspondant aux composantes du bord de S' .

Notation. — Notons $L(c)$ la longueur d'une courbe $c \subset M(\rho_\infty(\Gamma'))$; pour simplifier, nous noterons aussi, pour $\gamma \in \Gamma'$, $L(\gamma) = \ell_{\rho_\infty}(\gamma)$ la longueur de la classe de conjugaison γ pour la représentation ρ_∞ , c'est-à-dire, 0 si $\rho_\infty(\gamma)$ est parabolique, et la distance de translation de $\rho_\infty(\gamma)$, si $\rho_\infty(\gamma)$ est un élément hyperbolique.

Par construction, la puissance ϕ^k du pseudo-Anosov ϕ laisse invariant à conjugaison près le groupe Γ' . Nous noterons $\psi \in \text{Mod}(S')$ le relevé de ϕ^k à S' . D'après la proposition 1.5.2, ψ est pseudo-Anosov; on note λ'_+ et λ'_- ses deux laminations invariantes.

Soit \mathcal{C}' l'ensemble des géodésiques fermées sur la surface \mathbb{H}^2/Γ' . On a :

Proposition 6.2.6. — *Pour tout élément $\gamma \in \mathcal{C}'$, il existe une constante $C = C(\gamma)$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad L((\psi_*)^n(\gamma)) \leq C.$$

Démonstration. — Soit $\gamma \in \mathcal{C}'$. Par construction, la représentation ρ_∞ restreinte à Γ' est la limite dans $\mathcal{R}(\Gamma')$ d'une sous-suite (ρ_{i_k}) de la suite $(\rho_i) \in \mathcal{QF}(\Gamma')$.

Le pseudo-Anosov ψ agit sur l'espace $\mathcal{R}(\Gamma')$ par $\rho \rightarrow \rho \circ \psi_* = \psi(\rho)$. Cette action est continue pour la topologie naturelle sur $\mathcal{R}(\Gamma')$, c'est-à-dire la topologie algébrique.

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $i_n \geq |2n|$ tel que la représentation $\psi^n(\rho_\infty)$ soit proche de $\psi^n(\rho_{i_n})$, au sens que :

$$\frac{1}{2} \ell_{\psi^n(\rho_\infty)}(\gamma) \leq \ell_{\psi^n(\rho_{i_n})}(\gamma) \leq 2 \ell_{\psi^n(\rho_\infty)}(\gamma).$$

Mais la représentation $\psi^n(\rho_{i_n})$ est conjuguée à la représentation quasi-fuchsienne ρ'_n dont les coordonnées dans le paramétrage d'Ahlfors-Bers sont :

$$((\psi^*)^{-i_n-n}(\sigma'), (\psi^*)^{i_n-n}(\sigma')) .$$

Puisque $i_n \geq |2n|$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi^*)^{-i_n-n}(\sigma') = \lambda'_- \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi^*)^{i_n-n}(\sigma') = \lambda'_+,$$

dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma')$.

D'après le théorème de la limite double (théorème 5.2.1), la suite ρ'_n est bornée dans $\mathcal{R}(\Gamma')$, et donc la suite $\psi^n(\rho_{i_n})$ est bornée à conjugaison près.

Donc, d'après le choix de i_n , la suite $L((\psi_*)^n(\gamma))$ est bornée. \square

Choisissons une géodésique fermée $\gamma \subset \mathbb{H}^2/\Gamma'$ sans points doubles.

Notons maintenant γ_n^* la géodésique de N_δ représentant la classe de conjugaison $(\psi_*)^n(\gamma)$ lorsque cette classe de conjugaison est représentée par un élément hyperbolique dans N_δ . Notons γ_n la géodésique dans la classe de conjugaison $(\psi_*)^n(\gamma)$ tracée sur la surface Σ_δ munie de la métrique induite.

Nous allons commencer par montrer que les courbes γ_n , sauf au plus un nombre fini, sont homotopes à des géodésiques dans N_δ .

Lemme 6.2.7. — *Avec les notations précédentes, il n'y a qu'un nombre fini de courbes dans la suite (γ_n) qui sont représentées par des éléments paraboliques de $\rho_\infty(\Gamma')$.*

Démonstration. — Nous utiliserons le résultat suivant :

Sous-lemme 6.2.8. — *Soient g_1 et g_2 deux courbes simples et non homotopes contenues dans Σ_δ , qui sont représentées toutes les deux par des éléments paraboliques dans $\rho_\infty(\Gamma')$; alors le nombre d'intersection de g_1 et de g_2 est nul.*

Ici, le nombre d'intersection $i(g_1, g_2)$ entre les courbes g_1 et g_2 désigne le minimum du cardinal de l'intersection entre deux courbes qui leur sont isotopes; c'est aussi le nombre de points d'intersection géométrique, comptés avec multiplicité, entre les géodésiques qui leur sont homotopes.

Démonstration. — Homotopons sur la surface Σ_δ chaque courbe g_i à une courbe fermée c_i de sorte que les courbes c_1 et c_2 s'intersectent transversalement et que le nombre de leurs points d'intersection soit égal à $i(g_1, g_2)$.

Si c_i est parabolique, alors il existe une application continue $f_i : S^1 \times [0, 1] \rightarrow N_\delta$, transverse au bord telle que : $f_i(S^1 \times 0) = c_i$ et telle que $f_i(S^1 \times 1)$ soit une courbe dans le bord d'une composante C_i de la partie ε -cuspidale de N_δ . Notons A_i l'image de cette application. Après une homotopie constante sur un voisinage de $S^1 \times 0$, l'intersection de chacun des anneaux A_i avec la composante C_i est réduite à la courbe $f_i(S^1 \times 1)$. Par une perturbation

constante sur le bord, on peut en outre supposer que ces anneaux sont en position transverse l'un par rapport à l'autre : alors la préimage $f_1^{-1}(A_2)$ (resp. $f_2^{-1}(A_1)$) est une réunion K_1 (resp. K_2) de courbes fermées et d'arcs, immergés dans $S^1 \times [0, 1]$.

Puisque les classes de conjugaison des courbes c_1 et c_2 sont distinctes, les composantes du bord de la partie cuspidale de $M(\rho_\infty(\Gamma'))$ qui contiennent respectivement $f_1(S^1 \times 1)$ et $f_2(S^1 \times 1)$ sont distinctes. On en déduit que les arcs contenus dans K_1 et K_2 ont leurs deux extrémités dans $S^1 \times 0$.

Supposons, en raisonnant par l'absurde, que les courbes c_1 et c_2 aient une intersection non vide; il existe alors un arc k_1 dans K_1 et un arc k_2 dans K_2 tel que $f_1(k_1) = f_2(k_2)$. Chaque arc $f_i(k_i)$ est homotope à un arc contenu dans c_i par une homotopie contenue dans A_i , constante sur le bord. En recollant ces deux homotopies, on obtient une courbe fermée sur Σ_δ , formée d'un arc dans c_1 et d'un arc dans c_2 qui borde un disque dans la variété N_δ ; puisque le groupe fondamental de Σ_δ s'injecte dans celui de N_δ , cette courbe borde aussi un disque dans la surface Σ_δ . Ceci contredit que les deux courbes c_1 et c_2 étaient en position d'intersection minimale. \square

Ce résultat entraîne le lemme 6.2.7. En effet, d'après ce lemme, les courbes γ_n homotopes à des éléments paraboliques sont alors disjointes. Deux de ces courbes ne sont jamais homotopes, puisqu'elles diffèrent par une puissance du pseudo-Anosov (cf. section 1.5). Le lemme 6.1.1 découle donc du fait qu'on ne peut tracer qu'un nombre fini de courbes simples disjointes et non homotopes sur la surface Σ_δ , puisque celle-ci est homéomorphe à l'intérieur d'une surface compacte. \square

Remarque. — L'argument utilisé dans la démonstration du sous-lemme 6.2.8 montre aussi que tout élément parabolique de $\rho_\infty(\Gamma')$ est représenté par une puissance d'une courbe simple sur Σ_δ .

Corollaire 6.2.9. — Avec les notations ci-dessus, pour toute constante $C > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques γ_n^* qui sont à une distance inférieure à C de la surface γ_i^* .

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que la surface Σ_δ est compacte (c'est-à-dire que S' est fermée). Alors, puisque la longueur des géodésiques γ_n^* est majorée, si une infinité $(\gamma_{n_i}^*)$ de ces géodésiques est à une distance inférieure à C de Σ_δ , cette infinité est contenue dans un même compact $K \subset N_\delta$. Le rayon d'injectivité de N_δ est minoré sur le compact K par une constante strictement positive. Donc la longueur des géodésiques $\gamma_{n_i}^*$ est minorée. Elle est aussi majorée d'après la proposition 6.2.6. D'après le théorème d'Ascoli, il existerait deux géodésiques différentes $\gamma_{n_i}^*$ et $\gamma_{n_j}^*$ qui sont voisines; elles sont alors homotopes et donc égales. C'est impossible puisqu'une puissance non nulle d'un pseudo-Anosov ne peut laisser invariante une classe de conjugaison représentée par une géodésique fermée (cf. section 1.5).

Lorsque la surface Σ_δ n'est pas compacte, ses bouts sont proprement plongés dans des composantes cuspidales de $M(\rho_\infty(\Gamma'))$ (cf. section 1.1). Aucune des géodésiques γ_n^* ne peut être entièrement contenue dans une composante de la partie cuspidale de $M(\rho_\infty(\Gamma'))$ d'après le lemme de Margoulis. Donc, puisque la longueur des courbes γ_n^* est majorée, si une infinité de termes de la suite γ_n^* est à une distance inférieure à C de Σ_δ , ces géodésiques sont contenues dans un même compact de N_δ . On conclut alors comme précédemment. \square

Nous allons maintenant obtenir une contradiction (à l'existence d'un domaine de discontinuité pour le groupe $\rho_\infty(\Gamma)$) en utilisant le "lemme du nombre d'intersection" de Thurston [Thu1, §9] qui dit que si deux géodésiques sont situées "suffisamment loin" dans le même bout d'une variété hyperbolique qui a le type d'homotopie d'une surface, alors leur nombre d'intersection (homotopique) est "petit" par rapport à leur longueur.

D'après le lemme 6.2.7, pour $|n|$ suffisamment grand, toutes les courbes γ_n sont homotopes à des géodésiques fermées γ_n^* dans N_δ .

Proposition 6.2.10. — *Soient γ_i et γ_j deux courbes de la suite (γ_n) homotopes à des géodésiques γ_i^* et γ_j^* telles que :*

- (i) γ_i^* et γ_j^* sont à une distance supérieure à D de la surface Σ_δ ;
- (ii) γ_i^* et γ_j^* sont à une distance supérieure à 1 l'une de l'autre ;

alors, on a :

$$i(\gamma_i, \gamma_j) \leq ce^{-D}L(\gamma_i)L(\gamma_j),$$

pour une constante c indépendante des courbes γ_i , γ_j et de D .

Démonstration. — Nous suivrons la démonstration donnée par Francis Bonahon du lemme du nombre d'intersection [Bo].

Fixons une constante $0 < \delta' < \delta$; on peut approcher la surface Σ_δ par une surface Σ , contenue dans le collier entre Σ_δ et $\Sigma_{\delta'}$, qui est convexe, totalement géodésique par morceaux et proche de Σ_δ au sens que son plan tangent (là où il est défini) est proche de celui de Σ_δ . Alors, d'une part, la surface Σ est le bord (convexe) d'une variété $V \subset N_\delta$. D'autre part, les fibres de la rétraction $r_{\delta'}$ sur $\Sigma_{\delta'}$ intersectent Σ en un seul point et de façon presque orthogonale ; on définit à partir de cette observation un homéomorphisme (une projection) de Σ_δ sur Σ tel que l'image de toute courbe $c \subset \Sigma_\delta$ est une courbe $c' \subset \Sigma$, homotope à c dans N_δ et qui vérifie : $L(c') < aL(c)$, pour une constante a indépendante de c .

Considérons la projection γ'_i de γ_i sur la surface Σ ; on a : $L(\gamma'_i) < aL(\gamma_i)$. On peut donc approcher la courbe γ'_i par une courbe géodésique par morceaux (toujours notée γ'_i) de sorte qu'on ait toujours :

$$L(\gamma'_i) < aL(\gamma_i); \tag{1}$$

on peut supposer en outre que γ'_i et γ'_j s'intersectent transversalement et que le nombre de leurs points d'intersection est égal à $i(\gamma_i, \gamma_j)$.

D'après (1), il nous suffit de démontrer la proposition 6.2.10 en remplaçant dans l'énoncé les courbes γ_i par ces courbes γ'_i .

Fixons une constante positive ε inférieure à $e^{-C}\varepsilon(3)$, où $\varepsilon(3)$ est la constante de Margoulis de dimension 3 et où C majore les longueurs des géodésiques de la suite (γ_n^*) (proposition 6.2.6).

Alors, si une géodésique γ_i^* intersecte une composante de la partie ε -mince de la variété $M(\rho_\infty(\Gamma'))$, elle est entièrement contenue dans la composante concentrique de la partie $\varepsilon(3)$ -épaisse. Donc, d'après le lemme de Margoulis (cf. section 1.1), si une géodésique γ_i^* intersecte une composante de la partie ε -épaisse, c'est l'âme d'une tube de Margoulis.

Nous allons décrire une homotopie particulière entre la courbe γ'_i et la géodésique γ_i^* . Soit $h_i : S^1 \times [0, 1] \rightarrow N_\delta$ une homotopie entre les paramétrages des courbes γ'_i et γ_i^* . Considérons une triangulation T de l'anneau $S^1 \times [0, 1]$ dont le 0-squelette est contenu dans le bord et inclut les coins de γ'_i (et donc, en particulier, les intersections de γ'_i avec les coins de Σ). On peut alors homotoper h_i , par une homotopie constante sur le bord de sorte qu'elle soit géodésique sur toutes les arêtes de T . Par une nouvelle homotopie, on obtient une homotopie f_i qui est totalement géodésique sur chaque triangle de la triangulation T . Par une nouvelle perturbation des courbes γ'_i et γ'_j , on peut supposer que les deux applications f_i et f_j obtenues sont en position transverse.

Observons que la convexité de V entraîne que l'image de f_i est contenue dans V .

Soit A_i l'anneau $S^1 \times [0, 1]$ muni de la métrique induite par f_i . Cette métrique est donc de courbure -1 dans l'intérieur; chaque composante de son bord est géodésique par morceaux et s'identifie à l'une des courbes γ'_i ou γ_i^* .

Par hypothèse, la distance mesurée sur A_i entre deux points sur des composantes différentes du bord est supérieure à D . On a :

Fait 6.2.11. — *L'aire de l'ensemble des points de A_i dont la distance à γ'_i est supérieure à D est inférieure à $3e^{-R}L(\gamma'_i)$.*

Démonstration. — Par construction, l'anneau A_i est réunion de triangles hyperboliques géodésiques qui ont un sommet sur γ'_i (ou sur γ_i^*) et le côté opposé sur γ_i^* (ou sur γ'_i).

Pour un triangle dont un côté est un segment $k \subset \gamma'_i$, l'aire de l'ensemble des points situés à une distance supérieure à D de k est inférieure à $e^{-D}L(k)$: on voit ceci facilement par un calcul en coordonnées polaires autour du sommet opposé à k . Un triangle dont un côté est un segment $k^* \subset \gamma_i^*$ a une aire

inférieure à $L(k^*)$. Donc l'aire de l'ensemble des points de A_i situés à distance supérieure à D de γ'_i est inférieure à :

$$L(\gamma_i^*) + e^{-D}L(\gamma'_i).$$

Comme, par hypothèse, la distance entre tout point de γ'_i et tout point de γ_i^* est supérieure à D , la projection orthogonale (dans l'anneau A_i) de γ'_i sur γ_i^* a une dérivée dont la norme est inférieure à $1/\cosh(D)$ en tout point. Donc,

$$L(\gamma_i^*) \leq \frac{1}{\cosh(D)}L(\gamma'_i) \leq 2e^{-D}L(\gamma'_i).$$

Ceci démontre le fait 6.2.11. □

La préimage de l'intersection $f_i(A_i) \cap f_j(A_j)$ est une réunion de courbes et d'arcs immergés dans A_i et A_j . Chaque point dans l'intersection $\gamma'_i \cap \gamma'_j$ est extrémité d'une ligne de points doubles; cette ligne de points doubles termine sur un point du bord de A_i ou sur un point de l'intérieur de A_i . Par l'argument que nous avons utilisé dans la démonstration du sous-lemme 6.2.8, cette ligne ne peut terminer sur un point de $\gamma'_i \cap \gamma'_j$ puisque les courbes γ'_i et γ'_j s'intersectent de façon minimale.

Donc, à chaque point de $\gamma'_i \cap \gamma'_j$, on associe un point qui est contenu dans $A_i \cap f_i^{-1}(\gamma_j^*)$ ou dans $A_j \cap f_j^{-1}(\gamma_i^*)$: cette application est injective. Pour démontrer la proposition 6.2.10, nous allons donc majorer le cardinal de $A_i \cap f_i^{-1}(\gamma_j^*)$ et celui de $A_j \cap f_j^{-1}(\gamma_i^*)$.

Munissons le produit $\gamma_i^* \times A_j$ de la métrique produit des deux métriques riemanniennes induites. Alors, on a :

Lemme 6.2.12. — Soient (x, y) et (x', y') deux points de $\gamma_i^* \times A_j$ tels que : $x = f_j(y)$ et $x' = f_j(y')$. Alors

- (i) $d(x, x') \geq \varepsilon/2$ et $d(y, y') \geq \varepsilon/2$;
- (ii) le rayon d'injectivité de la métrique de l'anneau A_j au point y est supérieur à $\varepsilon/2$.

Démonstration. — Pour démontrer (i), on raisonne par l'absurde en distinguant deux cas.

Premier cas. — $L(\gamma_i^*) > \varepsilon$.

On peut joindre les points x et x' par un arc $k^* \subset \gamma_i^*$ de longueur inférieure à $\varepsilon/2$. On peut aussi les joindre par un arc $k \subset f_j(A_j)$ de longueur inférieure à $\varepsilon/2$.

La réunion de ces deux arcs est une courbe de longueur inférieure à ε . Cette courbe est disjointe de la partie ε -mince d'après le choix de ε (voir le début de la démonstration de la proposition 6.2.10) et puisqu'on a : $L(\gamma_i^*) > \varepsilon$. Elle borde donc un disque dans V .

En utilisant les arcs de points doubles qui joignent x et x' à des points de $\gamma'_i \cap \gamma'_j$, on contredit alors que les courbes γ'_i et γ'_j s'intersectent de façon minimale (cf. lemme 6.2.8).

Deuxième cas. — $L(\gamma_i^*) \leq \varepsilon$.

On produit deux arcs k et k^* comme dans le premier cas. Leur réunion, qui est une courbe de longueur inférieure à ε , est donc homotope à un multiple de la géodésique γ_i^* , puisqu'elle intersecte la partie ε -mince. Quitte à rajouter à l'arc k^* un multiple convenable de la géodésique γ_i^* , la courbe $k \cup k^*$ est homotope à 0. En utilisant les deux arcs de points doubles issus de x et de x' on obtient deux arcs, l'un contenu dans γ'_j , l'autre dans γ'_i homotopes à extrémités fixes dans V , et donc aussi dans Σ par incompressibilité. Puisque les courbes γ'_i et γ'_j sont en position d'intersection minimale, on obtient encore une contradiction.

Pour voir (ii), supposons en raisonnant par l'absurde qu'il existe deux géodésiques distinctes k_1 et k_2 issues de y de longueur inférieure à $\varepsilon/2$ et ayant les mêmes extrémités. Alors $f_j(k_1) \cup f_j(k_2)$ est une courbe fermée de V , homotope à une puissance non nulle de γ'_j (car la métrique sur l'anneau A_j est de courbure négative), et de longueur inférieure à ε . D'après le lemme de Margoulis, γ_j^* est l'âme d'une composante de la partie ε -mince; γ_i^* intersecte cette même composante et y est donc entièrement contenue. C'est impossible puisque γ'_i et γ'_j ne sont pas homotopes. \square

Pour montrer la proposition 6.2.10, supposons dans un premier temps que $L(\gamma_i^*) \geq \varepsilon$. Alors en tout point $(x, y) \in \gamma_i^* \times A_j$ tel que $x = f_j(y)$, la boule $B(x, y)$ de rayon $\varepsilon/4$ est plongée (lemme 6.2.12). Comme la variété $\gamma_i^* \times A_j$ est localement isométrique à $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, le volume de cette boule est une constante $v(\varepsilon)$. D'après le lemme 6.2.12 (i), les boules $B(x, y)$ centrées en des points (x, y) différents sont disjointes. Puisque le volume du produit $\gamma_i^* \times A_j$ est inférieur à $L(\gamma_i^*)(L(\gamma'_j) + L(\gamma_j^*))$, le cardinal de $A_j \cap f_i^{-1}(\gamma_i^*)$ est inférieur à

$$\frac{1}{v(\varepsilon)} L(\gamma_i^*)(L(\gamma'_j) + L(\gamma_j^*)) \leq \frac{4e^{-D}}{v(\varepsilon)} L(\gamma'_i)L(\gamma'_j).$$

Lorsque $L(\gamma_i^*) \leq \varepsilon$, alors deux points distincts y et y' dans l'intersection $A_j \cap f_i^{-1}(\gamma_i^*)$ sont à une distance supérieure à $\varepsilon/2$ dans A_j d'après le lemme 6.2.12. Ces points sont à une distance de γ'_j supérieure à D ; d'après le fait 6.2.11, le volume de cette partie de A_j est inférieur à $3e^{-D}L(\gamma'_j)$.

Les boules de rayon $\varepsilon/4$ centrées aux points de $f^{-1}(\gamma_i^*)$ sont plongées et disjointes (lemme 6.2.12). Donc si $c(\varepsilon)$ est le volume de la boule de rayon $\varepsilon/4$ dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 , le cardinal de $A_j \cap f_i^{-1}(\gamma_i^*)$ est inférieur à :

$$\frac{3e^{-D}}{c(\varepsilon)} L(\gamma'_j).$$

Si m est un minorant pour la longueur des géodésiques fermées non homotopes à 0 sur Σ , la proposition 6.2.10 est donc vérifiée pour la constante :

$$c = \inf \left\{ \frac{3e^{-D}}{mc(\varepsilon)}, \frac{4e^{-D}}{v(\varepsilon)} \right\}.$$

□

On déduit donc de la proposition 6.2.10 et du corollaire 6.2.9 :

$$\liminf_{i \rightarrow \infty, j \rightarrow -\infty} \frac{i(\gamma_i, \gamma_j)}{L(\gamma_i)L(\gamma_j)} = 0.$$

La longueur $L(\gamma_i)$ est celle de la géodésique de Σ qui représente la classe de conjugaison $\gamma_i = (\psi_*)^i(\gamma)$. La métrique induite sur la surface Σ est équivalente à la métrique de référence sur la surface \mathbb{H}^2/Γ' , il existe une constante A telle que, pour tout $\gamma \in \mathcal{C}'$, on ait : $L(\gamma) \leq A\ell(\gamma)$, où $\ell(\gamma)$ est la longueur pour la métrique de référence \mathbb{H}^2/Γ' .

On a donc :

$$\liminf_{i \rightarrow \infty, j \rightarrow -\infty} \frac{i(\gamma_i, \gamma_j)}{\ell(\gamma_i)\ell(\gamma_j)} = 0 \quad (1)$$

Or, on a :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)} = \lambda'_+ \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)} = \lambda'_-,$$

pour la topologie de l'espace des laminations mesurées $\mathcal{ML}(S')$ (proposition 1.5.1).

Comme les laminations λ'_+ et λ'_- s'intersectent, on en déduit (fait A.3.11) :

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty, j \rightarrow -\infty} \frac{i(\gamma_i, \gamma_j)}{\ell(\gamma_i)\ell(\gamma_j)} \neq 0.$$

Cette contradiction avec (1) entraîne au bout du compte que le domaine de discontinuité du groupe $\rho_\infty(\Gamma)$ est nécessairement vide. □

6.3 Construction d'une représentation du groupe $\pi_1(M_\phi)$

L'homéomorphisme Ψ_∞ de \mathbb{C} construit dans la section 6.1 est quasi-conforme. Nous allons montrer en fait :

Proposition 6.3.1. — *L'homéomorphisme Ψ_∞ de la section 6.1 est une transformation de Möbius.*

Démonstration. — Le coefficient de Beltrami de Ψ_∞ est défini presque partout par :

$$\mu(\Psi_\infty)(z) = \frac{\bar{\partial}\Psi_\infty}{\partial\Psi_\infty}.$$

Dire que Ψ_∞ est une transformation de Möbius équivaut à dire que son coefficient de Beltrami est nul presque partout (proposition 1.2.1).

Raisonnons par l'absurde pour montrer la proposition 6.3.1. Soit \mathcal{E} le support de $\mu(\Psi_\infty)$; supposons que la mesure de Lebesgue de \mathcal{E} est non nulle. La relation de commutation

$$\Psi_\infty(\rho_\infty(\gamma)(z)) = \rho_\infty(\phi_*(\gamma))(\Psi_\infty(z))$$

dit dans un premier temps que \mathcal{E} est invariant par $\rho_\infty(\Gamma)$ mais entraîne aussi que pour tout élément $g \in \rho_\infty(\Gamma)$, on a :

$$\mu(\Psi_\infty \circ g(z)) = \mu(\Psi_\infty(z)).$$

On a donc, pour tout élément $g \in \rho_\infty(\Gamma)$ (cf. section 1.2) :

$$\mu(\Psi_\infty \circ g(z)) \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} = \mu(\Psi_\infty(z)).$$

Définissons un champ de droites mesurable \mathcal{P} sur \mathcal{E} de la façon suivante. Soit $\mathcal{P}(z)$ la droite passant par $z \in \mathcal{E}$ qui fait un angle $\frac{1}{2} \arg \mu(\Psi_\infty)(z)$ avec l'axe des x . Alors \mathcal{P} est un champ de droites mesurable sur \mathcal{E} , invariant par le groupe $\rho_\infty(\Gamma)$.

Admettons le théorème suivant de D. Sullivan qui sera démontré dans le chapitre 7.

Théorème 6.3.2. — *Soit $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ un groupe kleinien dont l'ensemble limite est égal à toute la sphère $\overline{\mathbb{C}}$. Alors, il n'existe pas de champ de droites mesurable défini sur un borélien de mesure non nulle de \mathbb{C} et qui soit invariant par G .*

Ce théorème fournit immédiatement une contradiction : l'homéomorphisme Ψ_∞ est donc une transformation de Möbius. \square

Notons $\rho_\infty(t)$ la transformation de Möbius Ψ_∞ .

Pour tout $\gamma \in \Gamma \simeq \pi_1(S)$, on a donc :

$$\rho_\infty(t) \circ \rho_\infty(\gamma) \circ \rho_\infty(t)^{-1} = \rho_\infty(\phi_*(\gamma)).$$

Donc, l'application du produit libre $\pi_1(S) * \langle t \rangle$ qui coïncide avec ρ_∞ sur $\pi_1(S)$ et qui vaut $\rho_\infty(t)$ sur le générateur t du groupe cyclique $\langle t \rangle$ induit une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M_\phi)$.

Lemme 6.3.3. — *La représentation ρ_∞ est fidèle et discrète.*

Démonstration. — Considérons la variété hyperbolique $M(\rho_\infty(\Gamma))$, quotient de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 par le groupe kleinien $\rho_\infty(\Gamma)$. Puisque l'élément $\rho_\infty(t)$ normalise $\rho_\infty(\Gamma)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, son action sur \mathbb{H}^3 passe au quotient en une isométrie de $M(\rho_\infty(\Gamma))$.

Sous-lemme 6.3.4. — Soit $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ un groupe kleinien non élémentaire. Alors le groupe des isométries $\mathcal{J}(G)$ de la variété hyperbolique complète $M(G)$ est un groupe discret pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Démonstration. — Puisque G est non élémentaire, la variété $M(G)$ contient au moins deux géodésiques fermées (cf. fait 1.1.1) distinctes. Soit L la longueur d'une géodésique fermée dans $M(G)$.

L'ensemble $\mathcal{G}(L)$ des géodésiques de longueur inférieure à L est discret : tout compact $K \subset M(G)$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}(L)$. D'autre part, le groupe $\mathcal{J}(G)$ laisse l'ensemble $\mathcal{G}(L)$ invariant. Il nous suffit donc de voir que le sous-groupe \mathcal{J}_c de $\mathcal{J}(G)$ qui laisse invariante une géodésique $c \in \mathcal{G}(L)$ est discret. Considérons l'ensemble des géodésiques de longueur immédiatement supérieure à la longueur de c ; c'est encore un ensemble discret de géodésiques, invariant par $\mathcal{J}(G)$. Celles qui sont le plus proches de c forment un ensemble fini, laissé invariant par toute isométrie de \mathcal{J}_c . En particulier, l'ensemble des plus courts segments géodésiques entre la géodésique c et l'une de ces géodésiques est un ensemble fini, invariant par \mathcal{J}_c . On en déduit que \mathcal{J}_c est un groupe fini puisque tout élément de \mathcal{J}_c est déterminé par son action restreinte à c et par son action sur un vecteur orthogonal à c . \square

Le sous-lemme 6.3.4 entraîne que l'élément $\rho_\infty(t)$ agit discrètement sur $M(\rho_\infty(\Gamma))$.

Supposons que $\rho_\infty(t)$ agisse sur $M(\rho_\infty(\Gamma))$ comme un élément d'ordre fini n . Puisque pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$, on a : $\rho_\infty(t^n \gamma t^{-n}) = \rho_\infty((\phi_*)^n(\gamma))$, et puisque la représentation ρ_∞ restreinte à $\pi_1(S)$ est fidèle, on aurait alors, pour un élément $g \in \pi_1(S)$: $(\phi_*)^n(\gamma) = g\gamma g^{-1}$. Ceci est impossible car un pseudo-Anosov ne laisse aucune classe de conjugaison invariante (cf. section 1.5). Donc $\rho_\infty(t)$ agit sur $M(\rho_\infty(\Gamma))$ comme une isométrie d'ordre infini.

Donc ρ_∞ est une représentation fidèle : puisque tout élément de $\pi_1(M_\phi)$ s'écrit comme un produit $g = t^\nu \gamma$, si on avait $\rho_\infty(t^n \gamma) = \mathrm{Id}$, alors, $\rho_\infty(t)$ agirait sur $M(\rho_\infty(\Gamma))$ comme un élément d'ordre fini.

De même la représentation ρ_∞ est discrète. S'il existait deux suites (n_i) , (γ_i) avec $\rho_\infty(t^{n_i} \gamma_i) \rightarrow \mathrm{Id}$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, alors la suite $\rho_\infty(t^{n_i})$ agissant sur $M(\rho(\Gamma))$ tendrait vers l'identité. Donc la suite (n_i) serait bornée. Alors puisque la représentation $\rho|_{\pi_1(S)}$ est discrète, la suite $t^{n_i} \gamma_i$ serait une suite finie, ce qui est impossible.

Ceci termine la démonstration du lemme 6.3.3. \square

6.4 Démonstration du théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées

Soit M une variété orientable de dimension 3 compacte, irréductible et atoroidale; supposons que M contienne une surface connexe orientable, compacte, proprement plongée, incompressible et de caractéristique d'Euler négative qui la découpe en un fibré en intervalles. Nous voulons montrer que l'intérieur de M porte une métrique hyperbolique complète de volume fini.

On distingue deux cas, selon que la surface S disconnecte ou ne disconnecte pas.

Premier cas. — S ne disconnecte pas M .

Alors la variété obtenue en découpant $(M, \partial M)$ le long de $(S, \partial S)$ est un fibré en intervalles qui contient deux copies de S dans son bord. Puisque M est orientable, ce fibré est difféomorphe au produit $S \times [0, 1]$; la variété M est donc difféomorphe à la suspension M_ϕ d'un certain difféomorphisme ϕ de S qui préserve l'orientation.

A difféomorphisme fibré près, M_ϕ ne dépend que de la classe d'isotopie du difféomorphisme ϕ .

Dans le chapitre 1, on a rappelé que tout difféomorphisme ϕ de S est, à isotopie près, de l'un des trois types suivants :

- (i) ϕ est d'ordre fini;
- (ii) ϕ laisse invariante une réunion de géodésiques fermées, plongées et disjointes de \mathbb{H}^2/Γ ;
- (iii) ϕ est pseudo-Anosov.

Si le difféomorphisme ϕ est d'ordre fini, le feuilletage en intervalles de $S \times [0, 1]$ se recolle en une fibration de Seifert sur M ; la base de cette fibration de Seifert est le quotient S/ϕ . On voit alors facilement que la variété M ne peut être simultanément irréductible, atoroidale et suffisamment grande.

Si ϕ laisse invariante une collection γ de courbes fermées plongées dans S , comme dans (ii), la suspension de ces courbes est un tore plongé T dans M .

On voit que ce tore T est incompressible, par exemple en considérant sa préimage dans le revêtement infini cyclique de M_ϕ , difféomorphe au produit $S \times]-\infty, \infty[$: le relevé de T dans ce revêtement est le produit $\gamma \times]-\infty, \infty[$. Puis, dans le revêtement universel de M_ϕ , ces anneaux se relèvent en des plans de sorte que l'inclusion de T dans M induit une injection du groupe fondamental; aucun de ces plans n'est homotope dans $\partial \tilde{S} \times]-\infty, \infty[$ puisque les composantes de γ ne sont pas homotopes dans ∂S par définition. La variété M n'est donc pas atoroidale dans ce cas.

Donc la seule possibilité pour la monodromie est d'être pseudo-Anosov.

Nous avons vu dans la section précédente qu'il existait alors une représentation fidèle et discrète ρ du groupe fondamental $\pi_1(M_\phi)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. On a donc un isomorphisme entre le groupe fondamental de M et celui d'une variété hyperbolique complète $M(\rho(\pi_1(M_\phi)))$; cet isomorphisme se réalise par une équivalence d'homotopie f , puisque M_ϕ et $M(\rho(\pi_1(M_\phi)))$ sont des $K(\pi, 1)$.

Si la variété M est fermée, l'équivalence d'homotopie f est homotope à un difféomorphisme d'après un théorème de Stallings ([St], [Wa]).

Lorsque le bord de M n'est pas vide, chaque composante de ∂M est un tore; l'image du groupe fondamental de ce tore par la représentation ρ est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ puisque c'est un sous-groupe discret abélien de rang 2 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Considérons, pour une constante ε inférieure à la composante de Margoulis, la variété $M^{[\varepsilon, \infty]}$, égale à la partie ε -épaisse de la variété $M(\rho(\pi_1(M_\phi)))$. C'est une variété à bord, dont le bord contient des tores T_1, \dots, T_k , dont les groupes fondamentaux respectifs correspondent à ceux des composantes du bord de M_ϕ . Choisissons une équivalence d'homotopie entre $(M_\phi, \partial M_\phi)$ et $(M^{[\varepsilon, \infty]}, \cup_{i \leq k} T_i)$ qui envoie ∂M_ϕ dans la réunion $\cup_{i \leq k} T_i$; on peut homotoper cette équivalence d'homotopie de sorte qu'elle induise un difféomorphisme sur le bord.

La réunion des tores T_i est homologue à 0 dans $M^{[\varepsilon, \infty]}$, puisqu'ils forment l'image du bord de M_ϕ , lequel est homologue à 0 puisque M_ϕ est compacte. Donc la variété $M^{[\varepsilon, \infty]}$ est compacte.

D'autre part, cette variété ne contient pas d'anneaux essentiels. En effet, on voit facilement que tout anneau incompressible proprement plongé dans $M^{[\varepsilon, \infty]}$ est homotope dans le bord, puisque les courbes tracées sur le bord de $M^{[\varepsilon, \infty]}$ agissent comme des éléments paraboliques dans l'espace hyperbolique. Donc, d'après un théorème de K. Johannson ([Joh], [JS]), l'équivalence d'homotopie entre M_ϕ et $M^{[\varepsilon, \infty]}$ est homotope à un difféomorphisme.

Maintenant, il suffit d'observer que d'après la structure des cusps, l'intérieur de la variété $M^{[\varepsilon, \infty]}$ est difféomorphe à $M(\rho(\pi_1(M_\phi)))$. Donc, $M(\rho(\pi_1(M_\phi)))$, réunion d'une variété compacte et d'un nombre fini de cusps de type $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est une variété de volume fini, difféomorphe à l'intérieur de M .

Ceci termine la démonstration du théorème d'hyperbolisation dans le cas des variétés fibrées sur le cercle.

Deuxième cas. — S disconnecte M .

Nous allons nous ramener au cas précédent.

Soit M une variété telle qu'en découpant M le long de S on obtienne la réunion de deux fibrés en intervalles M_1 et M_2 . Alors chacune des deux variétés M_i , étant orientable, est difféomorphe au fibré tordu en intervalles sur la surface non orientable S' dont le revêtement double est S . Pour chacun de ces deux fibrés, on définit une involution τ_i qui consiste à associer à un

point $p \in S$ l'autre extrémité de la fibre dont une extrémité est p . Chaque involution τ_i est sans points fixes et renverse l'orientation de S .

Considérons le difféomorphisme $\phi = \tau_2 \circ \tau_1$, qui préserve l'orientation de la surface S . La variété M_ϕ est un revêtement à deux feuillet de M . Pour décrire la projection de revêtement, considérons le produit $S \times [-1, 1]$. Il existe un unique revêtement de degré 2 de $S \times [-1, 0]$ sur M_1 qui respecte la fibration et qui identifie la composante $S \times 0$ avec S ; de même pour le produit $S \times [0, 1]$. Ces deux revêtements se recollent en une application f qui vérifie pour tout $x \in S$, $f(\tau_1(x), -1) = f(\tau_2(x), 1)$. L'application f induit donc un revêtement de degré 2 de M , qui est défini sur le quotient de $S \times [-1, 1]$ par l'identification du bord : $(y, -1) \simeq (\tau_2 \circ \tau_1(y), 1)$. Ce quotient est difféomorphe à la variété M_ϕ . On a alors :

Affirmation 6.4.1. — *Si M vérifie les hypothèses du théorème d'hyperbolisation, le difféomorphisme ϕ est pseudo-Anosov.*

Démonstration. — Si ϕ n'était pas pseudo-Anosov, il existerait un sous-groupe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \subset \pi_1(M_\phi)$, qui n'est pas conjugué à un sous-groupe du bord ∂M_ϕ . Ce sous-groupe est réalisé par l'image d'une application g du tore T^2 dans M_ϕ . La projection $f \circ g$ induit une immersion du tore T^2 dans M ; puisque M est atoroidale, $f \circ g$ est homotope dans le bord. Cette homotopie se relève en une homotopie entre g et une application de T^2 dans ∂M_ϕ , contrairement à l'hypothèse. Donc le difféomorphisme ϕ est pseudo-Anosov. \square

D'après le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées sur le cercle, le revêtement M_ϕ porte une métrique hyperbolique dans son intérieur. Identifions dorénavant l'intérieur de la variété M_ϕ à une variété hyperbolique complète. Après une isotopie, l'involution de revêtement τ agit sur M_ϕ comme un difféomorphisme de classe C^1 . Cette involution se relève au revêtement universel \mathbb{H}^3 en un difféomorphisme $\tilde{\tau}$ de classe C^1 tel que, pour tout $\gamma \in \pi_1(M_\phi)$, on a $\tilde{\tau}(\gamma(z)) = \tau_*(\gamma)\tilde{\tau}(z)$, où τ_* désigne l'action de τ sur le groupe fondamental.

Puisqu'il est bilipschitz pour la distance hyperbolique, le difféomorphisme $\tilde{\tau}$ se prolonge au bord $\partial\mathbb{H}^3$ en un homéomorphisme quasi-conforme [Mos], [OP]. Puisque l'ensemble limite de $\pi_1(M_\phi)$ est égal à toute la sphère, la restriction de $\tilde{\tau}$ au bord de l'espace hyperbolique est une transformation de Möbius, par le théorème de rigidité de Mostow [Mo], ou d'après le théorème de Sullivan, utilisé dans la démonstration de la proposition 6.3.1.

Le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ engendré par $\pi_1(M_\phi)$ et l'isométrie $\tilde{\tau}$ est un groupe kleinien G . La variété hyperbolique complète $M(G)$ a un groupe fondamental isomorphe à $\pi_1(M)$: elle lui est donc difféomorphe d'après le théorème de Stallings [Sta], [Wa].

Ceci termine la démonstration du théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées.

CHAPITRE 7

Le théorème de Sullivan

Dans ce chapitre, nous allons démontrer le théorème de Sullivan utilisé dans le chapitre précédent. Ce théorème affirme qu'il n'existe pas de champ de droites mesurable sur \mathbb{C} , invariant par l'action d'un groupe kleinien $G \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et dont le support est contenu dans l'ensemble limite de G .

A la fin de son article [Su3], Sullivan suggère une simplification de la démonstration qu'il a proposée, par l'utilisation d'un résultat de théorie ergodique contenu dans des notes de Klaus Schmidt [Schm] : nous allons suivre cette approche.

Dans la première section, nous démontrerons le résultat de théorie ergodique contenu dans [Schm].

Sous sa forme la plus générale, le théorème de Sullivan impose peu de restrictions sur le groupe G ; le raisonnement utilise la *dynamique mesurable* de G . Tout borélien G -invariant se décompose en la réunion de deux boréliens G -invariants, la partie *conservative*, et la partie *dissipative*. La non existence d'un champ mesurable G -invariant, dont le support est conservatif est un phénomène assez général, pour lequel le groupe kleinien G n'a pas besoin d'être de type fini. En fait, nous montrerons dans la section 7.2, qu'il n'existe pas de champ mesurable de k -plans qui soit invariant par l'action d'un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ et supporté sur un borélien conservatif de $\mathbb{R}^n = \partial\mathbb{H}^{n+1}$.

Dans la section 7.3, nous montrerons la non existence d'une partie dissipative contenue dans l'ensemble limite d'un groupe kleinien (de type fini). C'est une propriété de la dimension 2 : elle utilise les applications quasi-conformes, par leur caractérisation comme solutions de l'équation de Beltrami.

7.1 La décomposition de l'action d'un groupe en partie conservative et partie dissipative

Soit (X, μ) un espace mesuré muni d'une action *absolument continue* d'un groupe dénombrable G , c'est-à-dire telle que tout élément $g \in G$ admet un inverse défini presque partout, et que g et g^{-1} agissent sur X de façon absolument continue par rapport à la mesure μ .

Alors, pour tout élément g , on peut définir une fonction $a(g, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie presque partout et qui vaut, au point x , la dérivée de Radon-Nikodym de g au point x .

La fonction $a : G \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un *cocycle* : pour presque tout x , on a :

$$a(g_1 g_2, x) = a(g_1, g_2 x) a(g_2, x).$$

Définition. — On dit que l'action de G sur un borélien $\mathcal{C} \subset X$ est *conservative* s'il existe pour tout borélien $F \subset \mathcal{C}$ de mesure non nulle, une infinité d'éléments $g \in G$ tels que $\mu(F \cap gF) \neq 0$. On dit dans ce cas que le borélien \mathcal{C} est *conservatif*.

Un borélien G -invariant \mathcal{D} , est *dissipatif* s'il existe un borélien $E \subset \mathcal{D}$ tel que, pour tout $g \in G$, $\mu(E \cap gE) = 0$ et $\mathcal{D} = \bigcup_{g \in G} gE$.

Lemme 7.1.1. — *Tout borélien G -invariant \mathcal{B} s'écrit comme la réunion de deux boréliens \mathcal{C} et \mathcal{D} , qui sont respectivement conservatif et dissipatif.*

Nous prouverons et appliquerons ce résultat sous l'hypothèse supplémentaire :

(*) $G \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ est un groupe discret et sans torsion agissant sur le bord de l'espace hyperbolique $\partial\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue.

Lorsque, de plus, le groupe G est un groupe kleinien contenu dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$, L. Ahlfors a conjecturé [Ahl1] que son ensemble limite $L(G)$ est de mesure nulle ou pleine ; voir [Bo] pour une preuve dans le cas où G est de type fini et non-décomposable en produit libre. Toutefois, Sullivan a démontré dans [Su3], et nous allons redémontrer dans la proposition 7.3.2, que la partie dissipative de l'action d'un tel groupe sur $L(G)$ est toujours vide.

Démonstration sous l'hypothèse (*). — Observons dans un premier temps, que les notions de “conservatif” ou “dissipatif” pour un borélien ne dépendent que de la classe de la mesure considérée. Dans cette démonstration, nous remplacerons la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n par l'image de la mesure de Lebesgue sur la sphère par l'inversion stéréographique ; nous noterons μ cette mesure de masse totale finie. La dérivée de Radon-Nikodym $a(g, x)$ est à signe près le Jacobien de g en x ; on le note Jg_x .

Pour presque tout point $x \in \mathcal{B}$, considérons la série $\sum_{g \in G} Jg_x$. C'est une série à termes positifs ; les points où cette série est divergente forment

un borélien \mathcal{C} qui est G -invariant. Montrons que \mathcal{C} est conservatif : dans le cas contraire, il existe un borélien $F \subset \mathcal{C}$ de mesure non nulle, avec la propriété que les éléments G tels que $\mu(F \cap gF) \neq 0$ forment un ensemble fini $\{g_1, \dots, g_k\}$.

Considérons une partie $\{g_{i_1}, \dots, g_{i_r}\}$ dans $\{g_1, \dots, g_k\}$ de cardinal maximal, telle que l'intersection $E = F \cap g_{i_1}F \cap \dots \cap g_{i_r}F$ ait une mesure non nulle. Alors s'il existe $g \in G$, $g \neq \text{Id}$, tel que $gE \cap E$ ait une mesure non nulle, on a :

$$\mu(F \cap g_{i_1}F \cap \dots \cap g_{i_r}F \cap gF \cap gg_{i_1}F \cap \dots \cap gg_{i_r}F) \neq 0.$$

Ceci entraîne que :

$$\{\text{Id}, g_{i_1}, \dots, g_{i_r}, g, gg_{i_1}, \dots, gg_{i_r}\} = \{\text{Id}, g_{i_1}, \dots, g_{i_r}\}.$$

Donc, quitte à réindexer, on a : $g = g_{i_1}$, $g_{i_1}^2 = g_{i_2}$, $g_{i_1}^3 = g_{i_3}$, ... et il existe alors $r_0 \neq 0$ tel que $g^{r_0} = \text{Id}$. C'est impossible car dans l'hypothèse (*), le groupe G est sans torsion.

Donc, le borélien E vérifie : $\forall g \neq \text{Id}, \mu(gE \cap E) = 0$.

Puisque en tout point $x \in E$, la série $\sum_{g \in G} Jg_x$ diverge, elle est supérieure à une constante arbitrairement grande sur un ensemble borélien $E' \subset E$ de mesure non nulle.

Donc, comme l'intersection de deux translatés distincts de E' est de mesure nulle, on a : $\mu(\cup_{g \in G} gE) = \infty$. Ceci contredit que la mesure μ est de masse totale finie. Donc le borélien \mathcal{C} est conservatif.

Considérons maintenant le complémentaire de \mathcal{C} dans \mathcal{B} , c'est-à-dire le borélien \mathcal{D} , formé des points où la série $\sum_{g \in G} Jg_x$ converge. Puisque c'est une série à termes positifs, pour tout $x \in \mathcal{D}$, il existe un ensemble fini $\{g_{i_1}, \dots, g_{i_k}\}$ d'éléments de G tels que Jg_x soit égal au maximum de $\{Jh_x \mid h \in G\}$. L'ensemble $\{g_{i_1}x, \dots, g_{i_k}x\}$ ne dépend pas du point x sur son orbite Gx , d'après la propriété de cocycle de $a(\cdot, \cdot)$. Notons E l'ensemble de ces points, lorsque x décrit \mathcal{D} : c'est un borélien.

Fait 7.1.2. — *Pour presque tout $x \in \mathcal{D}$, il existe un seul élément $g \in G$ qui maximise Jg_x .*

Démonstration. — Si $Jg_x = Jh_x$, alors $J(gh^{-1})_{h(x)} = 1$. L'ensemble des points où le jacobien d'un élément de G autre que l'identité vaut 1 est de mesure nulle ; pour la mesure sur \mathbb{R}^n que nous considérons (la mesure image de la mesure de Lebesgue sur la sphère par une transformations stéréographique), ceci découle d'un calcul facile qui utilise la décomposition des transformations de Möbius intervenant dans la preuve du théorème 7.2.1. D'où le fait 7.1.2, puisque G est dénombrable. \square

Pour tout $g \in G - \{\text{Id}\}$, l'intersection $gE \cap E$ est donc de mesure nulle. Par construction, on a $\mathcal{D} = \cup_{g \in G} gE$, à un ensemble de mesure nulle près. Donc \mathcal{D} est dissipatif. \square

D. Sullivan suggère d'utiliser la propriété suivante de la restriction de l'action de G à la partie conservative \mathcal{C} .

Proposition 7.1.3 [Schm]. — Soit \mathcal{C} un borélien conservatif. Alors, pour tout borélien $E \subset \mathcal{C}$ tel que $\mu(E) > 0$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien $E' \subset E$ de mesure non nulle tel que : pour tout $x \in E'$, il existe un élément $g \neq \text{Id}$ de G , tel que $g(x) \in E$ et $|\log a(g, x)| \leq \varepsilon$.

Démonstration sous l'hypothèse (*). — Alors $a(g, x)$ est le jacobien Jg_x de l'élément g de G . Posons $\alpha(g, x) = \log Jg_x$ et raisonnons par l'absurde.

Il existe un borélien E de mesure finie non nulle et un nombre $\varepsilon > 0$ qui minore $|\alpha(g, x)|$ pour presque tout x de E , et pour tous les éléments du groupe G autres que l'identité tels que $gx \in E$.

La propriété de cocycle entraîne alors : $|\alpha(g_1, x) - \alpha(g_2, x)| \geq \varepsilon$ pour presque tout $x \in E$, et pour tout couple (g_1, g_0) , $g_1 \neq g_0$, tel que $g_0(x)$ et $g_1(x)$ appartiennent à E . En particulier, pour tous les points d'un borélien de mesure pleine contenu dans E , l'ensemble $\{\alpha(g_1, x) - \alpha(g_2, x)\} \subset \mathbb{R}$ est discret. Remplaçons maintenant E par ce borélien.

Considérons les deux ensembles :

$$\begin{aligned} E^+ &= \{y \in E \mid \alpha(g, y) \geq 0, \forall g \in G \mid g(y) \in E\}, \\ E^- &= \{y \in E \mid \alpha(g, y) \leq 0, \forall g \in G \mid g(y) \in E\}. \end{aligned}$$

Fait 7.1.4. — E^+ et E^- sont deux boréliens de mesure nulle.

Démonstration. — Les ensembles E^+ et E^- sont boréliens car G est dénombrable et que $\alpha(g, y)$ est mesurable (continue en fait dans notre cas).

Supposons en raisonnant par l'absurde que : $\mu(E^+) > 0$. Alors, par conservativité, il existe un élément $g_+ \neq \text{Id}$ de G tel que l'intersection $g_+E^+ \cap E^+$ soit de mesure non nulle. Donc il existe $y \in E^+$ tel que $g_+(y) \in E^+$; d'où : $\alpha(g_+^{-1}, g_+y) > \varepsilon$. La propriété de cocycle donne alors : $\alpha(g_+, y) = -\alpha(g_+^{-1}, g_+y) < -\varepsilon$.

Ceci contredit l'appartenance de y à E^+ .

Le même raisonnement vaut pour E^- . \square

Soit $E' = E - (E^+ \cup E^-)$. Considérons les deux applications Ψ^+ et $\Psi^- : E' \rightarrow \mathbb{R}^+$ définies par :

$$\begin{aligned} \Psi^+(y) &= \inf \{ \{ \alpha(g, y) \mid g \in G \text{ et } g(y) \in E \} \cap]0, \infty[\} \\ \Psi^-(y) &= \sup \{ \{ \alpha(g, y) \mid g \in G \text{ et } g(y) \in E \} \cap]-\infty, 0[\}. \end{aligned}$$

Pour presque tout point y de E' , il existe $g_y^+ \in G$ tel que $\Psi^+(y) = \alpha(g_y^+, y)$. Cet élément g_y^+ est unique pour y dans un borélien de mesure pleine dans E (cf. fait 7.1.2). Posons $V^+(y) = g_y^+(y)$.

Définissons de même g_y^- presque partout dans E' par : $\alpha(g_y^-, y) = \Psi^-(y)$ et posons $V^-(y) = g_y^-(y)$.

Les applications V^+ et V^- sont des transformations mesurables de E' dans lui-même, puisque g^+ et g^- le sont et que G est dénombrable.

On a de plus : $V^+V^- = V^-V^+ = \text{Id}$; donc V^+ est inversible.

En outre, l'application V^+ est absolument continue puisque le borélien E' se décompose en une réunion disjointe, dénombrable de boréliens en restriction auxquels V^+ est égale à l'une des transformations de G , lesquelles sont absolument continues.

Sur chacun de ces boréliens, la dérivée de Radon-Nikodym de V^+ est supérieure à e^ε par construction. Donc, la dérivée de Radon-Nikodym de V^+ est supérieure à e^ε en presque tout point.

Comme $V^+E' = E'$, on a :

$$\infty > \mu(E') = \mu(V^+E') = \int \frac{d(V^+\mu)}{d\mu} d\mu \geq e^\varepsilon \mu(E') > \mu(E') > 0.$$

Cette contradiction termine la démonstration de la proposition 7.1.3. □

Corollaire 7.1.5. — Soit \mathcal{C} un borélien conservatif pour l'action de G ; alors, pour tout $E \subset \mathcal{C}$ de mesure positive, il existe une suite $(g_i) \in G$ et une suite $(x_i) \in E$ telles que $g_i(x_i) \in E$ et $|\alpha(g_i, x_i)| \rightarrow 0$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 7.1.3 et de se rappeler que l'ensemble des points x où $\alpha(g, x) = 0$ est de mesure nulle (cf. fait 7.1.2). □

7.2 L'action d'un groupe kleinien sur un borélien conservatif

Dans cette section, G désignera un sous-groupe discret du groupe de Möbius de dimension n agissant sur $\partial\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^n$. Pour le résultat suivant, le groupe G n'est pas nécessairement de type fini.

Théorème 7.2.1 [Su3]. — Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ un borélien conservatif pour l'action de G ; alors, pour tout $0 < k < n$, il n'existe pas de champ de k -plans P , mesurable, défini sur \mathcal{B} et qui soit invariant par le groupe G .

Démonstration. — Nous raisonnerons dans le modèle supérieur en supposant aussi que le point ∞ n'est fixé par aucun élément de G autre que l'identité : on peut toujours se ramener à cette situation quitte à conjuguer le groupe G .

Soit $\varepsilon > 0$ une constante que nous fixerons ultérieurement.

D'après le théorème de Lusin, il existe un champ continu P' et un borélien de mesure non nulle, contenu dans \mathcal{B} , sur lequel on a : $P' = P$. En particulier l'oscillation du champ P , pour la distance naturelle sur l'espace des k -plans de \mathbb{R}^n , est inférieure à ε sur un borélien de mesure non nulle $E \subset \mathcal{B}$.

Puisque l'action de G sur \mathcal{B} est conservative, il existe d'après le corollaire 7.1.5, une suite (g_i) d'éléments de G et une suite $(x_i) \in E$ telles que $g_i(x_i) \in E$ et telles que le jacobien de g_i au point x_i tend vers 1.

Une décomposition des éléments du groupe de Möbius.

Toute transformation de Möbius g qui ne fixe pas le point ∞ se décompose comme produit d'une isométrie euclidienne R_g de \mathbb{R}^n et d'une inversion I_g : $g = I_g \circ R_g$. Pour voir cela, remarquons que dans le cas où une telle décomposition existe, le centre de l'inversion I_g est nécessairement $g(\infty)$. Alors, si I_g^R est l'inversion par rapport à la sphère de rayon R au point $g(\infty)$, $I_g^R \circ g$ fixe le point ∞ : c'est une similitude, de rapport $\lambda(R)$. On voit facilement que pour une valeur $R_0 \in]0, \infty[$ du rayon R , le rapport $\lambda(R_0)$ vaut 1, auquel cas $I_g^{R_0} \circ g$ est une isométrie euclidienne R_g . En posant $I_g = I_g^{R_0}$, on a la décomposition cherchée : $g = I_g \circ R_g$.

Puisque R_g est une isométrie euclidienne, l'ensemble des points de \mathbb{R}^n où le jacobien de g appartient à l'intervalle $[1/(1+c)^n, (1+c)^n]$ n'est autre que $R_g^{-1}(A_g^c)$ où A_g^c est l'ensemble des points où le jacobien de l'inversion I_g appartient à $[1/(1+c)^n, (1+c)^n]$. En coordonnées polaires (ρ, θ) autour de son centre $g(\infty)$, l'inversion I_g s'écrit $(r, \theta) \rightarrow (R^2/r, \theta)$. Donc, l'ensemble A_g^c est une couronne contenue entre les deux sphères centrées en $g(\infty)$, de rayons respectifs $R/\sqrt{1+c}$ et $R\sqrt{1+c}$: le rapport des ces rayons est appelé le *module* de la couronne A_g^c .

On appellera la sphère fixée par l'inversion I_g la *sphère de l'inversion* I_g ; c'est exactement l'ensemble des points où le jacobien de I_g vaut 1.

Puisque nous avons supposé que le point ∞ n'était fixé par aucun élément de G , on peut décomposer les éléments de G de cette manière.

Fait 7.2.2. — Soit K un compact de \mathbb{R}^n ; soient (x_i) une suite d'éléments deux-à-deux distincts dans K et (g_i) une suite infinie dans G , telles que $g_i(x_i) \in K$ et que $a(g_i, x_i) \rightarrow 1$. Alors, le rayon des sphères des inversions I_{g_i} tend vers 0.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : pour une suite (g_i) comme dans l'énoncé, les rayons des sphères I_{g_i} seraient minorés par une constante $\alpha > 0$.

D'après la description des couronnes A_g^c , on voit que pour i suffisamment grand, le point x_i serait le centre d'une boule euclidienne de rayon

$$c(\alpha) = \frac{\alpha}{4} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

sur laquelle la dérivée de g_i serait une similitude de rapport contenu dans l'intervalle $[2/3, 3/2]$.

Donc, l'image par g_i de la boule de rayon $c(\alpha)$ centrée au point x_i serait une boule de rayon majoré et minoré indépendamment de i . Puisque on a : $g_i(x_i) \in K$, la suite (g_i) serait alors bornée dans le groupe de Möbius, contredisant le fait que G est discret. \square

Remplaçons dorénavant le borélien E – sur lequel l'oscillation du champ P est inférieure à ε – par son intersection avec une boule compacte de \mathbb{R}^n de sorte que cette intersection ait une mesure non nulle.

Dans l'ensemble E il existe, par conservativité, des points $x_i \in E$ et des éléments $g_i \in G$ tels que : $g_i(x_i) \in E$ et $a(g_i, x_i)$ tend vers 1.

Donc, pour tout $\Delta > 0$, les points x_i sont contenus dans des couronnes A_i de module constant, sur lesquelles la dérivée de g_i est une similitude dont le rapport appartient à l'intervalle $[(1 + \Delta)^{-1}, 1 + \Delta]$; d'après le fait 7.2.2, le diamètre de ces couronnes tend vers 0.

Nous allons utiliser maintenant une propriété de la mesure de Lebesgue; on sait que pour chaque fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, presque tout point x vérifie :

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

où $B(x, r)$ est la boule euclidienne de rayon r centrée au point x : c'est le théorème de différentiation de l'intégrale de Lebesgue.

Dans [Ste, 1.8] ou [Ru], on trouve une condition plus générale. La famille des boules $B(x, r)$ peut être remplacée par d'autres familles, dites "régulières", qui ont la propriété suivante : il existe une constante $c > 0$ telle que tout point d'un élément S de la famille est le centre d'une boule euclidienne B qui contient S et qui vérifie : $m(S) \geq cm(B)$.

Si \mathcal{A}_Δ désigne la famille des couronnes de \mathbb{R}^n comprises entre des sphères concentriques de rayons respectifs $R/\sqrt{1 + \Delta}$ et $R\sqrt{1 + \Delta}$, on voit facilement que la famille \mathcal{A}_Δ est régulière. En effet, tout point d'une couronne $A \in \mathcal{A}_\Delta$ est le centre d'une boule de rayon $2R\sqrt{1 + \Delta}$ qui contient A ; le volume de cette boule est comparable à celui de la couronne, proportionnel à : $R^n((1 + \Delta)^{n/2} - 1/(1 + \Delta)^{n/2})$.

Donc, le théorème de différentiation de l'intégrale de Lebesgue, appliqué à la fonction caractéristique de E , dit que, pour presque tout point $x \in E$, on a :

$$\lim_{x \in A_\Delta, \text{diam}(A_\Delta) \rightarrow 0} \frac{m(A_\Delta \cap E)}{m(A_\Delta)} = 1.$$

Fixons des constantes $\eta < 1$ et $\Delta > 0$ que nous préciserons plus tard.

Considérons alors la fonction $x \rightarrow r(x)$, définie presque partout sur E et qui vaut, en un point $x \in E$:

$$\sup \left\{ r \mid \forall A_\Delta \in \mathcal{A}_\Delta \mid x \in A_\Delta, \quad \text{diam}(A_\Delta) \leq r \Rightarrow \frac{m(A_\Delta \cap E)}{m(A_\Delta)} \geq \eta \right\}.$$

C'est une fonction mesurable, finie en tout point, non nulle en presque tout point d'après le théorème de Lebesgue : elle est donc minorée par une constante strictement positive sur un ensemble de mesure non nulle.

Résumons le raisonnement ci-dessus en un énoncé :

Fait 7.2.3. — *Pour tout $\eta < 1$, pour tout $\Delta > 0$, il existe un borélien $E' \subset E$ de mesure non nulle, et une constante δ tels que, pour tout point de E' contenu dans une couronne $A_\Delta \in \mathcal{A}_\Delta$ de diamètre inférieur à δ , on ait :*

$$\frac{m(A_\Delta \cap E)}{m(A_\Delta)} \geq \eta.$$

Appliquons maintenant le fait 7.2.2 et la propriété de conservativité au borélien E' ci-dessus, les constantes η et Δ étant fixées.

Il existe alors $g \neq \text{Id} \in G$, $x \in E'$, et une couronne $A_\Delta \in \mathcal{A}_\Delta$ contenant x , tels que :

- (i) $g(x) \in E'$;
- (ii) la dérivée de g sur A_Δ est une similitude dont le rapport appartient à l'intervalle $[1/(1 + \Delta), 1 + \Delta]$;
- (iii) le diamètre de A_Δ est inférieur à δ .

D'après le fait 7.2.3, on a donc :

$$\frac{m(A_\Delta \cap E)}{m(A_\Delta)} \geq \eta.$$

Par définition de A_Δ , la couronne $R_g(A_\Delta)$ est invariante par l'inversion I_g : donc $g(A_\Delta) = R_g(A_\Delta)$ est une couronne dans la famille \mathcal{A}_Δ et son diamètre est inférieur à δ puisque R_g est une isométrie euclidienne. Toujours d'après le fait 7.2.3, on a donc :

$$\frac{m(g(A_\Delta) \cap E)}{m(g(A_\Delta))} \geq \eta.$$

Puisque le jacobien de g est compris entre $(1 + \Delta)^{-n}$ et $(1 + \Delta)^n$, l'ensemble des points de A_Δ dont l'image par g appartient à E a une densité supérieure à $\eta/(1 + \Delta)^{2n}$.

Donc, la densité des points de $A_\Delta \cap E$ dont l'image par g appartient aussi à E est supérieure à $\eta' = \eta/(1 + \Delta)^{2n} + \eta - 1$. Nous supposons que les constantes η et Δ ont la propriété que : $\eta' > 1/2$.

Pour un ensemble de densité η' de points x dans A_Δ , on aura donc $x \in E$ et $g(x) \in E$.

Le champ P est invariant par g ; donc le champ $R_g^*(P)$, défini sur $R_g(A_\Delta \cap E)$ s'envoie par l'inversion I_g sur le champ P , défini sur $g(A_\Delta) \cap E = R_g(A_\Delta) \cap E$.

Puisque R_g est une isométrie euclidienne, la densité du domaine de définition de $R_g^*(P)$ est supérieure à η' et l'oscillation de $R_g^*(P)$ sur $R_g(A_\Delta \cap E)$ est inférieure à ε : le champ $R_g^*(P)$ diffère d'un champ constant P_0 d'au plus ε .

Pour obtenir une contradiction, nous allons montrer que l'image par l'inversion I_g du champ "presque constant" $R_g^*(P)$ ne peut être un champ presque constant, en utilisant que ces champs sont définis sur une couronne invariante par I_g .

Considérons dans un premier temps le cas où P est un champ de $(n-1)$ -plans.

Il existe une constante $\phi(\eta') > 0$ telle que pour toute direction ξ passant par le centre de la couronne $R_g(A_\Delta)$, les points de $R_g(A_\Delta)$ contenus dans des droites passant par le centre et faisant un angle inférieur à $\phi(\eta')$ avec la direction ξ , forment un voisinage $V(\xi)$ de ξ de densité égale à $2(1-\eta')$. Alors, pour toute direction ξ , la section de cône $V(\xi)$ contient un point où le champ $R_g^*(P)$ est défini.

Si maintenant ξ_0 est la direction orthogonale à $R_g^*(P_0)$, l'image par l'inversion I_g du $(n-1)$ -plan défini par $R_g^*(P)$ en un point de $V(\xi_0)$ est à une distance de $R_g^*(P_0)$ inférieure à $\varepsilon + \phi(\eta')$.

Si ξ' est une direction qui fait un angle $\pi/4$ avec ξ_0 , l'image par I_g du plan dans $V(\xi')$ fait un angle avec $R_g^*(P_0)$ supérieur à $\frac{\pi}{2} - \varepsilon - 2\phi(\eta')$.

Donc l'oscillation du champ $I_g^*(R_g^*(P))$ sur la couronne $R_g(A_\Delta)$ est supérieure à $\pi/2 - 2\varepsilon - 3\phi(\eta')$. Si $\pi/2 - 2\varepsilon - 3\phi(\eta') > \varepsilon$, nous obtiendrons donc une contradiction puisque l'oscillation du champ $P = I_g^* \circ (R_g^*(P))$ est inférieure à ε sur E .

Nous choisissons les constantes ε , η et Δ de sorte que ce soit vérifié : d'abord nous fixons $\varepsilon < \pi/10$, puis les constantes η et Δ , en remarquant que $\phi(\eta')$ tend vers 0 quand $\eta' = \eta/(1+\Delta)^{2n} + \eta - 1$ tend vers 1.

Supposons maintenant que la codimension de P est quelconque; utilisons la distance naturelle sur l'espace des k -plans de \mathbb{R}^n .

Choisissons une direction ξ_0 passant par le centre de la couronne $R_g(A_\Delta)$, orthogonale à P_0 . Pour un k -plan P défini en un point proche de ξ_0 , l'argument ci-dessus majore la distance entre P_0 et $I_g^*(R_g^*(P))$. Choisissons ensuite une direction ξ' qui fait un angle $\pi/4$ avec un vecteur $v \in P_0$, et qui est orthogonale à l'orthogonal de v dans P_0 . Le même argument que dans la situation $k = n-1$ permet de minorer la distance entre P_0 et $I_g^*(R_g^*(P))$

pour un k -plan défini en un point proche de ξ' . On aboutit de la même façon à une contradiction.

Ceci termine la démonstration du théorème 7.2.1. □

7.3 Démonstration du théorème de Sullivan

Dans cette section, on se restreint au cas $n = 2$.

Théorème de Sullivan 7.3.1. — *Soit Γ un groupe kleinien; alors, il n'existe pas de champ de droites mesurable, Γ -invariant et supporté sur un borélien de mesure de Lebesgue positive, contenu dans l'ensemble limite de Γ .*

Nous raisonnerons par l'absurde. L'action de Γ sur le support d'un champ invariant P se décompose en partie conservative et partie dissipative (lemme 7.1.1). D'après le théorème 7.2.1, la partie conservative est de mesure nulle.

Pour démontrer le théorème 7.3.1, nous allons étudier le comportement du champ P sur la partie dissipative de l'action de Γ .

L'argument suivant de Sullivan est spécial à la dimension 2 et aux groupes de type fini.

Proposition 7.3.2. — *Soit Γ un groupe kleinien; alors la partie dissipative de l'action de Γ sur tout borélien invariant contenu dans son ensemble limite est vide.*

Démonstration. — Raisonons par l'absurde; il existe alors un borélien E de mesure non nulle contenu dans l'ensemble limite $L(\Gamma)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma - \{\text{Id}\}$, la mesure de l'intersection $m(\gamma E \cap E)$ est nulle.

A toute fonction mesurable bornée f , nous allons associer un coefficient de Beltrami μ_f sur \mathbb{C} , équivariant pour l'action du groupe Γ , c'est-à-dire tel que :

$$\mu_f(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu_f(z). \quad (1)$$

Si $z \in E$, posons : $\mu_f(z) = f(z)$. Si $z \in \mathbb{C} - \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma E$, posons : $\mu_f(z) = 0$. Nous définissons μ_f sur la réunion $\cup_{\gamma} \gamma E$ de sorte que (1) soit vérifié; la propriété $m(\gamma E \cap E) = 0$ rend ceci possible.

On obtient ainsi une *injection* de $L^\infty(E, \mathbb{C})$ dans l'espace des coefficients de Beltrami \mathcal{B}_Γ du groupe Γ .

D'après le théorème d'Ahlfors-Bers (cf. section 1.2), il existe, pour toute fonction $f \in L^\infty(\mathbb{C})$ avec $\|f\| < 1$, un unique homéomorphisme quasi-conforme Ψ_f du plan tel que

$$\frac{\bar{\partial}\Psi_f}{\partial\Psi_f} = \mu_f, \quad (2)$$

et qui fixe les trois points 0, 1 et ∞ .

Si on note par Ψ_f la solution ainsi normalisée associée au coefficient μ_f , l'application $f \mapsto \Psi_f$ est continue (théorème 1.2.3).

L'unicité des solutions de (2) et la propriété (1) entraînent que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho_f(\gamma) = \Psi_f \circ \gamma \circ \Psi_f^{-1}$ est un homéomorphisme quasi-conforme du plan dont le coefficient de Beltrami est nul presque partout; c'est donc une transformation de Möbius (proposition 1.2.1).

L'application $\gamma \mapsto \rho_f(\gamma)$ définit ainsi une représentation du groupe Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Une représentation de Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ est déterminée par la valeur qu'elle prend sur les éléments d'une partie génératrice de Γ . Ainsi, l'évaluation de la représentation ρ_f sur les éléments d'une partie génératrice fixée $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, définit une application continue \mathcal{R} de $L^\infty(E, \mathbb{C})$ dans un produit $(\text{PSL}_2(\mathbb{C}))^k$.

Lemme 7.3.3. — *L'application \mathcal{R} est injective.*

Démonstration. — En effet, si deux fonctions f_1 et f_2 ont la même image, alors les représentations ρ_{f_1} et ρ_{f_2} coïncident.

Donc, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$(\Psi_{f_2})^{-1} \circ \Psi_{f_1} \circ \gamma \circ (\Psi_{f_1})^{-1} \circ \Psi_{f_2} = \gamma.$$

En particulier, l'homéomorphisme quasi-conforme $h = (\Psi_{f_2})^{-1} \circ \Psi_{f_1}$ agit par l'identité sur les points fixes des éléments de Γ . Puisque les points fixes des éléments de Γ sont denses dans l'ensemble limite $L(\Gamma)$, on en déduit que la restriction $h|_{L(\Gamma)}$ est l'identité.

Lorsque l'ensemble limite $L(\Gamma)$ est toute la sphère — le seul cas que nous ayons considéré dans le chapitre précédent — on a alors : $\Psi_{f_1} = \Psi_{f_2}$; donc $f_1 = f_2$.

En général, on utilise le résultat suivant :

Lemme 7.3.4. — *Soit F un fermé de $\bar{\mathbb{C}}$; soit h un homéomorphisme quasi-conforme du plan qui se restreint à F en l'application identique et dont le coefficient de Beltrami est nul sur $\mathbb{C} - F$; alors h est conforme.*

Démonstration. — Si F est de mesure nulle, alors h est un homéomorphisme quasi-conforme du plan dont le coefficient de Beltrami est nul presque partout. Ceci entraîne que h est conforme (proposition 1.2.1).

En général, il suffit de montrer que le coefficient de Beltrami de h est nul presque partout sur F . Pour voir cela on considère la différence $h - \text{Id}$; c'est une application absolument continue sur presque toutes les droites verticales et sur presque toutes les droites horizontales, car h l'est comme tous les homéomorphismes quasi-conformes (fait 1.2.5). Puisque $h - \text{Id}$ est la fonction nulle sur F , ses dérivées au sens des distributions $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ sont nulles

7. LE THÉORÈME DE SULLIVAN

presque partout sur F . Ceci entraîne que le coefficient de Beltrami de h est nul presque partout sur F . \square

Puisque l'ensemble limite $L(\Gamma)$ a plus de trois points, le lemme 7.3.4 nous dit que l'homéomorphisme h est l'identité. On en déduit : $f_1 = f_2$.

Ceci démontre le lemme 7.3.3. \square

Nous voyons donc que l'existence d'une partie dissipative dans l'ensemble limite $L(\Gamma)$ permettrait de construire une application continue et injective de la boule unité de l'espace $L^\infty(E, \mathbb{C})$ dans $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))^k$. C'est impossible pour des raisons de dimension, car si la mesure de Lebesgue de E est strictement positive, l'espace $L^\infty(E, \mathbb{C})$ est de dimension infinie. \square

Ceci termine la démonstration du théorème 7.3.1.

CHAPITRE 8

Actions des groupes de surface sur les arbres réels

Nous allons démontrer le théorème de R. Skora qui décrit géométriquement les actions à petits stabilisateurs d'arêtes du groupe fondamental d'une surface sur un arbre réel.

Dans la première section nous définissons les *laminations mesurées* sur S . Puis nous associerons à une action de $\pi_1(S)$ sur un arbre réel \mathcal{T} une *application transverse le long d'une lamination mesurée* : c'est une application continue, Γ -équivariante, constante sur les feuilles et sur les régions complémentaires d'une lamination mesurée. Pour cette construction, nous reprendrons des arguments contenus dans [MO] en les simplifiant, en particulier du fait que l'arbre étudié est un arbre réel plutôt qu'un “ Λ -arbre” comme dans [MO]. Dans les sections 8.2 et 8.3, nous construirons à partir de la lamination mesurée obtenue dans la première section une lamination *géodésique* mesurée sur la surface \mathbb{H}^2/Γ ; l'application transverse induira alors un “morphisme” de l'arbre dual de cette lamination géodésique mesurée dans \mathcal{T} . Dans la section 8.4, nous montrerons en suivant [Sk] que le morphisme ainsi construit est un isomorphisme.

8.1 Construction d'une application transverse

Dans tout ce chapitre, l'intérieur de la surface compacte S est identifié avec le quotient \mathbb{H}^2/Γ du plan hyperbolique par un groupe fuchsien Γ .

On se donne aussi une action non triviale, minimale et à petits stabilisateurs d'arêtes du groupe Γ sur un arbre réel \mathcal{T} telle que la distance de translation des éléments paraboliques de Γ est nulle.

Dans le chapitre 2, nous avons montré comment associer à une lamination géodésique mesurée $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$, une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T}_λ .

Le théorème de R. Skora caractérise exactement les actions obtenues par cette construction.

Théorème 8.1.1 [Sk]. — Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action minimale, non triviale et à petits stabilisateurs d'arêtes du groupe Γ sur un arbre réel \mathcal{T} telle que la distance de translation des éléments paraboliques de Γ est nulle. Alors, il existe une lamination géodésique mesurée $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ telle que l'action $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ soit isométrique à l'action de Γ sur l'arbre \mathcal{T}_λ .

Définition. — Une lamination mesurée sur une surface Σ est un feuilletage de codimension 1 d'un fermé d'intérieur vide $F \subset \Sigma$ muni d'une mesure transverse. Plus précisément, c'est la donnée d'un fermé $F \subset \Sigma$ et d'un recouvrement \mathcal{U} de Σ par des ouverts U_i , où chaque ouvert U_i est homéomorphe au produit $]0, 1[\times]0, 1[$ par un homéomorphisme f_i et vérifie :

- (i) $f_i(U_i \cap F) = F_i \times]0, 1[$, pour un compact $F_i \subset]0, 1[$ qui est, soit vide, soit homéomorphe à l'ensemble de Cantor ;
- (ii) le compact F_i est le support d'une mesure μ_i , de Radon (i.e. finie sur les compacts) et sans atomes ;
- (iii) si deux ouverts U_i et U_j s'intersectent, l'homéomorphisme induit

$$f_i \circ f_j^{-1} : (F_j \times]0, 1[) \cap f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow (F_i \times]0, 1[) \cap f_i(U_i \cap U_j)$$

préserve les mesures transverses.

On définit les feuilles d'une lamination mesurée comme dans le cas des feuilletages. Une plaque de la lamination mesurée F est une composante connexe de l'intersection de F avec l'un des ouverts U_i ; deux plaques sont en relation lorsque leur intersection n'est pas vide. Une classe d'équivalence de la relation d'équivalence engendrée par cette relation est appelée une feuille de F . De façon naturelle, chaque feuille est une variété de dimension 1 plongée dans Σ .

On dit qu'un arc κ immergé dans Σ par une application continue localement injective est transverse à la lamination mesurée F , si ses extrémités sont disjointes de F et si dans chaque ouvert $U_i \simeq]0, 1[\times]0, 1[$, il se projette sur le premier facteur $]0, 1[$ de manière localement injective. Un arc κ transverse à la lamination mesurée F porte alors une mesure positive μ_κ supportée sur le compact $F \cap \kappa$.

Soient κ et κ' deux arcs immergés dans Σ , transverses à la lamination F , homotopes à travers des arcs transverses par une homotopie telle que leurs extrémités restent contenues dans la même feuille ou dans la même composante de $\Sigma - F$; on a une "application d'holonomie" de $F \cap \kappa$ vers $F \cap \kappa'$ qui consiste à suivre la feuille passant par un point de $F \cap \kappa$ au cours de l'homotopie. Cette application d'holonomie est un homéomorphisme qui transporte la mesure μ_κ sur la mesure $\mu_{\kappa'}$ d'après (iii).

Observons que si $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ est un revêtement, la préimage d'une lamination mesurée F de Σ est une lamination mesurée de Σ' : il suffit de prendre pour recouvrement de Σ' , la préimage d'un recouvrement de Σ associé à F .

Lorsque la surface Σ est l'intérieur \mathbb{H}^2/Γ d'une surface compacte à bord, nous imposerons toujours à une lamination mesurée d'être compacte.

Définition. — Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} ; soit \tilde{F} la préimage dans \mathbb{H}^2 d'une lamination mesurée $F \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$. Une application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ transverse le long de \tilde{F} est une application continue et Γ -équivariante, qui, dans tout ouvert U_i associé à la lamination \tilde{F} , se factorise :

$$f : U_i \xrightarrow{f_i}]0, 1[\times]0, 1[\xrightarrow{p}]0, 1[\longrightarrow \mathcal{T},$$

où F est la projection sur le deuxième facteur et où la dernière application prend ses valeurs dans un segment de \mathcal{T} , isométrique à l'intervalle $[ab] \subset \mathbb{R}$, et s'obtient en intégrant la mesure transverse $\mu_i : x \rightarrow a + \int_0^x d\mu_i$.

Remarquons qu'une application transverse est en particulier constante sur les feuilles de \tilde{F} et sur les composantes connexes du complémentaire de $\mathbb{H}^2 - \tilde{F}$. Par continuité, elle est aussi constante sur l'adhérence des composantes connexes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{F}$.

Proposition 8.1.2. — Soit $\Gamma \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ une action non triviale et minimale de Γ sur un arbre réel \mathcal{T} , telle que la distance de translation des éléments paraboliques de Γ est nulle. Alors, il existe une lamination mesurée $F \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ et une application de \mathbb{H}^2 dans \mathcal{T} transverse le long de \tilde{F} .

Démonstration. — Nous suivrons l'argument contenu dans [MO]; pour cela nous allons construire la lamination F et l'application transverse de proche en proche, en raisonnant à partir d'une triangulation de S .

Dans notre construction, nous utiliserons le résultat suivant :

Fait 8.1.3. — Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ tel que :

- (i) \mathcal{S} est invariant par Γ ;
- (ii) pour tout segment non dégénéré $[ab] \subset \mathcal{T}$, l'intersection $\mathcal{S} \cap [ab]$ est dense dans $[ab]$;
- (iii) les sommets de \mathcal{T} sont contenus dans \mathcal{S} ;
- (iv) tout élément de Γ qui a un point fixe dans \mathcal{T} a un point fixe dans \mathcal{S} .

Rappelons qu'un sommet de l'arbre \mathcal{T} est un point extrémité d'au moins trois segments d'intérieurs disjoints.

Démonstration. — Soit p un point de \mathcal{T} . Puisque l'action de Γ est minimale, l'arbre \mathcal{T} est une réunion croissante dénombrable d'arbres simpliciaux T_i : il suffit d'indexer les éléments de Γ par les entiers dans \mathbb{N} et de prendre pour T_i l'enveloppe convexe des points $\gamma_j(p)$ pour $j \leq i$.

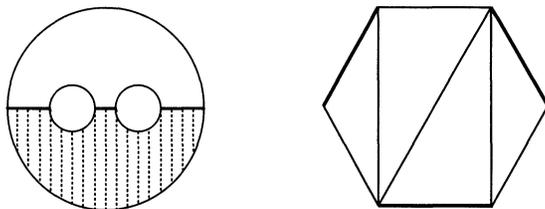
Tout segment non dégénéré $[ab]$ est contenu dans un arbre T_i pour i suffisamment grand; tout sommet de \mathcal{T} est aussi un sommet d'un arbre T_i pour i suffisamment grand. Choisissons alors un ensemble dénombrable \mathcal{S}_i , dense dans T_i et qui contient les sommets de T_i ; la réunion \mathcal{S}' des translatés par les éléments du groupe Γ des ensembles \mathcal{S}_i vérifie les conclusions du fait 8.1.3, sauf peut-être (iv). Si on rajoute à \mathcal{S}' l'ensemble (dénombrable) des points fixes des éléments de Γ qui ont un seul point fixe, l'ensemble obtenu vérifie alors les conclusions du fait 8.1.3. \square

Dans la suite, nous considérerons une copie de la surface compacte S plongée dans \mathbb{H}^2/Γ comme rétracte par déformation : on peut choisir par exemple la partie ε -épaisse de \mathbb{H}^2/Γ , pour ε suffisamment petit. Pour simplifier, nous garderons la notation S pour cette surface.

Fixons une *décomposition en pantalons de la surface S* , c'est-à-dire une collection $\{g_1, \dots, g_r\}$ de géodésiques plongées et disjointes contenues dans S qui découpent S en une réunion de pantalons. Lorsque la surface S est fermée, le bord de ces pantalons est géodésique; lorsque S a un bord, certains des pantalons ont une composante de bord contenue dans ∂S .

Nous allons définir une triangulation de S . Identifions pour cela chaque pantalon P au "double" d'un hexagone H de sorte que P s'obtienne à partir de deux copies de H en identifiant les côtés d'indice pair; on triangule ensuite chaque copie de H comme dans la figure 8-1. Après doublage, cette triangulation donne une triangulation du pantalon P , et on peut supposer que les triangulations des divers pantalons se recollent en une triangulation de S : il suffit pour cela d'isotoper la triangulation sur P de sorte que les 0-squelettes des triangulations de deux pantalons adjacents à une même courbe g_i coïncident sur g_i . Soit T la triangulation de S obtenue et \tilde{T} la préimage de cette triangulation dans le revêtement universel $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^2$.

Figure 8-1



Nous allons définir l'application f et la lamination F de proche en proche, d'abord sur le 0-squelette, puis sur le 1-squelette et finalement sur le 2-squelette.

Le 0-squelette est contenu dans la préimage des géodésiques g_i et dans le bord de \tilde{S} . Nous commençons par définir f sur les composantes de $\partial\tilde{S}$. Pour chaque composante de ∂S , choisissons un relevé \tilde{c} ; ce relevé est invariant par un élément parabolique $\gamma \in \Gamma$ dont l'action sur \mathcal{T} a donc un point fixe

x_γ contenu dans l'ensemble dénombrable \mathcal{S} fourni par le fait 8.1.3. Posons : $f|_c = x_\gamma$, puis prolongeons cette application par équivariance.

Soit $\gamma_i \in \Gamma$ un élément qui représente la géodésique g_i ; γ_i laisse invariante une composante \tilde{g}_i de la préimage de g_i . Si la distance de translation $\delta(\gamma_i)$ de γ_i dans \mathcal{T} est nulle, γ_i a un point fixe x_{γ_i} dans \mathcal{S} ; posons $f|_{\tilde{g}_i} = x_{\gamma_i}$, et prolongeons cette application en une application équivariante sur toute la préimage de g_i .

Si la distance de translation $\delta(\gamma_i)$ n'est pas nulle, l'élément γ_i agit sur \mathcal{T} en laissant un axe $A(\gamma_i)$ invariant : soit $[p, \gamma_i(p)] \subset A(\gamma_i)$ un domaine fondamental pour l'action de γ_i , en supposant que $p \in \mathcal{S}$ (c'est possible d'après le fait 8.1.3, (ii)). Soit $F_i = [a, \gamma_i(a)] \subset \tilde{g}_i$ un domaine fondamental pour l'action de γ_i sur son axe \tilde{g}_i dans \mathbb{H}^2 . Choisissons une mesure positive μ sur F_i , sans atomes, supportée sur un ensemble de Cantor K_i dans l'intérieur de F_i , de masse totale égale à $\delta(\gamma_i) = d(p, \gamma_i(p))$ et telle que :

- (i) les sommets de la triangulation \tilde{T} contenus dans F_i sont dans des composantes du complémentaire de K_i ;
- (ii) l'application $f : F_i \rightarrow [p\gamma_i(p)]$ définie par : $f(x) = p + \int_p^x d\mu$ induit une bijection entre les composantes du complémentaire de K_i et les points de $[p\gamma_i(p)] \cap \mathcal{S}$.

Prolongeons ensuite cette application par équivariance à toute la préimage de g_i .

Cette construction, effectuée sur toute la préimage des courbes g_i et sur la préimage de ∂S donne une application continue, Γ -équivariante et une mesure μ , invariante par Γ dont le support est localement un ensemble de Cantor contenu dans les composantes de la préimage des courbes g_i dont la distance de translation n'est pas nulle.

A ce moment, l'application f est définie sur un sous-complexe du 1-squelette de \tilde{T} qui contient tout le 0-squelette. Considérons maintenant une arête $k = [ab] \subset \tilde{T}$. D'après la propriété (i) du choix de μ les points $f(a)$ et $f(b)$ sont dans \mathcal{S} ; le segment $f(a)f(b)$ de \mathcal{T} s'identifie à $[0, d(f(a), f(b))]$, intervalle dans \mathbb{R} . Choisissons sur l'arête k , une mesure μ_k , sans atomes, supportée sur un ensemble de Cantor K dans l'intérieur de k , de masse totale égale à $d(f(a), f(b))$ et telle que l'application $f : k \rightarrow [f(a)f(b)]$ définie par : $f(x) = f(a) + \int_a^x d\mu$ induit une bijection entre les composantes de complémentaire de K et les points de $[f(a)f(b)] \cap \mathcal{S}$. Prolongeons ensuite cette application f en une application équivariante définie sur toute l'orbite de k .

On a construit ainsi une application f , continue, Γ -équivariante, définie sur tout le 1-squelette de \tilde{T} et obtenue sur chaque arête k de \tilde{T} par "intégration" d'une mesure μ_k .

Pour prolonger f au 2-squelette de \tilde{T} , on considère un triangle $\Delta \subset \tilde{T}$. Les images des trois côtés k_1, k_2, k_3 de ce triangle sont trois segments de \mathcal{T}

qui ont un seul point c en commun : ce point c appartient à \mathcal{S} d'après le choix de f sur le 1-squelette et le fait 8.1.3 (iii).

Donc, sur chaque côté k_i , la préimage $f^{-1}(c)$ est un intervalle $I_i \subset k_i$. Si k_1 et k_2 sont deux côtés de Δ , choisissons deux intervalles $J_1 \subset k_1$ et $J_2 \subset k_2$ qui ont une extrémité q en commun et dont l'autre extrémité est dans l'intérieur de I_1 ou I_2 . On a : $f(J_1) = f(J_2)$, puisque ce sont deux segments de \mathcal{T} qui ont les mêmes extrémités.

Pour $i = 1, 2$, la restriction de la mesure μ_{k_i} à J_i est une mesure sans atomes, supportée sur un ensemble de Cantor K_i dans l'intérieur de J_i ; par construction, l'application $f|_{J_i}$ induit une bijection entre les composantes connexes du complémentaire de K_i et $f(J_i) \cap \mathcal{S}$. Il existe donc un homéomorphisme $h : J_1 \rightarrow J_2$ entre ces deux intervalles qui transporte la mesure μ_{k_1} sur la mesure μ_{k_2} . L'homéomorphisme h permet de construire une lamination mesurée $\tilde{F} \cap \Delta \subset \Delta$, dont l'intersection avec chaque côté k est égale au support de μ_k (cf. figure 8-2).

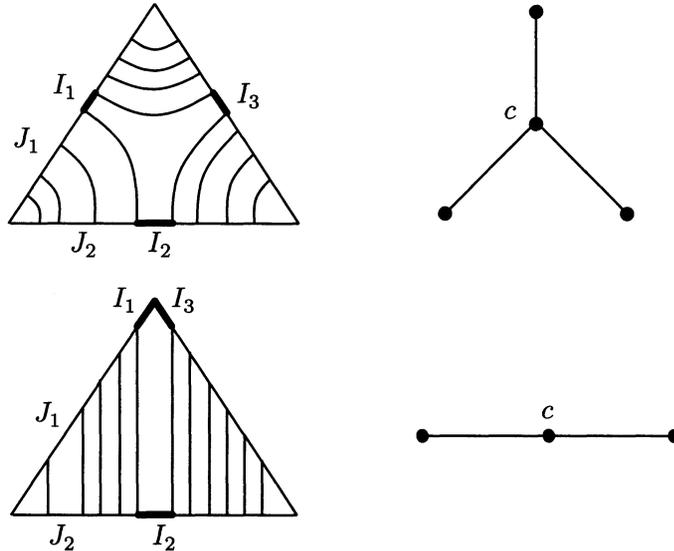


Figure 8-2

Prolongeons alors l'application f définie sur le bord de Δ à tout le triangle T en une application continue en imposant qu'elle soit constante sur les feuilles de $\tilde{F} \cap \Delta$ et sur les composantes du complémentaire de $\tilde{F} \cap \Delta$ dans Δ ; cette application se prolonge par équivariance à toute l'orbite du triangle Δ .

La réunion des laminations $\tilde{F} \cap \Delta$ construites sur chaque triangle de \tilde{T} est une lamination mesurée $\tilde{F} \subset \tilde{\mathcal{S}}$, invariante sous l'action de Γ et disjointe de $\partial \tilde{\mathcal{S}}$: elle se projette donc sur une lamination mesurée F de la surface \mathbb{H}^2/Γ .

L'application f définie sur \tilde{S} est constante sur les composantes de ∂S , et elle admet un unique prolongement continu au demi-espace \mathbb{H}^2 qui soit constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{S}$. Ce prolongement est une application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, transverse le long de \tilde{F} par construction. \square

Le bord du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 s'identifie au cercle $\overline{\mathbb{R}}$. On note $M(S)$ l'espace des paires de points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 8.1.4. — *Sous les hypothèses de la proposition 8.1.2, il existe une lamination mesurée $F \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ et une application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, transverse le long de \tilde{F} telles que :*

- (i) *chaque feuille de \tilde{F} a deux bouts distincts dans $\partial\mathbb{H}^2$;*
- (ii) *“l'application bout” $e : \tilde{F} \rightarrow M(S)$ qui à un point $p \in \tilde{F}$ associe les bouts de la feuille de \tilde{F} passant par p est continue.*

Démonstration. — Considérons la lamination mesurée F et l'application transverse f fournies par la proposition 8.1.2; nous allons montrer comment les modifier de sorte que les conclusions de la proposition 8.1.4 soient vérifiées.

Soit $\tilde{\ell}$ une feuille de \tilde{F} qui se projette sur une feuille compacte ℓ . Si ℓ est disjointe des géodésiques g_i de la décomposition de S en pantalons, $\tilde{\ell}$ est entièrement contenue dans une composante P de la préimage d'un pantalon P et est disjointe du bord de \tilde{P} .

D'après la construction de la lamination mesurée F , la feuille $\tilde{\ell}$ intersecte une arête k de la triangulation \tilde{T} : cette intersection est transverse et $\tilde{\ell} \cap k$ est réduit à un seul point. Donc, comme l'arête k disconnecte \tilde{P} , et que $\tilde{\ell}$ est entièrement contenue dans \tilde{P} , la feuille $\tilde{\ell}$ est non compacte : ℓ n'est pas homotope à 0.

Puisque ℓ est une courbe simple non homotope à 0 tracée dans le pantalon P , elle est parallèle à une courbe g de ∂P et la feuille $\tilde{\ell}$ est donc invariante par un élément $\gamma \in \Gamma$ qui laisse aussi une composante \tilde{g} de $\partial\tilde{P}$ invariante. D'après l'équivariance de f , cet élément γ fixe le point $f(\tilde{\ell}) \in \mathcal{T}$; par construction, l'image de la courbe \tilde{g} est aussi un point fixe de γ .

Nous allons décrire toutes les feuilles compactes de F , contenues dans P et homotopes à ℓ dans P .

Soit a un sommet de la triangulation \tilde{T} contenu dans l'axe de \tilde{g} ; soit b le sommet situé entre a et $\gamma(a)$. Il existe un nombre fini d'arêtes $(k_i)_{i=1, \dots, s}$, de l'arbre \tilde{T} que la feuille $\tilde{\ell}$ intersecte successivement avant d'intersecter l'arête $\gamma(k_1) = k_{s+1}$: le nombre s dépend de la courbe g de ∂P parallèle à la feuille ℓ . D'après la construction de la lamination F , les segments $(f(k_i))_{i \leq s+1}$ de \mathcal{T} ont en commun un segment non réduit à un point et qui contient le point $f(\tilde{\ell})$.

Affirmation 8.1.5. — *Soit $\kappa \subset \mathcal{T}$ le segment non dégénéré égal à l'intersection des segments $(f(k_i))_{i \leq s+1}$. Alors la feuille de \tilde{F} passant par $p \in \kappa$ se*

projette sur une feuille compacte parallèle à ℓ si et seulement si on $f(p)$ est dans κ .

Démonstration. — Nous allons montrer par récurrence sur j que la feuille passant par p intersecte successivement transversalement les j arêtes $(k_i)_{i \leq j}$, si et seulement si le point $f(p)$ est dans l'intersection $\cap_{i \leq j} f(k_i)$. Pour voir cela, il suffit de considérer un triangle de \tilde{T} dont le bord contient 2 arêtes consécutives k_j et k_{j+1} . La construction de F montre alors que la feuille de ℓ passant par un point $p \in k_j$ intersecte aussi l'arête k_{j+1} si et seulement si $f(p)$ est dans l'intersection $f(k_1) \cap f(k_2)$.

Nous voyons ainsi que la feuille passant par un point p tel que $f(p)$ soit dans l'intersection $\cap_{i \leq s+1} f(k_i)$, intersecte successivement les arêtes k_i , pour $i \leq s+1$.

Pour être sûr que la feuille passant par un point p avec la propriété de l'énoncé ci-dessus se projette sur une feuille compacte, il suffit de vérifier que son point d'intersection q avec l'arête $\gamma(k_1)$ n'est autre que le point $\gamma(p)$. Pour cela, observons que l'homéomorphisme γ envoie l'arête k_1 sur l'arête $\tilde{g}(k_1)$ en transportant la mesure μ_{k_1} sur la mesure $\mu_{\gamma(k_1)}$. Pour un ensemble dense de points $p \in k_1 \cap \tilde{F}$, il existe un unique point $q \in \gamma(k_1) \cap \tilde{F}$ tel que $\mu_{k_1}([a, p]) = \mu_{\gamma(k_1)}([\gamma(a), q])$, à savoir le point $\gamma(p)$. Pour un ensemble dense de points $p \in \cap_{i \leq s+1} f(k_i)$, l'affirmation 8.1.5 est vérifiée. Le cas général s'en déduit par continuité. \square

Cette affirmation entraîne immédiatement :

Corollaire 8.1.6. — Soit ℓ une feuille compacte de F , contenue dans un pantalon P ; alors ℓ possède dans P un voisinage $U \simeq \ell \times [0, 1]$ tel que :

- (i) la composante $\ell \times 0$ de ∂U est une courbe de ∂P ;
- (ii) toutes les feuilles compactes de F , homotopes à ℓ dans P sont contenues dans U ;
- (iii) l'intersection $F \cap U$ est un "paquet de feuilles parallèles", homéomorphe à $\ell \times K$, où K est un ensemble de Cantor contenu dans $]0, 1[$.

Ce résultat va nous permettre d'éliminer les feuilles de F parallèles à des courbes de ∂S .

Si une feuille $\ell \subset P$ est homotope à une courbe de ∂S , soit $U \subset P$ le voisinage de ℓ décrit dans le corollaire ci-dessus. Soit $\ell_1 \subset U$ la feuille de $F \cap U$ "la plus intérieure" : ℓ_1 borde donc dans \mathbb{H}^2/Γ un anneau A , infini d'un côté, qui contient $F \cap U$.

Considérons la lamination mesurée $F' = F - (\ell \times K)$ et définissons une nouvelle application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$, transverse le long de \tilde{F}' en posant : $f' = f$ sur le complémentaire de la préimage de A . Sur la composante \tilde{A} contenant $\tilde{\ell}_1$, définissons f' comme l'application constante égale à $f(\tilde{\ell}_1)$ et prolongeons

hboxensuite par équivariance à toute la préimage de A . On vérifie rapidement que la nouvelle application est bien une application transverse le long de \tilde{F}' .

Après un nombre fini de modifications de ce type, on obtient une lamination mesurée qui ne contient plus de feuilles compactes parallèles aux courbes de ∂S . Notons encore F la lamination mesurée obtenue et f l'application transverse.

Nous allons maintenant montrer que l'application transverse f vérifie les conclusions de la proposition 8.1.4.

Après la modification précédente, chaque feuille compacte de F contenue dans un pantalon P est homotope à l'une des géodésiques g_i ; chacun de ses relevés a donc deux bouts distincts. Soit U le voisinage de ℓ fourni par le corollaire 8.1.6 : l'application e est continue sur la préimage de $U \cap F$, puisqu'elle y est localement constante.

Pour démontrer la proposition 8.1.4, il nous suffit de considérer les feuilles de \tilde{F} qui intersectent l'une des géodésiques \tilde{g}_i .

Lemme 8.1.7. — *Soit ℓ une feuille non compacte de F ; alors une demi-feuille $\ell' \subset \ell$ ne peut être entièrement contenue dans un pantalon P .*

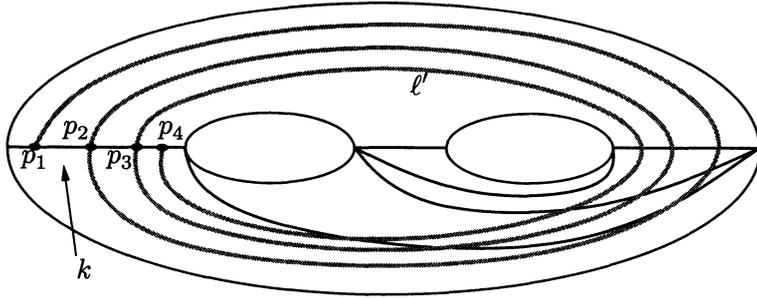
Démonstration. — Si la demi-feuille ℓ' est contenue dans P , la topologie du pantalon entraîne l'existence d'un intervalle k contenu dans une arête de $T \cap P$ tel que les points d'intersection de ℓ' avec k forment une suite monotone (p_i) sur k (cf. figure 8-3).

Alors la feuille de F passant par la limite $\lim(p_i)$ est nécessairement compacte. Ceci contredit que les feuilles compactes de F contenues dans P forment un ouvert (corollaire 8.1.6). \square

D'après le lemme 8.1.7, chaque demi-feuille d'une feuille non compacte ℓ de F intersecte une infinité de fois l'une des courbes g de la collection $\{g_i\}$. Considérons les relevés de g qui intersectent le relevé $\tilde{\ell}$: il y a donc une infinité de relevés $(\tilde{g}_j)_{j>0}$ et $(\tilde{g}_j)_{j<0}$ qui intersectent $\tilde{\ell}$, dans son bout positif et dans son bout négatif. La même propriété est évidemment vérifiée par toute feuille $\tilde{\ell}$ qui relève une feuille compacte de F qui intersecte transversalement l'une des géodésiques g_i : il existe une infinité de relevés $(\tilde{g}_j)_{j>0}$ et $(\tilde{g}_j)_{j<0}$ qui intersectent $\tilde{\ell}$ positivement et négativement.

D'après la construction de la lamination F , la feuille $\tilde{\ell}$ intersecte au plus une fois chaque géodésique \tilde{g}_i . D'autre part, le diamètre des relevés \tilde{g}_i tend vers 0 lorsque $|i|$ tend vers l'infini; donc chaque demi-feuille de $\tilde{\ell}$ a un bout bien défini dans $\partial\mathbb{H}^2$ et les deux bouts de la feuille $\tilde{\ell}$ sont distincts.

D'autre part, pour $j > 0$ (resp. pour $j < 0$), chaque géodésique \tilde{g}_j découpe sur $\partial\mathbb{H}^2$ un intervalle qui contient le bout e^+ (resp. e^-) de $\tilde{\ell}$, et lorsque $|j|$ tend vers l'infini, ces voisinages forment une base de voisinages de e^+ (resp. de e^-).


Figure 8-3

Pour tout $j > 0$ (resp. pour $j < 0$), on voit facilement qu'une feuille de \tilde{F} , suffisamment proche de ℓ intersectera aussi \tilde{g}_j , et son bout "positif" sera donc proche de e^+ (resp. de e^-). L'application e est donc continue, lorsqu'on la restreint à l'ensemble des feuilles qui intersectent transversalement un relevé des courbes g_i ; dans la première partie de la démonstration, nous avons vu qu'elle était continue sur les feuilles de \tilde{F} qui se projettent sur une feuille homotope à l'une des courbes g_i . D'après le lemme 8.1.7, toutes les feuilles de \tilde{F} sont de l'un de ces deux types; donc l'application "bout" est continue sur \tilde{F} .

Ceci termine la démonstration de la proposition 8.1.4. \square

Pour démontrer la proposition 8.1.4, nous avons modifié la lamination F fournie par la proposition 8.1.2 en supprimant les feuilles compactes homotopes à des courbes du bord ∂S . Nous aurons besoin dans la section 8.4 d'une autre propriété de F , que nous allons maintenant décrire.

Si ℓ est une feuille compacte de F homotope à une courbe g dans le bord d'un pantalon P_1 , soit $U_1 \simeq g \times [0, 1]$ l'anneau fourni par le corollaire 8.1.6. Soit \tilde{g} un relevé de g ; soient \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 les relevés des pantalons qui contiennent \tilde{g} dans le bord. Supposons que le relevé \tilde{P}_2 contienne une feuille $\tilde{\ell}$ dont la projection dans P_2 est homotope à g dans P_2 ; soit $U_2 \simeq g \times [-1, 0]$ le voisinage contenu dans P_2 associé par le corollaire 8.1.6. Nous pouvons supposer que les voisinages U_1 et U_2 s'intersectent uniquement en la feuille g , (même s'il est possible que les pantalons P_1 et P_2 soient égaux).

Soit \tilde{U}_i le relevé de l'anneau U_i qui contient \tilde{g} dans son bord; l'image $f(\tilde{U}_i)$ est un segment $cf(\tilde{\ell}_i)$, avec $c = f(\tilde{g})$. Si les deux segments $cf(\tilde{\ell}_1)$ et $cf(\tilde{\ell}_2)$ s'intersectent uniquement au point c , leur réunion est le segment $f(\tilde{\ell}_1)f(\tilde{\ell}_2)$: l'application f restreinte à l'arc $p \times [-1, 1]$ induit une injection des composantes connexes de $[-1, 1] - \tilde{F}$ dans \mathcal{J} .

Nous allons modifier la lamination F dans l'anneau $U = U_1 \cup U_2$ de sorte que cette dernière propriété soit toujours vérifiée. Pour cela, considérons le segment $f(\tilde{\ell}_1)f(\tilde{\ell}_2)$; si ce segment est réduit à un seul point, posons $F' = F - F \cap U$. Définissons l'application f' comme égale à f dans le complémentaire

de le préimage de U ; sur $\tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ définissons f comme l'application constante de valeur $f(\tilde{\ell}_1)$, puis prolongeons par équivariance. Alors, $f' : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{J}$ est une application transverse le long de F' , et la nouvelle lamination F' ne contient plus de feuilles compactes dans la classe d'homotopie de g , puisque toutes les feuilles de F homotopes à g étaient contenues dans $U_1 \cup U_2$.

Si les points $f(\tilde{\ell}_1)$ et $f(\tilde{\ell}_2)$ sont distincts, choisissons sur le segment $[-1, 1]$ une mesure μ positive sans atomes et supportée sur un ensemble de Cantor $K \subset]-1, 1[$ de masse totale égale à $d(f(\tilde{\ell}_1), f(\tilde{\ell}_2))$. Définissons une nouvelle lamination mesurée F' qui coïncide avec F sur le complémentaire de U et dont l'intersection avec U est égale à $g \times K$; puis choisissons la nouvelle application transverse f' de sorte qu'elle coïncide avec f sur le complémentaire de la préimage de U et qu'elle se restreigne au segment $p \times [-1, 1]$ en "l'intégration de la mesure μ ".

Après avoir effectué un nombre fini de modifications de ce type, on obtient une lamination mesurée (toujours notée F) et une application transverse f avec la propriété que, pour chaque feuille homotope à une courbe g du bord d'un pantalon P , il existe un anneau $U \simeq g \times [-1, 1]$ qui vérifie :

- (i) il existe un ensemble de Cantor $K \subset]-1, 1]$, tel que $F \cap U = g \times K$;
- (ii) U contient toutes les feuilles compactes de F homotopes à g ;
- (iii) dans chaque composante de la préimage de U , l'application f restreinte à un arc $p \times [-1, 1]$ s'obtient par intégration de la mesure transverse μ .

8.2 Construction d'un arbre dual

Nous allons maintenant associer à la lamination mesurée F de la section précédente une action isométrique de Γ sur un arbre réel (cf. [MS2]). La construction est dans l'esprit de celle de l'arbre dual d'une lamination géométrique mesurée (cf. section 2.3) ; mais ici les "segments" sont plus difficiles à mettre en évidence.

Soit R une composante connexe du complémentaire de \tilde{F} dans \mathbb{H}^2 ; d'après la description locale de F , l'adhérence de R est une sous-variété de \mathbb{H}^2 dont le bord est une réunion de feuilles de \mathbb{H}^2 .

Définition. — Une feuille de \tilde{F} dans l'adhérence d'une région complémentaire de \tilde{F} est dite *isolée d'un côté* ; l'image d'une telle feuille dans F est aussi dite *isolée d'un côté*.

Remarque. — Dans une carte $U_i \simeq]0, 1] \times]0, 1]$ telle que l'intersection $\tilde{F} \cap U_i$ soit homéomorphe à $K \times]0, 1[$, les feuilles isolées sont exactement celles qui passent par un point de (l'ensemble de Cantor) K qui est extrémité d'un intervalle du complémentaire de K .

Définissons maintenant une partition de \mathbb{H}^2 en fermés. Un fermé de cette décomposition est, ou bien

- (i) l'adhérence d'une composante du complémentaire de \tilde{F} dans \mathbb{H}^2 , ou bien
- (ii) une feuille de \tilde{F} qui n'est pas isolée d'un côté.

D'après la remarque précédente, ceci définit une partition \mathcal{P} de \mathbb{H}^2 en fermés.

Nous allons munir l'ensemble \mathcal{P} d'une distance qui en fera un arbre réel.

Proposition 8.2.1. — *Pour tous points x, y contenus dans des fermés distincts de la partition \mathcal{P} , il existe un chemin plongé $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que :*

- (i) $\omega(0) = x$ et $\omega(1) = y$;
- (ii) ω intersecte \tilde{F} transversalement;
- (iii) ω intersecte au plus une fois chaque feuille de \tilde{F} .

Démonstration. — Soient R et R' les éléments de la partition \mathcal{P} qui contiennent x et y . Puisque chaque feuille de \tilde{F} a deux bouts distincts dans $\partial\mathbb{H}^2$, elle disconnecte \mathbb{H}^2 ; si R a un intérieur non vide, il existe une feuille dans la frontière de R qui disconnecte y de l'intérieur de R . Il suffit ainsi de traiter le cas où x et y sont tous les deux dans des feuilles $\ell \subset R$ et $\ell' \subset R'$ de \tilde{F} .

Soit $\mathcal{L} \subset \tilde{F}$ la réunion de ℓ, ℓ' et de l'ensemble des feuilles de \tilde{F} qui disconnectent \mathbb{H}^2 en deux composantes connexes dont l'une contient ℓ et l'autre ℓ' . Puisque l'application qui à une feuille de \tilde{F} associe ses deux bouts est continue, l'ensemble \mathcal{L} est fermé dans \tilde{F} . L'ensemble \mathcal{L} porte un ordre total naturel : si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux feuilles distinctes, on dit que $\ell_1 < \ell_2$ si et seulement si la feuille ℓ_1 sépare \mathbb{H}^2 en deux composantes connexes dont l'une contient ℓ et l'autre ℓ_2 .

Soit maintenant $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, l'ensemble des feuilles ℓ'' telles qu'il existe un arc plongé $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ joignant un point de ℓ à un point de ℓ'' , transverse à \tilde{F} et qui coupe chaque feuille au plus une fois.

Fait 8.2.2. — *Soit $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite "croissante" de feuilles dans \mathcal{L}' , c'est-à-dire telle que : $\ell_i \leq \ell_{i+1}$. Alors, la suite (ℓ_i) converge vers une feuille $\ell_\infty \in \mathcal{L}'$.*

Démonstration. — Toutes les feuilles de \mathcal{L} intersectent un même compact de \mathbb{H}^2 , à savoir n'importe quel arc qui joint un point de ℓ à un point de ℓ' . Donc puisque \mathcal{L} est fermé, la suite (ℓ_i) converge vers une feuille ℓ_∞ de \mathcal{L} . En utilisant une carte de la lamination mesurée \tilde{F} autour d'un point de ℓ_∞ , on voit facilement que ℓ_∞ est dans \mathcal{L}' . \square

Pour montrer la proposition 8.2.1, il nous faut voir que $\ell' \in \mathcal{L}'$. Considérons la borne supérieure ℓ'' de \mathcal{L}' pour l'ordre total $<$: la feuille ℓ'' appartient à \mathcal{L}' , d'après le fait 8.2.2. Supposons, en raisonnant par l'absurde, que ℓ'' est différente de ℓ' . Si ℓ'' est isolée du côté de ℓ' , elle est donc dans l'adhérence d'une composante R et il existe une autre feuille ℓ''' dans l'adhérence de R

qui appartient aussi à \mathcal{L} ; on peut alors prolonger l'arc ω jusqu'à ℓ''' . Comme on a : $\ell'' < \ell'''$, ceci contredit que ℓ'' était la borne supérieure de \mathcal{L}' .

Supposons maintenant que ℓ'' n'est pas isolée du côté de ℓ' : en utilisant une carte pour la lamination mesurée F autour d'un point de ℓ'' , on peut alors prolonger l'arc ω au-delà de ℓ'' , ce qui contredit encore que la feuille ℓ'' était la borne supérieure de \mathcal{L}' . Donc, on a nécessairement : $\ell'' = \ell'$. \square

La proposition 8.2.1 va nous permettre de munir \mathcal{P} d'une distance. Si ω est l'arc fourni par la proposition 8.2.1 joignant deux points dans des classes distinctes C et C' de \mathcal{P} , la mesure transverse μ induit sur ω une mesure non triviale μ_ω : définissons $d(C, C')$ comme la masse totale de μ_ω .

Corollaire 8.2.3. — *La formule précédente définit une distance sur \mathcal{P} qui en fait un arbre réel.*

Démonstration. — Nous devons d'abord vérifier que $d(C, C')$ ne dépend pas du choix de l'arc ω . Pour cela considérons deux arcs ω et ω' qui joignent les points x, x' de C aux points y, y' de C' comme dans la proposition 8.2.1. Soient $k \subseteq C$ et $k' \subseteq C'$ des arcs qui joignent x à x' et y à y' ; chaque feuille de \tilde{F} qui intersecte ω intersecte aussi ω' , puisque le chemin obtenu en composant k^{-1}, ω^{-1}, k' et ω' est homotope à 0. L'application de $\tilde{F} \cap \omega$ vers $\tilde{F} \cap \omega'$ qui consiste "à suivre les feuilles" produit ainsi un homéomorphisme qui transporte la mesure μ_ω sur la mesure $\mu_{\omega'}$. Donc les masses totales des mesures μ_ω et $\mu_{\omega'}$ coïncident et la quantité $d(C, C')$ est bien définie.

Pour la même raison, d vérifie l'inégalité triangulaire. En effet, si ω, ω' sont les deux arcs fournis par la proposition 8.2.1, joignant des points $x \in C$ à $y \in C'$ et $y' \in C'$ à $z \in C''$, chaque feuille de \tilde{F} qui intersecte transversalement l'arc joignant C à C'' , intersecte aussi l'un des deux arcs ω et ω' ; ceci entraîne l'inégalité triangulaire.

Il reste à voir que \mathcal{P} , muni de cette distance est un arbre réel. Soit ω l'arc fourni par la proposition 8.2.1 qui joint deux points C_0 et C_1 de \mathcal{P} . Si C et C' sont deux points distincts de \mathcal{P} qui intersectent l'arc ω , tout fermé $C'' \in \mathcal{P}$ qui intersecte l'arc ω entre C et C' vérifie $d(C, C') = d(C, C'') + d(C'', C')$; ainsi, l'application qui au fermé C'' associe le point $d(C'', C_0) \in [0, \infty[$ est une isométrie sur l'intervalle $[0, d(C_0, C_1)]$.

Donc, deux points quelconques C_0, C_1 de \mathcal{P} sont joints par un segment isométrique à $[0, d(C_0, C_1)]$. Pour prouver que \mathcal{P} est un arbre réel, nous devons montrer que le segment C_0C_1 ainsi construit est le seul arc plongé qui joigne C_0 et C_1 .

Soit $C \in \mathcal{P}$ un fermé qui n'intersecte pas l'arc ω ; le point C n'appartient donc pas au segment C_0C_1 . Alors, il existe une feuille ℓ dans la frontière de C qui disconnecte \mathbb{H}^2 en deux composantes telles que l'une contienne les fermés C_0 et C_1 , et l'autre l'intérieur de C . L'ensemble des feuilles de \mathcal{L} qui séparent C_0 de C contient sa borne supérieure (cf. proposition 8.2.1) :

soit C' la classe de cette borne supérieure. On voit donc que l'intersection des segments C_0C_1 et C_0C est égale au segment C_0C' . Pour montrer que \mathcal{T} est un arbre réel, on peut alors raisonner comme pour la construction de l'arbre dual \mathcal{T}_λ d'une lamination géodésique mesurée (cf. section 2.3). \square

Observons que le groupe Γ agit sur l'arbre réel \mathcal{P} par isométries. On a même :

Lemme 8.2.4. — *L'action $\Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est minimale.*

Démonstration. — Nous allons montrer que tout point de \mathcal{P} est contenu dans l'axe d'un élément de Γ (cf. lemme 2.1.5). Considérons une feuille $\ell \in \tilde{F}$: ses deux bouts disconnectent $\partial\mathbb{H}^2$ en deux intervalles ouverts I et J . Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément hyperbolique dont les deux points fixes sont respectivement contenus dans I et J . Considérons alors les deux segments de \mathcal{P} qui joignent respectivement les classes ℓ à $\gamma(\ell)$ et ℓ à $\gamma^{-1}(\ell)$. Puisque les bouts de ℓ séparent les points fixes de γ , la feuille ℓ sépare les feuilles $\gamma^{-1}(\ell)$ et $\gamma(\ell)$ dans \mathbb{H}^2 : donc, les segments $\ell\gamma(\ell)$ et $\ell\gamma^{-1}(\ell)$ s'intersectent uniquement en la classe de ℓ . Puisqu'aucune feuille de \tilde{F} n'est isolée, la feuille ℓ n'est pas isolée du côté de $\gamma(\ell)$ ou du côté de $\gamma^{-1}(\ell)$: en particulier, la distance $d(\ell, \gamma(\ell))$ est non nulle et le segment $\ell\gamma(\ell)$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur son axe. Donc, la classe de ℓ est contenue dans l'axe de l'élément γ agissant sur \mathcal{P} . \square

Définition. — Une application Γ -équivariante \tilde{f} entre deux arbres réels \mathcal{P} et \mathcal{T} est un *morphisme*, si et seulement si tout point $\tilde{p} \in \mathcal{P}$ est contenu dans un segment non dégénéré $[ab]$ tel que la restriction $\tilde{f}|[ab]$ soit une isométrie.

Lemme 8.2.5. — *Soit f l'application transverse à la lamination mesurée \tilde{F} construite dans la section 8.1; alors, f induit un morphisme Γ -équivariant \tilde{f} de l'arbre \mathcal{P} dans \mathcal{T} . Si \tilde{f} n'est pas une isométrie, il existe un point $p \in \mathcal{P}$ et deux segments pp_1 et pp_2 tels que :*

- (i) $pp_1 \cap pp_2 = p$;
- (ii) chaque restriction $\tilde{f}|pp_i$ est une isométrie;
- (iii) l'intersection des segments $\tilde{f}(pp_1)$ et $\tilde{f}(pp_2)$ contient un segment non dégénéré.

Démonstration. — D'abord, l'application $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ induit une application de l'ensemble \mathcal{P} dans l'arbre réel \mathcal{T} , puisqu'elle est continue et constante sur les feuilles de \tilde{F} ainsi que sur les composantes connexes du complémentaire de \tilde{F} dans \mathbb{H}^2 .

Dans une carte $]0, 1[\times]0, 1[$ de la lamination mesurée \tilde{F} , l'application f s'obtient par intégration de la mesure transverse μ . Par construction, chaque fermé de \mathcal{P} qui intersecte la transversale $]0, 1[$ l'intersecte en un intervalle connexe; donc les fermés de \mathcal{P} qui intersectent cette transversale s'injectent dans \mathcal{P} et leur image est un segment non dégénéré $[ab] \subset \mathcal{P}$. D'après la

construction de f , la restriction $\tilde{f}|_{[ab]}$ est une isométrie. Puisque tout fermé de \mathcal{P} intersecte une carte de la lamination \tilde{F} , l'application \tilde{f} est un morphisme.

Considérons l'arc ω fourni par la proposition 8.2.1 qui joint deux points dans des fermés C et C' ; les éléments de \mathcal{P} qui intersectent ω sont exactement les points du segment CC' . En utilisant un recouvrement de ω par un nombre fini de cartes disjointes U_i adaptées à la lamination \tilde{F} , on exprime le segment CC' comme une réunion de segments k_i d'intérieurs disjoints, correspondant aux fermés de \mathcal{P} qui intersectent $\omega \cap U_i$. L'application \tilde{f} se restreint à chacun des segments k_i en une isométrie. Donc, s'il n'existe aucun point $p \in \mathcal{P}$ vérifiant (i) et (iii), la réunion des segments $\tilde{f}(k_i)$ est un segment de \mathcal{T} qui a la même longueur que CC' . Puisque l'action de Γ sur \mathcal{T} est minimale, l'application \tilde{f} est surjective; c'est donc une isométrie. \square

Définition. — Un point p avec les propriétés décrites dans le lemme 8.2.5 est appelé un *point de branchement*.

Lorsque \mathcal{P} est un arbre simplicial, en tout point de branchement, deux arêtes sont partiellement identifiées. Dans un arbre réel comme \mathcal{P} , on peut aussi définir une notion d'arêtes.

Définition. — Soit $p \in \mathcal{P}$; on définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{P} - p$ par : xRy si et seulement si l'intersection des segments px et py n'est pas réduite au point p . Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées *les arêtes au point p* .

Remarque. — Si le point $p \in \mathcal{P}$ correspond à l'adhérence R d'une composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{F}$, les arêtes au point p correspondent bijectivement aux feuilles du bord de R . Si le point p correspond à une feuille ℓ de \tilde{F} qui n'est isolée d'aucun côté, alors les arêtes au point p correspondent aux deux composantes connexes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\ell}$.

Fait 8.2.6. — Pour tout segment non dégénéré $pq \subset \mathcal{P}$, il existe un segment non dégénéré $pq' \subset pq$ tel que la restriction $\tilde{f}|_{pq'}$ soit une isométrie.

Démonstration. — Le segment pq définit une arête de \mathcal{P} au point p . Si p est la classe d'une feuille $\tilde{\ell}$ de \tilde{F} qui n'est pas isolée d'un côté, soit U_i une carte de \tilde{F} qui intersecte $\tilde{\ell}$: $U_i \cap \tilde{F} \simeq K \times]0, 1[$ pour un ensemble de Cantor $K \subset]0, 1[$. La feuille $\tilde{\ell}$ passe par un point $x \in K$ qui n'est pas une extrémité d'un intervalle du complémentaire : donc les deux segments de \mathcal{P} correspondant aux fermés qui intersectent les intervalles $[0, x]$ et $[x, 1]$ sont non dégénérés. L'un d'eux intersecte le segment pq en un segment non dégénéré; puisque \tilde{f} se restreint en une isométrie au segment de \mathcal{P} formé des fermés qui rencontrent $[-1, 1]$, ceci entraîne le fait 8.2.6.

Le cas où p est la classe d'un fermé d'intérieur non vide se traite de la même façon. \square

Comme première étape de la démonstration du théorème 8.1.1, nous allons montrer que certains phénomènes de branchement ne peuvent se produire.

Lemme 8.2.7. — Soit p un point de branchement du morphisme \tilde{f} ; soient pp_1 et pp_2 les deux segments identifiés par \tilde{f} . Alors l'une des deux arêtes pp_i a un stabilisateur trivial.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde en supposant que les deux arêtes pp_1 et pp_2 sont stabilisées respectivement par des éléments g_1 et g_2 autres que l'identité.

Sous-lemme 8.2.8. — Soient C_1 et C_2 des éléments de \mathcal{P} distincts; soit g un élément de Γ autre que l'identité tel que $g(C_1) = C_1$ et $g(C_2) = C_2$. Alors, il existe des feuilles $\ell_1 \subset C_1$ et $\ell_2 \subset C_2$ dont les projections dans \mathbb{H}^2/Γ sont deux courbes fermées homotopes.

Démonstration. — Chaque feuille dans la frontière de C_i disconnecte $\bar{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}^2$ en deux intervalles; l'un de ces intervalles ne contient pas les bouts des autres feuilles de ∂C_i ; soit $F_i \subset \bar{\mathbb{R}}$ le complémentaire de la réunion des intervalles correspondant aux feuilles de ∂C_i . Alors les points fixes de g sont contenus dans F_i et g laisse F_i invariant. Puisque C_2 et C_1 sont distincts, le fermé F_2 est contenu dans l'adhérence d'un intervalle du complémentaire de F_1 . Ceci n'est possible que si g est un élément hyperbolique et si ses points fixes sont les bouts d'une feuille ℓ_i dans la frontière de C_i .

Les feuilles $\tilde{\ell}_i$ ainsi construites sont invariantes par g , puisque les fermés C_i le sont : chacune se projette donc sur une feuille compacte ℓ_i de F . Les deux feuilles compactes ℓ_1 et ℓ_2 obtenues sont distinctes car sinon le groupe fondamental de S serait abélien. Elles sont homotopes sur S puisqu'elles représentent la même classe de conjugaison dans Γ , à savoir, celle de la racine primitive de l'élément g . \square

Puisque l'application \tilde{f} est équivariante, les éléments g_1 et g_2 fixent l'arête non dégénérée $\tilde{f}(pp_1) \cap \tilde{f}(pp_2)$. Puisque l'action de Γ sur \mathcal{T} est à petits stabilisateurs d'arêtes, g_1 et g_2 engendrent donc un groupe élémentaire. En particulier, ils ont les mêmes points fixes; puisque Γ est le groupe fondamental d'une surface, on en déduit que g_1 et g_2 sont des puissances d'un même élément $g \in \Gamma$.

D'après le sous-lemme 8.2.8, il existe des feuilles $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$, respectivement contenues dans les fermés p_1 et p_2 qui se projettent sur des courbes fermées ℓ_1 et ℓ_2 qui représentent chacune la classe de conjugaison de g . Donc ℓ_1 et ℓ_2 sont des courbes fermées homotopes sur la surface \mathbb{H}^2/Γ .

Supposons que g représente la classe de conjugaison d'une courbe du bord d'un pantalon P ; on a vu à la fin de la section 8.1, qu'il existait un anneau $U \simeq \ell_1 \times [-1, 1]$ qui contenait dans son intérieur toutes les feuilles de F homotopes à ℓ_1 . La lamination mesurée, telle qu'elle a été modifiée à la fin de la section 8.1 a la propriété que, dans chaque composante de la

préimage \tilde{U} , l'application f restreinte à un arc $x \times [-1, 1]$ induit une injection des composantes connexes de $\{x \times [-1, 1]\} - \tilde{F}$ dans \mathcal{T} . Donc, l'application \tilde{f} se restreint en une isométrie sur le segment formé des éléments de \mathcal{P} qui intersectent $x \times [-1, 1]$; comme ce segment contient $p_1 p_2$, ceci contredit les hypothèses du lemme 8.2.7.

Si la classe de conjugaison g ne représente pas l'une des géodésiques de la décomposition en pantalons, ℓ_1 intersecte transversalement l'une des courbes g_j de la décomposition en pantalons de S . Soit \tilde{g}_j une composante de la préimage de g_j qui intersecte $\tilde{\ell}_1$; elle intersecte donc aussi $\tilde{\ell}_2$. Par construction, l'arc $k \subset \tilde{g}_j$ d'extrémités $\tilde{\ell}_1 \cap \tilde{g}_j$ et $\tilde{\ell}_2 \cap \tilde{g}_j$ a une intersection connexe avec toutes les feuilles de \tilde{F} et avec tous les fermés de \mathcal{P} qu'il rencontre; le segment $p_1 p_2 \subset \mathcal{P}$ est donc exactement l'ensemble des fermés de \mathcal{P} qui rencontrent k . D'après la construction de l'application transverse f , l'application \tilde{f} est injective sur ce segment et ne peut donc avoir un point de branchement au point p . \square

8.3 Construction d'une lamination géodésique mesurée

Pour démontrer le théorème 8.1.1, nous allons remplacer la lamination F par une lamination géodésique mesurée; plus précisément, nous allons remplacer l'arbre \mathcal{P} par l'arbre dual \mathcal{T}_λ d'une lamination géodésique mesurée. Nous allons commencer par montrer comment associer à la lamination mesurée construite dans la section 8.1, une mesure de Radon (i.e. une mesure σ -additive et finie sur les compacts) sur $M(S)$ qui est Γ -invariante.

Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles disjoints contenus dans $\partial\mathbb{H}^2$ et fixons un point q dans le complémentaire de la réunion de ces intervalles. L'ensemble \mathcal{L} des feuilles de \tilde{F} qui ont un bout dans $[a, b]$ et l'autre dans $[c, d]$ est un fermé de \tilde{F} puisque l'application qui à une feuille associe ses deux bouts est continue.

De plus, toutes les feuilles de \mathcal{L} intersectent un compact de \mathbb{H}^2 ; il suffit pour cela de choisir deux feuilles ℓ et ℓ' dont les bouts sont dans les ouverts du complémentaire de $[a, b] \cup [c, d]$. Alors, toutes les feuilles de \mathcal{L} intersectent un chemin dans \mathbb{H}^2 qui joint ℓ à ℓ' .

Par analogie avec la construction faite dans la démonstration de la proposition 8.2.1, munissons \mathcal{L} d'un ordre total en posant, si ℓ et ℓ' sont deux feuilles distinctes de \mathcal{L} : $\ell < \ell'$, lorsque l'adhérence de ℓ découpe $\overline{\mathbb{H}^2}$ en deux composantes connexes dont l'une contient ℓ' et le point q .

Puisque \mathcal{L} est fermé et que toutes les feuilles de \mathcal{L} intersectent un compact de \mathbb{H}^2 , \mathcal{L} a un plus petit élément ℓ_- et un plus grand élément ℓ_+ . Comme dans la démonstration de la proposition 8.2.1, on montre l'existence d'un arc ω qui joint un point de ℓ_- à un point de ℓ_+ , et qui intersecte transversalement \tilde{F} en coupant chaque feuille de \mathcal{L} en un seul point. La mesure transverse à la

lamination mesurée \tilde{F} dépose une mesure μ_ω sur l'arc ω ; la masse totale de μ_ω est un nombre positif $\mu_\omega([a, b] \times [c, d])$ qui ne dépend pas du choix de l'arc ω (cf. corollaire 8.2.3). On a alors :

Fait 8.3.1. — *Il existe une unique mesure de Radon λ sur $M(S)$ qui donne à chaque rectangle $[a, b] \times [c, d]$ la masse $\mu_\omega([a, b] \times [c, d])$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour toute partition dénombrable de $[a, b] \times [c, d]$ en rectangles disjoints $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, on a :

$$\mu_\omega([a, b] \times [c, d]) = \sum_i \mu_{\omega_i}([a_i, b_i] \times [c_i, d_i]). \quad (1)$$

Pour tout i , l'ensemble des feuilles de \mathcal{L} qui ont leurs bouts dans le rectangle $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ forment un fermé \mathcal{L}_i ; sur ce fermé les mesures μ_ω et μ_{ω_i} coïncident. Les fermés \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_j correspondant à des rectangles disjoints sont disjoints et leur réunion est égale à \mathcal{L} . L'égalité (1) résulte alors du fait que μ_ω est σ -additive. \square

Dans l'appendice, nous définirons une correspondance entre laminations géodésiques mesurées sur \mathbb{H}^2/Γ et certaines mesures de Radon sur $M(S)$. En termes de cette correspondance, on a :

Fait 8.3.2. — *La mesure λ construite dans le fait 8.3.1 est une lamination géodésique mesurée.*

Démonstration. — Nous verrons dans l'appendice qu'une mesure de Radon λ sur $M(S)$ est une lamination géodésique mesurée si et seulement si :

- (i) λ est Γ -invariante;
- (ii) deux points quelconques de son support ne sont jamais enlacés;
- (iii) aucun point de son support n'a une coordonnée qui soit le point fixe d'un élément parabolique de Γ .

Par construction, la mesure λ est Γ -invariante.

Tout ouvert de $M(S)$ qui est disjoint de l'ensemble des bouts des feuilles de \tilde{F} est de mesure nulle; tout voisinage du bout d'une feuille de \tilde{F} a une mesure strictement positive car e , l'application bout, est continue (proposition 8.1.4) et car \tilde{F} est exactement le support de μ . Donc le support de λ est exactement l'ensemble $e(\tilde{F})$. Alors (ii) provient de ce que deux feuilles de \tilde{F} sont disjointes ou confondues; (iii) provient de ce que la lamination F est un compact de \mathbb{H}^2/Γ et du lemme de Margoulis. \square

Soit \mathcal{T}_λ l'arbre dual de la lamination géodésique mesurée λ (cf. section 2.3). On a :

Proposition 8.3.3. — *Les actions $\Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ et $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ sont isométriques.*

Démonstration. — Ce sont deux actions minimales; donc, d'après la proposition 2.1.6, il nous suffit de voir que pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, les distances de translation de γ dans les deux arbres \mathcal{P} et \mathcal{T}_λ sont égales. Pour cela, nous allons montrer que la distance de translation de γ sur l'arbre \mathcal{P} s'exprime en termes de la mesure λ sur $M(S)$.

Soit γ^- , γ^+ les deux points fixes de γ sur $\partial\mathbb{H}^2$ et supposons qu'il existe une feuille $\ell \in \mathcal{F}$ dont les bouts x et y séparent γ^- de γ^+ ; alors d'après la démonstration du lemme 8.2.4 et la construction de la mesure λ , la distance de translation $\delta_{\mathcal{P}}(\gamma)$ de γ dans l'arbre \mathcal{P} est égale à: $\lambda([x, \gamma(x)[\times [y, \gamma(y)[)$. Si $] \gamma^-, \gamma^+[$ est l'intervalle du complémentaire de γ^- et γ^+ dans $\partial\mathbb{H}^2$ qui contient le point x , on a :

$$\lambda([x, \gamma(x)[\times [y, \gamma(y)[) = \lambda(] \gamma^-, \gamma^+[\times [y, \gamma(y)[),$$

car il n'y a aucune feuille de \tilde{F} qui a une extrémité dans $] \gamma^-, x[$ ou dans $] \gamma(x), \gamma^+[$, et l'autre dans $[y, \gamma(y)[$.

Donc, si la distance de translation $\delta_{\mathcal{P}}(\gamma)$ n'est pas nulle, on a :

$$\delta_{\mathcal{P}}(\gamma) = \lambda(] \gamma^-, \gamma^+[\times [y, \gamma(y)[).$$

Si γ a un point fixe dans \mathcal{P} , il n'y a aucune feuille de \tilde{F} qui sépare les points fixes γ^- et γ^+ , d'après la démonstration du lemme 8.2.4; donc la formule ci-dessus est encore vérifiée.

Dans l'appendice, nous verrons que pour tout $\gamma \in \Gamma$, le nombre d'intersection de λ et γ vérifie :

$$i(\lambda, \gamma) = \lambda(] \gamma^-, \gamma^+[\times [y, \gamma(y)[),$$

et que la distance de translation de l'élément γ dans l'arbre \mathcal{T}_λ est égale à $i(\lambda, \gamma)$.

Donc, les deux actions $\Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ et $\Gamma \times \mathcal{T}_\lambda \rightarrow \mathcal{T}_\lambda$ ont les mêmes fonctions de translation : elles sont isométriques. \square

8.4 Démonstration du théorème 8.1.1

Si λ est la lamination géodésique mesurée construite dans la section 8.3, on a un morphisme Γ -équivariant Ψ de l'arbre dual \mathcal{T}_λ dans l'arbre \mathcal{T} , obtenu en composant l'isomorphisme entre \mathcal{T}_λ et \mathcal{P} (proposition 8.3.3) et le morphisme \tilde{f} de \mathcal{P} vers \mathcal{T} (lemme 8.2.5). Ce morphisme Ψ a la propriété que pour tout segment $pq \subset \mathcal{T}_\lambda$ il existe un segment $pq' \subset pq$ en restriction auquel Ψ est une isométrie (fait 8.2.6).

Pour montrer le théorème 8.1.1, nous raisonnerons par l'absurde, en suivant R. Skora. Si p est un point de branchement pour Ψ , il existe deux segments pp_1 et pp_2 tels que :

- (i) la restriction de Ψ à chacun des segments pp_1 et pp_2 est une isométrie;

(ii) l'intersection des segments $\Psi(pp_i)$ contient un segment non dégénéré dont une extrémité est $\Psi(p)$.

Rappelons que l'arbre \mathcal{T}_λ est construit à partir d'un "épaississement" — toujours noté λ — de la lamination géodésique λ et que les points de \mathcal{T}_λ correspondent bijectivement aux feuilles de la préimage $\tilde{\lambda}$ isolées d'aucun côté et aux adhérences des composantes connexes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$.

Lemme 8.4.1. — *Soit p un point de branchement de Ψ ; alors p correspond à l'adhérence d'une composante de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$.*

Démonstration. — Sinon, p correspond à une feuille qui n'est isolée d'aucun côté : une telle feuille est ou bien le relevé d'une feuille compacte dans l'intérieur d'un "paquet" de feuilles parallèles, ou bien le relevé d'une feuille d'un minimal exceptionnel qui n'est pas dans la frontière d'une composante connexe du complémentaire de λ . Dans les deux cas, il y a exactement deux arêtes de \mathcal{T}_λ issues de p : elles correspondent aux feuilles et aux régions complémentaires de $\tilde{\ell}$ contenues dans chaque composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant d'abord que ℓ est une feuille compacte. Alors les deux segments pp_1 et pp_2 contiennent des segments non dégénérés dont le stabilisateur est un groupe cyclique non trivial ; c'est interdit par le lemme 8.2.7.

Si ℓ est dans un minimal exceptionnel, puisque ce minimal exceptionnel est égal à l'adhérence de ℓ (proposition A.3.4), le segment pp_1 contient l'image $g(\tilde{\ell})$ de la feuille $\tilde{\ell}$ par un élément $g \in \Gamma$. Mais alors les deux segments $g(pp_1)$ et $g(pp_2)$ intersectent le segment pp_1 en des segments non dégénérés qui se rencontrent uniquement au point $g(p)$. Puisque le morphisme Ψ est Γ -équivariant et injectif sur pp_1 , le point p n'est donc pas un point de branchement de Ψ . \square

Donc, si p est un point de branchement du morphisme Ψ , il correspond à l'adhérence R d'une composante connexe de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$. Les segments pp_i correspondent à des feuilles $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ dans le bord de R en ce sens que tout arc géodésique κ_i , suffisamment petit et qui intersecte transversalement $\tilde{\ell}_i$ n'intersecte que des éléments de pp_i .

Nous allons commencer par nous ramener au cas où le stabilisateur de chaque arête pp_i est trivial, c'est-à-dire où, pour tout élément $g \neq \text{Id}$ qui fixe p , on a : $g(pp_i) \cap pp_i = p$.

En effet, d'après le lemme 8.2.7, au plus une de ces arêtes est "stabilisée partiellement" par un élément non trivial $g \in \Gamma$: par exemple, $g(pp_1) \cap pp_1$ est un segment non dégénéré. Puisque l'application Ψ est équivariante, elle identifie partiellement les deux arêtes $g(pp_2)$ et pp_2 . Mais l'arête $g(pp_2)$ correspond à la feuille $g(\tilde{\ell}_2) \subset \partial R$, qui est distincte de $\tilde{\ell}_2$; le stabilisateur de l'arête $g(pp_2)$ est trivial puisqu'il en est de même pour pp_2 .

On se ramène ainsi au cas d'un point de branchement p , tel que les deux arêtes pp_i qui sont identifiées par Ψ ont un stabilisateur trivial. Dire que le stabilisateur d'une arête pp_i est trivial équivaut à dire que la feuille $\tilde{\ell}_i$ de ∂R qui correspond à cette arête a une projection non compacte (sous-lemme 8.2.8) : en particulier, c'est une géodésique de $\tilde{\lambda}$.

Lemme 8.4.2. — *Les géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ ne sont pas asymptotes dans $\partial\mathbb{H}^2$.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : pour un paramétrage convenable de ces géodésiques, la distance entre $\tilde{\ell}_1(t)$ et $\tilde{\ell}_2(t)$ tend alors vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Puisque la projection ℓ_1 de $\tilde{\ell}_1$ est non compacte, elle est contenue dans un minimal exceptionnel de λ (proposition A.3.4). Soit $\tilde{\kappa}_1 \subset \mathbb{H}^2$ un petit arc géodésique qui intersecte transversalement $\tilde{\ell}_1$ et qui se projette sur un arc κ_1 dans \mathbb{H}^2/Γ ; choisissons-le suffisamment petit de sorte que toutes les feuilles de $\tilde{\lambda}$ qui l'intersectent soient des éléments du segment pp_1 .

La demi-feuille $\ell_1(t)_{t>0}$ intersecte une infinité de fois l'arc κ_1 : il existe donc $g \in \Gamma$ tel que $g(\tilde{\ell}_1)$ et $g(\tilde{\ell}_2)$ appartiennent au segment pp_1 . Mais alors, puisque la restriction $\Psi|_{pp_1}$ est injective, les deux arêtes au sommet $g(p)$, issues dans les directions $g(\tilde{\ell}_1)$ et $g(\tilde{\ell}_2)$, s'injectent dans \mathcal{T} . Comme Ψ est équivariante, c'est une contradiction. \square

Puisque les géodésiques $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont disjointes et n'ont pas de bouts communs, elles ont une perpendiculaire commune : c'est un segment géodésique k orthogonal en chacune de ses extrémités à $\tilde{\ell}_1$ ou à $\tilde{\ell}_2$. Soit O le milieu de k .

Supposons que les segments pp_1 et pp_2 sont exactement identifiés par l'application Ψ , c'est-à-dire qu'on a : $\Psi(p_1) = \Psi(p_2)$ (on peut toujours se ramener à ce cas quitte à rétrécir les segments donnés au départ). Au point $k \cap \tilde{\ell}_i$, choisissons un arc géodésique $\tilde{\kappa}_i$, orthogonal à $\tilde{\ell}_i$, transverse à $\tilde{\lambda}$ et dont l'extrémité autre que $k \cap \tilde{\ell}_i$ est le point $p_i \cap \tilde{\kappa}_i$ dans le fermé correspondant au point p_i (ceci est encore possible au prix de rétrécir le segment pp_i).

Remarque. — Observons que nous pouvons imposer que le fermé p_1 , par exemple, soit l'adhérence d'une composante du complémentaire de $\tilde{\lambda}$, puisque les points avec cette propriété sont denses dans tout segment de \mathcal{T}_λ ; mais nous ne pouvons pas imposer ceci aux deux fermés p_i simultanément.

Soit $C > 0$ une constante que nous préciserons plus tard. Supposons chaque arc $\tilde{\kappa}_i$ suffisamment court de sorte que :

- (i) sa projection sur \mathbb{H}^2/Γ est un arc plongé κ_i ;
- (ii) pour toute feuille ℓ de $\tilde{\ell}_i$, la distance mesurée le long de la feuille entre deux points d'intersection successifs de $\ell \cap \kappa_i$ est supérieure à C .

Pour contrôler (ii), il suffit d'utiliser que la géodésique ℓ_i n'est pas compacte (cf. théorème 3.1.4).

Fixons une orientation transverse de l'arc κ_i .

Affirmation 8.4.3. — *Pour toute géodésique ℓ de λ qui intersecte l'arc κ_i au point x dans la direction positive, il existe un premier temps non nul tel que ℓ intersecte de nouveau κ_i dans la direction positive.*

Démonstration. — Si ce n'est pas le cas, soit ℓ^+ la demi-feuille de ℓ issue de x dans la direction positive; toutes les intersections $\ell^+ \cap \kappa_i$ après le point x seraient négatives. Puisque la demi-feuille ℓ^+ est dense dans le minimal exceptionnel $\bar{\ell}_i$ (proposition A.3.4), toutes les feuilles de $\bar{\ell}_i$ intersectent κ_i dans la même direction. Ceci contredit que les deux premières intersections de la demi-feuille ℓ^+ avec κ_i se font dans des directions différentes. \square

On appelle ce premier point d'intersection $T_i(x)$. Par continuité, si on a : $T_i(x) \neq p_i \cap \kappa_i$, il existe un intervalle ouvert $k_x \subset \kappa_i$ autour de x et un intervalle $k_{T_i(x)} \subset \kappa_i$ autour de $T_i(x)$ tel que : $T_i(y) \in \lambda \cap k_{T_i(x)}$ si et seulement si $x \in \lambda \cap k_x$. Lorsqu'on a : $T_i(x) = p_i \cap \kappa_i$, il existe deux intervalles $[x, x''[$ et $]x', x]$ avec cette même propriété (cette complication est due à ce que la feuille p_i peut ne pas être isolée d'un côté dans $\bar{\ell}_i$).

Puisque la mesure transverse à la lamination λ est invariante par holonomie, la mesure $\lambda([y, T_i(y)])$ est indépendante de $y \in \lambda \cap k_x$. Si l'intervalle k_x est choisi suffisamment petit, pour tout $y \in k_x \cap \lambda$, l'élément de Γ qui représente la classe d'homotopie du chemin obtenu en composant $Oy \subset k$, $yT_i(y) \subset \ell_x$ et $T_i(y) \subset k$ ne dépend pas de $y \in I_x$. Il en est de même pour les intervalles $[x, x''[$ et $]x', x]$: notons g_x et $g_{x'}$ les éléments de Γ correspondant.

Le recouvrement du compact $\kappa_i \cap \lambda$ par les intersections $\lambda \cap k_x$, $\lambda \cap [x, x''[$ et $\lambda \cap]x', x]$ contient un recouvrement fini. Nous pouvons supposer, quitte à les subdiviser que les éléments de ce recouvrement sont des fermés $k_i^j \cap \lambda$, pour des intervalles d'intérieurs disjoints $k_i^j \subset \kappa_i$.

Soit I_i^j le segment de pp_i formé des feuilles de $\tilde{\lambda}$ qui intersectent le relevé de k_i^j contenu dans $\tilde{\kappa}_i$. Il existe alors un recouvrement de pp_i par des intervalles d'intérieurs disjoints I_i^j et des éléments $g_i^j \in \Gamma$ tels que :

- (i) les segments $g_i^j(I_i^j)$ recouvrent pp_i ;
- (ii) g_i^j agit sur I_i^j comme une translation ;
- (iii) l'élément g_i^j représente le lacet obtenu en composant les trois arcs Ox_i^j , $x_i^j T_i(x_i^j)$ et $T_i(x_i^j)O$, pour un certain point $x_i^j \in k_i^j$.

Puisque l'application Ψ est Γ -équivariante, l'intervalle $I = \Psi(pp_i)$ est recouvert par des intervalles d'intérieurs disjoints $\Psi(I_i^j)$ sur lesquels les applications g_i^j vérifient (i), (ii) et (iii).

Considérons la "transformation" T_i de l'intervalle $I = \Psi(pp_i)$ définie dans la réunion des intérieurs des intervalles $\Psi(I_i^j)$ et qui coïncide avec g_i^j dans l'intérieur de I_i^j (une telle transformation s'appelle un échange d'intervalles).

L'application T_i n'est pas bien définie aux extrémités des intervalles $\Psi(I_i^j)$; elle est bien définie seulement dans le complémentaire de cet ensemble fini. Par conséquent, si $x \in I$ est dans le complémentaire d'un ensemble dénombrable \mathcal{D} , on peut composer les transformations T_1 et T_2 et définir $T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_r}(x)$.

Fixons dans la suite un point x dans l'intérieur de I , disjoint de \mathcal{D} ; soit $x_i \in \kappa_i$ un point contenu dans une feuille d'image le point x par l'application Ψ . Pour tout mot $\nu = T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_\nu}$ de longueur fini en les lettres T_1 et T_2 , il existe un élément γ_ν et un intervalle autour de x sur lequel γ_ν agit comme une translation; γ_ν est obtenu en composant des éléments g_i^j .

Soit n le cardinal de l'ensemble des intervalles I_1^j et m celui de l'ensemble des intervalles I_2^j .

Pour $N > 0$, considérons l'ensemble \mathcal{N}_1 des mots de longueur N en les lettres T_1 et T_2 qui commencent par T_1 : le cardinal de \mathcal{N}_1 est 2^{N-1} . Pour y dans le complémentaire de l'ensemble dénombrable \mathcal{D} , chaque transformation T_i s'écrit: $y \rightarrow y + \beta_r$; β_r est la longueur de translation de l'élément g_1^j ou g_2^j et prend donc au plus $n + m$ valeurs. Donc pour tout mot $\nu \in \mathcal{N}_1$ et pour tout $x \in I - \mathcal{D}$, on a :

$$d(x, \gamma_\nu(x)) = \sum_1^{n+m} n_i \beta_i,$$

avec $\sum n_i = N$. Ainsi lorsque ν est un mot de \mathcal{N}_1 , les distances $d(x, \gamma_\nu(x))$ prennent au plus $C(N, n+m)$ valeurs où $C(N, n+m)$ est le nombre d'écritures possibles de N comme somme de $n+m$ entiers positifs: ce nombre est inférieur à $(N+1)^{n+m}$.

Puisque le cardinal de \mathcal{N}_1 croît exponentiellement avec N , il existe pour N suffisamment grand, deux mots distincts ν_1 et ν_2 de \mathcal{N}_1 tels que les éléments γ_1 , γ_2 correspondant vérifient: $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$. Chacun de ces éléments agit sur un voisinage de x comme une translation; donc, il existe un voisinage de x dans I qui est fixé par $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Puisque les éléments de \mathcal{N}_1 commencent par T_1 et que les mots ν_1 et ν_2 sont distincts, l'élément $g = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ représente le lacet basé en O , réunion des segments géodésiques Ox_1 , $x_1x_1^1$, $x_1^1x_2^1$, $x_2^1x_2^2$, ..., $x_{i-1}^kx_i^{k+1}$, $x_i^kx_i^{k+1}$, ..., $x_1^rx_1$ et x_1O , où $x_i^kx_i^{k+1}$ est contenu dans une feuille de $\bar{\ell}_i$ et a ses deux extrémités dans l'intervalle κ_i .

De même en raisonnant avec l'ensemble \mathcal{N}_2 des mots de longueurs N en les lettres T_1 et T_2 et qui commencent par T_2 , on produit un élément h qui stabilise un voisinage du point x sur le segment I et qui représente le lacet basé en O , réunion des segments géodésiques Ox_2 , $x_2y_2^1$, $y_2^1y_1^1$, $y_1^1y_1^2$, ..., $y_{i-1}^ky_i^{k+1}$, $y_i^ky_i^{k+1}$, ..., $y_2^rx_2$ et x_2O , où $y_i^ky_i^{k+1}$ est contenu dans une feuille de $\bar{\ell}_i$ et a ses deux extrémités dans l'intervalle κ_i .

Nous allons maintenant contredire le fait que l'action de Γ sur \mathcal{J} est à petits stabilisateurs. La construction ci-dessus nous fournit une courbe fermée

$c \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$, dont la classe d'homotopie est la classe de conjugaison de g . Cette courbe c est une géodésique brisée, réunion d'arcs géodésiques contenus dans les feuilles de λ et d'arcs géodésiques entre un point de κ_1 et un point de κ_2 . Rappelons que, par construction, les géodésiques $x_i^k x_i^{k+1}$ et $y_i^k y_i^{k+1}$ ont une longueur supérieure à C .

Lemme 8.4.4. — *Si la constante C est choisie suffisamment grande, les éléments g et h n'engendrent pas un groupe élémentaire.*

Démonstration. — On voit facilement que dans un groupe fuchsien, tout sous-groupe élémentaire est cyclique. Supposons donc, en raisonnant par l'absurde, que les éléments g et h engendrent un groupe cyclique : ils vérifient donc une relation $g^a h^b = \text{Id}$ pour des entiers non nuls a et b . Nous supposons qu'aucun de ces entiers n'est nul, la démonstration dans l'autre cas étant similaire. L'élément $g^a h^b \in \Gamma$ est représenté par une courbe $c \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$, réunion de segments géodésiques k_r qui contiennent k , et de segments ℓ_r de longueur supérieure à C , contenus dans des feuilles de λ . La courbe c se relève dans le revêtement universel \mathbb{H}^2 en une courbe fermée \tilde{c} , réunion d'arcs k'_i relevés des arcs k_r et d'arcs ℓ'_i relevés des arcs ℓ_r . Ordonnons ces relevés cycliquement. Les relevés ℓ'_i et ℓ'_{i+1} qui intersectent k'_i sont contenus dans des géodésiques de \mathbb{H}^2 qui font avec k'_i un angle d'autant plus proche de $\pi/2$ que les arcs κ_1 et κ_2 sont courts.

Sous-lemme 8.4.5. — *Soit ℓ une constante positive. Pour tout angle $\theta > 0$ suffisamment petit, il existe une constante $K = K(\ell, \theta) > 0$ telle que si A, B, C et D sont quatre points de \mathbb{H}^2 vérifiant :*

- (i) *la distance BC est comprise entre ℓ et 2ℓ ;*
- (ii) *l'angle entre les géodésiques contenant les segments AB (resp. CD) et BC est compris entre $\pi/2 - 2\theta$ et $\pi/2 + 2\theta$;*
- (iii) *la longueur des côtés AB et CD est supérieure à $2K$.*

Alors le côté AD a une longueur supérieure à $AB + K$ et la géodésique AD intersecte la géodésique CD sous un angle inférieur à θ .

Démonstration. — Notons \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{CD} les géodésiques de \mathbb{H}^2 qui contiennent respectivement les segments AB , BC et CD . La constante ℓ étant fixée, cet ensemble de triplets de géodésiques est compact, modulo les isométries de \mathbb{H}^3 ; si de plus, la constante θ est choisie suffisamment petite, les géodésiques \overline{AB} et \overline{CD} de cette famille sont disjointes et non asymptotes. Le résultat s'obtient alors par les mêmes méthodes que le corollaire 2.2.7. \square

Reprenons la démonstration du lemme 8.4.4. Soit ℓ la longueur de l'arc k . Choisissons maintenant θ de sorte que les conclusions du résultat ci-dessus soient vérifiées pour la constante $K(\ell, \theta)$. Si les arcs κ_1 et κ_2 sont choisis assez courts, la longueur des segments k'_i sera inférieure à 2ℓ et les segments ℓ'_i, ℓ'_{i+1} feront avec k'_i un angle compris entre $\pi/2 - \theta$ et $\pi/2 + \theta$.

Posons $C = K(\ell, \theta)$; on peut supposer les arcs κ'_i suffisamment courts de sorte que les longueurs des segments ℓ'_i soient supérieures à C .

Notons P_{2i}, P_{2i+1} les extrémités des segments $\ell'_i \subset \tilde{c}$ ordonnés cycliquement. Le sous-lemme 8.4.5 s'applique au quadrilatère $P_0P_1P_2P_3$ et donne :

$$d(P_0, P_3) \geq d(P_0, P_1) + C$$

et, au point P_3 , les segments P_0P_3 et P_3P_4 font un angle compris entre $\pi/2 - 2\theta$ et $\pi/2 + 2\theta$. Un raisonnement par récurrence, où on applique le sous-lemme 8.4.5 successivement aux quadruplets $P_0P_{2i-1}P_{2i}P_{2i+1}$, montre alors que la fonction $d(P_0, P_{2i+1})$ est strictement croissante : ceci est impossible si on suppose la courbe \tilde{c} fermée. \square

Ceci termine la démonstration du théorème 8.1.1. \square

CHAPITRE 9

Deux exemples de variétés hyperboliques fibrées sur le cercle

La démonstration du théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées, contenue dans les chapitres précédents, utilise un procédé d'itération et permet difficilement de construire explicitement une métrique hyperbolique complète sur une variété qui fibre sur le cercle. Dans ce chapitre, nous allons décrire deux exemples. Le premier est une variété de volume fini découverte par H. Gieseking [Gi]. C'est l'un des premiers exemples de variétés hyperboliques complètes de volume fini, après ceux de Picard et de Bianchi qui reposaient sur des constructions arithmétiques. L'exemple de Gieseking est une variété fibrée sur le cercle mais non orientable. Dans la section 9.2, nous décrirons un exemple dû à Thurston, construit à partir du dodécaèdre régulier à angles droits (cf. [Su1]).

9.1 La variété de Gieseking

Cet exemple de variété hyperbolique est expliqué dans le livre de Magnus [Mag] et dans le survol de Milnor [Mi].

Pour décrire l'espace hyperbolique, nous utiliserons le modèle de Riemann \mathbb{D}^3 . Considérons un tétraèdre régulier euclidien dont les sommets sont sur le bord du disque : l'enveloppe convexe de ces sommets pour la métrique hyperbolique est un tétraèdre "idéal" T' . Puisque les isométries euclidiennes du disque sont aussi des isométries pour la métrique hyperbolique, le tétraèdre T' est régulier : en particulier, ses angles dièdres pour la métrique hyperbolique sont égaux. L'intersection de T' avec une horosphère centrée en l'un de ses sommets est un triangle euclidien : donc les angles dièdres de T' sont tous égaux à $\pi/3$. H. Gieseking a défini des identifications entre les faces de T' telles que le quotient de T' par ces identifications soit une variété hyperbolique complète de volume fini.

Considérons deux faces adjacentes f'_1 et f'_2 de T' qui ont un sommet idéal en commun et identifions-les par la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de ce

sommet. Le quotient de T' par cette première identification est une variété dont le bord est la réunion de deux triangles géodésiques idéaux qui sont les images des deux faces f'_3 et f'_4 , opposées aux faces f'_1 et f'_2 ; les angles dièdres sur les arêtes du bord de ces triangles sont respectivement égales à $\pi/3$, $2\pi/3$ et π . Identifions maintenant ces deux faces par la rotation d'angle $2\pi/3$ autour d'un sommet idéal commun : on obtient une variété sans bord G' . Les arêtes du tétraèdre T' sont identifiées en une seule : donc, en tout point la variété G' est isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .

Proposition 9.1.1. — *G' est un variété hyperbolique complète; elle est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte fibrée sur le cercle avec pour fibre un tore troué.*

Démonstration. — Tronquons le tétraèdre T' par quatre horoboules centrées en chacun de ses sommets de sorte que l'aire de l'intersection du bord de ces horoboules avec T' soit la même; soit T le tétraèdre tronqué obtenu. Chaque face f'_i de T' devient un triangle, tronqué autour de ses sommets par un horocycle : notons f_i le “triangle” tronqué ainsi obtenu. Les recollements qui définissent G' respectent ces horocycles; donc le tétraèdre tronqué se recolle en une variété compacte à bord. Son bord est isométrique au quotient d'une horosphère par un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, formé d'éléments paraboliques et le complémentaire de l'intérieur de G dans G' est isométrique au quotient de l'horoboule par ce même groupe : G' est donc une variété hyperbolique complète.

La description suivante d'une fibration de la variété G sur le cercle est due à Christine Lescop. Remarquons tout d'abord que G' n'est pas orientable.

Toutes les arêtes de T' sont identifiées en une seule dans G' ; soit A l'intersection avec G de l'image d'une arête de T' dans G' et soit N un voisinage régulier de rayon constant de l'arête A dans G . La préimage \tilde{N} de N dans T est la réunion de six secteurs coniques autour des arêtes de T ; soit T'' le complémentaire de l'intérieur de ces 6 secteurs dans T .

Considérons deux faces f_1 et f_3 de T qui ne sont pas identifiées par le recollement. Soit F_0 la réunion de f_1 , f_3 et du bord du secteur conique de N autour de l'arête commune aux faces f_1 et f_3 . Soit F_1 la surface dans T'' construite de la même façon que F_0 à partir des deux faces opposées f_2 , f_4 . Chacune des surfaces F_0 et F_1 est un octogone dont les côtés sont alternativement contenus dans la partie cuspidale de T'' et dans le bord d'un secteur conique de N .

Choisissons une “fibration” sur l'intervalle $[0, 1]$ de T'' qui envoie F_0 sur 0 et F_1 sur 1 et qui a pour fibres des octogones F_t , dont les côtés intersectent alternativement la partie cuspidale de T'' et les bords des secteurs coniques contenant F_0 et F_1 .

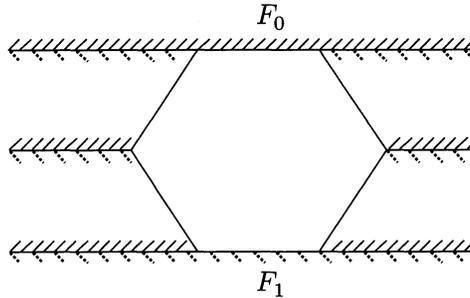
Cette fibration passe au quotient dans la variété obtenue en recollant T'' en une application f à valeurs dans $\{[0, 1] \mid 0 = 1\} \simeq S^1$; l'application f est une submersion au-dessus de tous les points de l'intervalle $]0, 1[$.

Étudions l'application f près du tube N (que l'on voit comme un cæmber), homéomorphe au produit d'un hexagone par l'intervalle $[0, 1]$. A homéomorphisme près, l'application f est constante sur les fibres de cette structure produit : il suffit pour l'étudier, de considérer sa restriction au bord de l'hexagone.

Cet hexagone étant identifié avec l'hexagone régulier $H \subset \mathbb{C}$ de sommets $\pm 2/\sqrt{3}$, $\pm e^{i\pi/3}2/\sqrt{3}$ et $\pm e^{2i\pi/3}2/\sqrt{3}$, l'application f dans un voisinage de ∂H vaut, après une isotopie :

$$f(x, y) \equiv y, \text{ mod } 1.$$

Figure 9-1



Prolongeons f à l'intérieur de $N \simeq H \times [0, 1]$ par l'application qui est constante sur les fibres $p \times [0, 1]$ et qui vaut, en restriction à H :

$$f(x, y) \equiv y, \text{ mod } 1.$$

L'application obtenue est une fibration sur le cercle.

Si on considère les orientations des arêtes du bord de F_0 lors du recollement, on voit que la fibre est un tore à un trou Σ . Ceci termine la démonstration de la proposition 9.1.1. □

Complément. — La variété G' est décrite à difféomorphisme près par la classe d'isotopie de sa monodromie τ ; puisque G' n'est pas orientable, cette monodromie renverse l'orientation de Σ . Le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes du tore percé Σ est isomorphe à $GL_2(\mathbb{Z})$ (cf. [FLP]). Calculons maintenant la matrice qui représente τ .

La surface Σ est homéomorphe au quotient de l'octogone F_0 où on identifie par translation les côtés parallèles aux axes (ceux-ci sont des composantes de $\partial\tilde{N} \cap F_0$); soient e_1 et e_2 les deux courbes décrites dans la figure 9-2.

On a alors : $\tau(e_1) = e_2$ et $\tau(e_2) = e_1 + e_2$.

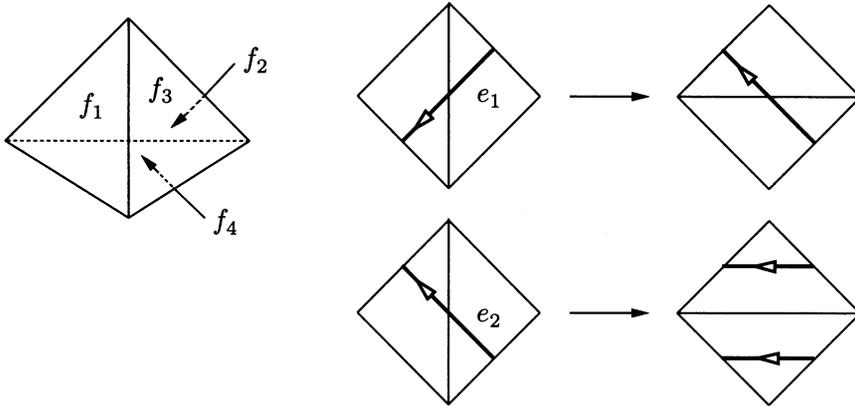


Figure 9-2

Donc la monodromie τ est représentée par la matrice :

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La revêtement des orientations \tilde{G}' de G' est aussi une variété hyperbolique. C'est une variété fibrée sur le cercle avec pour monodromie :

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la monodromie du complémentaire du noeud de 8 (cf. [Thu1]).

9.2 Le dodécaèdre régulier à angles droits

Nous allons maintenant décrire un exemple, dû à Thurston, d'une variété compacte hyperbolique et fibrée sur le cercle. Cet exemple repose sur l'existence dans l'espace hyperbolique d'un dodécaèdre régulier à angles droits, exhibé pour la première fois par V. Schlegel en 1883 [Schl, p. 444].

On raisonne toujours dans le modèle de Riemann \mathbb{D}^3 . Considérons, pour $0 < r \leq 1$, un dodécaèdre régulier euclidien D_r dont les sommets sont contenus dans la sphère euclidienne de rayon r centrée à l'origine.

L'enveloppe convexe des sommets de D_r pour la métrique hyperbolique est un dodécaèdre hyperbolique régulier : ses angles dièdres sont tous égaux.

Pour r très petit, les angles sont proches des angles du dodécaèdre régulier euclidien, qui sont supérieurs à $\pi/2$; pour $r = 1$, les angles dièdres sont égaux à $\pi/3$, par le même argument que dans le cas du tétraèdre régulier. Par continuité, il existe donc un dodécaèdre régulier hyperbolique D dont les angles dièdres sont tous égaux à $\pi/2$. Signalons que le dodécaèdre d'angles $\pi/5$

donne aussi par recollement une variété hyperbolique, mais qui n'est pas fibrée (cf. [KAG]).

Combinatoirement, le dodécaèdre D est isomorphe à un cube auquel on a rajouté les médianes des faces parallèles, comme dans la figure 9-3. Identifions alors les faces de D par les isométries qui donnent le tore T^3 à partir du cube.

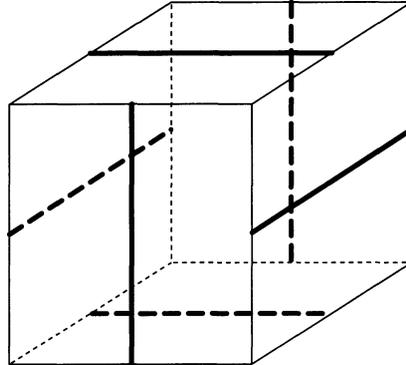


Figure 9-3

On obtient une variété W homéomorphe à T^3 , qui est localement isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , sauf le long de l'entrelacs à trois composantes B égal à l'image des médianes de C : le long des composantes de cet entrelacs, la variété W est isométrique au quotient d'un demi-espace hyperbolique par la rotation d'angle π autour d'une géodésique. C'est un exemple de variété hyperbolique à singularités coniques d'angle π .

La variété W admet un revêtement W' ramifié le long de B qui est une vraie variété hyperbolique. Une manière de voir cela est d'invoquer le théorème suivant de A. Selberg : tout sous-groupe de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ de type fini possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion [Sel]. On peut aussi construire "à la main" une tour finie de revêtements de W , ramifiés et d'indice 2, en haut de laquelle la préimage de l'entrelacs B est dessingularisée.

D. Sullivan montre dans [Su1] que la variété W' est fibrée sur le cercle (de plusieurs manières différentes). Remarquons d'abord que l'entrelacs B est équivalent à la réunion des trois axes de coordonnées de $T^3 \simeq W$, mis en position générale. Considérons ensuite une fibration linéaire de T^3 sur le cercle dont les fibres sont transverses à l'entrelacs B et intersectent chaque composante de B : cette fibration de W se relève alors automatiquement en une fibration de la variété W' sur le cercle.

APPENDICE

Les laminations géodésiques

Soit S une surface compacte et de caractéristique d'Euler strictement négative dont nous identifions l'intérieur au quotient \mathbb{H}^2/Γ du demi-plan \mathbb{H}^2 par un groupe fuchsien Γ . Dans cet appendice, nous allons démontrer les propriétés des *laminations géodésiques mesurées* sur \mathbb{H}^2/Γ que nous avons utilisées dans les chapitres précédents. Dans les sections A.1 et A.2, nous décrirons l'allure locale d'une lamination géodésique mesurée. Dans la section A.3, nous définirons une correspondance entre les laminations géodésiques mesurées sur \mathbb{H}^2/Γ et certaines mesures Γ -invariantes sur $M(S)$, l'espace des paires de points distincts de $\partial\mathbb{H}^2$; cette correspondance nous permettra d'introduire une topologie sur l'espace $\mathcal{ML}(S)$ des laminations géodésiques mesurées et de définir la fonction "nombre d'intersection". Dans le chapitre 6, nous avons utilisé une propriété de continuité pour cette fonction dans un cas particulier; nous démontrerons cette propriété dans la section A.4.

Dans [CB], on trouve une présentation des laminations géodésiques sur les surfaces compactes qui a influencé celle donnée ici; le lecteur peut aussi consulter [Pe]. Signalons que les laminations géodésiques sur une surface hyperbolique sont un cas particulier des *courants géodésiques* qui sont étudiés dans [Bo].

A.1 Les laminations géodésiques

Définition. — Une géodésique *complète* de la surface \mathbb{H}^2/Γ est l'image d'une géodésique de \mathbb{H}^2 par le revêtement $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$; une géodésique de \mathbb{H}^2/Γ est *plongée* si c'est une courbe plongée. Une *lamination géodésique* de la surface \mathbb{H}^2/Γ est un compact qui est réunion disjointe de géodésiques complètes et plongées : ces géodésiques sont appelées les *feuilles* de la lamination. On note $\mathcal{L}(S)$ l'ensemble des laminations géodésiques.

Remarque. — D'après la définition, si $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ est une lamination géodésique, tout fermé de λ qui est réunion de géodésiques complètes est une lamination. Un fermé de λ avec cette propriété est appelé une *sous-lamination* de λ .

Soit $\text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ le projectifié du fibré tangent unitaire $T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ de \mathbb{H}^2/Γ ; il existe sur le projectifié $\text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ un feuilletage canonique \mathcal{F} , le *feuilletage géodésique*.

Si λ est une lamination géodésique, par chaque point de λ , il passe une unique géodésique contenue dans λ . L'application qui associe à un point $p \in \lambda$ la direction tangente à la feuille passant par p définit une application $\mathcal{D} : \lambda \rightarrow \text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$. L'image $\mathcal{D}(\lambda)$ de cette application est un ensemble invariant du feuilletage géodésique : toute feuille de \mathcal{F} qui rencontre $\mathcal{D}(\lambda)$ est contenue dans $\mathcal{D}(\lambda)$.

Fait A.1.1. — L'application \mathcal{D} est continue.

Démonstration. — Rappelons que le paramétrage d'une géodésique varie continûment en fonction des conditions initiales; donc, comme λ est un fermé, réunion de géodésiques complètes, si (p_i) est une suite tendant vers un point p et si les directions $\mathcal{D}(p_i)$ convergent vers une direction d au point p , alors la géodésique passant par p dans la direction d est contenue dans λ . Puisque la seule géodésique contenue dans λ passant par le point p est celle qui passe dans la direction $\mathcal{D}(p)$, on a : $\mathcal{D}(p) = \lim \mathcal{D}(p_i)$. Donc \mathcal{D} est continue. \square

L'application $\mathcal{D} : \lambda \rightarrow \text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ est injective et continue. Donc, puisque λ est compacte, \mathcal{D} est un homéomorphisme sur son image.

Corollaire A.1.2. — Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique; alors λ est un fermé propre.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons que la lamination λ soit égale à \mathbb{H}^2/Γ ; alors, en particulier, la surface \mathbb{H}^2/Γ est compacte. Le champ de directions $p \rightarrow \mathcal{D}(p)$ définit une section continue du fibré $\text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$: c'est impossible pour une surface compacte de caractéristique d'Euler strictement négative. \square

Corollaire A.1.3. — Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique; alors l'intérieur de λ est vide.

Démonstration. — La préimage $\tilde{\lambda}$ de λ dans le revêtement universel \mathbb{H}^2 est un fermé Γ -invariant, qui est réunion de géodésiques disjointes. L'intérieur de λ est vide si et seulement si celui de $\tilde{\lambda}$ l'est.

Raisonnons par l'absurde pour montrer le corollaire A.1.3 : soit $k \subset \tilde{\lambda}$ un arc géodésique transverse à une feuille ℓ de $\tilde{\lambda}$. La réunion des feuilles ℓ_p de $\tilde{\lambda}$ passant par un point $p \in k$ est un rectangle R , bordé par les deux feuilles de $\tilde{\lambda}$ qui passent par les extrémités de k . Ces deux feuilles ont au moins deux

de leurs bouts dans $\overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}^2$ qui sont des points distincts b_1 et b_2 . Alors, un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 est entièrement contenu dans le rectangle R . Il suffit, pour voir cela, de considérer un élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma$ dont un point fixe est contenu dans l'intervalle $]b_1b_2[$; alors, le translaté d'un domaine fondamental quelconque de Γ par une puissance suffisamment grande de γ est entièrement contenu dans R . Mais dans ce cas, la lamination géodésique λ est égale à \mathbb{H}^2/Γ , ce qui est impossible d'après le corollaire A.1.2. \square

Lemme A.1.4. — *Soit ℓ une feuille non compacte d'une lamination géodésique λ ; alors les points d'accumulation de chaque demi-feuille de ℓ forment une sous-lamination de λ .*

Démonstration. — Soit ℓ^+ une demi-feuille de ℓ ; soit (p_i) une suite infinie dans ℓ^+ qui tend vers un point $p \in \lambda$. Notons pour $T > 0$, et pour tout point $q \in \lambda$, $(q \pm T)$ le couple de points à distance T de q sur la feuille de λ passant par q . Alors le couple de points $(p \pm T)$ est limite de la suite infinie $(p_i \pm T)$. Donc tout point de la feuille passant par p est point d'accumulation de ℓ^+ : les points d'accumulation de ℓ^+ forment une sous-lamination de λ . \square

La topologie de Hausdorff sur $\mathcal{L}(S)$.

Si X est un espace métrique localement compact, l'ensemble $\mathcal{K}(X)$ des compacts de X est muni de la distance de Hausdorff définie par :

$$d(Y, Y') = \inf\{\varepsilon \mid Y \subset N_\varepsilon(Y') \text{ et } Y' \subset N_\varepsilon(Y)\},$$

où $N_\varepsilon(Y)$ désigne l'ensemble des points de X dont la distance à Y est inférieure à ε . C'est une distance pour laquelle l'espace $\mathcal{K}(X)$ est localement compact; si X est compact, $\mathcal{K}(X)$ l'est aussi (cf. [Gro]).

Proposition A.1.5. — *Muni de la distance de Hausdorff, l'espace des laminations géodésiques $\mathcal{L}(S)$ est compact.*

Démonstration. — Nous allons d'abord montrer que l'espace $\mathcal{L}(S)$ est borné dans $\mathcal{K}(\mathbb{H}^2/\Gamma)$. C'est bien sûr le cas lorsque la surface \mathbb{H}^2/Γ est compacte; lorsque elle est seulement de volume fini, ça résulte du lemme suivant.

Lemme A.1.6. — *Soit \mathbb{H}^2/Γ une surface de volume fini; alors il existe un compact de \mathbb{H}^2/Γ qui contient toutes les laminations géodésiques.*

Démonstration. — Soit C un cusp de \mathbb{H}^2/Γ (cf. section 1.1); quitte à conjuguer le groupe Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, le générateur du groupe fondamental de ce cusp agit sur \mathbb{H}^2 par la translation $z \rightarrow \gamma(z) = z + 1$. Alors, le cusp C est égal au quotient d'un demi-espace $\tilde{C} = \{y \geq y_0\}$ par cette translation. Si λ est une lamination géodésique et si ℓ est une feuille de la préimage $\tilde{\lambda}$ de λ dans \mathbb{H}^2 , l'intersection $\ell \cap C$ est compacte puisque λ est compacte : sinon, ce serait une droite verticale et sa projection sur \mathbb{H}^2/Γ ne serait pas bornée.

Donc ℓ est un demi-cercle orthogonal à l'axe des x . De plus, la géodésique ℓ est disjointe de tous ses translatés par le groupe Γ , en particulier de la géodésique $\gamma(\ell)$: donc le rayon du demi-cercle ℓ est inférieur ou égal à $1/2$. On en déduit que la lamination λ n'intersecte pas le cusp, quotient du demi-plan $\{y \geq \sup\{y_0, 1/2\}\}$ par la translation γ .

Alors, le complémentaire de la réunion de ces cusps dans \mathbb{H}^2/Γ est un compact qui contient toutes les laminations géodésiques de $\mathcal{L}(S)$. \square

Pour démontrer que $\mathcal{L}(S)$ est compact pour la distance de Hausdorff, il nous suffit donc de montrer $\mathcal{L}(S)$ est fermé dans $\mathcal{K}(\mathbb{H}^2/\Gamma)$. Soit (λ_i) une suite de laminations géodésiques qui converge dans $\mathcal{K}(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ vers un compact λ . Quitte à extraire une sous-suite, les fermés $\mathcal{D}(\lambda_i)$ convergent vers un compact K dans $\mathcal{K}(\text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma))$, puisque $\mathcal{K}(\text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma))$ est localement compact pour la distance de Hausdorff : la limite K est un fermé invariant du feuilletage géodésique \mathcal{F} . Comme la projection $\pi : \text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ décroît la distance, on a : $\pi(K) = \lambda$.

Pour montrer le lemme A.1.6, il nous faut voir que λ est une lamination géodésique ; ceci équivaut à montrer que la projection π restreinte à K est injective. Si la restriction $\pi|_K$ n'est pas injective, il existe deux géodésiques de λ qui passent par un même point en faisant un angle non nul en ce point ; donc d'après la définition de la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}(\text{PT}^1(\mathbb{H}^2/\Gamma))$, il existe pour tout i suffisamment grand, deux géodésiques de λ_i avec la même propriété. Ceci contredit que les fermés λ_i sont des laminations géodésiques. \square

Nous allons maintenant interpréter différemment les laminations géodésiques et la convergence de Hausdorff.

La préimage $\tilde{\lambda}$ dans \mathbb{H}^2 d'une lamination géodésique λ est un fermé, réunion de géodésiques disjointes. Une géodésique (non orientée) ℓ de \mathbb{H}^2 est déterminée de manière unique par ses deux bouts qui forment une paire de points distincts $b(\ell)$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}^2$. Notons $M(S)$ l'espace des paires de points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$: $M(S)$ est homéomorphe à un ruban de Möbius ouvert sur lequel le groupe Γ agit. La lamination géodésique détermine un sous-ensemble $b(\lambda)$ de $M(S)$, Γ -invariant, défini comme l'ensemble des extrémités des géodésiques de $\tilde{\lambda}$.

L'application b qui associe à toute géodésique de \mathbb{H}^2 ses deux bouts est continue et $\tilde{\lambda}$ est un fermé de \mathbb{H}^2 : on en déduit que $b(\lambda)$ est fermé (i).

Le fait que λ soit une lamination géodésique impose la restriction suivante sur le fermé $b(\lambda)$: deux points distincts de $b(\lambda)$ ne sont jamais *enlacés* (ii), c'est-à-dire que leurs extrémités n'alternent pas sur le bord $\partial\mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{R}}$.

Puisque λ est compacte, aucune feuille de $\tilde{\lambda}$ n'a l'un de ses bouts entièrement contenu dans un relevé d'un cusp de \mathbb{H}^2/Γ ; autrement dit, aucun point de $b(\lambda)$ n'a l'une de ses coordonnées égale au point fixe d'un élément parabolique de Γ (iii).

Réciproquement, si un fermé Γ -invariant $F \subset M(S)$ vérifie les trois propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessus, on voit facilement que l'ensemble de \mathbb{H}^2 formé des points sur les géodésiques dont les extrémités sont dans F se projette dans \mathbb{H}^2/Γ sur une lamination géodésique de \mathbb{H}^2/Γ .

Nous utiliserons fréquemment dans la suite cette correspondance entre laminations géodésiques et fermés Γ -invariants de $M(S)$ qui vérifient les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Par exemple, le corollaire A.1.3 se traduit en ces termes par le fait que $b(\lambda)$ est d'intérieur vide. On a même :

Fait A.1.7. — Soit $\lambda \in \mathcal{L}(S)$ une lamination géodésique; alors le fermé $b(\lambda)$ est totalement discontinu.

Démonstration. — Soit $C(p)$ la composante connexe d'un point $p \in b(\lambda)$; soit $\tilde{C}(p)$ la préimage de $C(p)$ dans le revêtement des orientations de $M(S)$ égal à $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \Delta$. Si on a : $C(p) \neq p$, alors la projection de $\tilde{C}(p)$ sur l'un des facteurs \mathbb{R} contient un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$. Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément représenté par une géodésique de \mathbb{H}^2/Γ qui s'auto-intersecte transversalement et qui a un point fixe $q \in I$; alors la feuille de $C(p)$ dont un bout est q ne peut se plonger dans \mathbb{H}^2/Γ par la projection de revêtement. Ceci contredit que λ est une lamination géodésique.

Donc la composante connexe de chaque point $p \in b(\lambda)$ est réduite à p . \square

Le fait précédent entraîne que tout compact de $b(\lambda) \subset M(S)$ possède un voisinage compact dont la frontière est disjointe de $b(\lambda)$.

Le résultat suivant interprète la convergence de Hausdorff en termes de la topologie de $M(S)$.

Fait A.1.8. — Soit (λ_i) une suite de laminations géodésiques qui converge vers une lamination géodésique λ pour la topologie de Hausdorff. Alors, la suite $(b(\lambda_i))$ converge vers le fermé $b(\lambda)$ pour la topologie de Chabauty sur $M(S)$.

Définition. — On dit que la suite $(b(\lambda_i)) \subset M(S)$ converge pour la topologie de Chabauty vers $b(\lambda)$ lorsque pour tout compact $K \subset M(S)$ tel que l'intersection $b(\lambda) \cap K$ est contenue dans l'intérieur de K , la suite $(b(\lambda_i) \cap K)$ converge vers $b(\lambda) \cap K$ pour la topologie de Hausdorff sur les compacts de K .

Démonstration. — Supposons que la suite (λ_i) converge vers λ pour la topologie de Hausdorff. Soit $K \subset M(S)$ un voisinage compact d'un point $p \in b(\lambda)$ dont la frontière est disjointe de $b(\lambda)$ (cf. fait A.1.7); il existe un compact de \mathbb{H}^2 qui rencontre toutes les géodésiques de \mathbb{H}^2 qui ont leurs bouts dans K . La convergence pour la topologie de Chabauty des intersections $b(\lambda_i) \cap K$ découle alors de ce que l'application qui à une géodésique associe ses bouts est continue. \square

Remarque. — La réciproque du fait A.1.8 est aussi vraie, mais nous n'en aurons pas besoin.

A.2 La géométrie du complémentaire d'une lamination géodésique

Nous avons vu qu'une lamination géodésique sur une surface était d'intérieur vide; dans cette section, nous allons analyser les composantes connexes du complémentaire de λ dans \mathbb{H}^2/Γ .

Proposition A.2.1. — *Le complémentaire de λ dans \mathbb{H}^2/Γ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes; le complété de chacune d'elles pour la distance induite par la métrique riemannienne est une surface à bord géodésique, complète et de volume fini.*

Démonstration. — Soit U une composante du complémentaire de λ et soit \tilde{U} une composante connexe de la préimage de U dans \mathbb{H}^2 .

Fait A.2.2. — *L'ouvert \tilde{U} est convexe : le segment géodésique de \mathbb{H}^2 qui joint deux points arbitraires de \tilde{U} est entièrement contenu dans \tilde{U} .*

Démonstration. — Si x et y sont deux éléments de \tilde{U} , le segment géodésique qui les joint, s'il n'est pas entièrement contenu dans \tilde{U} , intersecte transversalement une géodésique ℓ de $\tilde{\lambda}$. Mais alors x et y sont dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{H}^2 - \ell$ et sont donc aussi dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$. \square

En particulier, chaque composante de la préimage de $\mathbb{H}^2/\Gamma - \lambda$ est simplement connexe; donc, par la théorie des revêtements, le groupe fondamental de chaque composante du complémentaire de λ dans \mathbb{H}^2/Γ s'injecte dans Γ .

Corollaire A.2.3. — *L'adhérence de \tilde{U} dans \mathbb{H}^2 est une surface convexe à bord géodésique.*

Démonstration. — Soit p un point de la frontière de \tilde{U} dans \mathbb{H}^2 ; soit ℓ la feuille de $\tilde{\lambda}$ qui passe par le point p . Nous allons montrer que la feuille ℓ est entièrement contenue dans la frontière de \tilde{U} . Soit $o \in \tilde{U}$; le segment géodésique op intersecte $\tilde{\lambda}$ uniquement au point p . Pour tout point $q \in \ell$, le segment $[oq]$ est contenu dans \tilde{U} , car sinon il existerait une feuille de $\tilde{\lambda}$ qui intersecte transversalement la feuille ℓ . Alors, d'après le fait A.2.2, si $x \in [op]$ et $y \in [oq]$, le segment xy est contenu dans \tilde{U} . Par continuité, le segment pq est contenu dans l'adhérence \bar{U} de \tilde{U} , donc dans la frontière de \bar{U} : ainsi, $\ell \subset \bar{U}$. La surface \bar{U} est à bord géodésique. Elle est convexe et complète. \square

Soit Γ_U le stabilisateur de \tilde{U} dans Γ ; le quotient \bar{U}/Γ_U est une surface complète à bord géodésique, isométrique au complété $C(U)$ de U pour la distance associée à la métrique riemannienne.

Le volume de U est fini puisque celui de \mathbb{H}^2/Γ l'est. Les géodésiques dans la frontière de \tilde{U} sont en nombre au plus dénombrable, puisqu'elles définissent des intervalles d'intérieurs disjoints de $\bar{\mathbb{R}}$. Donc le volume de $C(U)$, égal à celui de U , est fini. Ceci démontre la deuxième partie de la proposition A.2.1.

La surface $D(U)$, double de $C(U)$, est une surface complète, de volume fini et de courbure constante égale à -1 . Le volume de $C(U)$ est donc supérieur à 2π d'après la formule de Gauss-Bonnet; ainsi le volume de $C(U)$, qui est aussi le volume de U est minoré par π . Donc, le complémentaire de λ dans \mathbb{H}^2/Γ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Ceci termine la démonstration de la proposition A.2.1. □

Définition. — Une géodésique de $\tilde{\lambda}$ dans l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire de $\tilde{\lambda}$ est dite *isolée d'un côté*. L'image d'une telle géodésique dans la surface \mathbb{H}^2/Γ est aussi dite *isolée d'un côté*.

Corollaire A.2.4. — Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique. Alors λ ne contient qu'un nombre fini de feuilles qui sont isolées d'un côté; la réunion de ces feuilles est dense dans λ .

Démonstration. — D'après la proposition A.2.1, le complété $C(U)$ de chaque composante U de $\mathbb{H}^2/\Gamma - \lambda$ est une surface complète, de volume fini et à bord géodésique. Toute composante du bord de $C(U)$ correspond à une géodésique de λ qui est isolée d'un côté; par définition, toute feuille de λ , isolée d'un côté est de ce type. Il nous suffit donc de voir que la surface $C(U)$ n'a qu'un nombre fini de composantes de bord.

Toute feuille non compacte $\ell \subset \partial C(U)$ a chacun de ses bouts contenus dans un bout du double $D(U)$ qui est stabilisé par l'involution canonique; cette involution est une isométrie qui renverse l'orientation. Les bouts de $D(U)$ sont des cusps puisque $D(U)$ est de volume fini. Considérons un cusp $C \subset D(U)$ qui intersecte ℓ , et qui est isométrique au quotient d'un demi-plan $\{y \geq y_0\}$ par la translation $z \rightarrow z + 1$; l'isométrie du double $D(U)$ à \mathbb{H}^2 se relève en la symétrie par rapport à l'axe des y . Ceci entraîne que l'involution de $D(U)$ fixe exactement deux demi-géodésiques proprement plongées dans le cusp C . Donc, chaque bout de $D(U)$ contient au plus deux géodésiques non compactes de la frontière de $C(U)$. Puisque le nombre de bouts de $D(U)$ est fini, le nombre de composantes non compactes dans la frontière de $C(U)$ l'est aussi.

Les composantes compactes de la frontière de $C(U)$ donnent des géodésiques fermées, disjointes et sans points doubles sur $D(U)$; elles sont donc en nombre fini puisque $D(U)$ est de volume fini. On a démontré la première partie du corollaire A.2.4.

Pour montrer la deuxième partie, considérons un arc géodésique k transverse à λ et qui contient p ; l'intersection $k \cap \lambda$ est un fermé d'intérieur vide de k d'après le corollaire A.1.3. Arbitrairement près de p , il existe donc un point q dans λ , extrémité d'un intervalle $\kappa \subset k$ du complémentaire de λ . L'intervalle κ se relève dans \mathbb{H}^2 en un arc dont l'intérieur est contenu dans une composante du complémentaire de $\tilde{\lambda}$; l'extrémité \tilde{q} de cet intervalle appartient alors à une feuille de $\tilde{\lambda}$ isolée d'un côté. Le point q appartient donc à une feuille de λ isolée d'un côté.

Ceci termine la démonstration du corollaire A.2.4. \square

Voici une propriété des feuilles compactes dans les laminations géodésiques que nous utiliserons dans la section suivante :

Fait A.2.5. — Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique; soit $\ell \subset \lambda$ une géodésique fermée. Alors, toute feuille de λ suffisamment proche de ℓ spirale sur ℓ .

Définition. — On dit qu'une feuille ℓ' de λ spirale sur la géodésique fermée ℓ lorsque, dans le revêtement universel \mathbb{H}^2 , un relevé $\tilde{\ell}'$ de ℓ' a un bout en commun avec un relevé $\tilde{\ell}$ de ℓ .

Démonstration. — Si ℓ' est une feuille proche de ℓ , l'un de ses relevés $\tilde{\ell}'$ est une feuille proche d'un relevé $\tilde{\ell}$ de ℓ . Supposons en raisonnant par l'absurde qu'il existe une suite de feuilles $\tilde{\ell}_i$ dans λ qui tend vers $\tilde{\ell}$ dans \mathbb{H}^2 et telle que chaque feuille $\tilde{\ell}_i$ ait ses deux bouts distincts des bouts a et b de $\tilde{\ell}$; notons $\gamma \in \Gamma$ l'élément qui laisse le relevé $\tilde{\gamma}$ invariant. Les deux bouts de $\tilde{\ell}_i$ dans $\partial\mathbb{H}^2$ tendent vers les deux points a et b . En particulier la distance entre les projections orthogonales des deux bouts de $\tilde{\ell}_i$ sur $\tilde{\ell}$ tend vers l'infini avec i . Mais dès que cette distance est supérieure à la distance de translation de γ sur $\tilde{\ell}$, les géodésiques $\tilde{\ell}_i$ et $\gamma(\tilde{\ell}_i)$ s'intersectent. Ceci contredit que la feuille ℓ_i est une courbe plongée de \mathbb{H}^2/Γ . \square

A.3 Les laminations géodésiques mesurées

Définition. — Une lamination géodésique mesurée est la donnée d'une mesure transverse à une lamination géodésique $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$: c'est-à-dire la donnée pour chaque intervalle $\kappa \simeq [0, 1]$ plongé dans S transversalement à λ , d'une mesure de Borel λ_κ positive, de masse totale finie, et qui vérifie :

- (i) le support de λ_κ est égal à $\lambda \cap \kappa$;
- (ii) si κ et κ' sont deux arcs, homotopes parmi les arcs plongés transverses à λ , par une homotopie telle que les extrémités restent dans la même feuille de λ ou dans la même composante du complémentaire de λ , alors $\lambda_\kappa(\kappa) = \lambda_{\kappa'}(\kappa')$.

Exemple. — Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique qui est réunion de géodésiques fermées. La donnée d'un nombre strictement positif pour chaque composante de λ détermine de manière unique une lamination géodésique mesurée dont le support est λ : sur un arc κ transverse à λ , il suffit de définir comme mesure la somme des masses de Dirac aux points d'intersection avec λ , de poids le nombre positif associé à la composante. Une lamination géodésique mesurée de ce type sera appelée une *multicourbe* : les multicourbes sont donc les laminations géodésiques mesurées dont le support est une réunion de feuilles compactes.

Dans la section A.1, nous avons défini une correspondance entre les laminations géodésiques sur \mathbb{H}^2/Γ et certains fermés Γ -invariants contenus dans $M(S)$; il existe une correspondance analogue pour les laminations géodésiques mesurées.

Soit λ une lamination géodésique telle que le fermé $b(\lambda) \subset M(S)$ soit le support d'une mesure de Radon ν (c'est-à-dire une mesure σ -additive, finie sur les compacts) qui soit invariante par Γ . Nous allons construire à partir de ν une lamination géodésique de support λ . Si $\kappa \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ est un arc transverse à λ , choisissons un relevé $\tilde{\kappa}$ de cet arc dans \mathbb{H}^2 . Observons que si la longueur de κ est suffisamment petite, chaque géodésique de $\tilde{\lambda}$ intersecte $\tilde{\kappa}$ en au plus un point. Pour tout arc κ transverse à λ , il existe donc des points contenus dans $\tilde{\kappa} - (\tilde{\kappa} \cap \tilde{\lambda})$ qui découpent $\tilde{\kappa}$ en un nombre fini d'arcs $\tilde{\kappa}_i$ qui ont chacun la propriété d'intersecter chaque feuille de $\tilde{\lambda}$ au plus une fois. La restriction $b_i = b|(\tilde{\kappa}_i \cap \tilde{\lambda})$ est un homéomorphisme de $\tilde{\kappa}_i \cap \tilde{\lambda}$ sur un compact de $b(\lambda)$; l'image réciproque de la mesure ν par b_i définit une mesure de Borel sur $\tilde{\kappa}_i$, supportée sur $\tilde{\kappa}_i \cap \tilde{\lambda}$. Les mesures ainsi obtenues sur les arcs $\tilde{\kappa}_i$ se recollent en une mesure sur $\tilde{\kappa} \simeq \kappa$; on vérifie que c'est une mesure transverse à λ .

Réciproquement, soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique mesurée; nous allons définir une mesure Γ -invariante sur $M(S)$ supportée sur $b(\lambda)$. Soient I et J deux intervalles fermés disjoints contenus dans $\partial\mathbb{H}^2$; l'ensemble des géodésiques de $\tilde{\lambda}$ qui joignent un point de I à un point de J contient deux feuilles "extrémales" ℓ_1 et ℓ_2 , qui ont la propriété que toutes les feuilles de $\tilde{\lambda}$ dont les bouts appartiennent à $I \times J$ sont "entre" ℓ_1 et ℓ_2 . Soit $\tilde{\kappa} \subset \mathbb{H}^2$ un segment géodésique qui joint ℓ_1 à ℓ_2 ; l'application $b|_{\tilde{\kappa}}$ est un homéomorphisme de $\tilde{\kappa} \cap \tilde{\lambda}$ sur le compact $(I \times J) \cap b(\lambda)$. L'image directe de la mesure $\lambda_{\tilde{\kappa}}$ par cet homéomorphisme est une mesure de Borel sur $(I \times J) \subset M(S)$ supportée sur $(I \times J) \cap b(\lambda)$. Les mesures ainsi construites se recollent en une mesure Γ -invariante sur $M(S)$ supportée sur $b(\lambda)$.

Le topologie de l'espace des laminations géodésiques mesurées.

Nous noterons $\mathcal{ML}(S)$ l'ensemble des laminations géodésiques mesurées sur la surface \mathbb{H}^2/Γ ; d'après ce qui a été dit une lamination géodésique mesurée n'est rien d'autre qu'une mesure positive Γ -invariante sur $M(S)$ dont le support est une lamination (cf. A.1). Nous munissons cet espace de la topologie induite par la *topologie vague* sur l'espace des mesures de Radon sur $M(S)$; nous appellerons encore cette topologie *la topologie vague*.

L'espace des laminations mesurées porte un action des réels positifs qui consiste à multiplier une mesure par une constante non nulle. Le quotient de $\mathcal{ML}(S)$ par cette action est appelé *l'espace projectif des laminations géodésiques mesurées*: nous le noterons $\mathcal{PML}(S)$ et nous le munirons de la topologie quotient de la topologie vague.

Proposition A.3.1. — *Toute suite dans $\mathcal{PML}(S)$ contient une sous-suite convergente.*

Démonstration. — Soit (λ_i) une suite dans $\mathcal{ML}(S)$; d'après la proposition A.1.5, nous pouvons supposer que les supports des laminations mesurées λ_i convergent pour la topologie de Hausdorff vers une lamination géodésique $\lambda \in \mathcal{L}(S)$.

D'après le lemme A.1.6, les laminations géodésiques de $\mathcal{ML}(S)$ sont toutes contenues dans un même compact de \mathbb{H}^2/Γ . Donc il existe un ensemble fini d'intervalles fermés disjoints $(I_1, J_1), \dots, (I_k, J_k)$ tels que les feuilles de toutes les laminations géodésiques ont un relevé à \mathbb{H}^2 dont les bouts appartiennent à l'intérieur de l'un des rectangles $I_j \times J_j$. Posons :

$$\frac{1}{\alpha_i} = \sum_j \lambda_i(I_j \times J_j).$$

Quitte à extraire une sous-suite, les mesures $\alpha_i \lambda_i$ convergent vaguement sur chacun des produits $I_j \times J_j$, puisqu'elles induisent sur ces intervalles des mesures de masse totale inférieure à 1. Donc les mesures $\alpha_i \lambda_i$ convergent dans $\mathcal{ML}(S)$ vers une mesure Γ -invariante $\bar{\lambda}$: la mesure $\bar{\lambda}$ n'est pas nulle puisque sa restriction à l'un des rectangles $I_j \times J_j$ n'est pas nulle.

D'après le fait A.1.3, le support de la mesure $\bar{\lambda}$ est contenu dans $b(\lambda) = \lim b(\lambda_i)$. Le support de la mesure $\bar{\lambda}$ est une lamination géodésique (cf. A.1). Donc, la limite des laminations géodésiques mesurées $\alpha_i \lambda_i$ est une lamination géodésique mesurée : ceci signifie que $\mathcal{PML}(S)$ est séquentiellement compact pour la topologie vague. \square

Au cours de la démonstration, nous avons remarqué :

Affirmation A.3.2. — Soit (λ_i) une suite de laminations géodésiques mesurées qui converge dans $\mathcal{PML}(S)$ vers une lamination géodésique mesurée λ ; alors le support de λ est contenu dans toute valeur d'adhérence pour la topologie de Hausdorff des supports des laminations λ_i .

Le nombre d'intersection.

Notons \mathcal{C} l'ensemble des classes de conjugaison des éléments hyperboliques de Γ . Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique mesurée et soit γ une géodésique fermée sur \mathbb{H}^2/Γ représentant la classe de conjugaison $\langle \bar{\gamma} \rangle \in \mathcal{C}$. Soit $\tilde{\gamma}$ le relevé de la géodésique γ que $\bar{\gamma}$ laisse invariant. Un domaine fondamental pour l'action de $\bar{\gamma}$ sur $\tilde{\gamma}$ est un intervalle $[a\bar{\gamma}(a)[$.

Définition. — Si la géodésique $\tilde{\gamma}$ n'est pas disjointe de $\tilde{\lambda}$ et n'est pas une feuille de $\tilde{\lambda}$, elle intersecte transversalement $\tilde{\lambda}$. La masse totale de la mesure déposée par $\tilde{\lambda}$ sur le segment $[a\bar{\gamma}(a)[$ est alors appelée le nombre d'intersection de γ et λ ; on le note $i(\lambda, \gamma)$. Lorsque la géodésique $\tilde{\gamma}$ est, ou bien disjointe de λ , ou bien une feuille de λ , on pose : $i(\lambda, \gamma) = 0$.

Nous allons définir différemment le nombre d'intersection en termes de la mesure sur $M(S)$ associée à λ . Pour cela, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle d'extrémités

les deux points fixes γ^+ et λ de $\tilde{\gamma}$; soit $J = [z, \tilde{\gamma}(z)[\subset \mathbb{R}$ un intervalle disjoint de I . Notons $\lambda(I \times J)$ la mesure du produit $I \times J$ pour la mesure sur $M(S)$ associée à λ . Puisque λ est Γ -invariante, le nombre défini ne dépend pas des choix de I et du point z .

Lemme A.3.3. — Avec les notations précédentes, on a :

$$i(\lambda, \gamma) = \lambda(I \times J).$$

Démonstration. — La géodésique $\tilde{\gamma}$ est la réunion des intervalles semi-ouverts $[\tilde{\gamma}^p(a)\tilde{\gamma}^{p+1}(a)[$. Par définition, $i(\lambda, \gamma)$ est la masse de l'ensemble F des géodésiques ℓ de $\tilde{\lambda}$ qui intersectent transversalement $[a\tilde{\gamma}(a)[$. Si on partitionne cet ensemble selon l'intervalle $\tilde{\gamma}^p(J)$ auquel appartient le bout de ℓ qui n'est pas dans I , on a donc :

$$i(\lambda, \gamma) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \lambda((I \times \tilde{\gamma}^p(J)) \cap F).$$

Puisque la mesure λ est invariante par Γ , la masse de $(I \times \tilde{\gamma}^p(J)) \cap F$ est égale à la masse des géodésiques de $\tilde{\lambda}$ qui intersectent transversalement $\tilde{\gamma}^{-p}(a)\tilde{\gamma}^{-p+1}(a)$ et qui ont un bout dans J . Donc, après resommation, on trouve : $i(\lambda, \gamma) = \lambda(I \times J)$. \square

Remarque. — Dans la section 2.3, on a associé à la lamination λ une action de Γ sur un arbre réel \mathcal{T}_λ . Il découle immédiatement de la construction de cet arbre que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a : $i(\lambda, \gamma) = \delta(\gamma)$.

La topologie du support d'une lamination géodésique mesurée.

Nous allons montrer qu'il y a certaines restrictions sur la topologie du support d'une lamination géodésique mesurée.

Définition. — Une lamination géodésique λ est *un minimal exceptionnel* si chacune de ses feuilles est non compacte et si toute demi-feuille est dense dans λ .

Proposition A.3.4. — Soit λ une lamination géodésique mesurée. Alors le support de λ est réunion disjointe d'un nombre fini de sous-laminations qui sont ou bien des géodésiques fermées, ou bien des minimaux exceptionnels.

On appelle les éléments de la décomposition ci-dessus les *composantes minimales* de λ ; ce sont aussi les composantes connexes de λ .

Démonstration. — Commençons par une propriété des feuilles compactes contenues dans le support de λ .

Lemme A.3.5. — Toute feuille compacte du support de λ est isolée dans λ .

Démonstration. — Soit γ une feuille compacte dans le support de λ . Si γ n'est pas isolée dans λ , il existe d'après le fait A.2.5 une géodésique ℓ dans $\tilde{\lambda}$ qui a un bout en commun avec une géodésique $\tilde{\gamma}$ qui relève γ . Supposons

que l'un des bouts de ℓ soit le point fixe attractif γ^+ de l'élément $\bar{\gamma}$ qui laisse $\bar{\gamma}$ invariante; soit $\ell^- \neq \gamma^-$ l'autre bout. Le compact $\gamma^+ \times [\ell^-, \gamma^-]$ est alors strictement contenu dans son translaté par $\bar{\gamma}$: c'est impossible puisque la mesure λ est invariante par $\bar{\gamma}$, finie sur les compacts et supportée sur $b(\lambda)$. \square

Considérons maintenant une feuille non compacte ℓ de λ . Les points d'accumulation d'une demi-feuille de ℓ forment une sous-lamination λ' de λ d'après le fait A.1.4.

Fait A.3.6. — *La lamination λ' est ouverte dans λ ; c'est un minimal exceptionnel.*

Démonstration. — Tout d'abord, la lamination λ' ne contient aucunes feuilles compactes d'après le lemme A.3.5.

Soit U une composante du complémentaire de la lamination géodésique λ' dans \mathbb{H}^2/Γ . Le complété $C(U)$ de U est une surface à bord géodésique d'aire finie. Chaque bout de cette surface ou bien est un cusp qui correspond à un cusp de \mathbb{H}^2/Γ , ou bien est isométrique à un ruban infini: $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid 0 \leq x \leq 1/2, y \geq y_0\}$ (corollaire A.2.4).

Raisonnons par l'absurde en supposant que λ' n'est pas ouverte dans λ : il existe alors une feuille $\ell' \subset \lambda$ proche de λ' mais disjointe. Cette feuille est contenue dans une certaine composante $U \subset C(U)$ du complémentaire de λ' et est proche d'une composante de $\partial C(U)$. Puisque cette composante de bord est non compacte, chaque bout de la feuille ℓ' pénètre nécessairement dans un bout de $C(U)$ qui est isométrique à un ruban. Donc une demi-feuille de ℓ' est asymptote à une demi-géodésique $\ell'' \subset \lambda'$ dans le bord d'un ruban de $C(U)$. En particulier si k est un arc géodésique suffisamment loin dans ce bout et qui joint les deux côtés de ce ruban, l'arc k est transverse à λ , et la mesure de l'arc k est donc strictement positive.

Considérons alors un petit arc k' transverse à λ qui coupe transversalement une infinité de fois la demi-géodésique ℓ'' . L'intersection $k' \cap U$ contient alors une infinité d'intervalles disjoints, dont la mesure est égale à celle de l'arc k , d'après la propriété d'invariance par holonomie. Mais alors la mesure de k' est infinie, ce qui est impossible.

Donc λ' est ouverte dans λ ; en particulier la feuille ℓ est contenue dans λ' et toute demi-feuille de λ' y est dense. Donc λ' est un minimal exceptionnel. \square

La finitude du nombre des composantes de λ découle de la finitude du nombre des feuilles de λ qui sont isolées d'un côté (corollaire A.2.4). Ceci termine la démonstration de la proposition A.3.4. \square

Dans la section 3.1, nous avons utilisé le résultat suivant :

Fait A.3.7. — Soit $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ une lamination géodésique qui est réunion du support d'une lamination géodésique mesurée $\bar{\lambda}$ et d'un nombre fini de géodésiques non compactes ℓ_i . Alors, chaque demi-géodésique de ℓ_i spirale sur une composante minimale de $\bar{\lambda}$.

Définition. — On dit qu'une demi-géodésique spirale sur une composante minimale $\bar{\lambda}'$ si chacun de ses relevés dans \mathbb{H}^2 a un bout en commun avec une géodésique dans la préimage de $\bar{\lambda}'$.

Démonstration. — Chaque géodésique ℓ_i est contenue dans une composante U du complémentaire de $\bar{\lambda}$ dans \mathbb{H}^2/Γ . Si une demi-géodésique de ℓ_i n'est pas entièrement contenue dans un compact $K \subset U$, elle est, soit contenue dans un bout de type ruban de $C(U)$, soit contenue dans un voisinage d'une feuille compacte de $\bar{\lambda} \cap \partial C(U)$. Dans le premier cas, elle est asymptote à un minimal exceptionnel de $\bar{\lambda}$ par le raisonnement utilisé dans le fait A.3.6; dans le deuxième cas, elle est asymptote à une géodésique fermée de $\bar{\lambda}$ (fait A.2.5).

Montrons par l'absurde qu'une demi-géodésique de ℓ_i ne peut être entièrement contenue dans un compact du complémentaire de $\bar{\lambda}$. Si c'est le cas, les points d'accumulation de cette demi-géodésique forment une sous-lamination μ de λ (lemme A.1.4), qui est disjointe de $\bar{\lambda}$. La lamination μ est alors une réunion finie de feuilles ℓ_j ; elle contient donc une "plus petite" sous-lamination μ_0 qui a la propriété que chacune de ses feuilles est dense dans μ_0 . Considérons un arc k transverse à μ_0 . Par minimalité, toute feuille passant par un point $p \in k \cap \mu_0$ repasse arbitrairement près de U ; puisque les géodésiques de μ_0 sont non compactes, on en déduit que $k \cap \mu_0$ est un fermé $F \subset k$ sans points isolés. Donc, F n'est pas dénombrable. Ceci contredit que μ_0 est réunion d'un nombre fini de géodésiques. \square

Définition. — On dit qu'une lamination géodésique mesurée $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ est arationnelle lorsque chaque composante de son complémentaire est, ou bien simplement connexe, ou bien homéomorphe à un anneau, voisinage d'un cusp de \mathbb{H}^2/Γ .

Il découle des définitions que si λ est une lamination arationnelle et si $\gamma \in \mathcal{C}$, alors le nombre d'intersection $i(\lambda, \gamma)$ n'est pas nul.

Fait A.3.8. — Le support d'une lamination arationnelle est un minimal exceptionnel.

Démonstration. — D'après le fait A.3.5, chaque feuille compacte d'une lamination géodésique mesurée est dans la frontière d'une composante du complémentaire de λ ; donc, dans la décomposition d'une lamination arationnelle λ en composantes minimales, il ne peut y avoir de feuilles compactes, par définition. Si cette décomposition a au moins deux composantes, l'une des composantes connexes du complémentaire de λ a au moins deux bouts distincts qui sont chacun contenus dans un voisinage d'une de ses composantes minimales : une telle figure contredit encore la définition. \square

Fait A.3.9. — Soit λ une lamination géodésique qui contient le support d'une lamination géodésique arationnelle $\bar{\lambda}$; alors la différence $\lambda - \bar{\lambda}$ est formée d'un nombre fini de feuilles qui sont toutes non compactes.

Démonstration. — Soit U une composante simplement connexe du complémentaire du support de $\bar{\lambda}$; alors, son complété $C(U)$ est isométrique à l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans $\bar{\mathbb{R}}$. Une feuille de λ contenue dans $C(U)$ est nécessairement non compacte et joint deux bouts distincts de $C(U)$: il ne peut y avoir qu'un nombre fini de feuilles de ce type.

Soit U une composante du complémentaire du support de $\bar{\lambda}$ qui est un anneau voisinage d'un cusp; son complété $C(U)$ est homéomorphe à un anneau dont le groupe fondamental est engendré par un élément parabolique. Il ne peut donc encore y avoir de géodésiques compactes dans cet anneau. Les deux bouts d'une feuille de λ contenue dans U sont nécessairement contenus dans des bouts de $C(U)$ qui sont de type "ruban". D'après le corollaire A.2.4, les bouts de ce type sont en nombre fini. Puisque les feuilles de $\lambda - \bar{\lambda}$ sont plongées, elles sont donc en nombre fini. \square

Définition. — On dit que la lamination géodésique mesurée μ *intersecte* la lamination géodésique mesurée λ lorsque chaque feuille du support de μ rencontre transversalement λ .

Fait A.3.10. — Soit λ une lamination géodésique mesurée arationnelle; alors, toute lamination géodésique mesurée μ dont le support est distinct de celui de λ *intersecte* λ .

Démonstration. — Si une feuille ℓ de μ est disjointe de λ , elle est contenue dans une composante du complémentaire de λ . On a vu dans la démonstration du fait A.3.9, qu'il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques plongées et disjointes dans chaque composante du complémentaire de λ et que ces géodésiques étaient nécessairement non compactes. Alors ℓ est une feuille isolée dans μ ; c'est impossible pour une feuille non compacte d'une lamination géodésique mesurée d'après la proposition A.3.4.

Puisque toute feuille de λ est dense dans λ (fait A.3.8), si une feuille de μ est contenue dans le support de λ , alors le support de λ est contenu dans celui de μ ; il lui est donc égal d'après la première partie de la démonstration. Donc, toute feuille de μ *intersecte* λ transversalement. \square

La continuité du nombre d'intersection.

Nous avons défini le nombre d'intersection entre une lamination géodésique mesurée λ et une géodésique γ . Lorsque le support de λ est une géodésique fermée avec comme poids transverse 1, le nombre d'intersection $i(\lambda, \gamma)$ n'est autre que le nombre de points d'intersection transverse entre les géodésiques λ et γ .

La fonction “nombre d’intersection” $i(\lambda, \cdot)$ se prolonge par homogénéité aux laminations dont le support est une géodésique en posant $i(\lambda, \alpha\gamma) = \alpha i(\lambda, \gamma)$.

Donc, lorsque γ_1 et γ_2 sont des laminations géodésiques mesurées dont le support est une géodésique fermée et de poids respectifs c_1 et c_2 , le nombre d’intersection $i(\gamma_1, \gamma_2)$ est égal au nombre de leurs points d’intersection transverse, multiplié par $c_1 c_2$. On appellera les laminations géodésiques de ce type des *géodésiques pondérées*.

On peut montrer que la fonction “nombre d’intersection” $i(\cdot, \cdot)$, qui est définie sur les paires de géodésiques pondérées se prolonge continûment en une fonction sur le produit $\mathcal{ML}(S) \times \mathcal{ML}(S)$ (cf. [Re]); il existe même un résultat analogue pour la fonction nombre d’intersection définie sur *l’espace des courants géodésiques de \mathbb{H}^2/Γ* (cf. [Bo]).

Nous avons utilisé dans la section 6.2 la version (très) affaiblie suivante de ces résultats.

Fait A.3.11. — Soient λ^+ et λ^- deux laminations géodésiques mesurées qui s’intersectent; soient (γ_i^+) et (γ_i^-) deux suites de géodésiques pondérées qui convergent respectivement vers λ^+ et vers λ^- dans $\mathcal{ML}(S)$. Alors on a :

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} i(\gamma_i^+, \gamma_i^-) \neq 0.$$

Démonstration. — Soit $\tilde{\ell}^+ \subset \tilde{\lambda}^+$ et $\tilde{\ell}^- \subset \tilde{\lambda}^-$ deux géodésiques qui s’intersectent transversalement. Soient I^+ et J^+ des intervalles fermés disjoints autour des bouts de ℓ^+ , I^- et J^- des intervalles fermés autour des bouts de ℓ^- tels que chaque géodésique de \mathbb{H}^2 dont les bouts sont dans $I^+ \times J^+$ intersecte transversalement chaque géodésique dont les bouts sont dans $I^- \times J^-$; choisissons ces intervalles suffisamment petits de sorte que les points d’intersection entre ces géodésiques soient tous contenus dans une boule B qui se plonge dans \mathbb{H}^2/Γ .

On a : $\lambda^+(I^+ \times J^+) > 0$ et $\lambda^-(I^- \times J^-) > 0$. On peut supposer que les extrémités des intervalles I^+ , J^+ (resp. I^- , J^-) ne sont pas des extrémités de feuilles de $\tilde{\lambda}^+$ (resp. de $\tilde{\lambda}^-$) d’après le fait A.1.7. Alors, on a :

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} i(\gamma_i^+, \gamma_i^-) \geq \lambda^-(I^- \times J^-) \lambda^+(I^+ \times J^+). \quad (1)$$

En effet, on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i^+(I^+ \times J^+) = \lambda^+(I^+ \times J^+) \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i^-(I^- \times J^-) = \lambda^-(I^- \times J^-). \quad (2)$$

On a aussi : $\gamma_i^+(I^+ \times J^+) = n_i^+ c_i^+$ et $\gamma_i^-(I^- \times J^-) = n_i^- c_i^-$, où n_i^+ (resp. n_i^-) est le nombre de composantes de la préimage de $\tilde{\gamma}_i^+$ (resp. de $\tilde{\gamma}_i^-$) dont les extrémités sont dans $I^+ \times J^+$, (resp. dans $I^- \times J^-$) et où c_i^+ (resp. c_i^-) est le poids transverse de γ_i^+ (resp. de γ_i^-).

Avec ces notations, la contribution au nombre d'intersection $i(\gamma_i^+, \gamma_i^-)$ des points d'intersection entre les supports de γ_i^+ et de γ_i^- contenus dans la boule B est égale à $c_i^+ c_i^- n_i^+ n_i^-$. Donc (2) entraîne (1).

Ceci démontre le fait A.3.11. □

BIBLIOGRAPHIE

- [Ahl1] L. Ahlfors, Finitely generated kleinian groups, *Amer. J. Math.* 86 (1964), 413–429; 87 (1965), 759.
- [Ahl2] L. Ahlfors, “Lectures on quasi-conformal mappings”, Van Nostrand 1966.
- [Bea] A. Beardon, “The geometry of discrete groups”, Springer Verlag 1983.
- [BP] R. Benedetti, C. Petronio, “Lectures on hyperbolic geometry” Springer Verlag 1992.
- [Ber] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups, *Ann. of Math.* 91 (1970), 570–600.
- [Bes] M. Bestvina, Degenerations of the hyperbolic space, *Duke Math. J.* 56 (1988), 143–161.
- [Bo] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, *Ann. of Math.* 124 (1986), 71–158.
- [CB] A.J. Casson, “Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston”, prepared by S.A. Bleiler, *LMS Student Texts* 9 (1988).
- [Ch] I.M. Chiswell, Abstract length functions in groups, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 80 (1976), 451–463.
- [CM] M. Culler, J.W. Morgan, Group actions on \mathbb{R} -trees, *Proc. Lond. Math. Soc.* 55 (1987), 571–604.
- [CS] M. Culler, P. Shalen, Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds, *Ann. of Math.* 117 (1983), 109–146.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, “Travaux de Thurston sur les surfaces”, *Astérisque* 66-67 (1979).
- [GM] C. Gunn, D. Maxwell, “Not knot”, video tape, A.K. Peters, Wellesley MA, USA 1991.
- [Ga] F.P. Gardiner, “Teichmüller theory and quadratic differentials”, Wiley 1987.
- [Gi] H. Gieseking, *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen*, Doktorarbeit, Münster 1912.
- [Go] D. Goldsmith, Symetric fibered links, in “Knots, groups and 3-manifolds”, *Ann. of Math. Studies* 84 (1977), Princeton.

BIBLIOGRAPHIE

- [Gro] M. Gromov, “Structures métriques pour les variétés riemanniennes”, cours rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic 1981.
- [He] J. Hempel, “3-manifolds”, *Annals of Math. Studies* 86 (1976), Princeton.
- [JS] W. Jaco, P. Shalen, “Seifert fibered spaces in 3-manifolds”, *Memoirs of the AMS*, 220, 1979.
- [Joh] K. Johannson, “Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundary”, *Lecture Notes in Math.*, 761, 1979.
- [Jor] T. Jorgensen, On 3-manifolds fibering over the circle, *Ann. of Math.* 106 (1977), 61–72.
- [Ka] M. Kapovitch, Hyperbolic manifolds and discrete groups: notes on Thurston’s hyperbolization, University of Utah, 1993–1994.
- [KAG] S.L. Krushkal, B.N. Apanasov et N.A. Gusevskii, “Kleinian groups and uniformization in examples and problems”, *Trans. Math. Monographs (A.M.S)* 162 1986.
- [KT] S.P. Kerckhoff, W.P. Thurston, Non-continuity of the action of the mapping class group at Bers’s boundary of Teichmüller space, *Invent. Math.* 100 (1990), 25–47.
- [LS] R. Lyndon, P. Schupp, “Combinatorial Group Theory”, Springer Verlag, Berlin 1977.
- [Mag] W. Magnus, “Non-euclidean tessellations and their groups”, Academic press, New-York 1974.
- [Mas] B. Maskit, “Kleinian groups”, Springer Verlag, Berlin 1988.
- [Mi] J. Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 9–25.
- [McM1] C. McMullen, Iteration on Teichmüller space, *Invent. Math.* 97 (1989), 95–127.
- [McM2] C. McMullen, Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle, prepublication, Berkeley 1995.
- [Mor1] J.W. Morgan, On Thurston’s uniformization theorem for three-dimensional manifolds, in “The Smith conjecture”, edited by H. Bass et J.W. Morgan, Academic Press (1984), 37–125.
- [Mor2] J.W. Morgan, Group actions on trees and compactification of the space of classes of $SO(n, 1)$ -representations, *Topology* 25 (1986), 1–33.
- [MO] J.W. Morgan, J.-P. Otal, Relative growth rate of closed geodesics on a surface under varying hyperbolic structures, *Comm. Math. Helv.* 68 (1993), 171–208.
- [MS1] J.W. Morgan, P. Shalen, Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures, *Ann. of Math.* 122 (1985), 398–476.
- [MS2] J.W. Morgan, P. Shalen, Free actions of surface groups on \mathbb{R} -trees, *Topology* 30 (1991), 143–154.
- [Mos] G.D. Mostow, “Strong rigidity of locally symmetric spaces”, *Ann. of Math. Studies* 78 (1973), Princeton.
- [O] J.-P. Otal, Sur la dégénérescence des groupes de Schottky, *Duke Math. J.* 74, (1994), 777–792.
- [OP] J.-P. Otal, F. Paulin, Géométrie hyperbolique et groupes kleiniens, livre en préparation.

BIBLIOGRAPHIE

- [Pa] F. Paulin, Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels, *Invent. Math.* 94 (1988), 53–80.
- [Pe] R. Penner, “Combinatorics of train tracks”, *Annals of Math. Studies* 125 (1992), Princeton.
- [Re] M. Rees, An alternative approach to the ergodic theory of measured foliations on surfaces, *Ergod. Theory and Dynam. Sys.* 1 (1981), 461–488.
- [Ri] R. Riley, A quadratic parabolic group, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 77 (1975), 281–288.
- [Ru] W. Rudin, “Real and complex analysis”, McGraw-Hill 1990.
- [Schl] V. Schlegel, Theorie der homogenen zusammengesetzten Raumgebilde, *Nova Acta Leop. Carol.* 44 (1883), 343–459.
- [Schm] K. Schmidt, Lectures on cocycles of ergodic transformation groups, prepublication, Univ. of Warwick 1976.
- [Sel] A. Selberg, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, pages 147–164, in “Contributions to function theory”, Tata Institute, Bombay 1960.
- [Ser] J.-P. Serre, “Arbres, amalgames, SL_2 ”, *Astérisque* 46 (1977).
- [Sk] R.K. Skora, Splittings of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 23 (1990), 85–90; prepublication 1989 (Columbia Univ.?).
- [Sta] J. Stallings, On fibering certain 3-manifolds, in “Topology of 3-manifolds and related topics”, pages 95–100 in Prentice-Hall 1962.
- [Ste] E. Stein “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions”, Princeton University Press 1970.
- [Su1] D. Sullivan, Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsien et sur les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur le cercle, *Séminaire Bourbaki* n° 554, Springer Lectures Notes 842 (1981), Springer Verlag, Berlin.
- [Su2] D. Sullivan, Seminar on conformal and hyperbolic geometry, notes de cours, I.H.E.S. 1982.
- [Su3] D. Sullivan, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, in “Riemann Surfaces and Related Topics”, Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, *Ann. of Math. Studies* 97 (1981), Princeton.
- [Thu1] W.P. Thurston, Geometry and topology of 3-manifolds, photocopied course notes, Princeton Univ. 1982, available with revisions MSRI, Berkeley.
- [Thu2] W.P. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 19 (1988), 417–432.
- [Thu3] W.P. Thurston, Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357–381.
- [Thu4] W.P. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical manifolds, *Ann. of Math.* 124 (1986), 203–246.
- [Thu5] W.P. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds II: Surface groups and manifolds which fiber over the circle, prepublication 1986.
- [Wa] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* 87 (1968), 56–88.
- [Wi] N. Wielenberg, Discrete Möbius groups: fundamental polyhedra and convergence, *Am. J. Math.* 99 (1977), 861–877.

INDEX

action géométrique	39	compactification de Thurston	17
action isométrique minimale		composantes minimales	147
d'un groupe sur un arbre		constante de Margoulis	4
réel	25	convergence au sens de	
Ahlfors-Bers, application	14	Gromov	29
aiguillage d'un réseau		convergence au sens de	
ferroviaire	44	Morgan-Shalen	27
application bout	111	cuspidale, partie	5
application transverse	107	δ -réalisation d'un réseau	
arête dans un arbre réel	119	ferroviaire	52
arbre dual d'une lamination		déformation fuchsienne	12
géodésique mesurée	39	déformation quasi-fuchsienne	13
arbre réel	21	difféomorphisme	
axe d'une isométrie		pseudo-Anosov	18
hyperbolique d'un arbre réel	22	difféomorphisme réductible	18
Beltrami, équation de	10	distance de Hausdorff	139
Beltrami, coefficient de	8	distance de Teichmüller	13
Bonahon F.	82	distance de translation	2
borélien conservatif	94	distance de translation d'une	
borélien dissipatif	94	isométrie d'un arbre réel	22
bord de l'espace hyperbolique	1	domaine de discontinuité	5
Chabauty, topologie de	141	dual, arbre	39
Chiswell, fonction longueur au		échange d'intervalles	126
sens de	23	élémentaire, groupe	3
coefficient de Beltrami	8	elliptique, isométrie	2
coeur de Nielsen	6		
compactification de Bers	68		

elliptique, isométrie d'un		irréductible, action	
arbre réel	22	isométrique irréductible	
ensemble limite	5	d'un groupe sur un arbre	
épaisse, partie	5	réel	26
équation de Beltrami	10	isométrique, actions	
espace de Teichmüller	12	isométriques d'un groupe	
espace hyperbolique	1	sur un arbre réel	26
espace projectif des		kleinien, groupe	2
laminations géodésiques		lamination	18
mesurées	145	lamination géodésique	
excentricité d'un		arationnelle	149
homéomorphisme		lamination géodésique	
quasi-conforme	8	mesurée	144
feuille	106	lamination géodésique portée	
feuille isolée d'un côté	115	par un réseau ferroviaire	44
feuilletage géodésique	138	lamination géodésique qui	
fonction longueur au sens de		remplit	67
Chiswell	23	lamination mesurée	106
fuchsienne, déformation	12	lamination, sous-	138
géodésique isolée d'un côté	143	lamination, stable, instable	18
géodésique, lamination	137	lemme du nombre	
géométrique, action sur un		d'intersection	82
arbre	39	limite double, théorème de la	67
Gieseking H., variété de	131	Margoulis, constante de	4
groupe élémentaire	3	mince, partie	4
groupe kleinien	2	minimale, action isométrique	25
groupe modulaire	15	minimal exceptionnel	147
Gromov, convergence au sens		modèle supérieur	1
de	29	modulaire, groupe	15
horoboule	2	module d'une couronne	98
horosphère	2	monotone	42
hyperbolique, espace	1	Morgan-Shalen, convergence	
hyperbolique, isométrie	2	au sens de	27
hyperbolique, isométrie d'un		morphisme d'arbres réels	118
arbre réel	22	multicourbe	144
hyperbolique, surface de		Nielsen, coeur de	6
Riemann	6	nombre d'intersection	146
instable, lamination	18	parabolique, isométrie	2
intersection de laminations	150	partie épaisse	5
		partie cuspidale	5
		partie mince de Margoulis	4

petits stabilisateurs, action isométrique à petits stabilisateurs d'arêtes d'un groupe sur un arbre réel	27	réseau ferroviaire	44
point de branchement	119	segment d'un arbre réel	21
pointes	6	Skora, théorème de	39
première subdivision d'un réseau ferroviaire	54	sous-lamination	138
pseudo-Anosov, difféomorphisme	18	sphère d'une inversion	98
quasi-conforme, homéomorphisme	8	spiraler sur une géodésique fermée	144
quasi-fuchsienne, déformation	13	stabilisateurs, petits	27
réalisation d'un réseau ferroviaire dans un arbre réel	45	stable, lamination	18
réalisation d'une lamination géodésique	41	Stallings J., théorème de	90
réalisation faible d'un réseau ferroviaire dans un arbre réel	45	Sullivan D., théorème de	76
réalisation faible d'une lamination géodésique	42	Teichmüller, distance de	13
réductible, difféomorphisme	18	Teichmüller, espace de	12
		Thurston, compactification de	17
		topologie de Chabauty	141
		traverse d'un réseau ferroviaire	44
		triviale, action isométrique triviale d'un groupe sur un arbre réel	25
		type fini, surface de	6
		variété hyperbolique	3
		virtuellement abélien	3

Jean-Pierre Otal

CNRS-UMR 128, UMPA, ENS LYON

46, Allée. d'Italie

69364 Lyon, cedex 07, France

Internet : jpotal@umpa.ens-lyon.fr