

# *Astérisque*

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

**Centralisateurs et conjugaison différentiable des  
difféomorphismes du cercle**

*Astérisque*, tome 231 (1995), p. 89-242

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1995\\_\\_231\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__231__89_0)

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# CENTRALISATEURS ET CONJUGAISON DIFFÉRENTIABLE DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE

*Jean-Christophe YOCCOZ*

## Table des matières

Introduction .....	91
Chapitre I	
<b>Notations et rappels</b> .....	97
1. Difféomorphismes du cercle .....	97
2. Fractions continues et approximation diophantienne .....	100
Chapitre II	
<b>Équation linéarisée des centralisateurs</b> .....	103
1. Introduction .....	103
2. Le groupe $SW$ .....	104
3. Quelques propriétés des centralisateurs .....	107
4. Un résultat de connexité .....	112
5. Propriétés algébriques des groupes $Z(\alpha)$ .....	115
6. Un préordre naturel sur les nombres de Liouville .....	120
Chapitre III	
<b>Densité de <math>O_\alpha^\infty</math> dans <math>F_\alpha^\infty</math></b> .....	125
1. Introduction .....	125
2. Quasi-rotation d'angle $\alpha$ .....	126
3. Estimations .....	130
4. Approximation par des quasi-rotations .....	133
Chapitre IV	
<b>Dépendance continue de champs de vecteurs     associés aux germes de difféomorphismes</b> .....	143
1. Introduction .....	143
2. Champs de vecteurs associés à un difféomorphisme .....	144
3. Démonstration du théorème 2.5 .....	147
4. Remarques .....	160
Chapitre V	
<b>Sur une classe de difféomorphismes de l'intervalle</b> .....	161

1. L'espace $S^r$ .....	161
2. Structure de produit fibré de $S^r$ .....	165
3. Conjugaison et centralisateurs dans $S^r$ .....	167
<b>Chapitre VI</b>	
<b>Centralisateur d'un difféomorphisme</b>	
<b>dont le nombre de rotation est rationnel</b> .....	
1. Introduction .....	171
2. Points fixes hyperboliques .....	172
3. Orbites périodiques hyperboliques .....	177
4. Difféomorphismes n'ayant qu'une orbite périodique .....	178
5. Produits fibrés .....	179
<b>Chapitre VII</b>	
<b>Centralisateur d'un difféomorphisme dont le nombre</b>	
<b>de rotation est irrationnel : premiers résultats</b> .....	
1. Introduction .....	185
2. Divisibilité et torsion : propriétés génériques .....	186
3. Topologie du groupe des itérés : propriétés génériques .....	189
<b>Chapitre VIII</b>	
<b>Centralisateur d'un difféomorphisme dont le nombre</b>	
<b>de rotation est irrationnel (suite)</b> .....	
1. Centralisateur et groupe des itérés .....	195
2. Un théorème de convergence .....	199
3. Construction d'un exemple à centralisateur trivial .....	207
<i>Appendice 1</i>	
Sur la disparition de la propriété	
de Denjoy–Koksma en dimension 2 .....	
	215
<i>Appendice 2</i>	
Sur les valeurs propres de l'automorphisme	
de $L^\infty(\mathbb{T}^1)$ induit par un difféomorphisme du cercle .....	
	225
<i>Appendice 3</i>	
A propos d'un résultat de F. Takens .....	
	231
<i>Appendice 4</i>	
Un résultat élémentaire de linéarisation .....	
	237
Bibliographie .....	241

## Introduction

Cet article est une version légèrement remaniée de ma thèse, soutenue à l'Ecole Polytechnique en Juin 1985.

L'étude dynamique des difféomorphismes du cercle a débuté avec Poincaré; Denjoy, Arnold et Herman sont ceux qui, depuis, y ont le plus contribué.

Le cercle que nous considérons est le tore  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ; notons  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  le groupe des difféomorphismes de classe  $C^r$  de  $\mathbb{T}^1$  qui préservent l'orientation. Les rotations  $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$  ( $x, \alpha \in \mathbb{T}^1$ ) jouent un rôle central dans l'étude des difféomorphismes du cercle. La dynamique des rotations est simple à décrire : si  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est d'ordre  $q$ , toutes les orbites de  $R_\alpha$  sont périodiques d'ordre  $q$ ; si au contraire  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , toutes les orbites sont denses dans  $\mathbb{T}^1$ .

L'invariant de conjugaison topologique fondamental d'un homéomorphisme du cercle (préservant l'orientation) est son nombre de rotation  $\rho(f) \in \mathbb{T}^1$ , introduit par Poincaré : si  $f$  possède un point périodique  $x_0$ , de période  $q \geq 1$ ,  $\rho(f)$  est l'unique  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  d'ordre  $q$  tel que les ordres cycliques induits par le cercle sur  $(R_\alpha^i(0))_{0 \leq i < q}$  et  $(f^i(x_0))_{0 \leq i < q}$  soient identiques; sinon,  $\rho(f)$  appartient à  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  et c'est l'unique élément  $\alpha$  tel que les ordres cycliques induits par le cercle sur  $(R_\alpha^i(0))_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $(f^i(x_0))_{i \in \mathbb{Z}}$  soient identiques. (On trouvera au chapitre I la définition plus usuelle du nombre de rotation).

On s'intéressera principalement aux difféomorphismes  $f$  dont le nombre de rotation  $\alpha$  est irrationnel. Il existe alors une unique application  $h$  continue, surjective, fixant 0 et préservant l'ordre cyclique de  $\mathbb{T}^1$ , qui vérifie  $h \circ f = R_\alpha \circ h$ . La dynamique topologique de  $f$  est donc complètement déterminée par  $\alpha$  lorsque  $h$  est un homéomorphisme. Denjoy a montré que c'est toujours le cas lorsque  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^2$ , mais que  $h$  peut ne pas être injectif si l'on suppose seulement que  $f$  est de classe  $C^1$  (ou même  $C^{2-\varepsilon}$ ); aucune orbite de  $f$  n'est alors dense, et chaque orbite s'accumule (positivement et négativement) sur un ensemble de Cantor invariant.

Le nombre de rotation  $\alpha$  de  $f \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  étant irrationnel, une question cruciale est de déterminer la régularité de la conjugaison topologique  $h$  à la rotation  $R_\alpha$ . Par exemple, l'absolue continuité de  $h$  équivaut à ce que la répartition statistique des

orbites de  $f$  dans  $\mathbb{T}^1$  soit donnée par une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ; cette mesure a une densité bornée (et la proportion des points d'une orbite se trouvant dans un intervalle de  $\mathbb{T}^1$  est uniformément de l'ordre de la longueur de cet intervalle) si et seulement si  $h$  est un homéomorphisme bilipschitzien.

Des conditions de régularité sur  $f$  ne sont pas suffisantes pour assurer la régularité de  $h$  : Arnold a observé par exemple que parmi les valeurs de  $b \in \mathbb{T}^1$  pour lesquelles le difféomorphisme analytique réel  $x \mapsto x + a \sin 2\pi x + b$  ( $0 < |a| < 1/2\pi$ ) a un nombre de rotation irrationnel, celles pour lesquelles la conjugaison  $h$  est absolument continue forment un ensemble maigre au sens de Baire. Le phénomène est intuitivement le suivant : si le nombre de rotation  $\alpha$  est trop bien approché par les rationnels,  $f$  peut, en général, être très bien approché par des difféomorphismes  $f_i$  ayant exactement une orbite périodique, qui est accumulée par toutes les autres orbites de  $f_i$  ; la distribution statistique très irrégulière des orbites de  $f_i$  dans  $\mathbb{T}^1$  peut empêcher la distribution statistique des orbites de  $f$  d'être suffisamment régulière pour que  $h$  soit absolument continue.

On voit ainsi apparaître, à travers cette propriété de trop bonne approximation du nombre de rotation par les rationnels, des phénomènes de "petits dénominateurs" qui sont au centre de l'étude dynamique fine des difféomorphismes du cercle. Les propriétés arithmétiques du nombre de rotation  $\alpha$ , exprimées en terme d'approximation diophantienne ou de son développement en fraction continue, vont jouer un rôle fondamental dans cette étude.

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel qui satisfait à une condition diophantienne, c'est-à-dire qu'il existe  $\beta \geq 0$  et  $\gamma > 0$  tels qu'on ait :

$$(C) \quad |\alpha - p/q| \geq \gamma q^{-2-\beta},$$

pour tout rationnel  $p/q$  (avec  $q \geq 1$ ). Arnold (dans le cas analytique) et Moser (dans le cas différentiable) ont montré vers 1960 que si  $f$  est un difféomorphisme de nombre de rotation  $\alpha$  suffisamment proche de la rotation  $R_\alpha$  dans la  $C^\infty$ -topologie, alors la conjugaison  $h$  est analytique si  $f$  est analytique, de classe  $C^{k-k_0(\alpha)}$  si  $f$  est de classe  $C^k$  et  $k$  est assez grand. C'est un théorème perturbatif (on se place au voisinage de la rotation  $R_\alpha$ ) dont la démonstration repose sur les techniques d'itération rapidement convergentes utilisant la méthode de Newton, développées par Arnold, Hamilton, Herman, Hörmander, Kolmogoroff, Moser, Nash, Rüssmann, Sergeraert, Zehnder et d'autres.

Ces techniques ne s'appliquent plus lorsque  $f$  n'est pas supposé proche d'une rotation. Arnold conjecturait néanmoins que, pour presque tout nombre de rotation  $\alpha$ , la classe de conjugaison  $O_\alpha^\infty$  de  $R_\alpha$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  est égale à l'ensemble  $F_\alpha^\infty$  des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  ayant  $\alpha$  pour nombre de rotation.

Cette conjecture a été démontrée par Herman en 1976 ; il développe tout un arsenal de techniques nouvelles pour étudier la dynamique fine des difféomorphismes du cercle. Les nombres de rotation  $\alpha$  pour lesquels il établit l'égalité  $F_\alpha^\infty = O_\alpha^\infty$  vérifient la condition (C) pour tout  $\beta > 0$ , avec un  $\gamma = \gamma(\beta) > 0$  approprié, mais forment encore un ensemble de mesure de Lebesgue totale (alors que les nombres  $\alpha$  vérifiant (C) avec  $\beta = 0$  forment un ensemble de mesure nulle). Herman montre aussi que l'inclusion  $O_\alpha^\infty \subset F_\alpha^\infty$  est stricte dès que  $\alpha$  ne satisfait pas à une condition diophantienne

(nombres de Liouville). J'ai généralisé en 1983 le théorème de Herman (en m'inspirant fortement de sa démonstration) et établi que l'égalité  $F_\alpha^\infty = O_\alpha^\infty$  a lieu exactement pour les nombres  $\alpha$  qui satisfont à une condition diophantienne. La démonstration de ce résultat, qui occupait le chapitre III de ma thèse, ayant été publié ailleurs (Ann. Sc. ENS, 4ème série, t. 17, 1984, p. 333-359), je l'ai substituée ici par quelques pages destinées à ne pas entraver la compréhension autonome de l'article.

Signalons, en passant, que j'ai déterminé plus récemment l'ensemble des  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  pour lesquels tout difféomorphisme analytique réel de nombre de rotation  $\alpha$  est analytiquement conjugué à  $R_\alpha$  ([Y]). Cet ensemble contient strictement les  $\alpha$  qui vérifient (C), et est strictement contenu dans l'ensemble des  $\alpha$  qui vérifient la condition de Bruno :

$$(B) \quad \sum q_n^{-1} \text{Log } q_{n+1} < +\infty,$$

où  $(p_n/q_n)$  est la suite des réduites du développement de  $\alpha$  en fraction continue.

L'étude des centralisateurs (dans le groupe des difféomorphismes du cercle) d'un difféomorphisme  $f$  dont le nombre de rotation est un nombre de Liouville  $\alpha$  permet d'affiner notre compréhension des phénomènes de "petits dénominateurs" liés aux (trop) bonnes approximations rationnelles de  $\alpha$ . On s'intéresse aux propriétés topologiques du centralisateur, et aux propriétés algébriques de son image (injective) dans  $\mathbb{T}^1$  par l'application nombre de rotation. Cette étude, entreprise par Herman ([H1, ch.X]), est le thème principal de cet article, dont nous détaillons maintenant le contenu.

Nous nous sommes bornés à étudier les centralisateurs de difféomorphismes qui sont de classe  $C^k$ , avec  $2 \leq k \leq +\infty$ . Deux types de situation échappent en particulier à notre étude : les contre-exemples de Denjoy, pour lesquels le lecteur pourra consulter [H1, ch.X], et surtout les difféomorphismes analytiques réels, pour lesquels nos méthodes ne semblent pouvoir s'appliquer.

Le chapitre I est consacré à de courts rappels sur les propriétés élémentaires des difféomorphismes du cercle, et sur le développement en fraction continue des nombres réels irrationnels. On renvoie le lecteur à [H1] pour un exposé détaillé et des démonstrations complètes des propriétés élémentaires et moins élémentaires des difféomorphismes du cercle.

Nous étudions au chapitre II l'équation fonctionnelle :

$$(E) \quad \psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi \circ R_\beta - \varphi,$$

où  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  sont donnés et l'on cherche des solutions  $\beta \in \mathbb{T}^1$ ,  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ . Cette équation s'obtient en linéarisant la relation de commutation  $f \circ g = g \circ f$  entre difféomorphismes du cercle au point  $(f_0, g_0) = (R_\alpha, R_\beta)$ . On peut donc espérer que les résultats concernant cette équation nous servent comme guide pour l'étude du problème (non linéaire) de détermination des centralisateurs. Par ailleurs, l'équation (E) a un intérêt intrinsèque, puisqu'elle exprime la relation de commutation dans le groupe des difféomorphismes "skew-produits" de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  (i.e. de la forme  $(\theta, x) \mapsto (\theta + \alpha, x + \varphi(\theta))$ ).

Etant donné  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ , nous nous intéressons au sous-groupe  $Z(\alpha, \varphi)$  de  $\mathbb{T}^1$  formé des  $\beta \in \mathbb{T}^1$  pour lesquels (E) a une solution  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ , ainsi qu'à l'intersection  $Z(\alpha)$  des  $Z(\alpha, \varphi)$  lorsque  $\varphi$  décrit  $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ . Ces sous-groupes sont décrits en terme du développement en fraction continue de  $\alpha$  ; les propriétés topologiques des centralisateurs (dans le groupe des difféomorphismes "skew-produits") sont étudiées, ainsi que les propriétés algébriques de torsion et de divisibilité des sous-groupes  $Z(\alpha)$  de  $\mathbb{T}^1$ . Nous nous intéressons enfin au préordre défini sur l'ensemble des nombres de Liouville par la relation  $Z(\alpha) \subset Z(\beta)$ . Malheureusement, les propriétés fines de l'équation (E) ne semblent subsister que dans une faible mesure pour les centralisateurs des difféomorphismes du cercle (cf. ch. VII et VIII).

Le chapitre III, nous l'avons dit plus haut, contenait dans la version originale de la thèse la démonstration de la  $C^\infty$ -conjugaison aux rotations des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie (C). Nous n'en avons gardé ici que ce qui est indispensable à la compréhension des chapitres subséquents.

Nous démontrons au chapitre III une conjecture de Herman ([H1]) : pour tout nombre de rotation irrationnel  $\alpha$ , l'ensemble  $O_\alpha^\infty$  des difféomorphismes  $C^\infty$ -conjugués à  $R_\alpha$  est dense pour la  $C^\infty$ -topologie dans l'ensemble  $F_\alpha^\infty$  de ceux qui ont  $\alpha$  pour nombre de rotation. Il est intéressant de remarquer qu'on démontre en fait une assertion plus forte lorsque  $\alpha$  est un nombre de Liouville : on peut approcher dans la  $C^\infty$ -topologie un difféomorphisme  $f \in F_\alpha^\infty$  par des difféomorphismes  $g \in O_\alpha^\infty$  dont les conjugaisons à  $R_\alpha$  sont affines sur un petit intervalle (non précisé). Cette assertion est trivialement fausse lorsque  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne (mais on sait qu'alors  $F_\alpha^\infty = O_\alpha^\infty$ ).

Les chapitres IV à VI sont consacrés à l'étude des centralisateurs des difféomorphismes dont le nombre de rotation est rationnel. On développe les techniques qui nous permettront aux chapitres VII et VIII d'en inférer des conséquences pour les centralisateurs de difféomorphismes dont le nombre de rotation est très bien approché par les rationnels.

Au chapitre IV, nous revenons sur la théorie locale (au voisinage d'un point fixe isolé) de plongement d'un difféomorphisme  $f$  dans un groupe à un paramètre, théorie développée par Sternberg, Szekeres, Takens, Kopell et Sergeraert ; on sait d'après Szekeres et Kopell qu'il existe un unique champ de vecteurs de classe  $C^1$  ayant  $f$  pour difféomorphisme de temps 1 ; on utilise les techniques développées par Sergeraert pour démontrer que ce champ dépend continument (en un sens approprié) du difféomorphisme  $f$ , et qu'on peut, pour une perturbation sans point fixe  $g$  de  $f$ , choisir un champ (sans zéros) proche de celui de  $f$  pour lequel  $g$  est le difféomorphisme de temps 1.

Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^2$  de l'intervalle  $[0,1]$ , fixant uniquement 0 et 1. Mather a découvert une obstruction de nature globale à ce que  $f$  se plonge dans un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes de classe  $C^1$  (voir Kopell [Ko] pour des résultats partiels antérieurs). Cette obstruction est essentiellement la comparaison entre les champs de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $(0, 1)$  associés aux points fixes 0 et 1 de  $f$ . Comme Mather l'a démontré, cette obstruction, jointe aux types de conjugaison différentiable des germes de  $f$  en 0 et 1, classe à conjugaison différentiable près les difféomorphismes de l'intervalle qui fixent seulement 0 et 1. Elle permet par ailleurs,

et c'est pour nous fondamental, de décrire les centralisateurs de ces difféomorphismes, permettant par exemple de retrouver aisément le résultat suivant de Kopell : pour un ouvert dense de difféomorphismes de l'intervalle (ou du cercle), le centralisateur différentiable est réduit au groupe des itérés du difféomorphisme considéré. On trouvera des généralisations partielles de ce théorème, pour les difféomorphismes hyperboliques de variétés de dimension  $\geq 2$ , dans [P-Y1], [P-Y2]. Nous étudions au chapitre V l'obstruction de Mather pour les difféomorphismes de l'intervalle, et au chapitre VI pour les difféomorphismes du cercle ayant une seule orbite périodique ou toutes leurs orbites périodiques hyperboliques : on obtient une description complètement satisfaisante des centralisateurs de tels difféomorphismes.

On en vient finalement, dans les deux derniers chapitres, à l'étude du centralisateur différentiable d'un difféomorphisme du cercle de classe  $C^\infty$  dont le nombre de rotation est un nombre de Liouville  $\alpha$ . La situation est très complexe, et les résultats obtenus reflètent les influences contradictoires du cas où le nombre de rotation satisfait à une condition diophantienne (le centralisateur est alors isomorphe à  $\mathbb{T}^1$ , d'après le théorème de conjugaison différentiable) et du cas où il est rationnel (comme on vient de le rappeler, le centralisateur est alors en général réduit au groupe discret des itérés du difféomorphisme). On montre par exemple que le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  d'un difféomorphisme  $f$  générique (de nombre de rotation irrationnel) n'a pas de torsion, et que  $f$  n'y est divisible par aucun entier  $p \geq 2$  (influence rationnelle). Cependant, d'après Herman, ce centralisateur a toujours la puissance du continu (influence diophantienne), le groupe des itérés de  $f$  n'étant jamais discret dans la  $C^1$ -topologie lorsque le nombre de rotation de  $f$  est irrationnel. Pour le nombre de rotation générique  $\alpha$ , il existe un sous-groupe de  $\mathbb{T}^1$  ayant la puissance du continu, contenu dans l'image dans  $\mathbb{T}^1$  du centralisateur dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  de tout difféomorphisme  $f \in F_\alpha^\infty$  ; en particulier, le groupe des itérés de  $f$  n'est jamais discret dans la  $C^\infty$ -topologie pour un tel nombre de rotation. Pour tout nombre de rotation irrationnel  $\alpha$ , le groupe des itérés n'est génériquement (dans  $F_\alpha^\infty$ ) pas discret dans la  $C^\infty$ -topologie. Mais il existe, et c'est là le résultat principal du chapitre VIII, des difféomorphismes de classe  $C^\infty$ , de nombre de rotation irrationnel, dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  est réduit au groupe des itérés : celui-ci est alors discret dans la  $C^2$ -topologie (influence rationnelle). Finalement, le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  d'un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  dont le nombre de rotation est irrationnel est *génériquement* l'adhérence dans la  $C^\infty$ -topologie du groupe des itérés ; ce n'est cependant pas *toujours* le cas.

J'espère, par cet aperçu, avoir convaincu le lecteur de la grande complexité de l'espace des actions différentiables de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{T}^1$ , dont la structure, même locale, demeure mystérieuse (est-il, comme le demande Rosenberg, localement connexe par arcs ?). Les 4 appendices sont consacrés à des questions connexes, sans rapport direct avec les centralisateurs. L'appendice 1 montre que l'inégalité de Koksma, qui est l'une des bases de la théorie des difféomorphismes du cercle, ne peut être généralisée pour des translations minimales de tores de dimension supérieure ; le théorème ergodique de Birkhoff (avec convergence uniforme à cause de l'unique ergodicité) est essentiellement optimal. On étudie dans l'Appendice 2 le spectre de l'opérateur de  $L^\infty(\mathbb{T}^1)$  induit par un difféomorphisme du cercle. Finalement, les Appendices 3 et 4 sont des compléments au chapitre IV : on donne une autre démonstration d'un théorème de Takens, comme

quoi un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  peut être plongé au voisinage d'un point fixe non plat dans un flot de classe  $C^\infty$ ; on montre aussi qu'il n'y a pas de perte de différentiabilité dans le théorème de Sternberg sur la linéarisation des germes de difféomorphismes contractants de  $(\mathbb{R}, 0)$ .

Sans Michel Herman, les travaux qui suivent n'auraient pas vu le jour. Il n'a cessé au long des années de me poser les bonnes questions, et de me suggérer des moyens d'attaque qui souvent se sont révélés fructueux. Je tiens aussi à remercier Marie-Jo Lécuyer (à l'École Polytechnique) et Monique Le Bronnec (à Orsay) qui ont assuré avec leur compétence et gentillesse habituelles les frappes successives de cet article.

## Chapitre I

### NOTATIONS ET RAPPELS

Ce chapitre se propose essentiellement de fixer les notations qui seront employées dans la suite de ce travail, en passant en revue les concepts élémentaires reliés à la théorie des difféomorphismes du cercle (§ 1) et des fractions continues (§ 2).

Nous ne saurions trop conseiller au lecteur auquel ces théories ne sont pas familières de consulter les premiers chapitres de [H1], où toutes les notions élémentaires sont étudiées en détail et les résultats les concernant démontrés. Sur la théorie des fractions continues et de l'approximation diophantienne, le lecteur pourra consulter [H1, ch. V] ainsi que [L] et [Sc].

#### 1. Difféomorphismes du cercle

**1.1.** Le tore de dimension 1, égal par définition au quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , sera noté  $\mathbb{T}^1$ . Les structures de groupe et de variété (réelle analytique) de  $\mathbb{T}^1$  sont celles déduites de  $\mathbb{R}$  par passage au quotient.

**1.2.** Pour tout  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on notera  $C^s(\mathbb{T}^1)$  l'espace des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  qui sont  $\mathbb{Z}$ -périodiques et de classe  $C^s$ . On identifiera canoniquement  $C^s(\mathbb{T}^1)$  à l'espace des applications de classe  $C^s$  de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $C^s(\mathbb{T}^1)$  de la  $C^s$ -topologie, qui en fait un espace de Banach lorsque  $s$  est fini et un espace de Fréchet lorsque  $s$  est infini.

**1.3.** Soit  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On désigne par  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  le groupe des difféomorphismes de classe  $C^s$  de  $\mathbb{T}^1$  qui préservent l'orientation. On notera quelquefois aussi  $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$  le groupe  $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1)$ .

On munit  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  de la  $C^s$ -topologie usuelle pour les groupes de difféomorphismes, qui fait de  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  un groupe topologique.

**1.4.** Soit  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ; on notera  $D^s(\mathbb{T}^1)$  le groupe des difféomorphismes de classe  $C^s$  de la droite réelle qui commutent avec la translation :  $x \mapsto x + 1$ .

Un difféomorphisme  $f$  de la droite réelle appartient donc à  $D^s(\mathbb{T}^1)$  si et seulement si  $\varphi = f - id$  appartient à  $C^s(\mathbb{T}^1)$ . Réciproquement, étant donnés  $s \geq 1$  et  $\varphi \in C^s(\mathbb{T}^1)$ , l'application  $f = id + \varphi$  appartient à  $D^s(\mathbb{T}^1)$  si et seulement si on a  $D\varphi(t) > -1$  pour tout réel  $t$ .

Un difféomorphisme  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$  définit par passage au quotient un difféomorphisme  $\pi(f)$  de  $\mathbb{T}^1$ , qui est de classe  $C^s$  et préserve l'orientation, donc appartient à  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ . On peut considérer  $D^s(\mathbb{T}^1)$ , muni de la projection  $\pi$  sur  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ , comme le revêtement universel de  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  (on a  $\pi_1(\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)) = \mathbb{Z}$ ).

**1.5.** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on notera  $R_\alpha$  la translation :  $x \mapsto x + \alpha$  de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ , on notera aussi  $R_\alpha$  la rotation :  $x \mapsto x + \alpha$  de  $\mathbb{T}^1$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ ),  $R_\alpha$  appartient à  $D^\infty(\mathbb{T}^1)$  (resp. à  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ ); l'application :  $\alpha \mapsto R_\alpha$  définit un isomorphisme de  $\mathbb{R}$  (resp. de  $\mathbb{T}^1$ ) sur un sous-groupe fermé de  $D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ), pour tout  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Le noyau de la projection  $\pi$  de 1.4 est le sous-groupe cyclique engendré par  $R_1$ .

Rappelons que lorsque  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ), le centralisateur de  $R_\alpha$  dans le groupe  $D^0(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ ) est le groupe des translations  $(R_\beta)_{\beta \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(R_\beta)_{\beta \in \mathbb{T}^1}$ ).

Lorsque  $\alpha \in \mathbb{Q}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ), le centralisateur de  $R_\alpha$  dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ), avec  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , est un sous-groupe fermé de  $D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp. de  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ) canoniquement isomorphe à  $D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ).

**1.6.** Pour tout  $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , on montre que la suite d'applications  $\left(\frac{1}{n}(f^n - id)\right)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une constante qu'on notera  $\rho(f)$ .

On appelle  $\rho(f)$  le nombre de rotation de  $f$ , et on appelle l'application  $\rho$ , de  $D^0(\mathbb{T}^1)$  dans  $\mathbb{R}$ , l'application "nombre de rotation".

Cette application est continue, et invariante par conjugaison dans  $D^0(\mathbb{T}^1)$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a  $\rho(R_\alpha) = \alpha$ .

Par passage au quotient, on définit une application de  $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$  dans  $\mathbb{T}^1$ , qui est aussi notée  $\rho$  et appelée nombre de rotation. Cette application est continue et invariante par conjugaison dans  $\text{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ ; elle vérifie  $\rho(R_\alpha) = \alpha$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ .

**1.7.** Soit  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ; pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ ), on note  $F_\alpha^s$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $f \in \text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ) dont le nombre de rotation est  $\alpha$ . C'est une partie fermée de  $D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp. de  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ) dont l'intérieur est vide si et seulement si  $\alpha$  est irrationnel.

**1.8.** Soient  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et  $p/q \in \mathbb{Q}$ , avec  $p, q$  premiers entre eux, et  $q \geq 1$ .

On notera alors  $F^s(p/q)$  l'ensemble  $F_{p/q}^s$  défini en 1.7.

Un difféomorphisme  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$  appartient à  $F^s(p/q)$  si et seulement si l'application  $\mathbb{Z}$ -périodique  $\varphi = f^q - id - p$  a au moins un zéro; ce difféomorphisme appartient à l'intérieur de  $F^s(p/q)$  si et seulement si cette application change de signe.

Les difféomorphismes  $f \in F^s(p/q)$  tels que  $\varphi \geq 0$  (resp.  $\varphi \leq 0$ ) forment une partie fermée de  $F^s(p/q)$ , notée  $F_+^s(p/q)$  (resp.  $F_-^s(p/q)$ ). La frontière de  $F^s(p/q)$  dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$  est égale à  $F_+^s(p/q) \cup F_-^s(p/q)$ . L'intersection  $F_+^s(p/q) \cap F_-^s(p/q)$  est constituée des difféomorphismes  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$  tels que  $f^q = R_p$ ; c'est la classe de conjugaison dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$  de la translation  $R_{p/q}$ .

**1.9.** Soit  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ; on note  $D_o^s(\mathbb{T}^1)$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$  tels que  $f(0) = 0$ .

Soit  $f \in D^o(\mathbb{T}^1)$ ; pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , il existe un unique réel  $\lambda = \lambda_\alpha(f)$  tel que  $\rho(R_\lambda \circ f) = \alpha$ ; pour tout rationnel  $p/q$ , il existe un unique réel  $\lambda = \lambda_{p/q}^+(f)$  (resp.  $\lambda = \lambda_{p/q}^-(f)$ ) tel que  $R_\lambda \circ f$  appartienne à  $F_+^o(p/q)$  (resp. à  $F_-^o(p/q)$ ).

L'application :  $f \mapsto R_{\lambda_\alpha(f)} \circ f$  (resp.  $f \mapsto R_{\lambda_{p/q}^+(f)} \circ f$ , resp.  $f \mapsto R_{\lambda_{p/q}^-(f)} \circ f$ ) définit, pour tout  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , un homéomorphisme de  $D_o^s(\mathbb{T}^1)$  sur  $F_\alpha^s$  (resp. sur  $F_+^s(p/q)$ , resp. sur  $F_-^s(p/q)$ ).

**1.10.** Pour tout  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on note  $F_I^s$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est irrationnel; on note  $F^s$  l'adhérence de  $F_I^s$  dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$ . On a :

$$F^s = \left( \bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} (F_+^s(p/q) \cup F_-^s(p/q)) \right) \cup F_I^s .$$

Par définition,  $F^s$  est une partie fermée de  $D^s(\mathbb{T}^1)$ . Il est facile de voir que  $F_I^s$  est un  $G_\delta$ -dense dans  $F^s$ , donc un espace de Baire.

D'autre part, l'union des  $F_+^s(p/q)$ , lorsque  $p/q$  décrit une partie dense de  $\mathbb{Q}$ , est une partie dense de  $F^s$ .

**1.11.** Les images des ensembles  $F_+^s(p/q)$ ,  $F_-^s(p/q)$ ,  $F^s$ ,  $F_I^s$  par la projection canonique  $\pi$  de  $D^s(\mathbb{T}^1)$  sur  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  seront désignées par les mêmes notations.

**1.12.** Soient  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (avec  $p, q$  premiers entre eux, et  $q \geq 1$ ), et  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ; on note  $\widehat{F}_+^s(p/q)$  (resp.  $\widehat{F}_-^s(p/q)$ ) l'ensemble des difféomorphismes  $f \in F_+^s(p/q)$  (resp.  $F_-^s(p/q)$ ) qui possèdent une seule orbite périodique.

**LEMME.** — Soit  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $s \geq 2$ ; alors  $\widehat{F}_+^s(p/q)$  (resp.  $\widehat{F}_-^s(p/q)$ ) contient une partie ouverte et dense de  $F_+^s(p/q)$  (resp. de  $F_-^s(p/q)$ ).

*Démonstration :* on traite le cas de  $\widehat{F}_+^s(p/q)$ , le cas de  $\widehat{F}_-^s(p/q)$  étant complètement analogue.

Soit  $f \in F_+^s(p/q)$ ; notons encore  $p/q$  un relèvement de  $p/q$  dans  $\mathbb{R}$ , et notons  $\widetilde{f}$  le relèvement de  $f$  dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est  $p/q$ . Alors  $f$  appartient à  $\widehat{F}_+^s(p/q)$  si et seulement si l'application  $\varphi = \widetilde{f}^q - id - p$  a exactement  $q$  zéros dans l'intervalle  $[0, 1)$ . D'autre part, la condition :

“ $\varphi$  a exactement  $q$  zéros dans l'intervalle  $[0, 1)$ , et en ces points  $D^2\varphi$  est strictement positif”

définit une partie ouverte  $U$  de  $F_+^s(p/q)$ .

Montrons que  $U$  est dense dans  $F_+^s(p/q)$ . En effet, d'après 1.8,  $f$  a au moins une orbite périodique (de période  $q$ ); notons  $x_1 < \dots < x_q$  les relèvements dans  $[0, 1)$  des points d'une orbite périodique de  $f$ ; ce sont des zéros de  $\varphi$ .

Pour  $a > 0$ , définissons :

$$\tilde{f}_a(t) = \tilde{f}(t) + a \prod_{i=1}^q \sin^2(\pi(t - x_i)) .$$

On vérifie immédiatement que, pour  $a > 0$  suffisamment petit,  $\tilde{f}_a$  appartient à  $U$ ; d'autre part, il est clair que lorsque  $a$  tend vers 0,  $\tilde{f}_a$  tend vers  $\tilde{f}$  dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$ .  $\square$

On utilisera en général ce lemme plus tard de la façon suivante : l'union des  $\hat{F}_+^s(p/q)$ , lorsque  $p/q$  décrit une partie dense de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (resp. de  $\mathbb{Q}$ ), est une partie dense de  $F^s$ .

On démontre de la même façon le lemme suivant, utilisé au chapitre VIII :

LEMME. — Soit  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $s \geq 2$ ; l'ensemble des difféomorphismes  $f \in D^s(\mathbb{T}^1)$ , tels que  $f - id$  atteigne son minimum en un seul point de l'intervalle  $[0, 1)$ , contient une partie ouverte et dense de  $D^s(\mathbb{T}^1)$ .

**1.13.** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ), et tout  $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on note  $O_\alpha^s$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in F_\alpha^s$  qui sont conjugués dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$  (resp. dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ ) à la translation  $R_\alpha$ .

D'après le théorème de conjugaison de Herman ([H1, ch. IX]), on a  $F_\alpha^\infty = O_\alpha^\infty$  pour presque tout  $\alpha$ . Herman avait aussi montré que l'inclusion  $O_\alpha^\infty \subset F_\alpha^\infty$  est stricte lorsque  $\alpha$  est un nombre de Liouville; l'extension que j'ai donnée ([Y1]) du théorème de Herman dit au contraire qu'on a  $O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$  lorsque  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne. On montrera au chapitre III que  $O_\alpha^\infty$  est dense dans  $F_\alpha^\infty$  lorsque  $\alpha$  est un nombre de Liouville.

## 2. Fractions continues et approximation diophantienne

**2.1.** Pour tout réel  $\alpha$ , on pose :

$$\|\alpha\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\alpha - p| .$$

Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  diffèrent d'un entier, on a  $\|\alpha\| = \|\beta\|$ , ce qui permet de définir  $\|\alpha\|$  lorsque  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ . On munit alors  $\mathbb{T}^1$  de la métrique définie par  $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$ .

**2.2.** Soit  $\alpha$  un nombre réel irrationnel.

Posons  $\alpha_{-2} = \alpha$ ,  $\alpha_{-1} = 1$ ; on définit par induction, pour  $n \geq 0$ , un réel  $\alpha_n$  et un entier  $a_n$  par la relation :

$$\begin{cases} \alpha_{n-2} = a_n \alpha_{n-1} + \alpha_n , \\ 0 < \alpha_n < \alpha_{n-1} . \end{cases}$$

L'entier  $a_0$  est donc la partie entière de  $\alpha$ , et on a  $a_n \geq 1$  pour  $n \geq 1$ .

On pose  $p_{-2} = q_{-1} = 0$ ,  $p_{-1} = q_{-2} = 1$ , et on définit inductivement pour  $n \geq 0$  des entiers  $p_n$  et  $q_n$  par les relations :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} ,$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} .$$

**2.3.** On a  $q_0 = 1$ , et  $q_n \geq 1$  pour  $n \geq 1$ . Les rationnels  $p_n/q_n$ , pour  $n \geq 0$ , s'appellent les réduites du nombre irrationnel  $\alpha$ .

On a alors les propriétés suivantes :

- (i)  $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$ , pour  $n \geq -1$ ;
- (ii)  $\alpha_n = (-1)^n(q_n\alpha - p_n)$ , pour  $n \geq 2$ ;
- (iii)  $\alpha_n = \|q_n\alpha\|$ , pour  $n \geq 1$ ;
- (iv)  $(q_{n+1} + q_n)^{-1} < \alpha_n < q_{n+1}^{-1}$ , pour  $n \geq 0$ ;
- (v)  $\alpha_{n+2} < \frac{1}{2}\alpha_n$ ,  $q_{n+2} \geq 2q_n$ , pour  $n \geq -1$ .

Notons que par (ii), (iii), (iv) et la croissance de la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$ , on a :

$$|\alpha - (p_n/q_n)| < \frac{1}{q_n^2}, \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

Réciproquement, si  $p, q$  sont deux entiers (avec  $q \neq 0$ ) tels que :

$$|\alpha - (p/q)| < \frac{1}{2q^2} ,$$

alors  $p/q$  est une réduite de  $\alpha$  (qui n'est pas nécessairement sous forme irréductible).

Par la relation (v) ci-dessus, les suites  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  et  $(q_n^{-1})_{n \geq 0}$  décroissent au moins géométriquement. Il s'ensuit que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , les séries  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n^\varepsilon$  et  $\sum_{n \geq 0} q_n^{-\varepsilon}$  sont convergentes.

**2.4.** Soient  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , et  $\tilde{\alpha}$  un relèvement de  $\alpha$  dans  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . On vérifie que, si on associe à  $\tilde{\alpha}$  les suites  $(a_n)$ ,  $(\alpha_n)$ ,  $(p_n)$ ,  $(q_n)$  construites en 2.2, alors les réels  $\alpha_n$  pour  $n \geq -1$ , les entiers  $a_n$  pour  $n \geq 1$  et les entiers  $q_n$  pour  $n \geq -2$  ne dépendent que de  $\alpha$  et pas du relèvement choisi. Les entiers  $q_n$ , pour  $n \geq 2$ , sont caractérisés inductivement par la relation :

$$q_n = \text{Min}\{q \in \mathbb{N}^* \mid \|q\alpha\| < \|q_{n-1}\alpha\|\} .$$

**2.5.** Soit  $\alpha$  un nombre réel irrationnel, et  $\beta$  un nombre réel positif ou nul.

On dit que  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne d'ordre  $\beta$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle qu'on ait, pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$  :

$$\|q\alpha\| > C q^{-(1+\beta)} .$$

Avec les notations de 2.2, l'une quelconque des relations suivantes (où  $C$  désigne une constante strictement positive ne dépendant que de  $\alpha$  et  $\beta$ ) caractérise la condition diophantienne d'ordre  $\beta$  :

- (1)  $|\alpha - (p_n/q_n)| > \frac{C}{q_n^{2+\beta}}$  pour tout  $n \geq 0$  ;
- (2)  $a_{n+1} < C q_n^\beta$ , pour tout  $n \geq 0$  ;
- (3)  $q_{n+1} < C q_n^{1+\beta}$ , pour tout  $n \geq 0$  ;
- (4)  $\alpha_{n+1} > C \alpha_n^{1+\beta}$ , pour tout  $n \geq 0$ .

**2.6.** On dit que  $\alpha$  est un nombre de type constant s'il satisfait à une condition diophantienne d'ordre 0. On dit que  $\alpha$  est un nombre de type Roth s'il satisfait à une condition diophantienne d'ordre  $\varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ . On dit que  $\alpha$  est diophantien s'il existe  $\beta \geq 0$  tel que  $\alpha$  satisfasse à une condition diophantienne d'ordre  $\beta$ . On dit que  $\alpha$  est un nombre de Liouville s'il est irrationnel mais n'est pas diophantien.

Les nombres de type Roth forment un ensemble de mesure de Lebesgue pleine. Les nombres de Liouville forment une partie résiduelle de  $\mathbb{R}$ . Les nombres algébriques irrationnels sont de type Roth, d'après un résultat célèbre de Roth.

**2.7.** Les notions définies en 2.5 et 2.6 sont invariantes lorsqu'on ajoute au nombre irrationnel  $\alpha$  un entier. Elles ont donc un sens pour les éléments de  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

## Chapitre II

### ÉQUATION LINÉARISÉE DES CENTRALISATEURS

#### 1. Introduction

Soit  $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ ; la recherche du centralisateur de  $f$  dans  $D^\infty(\mathbb{T}^1)$  revient à étudier l'équation fonctionnelle :

$$F(f, g) = f \circ g - g \circ f = 0 .$$

L'application  $F$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur la variété fréchetique  $D^\infty(\mathbb{T}^1) \times D^\infty(\mathbb{T}^1)$ , à valeurs dans l'espace de Fréchet  $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ .

Pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a  $F(R_\alpha, R_\beta) = 0$ , et la différentielle de  $F$  en  $(R_\alpha, R_\beta)$  est donnée par :

$$DF(R_\alpha, R_\beta)(\Delta f, \Delta g) = \Delta f \circ R_\beta - \Delta f + \Delta g - \Delta g \circ R_\alpha ,$$

où  $\Delta f, \Delta g \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ .

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'équation (I), dite équation linéarisée des centralisateurs :

$$(I) \quad \Delta f \circ R_\beta - \Delta f = \Delta g \circ R_\alpha - \Delta g ,$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , et  $\Delta f, \Delta g \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  (il est clair qu'on peut se ramener au cas où  $\Delta f$  et  $\Delta g$  sont de valeur moyenne nulle).

Notons que si on pouvait appliquer les théorèmes de fonctions implicites usuels à l'équation  $R(f, g) = 0$ , l'équation (I) serait l'équation de l'espace tangent en  $(R_\alpha, R_\beta)$  à la sous-variété de  $D^\infty(\mathbb{T}^1) \times D^\infty(\mathbb{T}^1)$  formée par les couples  $(f, g)$  d'éléments permutables; bien que la structure de l'ensemble des couples d'éléments permutables soit en fait beaucoup plus complexe, l'étude de l'équation (I) permet d'avoir une première idée de ce que peuvent être les propriétés des centralisateurs et,

en comparaison avec les chapitres ultérieurs, de faire la part dans ces propriétés des phénomènes “linéaires” et “non-linéaires”.

Un autre intérêt de l'équation (I) est qu'elle représente exactement l'équation des centralisateurs dans le groupe des difféomorphismes “skew-produits” de  $\mathbb{R}^2$ , défini au § 2.

Dans les §2 et 3, on réduit l'équation (I) à des problèmes d'approximation diophantienne et on obtient les propriétés les plus élémentaires des centralisateurs : si  $\alpha$  est un nombre irrationnel, il existe un sous-groupe borélien ayant la puissance du continu de  $\mathbb{R}$ , noté  $Z(\alpha)$ , formé des  $\beta \in \mathbb{T}^1$  tels que l'équation (I) ait une solution  $\Delta g \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  (d'intégrale nulle) pour tout  $\Delta f \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  d'intégrale nulle. Le résultat correspondant est faux pour les difféomorphismes du cercle (cf. ch. VIII).

On montre aussi que l'adhérence des itérés d'un difféomorphisme “skew-produit” dont le nombre de rotation est irrationnel est égale à son centralisateur ; cette propriété est seulement générique pour les difféomorphismes du cercle (cf. ch. VIII).

Au §4, on montre que les couples de difféomorphismes “skew-produits” qui commutent forment un espace localement connexe par arcs ; c'est une question ouverte pour les difféomorphismes du cercle.

On étudie dans le §5 les propriétés algébriques des groupes  $Z(\alpha)$  (torsion de  $Z(\alpha)/\mathbb{Z}$ , divisibilité) qu'on pourra comparer aux résultats du même type pour les difféomorphismes du cercle (cf. ch. VII).

Enfin, on étudie au §6 le préordre défini sur l'ensemble des nombres de Liouville par la relation  $Z(\beta) \subset Z(\alpha)$ .

## 2. Le groupe $SW$

**2.1.** Dans la suite de ce chapitre, on notera  $C$  l'espace  $C_0^\infty(\mathbb{T}^1)$  des fonctions numériques de classe  $C^\infty$  qui sont  $\mathbb{Z}$ -périodiques et de valeur moyenne nulle. Muni de la  $C^\infty$ -topologie,  $C$  est un espace de Fréchet.

La formule  $(\alpha \cdot \varphi)(x) = \varphi(x + \alpha)$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C$ , définit une représentation continue  $\tau$  de  $\mathbb{R}$  dans  $C$  ; notons que la restriction de  $\tau$  à  $\mathbb{Z}$  est triviale.

On munit  $\mathbb{R} \times C$  d'une loi de composition définie par :

$$(\alpha, \varphi) \cdot (\beta, \psi) = (\alpha + \beta, \beta \cdot \varphi + \psi) .$$

Muni de cette loi et de la topologie produit,  $\mathbb{R} \times C$  est un groupe topologique, qu'on notera  $SW$  (pour “skew”).

Ce groupe est isomorphe à l'extension de  $C$  par  $\mathbb{R}$  définie par  $\tau$  ; la projection canonique  $\rho : SW \rightarrow \mathbb{R}$  et l'injection canonique  $i : C \rightarrow SW$  sont respectivement données par  $\rho(\alpha, \varphi) = \alpha$ ,  $i(\varphi) = (0, \varphi)$ .

L'application  $\rho$  est aussi appelée “nombre de rotation” ; elle possède une section  $r$ , définie par  $r(\alpha) = R_\alpha = (\alpha, 0)$ , qui permet d'identifier  $\mathbb{R}$  à un sous-groupe de  $SW$ .

**2.2.** Associons à tout  $f = (\alpha, \varphi) \in SW$  le difféomorphisme  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$\tilde{f}(x, y) = (x + \alpha, y + \varphi(x)) .$$

On vérifie aisément qu'on obtient ainsi un plongement dans le groupe des

difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  qui préservent l'orientation et la mesure de Lebesgue.

**2.3.** Soit  $f = (\alpha, \varphi) \in SW$ . On s'intéresse dans la suite aux deux problèmes suivants :

- Sous quelle condition  $f$  est-il conjugué dans  $SW$  à une rotation  $R_\gamma$  ?
- Quel est le centralisateur de  $f$  dans  $SW$  ?

Comme  $\rho$  est un morphisme, il est certainement nécessaire, pour avoir une réponse positive au premier problème, d'avoir  $\gamma = \alpha$ ; ceci étant, un élément  $h = (\beta, \psi)$  conjugue  $f$  et  $R_\alpha$  si et seulement si :

$$(*) \quad \psi - \alpha \cdot \psi = \varphi .$$

D'autre part,  $f$  et  $g = (\beta, \psi) \in SW$  sont permutables si et seulement si :

$$(**) \quad \alpha \cdot \psi - \psi = \beta \cdot \varphi - \varphi .$$

En particulier, le centre de  $SW$  est égal à  $\mathbb{Z}$ .

Nous étudions dans la suite les équations (\*) et (\*\*).

**2.4.** Pour  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose :

$$\widehat{\psi}(n) = \int_{\mathbb{T}^1} \psi(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

La transformation de Fourier définit une correspondance biunivoque entre  $C$  et l'ensemble des applications  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  qui vérifient les propriétés suivantes :

- (i)  $a(0) = 0$ ,  $a(-n) = \overline{a(n)}$  pour  $n \geq 1$  ;
- (ii) pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p a(n) = 0$ .

La transformation de Fourier, appliquée aux équations (\*) et (\*\*), fournit les équations (avec  $a = \widehat{\psi}$ ) :

$$(1) \quad a(n)(1 - e^{2\pi i n \alpha}) = \widehat{\varphi}(n), \quad n \geq 1 ;$$

$$(2) \quad a(n)(1 - e^{2\pi i n \alpha}) = \widehat{\varphi}(n)(1 - e^{2\pi i n \beta}), \quad n \geq 1 .$$

Il y a correspondance biunivoque entre les solutions de (\*) (resp. de (\*\*)) et les applications  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  (resp. les couples  $(a, \beta)$ ) qui vérifient (1) et (ii) (resp. (2) et (ii)).

**2.5.** Etudions rapidement le cas où  $\alpha = p/q$  est un nombre rationnel, avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Pour  $f = (\alpha, \varphi) \in SW$ , les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

$$a) \quad \sum_{i=0}^{q-1} \varphi(x + i/q) \equiv 0 ;$$

- b)  $f^q = (p, 0)$ ;
- c)  $\widehat{\varphi}(n) = 0$  pour tout  $n \in q\mathbb{Z}$ ;
- d)  $f$  et  $R_\alpha$  sont conjugués dans  $SW$ .

En effet, les implications d)  $\implies$  b)  $\iff$  a)  $\iff$  c) sont immédiates. Si c) est vérifiée, l'application  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\begin{aligned} a(n) &= 0 \quad \text{si } n \in q\mathbb{Z} , \\ a(n) &= (1 - e^{2i\pi n\alpha})^{-1} \widehat{\varphi}(n) \quad \text{si } n \notin q\mathbb{Z} , \end{aligned}$$

fournit une solution de (\*).

Soit  $\tau_q$  la représentation de  $\mathbb{R}$  dans  $C$  définie par  $\tau_q(\alpha) = \tau(q\alpha)$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; le centralisateur de  $R_\alpha$  dans  $SW$  est l'ensemble des  $(\beta, \psi) \in SW$  tels que  $\psi$  admette pour période  $1/q$ ; il est isomorphe à l'extension de  $C$  par  $\mathbb{R}$  définie par  $\tau_q$ .

Si  $f = (\alpha, \varphi) \in SW$  et  $R_\alpha$  sont conjugués dans  $SW$ , leurs centralisateurs dans  $SW$  sont des sous-groupes conjugués de  $SW$ . Si  $f$  et  $R_\alpha$  ne sont pas conjugués dans  $SW$ , il existe, d'après c), des entiers  $n \in q\mathbb{Z}$  tels que  $\widehat{\varphi}(n) \neq 0$ ; le groupe engendré par ces entiers est de la forme  $r q\mathbb{Z}$ , avec  $r \geq 1$ . Pour que l'équation (2) ait une solution  $(a(n))_{n \geq 1}$ , il faut que  $qr\beta \in \mathbb{Z}$ ; ceci étant,  $a(n)$  est déterminé par (2) pour  $n \notin q\mathbb{Z}$ , et est arbitraire pour  $n \in q\mathbb{Z}$ . Le centralisateur de  $f$  dans  $SW$  est donc isomorphe à l'extension de  $C$  par le groupe  $\left\{ \frac{n}{r q}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ , définie par la restriction à ce groupe de  $\tau_q$ . Plus précisément, il existe un unique élément  $g = (\beta, \psi)$  dans le centralisateur de  $f$  tel que  $\beta = \frac{1}{r q}$  et  $\widehat{\psi}(n) = 0$  pour  $n \in q\mathbb{Z}$ ; le sous-groupe engendré par  $g$  est cyclique d'ordre  $r q$ ; le centralisateur de  $f$  est produit semi-direct de ce sous-groupe et du sous-groupe formé des  $(O, \chi)$  tels que  $\chi$  soit  $1/q$  périodique.

**2.6.** On fixe, dans la fin du paragraphe, un nombre réel irrationnel  $\alpha$ .

Rappelons que, pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(3) \quad 4\|\beta\| \leq |e^{2\pi i\beta} - 1| \leq 2\pi\|\beta\| .$$

Compte-tenu de 2.4, on obtient que  $(\alpha, \varphi) \in SW$  et  $R_\alpha$  sont conjugués dans  $SW$  si et seulement si on a :

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|n\alpha\|^{-1} n^p \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N} .$$

On en déduit que la classe de conjugaison dans  $SW$  de  $R_\alpha$  est égale à  $\rho^{-1}(\{\alpha\})$  si et seulement si  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne.

**2.7.** Soient  $(\alpha, \varphi) \in SW$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Il résulte de 2.4 qu'une solution  $(\beta, \psi)$  de (\*\*), si elle existe, est unique, et que son existence équivaut à :

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \|n\beta\| \|n\alpha\|^{-1} \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N} .$$

La restriction de  $\rho$  au centralisateur de  $(\alpha, \varphi)$  est donc injective; on note  $Z(\alpha, \varphi)$  son image. On définit :

$$Z(\alpha) = \bigcap_{\varphi \in C} Z(\alpha, \varphi) .$$

On a alors, pour tout  $\varphi \in C$  :

$$\mathbb{Z} \subset Z(\alpha) = Z(\alpha + 1) \subset Z(\alpha, \varphi) = Z(\alpha + 1, \varphi) .$$

On verra au § 3 que ces inclusions sont toujours strictes, lorsque  $\alpha$  est un nombre de Liouville.

Il résulte de (5) que les éléments  $\beta$  de  $Z(\alpha)$  sont caractérisés par la condition :

$$(6) \quad \exists K > 0, \exists p \geq 0 \text{ tels que } \|n\beta\| < Kn^p \|n\alpha\| , \quad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

Notons que si  $(\alpha, \varphi)$  et  $R_\alpha$  sont conjugués dans  $SW$ , on a  $Z(\alpha, \varphi) = \mathbb{R}$ . De même, si  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne, on a  $Z(\alpha) = \mathbb{R}$ . Les réciproques seront démontrées au § 3.

D'après (6), les relations  $\beta \in Z(\alpha)$ ,  $\gamma \in Z(\beta)$  impliquent  $\gamma \in Z(\alpha)$ ; le préordre défini par " $\beta \subset \alpha \iff \beta \in Z(\alpha)$ " sera étudié au § 6.

### 3. Quelques propriétés des centralisateurs

**3.1.** On fixe dans ce paragraphe un nombre réel irrationnel  $\alpha$ . On note  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  la suite de ses réduites, et on pose  $p_{-2} = q_{-1} = 0, p_{-1} = q_{-2} = 1, \alpha_n = (-1)^n (q_n \alpha - p_n)$  pour  $n \geq -2$ . On note  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite d'entiers (strictement positifs pour  $n \geq 1$ ) qui vérifie les relations

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} ,$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} ,$$

$$\alpha_{n-2} = a_n \alpha_{n-1} + \alpha_n ,$$

pour  $n \geq 0$ . Rappelons que l'on a  $0 < \alpha_n < \alpha_{n-1}$  pour  $n \geq 0$ .

**3.2.** Soit  $\beta$  un nombre réel. Notons  $\nu_o$  sa partie entière,  $\beta_o = \beta - \nu_o$ , et définissons inductivement  $\beta_n$  et  $\nu_n$  pour  $n \geq 1$  comme le reste et le quotient de la division euclidienne de  $\beta_{n-1}$  par  $\alpha_{n-1}$ . On a alors, pour  $n \geq 1$  :

$$(i) \quad 0 \leq \beta_{n-1} = \beta - \sum_{i=0}^{n-1} \nu_i \alpha_{i-1} < \alpha_{n-2};$$

$$(ii) \quad 0 \leq \nu_n \leq a_n;$$

$$(iii) \quad \text{si } \nu_n = a_n, \nu_{n+1} = 0;$$

$$(iv) \quad \beta = \sum_{i=0}^{+\infty} \nu_i \alpha_{i-1}.$$

Comme on va le voir en 3.5, pour que les dénominateurs des très bonnes approximations de  $\alpha$  soient aussi dénominateurs de très bonnes approximations de  $\beta$ , il faut et il suffit que les  $\nu_n$  soient proches de 0 ou  $a_n$ .

**3.3.** Rappelons (cf. [I, 2.3]) que tout rationnel  $p/q$  qui vérifie  $|\alpha - (p/q)| < (2q^2)^{-1}$  est une réduite de  $\alpha$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier tel que  $\|n\alpha\| < \frac{1}{2n}$ ; il existe donc  $r \geq 1, s \geq 0$  tels que  $n = rq_s$ , et  $m = rp_s$  est l'entier le plus proche de  $n\alpha$ .

On a alors :

$$\frac{r}{2q_{s+1}} < \|n\alpha\| = r\alpha_s < (2rq_s)^{-1},$$

donc  $r^2$  est inférieur ou égal à la partie entière  $a_{s+1}$  de  $q_{s+1}q_s^{-1}$ .

Soit  $A$  l'ensemble des entiers  $n$  de la forme  $rq_s$ , avec  $s \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r^2 \leq a_{s+1}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^* - A$ , on a  $\|n\alpha\|^{-1} \leq 2n$  par ce qui précède; pour  $n = rq_s \in A$ , on a  $\|n\alpha\| = r\alpha_s$  et  $\|n\beta\| \leq r\|q_s\beta\|$  pour tout réel  $\beta$ .

Soient  $\varphi \in C$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ; les équations (5) et (6) de 2.7 sont donc respectivement équivalentes à :

$$(7) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in A}} n^p \|n\beta\| \|n\alpha\|^{-1} \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N};$$

$$(8) \quad \exists C > 0, \exists p \geq 0 \text{ t.q.}$$

$$\|q_s\beta\| < Cq_s^p\alpha_s \quad \text{pour tout } s \geq 0.$$

**3.4.** Soient  $\beta \in \mathbb{R}$ , et  $(\nu_i)_{i \geq 0}$  la suite d'entiers qu'on lui a associée en 3.2. Pour  $r \geq 1$ ,  $s \geq 1$ , soient  $t_{r,s} = \lceil r\nu_s q_s^{-1} \rceil$  et  $v_{r,s}$  le plus proche entier de  $r\nu_s q_s^{-1}$  (par défaut si  $t_{r,s} = 1/2$ ).

LEMME. — Pour  $n = rq_s \in A$ , on a :

$$|\|n\beta\| - t_{r,s+1}| < 4n\alpha_s.$$

*Démonstration :* On a :

$$\beta = \sum_{i=0}^{s+1} \nu_i \alpha_{i-1} + \beta_{s+1}.$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} n\beta &= rq_s \left[ \sum_{i=0}^s (-1)^{i-1} \nu_i (q_{i-1} \alpha - p_{i-1}) \right] + rq_s \nu_{s+1} \alpha_s + n\beta_{s+1} \\ &= P + Q, \quad \text{avec un entier} \end{aligned}$$

$$P = r \left[ \sum_{i=-1}^{s-1} (-1)^i \nu_{i+1} (p_s q_i - p_i q_s) \right] + v_{r,s+1},$$

et une partie fractionnaire

$$Q = r(q_s \alpha - p_s) \left[ \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \nu_{i+1} q_i \right] + n\beta_{s+1} + rq_s \nu_{s+1} \alpha_s - v_{r,s+1}$$

(On a additionné et soustrait  $v_{r,s+1}$  et  $rp_s \sum (-1)^i \nu_{i+1} q_i$ ).

Par 3.2 (ii) et (iii), on a :

$$\left| \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \nu_{i+1} q_i \right| \leq q_s ,$$

donc,

$$|r(q_s \alpha - p_s) \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \nu_{i+1} q_i| \leq r \alpha_s q_s = n q_s ;$$

par 3.2 (i), on a  $0 \leq n \beta_{s+1} < n \alpha_s$  ; on en tire :

$$|Q - (r q_s \nu_{s+1} \alpha_s - v_{r,s+1})| < 2n \alpha_s .$$

Posons  $r \nu_{s+1} a_{s+1}^{-1} = v_{r,s+1} + \varepsilon t_{r,s+1}$ ,  $\varepsilon \in \{-1, +1\}$  ; on a alors

$$r q_s \nu_{s+1} \alpha_s - v_{r,s+1} = r \nu_{s+1} a_{s+1}^{-1} (a_{s+1} q_s \alpha_s - 1) + \varepsilon t_{r,s+1} .$$

Or on a  $\nu_{s+1} \leq a_{s+1}$  et (I.2.2, inégalité (iv)) :

$$[(2 + a_{s+1}) q_s]^{-1} < \alpha_s < (a_{s+1} q_s)^{-1} ,$$

dont on déduit :

$$\begin{aligned} |a_{s+1} q_s \alpha_s - 1| &< 1 < 2 q_s \alpha_s , \\ |Q - \varepsilon t_{r,s+1}| &< 2n \alpha_s + 2r q_s \alpha_s = 4n \alpha_s . \end{aligned}$$

□

**3.5.** On conserve les notations précédentes.

PROPOSITION. — Soient  $\varphi \in C$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pour que  $\beta$  appartienne à  $Z(\alpha, \varphi)$  (resp.  $Z(\alpha)$ ), il faut et il suffit que la relation (9) (resp.(10)) ci-dessous soit vérifiée :

$$(9) \quad \lim_{n=rq_s \in A} n^p \widehat{\varphi}(n) t_{r,s+1} a_{s+1} = 0 , \quad \text{pour tout } p \geq 1 ;$$

(10)  $\exists K > 0$ ,  $\exists p \geq 0$ , tels que

$$\min(a_s - \nu_s, \nu_s) \leq K q_s^p , \quad \text{pour tout } s \geq 1 .$$

*Démonstration* : Pour  $n = r q_s \in A$ , écrivons :

$$\|n\beta\| = t_{r,s+1} + \varepsilon_n ,$$

avec  $|\varepsilon_n| < 4n \alpha_s$  d'après le lemme 3.4. Démontrons d'abord l'équivalence de (7) et (9). On a

$$\lim_{n \in A} n^p \varepsilon_n \|n\alpha\|^{-1} \widehat{\varphi}(n) = 0 , \quad \forall p \geq 1 ,$$

donc (7) équivaut à

$$\lim_{n \in A} n^p \widehat{\varphi}(n) t_{r,s+1} \|n\alpha\|^{-1} = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

Or on a

$$(3na_{s+1})^{-1} < \|n\alpha\| = r\alpha_s < na_{s+1}^{-1},$$

donc la relation précédente équivaut à (9). Montrons maintenant l'équivalence de (8) et (10). On a  $|\varepsilon_{q_s}| \leq 4q_s\alpha_s$ , donc la relation (8) équivaut à :  $\exists C > 0, \exists p \geq 0$  t.q.

$$t_{1,s+1} < Cq_s^p \alpha_s, \quad \forall x \geq 0.$$

On obtient (10) en remarquant que :

$$t_{1,s+1} = \frac{1}{a_{s+1}} \text{Min}(\nu_{s+1}, a_{s+1} - \nu_{s+1}),$$

et

$$\frac{1}{3a_{s+1}q-s} < \alpha_s < \frac{1}{a_{s+1}q_s}.$$

□

**3.6.** Soit  $(\nu_i)_{i \geq 0}$  une suite d'entiers qui vérifie 3.2 (ii) et (iii); la série  $\sum_{i \geq 0} \nu_i \alpha_{i-1}$  est alors convergente, et la suite d'entiers associée suivant la recette de 3.2 à la somme  $\beta$  de cette série est exactement  $(\nu_i)_{i \geq 0}$ .

*COROLLAIRE.* — Soit  $\varphi \in C$ ; les groupes  $Z(\alpha, \varphi)$  et  $Z(\alpha)$  sont des sous-groupes boréliens de  $\mathbb{R}$  qui ont la puissance du continu. Si  $Z(\alpha, \varphi) = \mathbb{R}$ ,  $(\alpha, \varphi)$  et  $R_\alpha$  sont conjugués; si  $Z(\alpha) = \mathbb{R}$ ,  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne; si  $\alpha$  est un nombre de Liouville, l'inclusion  $Z(\alpha) \subset Z(\alpha, \varphi)$  est stricte, et  $Z(\alpha) - \mathbb{Q}$  est constitué de nombres de Liouville.

*Démonstrations :* Les relations (9) et (10) définissant  $Z(\alpha, \varphi)$  et  $Z(\alpha)$  montrent que ces sous-groupes sont boréliens.

Toute suite  $(\nu_s)$  vérifiant  $\nu_{2s} = 0, \nu_{2s+1} \in \{0, 1\}$  définit un élément de  $Z(\alpha)$ ; ce sous-groupe a donc la puissance du continu, de même que  $Z(\alpha, \varphi)$  qui contient  $Z(\alpha)$ .

Si la relation (9) est satisfaite par tout choix de  $\beta$ , on a

$$\lim_{n \in A} n^p \widehat{\varphi}(n) a_{s+1} = 0, \quad \forall p \geq 1,$$

ce qui implique que  $f$  et  $R_\alpha$  sont conjugués. De même, si (10) est satisfaite par tout choix de  $\beta$ , on a  $a_s = O(q_{s-1}^p)$  pour un  $p \geq 0$  et  $\alpha$  est diophantien.

Soit  $\alpha$  un nombre de Liouville. Si  $\beta \in Z(\alpha)$ , on a  $Z(\beta) \subset Z(\alpha)$  d'après (6), donc  $\beta$  est un nombre de Liouville. Enfin, pour tout  $\varphi \in C$ , il est facile de construire une suite  $(\nu_s)$  qui vérifie (10) mais pas (9), ce qui montre que l'inclusion  $Z(\alpha) \subset Z(\alpha, \varphi)$  est stricte.

**3.8. Remarque**

Soit  $\varphi \in C$ ; la condition (5) de 2.7, qui caractérise  $Z(\alpha, \varphi)$  est équivalente à la relation suivante :

$$\sum_{n \geq 1} n^p \|n\alpha\|^{-1} |\widehat{\varphi}(n)| |\sin \pi n\beta| < +\infty ,$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

Cela signifie que si  $f = (\alpha, \varphi)$  et  $R_\alpha$  ne sont pas conjugués dans  $SW$ ,  $Z(\alpha, \varphi)$  est un ensemble de convergence absolue au sens de l'analyse harmonique (cf. [K-S]).

Citons-en une conséquence ([K-S]) : toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{T}^1$ , dont le support est contenu dans  $Z(\alpha, \varphi)/\mathbb{Z}$ , vérifie :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\widehat{\mu}(n)| = 1 .$$

**3.9. THÉORÈME.** — *Pour tout  $f = (\alpha, \varphi) \in SW$  ( $\alpha$  irrationnel), le centralisateur de  $f$  dans  $SW$  est l'adhérence du sous-groupe engendré par  $f$  et  $R_1$ .*

*Démonstration :* Il est clair que l'adhérence de ce sous-groupe est contenue dans le centralisateur de  $f$ .

Réciproquement, soit  $g = (\beta, \psi)$  un élément de  $SW$  qui commute à  $f$ . Suivant 3.2, on écrit  $\beta = \sum_{i \geq 0} \nu_i \alpha_{i-1}$ , et on pose, pour  $\ell \geq 1$  :

$$k_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} (-1)^{i-1} \nu_i q_{i-1} \in \mathbb{Z} ,$$

$$f^{k_\ell} = (k_\ell \alpha, \varphi_\ell) .$$

Par la relation (2) de 2.4, on a :

$$|\widehat{\varphi}_\ell(n) - \widehat{\psi}(n)| = |\widehat{\varphi}(n)| \left| \frac{e^{2\pi i n(k_\ell \alpha - \beta)} - 1}{e^{2\pi i n\alpha} - 1} \right| .$$

Il résulte de 3.2 qu'on a  $|k_\ell| \leq q_\ell$ ,  $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \|\beta - k_\ell \alpha\| = 0$ , et, pour tout  $n \geq 1$  :

$$(11) \quad \lim_{\ell \rightarrow +\infty} |\widehat{\varphi}_\ell(n) - \widehat{\psi}(n)| = 0 .$$

Notons aussi, pour tout  $n \geq 1$ , la relation :

$$(12) \quad |\widehat{\varphi}_\ell(n)| \leq |k_\ell| |\widehat{\varphi}(n)| .$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ; si  $n$  n'appartient pas à l'ensemble  $A$  défini en 3.3, on a  $\|n\alpha\| \geq \frac{1}{2n}$ , d'où on tire :

$$(13) \quad |\widehat{\varphi}_\ell(n) - \widehat{\psi}(n)| \leq n |\widehat{\varphi}(n)| .$$

Si  $n \geq q_\ell \geq |k_\ell|$ , il résulte de (12) qu'on a :

$$(14) \quad |\widehat{\varphi}_\ell(n) - \widehat{\psi}(n)| \leq n (|\widehat{\varphi}(n)| + |\widehat{\psi}(n)|) .$$

Si  $n = r q_s \in A$ , avec  $s < \ell$ , on a  $\|n\alpha\| \geq \alpha_{\ell-1} > \beta_\ell = \|k_\ell \alpha - \beta\|$ , donc :

$$(15) \quad |\widehat{\varphi}_\ell(n)\widehat{\psi}(n)| \leq \frac{\pi}{2} |\widehat{\varphi}(n)| \frac{\|n(k_\ell \alpha - \beta)\|}{\|n\alpha\|} < n \frac{\pi}{2} |\widehat{\varphi}(n)| .$$

En rassemblant (13), (14), (15), on a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$(16) \quad |\widehat{\varphi}_\ell(n) - \widehat{\psi}(n)| \leq n \frac{\pi}{2} |\widehat{\varphi}(n)| + |\widehat{\psi}(n)| .$$

Lorsque  $p > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  varient, les ouverts  $V(p, \varepsilon, g)$  formés par les couples  $(\gamma, \chi) \in SW$  qui vérifient  $|\gamma - \beta| < \varepsilon$ ,  $n^p |\widehat{\chi}(n) - \widehat{\psi}(n)| < \varepsilon$  pour tout  $n \geq 1$ , forment un système fondamental de voisinages de  $g$  dans  $SW$ .

Pour  $\ell \geq 1$ , soit  $j_\ell$  l'entier le plus proche de  $\beta - k_\ell \alpha$ . En utilisant le système fondamental de voisinages  $V(p, \varepsilon, g)$  et les relations (11) et (16), il est immédiat que la suite  $R_{j_\ell} f^{k_\ell}$  converge vers  $g$  dans  $SW$ .  $\square$

#### 4. Un résultat de connexité

**4.1.** Dans  $SW \times SW$ , considérons la partie  $\mathcal{P}$  formée par les couples d'éléments permutables. C'est une partie fermée de  $SW \times SW$ .

La partie  $\mathcal{P}$  est contractile, comme le montre l'application  $c : \mathcal{P} \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}$  définie par :

$$c((\alpha, \varphi), (\beta, \psi), t) = \begin{cases} ((\alpha, t\varphi), (\beta, t\psi)) , & t \geq 0 \\ ((\alpha(1+t), 0), (\beta(1+t), 0)) , & t \leq 0 . \end{cases}$$

**4.2. THÉORÈME.** — *L'espace  $\mathcal{P}$  est localement connexe par arcs.*

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de ce résultat.

Pour qu'un espace topologique  $X$  soit localement connexe par arcs, il suffit que pour tout voisinage  $V$  d'un point  $x \in X$ , on puisse atteindre par des chemins dans  $V$  partant de  $x$  tous les points d'un voisinage  $W \subset V$  de  $x$  : l'union de ces chemins est alors un voisinage connexe par arcs de  $x$  contenu dans  $V$ .

Les chemins que nous construisons sont du type suivant : les extrémités permettent d'annuler les coefficients de Fourier d'ordre élevé; le lemme ci-dessous permet alors de régler le cas du nombre fini de coefficients de Fourier subsistant.

**4.3.** On considère l'espace  $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} = E$  muni de la norme :

$$|(\alpha, \lambda, \beta, \mu)| = \sup(|\alpha|, |\beta|, |\lambda|, |\mu|) ,$$

pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ; soit  $Y$  la partie de  $E$  d'équation :

$$\mu(e^{2\pi i \alpha} - 1) = \lambda(e^{2\pi i \beta} - 1) ,$$

et  $\pi$  la projection canonique :

$$\pi(\alpha, \lambda, \beta, \mu) = (\alpha, \beta)$$

de  $E$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

LEMME. — Soient  $\gamma_o = (\alpha_o, \lambda_o, \beta_o, \mu_o) \in Y$ ,  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $\gamma_1 \in Y$  assez proche de  $\gamma_o$ , il existe une application continue  $\Gamma$  de  $[-1, +1]$  dans  $Y$  qui vérifie :

- i)  $\Gamma(-1) = \gamma_o$ ,  $\Gamma(1) = \gamma_1$  ;
- ii)  $|\Gamma(t) - \gamma_o| < \varepsilon$  pour  $t \in [-1, +1]$  ;
- iii)  $\pi(\Gamma(t)) = \pi(\gamma_o) = (\alpha_o, \beta_o)$ , pour  $t \in [-1, 0]$ ,  
 $\pi(\Gamma(t)) = t\pi(\gamma_1) + (1-t)\pi(\gamma_o)$ , pour  $t \in [0, 1]$ .

Démonstration : Posons  $\gamma_1 = (\alpha_1, \lambda_1, \beta_1, \mu_1)$ ,  $\Gamma(t) = (\alpha(t), \lambda(t), \beta(t), \mu(t))$  ; soit  $b$  la fonction continue sur  $Y$  définie par :

$$b(\gamma) = b((\alpha, \lambda, \beta, \mu)) = \mu(e^{2\pi i\alpha} - 1) = \lambda(e^{2\pi i\beta} - 1) .$$

Les fonctions  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  sont déterminées par iii). La fonction  $B(t) = b(\Gamma(t))$  détermine alors  $\lambda(t)$  (resp.  $\mu(t)$ ) lorsque  $\beta(t)$  (resp.  $\alpha(t)$ ) n'est pas entier.

a) Supposons que  $\alpha_o$  n'est pas un entier, qu'on a  $|\alpha_o - \alpha_1| < \frac{1}{2}\|\alpha_o\|$ , et que la fonction  $B$  vérifie :

$$|B(t) - b(\gamma_o)| \leq |b(\gamma_1) - b(\gamma_o)| ,$$

pour  $t \in [-1, +1]$ .

Par iii), on voit que  $\alpha(t)$  n'est pas entier pour  $t \in [-1, +1]$ , et vérifie :

$$|e^{2\pi i\alpha(t)} - 1| \geq \|\alpha_o\| .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\mu(t) - \mu_o| &= |B(t)(e^{2\pi i\alpha(t)} - 1)^{-1} - b(\gamma_o)(e^{2\pi i\alpha_o} - 1)^{-1}| \\ &\leq |B(t) - b(\gamma_o)| |e^{2\pi i\alpha(t)} - 1|^{-1} \\ &\quad + |b(\gamma_o)| |(e^{2\pi i\alpha(t)} - 1)^{-1} - (e^{2\pi i\alpha_o} - 1)^{-1}| \\ &\leq |b(\gamma_1) - b(\gamma_o)| \|\alpha_o\|^{-1} + |b(\gamma_o)| |\alpha_1 - \alpha_o| 2\pi \|\alpha_o\|^{-2} , \end{aligned}$$

donc  $|\mu(t) - \mu_o| < \varepsilon$  si  $|\gamma_o - \gamma_1|$  est assez petit.

b) Supposons que  $\alpha_o$  et  $\beta_o$  ne sont pas entiers.

Pour  $|\alpha_o - \alpha_1| < \frac{1}{2}\|\alpha_o\|$ ,  $|\beta_o - \beta_1| < \frac{1}{2}\|\beta_o\|$ , on définit :

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \gamma_o \quad \text{pour } t \in [-1, 0] , \\ B(t) &= t b(\gamma_1) + (1-t)b(\gamma_o) , \\ \lambda(t) &= (e^{2\pi i\beta(t)} - 1)^{-1} B(t) , \\ \mu(t) &= (e^{2\pi i\alpha(t)} - 1)^{-1} B(t) , \quad \text{pour } t \in [0, 1] . \end{aligned}$$

Il résulte alors de a) que le chemin ainsi défini vérifie les conditions du lemme, si  $|\gamma_o - \gamma_1|$  est assez petit.

c) Supposons que  $\beta_o$  est entier mais  $\alpha_o$  ne l'est pas.

On a donc  $\mu(t) = B(t) = 0$  pour  $t \in [-1, 0]$  (cf. iii). Définissons  $\lambda(t)$  par :

$$\lambda(t) = -t\lambda_o + (1+t)\lambda_1, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\lambda(t) = \lambda_1, \quad t \in [0, 1].$$

Supposons aussi que  $|\alpha_o - \alpha_1| < \frac{1}{2}\|\alpha_o\|$ ; les fonctions  $B(t)$  et  $\mu(t)$  sont alors définies sur  $[0, 1]$ , et on a :

$$|B(t) - b(\gamma_o)| = |\lambda_1| |e^{2\pi i \alpha(t)} - 1| \leq |b(\gamma_1)|,$$

dès que  $|\beta_o - \beta_1| < \frac{1}{2}$ . Il résulte de nouveau de a) que le chemin  $\Gamma$  vérifie les conditions du lemme.

d) Le cas où  $\alpha_o$  est entier mais  $\beta_o$  ne l'est pas se traite symétriquement.

e) Supposons que  $\alpha_o, \beta_o$  sont entiers. On a alors  $B(t) = 0$  pour  $t \in [-1, 0]$ , et on définit :

$$\lambda(t) = -t\lambda_o + (1+t)\lambda_1,$$

$$\mu(t) = -t\mu_o + (1+t)\mu_1, \quad \text{pour } t \in [-1, 0].$$

Si  $b(\gamma_1) = 0$ , et  $|\gamma_1 - \gamma_o|$  est assez petit, il suffit de poser  $\lambda(t) = \lambda_1, \mu(t) = \mu_1$  pour  $t \in [0, 1]$  pour obtenir un chemin  $\Gamma$  satisfaisant aux conditions du lemme.

Supposons que  $b(\gamma_1)$  est non nul, et qu'on a  $|\alpha_o - \alpha_1| < \frac{1}{2}, |\beta_o - \beta_1| < \frac{1}{2}$ . Alors pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  ne sont pas entiers, et la formule  $B(t) = tb(\gamma_1)$  détermine  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$ , avec :

$$|\mu(t) - \mu_1| = \left| t \frac{e^{2\pi i t \|\alpha_1\|} - 1}{e^{2\pi i \|\alpha_1\|} - 1} - 1 \right| |\mu_1|.$$

Cette formule et la formule analogue pour  $|\lambda(t) - \lambda_1|$  permettent encore de conclure que  $\Gamma$  satisfait aux conditions du lemme, si  $|\gamma_o - \gamma_1|$  est assez petit. □

**4.4.** Soient  $f = (\alpha, \varphi), g = (\beta, \psi)$  deux éléments permutables de  $SW$ . Donnons-nous  $\varepsilon_1 > 0, p > 0$ , et considérons le voisinage  $V = V(p, \varepsilon_1, f) \times V(p, \varepsilon_1, g)$  de  $(f, g)$  dans  $\mathcal{P} \subset SW \times SW$  (cf. 3.9 pour la définition de  $V(p, \varepsilon_1, f)$ ).

Soit  $n_o$  un entier strictement positif tel qu'on ait  $n^p |\widehat{\varphi}(n)| < \frac{1}{2}\varepsilon_1, n^p |\widehat{\psi}(n)| < \frac{1}{2}\varepsilon_1$  pour  $n > n_o$ ; posons  $\varepsilon = \varepsilon_1 n_o^{-p}$ .

Comme  $f$  et  $g$  sont permutables, le point  $(n\alpha, \widehat{\varphi}(n), n\beta, \widehat{\psi}(n))$  appartient à  $Y$  pour tout  $n \geq 1$ ; on peut donc trouver, par le lemme 4.3, un réel  $\delta > 0$  ayant la propriété suivante. Si  $f_2 = (\alpha_2, \varphi_2), g_2 = (\beta_2, \psi_2)$  sont des éléments permutables de  $SW$  qui vérifient :

$$(c) \quad \begin{cases} |\alpha - \alpha_2| < \delta, & |\beta - \beta_2| < \delta, \\ |\widehat{\varphi}(n) - \widehat{\varphi}_2(n)| < \delta, & |\widehat{\psi}(n) - \widehat{\psi}_2(n)| < \delta, \quad \forall 1 \leq n \leq n_o, \end{cases}$$

alors il existe des fonctions  $\alpha(t), \beta(t), \lambda_n(t), \mu_n(t)$  ( $1 \leq n \leq n_o$ ), définies et continues sur  $[-1, +1]$  qui vérifient, pour  $1 \leq n \leq n_o$

i)  $\alpha(t) = \alpha, \beta(t) = \beta$  pour  $t \in [-1, 0]$  :

- $\alpha(t) = t\alpha_2 + (1-t)\alpha$ ,  $\beta(t) = t\beta_2 + (1-t)\beta$ , pour  $t \in [0, 1]$  ;  
 ii)  $\lambda_n(-1) = \widehat{\varphi}(n)$ ,  $\lambda_n(1) = \widehat{\varphi}_2(n)$ ,  $\mu_n(-1) = \widehat{\psi}(n)$ ,  $\mu_n(1) = \widehat{\psi}_2(n)$  ;  
 iii)  $|\mu_n(t) - \widehat{\psi}(n)| < \varepsilon$ ,  
 $|\lambda_n(t) - \widehat{\varphi}(n)| < \varepsilon$ , pour  $t \in [-1, +1]$  ;  
 iv)  $\lambda_n(t)(e^{2\pi i n \beta(t)} - 1) = \mu_n(t)(e^{2\pi i n \alpha(t)} - 1)$ , pour  $t \in [-1, +1]$ .

Les couples  $(f_2, g_2)$  de  $\mathcal{P}$  qui vérifient (c) et appartiennent à  $V(p, \varepsilon_1/2, f) \times V(p, \varepsilon_1/2, g)$  forment un voisinage  $W$  de  $(f, g)$  dans  $\mathcal{P}$ .

Pour un tel couple, on définit un chemin  $\gamma(t) = ((\alpha_t, \varphi_t), (\beta_t, \psi_t))$ ,  $t \in [-2, +2]$ , de la façon suivante :

- pour  $t \in [-1, +1]$ ,  $\alpha_t = \alpha(t)$ ,  $\beta_t = \beta(t)$ , et :

$$\varphi_t(x) = 2 \sum_{n=1}^{n_o} \operatorname{Re}(\lambda_n(t) e^{2\pi i n x}) ,$$

$$\psi_t(x) = 2 \sum_{n=1}^{n_o} \operatorname{Re}(\mu_n(t) e^{2\pi i n x}) ,$$

- pour  $t \in [-2, -1]$ ,  $\alpha_t = \alpha$ ,  $\beta_t = \beta$ , et :

$$\varphi_t = (2+t)\varphi_{-1} - (1+t)\varphi ,$$

$$\psi_t = (2+t)\psi_{-1} - (1+t)\psi ,$$

- pour  $t \in [1, 2]$ ,  $\alpha_t = \alpha_2$ ,  $\beta_t = \beta_2$ , et :

$$\varphi_t = (2-t)\varphi_1 + (t-1)\varphi_2 ,$$

$$\psi_t = (2-t)\psi_1 + (t-1)\psi_2 ,$$

Le chemin  $\gamma$  possède les propriétés suivantes :  $\gamma(-2) = (f, g)$ ,  $\gamma(2) = (f_2, g_2)$ ,  $\gamma$  est continu, prend ses valeurs dans  $\mathcal{P}$  (cf. iv)); le choix de  $n_o$  et les propriétés i), iii) montrent que  $\gamma(t) \in V$  pour  $t \in [-2, +2]$ .

La démonstration du théorème est donc complète, compte-tenu de la remarque qui suit l'énoncé de celui-ci.  $\square$

## 5. Propriétés algébriques des groupes $Z(\alpha)$

**5.1.** Lorsque  $\alpha$  est un nombre irrationnel qui satisfait à une condition diophantienne, on a vu que  $Z(\alpha) = \mathbb{R}$ .

On s'intéresse dans la suite au cas où  $\alpha$  est un nombre de Liouville, dont on note  $(p_s/q_s)_{s \geq 0}$  la suite des réduites; pour  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $K > 0$ , on note  $E_{i,K} = E_{i,K}(\alpha)$  la partie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  constituée par les couples  $(p_s, q_s)$  qui vérifient :

$$\alpha_s = \|q_s \alpha\| < K^{-1} q_s^{-i} .$$

La relation (8) de 3.3 montre que, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $K > 0$ ,  $Z(\alpha)$  est l'ensemble des réels  $\beta$  pour lesquels il existe  $K' > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tels que :

$$(17) \quad \|q_s \beta\| < K' \|q_s \alpha\| q_s^p ,$$

pour tout couple  $(p_s, q_s)$  de  $E_{i,K}(\alpha)$ .

LEMME. — Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  ; on suppose que l'ensemble des rationnels  $m/n$ , avec  $(m, n) \in E$ ,  $m$  et  $n$  premiers entre eux, est dense dans  $\mathbb{R}$ . Alors les nombres de Liouville  $\alpha$  tels que  $E$  coupe  $E_{i,K}(\alpha)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $K > 0$ , forment une partie résiduelle de  $\mathbb{R}$ .

Démonstration : pour  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $m$ ,  $n$  premiers entre eux,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $K > 0$ , soit  $I(m, n, i, K)$  l'intervalle ouvert de centre  $m/n$  et de longueur  $K^{-1}n^{-i-1}$ . Posons :

$$U_{i,K} = \bigcup_{\substack{(m,n) \in E \\ m \wedge n = 1}} I(m, n, i, K),$$

$$U = \left( \bigcap_{i,j \in \mathbb{N}^*} U_{i,j} \right) - \mathbb{Q}.$$

Alors  $U_{i,j}$  est un ouvert dense et  $U$  une partie résiduelle de  $\mathbb{R}$ . Pour  $i \geq 1$ ,  $j \geq 2$ ,  $\alpha \in U_{i,j} - \mathbb{Q}$ , il existe  $(m, n) \in E$ ,  $m \wedge n = 1$ , tels que  $|\alpha - \frac{m}{n}| < j^{-1} n^{-i-1} \leq \frac{1}{2} n^{-2}$ .

Donc  $m/n$  est une réduite de  $\alpha$  et  $(m, n) \in E_{i,j}(\alpha)$ . De plus, l'inégalité précédente montre que tout élément de  $U$  est un nombre de Liouville.  $\square$

5.2. Soient  $\alpha$  un nombre de Liouville, et  $p/q$  un rationnel non entier ( $p \wedge q = 1$ ,  $q \geq 2$ ).

Il résulte de (17) que  $p/q$  appartient à  $Z(\alpha)$  si et seulement si  $E_{i,K}(\alpha)$  est contenu dans  $\mathbb{Z} \times q\mathbb{N}^*$  pour  $i$ ,  $K$  assez grands.

En prenant  $E = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - q\mathbb{N})$  dans le lemme 5.1, on obtient donc le résultat suivant :

THÉORÈME. — Pour un ensemble résiduel de nombres de Liouville, on a  $Z(\alpha) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .

5.3. Soient  $q$  un entier au moins égal à 2,  $k$  un entier relatif,  $\alpha$  un nombre de Liouville.

Il résulte de (17) que  $\frac{1}{q}(\alpha - k)$  appartient à  $Z(\alpha)$  si et seulement si  $E_{i,K}(\alpha)$  est contenu dans  $(k + q\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}^*$  pour  $i$ ,  $K$  assez grands. On en déduit d'abord que, si  $\bar{\alpha}$  est l'image de  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$ , l'équation  $q\bar{\beta} = \bar{\alpha}$  a au plus une solution  $\bar{\beta}$  dans  $Z(\alpha)/\mathbb{Z}$ . En prenant d'autre part, dans le lemme 5.1,  $E = [\mathbb{Z} - (k + q\mathbb{Z})] \times \mathbb{N}^*$ , on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME. — Pour un ensemble résiduel de nombres de Liouville  $\alpha$ , aucune des équations  $q\beta = \alpha + k$ ,  $q \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , n'a de solution dans  $Z(\alpha)$ .

5.4. Le résultat suivant est à comparer avec 5.2.

THÉORÈME. — Pour tout sous-groupe  $G$  de  $\mathbb{Q}$  contenant  $\mathbb{Z}$ , il existe un nombre de Liouville  $\alpha$  tel que  $Z(\alpha) \cap \mathbb{Q} = G$ .

On note  $P$  l'ensemble des nombres premiers,  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , et  $\mathcal{G}$  l'ensemble des sous-groupes de  $\mathbb{Q}$  contenant  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $G \in \mathcal{G}$ ; on associe à  $G$  un élément  $(g_p)_{p \in P}$  de  $\overline{\mathbb{N}}^P$  de la façon suivante : soit  $G_p$  le  $p$ -sous-groupe maximal de  $G/\mathbb{Z}$  ( $p \in P$ ); si  $G_p$  est infini, on pose  $g_p = +\infty$ , sinon son cardinal est égal à  $p^{g_p}$ .

Il est facile de voir que cette correspondance est une bijection de  $\mathcal{G}$  sur  $\overline{\mathbb{N}}^P$ .

**5.5.** Pour  $p \in P$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\nu_p(q)$  l'exposant de  $p$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $q$ . Le but du lemme suivant est de construire un nombre de Liouville  $\alpha$  tel que, pour tout nombre premier  $p$ , l'ordre  $\nu_p(\hat{q}_s)$  ait une limite  $g_p \in \overline{\mathbb{N}}$  lorsque  $p_s q_s = \hat{q}_s$  décrit les dénominateurs des réduites correspondant aux éléments de  $E_{4,K}(\alpha)$  (avec  $K$  assez grand).

LEMME. — Soit  $(g_p)_{p \in P} \in \overline{\mathbb{N}}^P$ . Il existe trois suites d'entiers  $(p_i)_{i \geq 0}$ ,  $(q_i)_{i \geq 0}$ ,  $(r_i)_{i \geq 0}$ , ayant les propriétés suivantes :

- i)  $q_0 \geq 3$ ,  $q_{i+1} \geq 4(2q_i^2)^{i+2}$ , pour  $i \geq 0$ ;
- ii)  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu_p(q_i) = g_p$ , pour tout  $p \in P$ ;
- iii) pour tout  $i \geq 0$ ,  $r_i \wedge p_i = r_i \wedge q_i = 1$ ;
- iv)  $p_i \in P$ , et  $q_i \leq p_i < 2q_i$  pour tout  $i \geq 0$ ;
- v)  $\left| \left( \frac{r_i}{p_i q_i} - \frac{r_{i+1}}{p_{i+1} q_{i+1}} \right) \right| < q_{i+1}^{-1}$  pour tout  $i \geq 0$ .

*Démonstration* : pour  $i \geq 0$ , posons  $\tilde{q}_i = \prod_{\substack{p \in P \\ p \leq i}} p^{\inf(i, g_p)}$ ,  $q_i = \tilde{q}_i s_i$ , où  $(s_i)_{i \geq 0}$  est

une suite de nombres premiers tendant très rapidement vers l'infini. La suite  $(q_i)_{i \geq 0}$  vérifie alors i) et ii). D'après le théorème de Tchebychev, pour tout entier  $\ell \geq 2$ , il existe un nombre premier  $p$  vérifiant  $\ell \leq p < 2\ell$ . On peut donc choisir des nombres premiers  $p_i$  vérifiant iv).

On construit la suite  $(r_i)_{i \geq 0}$  par induction, en prenant  $r_0 = 1$ . Supposons que  $r_i$  soit déjà déterminé; comme  $p_{i+1} \geq q_{i+1}$ , il existe un entier  $n$  tel que :

$$\left| \frac{n}{p_{i+1}} - \frac{r_i}{p_i q_i} \right| < \frac{1}{2} q_{i+1}^{-1};$$

l'un au moins des deux entiers  $nq_{i+1} - 1$ ,  $nq_{i+1} + 1$  n'est pas divisible par  $p_{i+1}$  (et est clairement premier avec  $q_{i+1}$ ); il satisfait aux conditions requises pour  $r_{i+1}$ .  $\square$

### 5.6. Démonstration du théorème 5.4

Soient  $G \in \mathcal{G}$ ,  $(g_p)_{p \in P}$  l'élément de  $\overline{\mathbb{N}}^P$  qui lui correspond, et  $(p_i)_{i \geq 0}$ ,  $(q_i)_{i \geq 0}$ ,  $(r_i)_{i \geq 0}$ , trois suites d'entiers qui vérifient les conclusions du lemme.

Par v), la suite  $\left( \frac{r_i}{p_i q_i} \right)_{i \geq 0}$  est convergente; par i) et iv), sa limite  $\alpha$  vérifie :

$$(18) \quad \left| \alpha - \left( \frac{r_i}{p_i q_i} \right) \right| \leq \sum_{j>i} q_j^{-1} \leq 2 q_{i+1}^{-1} \leq \frac{1}{2} (p_i q_i)^{-i-2}.$$

Donc  $\alpha$  est un nombre de Liouville; par iii), les  $\left( \frac{r_i}{p_i q_i} \right)_{i \geq 0}$  en sont des réduites.

Supposons qu'il existe une réduite  $p/q$  de  $\alpha$  distincte des  $\frac{r_i}{p_i q_i}$  telle que  $q > p_0 q_0$ ; soit  $i \geq 0$  tel que  $p_i q_i < q < p_{i+1} q_{i+1}$ ; on a alors (par (18)) :

$$(2q)^{-1} < \|p_i q_i \alpha\| = p_i q_i \left| \alpha - \frac{r_i}{p_i q_i} \right| < 2q q_{i+1}^{-1},$$

$$\|q\alpha\| > (2p_{i+1} q_{i+1})^{-1} \geq (4q_{i+1}^2)^{-1},$$

d'où on tire  $(2q)^2 > q_{i+1}$ ,  $\|q\alpha\| > (64q^4)^{-1}$ , ce qui signifie que  $(p, q)$  n'appartient pas à  $E_{4,64}(\alpha)$ . En utilisant aussi (18), on voit donc que, pour  $K$  assez grand, l'ensemble  $E_{4,K}(\alpha)$  est de la forme :

$$E_{4,K}(\alpha) = \{(r_i, p_i q_i), \quad i \geq i_0\}.$$

Il résulte alors de 5.2 et des conditions ii) et iv) de 5.5 que  $Z(\alpha) \cap \mathbb{Q} = G$ . □

**5.7.** On étudie maintenant les propriétés de divisibilité des groupes  $Z(\alpha)$ , en commençant par quelques rappels de terminologie (cf. [Ka]).

Soient  $G$  un groupe abélien,  $p$  un nombre premier; on dit que  $x \in G$  est  $p$ -divisible (resp. divisible) si toutes les équations  $p^n y = x$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  (resp.  $ny = x$ ,  $n \geq 2$ ) ont une solution dans  $G$ . On dit que  $G$  est  $p$ -divisible (resp. divisible) si tous ses éléments le sont. Il existe toujours un plus grand sous-groupe  $p$ -divisible (resp. divisible) de  $G$ , noté  $G_p$  (resp.  $G_d$ ). On a  $G_d \subset G_p$ .

Ceci étant, soient  $\alpha$  un nombre de Liouville,  $G = Z(\alpha)$ ,  $G' = G/\mathbb{Z}$ ,  $\pi$  la projection de  $G$  sur  $G'$ . Si  $x \in G$  est  $p$ -divisible (resp. divisible),  $\pi(x)$  l'est aussi; on a donc  $\pi(G_d) \subset G'_d$ ,  $\pi(G_p) \subset G'_p$ .

**THÉORÈME.** — Soit  $p$  un nombre premier; les groupes  $G_p$ ,  $G'_p$ ,  $G'_d$ ,  $G/G_d$ ,  $G'/G'_d$ ,  $G/G_p$ ,  $G'/G'_p$  ont la puissance du continu.

Il suffit, d'après ce qui précède, de prouver que  $G_d$  et  $G'/G'_p$  ont la puissance du continu; c'est l'objet de la fin du paragraphe.

**5.8.** Soit  $(P_i, Q_i)_{i \geq 0}$  la suite des éléments de l'ensemble infini  $E_{3,4}(\alpha)$ , rangés par  $Q_i$  croissants. On a donc, pour  $i \geq 0$  :

$$\frac{1}{2} Q_{i+1}^{-1} < \|Q_i \alpha\| < \frac{1}{4} Q_i^{-3},$$

d'où on tire :

$$(19) \quad \begin{aligned} Q_{i+1} &> 2 Q_i^3, \\ \sum_{j \geq i} \frac{Q_j}{Q_{j+1}} &< 2 \frac{Q_i}{Q_{i+1}} < Q_i^{-2}. \end{aligned}$$

Dans le groupe  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  des suites d'entiers  $r = (r_i)_{i \geq 0}$ , considérons celles qui vérifient :

$$\|r\| = \sup_{i \geq 0} \left( \frac{Q_{i+1}}{Q_i} \left| \frac{r_i}{Q_i} - \frac{r_{i+1}}{Q_{i+1}} \right| \right) < +\infty.$$

Elles forment un sous-groupe  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  qui contient le sous-groupe  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$  des suites nulles à partir d'un certain rang. Posons  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ .

LEMME. — Pour toute suite  $r = (r_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{R}$ , la suite  $(r_i/Q_i)_{i \geq 0}$  est convergente; l'application  $L : r \mapsto \text{Lim}(r_i/Q_i)$  est un homomorphisme de  $\mathcal{R}$  dans  $Z(\alpha)$  dont le noyau est  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ .

Démonstration : pour  $r = (r_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{R}$  et  $k < \ell$ , on a, d'après (19) :

$$\left| \frac{r_k}{Q_k} - \frac{r_\ell}{Q_\ell} \right| \leq \|r\| \sum_{j \geq k} \frac{Q_j}{Q_{j+1}} < 2\|r\| \frac{Q_k}{Q_{k+1}} < Q_k^{-2} \|r\|$$

La suite  $(r_i/Q_i)_{i \geq 0}$  est donc convergente et sa limite  $\beta$  vérifie :

$$(20) \quad \left| \beta - \frac{r_k}{Q_k} \right| < 2\|r\| \frac{Q_k}{Q_{k+1}} < Q_k^{-2} \|r\|, \quad k \geq 0.$$

On en déduit que le noyau de  $L$  est  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$  et qu'on a :

$$\|Q_k \beta\| < 2 Q_k^2 Q_{k+1}^{-1} \|r\| \leq 4 Q_k^2 \|Q_k \alpha\| \|r\|.$$

Par (17) (5.1),  $\beta \in Z(\alpha)$ . Enfin  $L$  est clairement additif.  $\square$

**5.9.** On démontre dans ce numéro que  $G_d$  a la puissance du continu.

Soit  $\mathcal{R}_o$  le sous-groupe de  $\mathcal{R}$  formé par les suites  $(r_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{R}$  qui vérifient, pour tout nombre premier  $p$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu_p(r_i) = +\infty$ .

Pour définir une suite de  $\mathcal{R}$ , on peut, ayant auparavant déterminé  $r_o, \dots, r_{i-1}$ , choisir  $r_i$  parmi  $O(Q_{i-1})$  entiers consécutifs; il en résulte que  $\mathcal{R}_o$  a la puissance du continu.

Soient  $r = (r_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{R}_o$ ,  $n \geq 2$ ; pour  $i$  assez grand, i.e.  $i \geq i_o$ , l'entier  $n$  divise  $r_i$ ; la suite  $r' = (r'_i)_{i \geq 0}$ , définie par  $r'_i = 0$  si  $i < i_o$ ,  $r'_i = n^{-1}r_i$  si  $i \geq i_o$ , appartient donc à  $\mathcal{R}_o$ . On a  $L(r) = nL(r')$ .

Le sous-groupe  $L(\mathcal{R}_o)$  de  $Z(\alpha)$  est donc divisible; il a la puissance du continu, car  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$  est dénombrable.

**5.10.** Pour montrer que  $G'/G'_p$  a la puissance du continu, il suffit de construire un sous-groupe  $\mathcal{R}_1$  de  $\mathcal{R}$  qui a la puissance du continu, mais tel qu'aucun élément non nul dans  $\pi(L(\mathcal{R}_1))$  ne soit  $p$ -divisible dans  $G'$ .

On peut extraire de la suite  $(P_i, Q_i)_{i \geq 0}$  une sous-suite  $(P_{i_n}, Q_{i_n})_{n \geq 0}$  qui a les propriétés suivantes :

- i)  $(P_{i_n}, Q_{i_n}) \in E_{n,4}(\alpha)$  pour tout  $n \geq 3$ ;
- ii) on a l'une des deux propriétés suivantes :
  - a)  $\lim \nu_p(Q_{i_n}) = +\infty$ ;
  - b) il existe  $c \in \mathbb{N}$ ,  $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  tels que  $Q_{i_n} \equiv b p^c \pmod{p^{c+1}}$  pour tout  $n \geq 0$ .

En effet, comme  $\alpha$  est un nombre de Liouville, une sous-suite  $(P'_i, Q'_i)_{i \geq 0}$  de  $(P_i, Q_i)_{i \geq 0}$  possède la propriété i); suivant que  $(\nu_p(Q'_i))_{i \geq 0}$  est ou non une suite bornée, on réalise ii) b) ou ii) a) en extrayant une sous-suite de  $(P'_i, Q'_i)_{i \geq 0}$ .

**5.11.** Soient  $F = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  le  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , et  $F_o \subset F$  le sous-espace des suites  $f = (f_i)_{i \geq 0}$  telles que la suite extraite  $(f_{i_n})_{n \geq 0}$  est constante à partir d'un certain rang, où  $(i_n)_{n \geq 0}$  est la suite définie en 5.10.

Choisissons un supplémentaire  $F_1$  de  $F_o$  dans  $F$  et une base  $(f^j)_{j \in J}$  de  $F_1$ ; l'ensemble  $J$  a la puissance du continu; on note  $f^j = (f_i^j)_{i \geq 0}$  pour  $j \in J$ .

Pour tout  $j \in J$ , on peut trouver une suite  $r^j = (r_i^j)_{i \geq 0}$  dans  $\mathcal{R}$  telle que la classe de  $r_i^j$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  soit  $f_i^j$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{R}_1$  engendré par la famille  $(r^j)_{j \in J}$  est libre et a la puissance du continu.

Soit  $r = (r_i)_{i \geq 0} = a_1 r^{j_1} + \dots + a_k r^{j_k}$  un élément non nul de  $\mathcal{R}_1$ , avec  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^*$ . On pose  $\ell = \min_{1 \leq i \leq k} \nu_p(a_i)$ , et on note  $b_i$  la classe de  $a_i p^{-\ell}$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Alors  $f = b_1 f^{j_1} + \dots + b_k f^{j_k}$  est un élément non nul de  $F_1$ , en particulier il n'appartient pas  $F_o$ .

Posons  $\beta = L(r)$ ; pour conclure la démonstration, il suffit de voir que pour tout  $u \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma = p^{-\ell-1}(\beta + u)$  n'appartient pas à  $Z(\alpha)$ .

**5.12. LEMME.** — *Pour une infinité d'entiers  $n$ ,  $r_{i_n} + uQ_{i_n}$  n'est pas divisible par  $p^{\ell+1}$ .*

*Démonstration :* Par ce qui précède, la suite des classes dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  de  $(p^{-\ell} r_{i_n})_{n \geq 0}$  n'est pas constante à partir d'un certain rang. Ceci implique la conclusion du lemme immédiatement si dans 5.10 on a la propriété ii), a) ou ii), b) avec  $c + \nu_p(u) \geq \ell$ . Si on a ii), b) avec  $c + \nu_p(u) < \ell$ , alors, pour tout  $n \geq 0$ ,  $r_{i_n}$  est divisible par  $p^\ell$  mais  $uQ_{i_n}$  ne l'est pas.  $\square$

## Fin de la démonstration

Montrons que  $\gamma$  n'appartient pas à  $Z(\alpha)$ .

Soit  $n$  un entier tel que  $p^{\ell+1}$  ne divise pas  $r_{i_n} + uQ_{i_n}$ . Par la relation (20) de 5.8, on a :

$$|Q_{i_n} \beta - r_{i_n}| < \|r\| Q_{i_n}^{-1},$$

donc, si  $n$  est assez grand.

$$|p^{\ell+1} \gamma Q_{i_n} - (r_{i_n} + uQ_{i_n})| < \|r\| Q_{i_n}^{-1},$$

$$\|Q_{i_n} \gamma\| > |p^{-\ell-1}(1 - \|r\| Q_{i_n}^{-1})| \frac{1}{2} p^{-\ell-1}.$$

Comme d'autre part on a  $\|Q_{i_n} \alpha\| \leq \frac{1}{4} Q_{i_n}^{-n}$ , on conclut que  $\gamma \notin Z(\alpha)$ , d'après (17) (5.1).  $\square$

## 6. Un préordre naturel sur les nombres de Liouville

**6.1.** Soit  $\mathbb{L}$  l'ensemble des nombres de Liouville. Considérons la relation  $\subset$  entre éléments de  $\mathbb{L}$  définie par :

$$\alpha \subset \beta \iff \alpha \in Z(\beta) \iff Z(\alpha) \subset Z(\beta).$$

Cette relation est réflexive et transitive; la relation d'équivalence associée est :

$$\alpha \sim \beta \iff Z(\alpha) = Z(\beta) .$$

On munit l'espace quotient  $\mathcal{L} = \mathbb{L} / \sim$  de la relation d'ordre induite par  $\subset$ .

6.2. PROPOSITION. —  $\mathcal{L}$  ne possède pas d'élément maximal.

*Démonstration* : soit  $\alpha \in \mathbb{L}$ ; par 5.3, l'un au moins des deux nombres  $\alpha/2$ ,  $(\alpha+1)/2$  n'appartient pas à  $Z(\alpha)$ ; soit  $\beta$  ce nombre; on a alors  $\alpha \in Z(\beta)$ ,  $\beta \notin Z(\alpha)$ , donc la classe de  $\alpha$  n'est pas maximale dans  $\mathcal{L}$ .  $\square$

6.3. PROPOSITION. — *L'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{L}$  a la puissance du continu.*

*Démonstration* : considérons l'ensemble  $\mathcal{M}$  des nombres de Liouville  $\alpha$  dont les réduites  $(p_i/q_i)_{i \geq 0}$  vérifient, pour  $i \geq 0$  :

- i)  $q_{i+1} > q_i^i$ ;
- ii)  $q_i$  est un nombre premier.

L'ensemble  $\mathcal{M}$  a la puissance du continu : ceci résulte du théorème de Dirichlet sur l'existence de nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Soient  $\alpha \in \mathcal{M}$ ,  $(p_i/q_i)_{i \geq 0}$  la suite de ses réduites, et  $\beta \in Z(\alpha)$ .

Par la relation (8) de 3.3, il existe  $K > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tels que l'on ait  $\|q_i \beta\| < K q_i^p \|q_i \alpha\|$  pour tout  $i \geq 0$ ; on déduit alors de i) que :

$$\|q_i \beta\| \leq K q_i^p q_{i+1}^{-1} \leq \frac{1}{2} q_i^{-1} ,$$

pour  $i \geq i_0$ . Par 3.3 et ii), on conclut que pour  $i$  assez grand,  $q_i$  est le dénominateur d'une réduite de  $\beta$ .

En particulier, si  $\beta \in \mathcal{M}$  et  $Z(\beta) = Z(\alpha)$ , on voit que les dénominateurs des réduites de  $\alpha$  et  $\beta$  sont, à un décalage d'indices près, les mêmes à partir d'un certain rang; donc les classes d'équivalences de  $\sim$  dans  $\mathcal{M}$  sont dénombrables et  $\mathcal{M} / \sim$  a la puissance du continu.

Revenant à la situation précédente, soit  $p/q$  une réduite de  $\beta$ , avec  $q_i < q \leq q_{i+1}$ ,  $i \geq i_0$ . Si  $q = q_{i+1}$ , on a :

$$\|q_{i+1} \beta\| > \frac{1}{2} q_{i+2}^{-1} > \frac{1}{2} \|q_{i+1} \alpha\| ,$$

car  $q_{i+2}$  est le dénominateur d'une réduite de  $\beta$ .

Si  $q \neq q_{i+1}$ , on a :

$$(2q)^{-1} < \|q_i \beta\| < K q_i^p q_{i+1}^{-1} ,$$

donc

$$q_{i+1}^{-1} > (2K)^{-1} q^{-1} q_i^{-p} > (2K)^{-1} q^{-1-p} ,$$

$$\|q \beta\| > \frac{1}{2} q_{i+1}^{-1} > (4K)^{-1} q^{-p-1} \geq (2K)^{-1} q^{-p-1} \|q \alpha\| .$$

On conclut que  $\alpha \in Z(\beta)$ , donc la classe de  $\alpha$  dans  $\mathcal{L}$  est minimale.  $\square$

**6.4.** Malgré la proposition précédente, l'ensemble  $\mathcal{L}$  ne possède pas "beaucoup" d'éléments minimaux.

**THÉORÈME.** — *Les nombres de Liouville dont la classe dans  $\mathcal{L}$  n'est minorée par aucun élément minimal forment une partie résiduelle de  $\mathbb{R}$ .*

La démonstration occupe la fin du paragraphe. L'idée est la suivante. Le nombre irrationnel générique exhibe dans la suite de ses réduites des approximations rationnelles de tous ordres. On va s'intéresser à ceux (condition (H)) qui, pour tout exposant  $m$ , possèdent des suites finies arbitrairement longues de réduites consécutives le faisant apparaître comme diophantien, mais pas diophantien d'exposant  $m$ .

Soient  $m < n$  deux entiers strictement positifs. On dit que  $\alpha \in \mathbb{L}$  satisfait à la condition  $(H_{m,n})$  si, pour tout  $k \geq 2$ , il existe des nombres premiers  $q_1, \dots, q_k$  vérifiant, pour  $1 \leq i \leq k-1$  :

- a)  $q_i^{-n} < \|q_i \alpha\| < q_i^{-m}$  ;
- b)  $q_i^m < q_{i+1} < q_i^n$ .

Remarquons que pour  $m' \leq m$ ,  $n' \geq n$ , la condition  $(H_{m,n})$  implique la condition  $(H_{m',n'})$ .

On dit que  $\alpha \in \mathbb{L}$  satisfait à la condition (H) si, pour tout  $m \geq 2$ , il existe  $n > m$  tel que  $\alpha$  satisfasse à  $(H_{m,n})$ . On démontre dans les prochains numéros les propriétés suivantes, qui impliquent le résultat du théorème :

- 1) la condition (H) est générique ;
- 2) la condition (H) est héréditaire : si  $\alpha, \beta$  sont des nombres de Liouville,  $\beta \subset \alpha$ , et  $\alpha$  vérifie (H), alors  $\beta$  vérifie (H) ;
- 3) si  $\alpha \in \mathbb{L}$  vérifie (H), sa classe dans  $\mathcal{L}$  n'est pas minimale.

### 6.5. Généricité de la condition (H)

Il suffit de montrer que pour tout  $m \geq 2$ , les nombres de Liouville qui satisfont à  $(H_{m,2m})$  forment une partie résiduelle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $E$  l'ensemble des rationnels dont le dénominateur est un nombre premier  $\geq 19$ . Soient  $p/q \in E$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Par le théorème de Tchebychev, on peut choisir des nombres premiers  $q = q_1, q_2, \dots, q_k$  tels que  $9/4 q_i^{1+m} \leq q_{i+1} \leq 1/4 q_i^{2m}$ , pour  $1 \leq i \leq k-1$ . Choisissons ensuite des entiers  $p = p_1, p_2, \dots, p_k$  qui vérifient, pour  $1 \leq i \leq k-1$  :

$$(2q_{i+1})^{-1} \leq \left(\frac{p_i}{q_i}\right) - \left(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right) \leq q_{i+1}^{-1} .$$

Posons  $I(k, p/q) = \left(\frac{4p_k-1}{4q_k}, \frac{4p_k+1}{4q_k}\right)$  ; pour  $\alpha \in I(k, p/q)$  et  $1 \leq i \leq k-1$ , on a, comme  $q_{j+1} > 2q_j$  :

$$\left| \alpha - \left(\frac{p_i}{q_i}\right) \right| < \frac{1}{4} q_k^{-1} + \sum_{j=i+1}^k q_j^{-1} < \frac{9}{4} q_{i+1}^{-1} \leq q_i^{-m-1} ,$$

$$\left| \alpha - \left(\frac{p_i}{q_i}\right) \right| > \frac{1}{2} q_{i+1}^{-1} - \frac{1}{4} q_k^{-1} - \sum_{j=i+2}^k q_j^{-1} > \frac{1}{4} q_{i+1}^{-1} \geq q_i^{-2m} .$$

On obtient donc  $q_i^{1-2m} < \|q_i\alpha\| < q_i^{-m}$ , et en particulier  $I(k, p/q) \subset (p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3)$ .

Considérons alors les ensembles :

$$O_k = \bigcup_{p/q \in E} I(k, p/q)$$

$$O_\infty = \bigcap_{k \geq 2} O_k .$$

Comme  $I(k, p/q) \subset (p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3)$ ,  $O_k$  est ouvert et dense dans  $\mathbb{R}$ , donc  $O_\infty$  est résiduel ; par construction, tout nombre de Liouville dans  $O_\infty$  vérifie  $(H_{m,2m})$ .

### 6.6. La propriété (H) est héréditaire

Soient  $\alpha \in \mathbb{L}$ ,  $\beta \in \mathbb{L} \cap Z(\alpha)$  et  $r, q_0$  deux entiers tels que  $\|q\beta\| < q^r \|q\alpha\|$  pour  $q \geq q_0$ .

Supposons que  $\alpha$  vérifie la condition (H) ; alors, pour tout  $m \geq 2$ , il existe  $n > m+r$  tel que  $\alpha$  vérifie la condition  $(H_{m+r,n})$  ; montrons que  $\beta$  vérifie la condition  $(H_{m,n+1})$ .

Soient  $k \geq 3$  et  $q_1, \dots, q_k$  des nombres premiers tels qu'on ait  $q_1 \geq q_0$  et, pour  $1 \leq i \leq k-1$  :

$$\begin{aligned} q_i^{-n} &< \|q_i\alpha\| < q_i^{-m-r} , \\ q_i^{m+r} &< q_{i+1} w q_i^n ; \end{aligned}$$

on en tire  $\|q_i\beta\| < q_i^{-m}$ , donc  $q_1, \dots, q_{k-1}$  sont dénominateurs de réduites de  $\beta$  (car ce sont des nombres premiers). On obtient, pour  $1 \leq i \leq k-2$  :

$$q_i^{-m} > \|q_i\beta\| > \frac{1}{2} q_{i+1}^{-1} \geq q_i^{-n-1} ,$$

donc  $\beta$  vérifie  $(H_{m,n+1})$ .

### 6.7. Démonstration du théorème

Soient  $\alpha \in \mathbb{L}$ ,  $n > 2$  ; supposons que  $\alpha$  vérifie la condition  $(H_{2,n})$ .

Soit  $(P_i, Q_i)_{i \geq 0}$  la suite des éléments de  $E_{n,4}(\alpha)$ , rangés par  $Q_i$  croissants ; on peut, suivant (20) (5.8), trouver  $K > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{L} \cap Z(\alpha)$  tels que  $\|Q_j\beta\| < K Q_j^2 Q_{j+1}^{-1}$  pour tout  $j \geq 0$ .

Soient  $k \geq 4$  et  $q_1, \dots, q_k$  des nombres premiers qui vérifient 6.4 a), b) pour la condition  $(H_{2,n})$  : pour  $1 \leq j \leq k-1$ , on a donc  $\|q_j\alpha\| < q_j^{-2}$ , et  $q_j$  est le dénominateur d'une réduite de  $\alpha$ .

Si'il existait  $1 \leq j \leq k-2$ ,  $i \geq 0$ , tels que  $q_j \leq Q_i < q_{j+1}$ , on aurait :

$$\frac{1}{4} Q_i^{-n} > \|Q_i\alpha\| > \frac{1}{2} q_{j+1}^{-1} > \frac{1}{2} q_j^{-n} \geq \frac{1}{2} Q_i^{-n} ,$$

une contradiction.

Si  $k$  est assez grand pour que  $q_{k-1} > Q_0$ , il existe donc  $i \geq 0$  tels que :

$$Q_i < q_1 < q_{k-1} \leq Q_{i+1} .$$

Comme  $q_{j+1} > q_j^2$ , on obtient donc :

$$Q_{i+1} \geq q_1^{(2^{k-2})} > Q_i^{(2^{k-2})} ,$$

$$\|Q_i \alpha\| > \frac{1}{2} q_1^{-1} ,$$

donc

$$\|Q_i \beta\| \|Q_i \alpha\|^{-1} < 2K Q_i^2 Q_{i+1}^{-1} q_1 < 2K Q_i^{-\ell} ,$$

avec  $\ell = 2^{k-2} - 3 > 0$ ; comme  $k$  peut être arbitrairement grand, cela implique que  $\alpha$  n'appartient pas à  $Z(\beta)$ ; donc la classe de  $\beta$  dans  $\mathcal{L}$  minore celle de  $\alpha$  et en diffère.

□

## Chapitre III

### DENSITÉ DE $O_\alpha^\infty$ DANS $F_\alpha^\infty$

#### 1. Introduction

**1.1.** On démontre dans ce chapitre le résultat suivant, qui répond par l'affirmative à une conjecture de M.R. Herman ([H1, ch. XI], [H2]) :

**THÉORÈME.** — *Pour tout nombre irrationnel  $\alpha$ ,  $O_\alpha^\infty$  est dense dans  $F_\alpha^\infty$  pour la  $C^\infty$ -topologie.*

D'après le théorème de Herman ([H1]) et l'extension donnée en [Y1], on a  $O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$  lorsque  $\alpha$  vérifie une condition diophantienne.

D'autre part, Herman avait montré la densité de  $O_\alpha^\infty$  dans  $F_\alpha^\infty$  pour un ensemble résiduel de nombres de Liouville  $\alpha$ , cf. [H1, ch. XI].

**1.2.** On peut donc supposer, dans la démonstration du théorème, que  $\alpha$  est un nombre de Liouville. La stratégie de la démonstration est la suivante :

- dans une première étape, on définit une classe spéciale de difféomorphismes de  $F_\alpha^\infty$ , baptisés “quasi-rotations d'angle  $\alpha$ ” ; on montre que toute quasi-rotation d'angle  $\alpha$  appartient à  $O_\alpha^\infty$  ;
- on montre ensuite que tout difféomorphisme de  $F_\alpha^\infty$  peut être approché, dans la  $C^\infty$ -topologie, par des quasi-rotations d'angle  $\alpha$  ; ici, l'hypothèse que  $\alpha$  est un nombre de Liouville est essentielle, le résultat étant faux lorsque  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne.

Pour obtenir ces approximations par des quasi-rotations, il faudra d'abord obtenir des estimations sur les itérés de  $f$ .

#### 1.3. Notations

On notera  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  la suite des réduites du nombre irrationnel  $\alpha$ , et on posera  $\alpha_n = (-1)^n(q_n\alpha - p_n) > 0$ , pour  $n \geq 0$ .

On note  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite d'entiers qui vérifie :

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} , \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} , \\ \alpha_{n-2} &= a_n \alpha_{n-1} + \alpha_n . \end{aligned}$$

Pour  $f \in F_\alpha^o$ ,  $n \geq 0$ , on pose :

$$\begin{aligned} m_n(x) &= (-1)^n (f^{q_n}(x) - p_n - x) > 0 , \\ m_n &= \text{Min}_{\mathbb{T}^1} m_n(x) , \\ M_n &= \text{Max}_{\mathbb{T}^1} m_n(x) . \end{aligned}$$

## 2. Quasi-rotations d'angle $\alpha$

**2.1.** Dans ce paragraphe, on ne suppose pas que le nombre irrationnel  $\alpha$  est un nombre de Liouville.

**DÉFINITION.** — On dit que  $f \in D^o(\mathbb{T}^1)$  est un quasi-rotation d'angle  $\alpha$  s'il existe  $x_o \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$ ,  $\theta > 0$  tels que la condition  $C(x_o, k, \theta)$  ci-dessous soit vérifiée :

$$C(x_o, k, \theta) \begin{cases} m_k(x) = \theta \alpha_k & \text{pour } x \text{ entre } x_o \text{ et } x_o + (-1)^{k+1} \theta \alpha_{k+1}, \\ m_{k+1}(x) = \theta \alpha_{k+1} & \text{pour } x \text{ entre } x_o \text{ et } x_o + (-1)^k \theta \alpha_k. \end{cases}$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — Soit  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ; toute quasi-rotation  $f \in D^r(\mathbb{T}^1)$  d'angle  $\alpha$  est conjuguée dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  à la rotation d'angle  $\alpha$ .

## 2.2. Remarques

La définition d'une quasi-rotation donnée en 2.1 est assez technique; mais c'est celle dont nous avons besoin pour la démonstration du théorème 1.1. On peut cependant caractériser les quasi-rotations par des propriétés plus conceptuelles. Comme ces caractérisations ne jouent aucun rôle dans la démonstration du théorème 1.1, nous n'incluons pas de démonstration, d'ailleurs très élémentaires.

### 1) Applications induites

Soient  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $f \in D^r(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme dont le nombre de rotation est  $\alpha$ , et  $(p_n/q_n)$  une réduite de  $\alpha$ .

Considérons la variété  $M$ , orientée et de classe  $C^r$ , obtenue en quotientant  $\mathbb{R}$  par le groupe des itérés de  $g = f^{q_n} - p_n$ ; étant donné  $x_o \in \mathbb{R}$ , on obtient  $M$  à partir de l'intervalle  $I_n(x_o)$  d'extrémités  $x_o, g(x_o)$  en recollant ces extrémités à l'aide de  $g$ . La variété  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{T}^1$  comme  $C^r$ -variété.

Soit  $\overline{F}_n$  l'application induite par  $f$  sur  $I_n(x_o)$ , définie de la façon suivante : pour  $x \in I_n(x_o)$ ,  $\overline{F}_n(x)$  est le point de l'ensemble non vide  $I_n(x_o) \cap \{f^i(x) + j \mid i \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{Z}\}$  tel que  $i$  soit minimal (on vérifie que  $i = q_{n+1}$  lorsque  $x$  est entre  $f^{-q_{n+1}}(x_o) + p_{n+1}$  et  $f^{q_n}(x_o) - p_n$ , et que  $i = q_n + q_{n+1}$  lorsque  $x$  est entre  $x_o$  et  $f^{-q_{n+1}}(x_o) + p_{n+1}$ ).

Il est facile de voir que  $\overline{F}_n$  définit un difféomorphisme  $F_n$  de classe  $C^r$  de la variété  $M$ ; un relèvement dans  $\mathbb{R}$  du nombre de rotation  $\beta$  de  $F_n$  est  $(-1)^{n+1} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ .

Etant donné un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $C^r$  et préservant l'orientation de  $M$  sur  $\mathbb{T}^1$ , le difféomorphisme  $\varphi \circ F_n \circ \varphi^{-1}$  appartient à  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ ; il est conjugué à la rotation  $R_\beta$  dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  ( $s \leq r$ ) si et seulement si  $f$  est conjugué à  $R_\alpha$  dans  $D^s(\mathbb{T}^1)$ .

Supposons de plus que la condition suivante soit vérifiée :

$(C(n, x_o))$  "Le  $r$ -jet de  $(f^{q_n} - p_n)$  en  $x_o$  est celui d'une translation."

Dans ce cas, l'application affine qui préserve l'orientation et envoie  $I_n(x_o)$  sur  $[0, 1]$  définit un isomorphisme naturel  $\varphi_o$  de  $M$  sur  $\mathbb{T}^1$ .

On vérifie qu'un difféomorphisme  $f \in F_\alpha^r$  est une quasi-rotation d'angle  $\alpha$  si et seulement s'il existe  $n \geq 0$ ,  $x_o \in \mathbb{R}$  tels que :

- i)  $f$  vérifie la condition  $C(n, x_o)$ ;
- ii) le difféomorphisme  $\varphi_o \circ F_n \circ \varphi_o^{-1}$  est une rotation de  $\mathbb{T}^1$  (c'est alors la rotation  $R_\beta$ ).

## 2) Caractérisation par la conjugaison

Soit  $f \in F_\alpha^o$ ; il existe une unique application croissante  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

- i)  $h - id$  est  $\mathbb{Z}$ -périodique;
- ii)  $h(0) = 0$ ;
- iii)  $h \circ f = R_\alpha \circ h$ .

( $h$  est la semi-conjugaison normalisée de  $f$  à  $R_\alpha$ ).

On vérifie que  $f$  est une quasi-rotation d'angle  $\alpha$  si et seulement si  $h$  possède la propriété suivante :

(P) "il existe un intervalle non vide et non réduit à un point  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que la restriction de  $h$  à  $I$  soit affine de pente non nulle."

Cette caractérisation des quasi-rotations montre bien que, lorsque  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne, l'espace des quasi-rotations d'angle  $\alpha$  et de classe  $C^\infty$  n'est pas dense dans  $F_\alpha^\infty$  : en effet, l'application  $f \rightarrow h$  de  $F_\alpha^\infty$  dans  $D_o^\infty(\mathbb{T}^1) = \{h \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid h(0) = 0\}$  est alors un homéomorphisme, et la propriété (P) n'est pas dense dans  $D_o^\infty(\mathbb{T}^1)$ .

**2.3. LEMME.** — *Supposons que  $f \in D^o(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $C(x_o, k, \theta)$ ; alors, pour tout  $\ell > k$  et tout  $x$  entre  $x_o$  et  $x_o + (-1)^{\ell-1} \theta \alpha_{\ell-1}$ , on a :*

$$m_\ell(x) = \theta \alpha_\ell .$$

*Démonstration* : si  $\ell = k + 1$ , ceci résulte de  $C(x_o, k, \theta)$ . D'autre part, si on montre l'égalité du lemme pour  $k < \ell \leq \ell_o + 1$ ,  $f$  vérifiera la condition  $C(x_o, \ell_o, \theta)$ . Il suffit

donc de prouver l'égalité du lemme lorsque  $\ell = k + 2$ . On suppose, pour simplifier les notations, que  $k$  est pair.

Soit  $x \in [x_o - \theta\alpha_{k+1}, x_o]$ . Par la condition  $C(x_o, k, \theta)$ , on obtient que  $f^{q_k}(x) - p_k \in [x_o - \theta(\alpha_{k+1} - \alpha_k), x_o + \theta\alpha_k]$ , puis par induction sur  $i$ ,  $0 \leq i < a_{k+2}$  :

$$f^{iq_{k+1}+q_k}(x) - (ip_{k+1} + p_k) = x + \theta(\alpha_k - i\alpha_{k+1}) .$$

Le membre de droite appartient à l'intervalle  $[x_o + \theta(\alpha_k - (i+1)\alpha_{k+1}), x_o + \theta(\alpha_k - i\alpha_{k+1})] \subset [x_o, x_o + \theta\alpha_k]$ , donc une dernière application de  $C(x_o, k, \theta)$  donne :

$$f^{q_{k+2}}(x) - p_{k+2} = x + \theta\alpha_{k+2} .$$

□

**2.4. LEMME.** — Si  $f \in D^o(\mathbb{T}^1)$  vérifie la condition  $C(x_o, k, \theta)$ , le nombre de rotation de  $f$  est  $\alpha$ .

*Démonstration :* Le lemme précédent montre en effet qu'on a, pour  $\ell$  assez grand :

$$\frac{p_{2\ell}}{q_{2\ell}} \leq \varphi(f) \leq \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}} .$$

□

**2.5.** On suppose que  $f \in D^o(\mathbb{T}^1)$  vérifie la condition  $C(x_o, k, \theta)$ ; pour  $\ell \geq k$ , on pose :

$$\left. \begin{array}{l} I_\ell = [x_o, x_o + \theta\alpha_\ell] \\ I'_\ell = [x_o - \theta\alpha_{\ell+1}, x_o + \theta(\alpha_\ell - \alpha_{\ell+1})] \end{array} \right\} \text{ si } \ell \text{ est pair,}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_\ell = [x_o - \theta\alpha_\ell, x_o] \\ I'_\ell = [x_o - \theta(\alpha_\ell - \alpha_{\ell+1}), x_o + \theta\alpha_{\ell+1}] \end{array} \right\} \text{ si } \ell \text{ est impair .}$$

Par le lemme 2.3 et la condition  $C(x_o, k, \theta)$ , on a donc, pour  $\ell \geq k$  :

$$\begin{aligned} f^{q_\ell}(x_o) - p_\ell &= x_o + (-1)^\ell \theta \alpha_\ell , \\ (f^{q_{\ell+1}} - p_{\ell+1})(I_\ell) &= I'_\ell . \end{aligned}$$

Comme  $\alpha_\ell \geq \alpha_{\ell+1} + \alpha_{\ell+2}$ , on a aussi :

$$I'_\ell \supseteq I_{\ell+1} \cup I_{\ell+2} .$$

**LEMME.** — Pour  $\ell \geq k$ ,  $x \in I_{\ell+1} \cup I_{\ell+2}$  et  $0 \leq i \leq a_{\ell+2}$ , on a :

$$f^{iq_{\ell+1}}(x) + ip_{\ell+1} = x + (-1)^\ell i \theta \alpha_{\ell+1} \in I_\ell \cup I_{\ell+1} .$$

*Démonstration* : Supposons par exemple que  $\ell$  est pair. On a :

$$I_{\ell+1} \cup I_{\ell+2} = [x_o - \theta\alpha_{\ell+1}, x_o + \theta\alpha_{\ell+2}] .$$

Soit  $x \in I_{\ell+1} \cup I_{\ell+2}$ ; par induction sur  $i$ ,  $0 \leq i < a_{\ell+2}$ , on obtient grâce au lemme 2.3 :

$$f^{iq_{\ell+1}}(x) + ip_{\ell+1} = x + \theta i \alpha_{\ell+1} \in [x_o - \theta\alpha_{\ell+1}, x_o + \theta(\alpha_{\ell+2} + i\alpha_{\ell+1})] ,$$

et cet intervalle est contenu dans  $I'_\ell$ , donc dans  $I_\ell \cup I_{\ell+1}$ ; une dernière application du lemme 2.3 donne donc :

$$f^{-a_{\ell+2}q_{\ell+1}}(x) + a_{\ell+2}p_{\ell+1} = x + \theta a_{\ell+2} \alpha_{\ell+1} \in I_\ell \cup I_{\ell+1} .$$

□

**2.6.** Sous les hypothèses et notations du numéro précédent, on déduit immédiatement du lemme 2.5 le résultat suivant :

LEMME. — Soient  $k < s$  et  $b_{k+1}, \dots, b_s$  des entiers vérifiant  $0 \leq b_j \leq a_{j+1}$ ; posons

$$n = \sum_j b_j q_j, \quad \gamma = \sum_j (-1)^{j+1} b_j \alpha_j, \quad p = \sum_j b_j p_j ;$$

alors, pour tout  $x \in I_s \cup I_{s+1}$ , on a :

$$f^{-n}(x) + p = x + \theta \gamma .$$

## 2.7. Démonstration du théorème 2.1

Supposons que  $f \in D^r(\mathbb{T}^1)$  vérifie la condition  $C(x_o, k, \theta)$ . Soit  $\bar{f}$  le difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  induit par  $f$ ,  $\bar{x}_o$  l'image de  $x_o$  dans  $\mathbb{T}^1$ .

Le lemme 2.6 montre que l'orbite négative de  $\bar{x}_o$  par  $\bar{f}$  est dense au voisinage de  $\bar{x}_o$ , donc que  $\bar{f}$  n'est pas un contre-exemple de Denjoy; ceci démontre le théorème lorsque  $r = 0$ , et prouve que dans tous les cas l'orbite négative de  $\bar{x}_o$  par  $\bar{f}$  est dense dans  $\mathbb{T}^1$ .

Soit  $n$  un entier positif; on peut, à la suite de Denjoy, décomposer  $n$  sous la forme  $n = \sum_{j=0}^s b_j q_j$ , où les  $b_j$  sont des entiers vérifiant  $0 \leq b_j \leq a_{j+1}$ ,  $\sum_{j=0}^{\ell} b_j q_j < q_{\ell+1}$ , pour  $0 \leq \ell \leq s$ . Posons alors :

$$\begin{aligned} n_1 &= \sum_{j=0}^k b_j q_j , \\ n_2 &= 0 \quad \text{si } s \leq k , \\ n_2 &= \sum_{j=k+1}^s b_j q_j \quad \text{si } s > k . \end{aligned}$$

On a donc  $n = n_1 + n_2$ ,  $n_1 < q_{k+1}$ ; en écrivant  $\bar{f}^{-n} = \bar{f}^{-n_1} \circ \bar{f}^{-n_2}$ , on déduit du lemme 2.6 que les  $r$ -jets en  $\bar{x}_o$  des itérés négatifs de  $\bar{f}$  forment un ensemble borné pour la  $C^r$ -topologie; il en est donc de même pour les  $r$ -jets des itérés négatifs de  $f$  aux points de l'orbite négative de  $\bar{x}_o$  par  $\bar{f}$ .

Mais celle-ci est dense, donc les itérés négatifs de  $\bar{f}$  forment une suite bornée pour la  $C^r$ -topologie. En utilisant les résultats de Herman ([H1, ch. IV]), on conclut que  $f$  est conjugué à une rotation dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  qui doit être  $R_\alpha$  par le lemme 2.4. □

### 3. Estimations

**3.1.** Dans ce paragraphe,  $\alpha$  est un nombre réel irrationnel,  $k$  un entier au moins égal à 3, et  $\tilde{f}$  un difféomorphisme de  $D^k(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est  $\alpha$ .

On note  $f$  le difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  induit par  $\tilde{f}$ ; pour  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $n \geq 0$ ,  $\tilde{x}$  un relèvement de  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on note  $I_n(x)$  l'intervalle de  $\mathbb{T}^1$  image de l'intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  dont les extrémités sont  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x} + f^{qn}(x) - p_n$ ; l'intervalle  $I_n(x)$  ne dépend pas des relèvements  $\tilde{f}$  et  $\tilde{x}$  de  $f$  et  $x$ ; on pose :

$$J_n(x) = I_n(x) \cup I_n(f^{qn}(x)) .$$

A l'exception du dernier, tous les résultats qui suivent sont démontrés dans [Y1] :

a) Soient  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $n \geq 0$ ; les intervalles  $I_n(f^i(x))$ ,  $0 \leq i < q_{n+1}$  sont d'intérieurs disjoints; les intervalles  $J_n(f^i(x))$ ,  $0 \leq i < q_{n+1}$  forment un recouvrement de  $\mathbb{T}^1$ .

b) Il existe une constante  $C_o = C_o(f)$  telle que, pour tous  $n \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq q_{n+1}$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $y \in J_n(x)$ , on ait :

$$|\text{Log } Df^{qn}(x)| \leq C_o M_n^{1/2} ,$$

$$|Df^{qn}(x) - 1| \leq C_o M_n^{1/2} ,$$

$$\left| \frac{Df^i(x)}{Df^i(y)} - 1 \right| \leq C_o M_n^{1/2} .$$

c) Il existe une constante  $C_1 = C_1(f)$  telle que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq q_{n+1}$ ,  $1 \leq \ell \leq k - 1$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ , on ait :

$$|D^\ell \text{Log } Df^i(x)| \leq C_1 \left[ \frac{M_n^{1/2}}{m_n(x)} \right]^\ell .$$

d) Pour tout  $n \geq 0$ , tout  $x \in \mathbb{T}^1$ , il existe  $y \in I_n(x)$ ,  $z \in I_{n+1}(x)$  tels qu'on ait :

$$m_{n+1}(y) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} m_n(z) .$$

e) La suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0 (cf. [H1, ch. VI]).

f) Soit  $\mu$  l'unique mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^1$  invariante par  $f$ . Il résulte immédiatement de [H1, ch. I] qu'on a :

$$\int_{\mathbb{T}^1} m_n(x) d\mu(x) = \alpha_n ,$$

donc  $m_n \leq \alpha_n \leq M_n$ .

**3.2.** Dans les estimations qui suivent, on utilisera fréquemment le fait suivant : pour  $n \geq 0$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ , il existe, par le théorème des accroissements finis,  $\xi \in I_n(x)$  tel que :

$$m_n(f^i(x)) = Df^i(\xi) m_n(x) .$$

**3.3. LEMME.** — Pour  $n \geq 1$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $y \in J_n(x)$ , on a  $m_n(y) \geq (1 - C_o M_n^{1/2}) m_n(x)$ .

*Démonstration* : en intégrant la deuxième relation de 3.1 b) entre  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$(1) \quad |m_n(y) - m_n(x)| \leq C_o M_n^{1/2} |y - x| .$$

On a soit  $y \in I_n(x)$ , soit  $x \in I_n(y)$ ; dans le premier cas, l'inégalité du lemme résulte de (1) et de  $|y - x| \leq m_n(x)$ ; dans le second cas, on a  $|y - x| \leq m_n(y)$ , donc  $m_n(x) \leq (1 + C_o M_n^{1/2}) m_n(y)$  grâce à (1); comme  $(1 + C_o M_n^{1/2})^{-1} \geq (1 - C_o M_n^{1/2})$ , on obtient aussi l'inégalité du lemme.  $\square$

**3.4.** On choisit  $\varepsilon \in (0, 1/3)$  et  $n_o \in \mathbb{N}$  de sorte que  $C_o M_n^{1/2} < \varepsilon$  pour  $n \geq n_o$  (cf. 3.1 e)). Dans la suite, la lettre  $C$  désignera diverses constantes strictement positives qui ne dépendent que de  $f$ ,  $k$  et  $\varepsilon$ .

On pose  $K = 2^{k-1}$  et on définit, pour  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $n \geq 0$  :

$$K_n(x) = \bigcup_{|i| < K} I_n(f^{iq_n}(x)) .$$

Il résulte du lemme 3.3 qu'on a, pour  $n \geq n_o$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $y \in K_n(x)$  :

$$(2) \quad C m_n(x) \geq m_n(y) \geq C^{-1} m_n(x) .$$

En particulier, la longueur de  $K_n(x)$  est moindre que  $C m_n(x)$ . En reportant l'inégalité ci-dessus dans 3.1 c), on obtient, pour  $n \geq n_o$ ,  $0 \leq i \leq q_{n+1}$ ,  $1 \leq \ell \leq k-1$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $y \in K_n(x)$  :

$$(3) \quad |D^\ell \text{Log } Df^i(y)| \leq C \left( \frac{M_n^{1/2}}{m_n(x)} \right)^\ell .$$

**3.5. LEMME.** — Soient  $n \geq n_o$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $0 \leq \ell \leq k-2$ ; il existe  $0 \leq i \leq 2^{\ell+1} - 2$  et  $y \in I_n(f^{iq_n}(x))$  tels qu'on ait :

$$|D^\ell \text{Log } Df^{q_{n+1}}(y)| \leq C M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{(m_n(x))^{\ell+1}} .$$

*Démonstration* : On procède par induction sur  $\ell$ .

Par la seconde relation de 3.1 b), on a, avec  $\zeta \in I_{n+1}(x)$  :

$$(4) \quad \begin{aligned} |m_{n+1}(f^{q_n}(x)) - m_{n+1}(x)| &= |m_n(f^{q_{n+1}}(x)) - m_n(x)| \\ &= |Df^{q_n}(\zeta) - 1| m_{n+1}(x) \\ &\leq C_o M_n^{1/2} m_{n+1}(x) . \end{aligned}$$

En utilisant 3.2, on trouve  $y \in I_n(x)$  tel que :

$$|Df^{q_{n+1}}(y) - 1| \leq C_o M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{m_n(x)} .$$

Or on a  $C_o M_n^{1/2} < \varepsilon$ ,  $I_{n+1}(x) \subset I_n(f^{q_{n+1}}(x))$ , donc  $m_{n+1}(x) \leq m_n(f^{q_{n+1}}(x)) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} m_n(x)$  par le lemme 3.3; on en déduit :

$$|Df^{q_{n+1}}(y) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{1}{2},$$

$$|\text{Log } Df^{q_{n+1}}(y)| \leq C |Df^{q_{n+1}}(y) - 1| \leq C M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{m_n(x)},$$

c'est-à-dire la conclusion du lemme lorsque  $\ell = 0$ .

Supposons la conclusion du lemme valable à l'ordre  $\ell - 1$  ( $\ell \geq 1$ ); en posant  $x' = f^{2q_n^\ell}(x)$ , il existe donc  $t \in \bigcup_{i=0}^{2^\ell-2} I_n(f^{iq_n}(x))$ ,  $t' \in \bigcup_{i=0}^{2^\ell-2} I_n(f^{iq_n}(x'))$ , tels que :

$$|D^{\ell-1} \text{Log } Df^{q_{n+1}}(t)| \leq C M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{(m_n(x))^\ell},$$

$$|D^{\ell-1} \text{Log } Df^{q_{n+1}}(t')| \leq C M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x')}{(m_n(x'))^\ell},$$

La relation (4) implique  $m_{n+1}(x') \leq C m_{n+1}(x)$ ; en utilisant aussi la relation (2), on obtient :

$$|D^{\ell-1} \text{Log } Df^{q_{n+1}}(t) - D^{\ell-1} \text{Log } Df^{q_{n+1}}(t')| \leq C M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{(m_n(x))^\ell}.$$

On obtient maintenant la conclusion du lemme à l'ordre  $\ell$  grâce au théorème des accroissements finis, en remarquant que  $t$  et  $t'$  sont de part et d'autre de l'intervalle  $I_n(f^{-q_n}(x'))$ , dont la longueur est au moins  $C^{-1} m_n(x)$  par (2).  $\square$

**3.6.** On intègre plusieurs fois la relation (3) avec  $\ell = k - 1$ , à partir des points  $y$  déterminés par le lemme 3.5; on obtient, pour  $n \geq n_o$ ,  $0 \leq \ell \leq k - 2$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $t \in K_n(x)$  :

$$(5) \quad |D^\ell \text{Log } Df^{q_{n+1}}(t)| \leq C (m_n(x))^{-\ell} \left[ M_n^{(k-1)/2} + M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{m_n(x)} \right],$$

car la longueur de  $K_n(x)$  est moindre que  $C m_n(x)$ .

Pour  $\ell = 0$ , cela donne aussi :

$$(6) \quad |Df^{q_{n+1}}(t) - 1| \leq C \left( M_n^{(k-1)/2} + M_n^{1/2} \frac{m_{n+1}(x)}{m_n(x)} \right).$$

Soient  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $n \geq n_o$  et  $y \in I_n(x)$ ,  $z \in I_{n+1}(x)$  les points donnés par 3.1 d) qui vérifient :

$$m_{n+1}(y) = m_n(z) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.$$

En intégrant (6) entre  $x$  et  $y$ , on obtient :

$$|m_{n+1}(y) - m_{n+1}(x)| \leq C [M_n^{(k-1)/2} m_n(x) + M_n^{1/2} m_{n+1}(x)].$$

D'autre part, la seconde relation de 3.1 b) donne :

$$|m_n(x) - m_n(z)| \leq C_o M_n^{1/2} m_{n+1}(x) .$$

On obtient ainsi une estimation qui avait été démontrée, un peu différemment, en [Y1] :

$$(7) \quad |m_{n+1}(x) - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} m_n(x)| \leq C(M_n^{(k-1)/2} m_n(x) + M_n^{1/2} m_{n+1}(x)) .$$

**3.7.** On suppose que l'entier  $n \geq n_o$  est tel que  $CM_n^{1/2} \leq 1/2$  et  $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq M_n^{(k-1)/2}$ .

Notons que la première condition est réalisée dès que  $n$  est assez grand, et que la seconde est réalisée pour une infinité d'entiers  $n$  si  $\alpha$  est un nombre de Liouville : en effet, dans ce cas, on a  $\alpha_n \leq M_n$  (cf. 3.1 f)) et  $\alpha_{n+1} < \alpha_n^{(k+1)/2}$  pour une infinité d'entiers  $n$ .

Sous ces hypothèses, les estimations (5) et (7) se simplifient de la façon suivante : pour  $0 \leq \ell \leq k-1$ ,  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $t \in K_n(x)$ , on a :

$$(8) \quad m_{n+1}(t) \leq C M_n^{(k-1)/2} m_n(t) \leq C M_n^{(k-1)/2} m_n(x) ,$$

$$(9) \quad |D^\ell \text{Log } Df^{q_{n+1}}(t)| \leq C M_n^{(k-1)/2} (m_n(x))^{-\ell} .$$

#### 4. Approximation par des quasi-rotations

**4.1.** On se donne dans ce paragraphe un entier  $k$  au moins égal à 6, un nombre de Liouville  $\alpha$ , et un difféomorphisme  $f \in D^k(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est  $\alpha$ .

Soit  $k_2$  la partie entière de  $k/4$ ; on va démontrer que tout voisinage de  $f$  dans la  $C^{k_2}$ -topologie contient une quasi-rotation de classe  $C^\infty$  et d'angle  $\alpha$ . Ce résultat et le théorème 2.1 impliquent évidemment le théorème 1.1.

Quitte à remplacer  $f$  par un difféomorphisme (de même nombre de rotation)  $C^k$ -proche de  $f$ , on peut supposer que  $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ .

On fixe dans la suite une suite d'entiers  $(n_i)_{i \geq 1}$  strictement croissante telle que  $\alpha_{n_i} \leq (\alpha_{n_{i-1}})^{(k+1)/2}$  pour tout  $i \geq 1$ ; si  $n_1$  est assez grand, les estimations (8) et (9) de 3.7 sont donc valables pour  $f$  avec  $n = n_i$ .

Soit  $k_1$  la partie entière de  $k/2$ , de sorte que  $k_2$  est la partie entière de  $k_1/2$ . On va, pour chaque entier  $i$ , construire une première perturbation  $(f_1)_i = f_1$  de  $f$ , proche de  $f$  dans la  $C^{k_1}$ -topologie lorsque  $i$  est grand, qui possède de "bonnes" propriétés détaillées dans la suite. On met ensuite à profit ces propriétés pour construire une seconde perturbation  $(f_2)_i = f_2$ , proche de  $f_1$  dans la  $C^{k_2}$ -topologie lorsque  $i$  est grand, qui est une quasi-rotation de classe  $C^\infty$  et d'angle  $\alpha$  : elle vérifiera la condition  $C(x_o, n_i, \theta)$ , pour certains  $x_o \in \mathbb{T}^1$ ,  $\theta > 0$ .

**4.2.** On fixe dans la suite l'entier  $i$ , c'est-à-dire la réduite  $p_{n_i}/q_{n_i}$  de  $\alpha$ . Pour avoir des notations plus maniables, on pose :

$$\begin{aligned} p/q &= p_{n_i}/q_{n_i} , & \bar{p}/\bar{q} &= p_{n_{i-1}}/q_{n_{i-1}} , & \tilde{p}/\tilde{q} &= p_{n_{i+1}}/q_{n_{i+1}} , \\ m(x) &= m_{n_i}(x) , & \bar{m}(x) &= m_{n_{i-1}}(x) , & \tilde{m}(x) &= m_{n_{i+1}}(x) , \\ M &= \text{Max}_{\mathbb{T}^1} m(x) , & \bar{M} &= \text{Max}_{\mathbb{T}^1} \bar{m}(x) , & \tilde{M} &= \text{Max}_{\mathbb{T}^1} \tilde{m}(x) . \end{aligned}$$

On désignera par  $m_1, m_2, \overline{m}_1, \dots$ , les mêmes fonctions calculées à partir de  $f_1 = (f_1)_i$ ,  $f_2 = (f_2)_i$  au lieu de  $f$ .

Pour fixer les idées et simplifier les notations, on suppose que  $n_i$  est pair ; l'autre cas se traite absolument de la même façon.

**4.3.** On choisit et fixe dans la suite un point  $x_o \in \mathbb{R}$  où la fonction  $m$  atteint son maximum. Il existe alors un unique point  $x_1$  tel que  $x_o$  soit le milieu de l'intervalle  $L = [f^q(x_1) - \overline{p}, x_1]$ .

LEMME. — On note  $d$  la demi-longueur de  $L$ . On a alors :

$$\overline{M} \leq C_2 \overline{m}(x_1) = 2 C_2 d ,$$

où la constante  $C_2 > 0$  dépend de  $f$  mais pas de  $i$ .

*Démonstration :* Soit  $z \in \mathbb{R}$  un point tel que  $\overline{m}(z) = \overline{M}$  ; par 3.1 a), il existe deux entiers  $j, \ell$ , avec  $0 \leq j < q$ , tels que  $t = f^{-j}(z) + \ell \in [f^q(x_1) - \overline{p}, f^{-q}(x_1) + \overline{p}]$ .

Par 3.2, il existe des points  $\xi \in [f^q(t) - p, t]$ ,  $\xi' \in [x_o, f^q(x_o) - p]$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \overline{m}(z) = Df^j(\xi) \overline{m}(t) , \\ m(f^j(x_o)) &= Df^j(\xi') m(x_o) = M Df^j(\xi') . \end{aligned}$$

La seconde égalité implique  $Df^j(\xi') \leq 1$ . D'autre part, en utilisant le lemme 3.3 et la troisième inégalité de 3.1 b), on obtient :

$$\begin{aligned} Df^j(\xi) &\leq C Df^j(\xi') \leq C , \\ \overline{m}(t) &\leq C \overline{m}(x_1) . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\overline{M} = Df^j(\xi) \overline{m}(t) \leq C_2 \overline{m}(x_1) .$$

□

**4.4.** En reportant l'estimation du lemme précédent dans les inégalités (8) et (9) de 3.7, on a, pour  $x \in L$ ,  $0 \leq \ell \leq k - 1$  :

$$m(x) \leq C d^{(k+1)/2} \leq \frac{d}{8} , \quad \text{pour } i \text{ assez grand} , \quad (10)$$

$$|D^\ell \text{Log } Df^q(x)| \leq C d^{(k-1)/2-\ell} . \quad (11)$$

Soit  $g \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  ; on a  $Dg^{-1} \circ g = (Dg)^{-1}$ ,  $D^2(g^{-1}) \circ g = -(Dg)^{-2} D \text{Log } Dg$ , et, plus généralement,  $D^{\ell+1}(g^{-1}) \circ g$  s'exprime comme le produit de  $(Dg)^{-\ell-1}$  par un polynôme  $A_\ell$  en les variables  $X_i = D^i \text{Log } Dg$ ,  $1 \leq i \leq \ell$ . Les polynômes  $A_\ell$  sont déterminés par induction :

$$\begin{aligned} A_1(X_1) &= -X_1 , \\ A_\ell(X_1, \dots, X_\ell) &= \left( \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\partial A_{\ell-1}}{\partial X_j} X_{j+1} \right) - \ell X_1 A_{\ell-1} . \end{aligned}$$

Ces relations montrent que  $A_\ell$  est homogène de poids  $\ell$  lorsqu'on donne à  $X_j$  le poids  $j$ .

On utilise ces formules avec  $g = f^q$  pour obtenir, à partir des estimations (11) et de l'inégalité de Denjoy, les estimations :

$$(12) \quad |D^\ell(f^{-q} - id)(x)| \leq C d^{(k+1)/2-\ell} ,$$

pour  $x \in L$ ,  $1 \leq \ell \leq k$ .

**4.5. PROPOSITION.** — Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\| \cdot \|$  une norme définissant la  $C^{k_1}$ -topologie sur  $C^{k_1}(\mathbb{T}^1)$ . Si  $i$  est assez grand, il existe une fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  qui possède les propriétés suivantes :

- i)  $\|\varphi\| < \varepsilon$  ;
- ii) le support de  $\varphi$  est contenu dans l'union  $\tilde{L}$  des translatés entiers de  $L$  ;
- iii) le difféomorphisme  $f_1 = (id + \varphi) \circ f$  a pour nombre de rotation  $\alpha$  ;
- iv)  $M_1 \leq C m_1(x_o) = CM$ , où  $C > 0$  est une constante dépendant de  $f$  mais pas de  $i$  ;
- v) pour  $x \in [f_1^{-2q}(x_o) + 2p, x_o]$ , on a :

$$f_1^q(x) = x + p + M .$$

Avant de commencer la construction de  $\varphi$ , notons les faits suivants : la propriété i) de  $\varphi$  implique, si  $\varepsilon$  est assez petit, que  $f_1$  est bien un difféomorphisme et est proche de  $f$  dans la  $C^{k_1}$ -topologie ; d'autre part, les intervalles  $f^j(L)$ ,  $1 \leq j < q$ , ne coupent pas l'intérieur de  $\tilde{L}$  (cf. 3.1 a)) ; la propriété ii) de  $\varphi$  implique donc :

$$(13) \quad f_1^q(y) = f^q(y) + \varphi(f^q(y)) , \quad y \in L .$$

La méthode de construction de  $\varphi$  est la suivante : pour  $i$  assez grand, on va construire deux fonctions  $\varphi_o, \varphi_1$  qui vérifient i) et ii) ; la fonction  $\varphi$  sera alors de la forme  $\varphi = t\varphi_o + (1-t)\varphi_1$ ,  $t \in [0, 1]$  étant choisi de manière à obtenir la propriété iii).

#### 4.6. Construction de $\varphi_o$

Soit  $\theta_o$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur la droite réelle qui vérifie :

$$\begin{aligned} \theta_o(x) &= 0 \quad \text{pour } 1/2 \leq |x| \leq 3/4 , \\ \theta_o(x) &= 1 \quad \text{pour } |x| \geq 1 \text{ ou } |x| \leq 1/4 , \\ 0 \leq \theta_o(x) &\leq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi_o$  est alors déterminée par les propriétés suivantes :

- a)  $\varphi_o$  est  $\mathbb{Z}$ -périodique

$$\text{b) } \varphi_o(x) = M \theta_o\left(\frac{x-x_o}{d}\right) + f^{-q}(x) - x + p, \text{ pour } x \in \left[x_o - \frac{d}{2}, x_o + \frac{d}{2}\right];$$

$$\text{c) } \varphi_o(x) = \left[1 - \theta_o\left(\frac{x-x_o}{d}\right)\right](f^{-q}(x) - x + p), \text{ pour } \frac{d}{2} \leq |x - x_o| \leq 1/2.$$

Les propriétés de  $\theta_o$  assurent que  $\varphi_o \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ , que  $\varphi_o$  s'annule hors de  $\tilde{L}$ , et qu'on a :

$$(14) \quad f^q(x) + \varphi_o(f^q(x)) = \begin{cases} f^q(x), & \text{si } 1/2 \geq |f^q(x) - x_o - p| \geq d, \\ x + p, & \text{si } \frac{3d}{4} \geq |f^q(x) - x_o - p| \geq \frac{d}{2}, \\ M + x + p, & \text{si } |f^q(x) - x_o - p| \leq \frac{d}{4}. \end{cases}$$

Soient  $x \in L$  et  $\ell$  un entier,  $0 \leq \ell \leq k$ . La formule de Leibniz et les estimations (10) et (12) permettent de majorer  $|D^\ell \varphi_o(x)|$  par  $Cd^{(k+1)/2-\ell}$ , où  $C > 0$  ne dépend que de  $f$  et  $\theta_o$ . Comme  $d$  est petit lorsque  $i$  est assez grand, ceci montre que  $\varphi_o$  possède la propriété i).

#### 4.7. Construction de $\varphi_1$

Soit  $\theta_1$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur la droite réelle qui vérifie :

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= 0 \quad \text{pour } |x| \geq 1, \\ \theta_1(x) &= 1 \quad \text{pour } |x| \leq 1/4, \\ 0 \leq \theta_1(x) &\leq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On considère alors la fonction  $\mathbb{Z}$ -périodique  $\varphi_1$  qui vaut, pour  $|x - x_o| \leq 1/2$  :

$$\varphi_1(x) = \theta_1\left(\frac{x - x_o}{d}\right)(M + f^{-q}(x) - x + p).$$

Comme pour  $\varphi_o$ , on vérifie que  $\varphi_1$  est de classe  $C^\infty$ , est nulle en dehors de  $\tilde{L}$ , et est petite dans la  $C^{k_1}$ -topologie lorsque  $i$  est grand. Par construction, on a :

$$(15) \quad f^q(x) + \varphi_1(f^q(x)) = \begin{cases} f^q(x) & \text{si } 1/2 \geq |f^q(x) - p - x_o| \geq d, \\ x + M + p & \text{si } |f^q(x) - p - x_o| \leq \frac{d}{4}. \end{cases}$$

Notons aussi que  $\varphi_1(x) \geq 0$  pour tout réel  $x$ .

#### 4.8. Définitions de $\varphi$ et $f_1$

Pour  $i$  assez grand,  $t \in [0, 1]$ , posons :

$$\begin{aligned} \varphi_t &= t\varphi_1 + (1-t)\varphi_o \\ F_t &= (id + \varphi_t) \circ f. \end{aligned}$$

Pour  $i$  assez grand,  $\varphi_t$  vérifie les propriétés i) et ii) de 4.5, donc  $F_t \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ , et l'application  $t \rightarrow F_t$  est continue.

Comme  $\varphi_1 \geq 0$ , on a  $\rho(F_1) \geq \alpha$ .

D'autre part, soit  $x$  un point tel que  $f^q(x) - p \in \left[ x_o + \frac{d}{2}, x_o + \frac{3d}{4} \right]$ ; l'estimation (10) implique que  $x \in L$ , donc on obtient, grâce à (13) et (14) :

$$f_p^q(x) = f^q(x) + \varphi_o(f^q(x)) = x + p .$$

On a par conséquent  $\varphi(F_o) = p/q < \alpha$ ; il existe alors  $t_o \in [0, 1]$  tel que  $\rho(F_{t_o}) = \alpha$ ; on pose  $\varphi = \varphi_{t_o}$ ,  $f_1 = F_{t_o}$ .

#### 4.9. Démonstration de la proposition 4.5

Les propriétés i) et ii) de  $\varphi$  résultent des propriétés analogues pour  $\varphi_o$  et  $\varphi_1$ ; la propriété iii) est vérifiée par construction.

Démontrons que  $f_1$  possède la propriété v). Soit  $x \in \left[ x_o - \frac{d}{4}, x_o \right]$ ; par (10),  $f^q(x) - p$  appartient à  $\left[ x_o - \frac{d}{4}, x_o + \frac{d}{4} \right]$ , et par (13), (14), (15) on a :

$$\begin{aligned} f_1^q(x) &= f^q(x) + t_o \varphi_1(f^q(x)) + (1 - t_o) \varphi_o(f^q(x)) \\ &= M + p + x . \end{aligned}$$

Ceci montre, en utilisant (10), que  $f_1^{-2q}(x_o) + 2p = x_o - 2M \in \left[ x_o - \frac{d}{4}, x_o \right]$ ; la propriété v) en résulte.

Démontrons que  $f_1$  possède la propriété iv). On vient de voir que  $m_1(x_o) = M$ .

Soit  $y \in \mathbb{R}$ ; si pour tout  $0 < j \leq q$ ,  $f^j(y)$  n'appartient pas à  $\tilde{L}$ , on a  $f^q(y) = f_1^q(y)$ , donc  $m_1(y) = m(y) \leq M$ ; sinon, soit  $j \in (0, q]$  le plus petit entier tel que  $f^j(y)$  appartienne à  $\tilde{L}$ . On a alors :

$$f_1^j(y) = f^j(y) + \varphi(f^j(y)) \in \tilde{L} ,$$

en utilisant la propriété ii) de  $\varphi$ ; on en déduit :

$$\begin{aligned} f_1^q(y) &= f^{q-j}(f_1^j(y)) , \\ m_1(y) &= m(y) + f^{q-j}(f_1^j(y)) - f^{q-j}(f^j(y)) . \end{aligned}$$

Comme  $f_1^j(y)$ ,  $f^j(y)$  sont dans la même composante connexe de  $\tilde{L}$ , il existe  $\xi \in \tilde{L}$  tel que :

$$m_1(y) = m(y) + Df^{q-j}(\xi)\varphi(f^j(y)) .$$

Par 3.2 et le lemme 4.3, il existe  $\xi' \in L$  vérifiant :

$$Df^{q-j}(\xi') = \frac{\overline{m}(f^{q-j}(x_1))}{\overline{m}(x_1)} \leq \frac{\overline{M}}{\overline{m}(x_1)} \leq C_2 .$$

Par construction de  $\varphi_o$  et  $\varphi_1$ , on a  $|\varphi_o| \leq M$ ,  $0 \leq \varphi_1 \leq M$ , donc  $|\varphi| \leq M$ . Comme la troisième relation de 3.1 b) implique  $Df^{q-j}(\xi) \leq C Df^{q-j}(\xi') \leq CC_2$ , on obtient finalement :

$$m_1(y) \leq M + CC_2 M = C_3 M = C_3 m_1(x_o) .$$

□

#### 4.10. Estimations pour $f_1$

On va obtenir pour  $f_1^{\tilde{q}}$  des estimations similaires aux estimations (10), (11), (12) pour  $f^q$  : c'est l'hypothèse  $\alpha_{n_i} \leq \alpha_{n_i-1}^{(k-1)/2}$  qui était à la base de (10), (11), (12); on n'a pas forcément  $\alpha_{n_i+1} \leq \alpha_{n_i}^{(k+1)/2}$  néanmoins la propriété v) de 4.5 nous permettra de conclure.

La remarque suivante est importante : il est clair que dans les estimations du § 3, les constantes  $C$  sont bornées avec la norme de  $f$  dans la  $C^k$ -topologie.

Notons enfin que  $k_1 \geq 3$  (car  $k \geq 6$ ).

LEMME. — Posons  $\gamma = \frac{\alpha_{n_i+1}}{\alpha_{n_i}}$ ; pour  $1 \leq \ell \leq k_1$ ,  $x \in f_1^{\tilde{q}}([x_o - 2M, x_o + M])$ , on a :

$$\begin{aligned} |D^\ell (f_1^{-\tilde{q}} - id)(x)| &\leq C M^{(k_1+1)/2-\ell} , \\ |m_1(f_1^{-\tilde{q}}(x)) - M\gamma| &\leq C M^{(k_1+1)/2} , \end{aligned}$$

où  $C > 0$  est une constante ne dépendant que de  $f$ .

Démonstration : Pour  $x \in [f_1^{-2q-\tilde{q}}(x_o), f_1^{-q}(x_o) - p - \tilde{p}]$ , on a, par la propriété v) de 4.5 :

$$\begin{aligned} f_1^{\tilde{q}}(x + M) &= f_1^{\tilde{q}}(f_1^q(x) - p) \\ &= f_1^q(f_1^{\tilde{q}}(x)) - p = f_1^{\tilde{q}}(x) + M , \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{m}_1(x) = \tilde{m}_1(x + M) ,$$

$$D^\ell \text{Log } Df_1^{\tilde{q}}(x) = D^\ell \text{Log } Df_1^{\tilde{q}}(x + M), \quad \ell \in \mathbb{N} .$$

Le théorème de Rolle montre que toutes les applications  $D^\ell \text{Log } Df_1^{\tilde{q}}$ ,  $\ell \geq 0$ , ont au moins un zéro dans l'intervalle  $[x_o - 2M, x_o]$ .

Lorsque  $i$  varie, la suite  $(f_1)_i$  est bornée dans la  $C^{k_1}$ -topologie par 4.5 i); par la remarque qui précède l'énoncé du lemme, les estimations du § 3 sont valables pour  $f_1$  (avec  $k_1$  à la place de  $k$ ), avec des constantes qui dépendent de  $f$  mais pas de  $i$ .

On intègre plusieurs fois l'inégalité (3) de 3.4, prise avec  $f_1$  à la place de  $f$  et  $\ell = k_1 - 1$ , à partir des zéros des fonctions  $D^j \text{Log } Df_1^{\tilde{q}}$  trouvés précédemment; on obtient ainsi, en tenant compte de la propriété 4.5 iv) :

$$|D^\ell \text{Log } Df_1^{\tilde{q}}(x)| \leq C M^{(k_1-1)/2-\ell} ,$$

pour  $0 \leq \ell \leq k_1 - 1$ ,  $x \in [x_o - 2M, x_o + M]$ , et  $C > 0$  une constante ne dépendant que de  $f$ .

Procédant alors comme en 4.4, on obtient la première estimation du lemme.

Par 3.1 d), il existe des points  $y \in [x_o, x_o + M]$ ,  $z \in [f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}, x_o]$  vérifiant  $\tilde{m}_1(y) = \gamma m_1(z)$ ; de plus,  $m_1(z) = M$  par 4.5 v).

En intégrant la première inégalité du lemme (pour  $\ell = 0$ ) entre  $y$  et  $x \in [x_o - 2M, x_o + M]$ , on obtient :

$$|\tilde{m}_1(x) - M| = |\tilde{m}_1(x) - \tilde{m}_1(y)| \leq |y - x| CM^{(k_1-1)/2} \leq CM^{(k_1+1)/2} .$$

□

**4.11.** On note  $L_o$  l'intervalle  $[f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) - \tilde{p} + p, f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}]$ ,  $L_1$  l'intervalle  $[f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}, x_o + M(1 - \gamma)]$ ,  $L_2$  l'intervalle  $L_o \cup L_1$ ,  $\tilde{L}_2$  l'union des translatés entiers de  $L_2$ .

La méthode de construction de la seconde perturbation  $f_2$  de  $f$  est la suivante : on va définir, au moyen de ses restrictions à  $L_o$  et  $L_1$ , une fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  ayant les propriétés suivantes :

- a)  $\psi$  est petite dans la  $C^{k_2}$ -topologie lorsque  $i$  est grand ;
- b) le difféomorphisme  $f_2 = (id + \psi) \circ f_1$  est une quasi-rotation d'angle  $\alpha$  ;
- c) le support de  $\psi$  est contenu dans  $\tilde{L}_2$ .

**4.12. Définition de la restriction  $\psi_o$  de  $\psi$  à  $L_o$**

Soit  $\theta$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur la droite réelle qui vérifie :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 0 \quad \text{pour } x \leq 1/3 , \\ \theta(x) &= 1 \quad \text{pour } x \geq 2/3 , \\ 0 &\leq \theta(x) \leq 1 \quad \text{pour tout réel } x . \end{aligned}$$

Pour  $x \in L_o$ , on définit alors :

$$\psi_o(x) = \theta\left(\frac{1}{M}(x - f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) + \tilde{p} - p)\right)(f_1^{-\tilde{q}}(x) + \tilde{p} - M\gamma - x) .$$

Il résulte de la formule de Leibniz et des estimations du lemme 4.10 qu'on a :

$$(16) \quad |D^\ell \psi_o(x)| \leq C M^{(k_1+1)/2-\ell} ,$$

pour  $\ell \leq k_1$ , où  $C > 0$  ne dépend que de  $f$  (et du choix de  $\theta$ ).

Par 4.5 v), on a :

$$f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) - \tilde{p} + p = f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p} - M ,$$

donc  $(id + \psi_o)(f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}) = x_o - M\gamma$ .

D'autre part,  $\psi_o(f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) - \tilde{p} + p) = 0$ .

Ces relations, jointes à (16), permettent d'obtenir la conclusion suivante : lorsque  $i$  est grand, la fonction  $\psi_o$  est petite dans la  $C^{k_2}$ -topologie, et  $(id + \psi_o)$  est un

difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de l'intervalle  $L_o$  sur l'intervalle  $L'_o = [f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) - \tilde{p} + p, x_o - M\gamma]$ .

#### 4.13. Construction de $\psi$ et de $f_2$

On a  $L_1 = L'_o + M$  ; pour  $x \in L_1$ , on pose :

$$\psi_1(x) = f_1^{q-\tilde{q}} \circ (id + \psi_o)^{-1}(x - M) + \tilde{p} - p - x - M\gamma .$$

L'application  $\psi_1$  est de classe  $C^\infty$  sur  $L_1$ .

Pour  $x \in \left[ f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) - \tilde{p} + p, f_1^{\tilde{q}-q}(x_o) - \tilde{p} + p + \frac{M}{3} \right]$ , on a :

$$(17) \quad \psi_o(x) = 0 \quad (\text{cf. 4.12}) .$$

Pour  $x \in \left[ f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p} - \frac{M}{3}, f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p} \right] = L_3$ , on a :

$$(18) \quad x + \psi_o(x) = f_1^{-\tilde{q}}(x) + \tilde{p} - M\gamma \quad (\text{cf. 4.12}) .$$

Pour  $x \in \left[ f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}, f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p} + \frac{M}{3} \right]$ , on a :

$$(id + \psi_o)^{-1}(x - M) = x - M = f_1^{-q}(x) + p ,$$

par (17) et 4.5 v), d'où on tire :

$$(19) \quad (id + \psi_1)(x) = f_1^{-\tilde{q}}(x) + \tilde{q} - M\gamma .$$

Lorsque  $y$  décrit le voisinage à gauche  $L_3$  de  $f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}$ , le point  $x = (id + \psi_o)(y) + M$  décrit un voisinage à gauche de  $x_o + M(1 - \gamma)$ , et on a :

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= f_1^{q-\tilde{q}}(y) + \tilde{p} - p - x - M\gamma \\ (20) \quad &= f_1^{-\tilde{q}}(y) + M + \tilde{p} - x - M\gamma \quad (\text{cf. 4.5 v}) \\ &= M - x + (id + \psi_o)(y) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Il résulte de (17), (18), (19), (20) qu'il est possible de prolonger  $\psi_o, \psi_1$  en une fonction  $\mathbb{Z}$ -périodique  $\psi$ , de classe  $C^\infty$  et s'annulant hors de  $\tilde{L}_2$ .

De plus, vu la formule de  $\psi_1$ , 4.12, et le lemme 4.10, la fonction  $\psi$  est petite dans la  $C^{k_2}$ -topologie lorsque  $i$  est grand ; en particulier, on a  $|D\psi| < 1$  pour  $i$  assez grand, donc on peut définir un difféomorphisme  $f_2 \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  par la formule :

$$f_2 = (id + \psi) \circ f_1 .$$

4.14 PROPOSITION. — *Le difféomorphisme  $f_2$  est une quasi-rotation d'angle  $\alpha$  ; plus précisément, il vérifie la condition  $C(x_o, n_i, M\alpha_{n_i}^{-1})$  de 2.1.*

*Démonstration :* Les points de la forme  $f_1^j(x_o)$ ,  $0 < j < \tilde{q}$ , dont les images dans  $\mathbb{T}^1$  sont les plus proches de l'image  $\bar{x}_o$  de  $x_o$  dans  $\mathbb{T}^1$ , sont  $f_1^{\tilde{q}-q}(x_o)$  (à gauche de  $\bar{x}_o$ ) et  $f_1^q(x_o)$  (à droite de  $\bar{x}_o$ ) : cela résulte de la propriété analogue pour la rotation  $R_\alpha$  (et du fait que le nombre de rotation de  $f_1$  est  $\alpha$ ).

Or les points  $f_1^{\tilde{q}-q}(x_o)$  et  $f_1^q(x_o) = x_o + p + M$  n'appartiennent pas à l'intérieur de  $\tilde{L}_2$ , donc il en est de même pour les points  $f_1^i(x_o)$ ,  $0 < i < \tilde{q}$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} f_2^{\tilde{q}}(x_o) &= f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p} + \psi_o(f_1^{\tilde{q}}(x_o) - \tilde{p}) \\ &= x_o - M\gamma \quad \text{par (18)}. \end{aligned}$$

Soit  $x \in [x_o - M\gamma, x_o] \subset L$  ; pour  $0 < j < q$ , le point  $f_1^j(x)$  n'appartient pas à  $\tilde{L}$ , qui contient  $\tilde{L}_2$  ; le point  $f_1^q(x) = x + p + M$  n'appartient pas non plus à l'intérieur de  $\tilde{L}_2$ . On a donc :

$$f_2^q(x) = f_1^q(x) = x + p + M,$$

c'est-à-dire la première moitié de la condition  $C(x_o, n_i, M\alpha_{n_i}^{-1})$ .

On a  $x_o + M = f_1^q(x_o) - p = f_2^q(x_o) - p$ . Soit  $x \in L_4 = [x_o, x_o + M]$  ; pour  $0 < j < \tilde{q} - q$ , le point  $f_1^j(x)$  n'appartient pas à l'intérieur de  $\tilde{L}_2$  ; d'autre part l'image de  $L_4$  par  $(f_1^{\tilde{q}-q} - \tilde{p} + p)$  est égale à  $L_o$ . On en déduit :

$$(21) \quad p - \tilde{p} + f_2^{\tilde{q}-q}(x) = y = (id + \psi_o)(f_1^{\tilde{q}-q}(x) - \tilde{p} + p).$$

Ceci montre que  $y$  appartient à  $L'_o$ . Les points  $f_1^j(y)$ ,  $0 < j < q$ , n'appartiennent pas à l'intérieur de  $\tilde{L}_2$  ; d'autre part la restriction de  $(f_1^q - p)$  à  $L'_o$  est d'après 4.5 v) la translation par  $M$ , donc envoie  $L'_o$  sur  $L_1$ .

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} f_2^{\tilde{q}}(x) - \tilde{p} &= f_2^q(y) - p \\ &= (id + \psi_1)(f_1^q(y) - p) \\ &= \tilde{p} - p - M\gamma + f_1^{q-\tilde{q}} \circ (id + \psi_o)^{-1}(f_1^q(y) - p - M) \\ &= \tilde{p} - p - M\gamma + f_1^{q-\tilde{q}} \circ (id + \psi_o)^{-1}(y) \\ &= x - M\gamma \quad \text{par (21)}. \end{aligned}$$

Ceci démontre la seconde moitié de la condition  $C(x_o, n_i, M\alpha_{n_i}^{-1})$ . □

#### **4.15. Conclusion**

Pour chaque entier  $i$  assez grand, on a associé à la réduite  $p_{n_i}/q_{n_i}$  de  $\alpha$  un quasi-rotation  $f_2 = (f_2)_i$  d'angle  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ ; de plus la suite  $(f_2)_i$  converge vers  $f$  dans la  $C^{k_2}$ -topologie.

Compte-tenu du théorème 2.1, on obtient ainsi un résultat de densité en différentiabilité finie qui implique immédiatement celui du théorème 1.1.

## Chapitre IV

### DÉPENDANCE CONTINUE DE CHAMPS DE VECTEURS ASSOCIÉS AUX GERMES DE DIFFÉOMORPHISMES

#### 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 2.5, qui nous servira fréquemment dans la suite.

Étant donné un difféomorphisme  $f$  préservant l'orientation d'un intervalle sur son image qui a au plus un point fixe, il s'agit de construire un champ de vecteurs différentiable  $X$  qui dépende continûment de  $f$  (pour une topologie appropriée) et tel que  $X$  soit associé à  $f$  : le flot  $(F_t)$  de  $X$  vérifie  $F_1 = f$ .

Le résultat nouveau est la dépendance continue de  $X$  par rapport à  $f$ .

Si  $f$  est de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) et n'a pas de point fixe, il est trivial de construire beaucoup de champs de vecteurs de classe  $C^{r-1}$  associés à  $X$  : cf. lemme 2.7.

Si  $f$  est de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) et a un point fixe, la situation est bien différente : Kopell [Ko] a montré qu'il existe au plus un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^1$  qui soit associé à  $f$  ; Szekeres [Sz] d'autre part a prouvé qu'il en existait toujours un, et qu'il est de classe  $C^{r-1}$  hors du point fixe de  $f$ . Si  $f$  est de classe  $C^\infty$  et n'est pas infiniment tangent à l'identité en son point fixe, Takens [Ta] a montré que le champ de vecteurs  $X$  associé est partout de classe  $C^\infty$  ; lorsque  $f$  est de classe  $C^\infty$ , et est infiniment tangent à l'identité en son point fixe  $p_f$ , Sergeraert a étudié ([Se]) la différentiabilité de  $X$  en  $p_f$  ; en particulier, il prouve que  $X$  n'est pas nécessairement de classe  $C^2$  en  $p_f$ .

Ces résultats, et le fait que le domaine de définition de  $X$  dépende de  $f$ , expliquent pourquoi on est obligé de donner à la notion de dépendance continue de  $X$  par rapport à  $f$  un sens assez compliqué : cf. 2.5.

Dans l'appendice 4, on met à profit la démonstration du théorème 2.5 (§ 3) pour donner une autre démonstration du résultat de Takens (loc. cit.), valable en différentiabilité finie.

Signalons enfin que ce type de résultat peut être utile pour étudier d'autres problèmes en plus grande dimension : par exemple les bifurcations de type selle nœud ([N-P-T]).

## 2. Champs de vecteurs associés à un difféomorphisme

**2.1.** On se donne dans ce paragraphe un intervalle  $I$  de la droite réelle, qui est non vide et non réduit à un point. Il peut être borné ou non, ouvert, semi-ouvert ou fermé.

Pour  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , on considère l'espace  $\mathcal{D}^r = \mathcal{D}^r(I)$  formé par les fonctions numériques  $f$  de classe  $C^r$  sur  $I$  qui ont les propriétés suivantes :

- i)  $f$  est un difféomorphisme préservant l'orientation de classe  $C^r$  de  $I$  sur son image;
- ii) pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq x$ ;
- iii)  $f$  a au plus un point fixe;
- iv) les intervalles  $f(I) \cap I$ ,  $f(f(I) \cap I) \cap I$  sont non vides et non réduits à un point.

On note  $\mathcal{D}_o^r$  (resp.  $\mathcal{D}_+^r$ ) l'ensemble des  $f \in \mathcal{D}^r(I)$  qui ont (resp. n'ont pas) un point fixe. On a donc  $\mathcal{D}^r = \mathcal{D}_o^r \cup \mathcal{D}_+^r$ , et l'union est disjointe.

Remarquons qu'une fonction numérique  $f$  de classe  $C^r$  sur  $I$  qui vérifie les conditions i) et ii), et a exactement un point fixe, vérifie alors automatiquement les conditions iii) et iv), donc appartient à  $\mathcal{D}_o^r$ . Si  $f \in \mathcal{D}_o^r$ , et si son point fixe  $p_f$  appartient à l'intérieur de  $I$ , on a  $Df(p_f) = 1$ .

**2.2.** Nous aurons besoin dans la suite d'une notion de convergence pour une suite de fonctions n'ayant pas nécessairement le même domaine de définition.

Soit  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ; considérons l'espace des couples  $(\theta, J)$ , où  $J$  est un intervalle non vide et non réduit à un point de la droite réelle, et  $\theta$  une fonction numérique de classe  $C^r$  définie sur  $J$ .

Donnons-nous un élément  $(\theta, J)$  de cet espace d'une part, et une suite  $(\theta_n, J_n)_{n \geq 0}$  dans cet espace d'autre part.

Nous dirons que la suite  $(\theta_n, J_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $(\theta, J)$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $J$  si les propriétés suivants sont réalisées :

- (C<sub>1</sub>) la suite des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles  $J_n$  converge vers l'extrémité gauche (resp. droite) de l'intervalle  $J$ ;
- (C<sub>2</sub>) pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $x_n \in J_n$  qui converge vers une limite  $x \in J$ , et pour tout  $0 \leq i \leq r$ , la suite  $(D^i \theta_n(x_n))_{n \geq 0}$  converge vers  $D^i \theta(x)$ .

Lorsque  $J_n = J$  pour tout  $n \geq 0$ , la condition (C<sub>1</sub>) est automatiquement vérifiée, et la condition (C<sub>2</sub>) est vérifiée si et seulement si la suite  $(\theta_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\theta$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $J$ ; cela justifie notre terminologie.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'intervalle de définition  $J_n$  de  $\theta_n$ , nous dirons encore, lorsque les conditions (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) sont vérifiées, que la suite  $(\theta_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\theta$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $J$ .

**2.3.** On munit l'espace  $\mathcal{D}^r(I)$  de la topologie définie de la façon suivante : une suite

$(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite  $f$  si :

- la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $I$  ;
- la suite  $(f_n^{-1}, f_n(I))_{n \geq 0}$  converge vers  $(f^{-1}, f(I))$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $f(I)$ .

**2.4.** Soient  $s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ,  $J$  un intervalle non vide et non réduit à un point de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  une fonction numérique de classe  $C^s$  définie et à valeurs positives sur  $J$ .

Le groupe à un paramètre  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$  associé au champ de vecteurs défini par  $X$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(x) = X(F_t(x)), \quad F_0(x) = x .$$

Soit  $t_0 > 0$ . Si  $F_{t_0}$  est défini en  $x \in J$ , on a :

$$F_{t_0}(x) = x \iff X(x) = 0 ,$$

$$(1) \quad \int_x^{F_{t_0}(x)} X^{-1}(u) du = t_0, \quad \text{si } X(x) \neq 0 .$$

Ceci permet de déterminer l'intervalle de définition  $J_{t_0}$  de  $F_{t_0}$  :

- si  $X$  est strictement positive sur  $J$  et  $\int_J X^{-1}(u) du < t_0$ , on a  $J_{t_0} = \emptyset$  ;
- si l'intégrale de  $X^{-1}$  en l'extrémité droite de  $J$  est divergente, on a  $J_{t_0} = J$  ;
- sinon, en notant  $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  l'extrémité droite de  $J$  ; il existe un unique point  $c \in \bar{J}$  tel que  $\int_c^d X^{-1}(u) du = t_0$  ; on a alors  $J_{t_0} = J \cap (-\infty, c]$  ou  $J_{t_0} = J \cap (-\infty, c)$  suivant que  $d$  appartient ou non à  $J$ .

**DÉFINITION.** — Soient  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ,  $f \in \mathcal{D}^r(I)$ ,  $J, X$  comme précédemment. On dit que  $X$  est associé à  $f$  si  $J_1 = I$  et  $F_1 = f$ .

La discussions précédente montre qu'on a alors  $J = I \cup f(I)$ .

**2.5.** Soit  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ,  $r \geq 2$ . On suppose que l'intervalle  $I$  de 2.1 est compact.

Dans les propriétés iv) et v) du théorème ci-dessous, la condition de 2.2 est automatiquement vérifiée par les intervalles de définition  $I \cup f_n(I)$  de  $X(f_n)$ . Suivant 2.2, la  $C^{r-1}$  convergence sur les compacts de  $I \cup f(I) - \{p_f\}$  dans v) a la signification suivante : étant donné, pour tout  $n \geq 0$ , un point  $x_n \in I \cup f_n(I)$  différent du point fixe (éventuel) de  $f_n$ , si la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite  $x \in I \cup f(I)$  différente de  $p_f$ , alors, pour tout  $0 \leq i \leq r - 1$ , la suite  $D^i X(f_n)(x_n)$  converge vers  $D^i X(f)(x)$ .

**THÉORÈME.** — Il existe une application  $X$  qui associe à tout  $f \in \mathcal{D}^r(I)$  un champ de vecteurs  $X(f)$  et possède les propriétés suivantes :

- i) pour tout  $f \in \mathcal{D}^r$ ,  $X(f)$  est associé à  $f$  ;
- ii) pour tout  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ,  $X(f)$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $I \cup f(I)$  ;

- iii) pour tout  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ,  $X(f)$  est de classe  $C^1$  sur  $I \cup f(I)$ , et de classe  $C^{r-1}$  sur le complémentaire dans  $I \cup f(I)$  du point fixe  $p_f$  de  $f$  ;
- iv) soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{D}_+^r$  convergeant vers une limite  $f \in \mathcal{D}_+^r$  ; alors la suite  $(X(f_n), I \cup f_n(I))_{n \geq 0}$  converge vers  $(X(f), I \cup f(I))$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur (les compacts de)  $I \cup f(I)$  ;
- v) soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{D}^r$  convergeant vers une limite  $f \in \mathcal{D}_0^r$  ; alors la suite  $(X(f_n))$  converge vers  $X(f)$  pour la  $C^1$ -topologie sur (les compacts de)  $I \cup f(I)$ , et aussi pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur les compacts de  $(I \cup f(I)) - \{p_f\}$ .

On renvoie le lecteur au §1 pour la discussion des parties déjà connues de ce théorème.

**2.6.** La démonstration du théorème 2.5 est donnée au § 3. On obtient auparavant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs  $X$  soit associé à un difféomorphisme  $f$ .

**DÉFINITION.** — Soit  $f \in \mathcal{D}_+^r$  ; un domaine fondamental de  $f$  est un intervalle de la forme  $[a, f(a)]$ ,  $a \in I$ .

Soit  $f \in \mathcal{D}_0^r$  ; un domaine fondamental à gauche (resp. à droite) de  $f$  est un intervalle de la forme  $[a, f(a)]$ , avec  $a \in I$ ,  $a < p_f$  (resp.  $a > p_f$ ), où  $p_f$  est le point fixe de  $f$ .

Lorsque  $p_f$  est l'extrémité gauche (resp. droite) de  $I$ , il n'y a pas de domaine fondamental à gauche (resp. à droite) de  $f$ .

**2.7.** Soient  $r, s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , avec  $r \geq s + 1$ , et  $f \in \mathcal{D}_+^r(I)$ . Choisissons un domaine fondamental  $D$  de  $f$ .

**LEMME.** — Pour qu'un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^s$  défini sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  soit associé à  $f$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- i)  $J = I \cup f(I)$  ;
- ii)  $X$  est strictement positif sur  $J$  ;
- iii)  $\int_D X^{-1}(u) du = 1$  ;
- iv) pour tout  $x \in I$ ,  $X(f(x)) = Df(x)X(x)$ .

*Démonstration :* Les conditions du lemme sont nécessaires : i), ii), iii) résultent de 2.4 et iv) s'obtient en dérivant la relation (1) de 2.4.

Réciproquement, si les conditions du lemme sont vérifiées, la fonction  $\varphi(x) = \int_x^{f(x)} X^{-1}(u) du$  est constamment égale à 1 sur  $I$ , donc  $X$  est associé à  $f$  par 2.4.  $\square$

**REMARQUE :** le lemme permet de construire beaucoup de champs de vecteurs de classe  $C^{r-1}$  associés à  $f$ .

**2.8.** Soient  $r, s \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , avec  $r \geq s + 1$ , et  $f \in \mathcal{D}_0^r(I)$ . Choisissons, s'il en existe, des domaines fondamentaux à gauche et à droite de  $f$ , qu'on note respectivement

$D_0, D_1$ .

LEMME. — Pour qu'un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^s$  défini sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  soit associé à  $f$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- i)  $J = I \cup f(I)$  ;
- ii)  $X$  est positif sur  $J$  et le point fixe de  $f$  est son unique zéro :
- iii)  $\int_{D_i} X^{-1}(u)du = 1$  pour  $i = 0, 1$  ;
- iv)  $X(f(x)) = X(x)Df(x)$  pour tout  $x \in I$ .

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.7.

### 3. Démonstration du théorème 2.5

3.1. On fixe dans ce paragraphe l'ordre de différentiabilité  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ,  $r \geq 2$ .

On adopte les techniques employées par Sergeraert ([Se]); elles visent à obtenir des formules tractables pour  $X(f)$  et ses dérivées. Il nous a semblé préférable de reprendre toutes les estimations, bien que certaines (lorsque  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ) se trouvent déjà dans [Se]. Les ingrédients pour les formules de  $X(f)$  et ses dérivées sont les suivantes : les applications  $\Delta_f, \Theta_f$  définies en 3.3 et des opérateurs  $\theta \mapsto \Sigma\theta, \theta \mapsto \Sigma'\theta$  définis en 3.6, 3.7.

Comme  $I$  est compact, on peut supposer que  $I = [0, 1]$ . Pour  $f \in \mathcal{D}^r$ , on pose alors :

$$\begin{aligned} I_f &= [0, f^{-1}(1)] \\ \widehat{I} &= I \quad \text{si } f \in \mathcal{D}_+^r, \\ \widehat{I} &= I - \{p_f\} \quad \text{si } f \in \mathcal{D}_0^r, f(p_f) = p_f, \\ \widehat{I}_f &= \widehat{I} \cap I_f. \end{aligned}$$

3.2. L'application de  $\mathcal{D}_0^r$  dans  $I$  qui associe à  $f$  son point fixe  $p_f$  est continue.

Soit  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ; il existe un unique point  $\tilde{p}_f \in I$  tel que :

$$\int_0^{\tilde{p}_f} (f(u) - u)^{-1} du = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(u) - u)^{-1} du.$$

Posons  $p_f = \text{Max}(f(0), \text{Min}(f^{-1}(1), \tilde{p}_f))$ ; par la condition iv) de 2.1, on a  $f(0) < f^{-1}(1)$ , ce qui implique

$$(2) \quad f(0) \leq p_f \leq f^{-1}(1).$$

(Cette relation est aussi vraie lorsque  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ).

L'application  $f \mapsto p_f$  est clairement continue de  $\mathcal{D}_+^r$  dans  $I$ . Notons aussi que  $\mathcal{D}_+^r$  est ouvert dans  $\mathcal{D}^r$  (car  $I$  est compact).

Soient  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ,  $\varepsilon > 0$ . L'intégrale  $\int_{|u-p_f|<\varepsilon} (f(u) - u)^{-1} du$  est divergente, donc pour  $g \in \mathcal{D}_+^r$  assez voisin de  $f$ , on a :

$$\int_{|u-p_f| \geq \varepsilon} (g(u) - u)^{-1} du < \int_{|u-p_f| < \varepsilon} (g(u) - u)^{-1} du,$$

et aussi  $g(0) \leq p_f + \varepsilon$ ,  $g^{-1}(1) \geq p_f - \varepsilon$ . On obtient ainsi  $|p_f - p_g| < \varepsilon$ , donc l'application  $f \rightarrow p_f$  est continue de  $\mathcal{D}^r$  dans  $I$ . La définition exacte de  $p_f$ , pour  $f \in \mathcal{D}_+^r$ , n'est pas très importante. Les propriétés qui importent pour la suite sont la continuité de l'application  $f \mapsto p_f$  et la relation (2) ci-dessus.

**3.3.** Pour  $f \in \mathcal{D}^r$ , on définit :

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta_f(x) = f(x) - x, & x \in I. \\ \Theta(x) &= \Theta_f(x) = \text{Log } Df(x) - \text{Log} \left[ \int_0^1 Df(x + t\Delta(x)) dt \right], & x \in I_f. \end{aligned}$$

Les applications  $\Delta_f$  et  $\Theta_f$  seront utilisées en 3.9, 3.10 pour donner une définition explicite du champ de vecteurs  $X(f)$ .

L'application  $\Delta$  (resp.  $\Theta$ ) est de classe  $C^r$  (resp.  $C^{r-1}$ ) sur  $I$  (resp. sur  $I_f$ ). Pour  $x \in I_f$ , on obtient par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(x) + \Delta(x) \int_0^1 Df(x + t\Delta(x)) dt \\ &= f(x) + \Delta(x) Df(x) + \Delta^2(x) \int_0^1 (1-t) D^2 f(x + t\Delta(x)) dt; \end{aligned}$$

on en déduit respectivement :

$$(3) \quad \Delta(f(x)) \exp \Theta(x) = \Delta(x) Df(x),$$

$$(4) \quad \Theta(x) = \text{Log} \left( 1 - \frac{\Delta^2(x)}{\Delta(f(x))} \int_0^1 (1-t) D^2 f(x + t\Delta(x)) dt \right).$$

**3.4.** On adopte dans la suite du paragraphe la convention suivante : pour  $1 \leq i \leq r$ , la lettre  $C_i$  désigne diverses constantes qui ne dépendent que de la norme de la fonction  $\text{Log } Df$  dans la  $C^{i-1}$ -topologie; à partir de 3.11, ces constantes peuvent aussi dépendre de la quantité  $\lambda_f$  définie en 3.9, 3.10.

Pour  $f \in \mathcal{D}^r$ ,  $1 \leq j \leq r$ , la fonction  $D^j(\text{Log } \Delta)$  est sur  $I$  le quotient par  $\Delta^j$  d'un polynôme en  $\Delta$ ,  $D\Delta, \dots, D^j\Delta$ ; on a donc, pour  $x \in I$  :

$$(5) \quad |D^j(\text{Log } \Delta)(x)| \leq C_j (\Delta(x))^{-j}.$$

Pour  $f \in \mathcal{D}^r$ ,  $0 \leq j \leq r-1$ ,  $x \in I_f$ , on a, d'après la définition de  $\Theta$  :

$$(6) \quad |D^j \Theta(x)| \leq C_{j+1}.$$

En utilisant la formule (4) et la relation  $\Delta(f(x)) \leq C_1 \Delta(x)$ , qui résulte du théorème des accroissements finis, on obtient aussi, pour  $x \in I_f$  :

$$(7) \quad |\Theta(x)| \leq C_2 \Delta(x).$$

**3.5.** Considérons une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{D}^r$  qui converge vers une limite  $f \in \mathcal{D}^r$ .

La suite  $(\Delta_{f_n})_{n \geq 0}$  converge alors vers  $\Delta_f$  pour la  $C^r$ -topologie sur  $I$ .

D'autre part, pour tout  $n \geq 0$ , la fonction  $\Theta_{f_n}$  est définie et de classe  $C^{r-1}$  sur  $I_{f_n}$ ; il est élémentaire (mais désagréable) de montrer que la suite  $(\Theta_{f_n}, I_{f_n})_{n \geq 0}$  converge, au sens de 2.2, vers  $(\Theta_f, I_f)$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur (les compacts de)  $I_f$ .

**3.6.** Soit  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ; si  $x \in I$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  sont tels que  $f^m(x)$  et  $f^n(x)$  sont définis, on a :

$$\sum_{i=m}^{n-1} \Delta(f^i(x)) = f^n(x) - f^m(x).$$

Donc la série  $-\sum_{i \geq 0} \Delta(f^i(x))$  (resp.  $\sum_{i < 0} \Delta(f^i(x))$ ) converge uniformément sur l'intervalle  $[0, p_f]$  (resp; sur  $[p_f, 1]$ ) et sa somme vaut  $x - p_f$ . Soit  $\theta$  une fonction numérique définie sur  $I_f$ , et qui y vérifie  $|\theta(x)| \leq C\Delta(x)$  : la série  $-\sum_{i \geq 0} \theta \circ f^i$  (resp.  $\sum_{i < 0} \theta \circ f^i$ ) converge uniformément sur  $[0, p_f]$  (resp.  $[p_f, 1]$ ); sa somme, qu'on note  $\Sigma\theta$  ou  $\Sigma_f\theta$ , vérifie, pour  $x \in I$  :

$$|\Sigma\theta(x)| \leq C|x - p_f|.$$

Soit  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ; le point  $q_f = f^{-1}(p_f)$  est bien défini car  $p_f \in [f(0), f^{-1}(1)]$ ; l'intervalle  $[q_f, p_f]$  est un domaine fondamental de  $f$  inclus dans  $I_f$ . Pour tout  $x \in I$ , il existe un unique entier  $N(x)$  tel que  $f^{N(x)}(x) \in (q_f, p_f]$ ; étant donnée une fonction numérique  $\theta$  définie sur  $I_f$ , on note  $\Sigma\theta$  ou  $\Sigma_f\theta$  la fonction définie sur  $I$  par :

$$\Sigma\theta(x) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{N(x)-1} \theta(f^i(x)), & \text{si } N(x) > 0, \\ 0, & \text{si } N(x) = 0, \\ \sum_{i=1}^{-N(x)} \theta(f^{-i}(x)), & \text{si } N(x) < 0. \end{cases}$$

Si la fonction  $\theta$  vérifie  $|\theta| \leq C\Delta$  sur  $I_f$ , on a, pour tout  $x \in I$  :

$$|\Sigma\theta(x)| \leq C \text{Max}(|x - p_f|, |x - q_f|).$$

L'opérateur  $\theta \mapsto \Sigma\theta$  jouera un rôle crucial dans la définition et les estimations du champ de vecteurs  $X(f)$ .

**3.7.** Lorsque  $f \in \mathcal{D}_+^r$  et  $\theta$  est une fonction continue sur  $I_f$ , la fonction  $\Sigma\theta$  peut avoir des discontinuités aux points de l'orbite de  $p_f$ . On modifie légèrement l'opérateur  $\Sigma$  de façon à supprimer ces discontinuités.

On fixe dans la suite une application  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  de  $I$  dans  $I$  qui vaut 1 sur  $[0, 1/3]$  et 0 sur  $[2/3, 1]$ .

Soient  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ,  $\theta$  une fonction numérique définie sur  $I_f$  et  $x \in I$ , on définit :

$$\tilde{\theta}(x) = -\alpha\left(\frac{p_f - f^{N(x)}(x)}{p_f - q_f}\right)\theta(f^{N(x)}(x)),$$

$$\Sigma'\theta(x) = \Sigma'_f\theta(x) = \Sigma\theta(x) + \tilde{\theta}(x).$$

La fonction  $\Sigma'\theta$  est définie sur  $I$ , identiquement nulle au voisinage de  $p_f$ ; si  $\theta$  est de classe  $C^s$  sur  $I_f$ , avec  $0 \leq s \leq r$ , alors la fonction  $\Sigma'\theta$  est de classe  $C^s$  sur  $I$ . Comme  $\tilde{\theta}$  est  $f$ -invariante, on a, pour  $x \in I_f$  :

$$(8) \quad \Sigma'\theta(f(x)) = \Sigma'\theta(x) + \theta(x) .$$

La relation (8) reste valable lorsque  $f \in \mathcal{D}_o^r$ , si on pose  $\Sigma'\theta = \Sigma\theta$  pour une fonction  $\theta$  vérifiant  $|\theta| \leq C\Delta$  sur  $I_f$ .

**3.8.** Nous étudions dans ce numéro les propriétés de continuité des opérateurs  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Plus précisément, nous considérons la situation suivante : on a une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{D}^r$  qui converge vers une limite  $f \in \mathcal{D}^r$ , et pour chaque  $n \geq 0$ , une fonction  $\theta_n$  définie et continue sur l'intervalle  $I_{f_n} = [0, f_n^{-1}(1)]$ . Remarquons qu'alors la suite  $(f_n^{-1}(1))_{n \geq 0}$  converge vers  $f^{-1}(1)$ .

Les lemmes 3.8.1 et 3.8.2 ci-dessous seront utilisés ultérieurement en prenant  $\theta_n = \Theta_{f_n}$ ,  $\theta = \Theta_f$ .

**3.8.1.** Supposons d'abord que  $f_n \in \mathcal{D}_+^r$  pour  $n \geq 0$ , que  $f \in \mathcal{D}_+^r$ , que  $\theta_n$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $I_{f_n}$  pour  $n \geq 0$ , et que la suite  $(\theta_n, I_{f_n})$  converge vers une limite  $(\theta, I_f)$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur (les compacts de)  $I_f$ , au sens de 2.2; la fonction  $\theta$  est donc définie et de classe  $C^{r-1}$  sur  $I_f$ .

Pour simplifier les notations, on note dans ce numéro  $\Sigma'_{f_n}\theta_n = \Sigma'\theta_n$ ,  $\Sigma'_f\theta = \Sigma'\theta$ ,  $p_{f_n} = p_n$ ,  $q_{f_n} = q_n$ ,  $p_f = p$ ,  $q_f = q$ .

LEMME. — *Sous les hypothèses précédentes, la suite  $(\Sigma'\theta_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\Sigma'\theta$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur  $I$ .*

*Démonstration :* Montrons d'abord que la suite  $(\Sigma'\theta_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\Sigma'\theta$  dans la  $C^{r-1}$ -topologie sur l'intervalle

$$K = \left[ \frac{5q+p}{6}, f\left(\frac{3q+p}{4}\right) \right] .$$

Comme les suites  $(p_n)_{n \geq 0}$  et  $(q_n)_{n \geq 0}$  convergent respectivement vers  $p$  et  $q$ , on a, pour  $n$  assez grand :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2p_n + q_n) &< \frac{1}{4}(3p + q) < p_n , \\ p_n &< f\left(\frac{1}{4}(3q + p)\right) < f_n\left(\frac{1}{3}(2q_n + p_n)\right) , \end{aligned}$$

d'où on déduit, pour  $n$  assez grand et  $t \in \left[ \frac{1}{4}(3p + q), f\left(\frac{1}{4}(3q + p)\right) \right]$  :

$$\Sigma'\theta_n(t) = 0 .$$

De même, on a, pour  $n$  assez grand

$$q_n < \frac{1}{6}(5q + p) < \frac{1}{4}(3p + q) < p_n ,$$

d'où on déduit, pour  $n$  assez grand et  $t \in \left[ \frac{1}{6}(5q + p), \frac{1}{4}(3p + q) \right]$  :

$$\Sigma' \theta_n(t) = -\theta_n(t) \alpha \left( \frac{p_n - t}{p_n - q_n} \right).$$

La convergence annoncée sur  $K$  résulte aussitôt de ces deux formules pour  $\Sigma' \theta_n$ .

Posons  $D = \left[ \frac{1}{5}(4q + p), f \left( \frac{1}{5}(4q + p) \right) \right]$ ; c'est un domaine fondamental de  $f$  contenu dans l'intérieur de  $K$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $I$  qui converge vers une limite  $x$ ; choisissons un entier  $m$  tel que  $f^m(x) \in D$ ; pour  $n$  assez grand, le point  $f_n^m(x_n)$  appartient à  $K$ . De plus, on a :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma' \theta(x) &= \Sigma' \theta(f^m(x)) + \sum_{i=1}^{|m|} \theta(f^{-i}(x)) \\ \Sigma' \theta_n(x_n) &= \Sigma' \theta_n(f_n^m(x_n)) + \sum_{i=1}^{|m|} \theta_n(f_n^{-i}(x_n)) \end{aligned} \right\} \text{ si } m < 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma' \theta(x) &= \Sigma' \theta(f^m(x)) - \sum_{i=0}^{m-1} \theta(f^i(x)) \\ \Sigma' \theta_n(x_n) &= \Sigma' \theta_n(f_n^m(x_n)) + \sum_{i=0}^{m-1} \theta_n(f_n^i(x_n)) \end{aligned} \right\} \text{ si } m > 0,$$

A l'aide de ces formules, de celles qu'on obtient en les dérivant, et de la convergence déjà prouvée sur  $K$ , il est élémentaire (mais fastidieux!) de montrer, que, pour tout  $0 \leq i \leq r - 1$ , la suite  $D^i(\Sigma' \theta_n)(x_n)$  converge vers  $D^i(\Sigma' \theta)(x)$ .

Le lemme est alors démontré. □

**3.8.2.** On suppose maintenant que  $f_n \in \mathcal{D}^r$  pour tout  $n \geq 0$ , que  $f \in \mathcal{D}_o^r$ , que  $\theta_n$  est continue sur  $I_{f_n}$  pour tout  $n \geq 0$ , et que la suite  $(\theta_n, I_{f_n})$  converge vers une limite  $(\theta, I_f)$  pour la  $C^o$ -topologie sur (les compacts de)  $I_f$ , au sens de 2.2; la fonction  $\theta$  est donc définie et continue sur  $I_f$ .

On fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe  $C > 0$  tel qu'on ait, pour tout  $n \geq 0, t \in I_{f_n}$  :

$$(9) \quad |\theta_n(t)| \leq C \Delta_{f_n}(t).$$

Dans le lemme qui suite et sa démonstration, on adopte les notations de 3.8.1.

**LEMME.** — *Sous les hypothèses précédentes, les suites  $(\Sigma \theta_n)_{n \geq 0}$  et  $(\Sigma' \theta_n)_{n \geq 0}$  convergent uniformément sur  $I$  vers la fonction  $\Sigma \theta = \Sigma' \theta$ .*

*Démonstration :* De l'hypothèse (9) on déduit d'une part que  $\Sigma \theta_n$  est définie sur  $I$  pour tout  $n \geq 0$  et d'autre part qu'on a, pour  $t \in I_f$  :

$$|\theta(t)| \leq C \Delta_f(t).$$

Donc  $\Sigma\theta$  est également définie sur  $I$ . On obtient de plus les estimations :

$$(10) \quad \begin{aligned} |\Sigma\theta_n(t)| &< C \text{ Max}(|t - p_n|, |t - q_n|), \quad n \geq 0, \\ |\Sigma\theta(t)| &< C |t - p|. \end{aligned}$$

(On pose  $p_n = q_n$  si  $f_n \in \mathcal{D}_0^r$ .)

Les suites  $(p_n)_{n \geq 0}$  et  $(q_n)_{n \geq 0}$  convergent vers le point  $p$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $I$  qui converge vers une limite  $x$ .

Si  $x = p$ , on a  $\Sigma\theta(x) = 0$ , et les inégalités précédentes montrent que  $(\Sigma\theta_n(x_n))_{n \geq 0}$  converge vers 0.

Supposons que  $x < p$ , et donnons-nous  $\varepsilon > 0$ ; choisissons  $m > 0$  tel que  $|p - f^m(x)| < \varepsilon$ ; pour  $n$  assez grand, on a alors  $|p - p_n| < \varepsilon$ ,  $|p - q_n| < \varepsilon$ ,  $|p - f_n^m(x_n)| < 2\varepsilon$ ; on tire alors de (10) que :

$$\begin{aligned} |\Sigma\theta_n(f_n^m(x_n))| &< 3C\varepsilon, \\ |\Sigma\theta(f^m(x))| &< C\varepsilon. \end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \Sigma\theta_n(x_n) &= \Sigma\theta_n(f_n^m(x_n)) - \sum_{i=0}^{m-1} \theta_n(f_n^i(x_n)), \\ \Sigma\theta(x) &= \Sigma\theta(f^m(x)) - \sum_{i=0}^{m-1} \theta(f^i(x)). \end{aligned}$$

On obtient finalement, pour  $n$  assez grand :

$$|\Sigma\theta_n(x_n) - \Sigma\theta(x)| < 5C\varepsilon.$$

On a ainsi montré que  $(\Sigma\theta_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\Sigma\theta$  uniformément sur  $I$ .

Quant au résultat analogue pour  $(\Sigma'\theta_n)_{n \geq 0}$ , on peut supposer que  $f_n \in \mathcal{D}_+^r$  pour tout  $n \geq 0$  (sinon  $\Sigma\theta_n = \Sigma'\theta_n$ ); il suffit alors de prouver que la suite  $(\tilde{\theta}_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $I$  vers 0.

Etant donnée une suite  $(x_n)$  dans  $I$  convergeant vers une limite  $x$ , on choisit, pour chaque  $n \geq 0$ , un point  $y_n$  qui appartient à  $[q_n, p_n]$  et à l'orbite de  $x_n$  par  $f_n$ . La suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $p$ , donc la suite  $(\theta_n(y_n))_{n \geq 0}$  converge vers  $\theta(p)$ ; or  $|\theta(p)| \leq C\Delta_f(p)$ , donc  $\theta(p) = 0$ . D'autre part, par définition de  $\tilde{\theta}_n$ , on a, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\tilde{\theta}_n(y_n) = \tilde{\theta}_n(x_n),$$

$$|\tilde{\theta}_n(y_n)| \leq |\theta_n(y_n)|.$$

Donc la suite  $(\tilde{\theta}_n(x_n))_{n \geq 0}$  converge vers 0, et ceci achève la démonstration du lemme.  $\square$

Remarquons que tant dans 3.8.1 que dans 3.8.2, les hypothèses des lemmes sont vérifiées en prenant  $\theta_n = \Theta_{f_n}$ ,  $\theta = \Theta_f$ ; ceci résulte de la relation (7).

**3.9.** Soit  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ; on pose :

$$(11) \quad X(f) = \lambda_f \Delta_f \exp(\Sigma'_f \Theta_f),$$

où  $\lambda_f \in \mathbb{R}_+^*$  est déterminé par la condition :

$$\int_0^{f(0)} (X(f))^{-1}(u) du = 1.$$

Il résulte de 3.2, 3.7 que  $X(f)$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $I$ , et de 3.5, 3.8.1 que  $X(f)$  dépend continûment, pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur  $I$ , de  $f \in \mathcal{D}_+^r$ .

Les relations (3) et (8) montrent qu'on a, pour  $x \in I_f$  :

$$(12) \quad X(f)(f(x)) = X(f)(x) Df(x).$$

Il existe une unique fonction sur  $[0, f(1)]$  qui prolonge  $X(f)$  et vérifie (12) pour tout  $x \in I$ ; on la note encore  $X(f)$ ; on vérifie immédiatement que cette fonction est de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, f(1)]$ .

La fonction  $X(f)$  vérifie les hypothèses du lemme 2.7; elle définit donc un champ de vecteurs qui est associé à  $f$ .

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{D}_+^r$  convergeant vers une limite  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ; en utilisant d'une part la convergence de la suite  $(X(f_n)/I)_{n \geq 0}$  vers  $X(f)/I$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur  $I$ , d'autre part la relation (12), on obtient immédiatement que la suite  $(X(f_n), [0, f_n(1)])_{n \geq 0}$  converge vers  $(X(f), [0, f(1)])$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur (les compacts de)  $[0, f(1)]$ , au sens de 2.2. On a ainsi démontré l'assertion iv) de 2.5.

**3.10.** Soit  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ; on définit  $\lambda_f \in \mathbb{R}_+^*$  par :

$$\begin{aligned} \lambda_f &= 1 & \text{si } Df(p_f) &= 1, \\ \lambda_f &= \frac{\text{Log } c}{c-1} & \text{si } Df(p_f) &= c \neq 1. \end{aligned}$$

Remarquons que le second cas ne peut se produire que si  $p_f = 0$  ou 1.

Par 3.6 et la relation (7), la fonction  $\Sigma_f \Theta_f$  est définie et continue sur  $I$ . Posons :

$$(13) \quad X(f) = \lambda_f \Delta_f \exp(\Sigma_f \Theta_f).$$

Le champ de vecteurs  $X(f)$  est défini et continu sur  $I$ ; il vérifie, par (3) et (8), pour  $x \in I_f$  :

$$(14) \quad X(f)(f(x)) = Df(x) X(f)(x).$$

Il existe une unique fonction définie sur  $[0, f(1)]$  qui prolonge  $X(f)$  et vérifie (14) pour tout  $x \in I$  : on la note encore  $X(f)$ ; elle est continue sur  $[0, f(1)]$  et son unique

zéro est  $p_f$ . Pour montrer qu'elle définit un champ de vecteurs associé à  $f$ , on applique le lemme 2.8 : les conditions i), ii), iv) de ce lemme sont vérifiées; montrons que la condition iii) l'est aussi.

Supposons d'abord que  $Df(p_f) = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; si  $[a, b]$  est un domaine fondamental de  $f$  (à gauche ou à droite) suffisamment proche de  $p_f$ , on a, pour  $t \in [a, b]$  :

$$\begin{aligned} |\Delta(t) - (b-a)| &< \varepsilon(b-a), & \text{car } D\Delta(p_f) = 0; \\ \left| \frac{\Delta(t)}{X(f)(t)} - 1 \right| &< \varepsilon, & \text{par (7) et 3.6.} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b (X(f))^{-1}(u) du &> (1-\varepsilon) \int_a^b (\Delta(u))^{-1} du > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \\ \int_a^b (X(f))^{-1}(u) du &< (1+\varepsilon) \int_a^b (\Delta(u))^{-1} du < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la condition iii) de 2.8 est vérifiée, puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitraire.

Supposons maintenant que  $Df(p_f) = c \neq 1$ ; on traite par exemple le cas où  $p_f = 0$ , donc  $c > 1$ , l'autre cas étant absolument similaire. Soit  $\varepsilon > 0$ ; soit  $[a, b]$  un domaine fondamental à droite de  $f$  suffisamment voisin de 0; on a alors pour  $t \in [a, b]$  :

$$\begin{aligned} |\Delta(t) - t(c-1)| &< \varepsilon t, & \text{car } D\Delta(0) = c-1 \\ \left| \frac{\lambda_f \Delta(t)}{X(f)(t)} - 1 \right| &< \varepsilon, & \text{par (7) et 3.6.} \end{aligned}$$

On obtient donc successivement :

$$\begin{aligned} \int_a^b (X(f)(u))^{-1} du &< (1+\varepsilon) \lambda_f^{-1} \int_a^b (\Delta(u))^{-1} du, \\ \int_a^b (\Delta(u))^{-1} du &< \int_a^b [(c-1-\varepsilon)u]^{-1} du = (c-1-\varepsilon)^{-1} \text{Log } \frac{b}{a}, \\ \text{Log } \frac{b}{a} &= \text{Log} \left( 1 + \frac{\Delta(a)}{a} \right) < \text{Log}(c+\varepsilon) \end{aligned}$$

et on conclut que :

$$\int_a^b (X(f))^{-1}(u) du < (1+\varepsilon) \frac{c-1}{c-1-\varepsilon} \frac{\text{Log}(c+\varepsilon)}{\text{Log } c}.$$

De manière analogue, on montre que :

$$\int_a^b (X(f)(u))^{-1} du > (1-\varepsilon) \frac{c-1}{c-1+\varepsilon} \frac{\text{Log}(c-\varepsilon)}{\text{Log } c}.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on conclut que la condition iii) de 2.8 est vérifiée par  $X(f)$ .

Le champ de vecteurs  $X(f)$  est donc dans tous les cas associé à  $f$ .

**3.11.** Montrons que l'application  $\lambda : f \mapsto \lambda_f$  est continue de  $\mathcal{D}^r$  dans  $\mathbb{R}^*_+$ ; elle l'est clairement sur  $\mathcal{D}^r_0$  et  $\mathcal{D}^r_+$ ; considérons donc une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{D}^r_+$  qui converge vers une limite  $f \in \mathcal{D}^r_0$ . Soient  $[a, b]$  un domaine fondamental (à gauche ou à droite) de  $f$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit; par le lemme 3.8.2, il existe un entier  $n_0$  et  $C > 0$  tels qu'on ait, pour  $n \geq n_0$ ,  $t \in [a, b + \varepsilon]$  :

$$\begin{aligned} |b - f_n(a)| &< \varepsilon, \\ \Delta_{f_n}(t) \exp[(\Sigma'_{f_n} \Theta_{f_n})(t)] &> C. \end{aligned}$$

Or on a, pour  $g = f$  ou  $g = f_n$  :

$$\lambda_g = \int_a^{g(a)} [\Delta_g \exp(\Sigma'_g \Theta_g)]^{-1}(u) du;$$

en utilisant le lemme 3.8.2, on voit que  $(\lambda_{f_n})_{n \geq 0}$  converge vers  $\lambda_f$ . Ceci montre que l'application  $\lambda$  est continue.

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{D}^r$  qui converge vers une limite  $f \in \mathcal{D}^r$ ; alors la suite  $(X(f_n), [0, f_n(1)])_{n \geq 0}$  converge vers  $(X(f), [0, f(1)])$  pour la  $C^0$ -topologie sur (les compacts de)  $[0, f(1)]$ , au sens de 2.2 : sur  $[0, 1]$  cela résulte de 3.5, 3.8.1 ou 3.8.2, et de la continuité de  $\lambda$ , et la convergence s'étend à  $[0, f(1)]$  par les relations (12) et (14).

**3.12.** Soit  $f \in \mathcal{D}^r$ ; il résulte de la relation (7) et de 3.6 qu'on a, pour  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} \left| \text{Log} \frac{X(f)}{\lambda_f \Delta_f}(t) \right| &\leq C_2 |t - p_f|, & \text{si } f \in \mathcal{D}^r_0; \\ \left| \text{Log} \frac{X(f)}{\lambda_f \Delta_f}(t) \right| &\leq C_2 \text{Max}(|t - p_f|, |t - q_f|), & \text{si } f \in \mathcal{D}^r_+. \end{aligned}$$

**3.13.** Pour  $f \in \mathcal{D}^r$ , on note  $\Gamma = \Gamma_f$  la dérivation de Lie suivant le champ  $X(f)$  : on a donc  $\Gamma\theta = X(f)D\theta$ , pour une fonction  $\theta$  de classe  $C^1$ . On déduit de (12) et (14) l'égalité  $\Gamma(\theta \circ f) = \Gamma\theta \circ f$ , là où les deux membres sont définis.

Soient  $f \in \mathcal{D}^r_+$  et  $\theta$  une fonction numérique de classe  $C^1$  sur  $I_f$ ; hors de l'orbite de  $p_f$  par  $f$ , où  $\Sigma\theta$  peut avoir des discontinuités, on a donc :

$$\Gamma(\Sigma\theta) = \Sigma(\Gamma\theta).$$

Le résultat analogue lorsque  $f \in \mathcal{D}^r_0$  est l'objet du lemme suivant.

LEMME. — Soient  $f \in \mathcal{D}^r_0$  et  $\theta$  une fonction numérique de classe  $C^1$  sur  $I_f$  qui y vérifie  $|\theta| \leq C\Delta$ . Alors la fonction  $\Sigma\theta$  est de classe  $C^1$  sur  $I - \{p_f\} = \hat{I}$ , la fonction  $\Sigma(\Gamma\theta)$  est définie sur  $I$ , et on a, pour  $t \in \hat{I}$  :

$$\Sigma(\Gamma\theta)(t) = \Gamma(\Sigma\theta)(t).$$

*Démonstration* : Par 3.12, il existe une constante  $K > 0$  dépendant de  $\theta$  et  $f$  telle que  $|X(f)(t)D\theta(t)| \leq K\Delta_f(t)$  pour tout  $t \in I_f$ ; donc  $\Sigma(\Gamma\theta)$  est définie sur  $I$ .

En dérivant terme à terme la série définissant  $\Sigma\theta$  et en utilisant les relations  $Df^i X(f) = X(f) \circ f^i$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on obtient le produit par  $X(f)^{-1}$  de la série définissant  $\Sigma(\Gamma\theta)$ ; comme toutes ces séries convergent uniformément sur  $I$ , la conclusion du lemme en résulte.  $\square$

**3.14.** Soit  $f \in \mathcal{D}_0^r$ ; par le lemme précédent,  $\Sigma_f \Theta_f$ , et donc aussi  $X(f)$ , est de classe  $C^1$  sur  $\widehat{I}$ , avec :

$$(15) \quad DX(f) = X(f) \frac{D\Delta}{\Delta} + \Sigma(\Gamma\Theta).$$

D'après 3.12, la limite en  $p_f$  de  $DX(f)$  est égale à  $\lambda_f D\Delta(p_f)$ ; par 3.12, la limite en  $p_f$  de  $\frac{X(f)(t)}{t-p_f}$  est aussi  $\lambda_f D\Delta(p_f)$ . Donc  $X(f)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , et même sur  $[0, f(1)]$ , compte-tenu de la relation (14).

**3.15.** Soit  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ; par 3.13, on a :

$$(16) \quad DX(f) = X(f) \frac{D\Delta}{\Delta} + \Sigma(\Gamma\Theta) + \Gamma\tilde{\Theta}.$$

Dans cette formule,  $\Gamma\tilde{\Theta}$  n'est pas définie sur l'orbite (finie) de  $p_f$  où  $\tilde{\Theta}$  peut présenter des discontinuités; mais comme on sait déjà que  $X(f)$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, f(1)]$ , les estimations obtenues hors de l'orbite de  $p_f$  se prolongent par continuité.

On a  $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta} \circ f$ , donc  $\Gamma\tilde{\Theta} = \Gamma\tilde{\Theta} \circ f$ , là où les deux membres sont définis; soit  $t \in (q_f, p_f)$ ; on a :

$$\begin{aligned} |D\tilde{\Theta}(t)| &\leq C_2(\Delta(t)(p_f - q_f)^{-1} + 1), && \text{par (7) et 3.7;} \\ X(f)(t) &\leq C_2\Delta(t), && \text{par 3.12;} \end{aligned}$$

comme  $\Delta(t) \leq C_2(p_f - q_f)$ , on obtient :

$$(17) \quad X(f)(t) |D\Theta(t)| = |\Gamma\tilde{\Theta}(t)| \leq C_2\Delta(t) \leq C_2(p_f - q_f).$$

**3.16.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{D}^r$  qui converge vers une limite  $f \in \mathcal{D}^r$ . Montrons que la suite  $(X(f_n), [0, f_n(1)])_{n \geq 0}$  converge au sens de 2.2 vers  $(X(f), [0, f(1)])$  pour la  $C^1$ -topologie sur (les compacts de)  $[0, f(1)]$ .

Nous le savons déjà, par 3.9, lorsque  $f \in \mathcal{D}_+^r$ ; on suppose donc que  $f \in \mathcal{D}_0^r$ . D'autre part, on a vu en 3.11 que la convergence a lieu dans la  $C^0$ -topologie.

Etant donné une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ , telle que  $x_n \in [0, f_n(1)]$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in [0, f(1)]$ , il suffit donc de prouver que  $DX(f_n)(x_n)$  converge vers  $DX(f)(x)$ .

On se ramène au cas où  $x_n$  et  $x$  appartiennent à  $[0, 1]$  au moyen des relations (12) et (14).

Il résulte de la relation (6), de 3.12 et de la  $C^o$ -convergence de la suite  $(X(f_n))_{n \geq 0}$  que la suite de fonctions  $(\Gamma_{f_n} \Theta_{f_n})_{n \geq 0}$  vérifie les hypothèses du lemme 3.8.2; la suite  $(\Sigma \Gamma \Theta_{f_n})_{n \geq 0}$  converge donc uniformément sur  $I$  vers  $\Sigma \Gamma \Theta_f$ . D'autre part, la suite  $X(f_n) \Delta_{f_n}^{-1} D \Delta_{f_n} = \lambda_{f_n} D \Delta_{f_n} \exp(\Sigma_{f_n} \Theta_{f_n})$  converge uniformément sur  $I$  vers  $\lambda_f D \Delta_f \exp(\Sigma_f \Theta_f) = X(f) \Delta_f^{-1} D \Delta_f$ .

Si  $f_n \in \mathcal{D}_o^r$  pour  $n$  assez grand, cela suffit pour prouver que  $DX(f_n)(x_n)$  converge vers  $DX(f)(x)$ ; sinon, on obtient la même conclusion en utilisant la relation (17), en remarquant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_{f_n} - q_{f_n}) = 0$ .

**3.17.** A ce point de la démonstration du théorème 2.5, on en a démontré les conclusions i), ii), iv) et une partie des conclusions iii) et v). La démonstration du théorème est d'ailleurs complète lorsque  $r = 2$ .

Soit  $f \in \mathcal{D}^r$ ; on définit sur  $\hat{I}$  des fonctions  $X_1, X_2, \dots$  de la façon suivante :

$$X_1 = DX(f);$$

$$X_{i+1} = \Gamma_f X_i, \quad \text{si } X_i \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \hat{I}.$$

Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ ; supposons que les fonctions  $X_1, \dots, X_{s-1}$  sont définies sur  $\hat{I}$ , et donnons-nous une fonction numérique  $\theta$  de classe  $C^s$  sur  $\hat{I}$ . On montre alors, par récurrence sur  $s$ , que  $\Gamma_f^i \theta$  est défini sur  $\hat{I}$  pour  $1 \leq i \leq s$ , et qu'il existe un polynôme universel  $P_s \in \mathbb{Z}(t_o, \dots, t_{s-1}, u_1, \dots, u_s)$  qui vérifie :

$$\text{i) } \Gamma^s \theta = X(f) P_s(X(f), X_1, \dots, X_{s-1}, D\theta, \dots, D^s \theta);$$

$$\text{ii) pour tout monôme } at_o^{m_o} \dots t_{s-1}^{m_{s-1}} u_1^{n_1} \dots u_s^{n_s} \text{ de } P_s, \text{ on a :}$$

$$0 < \sum_i in_i = m_o + 1 = s - \sum_{i=1}^{s-1} im_i.$$

En effet, par définition de  $\Gamma_f$  on a  $P_i(t_o, u_1) = u_1$ , donc  $P_1$  vérifie ii). Si  $\theta$  est de classe  $C^s$  sur  $\hat{I}$ , si  $X_{s-1}$  est défini sur  $I$ , et si  $\Gamma^{s-1} \theta$  est de la forme donnée par i), alors  $\Gamma^{s-1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\hat{I}$ , donc  $\Gamma^s \theta$  est défini sur  $I$  et de la forme décrite par i), avec :

$$P_s = t_1 P_{s-1} + t_o t_1 \frac{\partial P_{s-1}}{\partial t_o} + \sum_{j=1}^{s-2} t_{j+1} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial t_j} + t_o \sum_{j=1}^{s-1} u_{j+1} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial u_j}.$$

Donc  $P_s$  vérifie ii) si  $P_{s-1}$  vérifie ii).

REMARQUE : On vérifie aisément que  $P_s$  est linéaire en les variables  $u_1, \dots, u_s$ .

**3.18. LEMME.** — Pour tout  $f \in \mathcal{D}^r$ , les fonctions  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq r-1$ , sont définies sur  $\hat{I}$  et y vérifient  $|X_i| < C_{i+1}$  (cf. le début de 3.4 pour le sens de  $C_{i+1}$ ):

*Démonstration* : Supposons d'abord que  $f \in \mathcal{D}_o^r$  ; on montre, par récurrence sur  $i$  ( $1 \leq i \leq r-1$ ), que  $X_i$  est défini sur  $I$  et qu'on a :

$$(18) \quad X_i = \Gamma^i(\text{Log } \Delta) + \Sigma(\Gamma^i \Theta) ;$$

$$(19) \quad |X_i(t)| < C_{i+1}, \quad \text{pour } t \in \widehat{I}.$$

Pour  $i = 1$ , (18) n'est autre que (15), et (19) résulte de 3.6 et 3.12 (cf. le début de la démonstration du lemme 3.13).

Supposons que (18) et (19) aient lieu jusqu'à l'ordre  $i \leq r-2$ . Par 3.17,  $\Gamma^{i+1} \Theta$  est défini sur  $\widehat{I}_f$ , et  $\Gamma^{i+1}(\text{Log } \Delta)$  est défini sur  $\widehat{I}$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, les relations (5), (6) et la propriété ii) de 3.17, on obtient :

$$(20) \quad |\Gamma^{i+1}(\text{Log } \Delta)(t)| \leq C_{i+1}, \quad \text{pour } t \in \widehat{I};$$

$$(21) \quad |\Gamma^j \Theta(t)| \leq C_{j+1} X(f)(t), \quad \text{pour } t \in I_f, \quad 1 \leq j \leq i+1.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.13, et conclure que (18) et (19) sont vérifiées à l'ordre  $i+1$ .

Supposons maintenant que  $f \in \mathcal{D}_+^r$  ; alors  $X(f)$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $I = \widehat{I}$ , donc  $X_i$  est définie pour  $i \leq r-1$ , et on a :

$$X_i = \Gamma^i(\text{Log } \Delta) + \Sigma(\Gamma^i \Theta) + \Gamma^i \widetilde{\Theta},$$

hors de l'orbite de  $p_f$  par  $f$ .

Pour  $i = 1$ , l'estimation (19) résulte de 3.6, 3.12 et de la relation (17) ; supposons que l'estimation (19) ait lieu jusqu'à l'ordre  $i \leq r-2$ . On obtient comme précédemment les estimations (20) et (21). Comme  $(\Gamma^{i+1} \widetilde{\Theta}) \circ f = \Gamma^{i+1} \widetilde{\Theta}$ , il reste à montrer, pour compléter l'étape de la récurrence, qu'on a :

$$|\Gamma^{i+1} \widetilde{\Theta}(t)| < C_{i+2}, \quad \text{pour } t \in (q_f, p_f).$$

Pour  $t \in (q_f, p_f)$ ,  $1 \leq j \leq r-1$ , on a :

$$D^j \widetilde{\Theta}(t) = - \sum_{\ell=0}^j C_j^\ell D^\ell \Theta(t) D^{j-\ell} \alpha \left( \frac{p_f - t}{p_f - q_f} \right) (q_f - p_f)^{\ell-j}.$$

En utilisant les relations (6), (7) et l'estimation  $|q_f - p_f|^{-1} \leq C_2 [X(f)(t)]^{-1}$  prouvée en 3.15, on obtient :

$$|D^j \widetilde{\Theta}(t)| \leq C_{j+1} (X(f)(t))^{1-j}.$$

On porte cette estimation dans la formule 3.17 i), en tenant compte de 3.17 ii), pour conclure :

$$(22) \quad |\Gamma^{i+1} \widetilde{\Theta}(t)| < C_{i+2} X(f)(t) < C_{i+2}.$$

□

Notons que la relation (22) implique aussi le résultat suivant : si  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une suite dans  $\mathcal{D}_+^r$  qui converge vers  $f \in \mathcal{D}_o^r$ , alors pour tout  $0 \leq i \leq r-1$  la suite  $(\Gamma^i \tilde{\Theta}_{f_n})_{n \geq 0}$  converge uniformément vers 0.

**3.19.** Soit  $f \in \mathcal{D}^r$ . Montrons que  $X(f)$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $\hat{I}$ , et que pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ , il existe un polynôme universel  $Q_i \in \mathbb{Z}(u_0, \dots, u_{i-1})$  tel que :

$$(23) \quad X_i = (X(f))^{i-1} D^i X(f) + Q_i(X(f), DX(f), \dots, D^{i-1} X(f)).$$

En effet, pour  $i = 1$ , on prend  $Q_1 = 0$ . Soit  $i \leq r-2$ ; si  $X(f)$  est de classe  $C^i$  sur  $I$  et si (23) est vérifiée à l'ordre  $i$ , les fonctions  $(X(f))^{i-1}$ ,  $X_i$ ,  $Q_i(X(f), \dots, D^{i-1} X(f))$  sont de classe  $C^1$  sur  $\hat{I}$ , donc  $D^i X(f)$  est aussi de classe  $C^1$  sur  $\hat{I}$ ; on obtient (23) à l'ordre  $i+1$ , avec :

$$Q_{i+1} = (i-1)u_o^{i-1}u_1u_i + u_o \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial Q_i}{\partial u_j} u_{j+1}.$$

La relation (14) montre alors que  $X(f)$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, f(1)] - \{p_f\}$  (sur  $[0, f(1)]$  si  $f \in \mathcal{D}_+^r$  : cf. 3.9).

**3.20.** Pour conclure la démonstration du théorème 2.5, il reste à prouver la seconde partie de la conclusion v) de 2.5.

Considérons donc une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{D}^r$  qui converge vers une limite  $f \in \mathcal{D}_o^r$ .

On montre d'abord que pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ , la suite  $(X_i(f_n))_{n \geq 0}$  converge au sens de 2.2 vers  $X_i(f)$  pour la  $C^o$ -topologie sur les compacts de  $I - \{p_f\}$  (cf; la discussion qui suit l'énoncé du théorème 2.5).

Pour  $i = 1$ , cette convergence a été démontrée en 3.16; supposons-la réalisée jusqu'à l'ordre  $i \leq r-2$ .

Il résulte de 3.5-3.17 que la suite  $(\Gamma^{i+1}(\text{Log } \Delta_{f_n}))_{n \geq 0}$  converge vers  $\Gamma^{i+1}(\text{Log } \Delta_f)$  uniformément sur les compacts de  $I - \{p_f\}$ ; pour les mêmes raisons, la suite  $(\Gamma^{i+1}\Theta_{f_n})_{n \geq 0}$  converge au sens de 2.2 vers  $\Gamma^{i+1}\Theta_f$ , pour la  $C^o$ -topologie sur les compacts de  $I_f - \{p_f\}$ .

Bien que  $\Gamma^{i+1}\Theta_{f_n}$  (resp.  $\Gamma^{i+1}\Theta_f$ ) ne soit pas définie au point fixe (éventuel)  $p_n$  de  $f_n$  (resp. au point fixe  $p_f$  de  $f$ ), la relation (21) permet de la prolonger en une fonction continue sur  $I_{f_n}$  (resp. sur  $I_f$ ). On déduit alors de la relation (21) que la suite  $(\Gamma^{i+1}\Theta_{f_n})_{n \geq 0}$  converge au sens de 2.2 vers  $\Gamma^{i+1}\Theta_f$  pour la  $C^o$ -topologie sur (les compacts de)  $I_f$ .

La relation (21) montre enfin que les hypothèses du lemme 3.8.2 sont vérifiées par la suite  $(\Gamma^{i+1}\Theta_{f_n})_{n \geq 0}$ ; on peut donc conclure que la suite  $(\Sigma \Gamma^{i+1}\Theta_{f_n})_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $I$  vers  $\Sigma \Gamma^{i+1}\Theta_f$ .

Compte-tenu des formules pour  $X_{i+1}$  données en 3.18 et de la remarque qui suit la démonstration du lemme 3.18, on conclut que la suite  $(X_{i+1}(f_n))_{n \geq 0}$  converge au sens de 2.2 vers  $X_{i+1}(f)$  pour la  $C^o$ -topologie sur les compacts de  $I - \{p_f\}$ ; l'étape de l'induction est ainsi achevée.

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite telle que  $x_n \in [0, f_n(1)]$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in [0, f(1)]$ ,  $x \neq p_f$ ; soit  $1 \leq i \leq r-1$ ; pour montrer que la suite  $(D^i X(f_n)(x_n))_{n \geq 0}$  converge vers

$D^i X(f)(x)$ , on commence par se ramener, à l'aide des relations (12) et (14), au cas où  $x_n \in [0, 1]$ ,  $x \in [0, 1]$ ; on sait alors que pour tout  $1 \leq j \leq r - 1$  la suite  $X_j(f_n)(x_n)$  converge vers  $X_j(f)(x)$ ; le résultat désiré résulte alors par induction de la formule (23).

Ceci termine la démonstration du théorème 2.5.  $\square$

#### 4. Remarques

Nous revenons un instant sur la définition de l'espace  $\mathcal{D}^r(I)$  (cf. 2.1). Les conditions i) et iv) de 2.1 sont assez naturelles : elles définissent un voisinage de l'espace des difféomorphismes de  $I$  sur son image qui possèdent un point fixe.

La condition iii) de 2.1 est absolument indispensable si on veut obtenir un champ de vecteur associé de classe  $C^1$  : il est bien connu ([Ko] que parmi les difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de l'intervalle  $[0, 1]$  qui fixent uniquement 0 et 1, ceux qui possèdent un champ de vecteurs associé de classe  $C^1$  forment une partie nulle part dense; on consultera le chapitre V pour plus de détails.

Par contre, on peut omettre la condition ii) de 2.1 sans affecter la validité du théorème 2.5; comme nous n'utiliserons dans la suite le théorème 2.5 que sous la forme dans laquelle il a été énoncé, nous laissons les vérifications (faciles) de cette assertion au soin du lecteur.

**Chapitre V**  
**SUR UNE CLASSE DE DIFFÉOMORPHISMES**  
**DE L'INTERVALLE**

**1. L'espace  $S^r$**

**1.1.** On fixe dans ce chapitre un ordre de différentiabilité  $r$ , qui est soit  $\infty$ , soit un entier au moins égal à 2.

On note  $\text{Diff}_+^r(I)$  le groupe des difféomorphismes de l'intervalle  $I = [0, 1]$  qui sont de classe  $C^r$  et préservent l'orientation. On munit  $\text{Diff}_+^r(I)$  de sa topologie usuelle.

Les difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^r(I)$  qui vérifient  $f(t) > t$  pour tout  $t \in (0, 1)$  forment une partie convexe de  $\text{Diff}_+^r(I)$  qu'on notera  $S^r$ . On la munit de la topologie induite.

Notons que la partie  $S^r$  est stable pour la composition et pour les automorphismes intérieurs du groupe  $\text{Diff}_+^r(I)$ .

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'étude de la structure de l'espace  $S^r$  (§ 2) et des problèmes de conjugaison et centralisateurs (§ 3) dans  $S^r$ . Cependant, le plus important dans ce chapitre, ce ne sont pas les résultats, déjà connus pour la plupart, mais les techniques introduites pour les obtenir, que nous emploierons dans les chapitres ultérieurs dans l'étude des centralisateurs de difféomorphismes du cercle; ces techniques reposent essentiellement sur un invariant introduit par Mather [Ma] et défini en 1.6.

Notons pour mémoire que l'étude de l'espace formé par les difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^r(I)$  qui vérifient  $f(t) < t$  pour  $t \in (0, 1)$  se déduit de l'étude de  $S^r$  par la transformation  $f \rightarrow f^{-1}$ .

**1.2.** Soit  $f$  un difféomorphisme dans  $S^r$ .

On sait (cf. IV.1 pour les références) qu'il existe sur  $[0, 1)$  un unique champ de vecteurs de classe  $C^1$  qui soit associé (au sens de IV.2.4) à la restriction de  $f$  à  $[0, 1)$ ;

on notera ce champ  $X_f$  ou simplement  $X$ . Il est de classe  $C^{r-1}$  sur l'intervalle  $(0, 1)$  et vérifie sur  $[0, 1]$  la relation :

$$(1) \quad X_f \circ f = X_f \cdot Df \quad (\text{cf. V.2.8}).$$

Il résulte du théorème IV.2.5 que le champ  $X_f$  dépend continûment de  $f \in S^r$  pour la  $C^1$ -topologie sur les compacts de  $[0, 1]$ , et pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur les compacts de  $(0, 1)$ .

De même, il existe sur  $(0, 1]$  un unique champ de vecteurs  $Y_f = Y$  de classe  $C^1$  associé à la restriction de  $f$  à  $(0, 1]$ ; il jouit de propriétés analogues à celles de  $X$ , en particulier, on a, sur  $(0, 1]$  :

$$(2) \quad Y_f \circ f = Y_f \cdot Df.$$

Les relations (1) et (2) montrent que les suites  $(Df^n)_{n \geq 0}$  et  $(Df^{-n})_{n \geq 0}$  convergent vers 0 uniformément sur tout compact de  $(0, 1)$ ; donc, en posant  $X(1) = Y(0) = 0$ , on prolonge  $X$  et  $Y$  en des champs de vecteurs continus sur  $[0, 1]$ , dont les seules singularités sont 0 et 1.

**1.3.** Pour  $f \in S^r$ , on notera  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ) le groupe à un paramètre de difféomorphisme de classe  $C^r$  de l'intervalle  $(0, 1)$  qui est engendré par  $X_f$  (resp.  $Y_f$ ). Les relations suivantes sont donc vérifiées :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t = X \circ f_t,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t = Y \circ f^t,$$

$$f_1 = f^1 = f.$$

Soit  $a \in (0, 1)$ . On note  $U_f^a$  ou simplement  $U^a$  (resp.  $V_f^a, V^a$ ) la primitive de  $1/X$  (resp. de  $1/Y$ ) sur  $(0, 1)$  qui s'annule en  $a$ . Pour  $a, b \in (0, 1)$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a donc :

$$U^a(f_t(b)) = U^a(b) + t,$$

$$V^a(f^t(b)) = V^a(b) + t,$$

d'où on déduit les relations supplémentaires :

$$b = f_{U^a(b)}(a) = f^{V^a(b)}(a),$$

$$U^{f^t(a)}(b) = U^a(b) - t,$$

$$V^{f^t(a)}(b) = V^a(b) - t,$$

Notons que  $U_f^a$  et  $V_f^a$  sont des difféomorphismes de classe  $C^r$  de  $(0, 1)$  sur  $\mathbb{R}$  qui préservent l'orientation. Ils dépendent continûment, pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $(0, 1)$ , du couple  $(a, f) \in (0, 1) \times S^r$ .

Les relations précédentes montrent que  $U_f^a$  (resp.  $V_f^a$ ) conjugue le groupe à un paramètre  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ) au groupe à un paramètre canonique des translations de  $\mathbb{R}$ .

**1.4.** Soient  $f \in S^r$  et  $a, b \in (0, 1)$

On définit deux difféomorphismes  $W_f^{a,b} = W^{a,b}$  et  $H_f^{a,b} = H^{a,b}$  par les formules :

$$W^{a,b} = U^a \circ (V^b)^{-1},$$

$$H^{a,b} = (U^a)^{-1} \circ V^b.$$

On voit que  $W_f^{a,b}$  (resp.  $H_f^{a,b}$ ) est un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}$  (resp. de  $(0, 1)$ ) qui préserve l'orientation et dépend continûment de  $(a, b, f) \in (0, 1) \times (0, 1) \times S^r$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $\mathbb{R}$  (resp. de  $(0, 1)$ ).

On tire des relations de 1.3 les relations suivantes, qui caractérisent  $H_f^{a,b}$  et  $W_f^{a,b}$ ; pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f^t(b) = f_{W_f^{a,b}(t)}(a),$$

$$H_f^{a,b}(f^t(b)) = f_t(a).$$

Comme  $f_1 = f^1 = f$ , ces relations montrent que  $H_f^{a,b}$  commute avec  $f$  et que  $W_f^{a,b}$  commute avec la translation par 1, donc appartient à  $D^r(\mathbb{T}^1)$ .

Pour la topologie usuelle sur  $D^r(\mathbb{T}^1)$ ,  $W_f^{a,b}$  dépend continûment de  $a, b, f$ .

**1.5.** On définit une action du groupe additif  $\mathbb{R}^2$  sur l'espace  $D^r(\mathbb{T}^1)$  par la formule :

$$[(a, b) \cdot w](t) = w(t - a) + b,$$

pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $w \in D^r(\mathbb{T}^1)$ . Le graphe de  $(a, b) \cdot w$  est image de celui de  $w$  par la translation de vecteur  $(a, b)$ .

On note  $M^r$  l'espace des orbites de cette action, et on le munit de la topologie quotient de celle de  $D^r(\mathbb{T}^1)$ .

Soit  $w \in D^r(\mathbb{T}^1)$ ; si  $w$  est une translation, son stabilisateur pour l'action définie ci-dessus est égal à la diagonale de  $\mathbb{R}^2$ ; sinon,  $w - id_{\mathbb{R}}$  a une période minimale qui est de la forme  $1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ; le stabilisateur de  $w$  est alors le sous-groupe cyclique de  $\mathbb{R}^2$  engendré par  $(1/n, 1/n)$ .

Les translations dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  forment une orbite pour cette action de  $\mathbb{R}^2$ ; on notera  $m_o$  l'élément correspondant de  $M^r$ .

**1.6.** Soient  $f \in S^r$  et  $a, b \in (0, 1)$ .

Pour  $s, t, t' \in \mathbb{R}$ , on a, d'après 1.4 :

$$f^s(b) = f^{s-t'}(f^{t'}(b)) = f_{W_f^{a,b(s)-t}}(f_t(a)),$$

d'où on déduit la relation :

$$(t', t) \cdot W_f^{f_t(a), f^{t'}(b)} = W_f^{a,b}.$$

À la suite de Mather, on introduit la classe  $M(f)$  de  $W_f^{a,b}$  dans  $M^r$ . La relation précédente montre qu'elle ne dépend pas de  $a$  et  $b$ . De plus, l'application  $M : f \rightarrow M(f)$  de  $S^r$  dans  $M^r$  est continue.

**1.7.** Soient  $f \in S^r$ , et  $a \in (0, 1)$ .

D'après 1.4, on a  $W_f^{a,a}(0) = 0$ , donc pour que  $M(f)$  soit égal à  $m_o$ , il faut et il suffit que  $W_f^{a,a} = id_{\mathbb{R}}$ , c'est-à-dire que les groupes à un paramètre  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  soient égaux, ou encore que les champs de vecteurs  $X_f$  et  $Y_f$  coïncident.

**1.8.** On étudie dans la fin du paragraphe les propriétés des applications  $H_f^{a,b}$ ; elles seront importantes pour la suite (chapitre IX).

Soient  $f \in S^r$  et  $a, b \in (0, 1)$ .

On peut prolonger  $H_f^{a,b}$  en un homéomorphisme de l'intervalle  $[0, 1]$  qui fixe 0 et 1. On étudie d'abord la différentiabilité de  $H_f^{a,b}$  en 0 et 1.

Si  $M(f) = m_o$ , on pose  $t_o = V^b(a) = U^b(a)$  (car  $W^{b,b} = id_{\mathbb{R}}$ ); on a alors  $f^{t_o}(b) = a$ , donc, d'après 1.4 :

$$H_f^{a,b} = f^{t_o} = f_{t_o}.$$

Ceci montre que  $H_f^{a,b}$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , car  $f^{t_o}$  est de classe  $C^1$  sur  $(0, 1]$  et  $f_{t_o}$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1)$ .

Supposons maintenant que  $M(f)$  n'est pas égal à  $m_o$ . On va montrer que  $H_f^{a,b}$  n'est pas dérivable en 0 et 1.

Posons  $t_1 = V^b(a)$ ,  $t_2 = U^b(a)$ , de sorte qu'on a  $f^{t_1}(b) = f_{t_2}(b) = a$ . On déduit alors de 1.6 que :

$$H_f^{a,b} = f_{t_2} \circ H_f^{b,b} = H_f^{a,a} \circ f^{t_1}.$$

Comme  $f_{t_2}$  (resp.  $f^{t_1}$ ) est dérivable en 0 (resp. en 1), il suffit de montrer que  $H_f^{a,a}$  et  $H_f^{b,b}$  ne sont pas dérivables en 0 et 1. Or  $H_f^{a,a}$  commute avec  $f$  et fixe  $a$ , donc fixe tous les points de l'orbite de  $a$ , qui s'accumule en 0 et en 1; il résulte alors d'un résultat de Kopell ([Ko]) que si  $H_f^{a,a}$  est dérivable en 0 ou 1, on doit avoir  $H_f^{a,a} \equiv id$ . Mais ceci implique que  $W_f^{a,a} = id_{\mathbb{R}}$ , donc que  $M(f) = m_o$ . Donc  $H_f^{a,a}$  n'est pas dérivable en 0 et 1, de même  $H_f^{b,b}$ , d'où on déduit le résultat annoncé.

Notons en particulier que  $D^2 H_f^{a,b}$  ne peut être borné (si  $M(f) \neq m_o$ ) au voisinage de 0 ou de 1, car autrement  $DH_f^{a,b}$  y admettrait une limite.

**1.9.** Soit  $f \in S^r$ .

Lorsque  $a, b$  décrivent  $(0, 1)$  les difféomorphismes  $W_f^{a,b}$  forment d'après 1.6 une orbite de l'action de  $\mathbb{R}^2$  dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$ .

Or toute orbite de cette action coupe les parties  $F_+^r(0)$  et  $F_-^r(0)$  de  $D^r(\mathbb{T}^1)$ , et deux éléments d'une même orbite qui appartiennent à  $F_+^r(0)$  (resp.  $F_-^r(0)$ ) se déduisent l'un de l'autre par l'action d'un élément de la diagonale de  $\mathbb{R}^2$ .

Donc si  $W_f^{a,b}$  et  $W_f^{c,d}$  appartiennent à  $F_+^r(0)$ , il existe d'après 1.6 un réel  $t$  tel que  $c = f_t(a)$ ,  $d = f^t(b)$ ; on a alors, d'après 1.4,  $H_f^{a,b} = H_f^{c,d}$ .

Ceci montre que les relations :

$$H_f^- = H_f^{a,b}, W_f^{a,b} \in F_+^r(0),$$

$$H_f^+ = H_f^{a',b'}, W_f^{a',b'} \in F_-^r(0),$$

définissent sans ambiguïté deux homéomorphismes  $H_f^-$  et  $H_f^+$  de  $[0, 1]$ .

Soient  $a, b \in (0, 1)$  tels que  $H_f^- = H_f^{a,b}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $x = f^t(b)$ ; on a alors :

$$W_f^{a,b}(t) = t \iff f^t(b) = f_t(a) \iff H_f^-(x) = x;$$

$$W_f^{a,b}(t) > t \iff f^t(b) = f_{W_f^{a,b}(t)}(a) > f_t(a) \iff H_f^-(x) < x.$$

On a évidemment une propriété analogue pour  $H_f^+$ .

La proposition suivante résume les propriétés connues des applications  $H_f^+$  et  $H_f^-$ .

**PROPOSITION.** — *L'application  $H_f^-$  (resp.  $H_f^+$ ) est un homéomorphisme croissant de  $[0, 1]$  et un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $(0, 1)$ ; elle dépend continûment de  $f \in S^r$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $(0, 1)$ ; elle commute avec  $f$ , vérifie  $H_f^-(t) \leq t$  (resp.  $H_f^+(t) \geq t$ ) pour  $t \in [0, 1]$ , et est égale à l'identité si et seulement si  $M(f) = m_o$ ; ses points fixes dans  $(0, 1)$  forment des orbites de  $f$  en correspondance biunivoque avec les points fixes dans  $[0, 1]$  d'un représentant  $W_f^{a,b}$  de  $M(f)$  tel que  $H_f^- = H_f^{a,b}$ .*

La seule assertion de la proposition que nous n'avons pas encore démontrée est la dépendance continue de  $H_f^-$  par rapport à  $f$ .

Soient  $f \in S^r$ , et  $a, b \in (0, 1)$  tels que  $H_f^- = H_f^{a,b}$ . Si  $g \in S^r$  est proche de  $f$ ,  $W_g^{a,b}$  est proche de  $W_f^{a,b}$  donc de  $F_+^r(0)$ ; il existe donc des réels  $t_1, t_2$  proches de 0 tels que  $(t_1, t_2) \cdot W_g^{a,b} \in F_+^r(0)$ . Comme les groupes à un paramètre  $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  sont proches respectivement de  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ , on obtient à partir de 1.6 un point  $a'$  proche de  $a$  et un point  $b'$  proche de  $b$  tels que  $W_g^{a',b'} \in F_+^r(0)$ ; donc  $H_g^{a',b'} = H_g^-$  est proche de  $H_f^{a,b} = H_f^-$  pour la  $C^r$ -topologie sur les compacts de  $(0, 1)$ .

## 2. Structure de produit fibré de $S^r$

**2.1.** On a vu que l'application  $M : f \rightarrow M(f)$  de  $S^r$  dans  $M^r$  est continue. L'objet principal de ce paragraphe est de montrer qu'elle est aussi ouverte et surjective.

**2.2.** On note  $J^r$  le groupe des  $r$ -jets de germes de  $C^r$ -difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}$  en 0 qui préservent l'orientation :  $J^r$  est le quotient du groupe de ces germes par le sous-groupe formé par ceux qui ont en 0 un contact d'ordre  $r$  avec l'identité.

On identifie  $J^r$  à  $\mathbb{R}^r$  (en tant qu'espace topologique uniquement) en associant à un germe  $f$  le  $r$ -uplet  $j(f) = (\text{Log } Df(0), D^2f(0), \dots, D^r f(0))$ . Lorsque  $r = \infty$ ,  $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est l'espace des suites de nombres réels.

Les  $r$ -uplets dont la première coordonnée est nulle correspondent aux germes de difféomorphismes  $f$  qui vérifient  $Df(0) = 1$ ; ils forment un sous-groupe de  $J^r$  noté  $J_o^r$ .

**2.3.** On fixe dans la suite du paragraphe un réel  $a$  de  $(0, 1)$ .

Considérons l'espace  $D = D_o \times D_1$  formé des couples  $(g_o, g_1)$  tels que :

- $g_o$  est un difféomorphisme croissant de classe  $C^r$  de  $[0, a]$  sur son image, qui vérifie  $g_o(0) = 0$  et  $g_o(t) < t$  pour  $t > 0$ ;
- $g_1$  est un difféomorphisme croissant de classe  $C^r$  de  $[a, 1]$  sur son image, qui vérifie  $g_1(1) = 1$  et  $g_1(t) > t$  pour  $t < 1$ .

On munit  $D$  de la topologie produit des  $C^r$ -topologies usuelles sur  $D_o$  et  $D_1$ .

On rappelle qu'on note  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$  l'ensemble des  $g \in D^r(\mathbb{T}^1)$  qui fixent 0.

Il résulte de 1.6 que la formule  $W^a(f) = W_{f, a}^{a, a}$  définit une application continue  $W^a$  de  $S^r$  dans  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$ .

On définit une application continue  $P$  de  $S^r$  dans  $D$  en associant à  $f \in S^r$  le couple formé par la restriction de  $f^{-1}$  à  $[0, a]$  et la restriction de  $f$  à  $[a, 1]$ .

On note  $j$  l'application continue de  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$  dans  $J^r$  qui associe à  $g \in D_o^r(\mathbb{T}^1)$  son  $r$ -jet en 0.

On définit enfin une application  $p$  de  $D$  dans  $J^r$  de la façon suivante.

Etant donné  $(g_o, g_1) \in D$ , il existe sur  $[0, a]$  (resp.  $[a, 1]$ ) un unique champ de vecteurs  $Z_o$  (resp.  $Z_1$ ) de classe  $C^1$  qui soit associé à  $g_o^{-1}$  (resp.  $g_1$ ) : cf. V1. De plus,  $Z_o$  (resp.  $Z_1$ ) est de classe  $C^{r-1}$  sur  $(0, a]$  (resp.  $[a, 1)$ ). La primitive  $u$  (resp.  $v$ ) de  $1/Z_o$  (resp. de  $1/Z_1$ ) qui s'annule en  $a$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $(0, a]$  sur  $(-\infty, 0]$  (resp. de  $[a, 1)$  sur  $[0, +\infty)$ ). On note  $\alpha$  le  $r$ -jet de  $u$  en  $\alpha$ ,  $\beta$  le  $r$ -jet de  $v$  en  $\alpha$ , et on définit :

$$p(g_o, g_1) = \alpha\beta^{-1} \in J^r.$$

Il résulte du théorème V.2.5 que le champ  $Z_o$  (resp.  $Z_1$ ) dépend continûment dans la  $C^{r-1}$ -topologie sur les compacts de  $(0, a]$  (resp. de  $[a, 1)$ ) de  $g_o$  (resp. de  $g_1$ ). On en déduit que l'application  $p$  de  $D$  dans  $J^r$  est continue.

THÉORÈME. — *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} S^r & \xrightarrow{P} & D \\ W^a \downarrow & & \downarrow p \\ D_o^r(\mathbb{T}^1) & \xrightarrow{j} & J^r \end{array}$$

*est commutatif. Il présente  $S^r$  comme produit fibré des applications  $p$  et  $j$ . Toutes les applications du diagramme sont ouvertes, continues et surjectives.*

*Démonstration :* La commutativité du diagramme résulte immédiatement de la définition des différentes applications.

On a déjà vu que toutes les applications du diagramme sont continues. Il est clair que  $P$  est ouverte et surjective. En utilisant les théorème de Borel, il est facile de voir que  $j$  et  $p$  sont aussi ouvertes et surjectives. Donnons-nous  $(g_o, g_1) \in D$  et  $w \in D_o^r(\mathbb{T}^1)$

tels que  $j(w) = p(g_0, g_1)$ . Avec les notations de 2.3, les formules :

$$U(t) = u(t) \quad t \in (0, a],$$

$$U(t) = w(v(t)), \quad t \in [a, 1),$$

définissent un difféomorphisme de  $(0, 1)$  sur  $\mathbb{R}$  qui préserve l'orientation et est de classe  $C^r$  même au point  $a$  puisque  $j(w) = p(g_0, g_1)$ . On pose  $f(t) = U^{-1}(U(t) + 1)$  pour  $t \in (0, 1)$ ; alors  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $(0, 1)$ , qui coïncide avec  $g_0^{-1}$  sur  $(0, g_0(a)]$  et avec  $g_1$  sur  $[a, 1)$ ; il se prolonge donc en un élément de  $S^r$ , encore noté  $f$ , qui vérifie :

$$P(f) = (g_0, g_1),$$

$$W^a(f) = w.$$

De plus, il est clair que  $f$  est l'unique élément de  $S^r$  qui vérifie ces relations, et qu'il dépend continûment de  $g_0, g_1$  et  $w$ .

La structure de produit fibré de  $S^r$  en résulte. Comme  $p$  est ouverte et surjective,  $W^a$  l'est aussi : c'est une propriété générale des produits fibrés.  $\square$

2.5. COROLLAIRE. — *L'application de Mather  $M : f \rightarrow M(f)$  est ouverte, continue et surjective.*

Cela résulte de ce que  $W^a$  et la restriction à  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$  de la projection canonique de  $D^r(\mathbb{T}^1)$  sur  $M^r$  sont ouvertes, continues et surjectives.

Dans la suite, on utilisera le corollaire de la façon suivante : si  $\mathcal{U}$  est une partie ouverte et dense de  $M^r$ , son image réciproque par  $M$  est ouverte et dense dans  $S^r$ .

### 3. Conjugaison et centralisateurs dans $S^r$

3.1. Deux difféomorphismes  $f$  et  $g$  dans  $S^r$  sont toujours topologiquement conjugués; sous quelles conditions sont-ils conjugués dans  $\text{Diff}_+^1(I)$  ?

Une condition nécessaire est évidemment que les germes de  $f$  et  $g$  en 0 d'une part, en 1 d'autre part, soient conjugués par des germes de difféomorphismes de classe  $C^1$ .

Mais cette condition n'est pas suffisante, et Mather a introduit l'invariant  $M(f)$  précisément pour décrire l'obstruction supplémentaire à la conjugaison.

3.2. Soient  $f, g \in S^r$  et  $1 \leq s \leq r$ .

Nous dirons que  $f$  et  $g$  sont  $C^s$ -germiquement conjugués s'il existe un germe de  $C^s$ -difféomorphisme sur un voisinage à droite de 0 (resp. sur un voisinage à gauche de 1) qui conjugue les germes en 0 (resp. en 1) de  $f$  et  $g$ .

S'il en est ainsi, la relation  $f \circ h = h \circ g$  permet de prolonger la conjugaison locale  $h$  en 0 en un difféomorphisme de classe  $C^s$  de l'intervalle  $[0, 1)$  qui vérifie la même relation. De même, on prolonge la conjugaison locale  $h'$  en 1 par un difféomorphisme de classe  $C^s$  de  $(0, 1]$  qui vérifie  $f \circ h' = h' \circ g$ .

3.3. THÉORÈME (Mather, [Ma]). — *Pour que  $f, g \in S^r$  soit conjugués dans  $\text{Diff}_+^1(I)$ , il faut et il suffit que  $f$  et  $g$  soient  $C^1$ -germiquement conjugués et que  $M(g) = M(f)$ .*

*Démonstration* : On peut supposer que  $f$  et  $g$  sont  $C^1$ -germiquement conjugués.

D'après 3.2, il existe un difféomorphisme  $h$  (resp.  $h'$ ) de classe  $C^1$  de l'intervalle  $[0, 1)$  (resp.  $(0, 1]$ ) qui vérifie  $f \circ h = h \circ g$  (resp.  $f \circ h' = h' \circ g$ ).

Pour qu'un difféomorphisme  $h_1$  de classe  $C^1$  de l'intervalle  $[0, 1)$  vérifie  $f \circ h_1 = h_1 \circ g$ , il faut et il suffit que  $f$  et  $h_1 \circ h^{-1}$  soient permutables; par un résultat de Kopell ([Ko]), cette dernière condition est équivalente au fait que  $h_1 \circ h^{-1}$  appartienne au groupe à un paramètre  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

Donc, pour que  $f$  et  $g$  soient conjugués par un difféomorphisme  $k \in \text{Diff}_+^1(I)$ , il faut et il suffit qu'il existe  $t, t' \in \mathbb{R}$  tels que :

$$(1) \quad k = f_t \circ h = f^{t'} \circ h',$$

sur l'intervalle  $(0, 1)$ .

D'autre part,  $(h^{-1} \circ f_s \circ h)_{s \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de classe  $C^1$  de l'intervalle  $[0, 1)$ , et on a  $h^{-1} \circ f \circ h = g$ ; d'après Kopell (loc. cit.), ceci implique que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a :

$$h^{-1} \circ f_s \circ h = g_s.$$

De même, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a :

$$h'^{-1} \circ f^s \circ h' = g^s.$$

Soient  $a, b \in (0, 1)$ ,  $s, t, t' \in \mathbb{R}$  et  $x = g^s(b)$ . On a :

$$f^{t'}(h'(x)) = f^{t'} \circ h' \circ g^s(b) = f^{t'+s'} \circ h'(b) = f_\sigma(h(a)),$$

avec  $\sigma = W_f^{h(a), h'(b)}(s + t')$ ; on a aussi :

$$f_t(h(x)) = f_t \circ h \circ g_{\sigma'}(a) = g_{t'+\sigma'}(h(a)),$$

avec  $\sigma' = W_g^{a, b}(s)$ .

La relation (1) ci-dessus équivaut donc à :

$$(t', t)W_g^{a, b} = W_f^{h(a), h'(b)};$$

cette dernière relation est équivalente à  $M(f) = M(g)$ . □

**3.4.** Soient  $f, g \in S^r$ ; supposons que les points fixes 0 et 1 de  $f$  sont hyperboliques, c'est-à-dire que  $Df(0) > 1 > Df(1)$ .

Compte-tenu de l'appendice 5, la démonstration du théorème 3.3 fournit le résultat suivant : pour que  $f$  et  $g$  soient conjugués dans  $\text{Diff}_+^r(I)$ , il faut et il suffit que  $Dg(0) = Df(0)$ ,  $Dg(1) = Df(1)$  et  $M(f) = M(g)$ .

En effet, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $f_s$  (resp.  $f^s$ ) est un difféomorphisme de classe  $C^r$  de l'intervalle  $[0, 1)$  (resp.  $(0, 1]$ ).

**3.5.** Soient  $f \in S^r$ ,  $1 \leq s \leq r$ ; on suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le difféomorphisme  $f_t$  (resp.  $f^t$ ) est de classe  $C^s$  sur l'intervalle  $[0, 1)$  (resp.  $(0, 1]$ ). Cette hypothèse est toujours vérifiée lorsque  $s = 1$ .

Soient  $a, b \in (0, 1)$ ; en reprenant la démonstration de 3.3 avec  $f = g$ ,  $h = h' = id$ , on voit qu'un difféomorphisme  $k \in \text{Diff}_+^s(I)$  commute avec  $f$  si et seulement si il existe des réels  $t, t'$  vérifiant :

$$k = f_t = f^{t'} \quad \text{sur } (0, 1),$$

$$(t', t) \cdot W_f^{a,b} = W_f^{a,b}.$$

Le stabilisateur de  $W_f^{a,b}$  pour l'action de  $\mathbb{R}^2$  définie en 1.5 est donc isomorphe au centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^s(I)$ .

Si  $M(f) = m_o$ , les groupes à un paramètre  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  sont égaux et coïncident avec le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^s(I)$ .

Sinon, le stabilisateur de  $W_f^{a,b}$  est engendré par  $(1/n, 1/n)$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ ; on a alors  $f_{1/n} = f^{1/n} = g \in S^s$ , et le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^s(I)$  est le groupe des itérés de  $g$  ( $g^n = f$ ).

**3.6.** Les éléments de  $M^r$  dont le stabilisateur est engendré par  $(1, 1)$  forment une partie ouverte et dense de  $M^r$ . La discussion précédente permet ainsi, compte-tenu du corollaire 2.5, de retrouver un résultat de Kopell ([Ko]) :

**THÉORÈME (Kopell).** — *Les difféomorphismes  $f \in S^r$  dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^1(I)$  est engendré par  $f$  forment une partie ouverte et dense de  $S^r$ .*

**3.7.** Si les points fixes 0 et 1 de  $f \in S^r$  sont hyperboliques, on peut prendre  $s = r$  dans la discussion de 3.5. La connaissance de  $M(f)$  permet alors de déterminer le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^r(I)$ .



## Chapitre VI

### CENTRALISATEUR D'UN DIFFÉOMORPHISME DONT LE NOMBRE DE ROTATION EST RATIONNEL

#### 1. Introduction

Nous étudions dans ce chapitre le centralisateur d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est rationnel. Nous nous limiterons aux deux cas suivants :

- 1) les orbites périodiques de  $f$  sont hyperboliques ;
- 2)  $f$  possède une seule orbite périodique.

Le premier cas se produit pour un ouvert dense de difféomorphisme du cercle.

Le second cas se produit pour une partie dense de  $F^r$  ; ceci nous permettra d'utiliser les résultats obtenus pour étudier le centralisateur de difféomorphismes dont le nombre de rotation est irrationnel.

Disons quelques mots du cas général ; soit  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme dont le nombre de rotation est un rationnel  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

Si  $f^q = id$ , d'après [H1, ch. II],  $f$  est conjugué dans  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  à  $R_{p/q}$  ; son centralisateur est un groupe isomorphe à  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

Supposons que  $f^q \neq id$  ; les points fixes de  $f^q$  forment un fermé de  $\mathbb{T}^1$  non vide et différent de  $\mathbb{T}^1$ , qui est invariant par tout homéomorphisme commutant avec  $f$ . Par le théorème de Denjoy, tout difféomorphisme de classe  $C^2$  qui commute avec  $f$  a donc un nombre de rotation rationnel.

On est ainsi conduit au problème de savoir à quelle condition deux difféomorphismes  $g$  et  $h$  qui ont des points fixes commutent ; si  $g$  et  $h$  sont de classe  $C^2$ , une condition nécessaire est, d'après un résultat de Kopell ([Ko]), que les ensembles de points fixes de  $g$  et  $h$  aient la même frontière. Des conditions nécessaires supplémentaires sont obtenues en introduisant les invariants de Mather (cf. ch. VI)

attachés aux composantes connexes du complémentaire de l'ensemble des points fixes de  $g$ . Nous ne ferons une étude complète que dans les cas particuliers mentionnés plus haut pour les raisons suivantes :

- la combinatoire employée dans ces cas particuliers pour décrire les centralisateurs deviendrait très peu maniable dans le cas général ;
- nous voulons éviter les problèmes, par ailleurs très intéressants (cf. [Se]), liés aux points fixes de  $g$  où  $g$  est infiniment tangent à l'identité.

Mentionnons enfin le résultat suivant, dû à Kopell (loc. cit.) ; dans l'espace  $\text{Hom}(\mathbb{Z}^2, \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1))$ , muni de sa topologie naturelle, il existe une partie **ouverte** formée d'homomorphismes  $\varphi$  ayant la propriété suivante : tout difféomorphisme dans l'image de  $\varphi$  a un point fixe où le contact avec l'identité est infini.

## 2. Points fixes hyperboliques

**2.1.** Dans la suite du chapitre, nous fixons un ordre de différentiabilité  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $r \geq 2$ .

On note  $H^r(0)$  l'espace des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est nul et les points fixes sont hyperboliques.

Cet espace est invariant par conjugaison dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

Nous nous intéressons à l'équation fonctionnelle :

$$(*) \quad h \circ f \circ h^{-1} = g,$$

où  $f, g \in H^r(0)$ ,  $h \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  ; elle permet de décrire les classes de conjugaisons de  $H^r(0)$  et les centralisateurs des éléments de  $H^r(0)$ .

Tout difféomorphisme dans  $H^r(0)$  n'a qu'un nombre fini de points fixes, et a le même nombre de points fixes attractifs et répulsifs. Pour tout  $n \geq 1$ , on notera  $H^r(0, n)$  l'ensemble des  $f \in H^r(0)$  qui ont exactement  $n$  points fixes attractifs et  $n$  points fixes répulsifs ; les  $H^r(0, n)$ ,  $n \geq 1$ , sont les composantes connexes de  $H^r(0)$  et sont invariants par conjugaison dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

On fixe dans la suite du paragraphe un entier  $n \geq 1$  ; l'étude de l'équation (\*), pour  $f, g \in H^r(0, n)$ , repose sur l'invariant de Mather (cf. ch. VI) et utilise des ingrédients combinatoires que nous présentons dans les numéros suivants.

Ces ingrédients combinatoires sont nécessaires au vu de la remarque suivante : lorsque  $f = g \in H^r(0, n)$ , une solution de (\*) peut permuer (cycliquement) les puits et les sources de  $f$ .

## 2.2. Le groupe $G_n$

Pour  $p \geq 1$ , on note  $\mathbb{Z}_p$  le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ; pour  $i \in \mathbb{Z}_p$ , on note  $2i \in \mathbb{Z}_{2p}$  l'image de  $i$  par l'homomorphisme qui envoie la classe de 1 dans  $\mathbb{Z}_p$  sur la classe de 2 dans  $\mathbb{Z}_{2p}$ .

Cet homéomorphisme définit une action du groupe  $\mathbb{Z}_n$  dans le groupe  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  en posant, pour  $i \in \mathbb{Z}_n$ ,  $t = (t_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  :

$$i \cdot t = s = (s_j),$$

avec  $s_j = t_{j-2i}$  pour  $j \in \mathbb{Z}_{2n}$ .

On notera  $G_n$  l'extension de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  par  $\mathbb{Z}_n$  définie par cette action; les éléments de  $G_n$  sont des couples  $(i, t)$ , avec  $i \in \mathbb{Z}_n$ ,  $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$ , et le produit est défini par :

$$(i, t)(j, s) = (i + j, u),$$

avec  $u_k = t_k + s_{k-2i}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}_{2n}$ .

On identifie  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  (resp.  $\mathbb{Z}_n$ ) à un sous-groupe de  $G_n$  par l'injection canonique :  $t \rightarrow (0, t)$  (resp.  $i \rightarrow (i, 0)$ ).

Pour  $s \in \mathbb{R}$ , on note  $c(s)$  l'élément de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  dont toutes les coordonnées sont égales à  $s$ ; l'application  $c$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur un sous-groupe de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  noté  $C_n$ , qui est contenu dans la centre de  $G_n$ .

### 2.3. L'espace $E_n$

L'espace  $(\mathbb{R} \times D^r(\mathbb{T}^1))^{\mathbb{Z}_{2n}}$ , muni de sa topologie naturelle sera noté  $E_n$ .

Le groupe  $G_n$  agit dans  $E_n$  de la façon suivante; pour  $(i, t) \in G_n$  et  $(a_j, v_j) \in E_n$ , on a  $(i, t) \cdot (a_j, v_j) = (b_j, w_j)_{j \in \mathbb{Z}_{2n}}$ , avec :

$$b_j = a_{j-2i},$$

$$w_j(x) = v_{j-2i}(x - t_{j+1}) + t_j,$$

pour  $j \in \mathbb{Z}_{2n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Le sous-groupe  $\mathbb{Z}_n$  de  $G_n$  agit donc simplement par permutations cycliques paires des coordonnées; un élément  $(0, t)$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  agit séparément sur les coordonnées; il agit trivialement sur la composante réelle, et par une translation de vecteur  $(t_{j+1}, t_j)$  des graphes sur la composante dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$ .

On notera  $\tilde{E}_n$  (resp.  $\bar{E}_n$ ) le quotient de  $E_n$  par l'action de  $G_n$  (resp. par la restriction de cette action à  $\mathbb{Z}_n$ ); on munit  $\tilde{E}_n$  et  $\bar{E}_n$  de leurs topologies quotient.

### 2.4. Stabilisateur d'un élément de $E_n$

On dira qu'un sous-groupe fermé  $S$  de  $G_n$  est admissible si son intersection avec  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}} \subset G_n$  contient  $c(1)$  et est contenue dans  $C_n$ .

Il est clair que  $c(1)$  agit trivialement dans  $E_n$ ; d'autre part, pour qu'une translation laisse invariant le graphe d'un élément de  $D^r(\mathbb{T}^1)$ , il faut qu'elle soit parallèle à la diagonale de  $\mathbb{R}^2$ . Le stabilisateur d'un élément de  $E_n$  est donc toujours un sous-groupe admissible de  $G_n$ .

Soit  $S$  un sous-groupe admissible de  $G_n$ ,  $S_o$  son intersection avec  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$ ,  $S_1$  son image par la projection canonique de  $G_n$  sur  $\mathbb{Z}_n$ . Notons  $n_1$  l'ordre du groupe cyclique  $S_1$ ;  $n_1$  est un diviseur de  $n$ . Le groupe  $S$  est engendré par  $S_o$ , qui est contenu dans le centre de  $G_n$ , et par tout élément  $g$  dont l'image dans  $\mathbb{Z}_n$  engendre  $S_1$ ; il est donc abélien.

**1<sup>er</sup> cas :** On a  $S_o = C_n$ . On peut alors choisir  $g$  comme ci-dessus vérifiant  $g^{n_1} = 1_{G_n}$ . Le groupe  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{R}$ .

**2<sup>ème</sup> cas :** On a  $S_o \neq C_n$ ; comme  $S_o$  est fermé et contient  $c(1)$ , il existe un unique entier  $\ell \geq 1$  tel que  $c(1/\ell)$  engendre  $S_o$ . Les éléments  $h^{n_1}$ ,  $h \in S$ , forment un sous-groupe de  $S_o$  contenant  $c(n_1/\ell)$ ; il existe donc un entier  $n_o$  divisant  $n_1$  tel que  $c(n_o/\ell)$

engendre ce sous-groupe, et on peut choisir un élément  $g \in S$  tel que  $g^{n_1} = c(n_o/\ell)$  et l'image de  $g$  dans  $\mathbb{Z}_n$  engendre  $S_1$ . Posons  $g_o = g^{n_1/n_o}c(-1/\ell) \in S$ ; on a  $g_o^{n_o} = 1_{G_n}$ . Le groupe  $S$  est produit du groupe cyclique fini engendré par  $g_o$  par le groupe cyclique infini engendré par  $g$ ; il est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}_{n_o} \times \mathbb{Z}$ .

On a ainsi décrit la structure des sous-groupes admissibles de  $G_n$ . Il est facile de voir que :

- 1) tout sous-groupe admissible de  $G_n$  est le stabilisateur d'un élément approprié de  $E_n$ ;
- 2) les éléments de  $E_n$  dont le stabilisateur est engendré par  $c(1)$  forment une partie ouverte et dense de  $E_n$ .

### 2.5. L'application canonique de $H^r(0, n)$ dans $\overline{E}_n$

Soient  $f \in H^r(0, n)$  et  $x_o$  un point fixe répulsif de  $f$ ; notons  $x_1, \dots, x_{2n-1}$  les autres points fixes de  $f$ , rencontrés dans cet ordre lorsqu'on parcourt  $\mathbb{T}^1$  dans le sens positif à partir de  $x_o$ .

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_{2n}$ , on pose  $A_i = Df(x_i)$  de sorte qu'on a  $A_i > 1$  ou  $0 < A_i < 1$  suivant que  $i$  est pair ou impair; on pose  $a_i = \text{Log}(|\text{Log } A_i|)$ .

D'après l'appendice 5, il existe un unique difféomorphisme  $H_i$  de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  de  $\mathbb{T}^1$  qui possède les propriétés suivantes :

- 1)  $DH_i(0) = 1, H_i(0) = x_i$ ;
- 2)  $H_i(A_i x) = f(H_i(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $v_i$  le difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans lui-même défini par la relation :

$$H_i(A_i^{v_i(t)}) = H_{i+1}(-A_{i+1}^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La relation ii) montre que  $v_i \in D^r(\mathbb{T}^1)$ . En fait, en notant  $f_i$  la restriction de  $f$  à  $[x_i, x_{i+1}]$ , et en posant  $p_i = H_i(1), p'_i = H_{i+1}(-1)$ , on vérifie immédiatement que  $v_i$  n'est autre que le difféomorphisme  $W_{f_i}^{p_i, p'_i}$  défini en VI.1.4.

La famille  $(a_i, v_i)_{i \in \mathbb{Z}_{2n}}$  est un élément de  $E_n$  qu'on notera  $M(f, x_o)$ . On a :

$$(1) \quad (i, 0)M(f, x_o) = M(f, x_{-2i}),$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}_n$ , donc la classe de  $M(f, x_o)$  dans  $\overline{E}_n$  ne dépend que de  $f$ . Notons-la  $M(f)$ . D'après le chapitre VI, l'application de  $H^r(0, n)$  dans  $\overline{E}_n$  ainsi définie est continue.

### 2.6. Critère de conjugaison dans $H^r(0, n)$

Soient  $f, g \in H^r(0, n)$  et  $x_o, y_o$  des points fixes répulsifs de  $f, g$ . On conserve aux notations  $x_j, A_j, a_j, H_j, v_j, p_j, p'_j$  leur sens du numéro précédent; on note  $y_j, B_j, b_j, K_j, w_j, q_j, q'_j$  les mêmes objets relatifs à  $g$ .

Cherchons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un difféomorphisme  $h \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  vérifie :

$$(2) \quad \begin{cases} h(x_o) = y_o \\ h \circ f = g \circ h. \end{cases}$$

On a alors  $h(x_j) = y_j$  pour  $j \in \mathbb{Z}_{2n}$ ; comme la dérivée en un point fixe est invariante par conjugaison, une condition nécessaire est :

$$(3) \quad A_j = B_j, \quad a_j = b_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{2n}.$$

On suppose désormais cette condition réalisée.

Le difféomorphisme  $K_j \circ H_j^{-1}$  conjugue la restriction de  $f$  à  $(x_{j-1}, x_{j+1})$  à la restriction de  $g$  à  $(y_{j-1}, y_{j+1})$ . Notons  $k_j$  (resp;  $k'_j$ ) la restriction de  $K_j \circ H_j^{-1}$  (resp.  $K_{j+1} \circ H_{j+1}^{-1}$ ) à l'intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ . On a alors  $k_j(p_j) = q_j$ ,  $k'_j(p'_j) = q'_j$ ,  $Dk_j(x_j) = Dk'_j(x_{j+1}) = 1$  et  $v_j = W_{f_j}^{p_j, p'_j}$ ,  $w_j = W_{g_j}^{q_j, q'_j}$  d'après 2.5.

Une condition nécessaire pour que  $h \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  soit solution de (2) est que sa restriction  $h_j$  à  $[x_j, x_{j+1}]$  (qui est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $[x_j, x_{j+1}]$  sur  $[y_j, y_{j+1}]$ ) vérifie :

$$(4) \quad h_j \circ f_j = g_j \circ h_j.$$

Notons  $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(G^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ) le groupe à un paramètre de  $C^r$ -difféomorphismes de l'intervalle  $(y_{j-1}, y_{j+1})$  (resp.  $(y_j, y_{j+2})$ ) qui est associé à la restriction de  $g$  à cet intervalle. On a donc les relations :

$$(5) \quad \begin{cases} G_t(K_i(x)) = K_i(B_i^t x), \\ G^t(K_{i+1}(x)) = K_{i+1}(B_{i+1}^t x), \quad \forall t, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après la démonstration de V.3.3, pour que  $h_j$  soit solution de (4), il faut et il suffit qu'il existe deux réels  $t_j, t'_j$  tels que :

$$(6) \quad (t'_j, t_j)v_j = w_j;$$

$$(7) \quad h_j = G_{t_j} \circ k_j = G^{t'_j} \circ k'_j \quad \text{sur} \quad [x_j, x_{j+1}].$$

On a alors :

$$(8) \quad Dh_j(x_j) = B_j^{t_j}, \quad Dh_j(x_{j+1}) = B_{j+1}^{t'_j}.$$

Pour que les  $h_j$  soient restrictions d'une solution  $h \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  de (2), il faut donc avoir  $t'_j = t_{j+1}$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}_{2n}$ . En posant  $t = (t_j)_{j \in \mathbb{Z}_{2n}}$ , on a alors d'après (3) et (6) :

$$(9) \quad (0, t)M(f, x_o) = M(g, y_o).$$

Réciproquement, supposons que  $f, g \in H^r(0, n)$  et  $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  sont tels que la relation (9) est satisfaite; posons  $t'_j = t_{j+1}$ , pour  $j \in \mathbb{Z}_{2n}$ . Soit  $h$  l'homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  dont les restrictions  $h_j$  sont définies par la relation (7). Il vérifie la relation (2). Sa restriction à  $(x_{j-1}, x_{j+1})$  est, d'après (7), égale à  $G_{t_j} \circ K_j \circ H_j^{-1}$ . On conclut que  $h \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

En tenant compte de la relation (1) du numéro précédent, on a ainsi démontré le :

THÉORÈME. — Pour que deux difféomorphismes  $f, g \in H^r(0, n)$  soient conjugués dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ , il faut et il suffit que  $M(f)$  et  $M(g)$  aient même image dans  $\tilde{E}_n$ ;  $f, g$  sont alors conjugués dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

Ceci permet de considérer  $\tilde{E}_n$  comme l'espace des "modules" pour les difféomorphismes de  $H^r(0, n)$  (on verra plus tard que l'application  $M$  est surjective).

### 2.7. Centralisateur d'un élément de $H^r(0, n)$

Soient  $f \in H^r(0, n)$  et  $x_o$  un point fixe répulsif de  $f$ . Les notations  $x_j, A_j$  ont le même sens qu'en 2.5.

Soit  $h \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme qui commute avec  $f$ ; il existe alors  $i \in \mathbb{Z}_n$  tel que  $h(x_o) = x_{2i}$ . En faisant  $g = f, y_o = x_{2i}$  dans la discussion de 2.6, on associe à  $h$  un élément  $t = (t_j)$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2n}}$  tel que :

$$(0, t)M(f, x_o) = M(f, x_{2i}).$$

Comme  $(i, t) = (i, 0) \cdot (0, t)$ , on a, d'après (1) :

$$(10) \quad (i, t)M(f, x_o) = M(f, x_o).$$

D'autre part, d'après (8),  $h$  vérifie :

$$(11) \quad h(x_j) = x_{j+2i},$$

$$(12) \quad Dh(x_j) = A_{j+2i}^{t_{j+2i}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_n.$$

Réciproquement, soit  $(i, t) \in G_n$  un élément du stabilisateur de  $M(f, x_o)$ . D'après 2.6, il lui correspond un difféomorphisme  $h \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  commutant avec  $f$  et vérifiant (11) et (12). On a donc démontré la :

PROPOSITION. — Les centralisateurs de  $f \in H^r(0, n)$  dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  et  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  sont égaux et isomorphes, par les relations (11) et (12), au stabilisateur de  $M(f)$  dans  $G_n$ .

Notons que cet isomorphisme envoie  $f$  lui-même sur  $c(1)$ .

La proposition implique en particulier que le centralisateur est toujours abélien. Plus précisément, en reprenant la discussion de 2.4, on obtient les éventualités suivantes :

- 1) Si le stabilisateur est isomorphe à  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{R}$ , avec  $n_1$  divisant  $n$  (premier cas de 2.4), le centralisateur de  $f$  est produit d'un groupe à un paramètre  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  dans  $F^r(0)$  tel que  $f_1 = f$  par un groupe cyclique fini engendré par un difféomorphisme conjugué (dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ ) à la rotation  $R_{1/n_1}$  ;
- 2) si le stabilisateur a les propriétés décrites dans le deuxième cas de la discussion de 2.4, et si on garde à  $\ell, n_o, n_1$  le sens qu'ils ont en 2.4, il existe deux difféomorphismes  $h_o, h_1 \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  ayant les propriétés suivantes :
  - a)  $h_o$  est conjugué dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  à une rotation d'ordre  $n_o$  ;

- b) le nombre de rotation de  $h_1$  est de la forme  $k/n_1$ , avec  $k \wedge n_1 = 1$ ;
- c) posons  $h_2 = h_1^{n_1/n_o} h_o$ ; alors  $h_2 \in H^r(0, n)$ ,  $h_2^\ell = f$ , et  $h_2$  engendre l'intersection du centralisateur de  $f$  avec  $F^r(0)$ ;
- d) le centralisateur de  $f$  est produit du groupe cyclique fini engendré par  $h_o$ , par le groupe cyclique infini engendré par  $h_1$ .

En particulier le centralisateur est cyclique si et seulement si  $n_o = 1$ ; il est réduit aux itérés de  $f$  si et seulement si  $\ell = n_1 = 1$ .

### 3. Orbites périodiques hyperboliques

**3.1.** On fixe dans ce paragraphe un rationnel  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire un entier  $q \geq 1$  et une classe  $p$  dans  $\mathbb{Z}_q$  qui engendre  $\mathbb{Z}_q$ . On suppose que  $q \geq 2$ , le cas  $q = 1$  ayant été traité au § 2.

On note  $H^r(p/q)$  l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^r$ , de nombre de rotation  $p/q$ , dont toutes les orbites périodiques sont hyperboliques.

Pour  $n \geq 1$ ,  $H^r(p/q, n)$  désigne l'ensemble des difféomorphismes de  $H^r(p/q)$  qui ont exactement  $n$  orbites périodiques attractives et  $n$  orbites périodiques répulsives. Les  $H^r(p/q, n)$ ,  $n \geq 1$ , sont les composantes connexes de  $H^r(p/q)$ , et chacune est invariante par conjugaison dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

On fixe dans la suite du paragraphe un entier  $n \geq 1$ , et on pose  $m = nq$ .

### 3.2. Critère de conjugaison dans $H^r(p/q, n)$

Soient  $f \in H^r(p/q, n)$ , et  $F = f^q$ . Alors  $F$  appartient à  $H^r(0, m)$ ; soit  $x_o$  un point fixe répulsif de  $F$ ; comme  $f$  appartient au centralisateur de  $F$ , il lui correspond par 2.7 un élément  $\gamma$  du stabilisateur  $S \subset G_m$  de  $M(F, x_o) \in E_m$ ; on a  $\gamma^q = c(1)$ , car  $f^q = F$ , et la projection de  $\gamma$  dans  $\mathbb{Z}_m$  est la classe de  $np$ , image de  $p \in \mathbb{Z}_q$  par l'application de  $\mathbb{Z}_q$  dans  $\mathbb{Z}_m$  qui envoie la classe de 1 (dans  $\mathbb{Z}_q$ ) sur la classe de  $n$  (dans  $\mathbb{Z}_m$ ).

Réciproquement, si  $\gamma' \in S$  vérifie  $\gamma' = (np, t)$ ,  $\gamma'^q = c(1)$ , il existe un réel  $s$  tel que  $\gamma' = \gamma c(s)$  (car  $\gamma' \gamma^{-1} \in S \cap \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2m}}$ ), d'où on tire  $\gamma'^q = \gamma^q c(qs)$ ,  $s = 0$  et  $\gamma = \gamma'$ .

En d'autres termes,  $f$  est l'unique difféomorphisme de  $H^1(p/q, n)$  qui vérifie  $f^q = F$ .

Soit  $g$  un autre difféomorphisme dans  $H^r(p/q, n)$ ; posons  $g^q = G$ .

**PROPOSITION.** — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i)  $f$  et  $g$  sont conjugués dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ ;
- ii)  $f$  et  $g$  sont conjugués dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ ;
- iii)  $F$  et  $G$  sont conjugués dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ ;
- iv)  $F$  et  $G$  sont conjugués dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ ;
- v)  $M(F)$  et  $M(G)$  ont même image dans  $\tilde{E}_m$ .

*Démonstration :* On sait déjà par (2.6) que iii)  $\iff$  iv)  $\iff$  v). Il est clair que ii)  $\implies$  i)  $\implies$  iii). Supposons qu'on ait  $F = h \circ G \circ h^{-1}$ , avec  $h \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ ; alors le difféomorphisme  $f' = h \circ g \circ h^{-1}$  appartient à  $H^r(p/q, n)$  et vérifie  $f'^q = F$ , donc

$f' = f$ ; on a donc  $iv \implies ii$ ). □

### 3.3. Centralisateurs

En faisant  $g = f$  dans la démonstration de la proposition précédente, on voit que les centralisateurs de  $f \in H^r(p/q, n)$  dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  et  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  sont égaux au centralisateur de  $F$  (qui est le même dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  et  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ ).

Notons  $S$  le stabilisateur dans  $G_m$  de  $M(F)$ ; reprenons la discussion de 2.7, connaissant l'existence d'un élément  $\gamma = (np, t) \in S$  tel que  $\gamma^q = c(1)$  :

1) Lorsque  $C_m \subset S$ , le centralisateur est encore de la forme  $\mathbb{Z}_{m_1} \times C_m$ , où  $m_1$  divise  $m$ ; comme  $\gamma \in S$ , on peut écrire  $m_1 = n_1q$ , avec  $n_1$  divisant  $n$ ;

2) Supposons que  $S \cap \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{2^m}}$  soit engendré par  $c(1/\ell)$ , ( $\ell \geq 1$ ); notons  $m_1$  l'ordre de l'image de la projection de  $S$  dans  $\mathbb{Z}_m$ ,  $m_o$  l'entier tel que  $c(m_o/\ell)$  engendre le groupe des éléments  $h^{m_1}$ ,  $h \in S$ ; on sait (cf. 2.4) que  $m_o$  divise  $m_1$  et  $m_1$  divise  $m$ ; comme  $\gamma \in S$ , on obtient de plus qu'on peut écrire  $m_1 = n_1q$ , et  $m_o$  divise  $n_1\ell$  (car  $\gamma^{m_1} = c(n_1)$ ); en notant  $s$  le p.g.c.d. de  $\ell$  et  $q$ , on voit donc que  $m_o$  divise  $n_1s$ .

On pourrait comme en 2.7 décrire plus précisément le centralisateur de  $f$ ; disons simplement que pour qu'il soit réduit aux itérés de  $f$ , il faut et il suffit que  $\ell = n_1 = 1$ .

## 4. Difféomorphismes n'ayant qu'une orbite périodique

4.1. Pour tout rationnel  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , on note  $\widehat{F}^r(p/q)$  l'ensemble des difféomorphismes  $f$  de classe  $C^r$ , de nombre de rotation  $p/q$ , qui ont exactement une orbite périodique.

Il est clair que  $\widehat{F}^r(p/q)$  est contenu dans la frontière de  $F^r(p/q)$ ; de plus, si on note :

$$\widehat{F}_+^r(p/q) = \widehat{F}_+^r(p/q) \cap F_+^r(p/q),$$

$$\widehat{F}_-^r(p/q) = \widehat{F}_-^r(p/q) \cap \widehat{F}_-^r(p/q),$$

l'union  $\widehat{F}^r(p/q) = \widehat{F}_+^r(p/q) \cap \widehat{F}_-^r(p/q)$  est disjointe.

Rappelons (cf. I.1.12) que dans  $F_+^r(p/q)$ ,  $\widehat{F}_+^r(p/q)$  est une partie dont l'intérieur est dense; il en est de même pour  $\widehat{F}_-^r(p/q)$  dans  $F_-^r(p/q)$ .

4.2. Soient  $f \in \widehat{F}_+^r(p/q)$ ,  $F = f^q$ .

Le difféomorphisme  $F$  a exactement  $q$  points fixes.

Notons  $J$  l'ensemble des composantes connexes du complémentaire dans  $\mathbb{T}^1$  de ces  $q$  points.

Soit  $J \in \mathcal{J}$ ; la restriction de  $F$  à  $\overline{J}$  est du type étudié au chapitre V : elle fixe les extrémités de  $\overline{J}$  et n'a pas de point fixe dans  $J$ . On peut donc lui associer, par V.1.6, un élément  $M(F, J)$  de l'espace  $M^r$ .

Le groupe des itérés de  $f$  permute transitivement les éléments de  $\mathcal{J}$ , et conjugue les restrictions de  $F$  à ces intervalles; par V.3.3, la classe  $M(F, J)$  ne dépend donc pas de  $J$ . On la notera  $M(f)$ . Son stabilisateur pour l'action de  $\mathbb{R}^2$  dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  va nous permettre de décrire, de même qu'en V.3, le centralisateur de  $f$ .

**4.3.** Soient  $f, F, \mathcal{J}$  comme précédemment, et  $s$  un entier compris entre 1 et  $r$ . Etant donnés trois points fixes consécutifs  $x, y, z$  de  $F$ , on sait (cf. VI.1) qu'il existe un unique champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $(x, z)$  associé à la restriction de  $F$  à cet intervalle. Nous ferons l'hypothèse suivante :

$(H_s)$  Le groupe à un paramètre associé à ce champ de vecteurs est constitué par des difféomorphismes de classe  $C^s$  de  $(x, z)$ .

Notons que :

- 1) cette hypothèse est toujours vérifiée si  $s = 1$  ;
- 2) elle est vérifiée pour  $s = r - 1$ , lorsque le contact de  $F$  avec l'identité en  $y$  est d'ordre inférieur à  $r$  : voir l'appendice 4 ;
- 3) elle ne dépend pas du choix des points  $x, y, z$ , car les itérés de  $f$  permutent transitivement les points fixes de  $F$ .

Ceci étant, notons  $Z$  le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ . Tout élément de  $Z$  préserve l'orientation et l'ensemble des points fixes de  $F$ , donc agit par permutation cyclique sur cet ensemble. On définit ainsi un homomorphisme  $\varphi$  de  $Z$  dans  $\mathbb{Z}_q$  ; comme l'image de  $f$  par  $\varphi$  est la classe de  $p$ ,  $\varphi$  est surjectif. De plus,  $Z$  est engendré par  $f$  et le noyau de  $\varphi$ .

Soient  $h \in \text{Ker } \varphi$ ,  $j \in \mathcal{J}$ . Notons  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}, (F^t)_{t \in \mathbb{R}}$  les groupes à un paramètre de difféomorphismes de  $J$  associés à la restriction de  $F$  à  $\bar{J}$ . Comme  $h$  commute avec cette restriction, il existe par VI.3.5 un réel  $t$  tel que la restriction de  $h$  à  $J$  est égale à  $F_t$  et  $F^t$  ; de plus  $(t, t)$  appartient au stabilisateur  $S$  dans  $\mathbb{R}^2$  de la classe  $M(F, J) = M(f)$ . Si  $K$  est un autre élément de  $\mathcal{J}$ , et  $i$  un entier tel que  $f^i(J) = K$ , les groupes à un paramètre associés à la restriction de  $F$  à  $\bar{K}$  sont respectivement  $(f^i \circ F_t \circ f^{-i})_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(f^i \circ F^t \circ f^{-i})_{t \in \mathbb{R}}$ . Ceci montre que  $t$  ne dépend pas de  $J$  et que l'application de  $\text{Ker } \varphi$  dans  $S$  qui associe  $(t, t)$  à  $h$  est injective ; cette application est clairement un homomorphisme, et il résulte de l'hypothèse  $(H_s)$  qu'elle est surjective.

En particulier,  $\text{Ker } \varphi$  est abélien ; comme  $Z$  est engendré par  $f$  et le noyau de  $\text{Ker } \varphi$ ,  $Z$  est aussi abélien.

Lorsque  $S$  est égal à la diagonale de  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire qu'on a  $M(f) = m_o$ , classe des translations, il existe un groupe à un paramètre dans  $F^s(0)$  (contenu, à l'exception de l'identité, dans  $\widehat{F}^s(0)$ ) dont le temps 1 est égal à  $f^q$ .

Sinon,  $S$  est engendré par un élément de la forme  $(1/n, 1/n)$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il correspond à cet élément un difféomorphisme  $h \in \widehat{F}_+^s(0)$  tel que  $h^n = f^q$  ; le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  est engendré par  $f$  et  $h$  ; pour qu'il soit réduit aux itérés de  $f$ , il faut et il suffit qu'on ait  $n = 1$ .

Soit  $d$  le plus grand diviseur commun de  $n$  et  $q$  (on prend  $d = q$  lorsque  $M(f) = m_o$ ) ; notons  $h_o$  l'élément de  $\text{Ker } \varphi$  qui correspond à  $(1/d, 1/d)$  ; les éléments d'ordre fini du centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  forment un groupe cyclique engendré par  $h_o f^{-(q/d)}$ .

## 5. Produits fibrés

**5.1.** L'objet de ce paragraphe est de montrer que les applications continues notées  $M$  et définies aux § 2, 3, 4 sont ouvertes et surjectives.

La méthode est la même qu'en V.2 : faire apparaître  $H^r(0, n)$ ,  $H^r(p/q, n)$ ,  $\widehat{F}_+^r(p/q)$  comme des produits fibrés.

5.2. Considérons d'abord le cas de  $\widehat{F}_+^r(p/q)$ .

Soit  $R$  le revêtement à  $q$  feuillets de  $\widehat{F}_+^r(p/q)$  formé des couples  $(f, x_o) \in \widehat{F}_+^r(p/q) \times \mathbb{T}^1$  tels que  $x_o$  appartient à l'orbite périodique de  $f$ .

Soit  $(f, x_o) \in R$ ; notons  $x_1$  le point qui succède à  $x_o$  dans l'orbite périodique de  $f$  lorsqu'on parcourt  $\mathbb{T}^1$  dans le sens positif; notons  $a$  le milieu de l'intervalle  $[x_o, x_1]$ .

On note  $P(f, x_o)$  la restriction de  $f$  au complémentaire dans  $\mathbb{T}^1$  de l'intervalle  $(f^{-q}(a), a)$ ; on munit l'ensemble  $P(R)$  de la topologie induite de celle de  $R$  par l'application  $P$ .

Notons  $Z_o$  (resp.  $Z_1$ ) le champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $[x_o, x_1]$  (resp.  $(x_o, x_1]$ ) qui est associé à la restriction de  $f^q$  à cet intervalle : notons  $u$  (resp.  $v$ ) la primitive de  $Z_o^{-1}$  (resp.  $Z_1^{-1}$ ) sur  $(x_o, x_1)$  qui s'annule en  $a$ .

D'après V.1, le difféomorphisme  $W(f, x_o) = u \circ v^{-1}$  appartient à  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$ ; sa classe dans  $M^r$  est d'ailleurs par définition (cf. 4.2) égale à  $M(F, [x_o, x_1]) = M(f)$ ; l'application  $W$  est continue.

D'autre part, la restriction de  $Z_o$  (resp.  $Z_1$ , resp.  $u$ , resp.  $v$ ) à l'intervalle  $[x_o, a]$  (resp.  $[a, x_1]$ , resp.  $(x_o, a]$ , resp.  $[a, x_1)$ ) ne dépend que de l'image  $P(f, x_o)$  de  $(f, x_o)$  dans  $P(R)$ . Il en est de même du  $r$ -jet  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) du  $u$  (resp.  $v$ ) en  $a$ . On définit une application  $p$  de  $P(R)$  dans  $J^r$  en posant :

$$p(P(f, x_o)) = \alpha\beta^{-1},$$

le produit étant pris dans  $J^r$ .

Soit  $j$  l'application de  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$  dans  $J^r$  qui associe à un difféomorphisme son  $r$ -jet en 0. Il est clair qu'on a :

$$j \circ W = p \circ P.$$

Plus précisément, on démontre exactement comme en V.2.4 le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{P} & P(R) \\ w \downarrow & & \downarrow p \\ D^r(\mathbb{T}^1) & \xrightarrow{j} & J^r \end{array}$$

*est commutatif; il présente  $R$  comme produit fibré des applications  $p$  et  $j$ . Toutes les applications du diagramme sont continues, ouvertes et surjectives.*

COROLLAIRE. — *L'application  $M : \widehat{F}_+^r(p/q) \rightarrow M^r$  définie en 4.2 est continue, ouverte et surjective.*

Ceci résulte de la proposition précédente, et du fait que la projection canonique de  $D_o^r(\mathbb{T}^1)$  sur  $M^r$  est continue, ouverte et surjective.

COROLLAIRE (Kopell, [Ko]). — *Les difféomorphismes  $f \in \widehat{F}_+^r(p/q)$  dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  est réduit aux itérés de  $f$  forment une partie ouverte et dense de  $\widehat{F}_+^r(p/q)$ .*

*Démonstration* : L'hypothèse  $(H_1)$  de 4.3 est vérifiée par tout difféomorphisme  $f$  de  $\widehat{F}_+^r(p/q)$ ; donc le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  est égal au groupe des itérés de  $f$  si et seulement si le stabilisateur dans  $\mathbb{R}^2$  de  $M(f)$  est le groupe cyclique engendré par  $(1, 1)$ ; or les éléments de  $M^r$  qui possèdent cette propriété forment une partie ouverte et dense de  $M^r$ . Le corollaire résulte alors du corollaire précédent.  $\square$

**5.3.** Traitons maintenant rapidement le cas de  $H^r(p/q, n)$ , qui est essentiellement analogue.

On pose  $m = nq$ ; on note  $R'$  le revêtement à  $m$  feuillets de  $H^r(p/q, n)$  formé des couples  $(f, x_o) \in H^r(p/q, n) \times \mathbb{T}^1$  tels que  $x_o$  soit un point périodique répulsif de  $f$ .

Soit  $(f, x_o) \in R'$ ; posons  $f^q = F$ . A partir de  $F$  et de  $x_o$ , on définit comme en 2.5 les points  $x_i, p_i, p'_i$ , les réels  $A_i$  et  $a_i$ , les applications  $H_i$  et  $v_i$ , pour  $0 \leq i < 2m$ .

Posons  $p''_i = F^{-1}(p'_i)$ , et notons  $I_i$  l'intervalle égal à  $(p''_i, p'_i)$  si  $i$  est pair, et à  $(p'_i, p''_i)$  si  $i$  est impair. Considérons la restriction de  $f$  au complémentaire dans  $\mathbb{T}^1$  des intervalles  $I_i$ ,  $0 \leq i < 2n$ ; on notera cette restriction  $P(f, x_o)$ .

On vérifie alors que les objets suivants ne dépendent en fait que de  $P(f)$  :

- le point  $x_i$ , pour  $0 \leq i < 2m$ ;
- les réels  $a_i$  et  $A_i$  pour  $0 \leq i < 2m$ ;
- les points  $p'_i, p''_i$ , pour  $0 \leq i < 2n$ ;
- le réel  $H_i^{-1}(p'_i)$ , pour  $0 \leq i < 2n$ ;
- la restriction de  $H_o$  à  $[0, H_o^{-1}(p'_o)]$ , celle de  $H_{2n}$  à  $[-1, 0]$ , et celle de  $H_i$  à  $[-1, H_i^{-1}(p'_i)]$  pour  $1 \leq i < 2n$  (lorsque  $p/q = 0$ , on a  $m = n$  et on convient que  $H_{2n} = H_o$ );
- les réels  $v_i(0), Dv_i(0), \dots, D^r v_i(0)$ , pour  $0 \leq i < 2n$ .

On munit  $P(R')$  de la topologie induite de celle de  $R'$  par l'application  $P$ .

On note  $\tilde{J}^r$  l'espace des  $r$ -jets en 0 des applications  $v$  qui sont des difféomorphismes de classe  $C^r$  préservant l'orientation d'un voisinage de 0 sur son image; cet espace est canoniquement homéomorphe, via l'application :  $v \rightarrow (v(0), Dv(0), \dots, D^r v(0))$  à l'espace des  $r + 1$ -uplets  $(z_o, \dots, z_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$  tels que  $z_1 > 0$ .

On note  $j$  l'application de  $D^r(\mathbb{T}^1)$  dans  $\tilde{J}^r$  qui associe à un difféomorphisme son  $r$ -jet en 0.

Pour  $(f, x_o) \in R'$ , on note  $V(f, x_o)$  le  $2n$ -uplet  $(v_o, \dots, v_{2n-1}) \in (D^r(\mathbb{T}^1))^{2n}$ ; d'après ce qui précède les  $r$ -jets  $j(v_i)$ ,  $0 \leq i < 2n$ , ne dépendent que de  $P(f, x_o)$ ; on peut donc définir de façon unique une application  $p$  de  $P(R')$  dans  $(\tilde{J}^r)^{2n}$  telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{P} & P(R') \\ v \downarrow & & \downarrow P \\ (D^r(\mathbb{T}^1))^{2n} & \xrightarrow{j^{2n}} & (\tilde{J}^r)^{2n} \end{array}$$

soit commutatif.

Ceci étant, on démontre de façon analogue à V.2.4 le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Le diagramme précédent présente  $R'$  comme le produit fibré des applications  $p$  et  $j^{2n}$  ; toutes les applications du diagramme sont ouvertes, continues et surjectives.*

5.4. COROLLAIRE. — *L'application  $M$  de  $H^r(0, n)$  dans  $\overline{E}_n$ , définie en 2.5, est ouverte, continue et surjective.*

*Démonstration* : Il suffit de démontrer que l'application de  $R'$  dans  $E_n$ , définie en 2.5 et également notée  $M$ , est continue, ouverte et surjective. Cette application s'exprime simplement en fonction des applications  $P$  et  $V$  du diagramme de 5.3, car on a  $p/q = 0$  donc  $m = n$ . Que cette application  $M$  soit continue, ouverte et surjective résulte aisément (mais assez fastidieusement) de la proposition précédente.  $\square$

5.5. Supposons maintenant que le nombre de rotation  $p/q$  n'est pas nul.

Notons  $G_m(p/q)$  la partie de  $G_m$  formée des éléments  $\gamma = (i, t)$  tels que  $i = np$  et  $\gamma^q = c(1)$ . Désignons par  $E_m(p/q)$  la partie de  $E_m$  constituée des éléments dont le stabilisateur  $S$  de l'action de  $G_m$  dans  $E_m$  rencontre  $G_m(p/q)$  ; par 3.2, cette intersection est alors réduite à un point.

Pour déterminer un élément de  $E_m(p/q)$ , il suffit de connaître ses  $2n$  premières coordonnées (dans  $\mathbb{R} \times D^r(\mathbb{T}^1)$ ) et l'élément de  $G_m(p/q)$  qui appartient à son stabilisateur ; de plus ces données sont arbitraires ; donc  $E_m(p/q)$  est homéomorphe à  $(\mathbb{R} \times D^r(\mathbb{T}^1))^{2n} \times G_m(p/q)$ .

Notons  $\overline{E}_m(p/q)$  l'image de  $E_m(p/q)$  dans  $\overline{E}_m$  par la projection canonique.

Si  $f$  appartient à  $H^r(p/q, n)$ , alors  $f^q \in H^r(0, m)$ , et par 3.2 l'invariant  $M(f^q)$  appartient à  $\overline{E}_m(p/q)$ .

On démontre de façon analogue à 5.4 le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *L'application :  $f \rightarrow M(f^q)$ , de  $H^r(p/q, n)$  dans  $\overline{E}_m(p/q)$ , est ouverte, continue et surjective.*

5.6. COROLLAIRE (N. Kopell [Ko]). — *Les difféomorphismes  $f \in H^r(p/q, n)$ , dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  est réduit au groupe des itérés de  $f$ , forment une partie ouverte et dense de  $H^r(p/q, n)$ .*

*Démonstration* : Supposons que  $p/q = 0$  (resp.  $p/q \neq 0$ ) ; les éléments de  $\overline{E}_n$  (resp.  $\overline{E}_m(p/q)$ ) dont le stabilisateur  $S$  dans  $G_n$  (resp.  $G_m$ ) est le groupe engendré par  $c(1)$  (resp. par l'unique élément de  $S \cap G_m(p/q)$ ) forment une partie ouverte et dense de  $\overline{E}_n$  (resp.  $\overline{E}_m(p/q)$ ). Par 2.7 et 3.3, pour que les seuls difféomorphismes dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  commutant avec un difféomorphisme  $f \in H^r(0, n)$  (resp.  $H^r(p/q, n)$ ) soient les itérés de  $f$ , il faut et il suffit que  $M(f)$  (resp.  $M(f^q)$ ) appartienne à cette partie. Le corollaire résulte donc du corollaire 5.4 (resp. du corollaire 5.5).  $\square$

Notons aussi que la surjectivité des applications considérées dans les corollaires 5.4 et 5.5 permet d'identifier  $\overline{E}_n$  (resp.  $\overline{E}_m(p/q)$ ) comme l'espace des "modules"

de difféomorphismes  $f \in H^r(0, n)$  (resp.  $\in H^r(p/q, n)$ ) pour la conjugaison dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  (ou  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ ) : cela résulte des critères de conjugaison des § 2 et 3.

Cette surjectivité implique enfin que toutes les éventualités discutées en 2.7 (resp. 3.3) pour le centralisateur d'un difféomorphisme  $f \in H^r(0, n)$  (resp.  $f \in H^r(p/q, n)$ ) peuvent effectivement se produire.



## Chapitre VII

### CENTRALISATEUR D'UN DIFFÉOMORPHISME DONT LE LE NOMBRE DE ROTATION EST IRRATIONNEL : PREMIERS RÉSULTATS

#### 1. Introduction

On étudie, dans ce chapitre et le suivant, les centralisateurs des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel.

On se limitera au cas où la classe de différentiabilité  $r$  des difféomorphismes considérés est soit infinie, soit un entier au moins égal à 2; on ne traitera donc pas le cas des contre-exemples de Denjoy (voir à ce propos [H1, ch. X]), ni surtout le cas des difféomorphismes analytiques (voir à ce propos les travaux récents de Ricardo Pérez-Marco [PM]).

Soit  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme dont le nombre de rotation  $\alpha$  est irrationnel; pour  $0 \leq s \leq r$ , on notera  $Z_s(f)$  le centralisateur de  $f$  dans le groupe  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ , qu'on munit de la topologie induite par celle de  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$ . L'adhérence dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  du groupe des itérés de  $f$  est un sous-groupe fermé de  $Z_s(f)$  qu'on notera  $Z_s^0(f)$ . Pour  $0 \leq t \leq s \leq r$ ,  $Z_s(f)$  (resp.  $Z_s^0(f)$ ) s'injecte continûment dans  $Z_t(f)$  (resp.  $Z_t^0(f)$ ).

Comme  $r \geq 2$ , il existe, par le théorème de Denjoy, un homéomorphisme  $h$  tel que  $h \circ f \circ h^{-1} = R_\alpha$ ; comme le centralisateur de  $R_\alpha$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{T}^1)$  est le groupe des rotations, le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{T}^1)$  est l'ensemble des  $h^{-1} \circ R_\beta \circ h$ ,  $\beta$  décrivant  $\mathbb{T}^1$ . Le groupe topologique  $Z_0(f)$  est donc, via l'application "*nombre de rotation*", canoniquement isomorphe à  $\mathbb{T}^1$ .

On peut donc, pour  $s \geq 0$ , identifier algébriquement (mais non topologiquement) le centralisateur  $Z_s(f)$  à un sous-groupe de  $\mathbb{T}^1$ .

On démontre au § 2 deux propriétés algébriques génériques de  $Z_1(f)$  : il n'a pas de torsion, et  $f$  n'y est pas divisible.

Dans les paragraphes suivants, on s'intéresse principalement à la topologie des

groupes  $Z_s(f)$ ; ce sera aussi l'objet principal du chapitre suivant.

Ces généralités sur les centralisateurs sont reprises de [H1, ch. XII], qu'on pourra consulter pour plus de détails.

## 2. Divisibilité et torsion : propriétés génériques

2.1. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. — Soit  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ; les deux propriétés suivantes sont vérifiées pour un ensemble de difféomorphismes  $f \in F^r$  résiduel dans  $F^r$  :

- a) Le seul difféomorphisme de classe  $C^1$  qui commute avec  $f$  et dont le nombre de rotation est rationnel est l'identité;
- b)  $\rho(f)$  n'est pas un multiple dans  $Z_1(f)$ , c'est-à-dire que pour tout  $n \geq 2$  l'équation  $g^n = f$  n'a pas de solution dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ .

La démonstration du théorème occupe le reste du paragraphe.

Pour tout  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , on pose :

$$|\varphi|_{C^0} = \text{Max}_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|.$$

2.2. Soit  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ; on rappelle que  $\widehat{F}^r(p/q)$  désigne l'ensemble des difféomorphismes de  $F^r(p/q)$  qui ont une seule orbite périodique.

Soit  $f \in \widehat{F}^0(p/q)$ ; on note  $P(f)$  son orbite périodique. Pour  $\eta \geq 0$ , on définit :

$$J_\eta(f) = \{x \in \mathbb{T}^1 \mid \forall y \in P(f), \|x - y\| > \eta\},$$

$$J'_\eta(f) = \{x \in \mathbb{T}^1 \mid \|f^q(x) - x\| > \eta\}.$$

Il est clair que les complémentaires des  $J_\eta(f)$  (resp.  $J'_\eta(f)$ ) pour  $\eta > 0$  forment un système fondamental de voisinages compacts de  $P(f)$ . Si  $\eta$  est assez petit,  $J_\eta(f)$  a exactement  $q$  composantes connexes; on supposera toujours que c'est le cas.

2.3. Soient  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $f \in \widehat{F}^0(p/q)$ ,  $\eta, K > 0$ .

PROPOSITION. — Il existe un réel  $\eta_1 > 0$  et un voisinage  $U$  de  $f$  dans  $\text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$  possédant la propriété suivante : si  $g \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $|\text{Log } Dg|_{C^0} \leq K$  et commute avec un élément de  $U$ , il existe un unique entier  $i \in [0, q)$  tel que toute composante connexe de  $J_\eta(f)$  soit envoyé par  $g$  et  $f^i$  dans la même composante connexe de  $J_{\eta_1}(f)$ .

Démonstration : On choisit  $\eta_2 > 0$  tel que  $J_\eta(f) \subset J'_{\eta_2}(f)$ , on pose  $\eta_3 = \frac{1}{2}\eta_2 e^{-K}$ , et on choisit  $\eta_1 > 0$  de façon à vérifier :

$$J'_{\eta_3}(f) \subset J_{\eta_1}(f),$$

$$f^i(J_\eta(f)) \subset J_{\eta_1}(f), \forall 0 \leq i < q.$$

On choisit ensuite  $\eta_4 \in (0, \eta_2)$  tel que  $J_{\eta_1}(f) \subset J'_{\eta_4}(f)$ , on pose  $\eta_5 = \frac{1}{2}\eta_4 e^{-K}$ ,  $\eta_6 = \frac{1}{4}\eta_4 e^{-2K}$ , puis on choisit  $\eta_7$  tel que  $J'_{\eta_5}(f) \subset J_{\eta_7}(f)$ .

On définit enfin :

$$U = \{f' \in \text{Homéo}^+(\mathbb{T}^1) / \forall x \in \mathbb{T}^1, \|f^q(x) - f'^q(x)\| < \eta_6\}.$$

Soit  $g \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme qui commute avec  $f' \in U$  et vérifie  $|\text{Log } Dg|_{C^0} \leq K$ .

Pour tout  $x \in J_\eta(f)$ , on a :

$$\|g(f^q(x)) - g(f'^q(x))\| \leq e^K \|f^q(x) - f'^q(x)\| < e^K \eta_6 = \frac{1}{2} \eta_5;$$

$$\|g(f^q(x)) - g(x)\| \geq e^{-K} \|f^q(x) - x\| > e^{-K} \eta_2 = 2\eta_3;$$

$$\|f^q(g(x)) - (f'^q(x))\| < \eta_6 < \frac{1}{2} \eta_5.$$

On en tire :

$$\|f^q(g(x)) - g(x)\| > 2\eta_3 - \frac{1}{2} \eta_5 - \frac{1}{2} \eta_5 \geq \eta_3,$$

donc  $g(x) \in J'_{\eta_3}(f) \subset J_{\eta_1}(f)$ .

En remplaçant  $g$  par  $g^{-1}$  et  $\eta_2, \eta_3$  par  $\eta_4, \eta_5$  dans les inégalités précédentes, on montre de même que  $g^{-1}(J_{\eta_1}(f)) \subset J_{\eta_7}(f)$ .

Soit  $J$  une composante connexe de  $J_\eta(f)$ ; il existe un unique entier  $i \in [0, q]$  tel que  $f^i(J)$  et  $g(J)$  soient contenus dans la même composante connexe de  $J_{\eta_1}(f)$ . Pour montrer que  $i$  ne dépend pas de  $J$ , il suffit de prouver que deux composantes connexes  $J_0$  et  $J_1$  de  $J_\eta(f)$  ne sont pas envoyées dans la même composante  $J_2$  de  $J_{\eta_1}(f)$ ; mais si cela était, on aurait  $J_0 \cup J_1 \subset g^{-1}(J_2) \subset J_{\eta_7}(f)$ , une contradiction puisque  $g^{-1}(J_2)$  est connexe.  $\square$

**2.4.** Sous les hypothèses de 2.3, on se donne de plus un entier  $n \geq 1$ ; en itérant la proposition, on voit qu'il existe un voisinage  $V = V(n, K, \eta, f)$  de  $f$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{T}^1)$  ayant la propriété suivante :

si  $g \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  commute avec un élément de  $V$  et vérifie  $|\text{Log } Dg|_{C^0} \leq K$ , il existe un unique entier  $i \in [0, q]$  tel que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $|j| \leq n$ , et toute composante connexe  $J$  de  $J_\eta(f)$ ,  $g^j(J)$  et  $f^{ij}(J)$  sont contenus dans la même composante connexe de  $J_0(f)$ .

Considérons en particulier les situations suivantes :

1) On a  $g^\ell = id$ , avec  $n \geq \ell$  et  $\ell \geq 2$  premier à  $q$ ; montrons que ceci implique que  $g$  est l'identité. Soit  $J$  une composante connexe de  $J_\eta(f)$ ; alors  $J = g^\ell(J)$  et  $f^{i\ell}(J)$  sont contenus dans la même composante connexe de  $J_0(f)$ , donc  $i\ell \equiv 0[q]$  et  $i = 0$ ; il s'ensuit que les  $g^j(J)$ ,  $0 \leq j \leq \ell$ , sont contenus dans la même composante connexe de  $J_0(f)$ . Comme ceci est vrai pour chacune des  $q \geq 2$  composantes connexes de  $J_\eta(f)$ , et comme le nombre de rotation de  $g$  est de la forme  $k/\ell$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on en déduit que  $k = 0$  et  $g = id$ .

2) On a  $g^\ell = f' \in V$ , avec  $n \geq \ell$  et  $\ell \wedge q > 1$ .

Montrons que ceci est impossible (si  $V$  est assez petit).

En effet, si  $J$  est une composante connexe de  $J_\eta(f)$ , alors  $g^\ell(J) = f'(J)$  et  $f^{i\ell}(J)$  sont contenus dans la même composante connexe de  $J_0(f)$ , ce qui implique  $i\ell \equiv 1[q]$ , une contradiction.

## 2.5. Démonstration du théorème 2.1

Pour  $n \geq 2$ , définissons :

$$Q_n = \{p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid p \wedge q = 1, \quad q \wedge n > 1\},$$

$$Q'_n = \{p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid q \geq 2 \quad \text{et} \quad q \wedge n = 1\},$$

$$F_n = \bigcup_{p/q \in Q_n} \widehat{F}^r(p/q),$$

$$F'_n = \bigcup_{p/q \in Q'_n} \widehat{F}^r(p/q).$$

Comme  $Q_n$  et  $Q'_n$  sont denses dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $F_n$  et  $F'_n$  sont denses dans  $F^r$  (cf. I.1.12).

Pour tout  $f \in F_n$  (resp.  $F'_n$ ) on choisit  $n > 0$  tel que  $J_0(f)$  et  $J_\eta(f)$  aient le même nombre de composantes connexes. On définit alors, pour  $n \geq 2$ ,  $K > 0$  :

$$V(n, K) = \bigcup_{f \in F_n} V(n, K, \eta, f),$$

$$V'(n, K) = \bigcup_{f \in F'_n} V(n, K, \eta, f),$$

$$V = \bigcap_{\substack{n \geq 2 \\ K \in \mathbb{N}^*}} V(n, K),$$

$$V' = \bigcap_{\substack{n \geq 2 \\ K \in \mathbb{N}^*}} V'(n, K).$$

L'intersection de  $V(n, K)$  (resp.  $V'(n, K)$ ) avec  $F^r$  contient un ouvert dense de  $F^r$ , donc  $V$  (resp.  $V'$ ) coupe  $F^r$  suivant une partie résiduelle de  $F^r$ .

Supposons qu'il existe  $g \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  et  $\ell \geq 2$  tel que  $g^\ell \in V$ ; on peut alors trouver  $K \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in F_\ell$  tels que  $|\text{Log } Dg|_{C^0} < K$  et  $g^\ell \in V(\ell, K, \eta(f), f)$ ; en comparant la définition de  $F_\ell$  et 2.4.2) on obtient une contradiction. On a ainsi démontré 2.1.b).

La propriété d'être minimal étant générique dans  $F^r$ , les difféomorphismes de  $V'$  qui sont minimaux forment une partie résiduelle de  $F^r$ . Soit  $f'$  un tel difféomorphisme, et  $g$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  dont le nombre de rotation  $k/\ell$  est rationnel; on a alors  $g^\ell = id$ ; on peut trouver  $K \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in F'_\ell$  tels que  $|\text{Log } Dg|_{C^0} < K$  et  $f' \in V(\ell, K, \eta(f), f)$ . En comparant 2.4.1) et la définition de  $F'_\ell$  on voit qu'on doit avoir  $g = id$ , ce qui démontre 2.1.a).  $\square$

### 3. Topologie du groupe des itérés : propriétés génériques

**3.1.** Soit  $r$  un ordre de différentiabilité, que nous supposons infini ou entier au moins égal à 2. Si  $f$  appartient à  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ , et son nombre de rotation est irrationnel, on peut donc identifier, pour tout  $0 \leq s \leq r$ , les groupes  $Z_s^0(f)$  et  $Z_s(f)$  à des sous-groupes de  $\mathbb{T}^1$ .

Ceci étant, il est clair que si  $f$  est conjugué dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  à une rotation irrationnelle, on a  $Z_s^0(f) = Z_s(f) = \mathbb{T}^1$ .

Réciproquement, Herman a observé ([H1, ch. XII]) qu'il résulte d'un théorème de Montgomery-Zippin ([M-Z, p. 213]) que si  $Z_s(f) = \mathbb{T}^1$ , alors  $f$  est conjugué dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1)$  à une rotation.

**3.2.** Rappelons un autre résultat de Herman [H1, ch. XII] : il démontre que pour un difféomorphisme  $f$  générique dans  $F^r$ , le groupe  $Z_r^0(f)$  a la puissance du continu. Pour voir ceci, il définit un invariant :

$$K_r(f) = \inf_{n \geq 1} d_r(id, f^n),$$

où  $d_r$  est une distance définissant la  $C^r$ -topologie sur  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ ;  $K_r$  est semi-continu supérieurement, donc  $K_r^{-1}(0)$  est un  $G_\delta$ ; d'autre part, si  $K_r(f) = 0$ , le groupe  $Z_r^0(f)$  est complet et non discret, donc a la puissance du continu.

Or, il est clair que  $K_r^{-1}(0)$  contient les classes de conjugaison dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  des rotations, et l'ensemble de ces classes est dense dans  $F^r$  (par le théorème de conjugaison de Herman [H1, ch. IX]); le résultat de Herman en découle.

Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^1$  un nombre irrationnel; on a vu au chapitre IV que  $O_\alpha^\infty$  est dense dans  $F_\alpha^\infty$ ; il en résulte immédiatement que  $O_\alpha^r$  est dense dans  $F_\alpha^r$ , car on peut approcher (dans la  $C^r$ -topologie) un difféomorphisme de  $F_\alpha^r$  par un difféomorphisme de  $F_\alpha^\infty$ . En introduisant ce résultat dans l'argument de Herman, on obtient donc le théorème suivant, qui précise celui de Herman :

**THÉORÈME.** — Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Pour un difféomorphisme  $f$  générique dans  $F_\alpha^r$ , le groupe  $Z_r^0(f)$  a la puissance du continu.

**3.3.** Soient  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  et  $0 \leq s \leq r$ .

On définit les sous-groupes  $Z_s(\alpha)$ ,  $Z_s^0(\alpha)$  par les formules :

$$Z_s(\alpha) = \bigcap_{f \in F_\alpha^r} Z_s(f),$$

$$Z_s^0(\alpha) = \bigcap_{f \in F_\alpha^r} Z_s^0(f).$$

Herman a montré ([H1, ch. VI]) qu'on a  $K_1(f) = 0$  pour tout difféomorphisme  $f \in F_\alpha^r$ , donc le groupe  $Z_1^0(f)$  a toujours la puissance du continu. On va préciser quelque peu ce résultat.

LEMME. — Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments non nuls de  $\mathbb{T}^1$  telle que  $\sum_{n \geq 0} \|a_n\| < +\infty$ . Alors l'ensemble des sommes des séries  $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n a_n$ , où  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  décrit  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , a la puissance du continu.

Démonstration : Quitte à remplacer  $(a_n)_{n \geq 0}$  par une sous-suite, on peut supposer qu'on a  $\|a_n\| < \frac{1}{4} \|a_{n-1}\|$  pour  $n \geq 1$ . L'application :  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0} \rightarrow \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n a_n$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{T}^1$  est alors injective.  $\square$

3.4. Soit  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , et  $(\ell_n)_{n \geq 0}$  une suite d'entiers strictement positifs telle que  $\sum_{n \geq 0} \|\ell_n \alpha\| < +\infty$ . On note  $G((\ell_n), \alpha)$  le sous-groupe de  $\mathbb{T}^1$  constitué par les sommes des séries  $\sum_{n \geq 0} b_n \ell_n \alpha$ , où  $(b_n)_{n \geq 0}$  décrit l'ensemble des suites bornées à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Ce groupe a la puissance du continu par le lemme 3.3.

Notons  $(q_n)_{n \geq 0}$  la suite des dénominateurs des réduites de  $\alpha$ . Rappelons qu'on a  $\sum_{n \geq 0} \|q_n \alpha\| < +\infty$ .

THÉORÈME. — Supposons que  $r \geq 3$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , le groupe  $Z_1^0(\alpha)$  contient  $G((q_n), \alpha)$  et a donc la puissance du continu.

Démonstration : Soient  $\beta = \sum_{n \geq 0} b_n q_n \alpha$  un élément de  $G((q_n), \alpha)$ , et  $f \in F_{\alpha}^r$  ; posons, pour tout  $k \geq 0$ ,  $m_k = \sum_{n=0}^k b_n q_n$ .

On a vu au chapitre III que la série  $\sum_{n \geq 0} \|\text{Log } Df^{q_n}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)}$  est convergente.

Ceci implique immédiatement que la suite  $(f^{m_k})_{k \geq 0}$  converge dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  ; sa limite a pour nombre de rotation  $\beta$ .  $\square$

3.5. On verra au chapitre VIII qu'il existe des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^{\infty}(\mathbb{T}^1)$ , de nombre de rotation irrationnel, tels que le centralisateur  $Z_2(f)$  soit réduit au groupe des itérés de  $f$ . Si  $\alpha$  est le nombre de rotation d'un tel difféomorphisme, on a donc :

$$Z_2(\alpha) = Z_2^0(\alpha) = Z_{\infty}^0(\alpha) = Z_{\infty}(\alpha) = \mathbb{Z}\alpha.$$

Cependant, cette situation n'est pas générique en  $\alpha$  :

THÉORÈME. — Pour un ensemble résiduel de nombres  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , le groupe  $Z_{\infty}^0(\alpha)$  a la puissance du continu.

De façon peu précise, on a  $Z_2(\alpha) = \mathbb{Z}\alpha$  lorsque toutes les réduites de  $\alpha$  sont de très bonnes approximations de  $\alpha$  ; le groupe  $Z_{\infty}^0(\alpha)$  a la puissance du continu lorsque  $\alpha$  est très bien approché par des nombres de type constant ; cette dernière propriété est générique.

La démonstration du théorème occupe la fin du chapitre.

**3.6.** Pour tout entier  $r \geq 0$ , et tout difféomorphisme  $f = id + \varphi \in D^r(\mathbb{T}^1)$ , on pose :

$$|f|_r = \text{Max}_{0 \leq s \leq r} |D^s \varphi|_{C^0},$$

$$\|f\|_r = \text{Max}(|f|_r, |f^{-1}|_r).$$

Pour  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ , on note  $\|f\|_r$  le plus petit des nombres  $\|\tilde{f}\|_r$ , où  $\tilde{f}$  décrit l'ensemble des relèvements de  $f$ . Notons qu'on a  $\|f\|_r \leq \|f\|_{r+1}$  pour tout  $f \in \text{Diff}_+^{r+1}(\mathbb{T}^1)$ .

On note  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1, 0)$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  qui vérifient  $f(0) = 0$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on définit :

$$B_k(r) = \{f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1, 0) \mid \|f\|_r \leq k\}.$$

Pour tout  $r \geq 0$ , on choisit une suite  $(\delta(n, r))_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs qui décroît vers 0 et possède la propriété suivante : pour toute suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  qui vérifie  $\|f_n\|_r < \delta(n, r)$  pour  $n \geq 1$ , la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par  $F_0 = id$ ,  $F_n = f_n \circ F_{n-1}$ , converge dans  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ . De plus, lorsque  $r$  varie, on fait ces choix de façon à avoir  $\delta(n, r+1) \leq \delta(n, r)$  pour tous  $n \geq 1$ ,  $r \geq 0$ .

**3.7.** Pour tout  $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1, 0)$  et tout  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , il existe un unique  $\lambda(f, \alpha) \in \mathbb{T}^1$  tel que le difféomorphisme  $f_\alpha = R_{\lambda(f, \alpha)} \circ f$  ait pour nombre de rotation  $\alpha$ . De plus, pour tout entier  $r$ , l'application :  $(f, \alpha) \rightarrow f_\alpha$  de  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1, 0) \times (\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$  dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  est continue.

Pour  $r \geq 0$ ,  $m \geq 1$ , la fonction numérique  $\varphi_{r,m}$  définie sur  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1, 0) \times (\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$  par la formule :

$$\varphi_{r,m}(f, \alpha) = \|f_\alpha^m\|_r$$

est donc strictement positive et continue.

Pour  $k \geq 0$ , on définit une fonction numérique  $\varphi_{r,k,m}$  sur  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  par la formule :

$$\varphi_{r,k,m}(\alpha) = \text{Sup}_{f \in B_k(r+3)} \varphi_{r,m}(f, \alpha).$$

Comme l'adhérence de  $B_k(r+3)$  dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1, 0)$  est compacte,  $\varphi_{r,k,m}$  est une fonction continue.

Pour  $r \geq 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $m \geq 1$ , considérons les fonctions  $\psi_{r,k,m}$ ,  $\psi_{r,k}$  définies sur  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  par :

$$\psi_{r,k,m}(\alpha) = \text{Max}_{0 \leq s \leq r} \varphi_{s,k,m}(\alpha),$$

$$\psi_{r,k}(\alpha) = \text{Inf}_{m \geq 1} \psi_{r,k,m}(\alpha).$$

Les fonctions  $\psi_{r,k,m}$  sont continues et les fonctions  $\psi_{r,k}$  sont semi-continues

supérieurement sur  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Il résulte immédiatement des définitions qu'on a :

$$\psi_{r,k,m}(\alpha) \leq \psi_{r+1,k,m}(\alpha),$$

$$\psi_{r,k,m}(\alpha) \leq \psi_{r,k+1,m}(\alpha),$$

$$\psi_{r,k}(\alpha) \leq \psi_{r+1,k}(\alpha),$$

$$\psi_{r,k}(\alpha) \leq \psi_{r,k+1}(\alpha),$$

pour tous  $r \geq 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $m \geq 1$  et  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

Notons  $G_{r,k}$  l'ensemble  $\psi_{r,k}^{-1}(\{0\})$ ; c'est un  $G_\delta$  de  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

**3.8 LEMME.** — *Pour tous  $r \geq 0$ ,  $k \geq 1$ , l'ensemble  $G_{r,k}$  contient l'ensemble des nombres de type constant.*

*Démonstration :* Soit  $\alpha$  un nombre de type constant. Pour  $f \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1, 0)$ , notons  $H_\alpha(f)$  l'unique homéomorphisme dans  $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1, 0)$  qui vérifie

$$f_\alpha = H_\alpha(f) \circ R_\alpha \circ [H_\alpha(f)]^{-1}.$$

Soient  $r \geq 0$ ,  $k \geq 1$ . Il résulte du théorème de Herman ([H1, ch. IX]) que, pour tout  $0 \leq s \leq r$ ,  $H_\alpha$  applique  $\text{Diff}_+^{s+3}(\mathbb{T}^1, 0)$  dans  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1, 0)$  et applique  $B_k(s+3)$  sur une partie d'adhérence compacte de  $\text{Diff}_+^s(\mathbb{T}^1, 0)$ .

On peut donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , trouver un entier  $m \geq 1$  qui vérifie :

$$\|f_\alpha^m\|_s = \|H_\alpha(f) \circ R_{m\alpha} \circ [H_\alpha(f)]^{-1}\|_s < \varepsilon,$$

pour tout  $0 \leq s \leq r$  et tout  $f \in B_k(s+3)$ .

On a alors  $\psi_{r,k,m}(\alpha) \leq \varepsilon$ . □

**3.9.** Définissons une partie  $G$  de  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  par la formule :

$$G = \bigcap_{\substack{r \geq 0 \\ k \geq 1}} G_{r,k}.$$

Il résulte du lemme 3.8 que chaque partie  $G_{r,k}$  est résiduelle dans  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ; donc  $G$  est résiduelle dans  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

Nous allons montrer que, pour tout  $\beta \in G$ , il existe une suite  $(\ell_n)_{n \geq 0}$  d'entiers strictement positifs telle que le groupe  $G((\ell_n), \beta)$  défini en 3.4 soit contenu dans  $Z_\infty^0(\beta)$ . Le théorème en résultera.

**3.10.** On fixe dans la suite  $\beta \in G$ . Pour  $r \geq 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $n \geq 1$ , notons  $Z(r, n, k)$  la partie de  $\mathbb{N}^*$  formée des entiers  $m$  tels que  $\psi_{r,k,m}(\beta) < \delta(n, r)$ . Comme  $\beta \in G$ ,  $Z(r, n, k)$  est une partie non vide (en fait infinie) de  $\mathbb{N}^*$ . De plus, on a  $Z(r, n, k) \supset Z(r+1, n, k)$  car  $\delta(n, r) \geq \delta(n, r+1)$  et  $\psi_{r+1,k,m} \geq \psi_{r,k,m}$ ; on a  $Z(r, n, k) \supset Z(r, n+1, k)$  car  $\delta(n+1, r) \leq \delta(n, r)$ ; on a  $Z(r, n, k) \supset Z(r, n, k+1)$  car  $\psi_{r,k+1,m} \geq \psi_{r,k,m}$ .

On choisit une suite  $(\ell_n)_{n \geq 1}$  d'entiers telle que  $\ell_n \in Z(n, n, n)$  pour tout  $n \geq 1$ .

Soient  $f \in F_\alpha^\infty$  et  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  une suite à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Définissons une suite  $F_n$  de difféomorphismes de classe  $C^\infty$  par  $F_0 = id$ ,  $F_n = f^{\varepsilon_n \ell_n} \circ F_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

Soit  $r \in \mathbb{N}$ ; il existe  $\lambda \in \mathbb{T}^1$  tel que  $R_\lambda \circ f$  appartienne à  $\text{Diff}_+^{r+3}(\mathbb{T}^1, 0)$ ; soit  $n(r)$  un entier assez grand pour qu'on ait  $n(r) \geq r$  et  $R_\lambda \circ f \in B_{n(r)}(r+3)$ . Pour  $n \geq n(r)$ , on a donc  $f \in B_n(r+3)$  et  $\ell_n \in Z(n, n, n) \subset Z(r, n(r), n)$ ; on en déduit :

$$\begin{aligned} \psi_{r, n(r), \ell_n}(\beta) &< \delta(n, r) \\ \|f^{\ell_n}\|_r &< \delta(n, r). \end{aligned}$$

D'après le choix des nombres  $\delta(n, r)$ , la suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  pour tout  $r \geq 0$ , donc converge dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  vers une limite  $F$ . En particulier, la série  $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n \ell_n \beta$  est convergente et sa somme est le nombre de rotation de  $F$ .

On a donc  $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n \ell_n \beta \in Z_\infty^0(\beta)$  pour toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ ; on en déduit que  $\sum_{n \geq 1} \|\ell_n \beta\| < +\infty$  et que  $G((\ell_n)_{n \geq 1}, \beta)$  est contenu dans  $Z_\infty^0(\beta)$ .

En appliquant le lemme 3.3, on voit donc que  $Z_\infty^0(\beta)$  a la puissance du continu.  $\square$



## Chapitre VIII

### CENTRALISATEUR D'UN DIFFÉOMORPHISME DONT LE NOMBRE DE ROTATION EST IRRATIONNEL

(suite)

#### 1. Centralisateur et groupe des itérés

1.1. On rappelle que  $F_I^r$  désigne l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $D^r(\mathbb{T}^1)$ ) dont le nombre de rotation est irrationnel. C'est un  $G_\delta$ -dense de  $F^r$ , donc un espace de Baire.

Le but de ce paragraphe est essentiellement de démontrer le résultat suivant.

**THÉORÈME.** — *Les difféomorphismes  $f \in F_I^\infty$ , dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  est égal à l'adhérence dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  du groupe des itérés de  $f$ , forment une partie résiduelle de  $F_I^\infty$ .*

En d'autres termes, on a, génériquement dans  $F_I^\infty$ ,  $Z_\infty(f) = Z_\infty^0(f)$ .

1.2. La lettre  $I$  désignant  $\mathbb{T}^1$  ou un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ , on munit, pour tout entier  $s \in \mathbb{N}$ , l'espace  $C^s(I)$  de la norme d'espace de Banach définie par :

$$\|\varphi\|_{C^s(I)} = \text{Max}_{\substack{t \in I \\ 0 \leq j \leq s}} |D^j \varphi(t)|,$$

pour  $\varphi \in C^s(I)$ .

Ceci étant, le principal ingrédient dans la démonstration du théorème 1.1 est le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — *Soient  $r$  un entier au moins égal à 2,  $B$  une partie bornée de  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ , et  $f$  un difféomorphisme appartenant à  $\widehat{F}^r$  (i.e. ayant exactement une orbite périodique). On suppose que le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  est réduit au*

groupe des itérés de  $f$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  ayant la propriété suivante : si  $g \in B$  commute avec un difféomorphisme  $f' \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  vérifiant :

$$\|f - f'\|_{C^r(\mathbb{T}^1)} \leq \delta,$$

alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  vérifiant :

$$\|g - f^k\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)} \leq \varepsilon,$$

$$\|g - f'^k\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)} \leq \varepsilon.$$

**1.3. Remarque :** Si  $\varepsilon$  est assez petit, l'entier  $k$  est borné en valeur absolue par une constante ne dépendant que de  $f$  et  $B$ , et il est uniquement déterminé par la relation :

$$\|g - f^k\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon.$$

En effet, les itérés  $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont tous distincts, et la suite  $\|f^k - id\|_{C^1(\mathbb{T}^1)}$  tend vers l'infini lorsque  $|k|$  tend vers l'infini ; donc toute partie bornée de  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  coupe le groupe des itérés de  $f$  en un ensemble fini.

**1.4.** On note  $p/q$  le nombre de rotation de  $f$  ( $q \geq 1, p \wedge q = 1$ ). Quitte à remplacer  $f$  par son inverse, on peut supposer que  $f \in \widehat{F}_+^r(p/q)$ . On note  $F$  le relèvement de  $f^q$  à  $D^r(\mathbb{T}^1)$  dont le nombre de rotation est nul. On choisit et fixe dans la suite deux points fixes consécutifs  $a$  et  $b$  de  $F$  ( $a < b$ ). On pose  $I = [a, b]$ , et, pour tout  $\eta > 0$  suffisamment petit,  $I(\eta) = [a + \eta, b - \eta]$ .

Soit  $X$  (resp.  $Y$ ) l'unique champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  (resp.  $(a, b)$ ) qui soit associé à la restriction de  $F$  à cet intervalle (cf. V.1). On note  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(F^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ) le groupe à un paramètre de  $C^1$ -difféomorphismes de  $[a, b]$  (resp.  $(a, b)$ ) engendré par  $X$  (resp.  $Y$ ). On choisit et fixe dans la suite des primitives  $U$  et  $V$  de  $1/X$  et  $1/Y$  sur  $(a, b)$ . Ce sont des difféomorphismes de classe  $C^r$  préservant l'orientation de  $(a, b)$  sur  $\mathbb{R}$  (loc. cit.).

Rappelons que  $U, V, F_t$  et  $F^t$  sont reliés par les relations (cf. V.1) :

$$(1) \quad \begin{aligned} U \circ F_t &= U + t, \\ V \circ F^t &= V + t, \quad \text{pour tout réel } t. \end{aligned}$$

Par VI.4.3 et V.3.5, l'hypothèse sur le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  signifie que l'intersection des groupes à un paramètre  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(F^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est réduite aux  $F^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**1.5. LEMME.** — Soient  $\varepsilon_1, K, \eta$  trois réels strictement positifs. On suppose que l'intervalle  $[a + \eta, b - \eta]$  contient un domaine fondamental  $[c, F(c)]$  de  $F$  ( $c \in (a, b)$ ). Alors, il existe  $\delta_1 > 0$  ayant la propriété suivante : si  $t_1, t_2$  sont deux réels et  $h$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ , préservant l'orientation, de  $I(\eta)$  sur son image qui vérifient

$$\|\text{Log } Dh\|_{C^0(I(\eta))} < K,$$

$$\|h - F^{t_1}\|_{C^r(I(\eta))} < \delta_1,$$

$$\|h - F_{t_2}\|_{C^r(I(\eta))} < \delta_1,$$

alors il existe un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\|h - F^n\|_{C^r(I(\eta))} < \varepsilon_1.$$

De plus, si  $\varepsilon_1$  est assez petit, l'entier  $n$  est borné en valeur absolue par une constante ne dépendant que de  $K$  et de  $F$ .

*Démonstration* : Soient  $L$  un espace métrique,  $d$  la distance associée,  $L_1, L_2$  deux parties compactes de  $L$ , et  $\varepsilon_1$  un réel strictement positif. Montrons qu'il existe  $\delta_1 > 0$  tel que, pour tout  $m \in L$ , les relations  $d(m, L_1) < \delta_1, d(m, L_2) < \delta_1$  impliquent  $d(m, L_1 \cap L_2) < \varepsilon_1$ . Dans le cas contraire, il existe trois suites  $(m_n)_{n \geq 0}, (m_n^1)_{n \geq 0}, (m_n^2)_{n \geq 0}$  dans  $L$  possédant les propriétés suivantes :

- a)  $m_n^1 \in L_1, m_n^2 \in L_2$  pour tout entier  $n$ ;
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(m_n, m_n^1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(m_n, m_n^2) = 0$ ;
- c)  $d(m_n, L_1 \cap L_2) \geq \varepsilon_1$  pour tout entier  $n$ .

Comme  $L_1$  et  $L_2$  sont des parties compactes, on peut supposer que les suites  $(m_n^1)_{n \geq 0}$  et  $(m_n^2)_{n \geq 0}$  convergent respectivement vers des limites  $m^1 \in L_1$  et  $m^2 \in L_2$ ; mais b) implique que la suite  $(m_n)$  converge vers  $m^1$  et  $m^2$  donc  $m^1 = m^2 \in L_1 \cap L_2$ , contredisant c).

Revenant à la situation du lemme, il résulte par exemple de (1) qu'on a :

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \|\text{Log } DF_t\|_{C^0(I(\eta))} = +\infty,$$

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \|\text{Log } DF^t\|_{C^0(I(\eta))} = +\infty.$$

Donc, si  $\delta_1$  est assez petit, il existe une constante  $N$ , ne dépendant que de  $K$  et  $f$ , telle que, si  $h, t_1, t_2$  satisfont aux hypothèses du lemme, on a  $|t_1| \leq N, |t_2| \leq N$ .

Notons  $L$  l'espace métrique  $C^r(I(\eta))$  et  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) l'ensemble des restrictions à  $I(\eta)$  des fonctions  $F^t$  (resp.  $F_t$ ), pour  $t$  décrivant  $[-N, +N]$ . Comme les applications  $t \rightarrow F^t/I(\eta)$  et  $t \rightarrow F_t/I(\eta)$  sont continues (cela résulte par exemple des relations (1)),  $L_1$  et  $L_2$  sont compacts. Il existe donc  $\delta_1 > 0$  tel que si  $h, t_1, t_2$  vérifient les hypothèses du lemme, alors il existe  $t_3, t_4 \in [-N, +N]$  tels que les restrictions de  $F^{t_3}$  et  $F_{t_4}$  à  $I(\eta)$  sont égales et  $\|h - F^{t_3}\|_{C^r(I(\eta))} < \varepsilon_1$ .

Comme  $I(\eta)$  contient un domaine fondamental de  $F$ , et comme  $F^{t_3}, F_{t_4}$  commutent avec  $F$ , on a  $F^{t_3} = F_{t_4}$  sur  $(a, b)$ , donc  $t_3 = t_4$  est entier, ce qui conclut la démonstration du lemme. □

## 1.6. Fin de la démonstration du théorème 1.2

Sous les hypothèses du théorème 1.2, considérons un difféomorphisme  $f'$  proche de  $f$  et un difféomorphisme  $g \in B$  commutant avec  $f'$ .

Posons  $\|f - f'\|_{C^r(\mathbb{T}^1)} = \delta$ .

Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \eta$  quatre réels strictement positifs qu'on déterminera dans la suite.

Il résulte de la proposition VII.2.3 qu'il existe, si  $\delta$  est assez petit, un unique entier  $i \in [0, q)$  tel qu'on ait  $|gf^{-i}(c) - c| < \eta/2, |f^i g^{-1}(c) - c| < \eta/2$  pour tout point fixe  $c$  de  $f^q$ .

Le difféomorphisme  $\tilde{h} = gf'^{-i}$  appartient à une partie bornée  $B'$  de  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  qui ne dépend que de  $B$  et de  $f$ ; il possède, par ce qui précède, un relèvement  $h$  dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  qui vérifie  $|h(c) - c| < \eta/2$ ,  $|h^{-1}(c) - c| < \eta/2$ , pour tout point fixe  $c$  de  $F$ . En particulier, on a  $h(a), h^{-1}(a) \in [a - \eta/2, a + \eta/2]$  et  $h(b), h^{-1}(b) \in [b - \eta/2, b + \eta/2]$ .

Posons  $F' = h^{-1} \circ F \circ h$ ; les points  $h^{-1}(a), h^{-1}(b)$  sont des points fixes consécutifs de  $F'$ ; le champ de vecteurs  $X_h = \frac{X \circ h}{Dh}$  (resp.  $Y_h = \frac{Y \circ h}{Dh}$ ) est l'unique champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $[h^{-1}(a), h^{-1}(b)]$  (resp. sur  $(h^{-1}(a), h^{-1}(b))$ ) qui soit associé à la restriction de  $F'$  à cet intervalle. Notons que  $U \circ h$  et  $V \circ h$  sont des primitives de  $1/X_h$  et  $1/Y_h$  sur  $(h^{-1}(a), h^{-1}(b))$ .

Si  $\delta$  est petit, alors  $\|F - F'\|_{C^r([a-\eta, b+\eta])}$  est petit, car  $\tilde{h}^{-1} \circ (f')^q \circ \tilde{h} = (f')^q$ ; ceci implique, par le théorème IV.2.5, que les distances  $\|X - X_h\|_{C^{r-1}(I(\eta))}$  et  $\|Y - Y_h\|_{C^{r-1}(I(\eta))}$  sont petites; donc il existe des réels  $t_1, t_2$  tels que  $\|U \circ h - U - t_2\|_{C^{r-1}(I(\eta))}$  et  $\|V \circ h - V - t_1\|_{C^{r-1}(I(\eta))}$  soient petits.

Montrons que  $t_1$  et  $t_2$  sont bornés en valeur absolue par une constante ne dépendant que de  $f$  et  $B$ : en effet,  $h(a)$  est proche de  $a$ ,  $h(b)$  est proche de  $b$  et  $\|\text{Log } Dh\|_{C^0([a, b])}$  est borné, donc si  $\eta$  est assez petit  $h(\frac{a+b}{2})$  ne peut être très proche de  $a$  ou  $b$ ; alors  $\left|U\left(h\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - U\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$  et  $\left|V\left(h\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - V\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$  sont bornés par une constante ne dépendant que de  $f$  et de  $B$ , ce qui prouve notre assertion.

Il résulte alors de ce qui précède et des relations (1) que si  $\delta$  est assez petit, on a :

$$\|h - F^{t_1}\|_{C^r(I(\eta))} < \delta_1,$$

$$\|h - F_{t_2}\|_{C^r(I(\eta))} < \delta_1.$$

Comme  $\|\text{Log } Dh\|_{C^0(I(\eta))}$  est borné par une constante ne dépendant que de  $f$  et de  $B$ , on peut choisir  $\delta_1$  suffisamment petit pour qu'il existe, par le lemme 1.5, un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\|h - F^n\|_{C^r(I(\eta))} < \varepsilon_1.$$

Comme  $n$  est borné par une constante ne dépendant que de  $f$  et de  $B$ , on peut choisir  $\eta$  et  $\varepsilon_1$  assez petits pour que la relation précédente implique :

$$(2) \quad \|h - F^n\|_{C^{r-1}([a, b])} < \varepsilon_2.$$

Les  $f^j$ , pour  $0 \leq j < q$ , permutent transitivement les  $q$  composantes connexes du complémentaire dans  $\mathbb{T}^1$  de l'orbite périodique de  $f$ . D'autre part, pour  $0 \leq j < q$  et  $\delta$  petit, on a  $\tilde{h} = f'^j \circ \tilde{h} \circ (f')^{-j}$ , donc  $\|\tilde{h} - f'^j \circ \tilde{h} \circ f^{-j}\|_{C^r(\mathbb{T}^1)}$  est petit. Par conséquent, lorsque  $\varepsilon_2$  et  $\delta$  sont petits, la relation (2) montre que  $\|h - f^{nq}\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)}$  est petit. Comme  $n$  et  $i$  sont bornés en valeur absolue par une constante ne dépendant que de  $f$  et  $B$ , on conclut, en choisissant  $\varepsilon_2$  et  $\delta$  assez petits, qu'on a :

$$\|g - f^{nq+i}\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon,$$

$$\|g - f'^{nq+i}\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon.$$

□

### 1.7. Démonstration du théorème 1.1

Soit  $\mathcal{F}^\infty$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  qui ont exactement une orbite périodique et dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  est réduit aux itérés de  $f$ .

Par le corollaire de VI.5.2,  $\mathcal{F}^\infty$  est une partie dense de  $F^\infty$ .

Pour tout entier  $r$  au moins égal à 2, choisissons une suite croissante  $(B_{i,r})_{i \geq 0}$  de parties bornées de  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$  dont l'union est égale à  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ .

Soient  $f \in \mathcal{F}^\infty$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , avec  $r \geq 2$ . En appliquant le théorème 1.2 avec  $\varepsilon = 2^{-i}$ ,  $B = B_{i,r}$  et  $f$ , on obtient un réel strictement positif  $\delta = \delta(i, r, f)$ . Définissons alors :

$$\mathcal{V}(i, r, f) = \{f' \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1) \mid \|f - f'\|_{C^r(\mathbb{T}^1)} < \delta\};$$

$$\mathcal{V}(i, r) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}^\infty} \mathcal{V}(i, r, f);$$

$$\mathcal{V} = \left( \bigcap_{\substack{i \geq 0 \\ r \geq 2}} \mathcal{V}(i, r) \right) \cap F_I^\infty.$$

Pour tout  $i \geq 0$ ,  $r \geq 2$ , la partie  $\mathcal{V}(i, r)$  coupe  $F^\infty$  suivant un ouvert dense, donc  $\mathcal{V}$  est une partie résiduelle de  $F_I^\infty$  pour la  $C^\infty$ -topologie.

Soient  $f' \in \mathcal{V}$ , et  $g \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme commutant avec  $f'$ . Pour tout  $r \geq 2$  et tout  $i$  assez grand, on a  $g \in B_{i,r}$  et il existe  $f \in \mathcal{F}^\infty$  tel que  $\|f - f'\|_{C^r(\mathbb{T}^1)} < \delta(i, r, f)$ . Par le théorème 1.2, il existe donc un entier  $k$  tel que :

$$\|g - (f')^k\|_{C^{r-1}(\mathbb{T}^1)} < 2^{-i}.$$

Donc le centralisateur de  $f'$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  est l'adhérence des itérés de  $f'$ .  $\square$

**1.8. Remarque :** lorsque  $r$  est un entier au moins égal à 2, la même démonstration que précédemment montre qu'on a, génériquement dans  $F_I^r$ ,  $Z_r(f) \subset Z_{r-1}^0(f)$ ; j'ignore si l'égalité  $Z_r(f) = Z_r^0(f)$  a lieu génériquement dans  $F_I^r$ .

D'autre part, on verra au §3 que l'égalité  $Z_\infty(f) = Z_\infty^0(f)$  n'a pas lieu pour **tout**  $f \in F_I^\infty$ .

## 2. Un théorème de convergence

**2.1.** Ce paragraphe est consacré au théorème 2.3 et à ses conséquences. Le contenu heuristique du théorème est à peu près le suivant : étant donné un difféomorphisme  $f$  dont le nombre de rotation  $\alpha$  est irrationnel, et deux réduites consécutives  $p/q$  et  $P/Q$  de  $\alpha$ , la connaissance de  $f^q$  donne, lorsque  $Q/q$  est très grand, des informations sur  $f^Q$ .

**2.2.** Soit  $p/q$  un nombre rationnel, avec  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et  $p, q$  premiers entre eux. Fixons  $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ . Alors les relations  $jq - kp = \varepsilon$ ,  $0 \leq k < q$  déterminent de façon unique deux entiers  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Notons que  $k$  est non nul dès que  $q \geq 2$ .

Si  $p/q$  est la réduite d'ordre  $n \geq 2$  d'un nombre irrationnel  $\alpha$ , et si on prend  $\varepsilon = (-1)^n$ , alors  $j/k$  est la réduite d'ordre  $n - 1$  de  $\alpha$  (on a  $q \geq 2$ , donc  $k \in \mathbb{N}^*$ ). De plus, la réduite d'ordre  $n + 1$  de  $\alpha$  est de la forme  $\frac{Np+j}{Nq+k}$ , avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Dans la suite, on prend  $\varepsilon = +1$ . Le cas  $\varepsilon = -1$  se traite de manière complètement similaire. Définissons alors :

$$\mathcal{O}^+ = \mathcal{O}^+(p/q) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} F_+^0 \left( \frac{Np+j}{Nq+k} \right);$$

$$\mathcal{O}^- = \mathcal{O}^-(p/q) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} F_-^0 \left( \frac{Np+j}{Nq+k} \right);$$

$$\mathcal{O}(p/q) = \mathcal{O}^+(p/q) \cup \mathcal{O}^-(p/q).$$

Remarquons qu'on a, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$j/k > \frac{Np+j}{Nq+k} > p/q,$$

$$(Np+j)q - (Nq+k)p = 1.$$

**2.3.** Soient  $r$  un entier au moins égal à 2, et  $f$  un difféomorphisme appartenant à  $\widehat{F}_+^r(p/q)$ ; on choisit et fixe dans la suite deux points fixes consécutifs  $a$  et  $b$  de  $f^q - p$  ( $a < b$ ). Il résulte de la définition de  $j$  et  $k$  qu'on a :

$$a = f^k(b) - j.$$

On note  $F = f^q - p$ ,  $c = f^k(a) - j$ ,  $d = f^{-k}(b) + j$ , de sorte que  $c, a, b, d$  sont quatre points fixes consécutifs de  $F$ ; il existe un unique champ de vecteurs  $X_0$  (resp.  $X_1$ ) de classe  $C^1$  sur  $(c, b)$  (resp.  $(a, d)$ ) qui soit associé à la restriction de  $F$  à cet intervalle.

Toute primitive de  $1/X_0$  ou  $1/X_1$  sur  $(a, b)$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  préservant l'orientation de  $(a, b)$  sur  $\mathbb{R}$  (cf; V.1); on a vu en V.1.9 qu'on peut choisir une primitive  $U$  (resp.  $U_1$ ) de  $1/X_0$  sur  $(a, b)$ , une primitive  $V$  (resp.  $V_1$ ) de  $1/X_1$  sur  $(a, b)$  de sorte que le difféomorphisme  $H^+ = U^{-1} \circ V$  (resp.  $H^- = U_1^{-1} \circ V_1$ ) vérifie :

- i)  $H^+(x) \geq x$  (resp.  $H^-(x) \leq x$ ) pour tout  $x \in [a, b]$ ;
- ii)  $H^+$  (resp.  $H^-$ ) a au moins un point fixe dans  $(a, b)$ .

De plus (*loc. cit.*),  $H^+$  et  $H^-$  sont uniquement déterminés par ces propriétés; ce sont des difféomorphismes de classe  $C^r$  et préservant l'orientation de  $(a, b)$ , qui se prolongent en des homéomorphismes de  $[a, b]$ .

**THÉORÈME.** — Soient  $\varepsilon, \eta$  deux réels strictement positifs; notons  $I(\eta)$  l'intervalle  $[a+\eta, b-\eta]$ . Il existe un réel  $\delta > 0$  ayant la propriété suivante : soient  $g \in D^r(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme appartenant à  $\mathcal{O}^+(p/q)$  (resp.  $\mathcal{O}^-(p/q)$ ),  $P/Q = \frac{Np+j}{Nq+k}$  son nombre de rotation, et supposons qu'on ait :

$$\|g - f\|_{C^r(\mathbb{T}^1)} < \delta;$$

alors, on a :

$$\|g^Q - P - H^+\|_{C^r(I(\eta))} < \varepsilon,$$

$$\text{(resp. } \|g^Q - P - H^-\|_{C^r(I(\eta))} < \varepsilon \text{)}.$$

**2.4. Remarques**

1. Le contenu du théorème n'est pas vide, car tout voisinage de  $f$  dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  coupe  $\mathcal{O}^+(p/q)$  et  $\mathcal{O}^-(p/q)$ ; en particulier, il existe des suites décroissantes  $(\lambda_N)_{N \geq 1}$ ,  $(\lambda'_N)_{N \geq 1}$  tendant vers 0, telles que pour tout  $N \geq 1$  on ait  $R_{\lambda_N} \circ f \in F_+^r\left(\frac{Np+j}{Nq+k}\right)$ ,  $R_{\lambda'_N} \circ f \in F_-^r\left(\frac{Np+j}{Nq+k}\right)$ .

2. On déduit du théorème un énoncé analogue en différentiabilité infinie, à condition de remplacer les normes par des distances définissant la  $C^\infty$ -topologie.

**2.5.** On démontre le théorème pour  $g \in \mathcal{O}^+(p/q)$ , le cas de  $\mathcal{O}^-(p/q)$  se traitant de manière entièrement analogue.

Soient  $U, V$  des primitives de  $1/X_0, 1/X_1$  sur  $(a, b)$  telles que  $H^+ = U^{-1} \circ V$ ; pour  $t \in (a, b)$ ,  $\tilde{t} = H^+(t)$ , on a donc :

$$(1) \quad \begin{aligned} DH^+(t) &= (DU(\tilde{t}))^{-1}DV(t) \\ &= X_0(\tilde{t})(X_1(t))^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part, la restriction de  $f^{-k} + j$  à  $(c, b)$  conjugue les restrictions de  $f^q - p$  à  $(c, b)$  et  $(a, d)$ ; ceci entraîne, pour tout  $t \in (c, b)$  :

$$(2) \quad Df^{-k}(t)X_0(t) = X_1(f^{-k}(t) + j).$$

En rassemblant (1) et (2), on obtient, pour tout  $t \in (a, b)$ , en posant  $\tilde{t} = H^+(t)$  :

$$(3) \quad DH^+(t) \frac{Df^{-k}(\tilde{t})}{X_1(f^{-k}(\tilde{t}) + j)} = (X_1(t))^{-1}.$$

**2.6.** Soit  $\eta$  un réel strictement positif, assez petit pour que  $a + \eta < b - \eta$ , et fixé dans la suite de la démonstration.

On choisit un réel  $\eta_1 \in (0, \eta)$  vérifiant :

- a)  $H^+(b - \eta) < b - \eta_1$ ;
- b)  $F^2(a + \eta_1) < b - 2\eta_1$ ;
- c)  $H^+$  a au moins un point fixe dans  $[a + \eta_1, b - \eta_1]$ .

Posons  $d_1 = f^{-k}\left(b - \frac{\eta_1}{2}\right) + j \in (b, d)$ . Il existe un réel  $\delta_1 > 0$  tel que si  $g \in D^r(\mathbb{T}^1)$  vérifie :

$$(4) \quad \|g - f\|_{C^r(\mathbb{T}^1)} < \delta_1,$$

alors on a :

- d)  $g^{2q}(a + \eta_1) - 2p < b - \eta_1$ ;
- e)  $g^{-k}(b - \eta_1) + j < d_1$ .

Soit  $g$  un difféomorphisme vérifiant la relation (4) et supposons que  $\rho(g) > p/q$ ; en notant  $G = g^q - p$ , on a donc  $G(t) > t$  pour tout réel  $t$  et  $G^2(a + \eta_1) < b - \eta_1$  d'après d); on en déduit :

f) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe des entiers  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $g^m(x) + n$  appartienne à  $[a + \eta_1, b - \eta_1]$ .

**2.7.** On note  $\mathcal{U}$  la partie de  $D^r(\mathbb{T}^1)$  formée de  $f$  et des difféomorphismes appartenant à  $\mathcal{O}^+(p/q)$  qui vérifient la relation (4). On note  $I$  l'intervalle  $[a + \eta_1, d_1]$ .

Soient  $g \in \mathcal{U}$  et  $G$  la restriction à  $I$  de  $g^q - p$ ; par la relation d),  $G$  appartient à l'espace  $\mathcal{D}^r(I)$  défini en IV.2.1 (plus précisément,  $G$  appartient à  $\mathcal{D}_+^r(I)$  si  $g \neq f$ , à  $\mathcal{D}_0^r(I)$  si  $g = f$ ). Par le théorème IV.2.5, on peut donc associer à  $G$  un champ de vecteurs  $X_g$  de classe  $C^1$  sur  $I$ , et  $X_g$  dépend continûment de  $g \in \mathcal{U}$  au sens du théorème IV.2.5.

Lorsque  $g \in \mathcal{U}$  n'est pas égal à  $f$ ,  $g^q - p$  n'a pas de points fixes; le champ  $X_g$  est alors de classe  $C^{r-1}$  sur  $I$  et on peut le prolonger en un champ de vecteurs strictement positif sur la droite réelle au moyen de la relation :

$$X_g(g^q(t) - p) = X_g(t) Dg^q(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $\frac{P}{Q} = \frac{Np+j}{Nq+k}$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) le nombre de rotation de  $g$ ; la relation précédente entraîne, pour tout réel  $t$  :

$$X_g(g^{Nq}(t) - Np) = X_g(t) Dg^{Nq}(t).$$

En posant  $\tilde{t} = g^Q(t) - P$ , on obtient finalement :

$$(5) \quad D(g^Q - P)(t) \frac{Dg^{-k}(\tilde{t})}{X_g(g^{-k}(\tilde{t}) + j)} = (X_g(t))^{-1}.$$

La restriction de  $F$  à  $I$  admet  $b$  pour point fixe; l'unicité dans ce cas du champ de vecteurs associé montre que  $X_f$  est la restriction de  $X_1$  à  $I$ .

**2.8.** Les relations (3) et (5) entraînent la conclusion du théorème, comme on va le voir en se plaçant dans une situation un peu plus générale.

Soient  $J = [A, B]$  un intervalle compact et  $\eta, \psi$  deux fonctions numériques de classe  $C^{r-1}$  strictement positives sur  $J$ . Notons  $\Psi$  la primitive de  $\psi$  sur  $J$  qui s'annule en  $A$ ; il existe alors une unique primitive  $\Theta$  de  $\theta$  sur  $J$  telle que  $\Psi - \Theta$  soit positive sur  $J$  mais s'y annule en au moins un point. Posons :

$$\Lambda = \Theta^{-1} \circ \Psi;$$

c'est un difféomorphisme de classe  $C^r$  et préservant l'orientation de l'intervalle  $[A, \Psi^{-1} \circ \Theta(B)] = [A, B_1]$  sur l'intervalle  $[\Theta^{-1}(0), B] = [A_1, B]$ ; il vérifie les propriétés suivantes :

- i)  $\Lambda(t) \geq t$ , pour tout  $t \in [A, B_1]$ ;
- ii)  $\Lambda$  a au moins un point fixe dans  $[A, B_1]$ ;
- iii)  $\theta(\Lambda(t))D\Lambda(t) = \psi(t)$ , pour tout  $t \in [A, B_1]$ .

Réciproquement, il est clair que ces conditions suffisent à déterminer  $\Lambda$ .

Si on prend deux autres fonctions  $\theta', \psi' \in C^{r-1}(J)$  proches de  $\theta, \psi$  pour la  $C^{r-1}$ -topologie, et on construit de manière analogue un difféomorphisme  $\Lambda'$  d'un intervalle  $[A, B'_1]$  sur un intervalle  $[A'_1, B]$ , on vérifie immédiatement que  $(\Lambda', [A, B'_1])$  est proche de  $(\Lambda, [A, B_1])$  pour la  $C^r$ -topologie au sens de IV.2.2.

Dans le cadre du théorème 2.3, prenons  $J = [a + \eta_1, b - \eta_1]$ ; pour  $g \in \mathcal{U}$ , définissons :

$$\theta_g = \left( \frac{Dg^{-k}}{X_g \circ (g^{-k} + j)} \right)_{/J}, \quad \psi_g = ((X_g)^{-1})/J.$$

Il résulte du théorème IV.2.5 (cf. 2.7) et de la relation e) de 2.6 que  $\theta_g, \psi_g$  sont de classe  $C^{r-1}$  et strictement positives sur  $J$ , et que ces fonctions dépendent continûment pour la  $C^{r-1}$ -topologie sur  $J$  de  $g$ .

Soient  $g \in \mathcal{U}$  et  $\Lambda_g$  le difféomorphisme associé à  $\theta_g, \psi_g$  comme dans le début du numéro. La relation (3), et la relation c) de 2.6, montrent que  $\Lambda_g$  est la restriction de  $H^+$  à l'intervalle  $[a + \eta_1, (H^+)^{-1}(b - \eta_1)]$ ; la relation a) de 2.6 montre que cet intervalle contient  $[a + \eta, b - \eta]$ .

Soient  $g \in \mathcal{U}$ ,  $g \neq f$  et  $P/Q$  son nombre de rotation; on a  $g^Q(t) - P \geq t$  pour tout réel  $t$ ; d'autre part la relation f) de 2.6 montre que  $J$  contient au moins un point fixe de  $g^Q - P$ . Pour la relation (5),  $\Lambda_g$  est donc la restriction de  $g^Q - P$  à l'intervalle  $[a + \eta_1, (\Lambda_g)^{-1}(b - \eta_1)]$ .

La continuité de l'application  $(\theta, \psi) \rightarrow \Lambda$  permet alors d'obtenir la conclusion du théorème. □

### 2.9. Tirons maintenant quelques conséquences du théorème 2.3.

Soit  $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme dont le nombre de rotation  $\alpha$  est irrationnel, et soit  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  la suite des réduites de  $\alpha$ . La suite  $(f^{q_n} - p_n)_{n \geq 0}$  tend vers l'identité pour la  $C^1$ -topologie (cf. VII.2).

COROLLAIRE. — *Génériquement dans  $F_I^\infty$ , on a :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|D^2 f^{q_n}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} = +\infty.$$

*Démonstration :* La fonction qui à  $f \in F_I^0$  associe le dénominateur de la réduite d'ordre  $n$  du nombre de rotation de  $f$  est localement constante sur  $F_I^0$ . Pour tout  $K > 0$ , la partie :

$$\mathcal{U}_K = \{f \in F_I^\infty \mid \sup_{n \geq 0} \|D^2 f^{q_n}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} > K\}$$

de  $F_I^\infty$  est donc ouverte dans  $F_I^\infty$  et il suffit de montrer qu'elle est dense.

Considérons comme en 2.3 un rationnel  $p/q$ , un difféomorphisme  $f \in \widehat{F}_+^\infty(p/q)$ , deux points fixes consécutifs  $a, b$  de  $f^q - p$ , et l'homéomorphisme  $H^+$  de  $[a, b]$  associé à  $f$ .

Supposons que l'invariant  $M(f)$  associé à  $f$  en VI.4.2 soit différent de  $m_0$  (la classe des translations dans  $M^\infty$ ); par le premier corollaire de VI.5.2, une telle hypothèse

est satisfaite pour un ouvert dense de  $\widehat{F}_+^\infty(p/q)$ , donc, lorsque  $p/q$  varie, par une partie dense de  $F^\infty$ . Pour montrer que  $\mathcal{U}_K$  est dense dans  $F_1^\infty$ , il suffit donc de prouver que  $f \in \overline{\mathcal{U}_K}$ .

Or, par V.1.8, on a, comme  $H^+$  est différent de l'identité :

$$\sup_{t \in (a,b)} |D^2 H^+(t)| = +\infty.$$

En appliquant le théorème 2.3, on voit donc qu'il existe des difféomorphismes  $g \in F^\infty$  arbitrairement proches de  $f$  dans  $D^\infty(\mathbb{T}^1)$  qui vérifient :

$$\|D^2 g^Q\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} > 2K,$$

$P/Q$  étant le nombre de rotation de  $g$ .

Pour tout difféomorphisme  $h \in F_1^\infty$  suffisamment voisin d'un tel  $g$ ,  $P/Q$  est une réduite du nombre de rotation de  $h$  et on a  $\|D^2 h^Q\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} > K$ , donc  $h \in \mathcal{U}_K$ . On en déduit que  $f \in \overline{\mathcal{U}_K}$ .  $\square$

**2.10.** Pour un homéomorphisme  $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , considérons la propriété suivante :

(P) "la fonction  $f - id \in C^0(\mathbb{T}^1)$  atteint son maximum en un seul point de  $\mathbb{T}^1$ "

Cette propriété est dense dans  $D^0(\mathbb{T}^1)$  (cf; [I.1.12]) et invariant pour l'action de  $\mathbb{R}^2$  définie en V.1.5 ; elle a donc un sens pour les éléments de l'espace quotient  $M^0$ .

Nous considérons dans la fin du paragraphe la situation suivante :  $p/q$  est un nombre rationnel,  $f$  un difféomorphisme appartenant à  $\widehat{F}_+^2(p/q)$ , tel que l'invariant  $M(f)$  associé en VI.4.2 possède la propriété (P).

Soient  $a, b$  deux points fixes consécutifs de  $f^q - p$ , et soit  $H^+$  l'homéomorphisme de  $[a, b]$  associé à  $f$  (cf. 2.3). Par V.1.9, la propriété (P) pour  $M(f)$  est équivalente à la propriété suivante de  $H^+$  : les points fixes de  $H^+$  dans  $(a, b)$  forment une orbite de  $f^q - p$ .

Lorsqu'on laisse  $a, b$  parcourir les paires de points fixes consécutifs de  $f^q - p$ , les différents homéomorphismes obtenus se recollent en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  encore noté  $H^+$  ; il est trivial de vérifier qu'il appartient à  $D^0(\mathbb{T}^1)$ .

**2.11. COROLLAIRE.** — *Sous les hypothèses précédentes, donnons-nous  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  possédant la propriété suivante : si  $g \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap D^2(\mathbb{T}^1)$  est un difféomorphisme (de nombre de rotation  $P/Q$ ) qui vérifie :*

$$\|g - f\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta,$$

*alors la distance de Hausdorff entre l'ensemble des points fixes de  $H^+$  et l'ensemble des points fixes de  $g^Q - P$  est moindre que  $\varepsilon$ .*

*Démonstration :* Les deux ensembles étant invariants par translations entières, il suffit d'estimer la distance de Hausdorff de leurs intersections avec un intervalle  $[a, b]$ ,  $a, b$  étant deux points fixes consécutifs de  $f^q - p$ .

Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $\eta > 0$  assez petit pour avoir :

- i)  $0 < \eta < \varepsilon/4$ ;
- ii)  $f^{2q}(a + 2\theta) - 2p \leq b - 3\eta$ .

L'intervalle  $[a + \eta, b - \eta]$  contient alors au moins deux points fixes de  $H^+$ ; soient  $y$  le plus petit d'entre eux, et  $z = f^{Mq}(y) - Mp$  le plus grand ( $M \in \mathbb{N}^*$ ).

On choisit  $\eta_1 > 0$  suffisamment petit pour que les hypothèses :

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{Z}, |n| \leq M + 1 \\ x, x' \in \mathbb{R}, |x - x'| < \eta_1 \end{aligned}$$

impliquent l'estimation :

$$|f^{nq}(x) - f^{nq}(x')| < \eta.$$

(En particulier, on a  $\eta_1 \leq \eta$  : c'est le cas  $n = 0$ .)

On choisit  $\varepsilon_1 > 0$  assez petit pour avoir la propriété suivante : si  $x \in [a + \eta, b - \eta]$  vérifie  $|H^+(x) - x| < \varepsilon_1$ , alors il existe un point fixe  $x_0$  de  $H^+$  tel que  $|x - x_0| < \eta_1$ .

On choisit enfin  $\delta > 0$  suffisamment petit pour avoir la propriété suivante : si  $g \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap D^2(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\|g - f\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta$ , alors on a, en notant  $P/Q$  le nombre de rotation de  $g$  :

- iii)  $\|g^Q - P - H^+\|_{C^0([a+\eta, b-\eta])} < \varepsilon_1$ ,
- iv)  $\|g^{nq} - f^{nq}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} < \eta$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}, |n| \leq M + 1$ .

Donnons-nous alors un difféomorphisme  $g \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap D^2(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  $\|g - f\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta$ , et soit  $P/Q$  son nombre de rotation.

Par iv) (avec  $n = 2$ ) et ii), on a :

$$g^{2q}(a + 2\eta) - 2p \leq b - 2\eta$$

donc l'intervalle  $[a + 2\eta, b - 2\eta]$  contient au moins un point fixe de  $g^Q - P$ .

Soit  $x \in [a, b]$  un point fixe de  $g^Q - P$ ; si  $x \notin [a + \eta, b - \eta]$ , on a :

$$\text{Min}(|x - a|, |x - b|) < \eta < \varepsilon/4,$$

et  $a, b$  sont des points fixes de  $H^+$ . Si  $x \in [a + \eta, b - \eta]$ , on a iii) :

$$|H^+(x) - x| < \varepsilon_1,$$

donc il existe un point fixe  $x_0$  de  $H^+$  tel que  $|x - x_0| < \eta_1 \leq \eta < \varepsilon/4$ .

Réciproquement, soit  $x_0 \in [a, b]$  un point fixe de  $H^+$ , et  $x_1$  un point fixe de  $g^Q - P$  dans l'intervalle  $[a + 2\eta, b - 2\eta]$ . On vient de voir qu'il existe un point fixe  $x'_0$  de  $H^+$  tel que  $|x_1 - x'_0| < \eta_1$ . Comme  $\eta_1 \leq \eta$ , le point  $x'_0$  appartient à  $[a + \eta, b - \eta]$ ; donc le point  $s_0 = f^{(M+1)q}(x'_0) - (M + 1)p$  appartient à  $[b - \eta, b)$  et le point  $t_0 = f^{-(M+1)q}(s'_0) + (M + 1)p$  appartient à  $(a, a + \eta)$  (par définition de  $M$ ). Posons :

$$s_1 = g^{(M+1)q}(x_1) - (M + 1)p,$$

$$t_1 = g^{-(M+1)q}(x_1) + (M + 1)p;$$

le choix de  $\eta_1$  et la relation iv) montrent qu'on a :

$$|s_1 - s_0| < 2\eta,$$

$$|t_1 - t_0| < 2\eta.$$

De plus  $s_1$  et  $t_1$  sont des points fixes de  $g^Q - P$ .

Si  $x_0 \notin [a + \eta, b - \eta]$ , on a

$$\text{Inf}(|x_0 - s_1|, |x_0 - t_1|) < 3\eta < \varepsilon.$$

Si  $x_0 \in [a + \eta, b - \eta]$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $|n| \leq M$  tel que  $x_0 = f^{nq}(x'_0) - np$  (cela résulte de la définition de  $M$  et du fait que  $M(f)$  possède la propriété (P)). En posant  $u_1 = g^{nq}(x_1) - np$ , on a alors, comme précédemment :

$$|x_0 - u_1| < 2\eta,$$

et  $u_1$  est un point fixe de  $g^Q - P$ . □

2.12. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de 2.10, on se donne  $\varepsilon > 0$ . Il existe un réel  $K > 0$  et un réel  $\delta > 0$  possédant les propriétés suivantes : soient  $g \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap D^2(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme,  $P/Q$  son nombre de rotation,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ ; supposons que ces données vérifient :*

i)  $\|g - f\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} \leq \delta,$

ii) *les distances de  $y$  et  $g^\ell(y)$  à l'ensemble des points fixes de  $H^+$  sont plus grandes que  $\varepsilon$ ;*

*alors on a les conclusions suivantes :*

a) *il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $|m| \leq K$  et  $Q$  divise  $\ell - m$ ;*

b)  $|\ell| \leq KQ.$

*Démonstration :* Soient  $a < b$ ,  $a' < b'$  deux couples de points fixes consécutifs de  $f^q - p$ . Les points fixes de  $H^+$  appartenant à  $(a, b)$  forment exactement une orbite de  $f^q - p$ . D'autre part il existe d'uniques entiers  $i \in [0, q]$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  tels que  $(f^i + j)([a, b]) = [a', b']$ ; de plus  $(f^i + j)$  conjugue les restrictions de  $f^q - p$  à  $[a, b]$  et  $[a', b']$ , donc commute avec  $H^+$ , donc préserve l'ensemble des points fixes de  $H^+$ .

Soient  $x_0, x_1$  deux points fixes de  $H^+$  qui ne sont pas fixés par  $f^q - p$ ; il résulte de ce qui précède qu'il existe d'uniques entiers  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $f^m(x_0) + n = x_1$ . De plus  $m$  est borné en valeur absolue par une constante qui ne dépend que de  $f$  et de la distance de  $x_0, x_1$  aux points fixes de  $f^q - p$ .

Donnons-nous  $\varepsilon, g, P/Q, y, \ell$  comme dans l'énoncé du corollaire; on note  $\delta = \|g - f\|_{C^2(\mathbb{T}^1)}$  et on suppose que l'hypothèse ii) du corollaire est satisfaite.

On note  $c, d$  (resp.  $c', d'$ ) les points fixes consécutifs de  $H^+$  tels que  $y \in [c + \varepsilon, d - \varepsilon]$  (resp.  $g^\ell(y) \in [c' + \varepsilon, d' + \varepsilon]$ ); par ce qui précède, il existe une constante  $K_0$ , ne dépendant que de  $\varepsilon$  et  $f$ , et des entiers  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $|m| \leq K_0$ ,  $c' = f^m(c) + n$ ,  $d' = f^m(d) + n$ .

On peut alors choisir un réel  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ , ne dépendant que de  $\varepsilon$  et  $f$ , tel que :

$$(f^m + n)([c + \varepsilon, d - \varepsilon]) \subset [c' + 2\varepsilon_1, d' - 2\varepsilon_1];$$

si  $\delta$  est assez petit, on a donc :

$$g^m(y) + n \in [c' + \varepsilon_1, d' - \varepsilon_1].$$

D'autre part, par le corollaire 2.11, l'intervalle  $[c' + \varepsilon_1, d' - \varepsilon_1]$  ne contient pas de points fixes de  $g^Q - P$  si  $\delta$  est assez petit ; or les points  $g^\ell(y), g^m(y) + n$  appartiennent à cet intervalle. L'entier  $m - \ell$  est donc divisible par  $Q$ , ce qui démontre la partie a) de la conclusion du corollaire.

Posons  $z = g^m(y) + n, t = g^\ell(y), \ell - m = sQ$  ; on a donc  $z, t \in [c' + \varepsilon_1, d' - \varepsilon_1]$ , et  $t = g^{sQ}(z) - sP$ .

Il existe un entier  $K_1$ , ne dépendant que de  $\varepsilon_1$  et  $f$ , tel que l'on ait :

$$(H^+)^{K_1}(c' + \varepsilon_1) > d' - \varepsilon_1/2,$$

$$(H^+)^{-K_1}(d' - \varepsilon_1) < c' + \varepsilon_1/2;$$

en effet, ceci est trivial si on permet à  $K_1$  de dépendre de  $c'$  et  $d'$  ; d'autre part, à translations entières près, seul un nombre fini de choix de points fixes consécutifs  $c' < d'$  de  $H^+$  vérifie  $|d' - c'| \geq \frac{3\varepsilon_1}{2}$  (pour les autres  $K_1 = 0$  convient).

D'après le théorème 2.3, si  $\delta$  est assez petit, on aura :

$$g^{K_1Q}(c' + \varepsilon_1) - K_1P > d' - \varepsilon_1,$$

$$g^{-K_1Q}(d' - \varepsilon_1) + K_1P < c' + \varepsilon_1;$$

ceci entraîne qu'on doit avoir  $|s| < K_1$ , donc  $|\ell| \leq |m| + |s|Q \leq K_0 + K_1Q$  ; la démonstration du corollaire est donc complète.  $\square$

### 3. Construction d'un exemple à centralisateur trivial

3.1. Ce dernier paragraphe est consacré à la démonstration du résultat suivant :

**THÉORÈME.** — *Il existe un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ , de nombre de rotation irrationnel, tel que le centralisateur de  $f$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  soit réduit au groupe des itérés de  $f$ .*

#### 3.2. Remarques :

1. Il ressortira clairement de la démonstration du théorème 3.1 que l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ , de nombre de rotation irrationnel, tels que  $Z_2(f) = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$  est même dense (pour la  $C^\infty$ -topologie) dans  $F_I^\infty$ .

2. Comme le groupe des itérés de  $f \in F_I^\infty$  n'est jamais discret pour la  $C^1$ -topologie (cf. VII.2) on ne peut remplacer  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  par  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  dans l'énoncé du théorème.

3. Le théorème 3.1 complète les résultats obtenus en VII.2 et VII.3 ; en particulier, l'ensemble des  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , tels qu'il existe  $f \in F_\alpha^\infty$  satisfaisant aux conclusions du théorème 3.1, est maigre ; typiquement, ce sont des nombres de Liouville dont **toutes** les réduites sont de très bonnes approximations, un phénomène qui n'est pas générique.

4. Il résulte du théorème 3.1 que les conclusions du théorème 1.1 ne peuvent être que génériques ; il existe des difféomorphismes  $g \in F_+^\infty$  tels que  $Z_\infty(g) \neq Z_\infty^0(g)$ .

En effet, soient  $f$  un difféomorphisme satisfaisant aux conclusions du théorème 3.1, et  $g = f^2$  ; le groupe des itérés de  $g$  est discret dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  (et même dans  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$ ), alors que le centralisateur de  $g$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  est le groupe des itérés de  $f$ .

**3.3.** On rappelle qu'on note  $\mathcal{F}^\infty$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  qui ont exactement une orbite périodique et dont le centralisateur dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  est réduit aux itérés de  $f$  (cf. 1.7).

D'autre part on notera  $\mathcal{G}^\infty$  l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  qui vérifient les hypothèses de 2.10 : il existe alors  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  tel que  $f \in \widehat{F}_+^\infty(p/q)$ , et l'invariant  $M(f)$  associé en VI.4.2 possède la propriété (P) de 2.10.

Comme la propriété (P) est dense dans  $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ , il résulte du premier corollaire de VI.5.2 que  $\mathcal{G}^\infty \cap F_+^\infty(p/q)$  est dense dans  $\widehat{F}_+^\infty(p/q)$  (donc aussi dans  $F_+^\infty(p/q)$ ) pour tout  $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ; donc  $\mathcal{G}^\infty$  est dense dans  $F^\infty$ .

D'autre part il est clair que  $\mathfrak{F}^\infty$  contient  $\mathcal{G}^\infty$ .

**3.4.** Le résultat qui suit est l'ingrédient principal de la démonstration du théorème 3.1. Il est à rapprocher du théorème 1.2.

**THÉORÈME.** — Soient  $f \in \mathcal{G}^\infty$ ,  $p/q$  son nombre de rotation, et  $B$  une partie bornée de  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$ .

Il existe un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , puis, pour  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , un réel  $\delta > 0$ , et enfin, pour tout  $f_1 \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  $\|f - f_1\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta$ , un réel  $\theta > 0$  qui possèdent les propriétés suivantes : soit  $g \in B$  un difféomorphisme qui commute avec un difféomorphisme  $f' \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  vérifiant :

$$\|f_1 - f'\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \theta ;$$

alors, il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  vérifiant :

$$\|g - f^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon ,$$

$$\|g - f_1^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon ,$$

et  $k$  est l'unique entier vérifiant l'une quelconque de ces deux relations.

**3.5. Remarque :** le point crucial du théorème est l'**unicité** de l'entier  $k$ , avec  $\varepsilon_0$  **ne dépendant pas de  $f_1$**  ; sans cela, le théorème 3.4 résulterait facilement du théorème 1.2 et de la remarque 1.3.

**3.6.** Montrons d'abord comment déduire le théorème 3.1 du théorème 3.4.

On garde les notations du théorème 3.4, mais on explicite les dépendances ; on écrit donc  $\varepsilon_0(f, B)$  au lieu de  $\varepsilon_0$ ,  $\delta(\varepsilon, f, B)$  au lieu de  $\delta$ ,  $\theta(f_1, \varepsilon, f, B)$  au lieu de  $\theta$ .

On fixe d'autre part une suite croissante  $(B_i)_{i \geq 1}$  de parties bornées de  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  dont l'union est égale à  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$ .

On fixe aussi une distance  $d_\infty$  sur  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  qui définit la  $C^\infty$ -topologie.

LEMME. — Soient  $f$  un difféomorphisme dans  $\mathfrak{G}^\infty$ , et  $\delta_0$  un réel strictement positif. Il existe une suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathfrak{G}^\infty$  telle que  $f_1 = f$ , et deux suites  $(\delta_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs, qui vérifient pour tout  $n \geq 1$  les relations suivantes (où on note  $p_n/q_n$  le nombre de rotation de  $f_n$ ) :

- 1)  $\varepsilon_n < \text{Min}(2^{-n}, \varepsilon_0(f_n, B_n))$  ;
- 2)  $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$  ;
- 3)  $\delta_n < \text{Min}\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}, \delta(\varepsilon_n, f_n, B_n)\right)$  ;
- 4)  $\delta_n < \frac{1}{2}\theta(f_n, \varepsilon_{n-1}, f_{n-1}, B_{n-1})$  ;
- 5)  $f_n \in \mathcal{O}^+\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \cap \mathfrak{G}^\infty$  ;
- 6)  $d_\infty(f_{n-1}, f_n) < \delta_{n-1}$  ;  $\|f_n - f_{n-1}\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta_{n-1}$  ;
- 7)  $|(p_n/q_n) - (p_{n-1}/q_{n-1})| = \left|\frac{1}{q_n q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ .

*Démonstration* : On construit les suites et vérifie les relations par induction sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , les relations 2), 4), 5), 6), 7) sont vides, puisque  $f_0$  et  $\varepsilon_0$  ne sont pas définis ; on prend  $f_1 = f$ , puis on choisit  $\varepsilon_1 > 0$  de manière à vérifier la relation 1), et on choisit enfin  $\delta_1 > 0$  de manière à vérifier la relation 3).

Soit  $n \geq 2$  ; supposons que les suites  $(f_i)$ ,  $(\varepsilon_i)$ ,  $(\delta_i)$  sont définies jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , et que les relations 1), ..., 7) sont vérifiées jusqu'à cet ordre. Comme  $\mathfrak{G}^\infty$  est dense dans  $\widehat{F}_+^\infty(P/Q)$  pour tout  $P/Q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , on peut choisir  $f_n$  de façon à vérifier les relations 5), 6) et 7). On choisit ensuite  $\varepsilon_n > 0$  de manière à vérifier les relations 1) et 2), et on choisit enfin  $\delta_n > 0$  de manière à vérifier les relations 3) et 4).  $\square$

**3.7.** Soient  $f \in \mathfrak{G}^\infty$ ,  $\delta_0 > 0$ , et  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  les suites données par le lemme 3.6.

Les relations 6) et 3) montrent que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  vers un difféomorphisme  $f'$  qui vérifie, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} 8) \quad & \|f' - f_n\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < 2\delta_n, \\ & d_\infty(f', f_n) < 2\delta_n. \end{aligned}$$

Il résulte de la relation 7) que le nombre de rotation de  $f'$  est irrationnel.

Soit  $g$  un difféomorphisme de classe  $C^2$  qui commute avec  $f'$  ; il existe un entier  $n_0$  tel que  $g \in B_n$  pour tout  $n \geq n_0$ . Soit  $n > n_0$  ; il résulte des relations 1) et 3) à l'ordre  $(n - 1)$  et des relations 4), 5), 6) et 8) à l'ordre  $n$  qu'on peut appliquer le théorème 3.4 ; il existe donc un entier  $k_n \in \mathbb{Z}$  vérifiant :

$$\|g - f_{n-1}^{k_n}\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_{n-1},$$

$$\|g - f_n^{k_n}\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_{n-1},$$

et  $k_n$  est l'unique entier satisfaisant à l'une de ces deux relations ; de même il existe  $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$  vérifiant :

$$\|g - f_n^{k_{n+1}}\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_n,$$

$$\|g - f_{n+1}^{k_{n+1}}\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_n.$$

Comme on a  $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$  (cf; relation 2)), l'unicité de  $k_n$  montre que  $k_n = k_{n+1}$ . Posons  $k = k_{n_0+1} = k_n$ , pour tout  $n > n_0$ . On a alors, pour tout  $n > n_0$  :

$$\|g - f_n^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_{n-1};$$

ceci implique, par les relations 1) et 8), qu'on a  $g = (f')^k$ .

Le centralisateur de  $f'$  dans  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  est donc réduit aux itérés de  $f'$ . La démonstration du théorème 3.1 est donc complète.

Observons qu'on a  $d_\infty(f, f') < \delta_0$  par les relations 8) et 3) à l'ordre 1, ce qui justifie l'assertion de densité dans la remarque 1 de 3.2.  $\square$

### 3.8. Démonstration du théorème 3.4

Soient  $f \in \mathcal{G}^\infty$  et  $B$  une partie bornée de  $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$ . Notons  $p/q$  le nombre de rotation de  $f$ .

D'après le théorème 1.2 et la remarque 1.3, il existe des réels  $\varepsilon_1, K_1$  et une application  $\delta_1 = (0, \varepsilon_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  ayant les propriétés suivantes : si  $\varepsilon > 0$  et  $f' \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  vérifient :

$$\varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad \|f - f'\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} \leq \delta_1(\varepsilon),$$

alors, pour tout  $g \in B$  commutant avec  $f'$ , il existe un **unique** entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\|g - f^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon,$$

et on a  $|k| \leq K_1$ .

**3.9.** On suppose que  $f$  vérifie les hypothèses de 2.10; on note encore  $H^+$  l'homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  qui lui est associé. Notons  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) l'ensemble des points fixes de  $f^q$  (resp.  $H^+$ ).

On choisit et fixe dans la suite deux points consécutifs  $c, d$  de  $N_2 - N_1$  (de sorte qu'on a  $d = f^q(c)$ ), ainsi qu'un point  $x_0 \in (c, d)$ .

D'autre part, on choisit une constante  $A > 1$  telle qu'on ait, pour tout  $g \in B$  :

$$\text{Max}(\|Dg\|_{C^0(\mathbb{T}^1)}, \|Dg^{-1}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)}) < A.$$

On définit  $\varepsilon_2 > 0$  par la relation :

$$\text{Min}(|H^+(x_0) - x_0|, |(H^+)^{-1}(x_0) - x_0|) = 5A\varepsilon_2.$$

Il existe alors des réels  $\eta, \varepsilon_3 > 0$  possédant les propriétés suivantes (où on note  $D$  la distance usuelle sur  $\mathbb{T}^1$ ) :

- a) si  $c', d' \in \mathbb{T}^1$  vérifient  $d' = f^q(c')$ ,  $|d' - c'| \geq \varepsilon_2$ , alors on a  $D(c', N_1) > \eta$ ,  $D(d', N_1) > \eta$ ;
- b) si  $y \in \mathbb{T}^1$  vérifie  $|H^+(y) - y| > \varepsilon_2$ , alors on a  $D(y, N_2) > 2\varepsilon_3$ .

**3.10.** Ceci étant, appliquons le corollaire 2.12, avec  $\varepsilon = \varepsilon_3$ ; il existe donc des réels  $K_2, \delta_2 > 0$  possédant la propriété suivante : si  $f_1 \in \mathcal{O}^+(p/q) \cup \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$ , de nombre

de rotation  $P/Q$ , vérifie  $\|f - f_1\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta_2$ , et si  $y \in \mathbb{T}^1$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$  sont tels que  $d(y, N_2) > \varepsilon_3$ ,  $d(f_1^\ell(y), N_2) > \varepsilon_3$ , alors il existe des entiers  $m, n \in [-K_2, +K_2]$  tels que  $\ell = m + nQ$ .

On peut évidemment supposer que  $K_2 > K_1 > 1$ .

**3.11.** On a vu au début de la démonstration du corollaire 2.12 que le groupe des itérés de  $f$  permute fidèlement (et transitivement) les composantes connexes de  $\mathbb{T}^1 - N_2$ . D'autre part, la restriction de  $H^+$  à  $[c, d]$  est distincte de l'identité, car  $f \in \mathfrak{G}^\infty$ . Par conséquent, les restriction à  $[c, d]$  des applications  $f^m(H^+)^n$ , lorsque  $m$  et  $n$  décrivent  $\mathbb{Z}$ , sont distinctes les unes des autres; on peut donc choisir  $\varepsilon_4 > 0$  de façon que les relations :

$$\begin{aligned} \|f^m(H^+)^n - f^{m'}(H^+)^{n'}\|_{C^1([c,d])} &\leq 4\varepsilon_4, \\ |n| \leq K_2, \quad |m| \leq K_2, \quad |m'| \leq K_2, \quad |n'| \leq K_2, \end{aligned}$$

impliquent  $m = m', n = n'$ .

**3.12.** Tous les choix faits jusqu'ici ne dépendent que de  $f$  et de  $B$  (et des choix arbitraires de  $c, d, x_0$ ). Posons :

$$\varepsilon_0 = \text{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4).$$

**3.13.** Soit  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , qu'on fixe dans la suite.

Il existe alors un réel  $\delta_3 > 0$  tel que l'estimation  $\|f - f_1\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \delta_3$ , pour  $f_1 \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$ , implique les estimations :

$$c) \|f^k - f_1^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout entier  $k \in [-K_1, +K_1]$ .

D'autre part, il résulte du théorème 2.3 et du corollaire 2.11 qu'on peut choisir un réel  $\delta_4 > 0$  ayant les propriétés suivantes : si  $f_1 \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\|f - f_1\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta_4$ , alors :

d) la distance de Hausdorff de l'ensemble des points périodiques de  $f_1$  à  $N_2$  est moindre que  $\varepsilon_2$ ;

e) soit  $P/Q$  le nombre de rotation de  $f_1$ ; pour  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $|m| \leq K_2$ ,  $|n| \leq K_2$ , on a :

$$\|f^m(H^+)^n - f_1^{m+nQ}\|_{C^1([c,d])} < \text{Min}(\varepsilon_4, \varepsilon_2 A^{-1});$$

f) pour tout  $y \in \mathbb{T}^1$  tel que  $d(y, N_1) \geq \eta$ , on a  $|f_1^Q(y) - H^+(y)| < \varepsilon_2$ .

**3.14.** Posons  $\delta = \text{Min}(\delta_2, \delta_3, \delta_4, \frac{1}{2}\delta_1(\frac{\varepsilon}{2}), \frac{1}{2}\delta_1(\varepsilon))$ , et fixons dans la suite un difféomorphisme  $f_1 \in \mathcal{O}^+(p/q) \cap \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  tel que  $\|f - f_1\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \delta$ .

Notons  $P/Q$  son nombre de rotation.

On choisit un réel  $\theta > 0$  tel que :

$$h) \theta < \text{Min}\left(\frac{1}{2}\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \frac{1}{2}\delta_1(\varepsilon)\right);$$

i) si  $f' \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\|f' - f_1\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} < \theta$ , alors on a

$$\|f'^Q - f_1^Q\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_2 A^{-1} \quad \text{et} \quad \|f'^{-Q} - f_1^{-Q}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon_2 A^{-1}.$$

**3.15.** Soient  $f' \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T}^1)$  un difféomorphisme vérifiant  $\|f' - f_1\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} < \theta$ , et  $g \in B$  un difféomorphisme commutant avec  $f'$ .

Par 3.14, on a :

$$\begin{aligned} \|f - f'\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} &\leq \|f - f_1\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} + \|f_1 - f'\|_{C^2(\mathbb{T}^1)} \\ &< \delta + \theta \leq \text{Min}\left(\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \delta_1(\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

Il résulte alors de 3.8 qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\|g - f^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \frac{\varepsilon}{2};$$

de plus, on a  $|k| \leq K_1$ , et  $k$  est l'unique entier vérifiant :

$$\|g - f^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon.$$

On déduit de la relation ci-dessus et de la relation c) de 3.13 qu'on a :

$$\|g - f_1^k\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon.$$

Il reste à montrer que  $k$  est l'unique entier satisfaisant à cette relation. Supposons donc que  $\ell \in \mathbb{Z}$  vérifie :

$$\|g - f_1^\ell\|_{C^1(\mathbb{T}^1)} < \varepsilon.$$

On commence par estimer  $|f_1^Q(g(x_0)) - g(x_0)|$ ; on a :

$$\begin{aligned} |f_1^Q(g(x_0)) - f'^Q(g(x_0))| &\leq \varepsilon_2 A^{-1}, \\ |g(f'^Q(x_0)) - g(f_1^Q(x_0))| &\leq \varepsilon_2 A^{-1} \|Dg\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} \leq \varepsilon_2, \quad \text{par 3.14;} \\ |g(f_1^Q(x_0)) - g(H^+(x_0))| &\leq \varepsilon_2 A^{-1} \|Dg\|_{C^0(\mathbb{T}^1)} \leq \varepsilon_2, \quad \text{par 3.13.e);} \\ |g(H^+(x_0)) - g(x_0)| &\geq \|Dg^{-1}\|_{C^0(\mathbb{T}^1)}^{-1} |H^+(x_0) - x_0| \geq 5\varepsilon_2. \end{aligned}$$

On en tire :

$$|f_1^Q(g(x_0)) - g(x_0)| \geq 2\varepsilon_2;$$

on obtient de même :

$$|f_1^{-Q}(g(x_0)) - g(x_0)| \geq 2\varepsilon_2.$$

Soient  $c'', d''$  les points fixes consécutifs de  $f_1^Q$  tels que  $g(x_0) \in (c'', d'')$ ; par ce qui précède, on a  $|d'' - g(x_0)| \geq 2\varepsilon_2$ ,  $|c'' - g(x_0)| \geq 2\varepsilon_2$ . Par la propriété d) de 3.13, le point  $g(x_0)$  n'appartient pas à  $N_2$ , et les points consécutifs  $c', d'$  de  $N_2$  tels que  $g(x_0) \in (c', d')$  vérifient  $|c' - d'| \geq 2\varepsilon_2$ ; comme d'autre part on a  $d' = f^q(c')$ , on déduit de la propriété a) de 3.9 qu'on a  $D(c', N_1) > \eta$ ,  $D(d', N_1) > \eta$ , donc  $D(g(x_0), N_1) > \eta$ .

Il résulte alors de la propriété f) de 3.13 qu'on a  $|H^+(g(x_0)) - f_1^Q(g(x_0))| \leq \varepsilon_2$ , donc :

$$|H^+(g(x_0)) - g(x_0)| \geq \varepsilon_2.$$

Par les propriétés b) de 3.9, on a  $D(g(x_0), N_2) > 2\varepsilon_3$ , et en utilisant l'hypothèse sur  $\ell$ , on en déduit  $D(f_1^\ell(x_0), N_2) > \varepsilon_3$  (car  $\varepsilon < \varepsilon_3$ ); de même, on a  $|H^+(x_0) - x_0| > \varepsilon_2$ , donc  $D(x_0, N_2) > 2\varepsilon_3$ .

Appliquant le corollaire 2.12 (car  $\delta < \delta_2$ ), on voit qu'il existe des entiers  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $|m| \leq K_2, |n| \leq K_2$  et  $\ell = m + nQ$ .

Par la propriété e) de 3.13, on a :

$$\|f_1^{m+nQ} - f^m(H^+)^n\|_{C^1([c,d])} < \varepsilon_4.$$

D'autre part, on a par hypothèse :

$$\|f - g\|_{C^1([c,d])} < \varepsilon < \varepsilon_4,$$

$$\|f_1^k - g\|_{C^1([c,d])} < \varepsilon < \varepsilon_4.$$

On obtient donc :

$$\|f^m(H^+)^n - f^k\|_{C^1([c,d])} < 3\varepsilon_4.$$

Par définition de  $\varepsilon_4$ , on conclut que  $n = 0, m = k$ , d'où  $\ell = k$  (car  $|k| \leq K_1 < K_2$ ).

□



## APPENDICE 1

### SUR LA DISPARITION DE LA PROPRIÉTÉ DE DENJOY-KOKSMA EN DIMENSION 2

1. Soit  $X$  un espace compact,  $f$  un homéomorphisme minimal uniquement ergodique de  $X$ , de mesure invariante  $\mu$ . Pour toute fonction continue  $\varphi$  sur  $X$ , et  $n \geq 1$ , posons :

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)), \quad x \in X.$$

Alors la suite de fonctions  $\left(\frac{\varphi_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers l'intégrale  $\int \varphi d\mu$ .

Lorsque  $X = \mathbb{T}^1$ ,  $f_1 = R_\alpha$  est une rotation irrationnelle, et  $\varphi$  est une fonction à variation bornée sur  $\mathbb{T}^1$ , on peut, pour certaines valeurs de  $n$ , obtenir une meilleure estimation de  $\varphi_n$  : c'est l'inégalité de Koksma que nous rappelons ci-dessous ; elle joue un rôle fondamental dans l'étude des difféomorphismes du cercle.

**INÉGALITÉ DE KOKSMA** (cf. [K-N], [H1, VI.3]). — Soit  $\varphi$  une fonction à variation bornée sur  $\mathbb{T}^1$ ,  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  et  $p/q$  un rationnel qui vérifie  $|\alpha - (p/q)| < 1/q^2$ . On a alors :

$$\left| \sum_{i=0}^{q-1} \varphi(x + i\alpha) - q \int_{\mathbb{T}^1} \varphi(\theta) d\theta \right| \leq \text{Var}(\varphi),$$

pour tout  $x \in \mathbb{T}^1$ , où  $\text{Var}(\varphi)$  désigne la variation totale de  $\varphi$  sur  $\mathbb{T}^1$ .

Le but de cet appendice est de montrer qu'un tel phénomène ne persiste pas lorsque  $X = \mathbb{T}^n$ ,  $n \geq 2$  et  $f$  est une rotation minimale de  $\mathbb{T}^n$ . Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant, annoncé partiellement dans [Y].

**THÉORÈME.** — Soit  $\theta$  une fonction croissante et non bornée de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Il existe une rotation minimale  $f = R_{\alpha_0, \alpha_1}$  de  $\mathbb{T}^2 = X$ , une fonction analytique réelle  $\varphi$ , à valeurs complexes et d'intégrale nulle sur  $\mathbb{T}^2$ , et un ensemble borélien  $\Omega$  de  $\mathbb{T}^2$ , de mesure de Lebesgue pleine, ayant les propriétés suivantes :

pour tout  $(x_0, x_1) \in \Omega$ , il existe un entier  $n_0 = n_0(x_0, x_1)$  tel qu'on ait, pour  $n \geq n_0$  :

$$|\varphi_n(x_0, x_1)| \geq \frac{n}{\theta(n)}.$$

**Remarque :** Il est impossible d'obtenir le même résultat avec une fonction à valeurs réelles : cela résulte d'un résultat classique de théorie ergodique valable dans un cadre beaucoup plus général. Nous donnons seulement l'idée de la démonstration pour la commodité du lecteur : s'il existait un ensemble  $A \subset \mathbb{T}^2$  de mesure positive et un entier  $n_0$  tels que  $\varphi_n(x_0, x_1) > 1$  pour  $(x_0, x_1) \in A$ ,  $n \geq n_0$ , on pourrait construire une partie  $B$  de  $A$ , de mesure positive, telle que les temps de retour par  $f$  dans  $B$  soient supérieurs à  $n_0$ .

On obtiendrait une estimation de  $\varphi_n(x_0, x_1)$ ,  $(x_0, x_1) \in B$ , en contradiction avec le théorème ergodique de Birkhoff.

Il est cependant possible d'obtenir le résultat suivant (cf. 6. Remarque) : étant donnée une fonction  $\theta$  croissante et non bornée de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , il existe une rotation minimale  $f = R_{\alpha_0, \alpha_1}$  de  $\mathbb{T}^2$  et une fonction analytique réelle à valeurs réelles  $\psi$ , d'intégrale nulle sur  $\mathbb{T}^2$ , tels qu'on ait, pour tout  $n$  assez grand :

$$\|\psi_n\|_{C^0(\mathbb{T}^2)} \geq \|\psi_n\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \geq \frac{n}{\theta(n)}.$$

2. On se donne dans la suite une fonction strictement croissante  $\rho$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$ , qui vérifie  $\rho(n) \geq 2n$  pour  $n \geq 1$ . On imposera ultérieurement des conditions supplémentaires sur la croissance de  $\rho$ .

On définit alors une suite d'entiers  $(A_k)_{k \geq 1}$  par les relations  $A_1 = 1$ ,  $A_{k+1} = \rho(A_k)$ .

Considérons l'ensemble  $B(\rho)$  (resp.  $B'(\rho)$ ) formé par les nombres irrationnels dont la suite  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  des réduites vérifie :

$$(1) \quad 2A_{4k} \leq q_k \leq 3A_{4k}, \quad k \geq 1;$$

$$\text{(resp. (1'))} \quad 2A_{4k+2} \leq q_k \leq 3A_{4k+2}, \quad k \geq 1).$$

LEMME. — *Les ensembles  $B(\rho)$  et  $B'(\rho)$  ont la puissance du continu.*

*Démonstration* : L'ensemble  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  est en correspondance avec l'ensemble des suites d'entiers strictement positifs  $(q_n)_{n \geq 0}$  qui vérifient :

$$(2) \quad q_0 = 1; \quad (q_k - q_{k-2})q_{k-1}^{-1} \in \mathbb{N}^* \quad \text{pour } k \geq 2.$$

Il suffit donc de prouver que l'ensemble des suites d'entiers strictement positifs vérifiant (1) et (2) (resp. (1') et (2)) a la puissance du continu.

Soient  $q_0, \dots, q_k \in \mathbb{N}^*$  tels que (1) et (2) soient vérifiées jusqu'à l'ordre  $k$ . Pour que  $q_{k+1}$  vérifie (1) et (2) à l'ordre  $k+1$ , il faut et il suffit que  $q_{k+1} = aq_k + q_{k-1}$ , avec  $a \in \mathbb{N}^*$  et :

$$a \in I = [(2A_{4k+4} - q_{k-1})q_k^{-1}, (3A_{4k+4} - q_{k-1})q_k^{-1}].$$

La longueur de  $I$  est  $A_{4k+4}q_k^{-1} \geq \frac{1}{3}A_{4k+4}A_{4k}^{-1} > 5$ , et son extrémité gauche est strictement positive; il y a donc au moins cinq façons de choisir  $q_{k+1}$  de manière à vérifier (1) et (2) à l'ordre  $k+1$ .

Ceci implique que  $B(\rho)$  a la puissance du continu; la démonstration pour  $B'(\rho)$  est similaire.  $\square$

COROLLAIRE. — *On peut choisir  $\alpha_0 \in B(\rho)$ ,  $\alpha_1 \in B'(\rho)$  de façon que la rotation  $R_{\alpha_0, \alpha_1}$  de  $\mathbb{T}^2$  soit minimale (donc ergodique).*

On fixe dans la suite un tel choix (qui dépend de  $\rho$ ). Soit  $(Q_k)_{k \geq 0}$  la suite d'entiers strictement positifs telle que  $Q_{2k+i}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i = 0, 1$ , soit le dénominateur de la  $k$ -ième réduite de  $\alpha_i$ . On a alors, par (1) et (1') :

$$2A_{2k} \leq Q_k \leq 3A_{2k}, \quad \text{pour } k \geq 2.$$

3. Soit  $(\varepsilon_k)_{k \geq 2}$  une suite de réels de l'intervalle  $[1, 2]$  qu'on déterminera ultérieurement. Posons, pour  $k \geq 2$ ,  $Z_k = \varepsilon_k A_{2k+1}^{-1}$ , et considérons les séries de Fourier  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1$ , définies par :

$$\varphi_i(x) = \sum_{k \geq 1} Z_{2k+i} e^{2\pi i Q_{2k+i} x}.$$

On suppose dans la suite que  $\rho$  vérifie  $\rho(n) > \exp(n)$  pour  $n \geq 1$ . On a alors, pour  $k \geq 2$  :

$$Z_k \leq 2A_{2k+1}^{-1} \leq 2e^{-A_{2k}} \leq 2e^{-Q_k/3},$$

donc  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  définissent sur  $\mathbb{T}^1$  des fonctions analytiques réelles à valeurs complexes et d'intégrale nulle.

Soit  $\varphi$  la fonction analytique réelle, à valeurs complexes et d'intégrale nulle, définie sur  $\mathbb{T}^2$  par :

$$\varphi(x_0, x_1) = \varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1).$$

4. Pour  $n \geq 1$ , on définit :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_0, x_1) &= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x_0 + j\alpha_0, x_1 + j\alpha_1) \\ &= \varphi_{0,n}(x_0) + \varphi_{1,n}(x_1), \end{aligned}$$

où on a, pour  $i = 0, 1$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{i,n}(x_i) &= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_i(x_i + j\alpha_i) \\ &= \sum_{k \geq 1} Z_{2k+i} X(2k+i, n) e^{2\pi i Q_{2k+i} x_i}, \\ X(m, n) &= (e^{2\pi i n Q_m \alpha_i} - 1)(e^{2\pi i Q_m \alpha_i} - 1)^{-1}, \end{aligned}$$

avec  $m = 2k + i$ .

5. La fonction  $x \rightarrow x^{-1} \sin \pi x$  étant décroissante sur l'intervalle  $[0, 1/2]$ , on a, pour  $x, y \in [-1/2, +1/2]$ ,  $0 < |x| \leq |y|$  :

$$(3) \quad 4|x| \leq |e^{2\pi i x} - 1| \leq 2\pi|x|,$$

$$(4) \quad 2\pi^{-1}|y/x| \leq \left| \frac{e^{2\pi i y} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \right| \leq |y/x|.$$

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $m = 2k + i$ , on a d'autre part :

$$(5) \quad (6A_{2m+4})^{-1} \leq (2Q_{m+2})^{-1} < \|Q_m \alpha_i\| < Q_{m+2}^{-1} \leq (2A_{2m+4})^{-1}.$$

On en déduit, grâce à (3) :

$$(6) \quad \pi^{-1}A_{2m+4} \leq |e^{2\pi i Q_m \alpha_i} - 1|^{-1} \leq \frac{3}{2}A_{2m+4},$$

d'où on tire, pour  $n \geq 1$  :

$$(7) \quad \begin{cases} |X(m, n)| \leq 3A_{2m+4}, \\ Z_m |X(m, n)| \leq 6A_{2m+4}A_{2m+1}^{-1}. \end{cases}$$

de (4) et (5), on déduit aussi :

$$(8) \quad 2\pi^{-1}n \leq |X(m, n)| \leq n, \quad \text{pour } n \leq A_{2m+4}.$$

6. Dans ce numéro, on se donne une fonction numérique  $\theta$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  qui est croissante et non bornée. Supposons alors que  $\rho$  vérifie :

( $C_\theta$ )  $\rho([2\pi^{-1}\theta(t)]) \geq t$ , pour  $t$  assez grand ( $[y]$  désignant la partie entière d'un réel  $y$ ).

Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $m = 2k + i$ ; pour  $m$  assez grand, et  $A_{2m+2} \leq n \leq A_{2m+4}$ , on a, d'après (8) et ( $C_\theta$ ) :

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}_{i,n}(q_m)| &= Z_m |X(m, n)| \geq 2\pi^{-1}A_{2m+1}^{-1}n, \\ \rho(A_{2m+1}) &= A_{2m+2} \leq n \leq \rho([2\pi^{-1}\theta(n)]). \end{aligned}$$

On en tire :

$$\|\varphi_n\|_{L^1} \geq |\widehat{\varphi}_{i,n}(q_m)| \geq \frac{n}{\theta(n)}.$$

On obtient donc, pour tout  $n$  assez grand :

$$\|\varphi_n\|_{C^0} \geq \|\varphi_n\|_{L^1} \geq \frac{n}{\theta(n)}.$$

**Remarque** : On obtient une fonction analytique réelle à valeurs réelles  $\psi$  ayant cette propriété en posant  $\psi = \varphi + \bar{\varphi}$ .

7. Pour  $m \geq 2$ ,  $n \geq 1$ , considérons les parties  $E_{m,n}$  de  $\mathbb{T}^2$  définies par :

$$\begin{aligned} E_{m,n} &= \{(x_0, x_1) \in \mathbb{T}^2 / |\varphi_n(x_0, x_1)| \leq nA_{2m+1}^{-3}\}, \\ E_m &= \bigcup_{A_{2m+2} \leq n \leq A_{2m+4}} E_{m,n}. \end{aligned}$$

On démontrera dans la fin de l'appendice la proposition suivante :

PROPOSITION. — On peut choisir la suite  $(\varepsilon_m)_{m \geq 2}$  dans  $[1, 2]$  de manière à avoir, pour  $m$  assez grand :

$$\mu(E_m) \leq 12A_{2m-1}^{-1},$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^2$ .

8. Dans ce numéro, on se donne une fonction  $\theta$  ayant les mêmes propriétés qu'en 6. Supposons alors que la fonction  $\rho$  vérifie :

$$(C'_\theta) \quad \rho([\theta(t)]^{1/3}) \geq t, \quad \text{pour } t \text{ assez grand.}$$

Choisissons, dans la construction de  $\varphi$ , la suite  $(\varepsilon_n)$  de manière à vérifier les conclusions de la proposition.

Comme la série  $\sum_{m \geq 0} A_{2m+1}^{-1}$  est convergente, les points  $(x_0, x_1)$  de  $\mathbb{T}^2$  qui n'appartiennent qu'à un nombre fini d'ensembles  $E_m$  forment un borélien  $\Omega$  de mesure de Lebesgue pleine.

Soit  $(x_0, x_1) \in \Omega$ ; pour  $n$  assez grand,  $A_{2m+2} \leq n \leq A_{2m+4}$ , on a donc :

$$|\varphi_n(x_0, x_1)| > nA_{2m+1}^{-3},$$

et d'autre part, on a, par  $(C'_\theta)$  :

$$\rho(A_{2m+1}) = A_{2m+2} \leq n \leq \rho([\theta(n)]^{1/3}).$$

On obtient donc, pour tout  $n \geq n_0 = n_0(x_0, x_1)$  :

$$|\varphi_n(x_0, x_1)| > \frac{n}{\theta(n)},$$

c'est-à-dire la conclusion du théorème. □

9. Le reste de l'appendice est consacré à la démonstration de la proposition.

Soit  $m$  un entier  $\geq 2$ . On suppose que  $\varepsilon_i \in [1, 2]$  est fixé pour  $2 \leq i < m$ , et on veut déterminer  $\varepsilon_m$  de façon à avoir, si  $m$  est assez grand :

$$\mu(E_m) \leq 12A_{2m-1}^{-1}.$$

On suppose dans la suite (pour fixer les notations) que  $m = 2k$  est pair. Le cas où  $m$  est impair est complètement similaire.

10. Soit  $n \in [A_{2m+2}, A_{2m+4}]$ ; pour  $m$  assez grand, on a, d'après (7), (8) :

$$(9) \quad \begin{aligned} |X(m, n)|Z_m &\geq 2\pi^{-1}nA_{2m+1}^{-1}; \\ \sum_{\ell > m} |X(\ell, n)|Z_\ell &\leq 2n \sum_{\ell > m} A_{2\ell+1}^{-1} \\ &\leq 4n A_{2m+3}^{-1} \leq \frac{1}{2}n A_{2m+1}^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \sum_{\ell < m-1} |X(\ell, n)| Z_\ell &\leq 6 \sum_{\ell \leq m} A_{2\ell} \\
 &\leq 12 A_{2m} \leq \frac{1}{2} n A_{2m+1}^{-3}; \\
 |X(m-1, n)| Z_{m-1} &\leq 6 A_{2m+2} A_{2m-1}^{-1} \\
 &\leq 3\pi A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} n^{-1} Z_m |X(m, n)| \\
 &\leq \frac{1}{2} A_{2m+2} A_{2m+1} n^{-1} Z_m |X(m, n)|.
 \end{aligned}$$

Pour  $(x_0, x_1) \in \mathbb{T}^2$  et  $A_{2m+4} \geq n \geq A_{2m+1} A_{2m+2}$ , on obtient donc :

$$\begin{aligned}
 |\varphi_n(x_0, x_1)| &\geq \frac{1}{2} Z_m |X(m, n)| - n A_{2m+1}^{-3} \\
 &\geq \frac{1}{4} n A_{2m+1}^{-1} - n A_{2m+1}^{-3} \\
 &> n A_{2m+1}^{-3},
 \end{aligned}$$

si  $m$  est assez grand. Donc  $E_{m,n} = \emptyset$  pour  $A_{2m+1} A_{2m+2} \leq n \leq A_{2m+4}$ .

Lorsque  $n \in [A_{2m+2}, A_{2m+1} A_{2m+2}]$ , considérons la partie de  $\mathbb{T}^2$  notée  $E_{m,n}^1$  et définie par :

$$\begin{aligned}
 E_{m,n}^1 &= \{(x_0, x_1) \in \mathbb{T}^2 / \\
 |X(m, n) Z_m e^{2\pi i Q_m x_0} + X(m-1, n) Z_{m-1} e^{2\pi i Q_{m-1} x_1}| &< 2 A_{2m+2} A_{2m+1}^{-2}\}.
 \end{aligned}$$

Montrons que  $E_{m,n}^1$  contient  $E_{m,n}$  : par (9) et (10), on a en effet, pour  $(x_0, x_1) \in \mathbb{T}^2$  :

$$|\varphi_n(x_0, x_1) - \sum_{i=0}^1 X(m-i, n) Z_{m-i} e^{2\pi i Q_{m-i} x_i}| \leq n A_{2m+1}^{-3},$$

donc, si de plus  $(x_0, x_1) \in E_{m,n}$  :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=0}^1 X(m-i, n) Z_{m-i} e^{2\pi i Q_{m-i} x_i} \right| &\leq 2n A_{2m+1}^{-3} \\
 &\leq 2 A_{2m+2} A_{2m+1}^{-2}.
 \end{aligned}$$

11. Pour  $n \in [A_{2m+2}, A_{2m+1} A_{2m+2}]$ , soit  $E_{m,n}^2$  la partie de  $\mathbb{T}^1$  définie par :

$$E_{m,n}^2 = \{x \in \mathbb{T}^1 / |X(m, n) Z_m + X(m-1, n) Z_{m-1} e^{2\pi i x}| \leq 2 A_{2m+2} A_{2m+1}^{-2}\}.$$

On note d'autre part  $\bar{\mu}$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^1$  et  $p$  l'application de  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{T}^1$  définie par :

$$p(x_0, x_1) = Q_m x_0 - Q_{m-1} x_1.$$

On a alors  $p^{-1}(E_{k,n}^2) = E_{k,n}^1$ , et  $\mu(p^{-1}(A)) = \bar{\mu}(A)$  pour toute partie mesurable  $A$  de  $\mathbb{T}^1$ . On en déduit :

$$(11) \quad \begin{aligned} \mu(E_m) &= \mu(\cup E_{m,n}) \leq \mu(\cup E_{m,n}^1) \\ &\leq \bar{\mu}(\cup E_{m,n}^2), \end{aligned}$$

où l'union est prise sur  $n \in [A_{2m+2}, A_{2m+1}A_{2m+2}]$ .

**12.** Soit  $n \in [A_{2m+2}, A_{2m+1}A_{2m+2}]$ ; on a, en utilisant (3) et (5) :

$$(12) \quad \begin{aligned} |X(m, n) - n| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi i j Q_m \alpha_0} - 1) \right| \\ &\leq 2\pi \|Q_m \alpha_0\| \sum_{j=0}^{n-1} j \\ &\leq \frac{\pi}{2} n^2 A_{2m+4}^{-1} \leq 1, \end{aligned}$$

si  $m$  est assez grand.

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} X(m-1, n) &= e^{\pi i(n-1)Q_{m-1}\alpha_1} \frac{\sin(\pi n Q_{m-1}\alpha_1)}{\sin(\pi Q_{m-1}\alpha_1)}, \\ 2\pi^{-1} A_{2m+2} &\leq |\sin(\pi Q_{m-1}\alpha_1)|^{-1} \leq 3A_{2m+2}, \end{aligned}$$

d'après (6); ceci permet d'écrire  $Z_{m-1}X(m-1, n)$  sous la forme :

$$(13) \quad Z_{m-1}X(m-1, n) = \eta \gamma_m e^{\pi i(n-1)Q_{m-1}\alpha_1} A_{2m+2} A_{2m-1}^{-1} |\sin(\pi n Q_{m-1}\alpha_1)|,$$

où  $\eta \in \{-1, +1\}$  et  $\gamma_m = \varepsilon_{m-1} (|\sin(\pi Q_{m-1}\alpha_1)| A_{2m+2})^{-1} \in [\frac{2}{\pi}, 6]$ .

Considérons les ensembles :

$$\begin{aligned} E_{m,n}^3 &= \{x \in \mathbb{T}^1 / |nZ_m - X(m-1, n)Z_{m-1}e^{2\pi i x}| \leq 3A_{2m+2}A_{2m+1}^{-2}\}, \\ C_m &= \{t \in \mathbb{R} / |t\varepsilon_m \gamma_m^{-1} - A_{2m+2}A_{2m+1}A_{2m-1}^{-1} \sin(\pi t \|Q_{m-1}\alpha_1\|)| \\ &\leq 5A_{2m+2}A_{2m+1}^{-1}\}. \end{aligned}$$

La relation (12) montre que  $E_{m,n}^2$  est contenu dans  $E_{m,n}^3$ . D'autre part, si  $E_{m,n}^3$  n'est pas vide, on a :

$$|nZ_m - |X(m-1, n)|Z_{m-1}| \leq 3A_{2m+2}A_{2m+1}^{-2};$$

en utilisant (13) (en particulier  $\gamma_m^{-1} \leq 5/3$ ), on voit que  $n \in C_m$ .

**13.** Il résulte de (5) que si  $m$  est assez grand, on a :

$$\lambda_m = \gamma_m A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} \|Q_{m-1}\alpha_1\| > 2.$$

On choisit  $\varepsilon_m \in [1, 2]$  de sorte que  $p = \lambda_m \varepsilon_m^{-1} \in \mathbb{N}^*$ .

Par (5) et (13), on a alors :

$$(14) \quad \frac{1}{3} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} \leq p \leq 3 A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1}.$$

De la définition de  $p$  il résulte immédiatement que :

$$(15) \quad p \varepsilon_m \gamma_m^{-1} \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1} = A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1}.$$

Dans la discussion qui suit, on pose

$$\beta_m = \varepsilon_m \gamma_m^{-1} \in [1/6, \pi].$$

14. a) Si  $t \geq (p - 1/4) \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1}$ , alors  $t \notin C_m$

En effet, si  $t \geq (p + 1/4) \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1}$ , on a, d'après (5) et (15) :

$$\begin{aligned} \beta_m t &\geq A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} + \frac{1}{24} \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1} \\ &\geq A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} + \frac{1}{12} A_{2m+2}, \end{aligned}$$

donc  $t \notin C_m$ .

Si  $|t - p| \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1} \leq \frac{1}{4} \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1}$ , on a :

$$\begin{aligned} |\sin(\pi t \|Q_{m-1} \alpha_1\|)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \beta_m t &\geq A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} - \frac{\pi}{4} \|Q_{m-1} \alpha_1\|^{-1} \\ &\geq A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} - \frac{3\pi}{2} A_{2m+2}, \end{aligned}$$

d'où on tire :

$$|\beta_m t - A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1}| \sin \pi t \|Q_{m-1} \alpha_1\| \geq B,$$

où  $B = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} - \frac{3\pi}{2} A_{2m+2} > 5 A_{2m+2} A_{2m+1}^{-1}$ , pour  $m$  assez grand. Dans ce cas, on conclut donc aussi que  $t \notin C_m$ .

b) Si  $t \in C_m$ , on a  $|\cos(\pi t \|Q_{m-1} \alpha_1\|)| \geq A_{2m+1}^{-1/2}$ , si  $m$  est assez grand  
D'après a), on a en effet :

$$\beta_m t \leq A_{2m+2} A_{2m+1} A_{2m-1}^{-1} - \frac{1}{12} A_{2m+2},$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} A_{2m+2}A_{2m+1}A_{2m-1}^{-1}|\sin(\pi t\|Q_{m-1}\alpha_1\|)| &\leq \beta_m t + 5A_{2m+2}A_{2m+1}^{-1} \\ &\leq A_{2m+2}A_{2m+1}A_{2m-1}^{-1}\left(1 - \frac{A_{2m-1}}{16A_{2m+1}}\right), \end{aligned}$$

si  $m$  est assez grand.

Ceci implique :

$$\sin^2(\pi t\|Q_{m-1}\alpha_1\|) \leq 1 - \frac{A_{2m-1}}{16A_{2m+1}},$$

d'où l'on déduit le résultat pour  $m$  assez grand.

c) Posons  $g(t) = \beta_m t - A_{2m+2}A_{2m+1}A_{2m-1}^{-1}|\sin(\pi t\|Q_{m-1}\alpha_1\|)|$ . En un point  $t \in C_m$  tel que  $t\|Q_{m-1}\alpha_1\|$  n'est pas entier,  $g$  est dérivable et on a, d'après b) :

$$\begin{aligned} |g'(t)| &\geq \pi\|Q_{m-1}\alpha_1\|A_{2m+2}A_{2m+1}^{1/2}A_{2m-1}^{-1} - \beta_m \\ &\geq \frac{1}{2}A_{2m+1}^{1/2}A_{2m-1}^{-1}, \end{aligned}$$

d'après (5), si  $m$  est assez grand.

d) Pour  $0 \leq j < 2p$ , considérons l'intervalle

$$I_j = [j(2\|Q_{m-1}\alpha_1\|)^{-1}, (j+1)(2\|Q_{m-1}\alpha_1\|)^{-1}].$$

La restriction de  $g$  à  $I_j$  est dérivable et convexe; de plus, pour une des extrémités  $a$  de  $I_j$ , on a :

$$g'(a) = \beta_m < \frac{1}{2}A_{2m+1}^{1/2}A_{2m-1}^{-1}.$$

On en déduit, compte-tenu de c), que l'intersection  $C_{m,j} = C_m \cap I_j$  est un intervalle dont la longueur est au plus égale à :

$$\ell(C_{m,j}) \leq 10A_{2m+2}A_{2m+1}^{-3/2}A_{2m-1}.$$

e) Lorsque  $t$  décrit  $C_{m,j}$ ,  $\pi t\|Q_{m-1}\alpha_1\|$  décrit un intervalle  $I_{m,j}$  dont la longueur est au plus :

$$\begin{aligned} \ell(I_{m,j}) &\leq 10\pi\|Q_{m-1}\alpha_1\|A_{2m+2}A_{2m+1}^{-3/2}A_{2m-1} \\ &\leq 16A_{2m+1}^{-3/2}A_{2m-1}, \end{aligned}$$

d'après d) et (5).

15. LEMME. — Soient  $a, b, c$  trois réels strictement positifs, avec  $c < a$ . Si  $x \in [-1/2, +1/2]$  vérifie :

$$|a - be^{2\pi ix}| \leq c,$$

alors

$$|x| \leq (4a)^{-1}c.$$

*Démonstration* : On a :

$$\begin{aligned} |a - be^{2\pi ix}| \leq c &\iff a^2 + b^2 - c^2 \leq 2ab \cos 2\pi x \\ &\iff \cos 2\pi x \geq \frac{b}{2a} + \frac{a^2 - c^2}{2ab}; \end{aligned}$$

le membre de droite dans la dernière inégalité est minimum pour  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  et vaut alors  $\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} |a - be^{2\pi ix}| \leq c &\implies |\sin 2\pi x| \leq ca^{-1}, \cos 2\pi x > 0 \\ &\implies |x| \leq \frac{1}{4}ca^{-1}, \text{ si } |x| \leq 1/2. \end{aligned}$$

□

**16.** Fixons  $0 \leq j < 2p$ , et laissons varier  $n$  dans l'ensemble  $\mathbb{N} \cap C_{m,j}$ .

En posant  $c = 3A_{2m+2}A_{2m+1}^{-2}$ ,  $a = nZ_m$  dans le lemme précédent, et en utilisant (13), on voit que  $E_{m,n}^3$  est contenu dans un intervalle  $L_{m,n}$  de  $\mathbb{T}^1$  de longueur moindre que  $3A_{2m+2}A_{2m+1}^{-2}(2n\epsilon_m A_{2m+1}^{-1})^{-1} \leq \frac{3}{2}A_{2m+1}^{-1}$ ; de plus il résulte de (13) et (14.e) que lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N} \cap C_{m,j}$ , les centres de  $L_{m,n}$  sont contenus dans un intervalle de longueur moindre que  $16A_{2m+1}^{-3/2}A_{2m-1}$ .

On en déduit que la mesure de l'union des  $E_{m,n}^3$ , lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N} \cap C_{m,j}$ , est moindre que  $2A_{2m+1}^{-1}$  (si  $m$  est assez grand).

En utilisant la relation (11), l'inclusion  $E_{m,n}^2 \subset E_{m,n}^3$  et 15.a), on conclut qu'on a :

$$\begin{aligned} \mu(E_m) &\leq 2p \ 2A_{2m+1}^{-1} \\ &\leq 12A_{2m-1}^{-1}, \text{ d'après (14)}. \end{aligned}$$

□

## APPENDICE 2

### SUR LES VALEURS PROPRES DE L'AUTOMORPHISME DE $L^\infty(\mathbb{T}^1)$ INDUIT PAR UN DIFFÉOMORPHISME DU CERCLE

1. On note  $m$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^1$ , et  $L^\infty$  l'espace des fonctions numériques à valeurs complexes sur  $\mathbb{T}^1$  essentiellement bornées pour la mesure de Lebesgue.

Soit  $f$  un difféomorphisme du cercle de classe  $C^1$  qui préserve l'orientation; comme  $m$  est quasi-invariante pour  $f$ , on peut définir un automorphisme  $T_f$  de  $L$  par la formule :

$$T_f(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Comme  $\|T_f\| = \|T_f^{-1}\| = 1$ , le spectre de l'opérateur  $T_f$  est contenu dans  $S^1$ . Comme  $T_f$  est multiplicatif ( $T_f(\varphi\psi) = T_f(\varphi)T_f(\psi)$ ) l'ensemble des valeurs propres de  $T_f$  est un sous-groupe de  $S^1$ .

Lorsque  $f$  est une rotation irrationnelle  $R_\alpha$ , ce sous-groupe est le groupe cyclique engendré par  $\exp 2\pi i\alpha$ , la fonction propre associée à la valeur propre  $\exp 2\pi i n\alpha$  étant  $x \rightarrow \exp 2\pi i n x$ .

Le but de cet appendice est de démontrer le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — *Soit  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Dans  $F^r$ , il est générique, pour l'ensemble des valeurs propres de  $T_f$ , de posséder la puissance du continu.*

**COROLLAIRE.** — *On peut trouver  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  et une rotation  $R_\beta$  de  $\mathbb{T}^1$  tels que le difféomorphisme  $f \times R_\beta$  de  $\mathbb{T}^2$  soit minimal, mais ne soit pas ergodique (pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^2$ ).*

*Démonstration :* Grâce au théorème, on peut trouver un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ , de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$ , et une fonction propre  $\varphi$  de  $T_f$ , associée à une valeur propre  $\exp(2\pi i\beta)$ , tels que  $1, \alpha, \beta$  soient rationnellement indépendants. Le difféomorphisme  $f \times R_\beta$  de  $\mathbb{T}^2$  est, par le théorème de Denjoy, topologiquement conjugué à la rotation  $R_{\alpha,\beta}$  de  $\mathbb{T}^2$ ; il est donc minimal. Cependant il n'est pas ergodique pour la mesure de Lebesgue, car il possède la fonction invariante non constante suivante :

$$\psi(x, y) = \varphi(x) \exp(-2\pi i y).$$

□

2. On fixe dans la suite l'ordre de différentiabilité  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ .

Comme souvent, il sera plus facile de travailler dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  que dans  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ . On rappelle que, pour tout rationnel  $p/q$ ,  $\widehat{F}_+^r(p/q)$  est la partie de  $F_+^r(p/q)$  constituée par les difféomorphismes qui n'ont qu'une seule orbite périodique; cette partie est

dense dans  $F_+^r(p/q)$ . On définit de même  $\widehat{F}_-^r(p/q)$ , et on pose :

$$\widehat{F}^r(p/q) = \widehat{F}_+^r(p/q) \cup \widehat{F}_-^r(p/q);$$

$$\widehat{F}^r = \bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} \widehat{F}^r(p/q).$$

L'espace  $\widehat{F}^r$  est donc dense dans  $F^r$ .

3. Soient  $p/q \in \mathbb{Q}$  ( $p \wedge q = 1$ ,  $q \geq 1$ ),  $f$  un difféomorphisme dans  $\widehat{F}^r(p/q)$  et  $a$  un nombre réel.

On définit une fonction  $\varphi_{f,a}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par les conditions suivantes :

- a)  $\varphi_{f,a}$  est continue à gauche et constante sur tout intervalle où  $f^q - p - id$  ne s'annule pas;
- b)  $\varphi_{f,a}(a) = 0$ ;
- c) pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\varphi_{f,a}(f^i(t) + j) = \varphi_{f,a}(t) + i p/q + j.$$

La fonction  $\varphi_{f,a}$  est croissante au sens large; en un zéro  $x_0$  de  $f^q - id - p$ , on a :

$$\left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} \varphi_{f,a}(x) \right) - \varphi_{f,a}(x_0) = \frac{1}{q}.$$

Par construction, pour tout  $s \in \mathbb{Z}$  la fonction  $\exp(2\pi i s \varphi_{f,a})$  est un élément de  $L^\infty$ , à valeurs dans  $S^1$ , qui est vecteur propre de  $T_f$ , de valeur propre  $\exp(2\pi i s \rho(f))$ ; on a  $\exp(2\pi i q \varphi_{f,a}) = 1$ .

Pour  $\eta \geq 0$ , on note  $F_\eta$  l'ensemble des réels dont la distance à l'ensemble des zéros de  $f^q - id - p$  est au plus  $\eta$  : on note  $J_\eta$  le complémentaire de  $F_\eta$ .

4. On fixe une distance  $d$  qui définit la  $C^0$ -topologie sur  $D^r(\mathbb{T}^1)$ .

La proposition suivante est le principal ingrédient de la démonstration du théorème.

PROPOSITION. — Soient  $p/q \in \mathbb{Q}$  ( $p \wedge q = 1$ ,  $q \geq 1$ ),  $f \in \widehat{F}^r(p/q)$  et  $\eta, \varepsilon$  des réels strictement positifs. Il existe un réel  $\delta > 0$  possédant les propriétés suivantes :

- i) si  $g \in D^r(\mathbb{T}^1)$ ,  $d(f, g) < \delta$ , et  $a, t \in J_\eta$ , on a :

$$\varphi_{f,a}(f(t)) = \varphi_{f,a}(g(t));$$

- b) si  $g \in \widehat{F}^r$ ,  $d(f, g) < \delta$ , et  $a, t \in J_\eta$ , on a :

$$|\varphi_{f,a}(t) - \varphi_{g,a}(t)| < \varepsilon.$$

*Démonstration* : La fonction  $\varphi_{f,a}$  est constante sur chaque composante connexe de  $J_0$ ; si  $g \in D^r(\mathbb{T}^1)$  est assez proche de  $f$  (pour la  $C^0$ -topologie), chaque composante connexe de  $J_\eta$  est envoyée par  $f$  et  $g$  dans la même composante connexe de  $J_0$ ; la première partie de la proposition s'en déduit.

On suppose que  $\eta > 0$  est assez petit pour que toute composante connexe de  $F_\eta$  contienne un seul zéro de  $f^q - id - p$ . On peut trouver  $\eta' \in (0, \eta/2)$  tel que  $f^i(J_\eta) \subset J_{2\eta}$ , pour tout  $0 \leq i \leq q$ .

D'autre part, on peut trouver un entier  $n$  tel qu'étant donnée une composante connexe  $(x_0, x_1)$  de  $J_0$ , les images par  $f^{nq} - np$  et  $f^{-nq} + np$  de l'intervalle  $[x_0 + \eta', x_1 - \eta']$  soient contenues dans  $[x_0, x_0 + \eta/2]$  ou  $[x_1 - \eta/2, x_1]$ .

Si  $g \in D^r(\mathbb{T}^1)$  est assez proche de  $f$  dans la  $C^0$ -topologie, les propriétés suivantes sont réalisées :

- a) pour tout  $0 \leq i \leq q$ , une composante connexe de  $J_\eta$  est envoyée par  $f^i$  et  $g^i$  dans la même composante connexe de  $J_{\eta'}$ ;
- b) étant donnée une composante connexe  $(x_0, x_1)$  de  $J_0$ , les images par  $g^{nq} - np$  et  $g^{-nq} + np$  de  $[x_0 + \eta', x_1 - \eta']$  sont contenues dans  $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$  ou  $[x_1 - \eta, x_1 + \eta]$ .

Ceci étant, supposons que  $g \in \widehat{F}^r$ ; soient  $a, t \in J_\eta$ , et  $(x_0, x_1)$  la composante connexe de  $J_0$  contenant  $t$ . Il existe  $i \in [0, q)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  tels que les points  $b = f^i(a) + j$  et  $c = g^i(a) + j$  appartiennent à  $[x_0 + \eta', x_1 - \eta']$  : ceci résulte de la propriété a) ci-dessus, et de ce que l'ensemble des difféomorphismes  $f^i + j$ ,  $i \in [0, q)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , permute transitivement les composantes connexes de  $J_0$ .

Posons  $d = g^{nq}(x) - np$ ,  $d' = g^{-nq}(x) + np$ ; par la propriété b) ci-dessus, l'intervalle compact d'extrémités  $d$  et  $d'$  contient  $[x_0 + \eta, x_1 - \eta]$ , donc contient  $t$ ; on en déduit, comme  $\varphi_{g,a}$  est croissante, que  $\varphi_{g,a}(t)$  est compris entre  $\varphi_{g,a}(d)$  et  $\varphi_{g,a}(d')$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{g,a}(d) &= (i + nq)\rho(g) + j - np \\ &= (i\rho(f) + j) + (\rho(g) - \rho(f))(i + nq), \\ \varphi_{g,a}(d') &= (i - nq)\rho(g) + j + np \\ &= (i\rho(f) + j) + (\rho(g) - \rho(f))(i - nq), \\ \varphi_{f,a}(t) &= \varphi_{f,a}(b) \\ &= i\rho(f) + j; \end{aligned}$$

on en déduit :

$$|\varphi_{f,a}(t) - \varphi_{g,a}(t)| \leq (n + 1)q |\rho(g) - \rho(f)|,$$

et la deuxième partie de la proposition en résulte.  $\square$

**5.** Soit  $f \in \widehat{F}^r(p/q)$ ; on note  $\delta(\varepsilon, \eta, f)$  le réel déterminé par la proposition. Pour  $\ell \geq 1$ , on pose :

$$\delta_\ell(f) = \inf(2^{-\ell}, \delta(2^{-\ell}q^{-1}, 2^{-\ell}q^{-1}, f)),$$

et on note  $B_\ell(f)$  l'ouvert de  $D^r(\mathbb{T}^1)$  formé des difféomorphismes  $g$  qui vérifient  $d(f, g) < \frac{1}{2}\delta_\ell(f)$ ,  $|\rho(g) - \rho(f)| < \frac{1}{20q^2}$ .

Pour  $\ell, n \geq 1$ , on considère l'ouvert  $U_{\ell,n}$  de  $D^r(\mathbb{T}^1)$  qui est union des  $B_\ell(f)$  lorsque  $f$  décrit les  $\widehat{F}^r(p/q)$  tels que  $q \geq n$  ( $p, q$  étant premiers entre eux); comme l'union de ces  $\widehat{F}^r(p/q)$  est dense dans  $\widehat{F}^r$ ,  $U_{\ell,n}$  coupe  $F^r$  suivant un ouvert dense, donc  $U = \left( \bigcap_{\ell, n \geq 1} U_{\ell,n} \right) \cap F^r$  est une partie résiduelle de  $F^r$ .

On va montrer que tout  $f \in U$  satisfait aux conclusions du théorème.

6. Soit  $f \in U$ .

Vu la définition de  $U$ , on peut construire par induction une suite  $(f_\ell)_{\ell \geq 0}$  dans  $D^r(\mathbb{T}^1)$  qui vérifie, pour  $\ell \geq 0$ , les propriétés suivantes :

- a)  $f_\ell \in \widehat{F}^r(p_\ell/q_\ell)$ ,  $p_\ell \wedge q_\ell = 1$ ,  $q_\ell \geq 1$ ;
- b)  $q_{\ell+1} > 8q_\ell^2$ ;
- c)  $d(f, f_\ell) = \delta_\ell < 1/2\delta_\ell(f_\ell)$ ;
- d)  $|\rho(f) - \rho(f_\ell)| < \frac{1}{20q_\ell^2}$ ;
- e)  $\delta_{\ell+1} < \delta_\ell$ .

On en déduit, pour  $\ell \geq 0$ , les relations :

$$(1) \quad d(f_\ell, f_{\ell+1}) < \delta_\ell(f_\ell);$$

$$(2) \quad |p_\ell/q_\ell - p_{\ell+1}/q_{\ell+1}| < \frac{1}{10q_\ell^2}.$$

Soit  $\ell \geq 0$ ; on prend dans la proposition  $\eta = \varepsilon = q_\ell^{-1}2^{-\ell}$  et on note  $A_\ell$  l'ouvert  $J_\eta$  correspondant; par définition de  $\delta_\ell(f_\ell)$ , on obtient, pour  $t, a \in A_\ell$  :

$$(3) \quad \varphi_{f_\ell, a}(f(t)) = \varphi_{f_\ell, a}(f_\ell(t));$$

$$(4) \quad |\varphi_{f_\ell, a}(t) - \varphi_{f_{\ell+1}, a}(t)| < 2^{-\ell}q_\ell^{-1}.$$

Notons que  $A_\ell$  est invariant par translations entières; soit  $\widetilde{A}_\ell$  sa projection sur  $\mathbb{T}^1$ ; son complémentaire dans  $\mathbb{T}^1$  est l'union de  $q_\ell$  intervalles de longueur  $2\eta$ , et on a donc  $m(\widetilde{A}_\ell) \geq 1 - 2^{1-\ell}$ .

Comme  $q_\ell \varphi_{f_\ell, a}$  est à valeurs entières, on déduit de la relation (4), pour  $t, a \in A_\ell$  :

$$(5) \quad \|q_\ell \varphi_{f_{\ell+1}, a}(t)\| < 2^{-\ell}.$$

7. A toute suite  $\varepsilon = (\varepsilon_\ell)_{\ell \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , on associe la suite d'entiers  $(r_\ell)_{\ell \geq 0}$  définie par  $r_0 = 1$ ,  $r_{\ell+1} = r_\ell + \varepsilon_\ell q_\ell$ , puis on considère la suite de  $\mathbb{T}^1$  image de la suite  $(r_\ell p_\ell / q_\ell)_{\ell \geq 0}$ .

LEMME. — Cette suite converge vers une limite  $\beta$ ; de plus, l'application :  $\varepsilon \rightarrow \beta$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{T}^1$  est injective.

Démonstration : On vérifie immédiatement par récurrence sur  $\ell$  qu'on a  $0 < r_\ell \leq q_\ell$  pour tout  $\ell \geq 0$  (cela résulte de  $q_{\ell+1} > 2q_\ell$ ). De la relation (2) de 6, on tire alors :

$$\left| \frac{r_\ell p_\ell}{q_\ell} - \frac{r_{\ell+1} p_{\ell+1}}{q_{\ell+1}} \right| < \frac{1}{10q_\ell};$$

$$\left| \frac{r_\ell p_\ell}{q_\ell} - \frac{(r_\ell + q_\ell) p_{\ell+1}}{q_{\ell+1}} + p_\ell \right| = (r_\ell + q_\ell) \left| \frac{p_\ell}{q_\ell} - \frac{p_{\ell+1}}{q_{\ell+1}} \right| < \frac{1}{5q_\ell}.$$

La convergence annoncée en résulte, et la limite  $\beta$  vérifie :

$$\left\| \beta - \frac{r_\ell p_\ell}{q_\ell} \right\| < \frac{1}{5} \sum_{n \geq \ell} q_n^{-1} < \frac{1}{3q_\ell}.$$

Soient  $\varepsilon, \varepsilon'$  deux éléments distincts de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $m$  le premier indice où ces éléments diffèrent,  $(r_\ell)_{\ell \geq 0}, (r'_\ell)_{\ell \geq 0}$  les suites d'entiers associées, et  $\beta, \beta'$  les limites associées, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \beta - \frac{r_{m+1} p_{m+1}}{q_{m+1}} \right\| &< \frac{1}{3q_{m+1}}, \\ \left\| \beta' - \frac{r'_{m+1} p_{m+1}}{q_{m+1}} \right\| &< \frac{1}{3q_{m+1}}, \\ \frac{1}{q_{m+1}} &< \left| \frac{r_{m+1} p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{r'_{m+1} p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| - |p_m| < \frac{3}{10q_m}; \end{aligned}$$

donc  $\beta \neq \beta'$ ; ceci termine la démonstration du lemme.  $\square$

8. Par le lemme de Borel–Cantelli, les points de  $\mathbb{T}^1$  qui appartiennent à tous les ouverts  $\tilde{A}_\ell$ , à partir d'un certain rang forment un borélien  $A$  de mesure de Lebesgue pleine.

On choisit  $a \in \mathbb{R}$  de façon que son image dans  $\mathbb{T}^1$  appartienne à  $A$ .

Etant donnée une suite  $\varepsilon = (\varepsilon_\ell)_{\ell \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et la suite  $(r_\ell)_{\ell \geq 0}$  associée, on définit, pour  $\ell \geq 0$  :

$$\psi_\ell = \exp(2\pi i r_\ell \varphi_{f_\ell, a}).$$

C'est un élément de  $L^\infty$  qui est vecteur propre de  $T_{f_\ell}$  pour la valeur propre  $\exp(2\pi i r_\ell p_\ell / q_\ell)$ .

Pour  $t \in A$ , par les relations (3), (4), (5) on a, si  $\ell$  est assez grand :

$$\begin{aligned} (6) \quad \psi_\ell(f(t)) &= \psi_\ell(f_\ell(t)) \\ &= \exp(2\pi i r_\ell p_\ell / q_\ell) \psi_\ell(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad |\psi_\ell(t) - \psi_{\ell+1}(t)| &< 2\pi (|\varphi_{f_\ell, a}(t) - \varphi_{f_{\ell+1}, a}(t)| r_\ell + \|q_\ell \varphi_{f_{\ell+1}, a}(t)\|) \\ &< 4\pi 2^{-\ell}. \end{aligned}$$

Donc la suite  $(\psi_\ell)_{\ell \geq 0}$  converge presque partout (en fait, en tout point de  $A$ ) vers une fonction  $\psi$ , à valeurs dans  $S^1$ , qui définit un élément non nul de  $L^\infty$ . En passant à la limite dans (6) et en utilisant le lemme 7, on obtient, pour  $t \in A$  :

$$\psi(f(t)) = \exp(2\pi i \beta) \psi(t).$$

Donc  $\psi$  est vecteur propre de  $T_f$ , associé à la valeur propre  $\exp(2\pi i \beta)$ . L'injectivité de l'application :  $\varepsilon \rightarrow \beta$  suffit alors à obtenir la conclusion du théorème.  $\square$



## APPENDICE 3

### A PROPOS D'UN RÉSULTAT DE F. TAKENS

1. On fixe dans cet appendice un ordre de différentiabilité  $r$  qui est infini ou entier au moins égal à 2.

Soit  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  un difféomorphisme local de classe  $C^r$  qui préserve l'orientation; on dit que  $f$  est plat en 0 si son  $r$ -jet en 0, défini par  $j_r(f) = (\text{Log } Df(0), D^2f(0), \dots, D^r f(0))$  est égal au vecteur nul.

Le résultat qui suit est dû à Takens ([Ta]) en différentiabilité infinie; on en donne dans la suite de l'appendice une démonstration différente de celle de Takens, qui repose sur les techniques du chapitre IV.

**THÉORÈME.** — *Soit  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  un difféomorphisme local de classe  $C^r$  qui préserve l'orientation. Si  $f$  n'est pas plat en 0, il existe au voisinage de 0 un unique champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^{r-1}$  dont le flot  $(F_t)$  vérifie  $F_1 = f$ .*

2. On rappelle que  $J^r$  désigne le groupe des  $r$ -jets de germes de  $C^r$ -difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}$  en 0 qui préservent l'orientation.

On sait, d'après Szekeres et Kopell (cf. IV.1) qu'il existe au voisinage de 0 un unique champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^1$  dont le flot  $(F_t)$  vérifie  $F_1 = f$ , et que  $X$  est de classe  $C^{r-1}$  hors de 0.

Il suffit donc, pour démontrer le théorème, de se placer dans le cas où  $r$  est un entier au moins égal à 3, et de prouver que  $X$  est de classe  $C^{r-1}$  au voisinage de 0. Comme  $J^{r-1}$  est un groupe de Lie connexe et simplement connexe, le  $(r-1)$ -jet de  $X$  en 0 ne peut être que le générateur infinitésimal de l'unique groupe à un paramètre dans  $J^{r-1}$  associé au  $(r-1)$ -jet de  $f$  en 0. Ceci montre qu'il suffit de prouver la conclusion du théorème lorsque  $f$  est défini sur un voisinage à droite de 0.

Quitte à conjuguer  $f$  par une homothétie et à le remplacer par son inverse, on peut donc supposer que  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- i)  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ , ( $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 3$ ), de  $[0, 1]$  sur son image qui préserve l'orientation;
- ii)  $f(0) = 0$ ;  $f(t) < t$  pour  $t \in (0, 1]$ ;
- iii)  $f$  n'est pas plat en 0.

L'hypothèse iii) signifie que le vecteur

$$j = (j_1, \dots, j_r) = (\text{Log } Df(0), \dots, D^r f(0))$$

n'est pas nul; on note  $p$  le plus petit indice tel que  $j_p \neq 0$ . On a alors  $j_p < 0$ .

Il est bien connu (cf. Appendice 5) que lorsque  $p = 1$ ,  $f$  est conjugué à sa partie linéaire par un difféomorphisme de classe  $C^r$ ; ceci implique certainement la conclusion du théorème; on supposera donc dans la suite que  $p \geq 2$ , c'est-à-dire  $Df(0) = 1$ .

Le champ de vecteurs  $X$  associé à  $f$  est donc défini sur  $[0, 1]$ , de classe  $C^1$ , et de classe  $C^{r-1}$  sur  $(0, 1]$ .

3. On sait qu'il existe dans  $J^r$  un unique groupe à un paramètre  $(j_t)_{t \in \mathbb{R}}$  qui vérifie  $j_1 = j$ .

Le générateur infinitésimal de  $(j_t)$  définit sur  $\mathbb{R}$  un champ de vecteurs polynomial  $\tilde{Y}$ ; le  $p$ -jet de  $\tilde{Y}$  en 0 est  $(0, \dots, 0, j_p)$ , donc  $\tilde{Y}$  prend des valeurs strictement négatives sur un voisinage à droite pointé de 0. En modifiant  $\tilde{Y}$  sur le complémentaire dans  $[0, 1]$  d'un voisinage à droite de 0, on obtient sur  $[0, 1]$  un champ de vecteurs  $Y$  de classe  $C^\infty$  qui possède les propriétés suivantes :

- i)  $Y(0) = 0$ ;  $Y(t) < 0$  pour  $t \in (0, 1]$ ;
- ii) Soit  $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot de  $Y$ ; alors  $g = g_1$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $[0, 1]$  sur son image qui préserve l'orientation; on a  $g(0) = 0$ ,  $g(t) < t$  pour  $t \in (0, 1]$  et les  $r$ -jets de  $f$  et  $g$  en 0 sont identiques.

Posons  $a = (p!)^{-1} j_p < 0$ ; on a :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} Y(x)x^{-p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x) - x)x^{-p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - x)x^{-p} = a.$$

4. Par IV.2.8 (par exemple), les champs  $X$  et  $Y$  vérifient sur  $(0, 1]$  les relations :

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Log } |X \circ f| = \text{Log } |X| + \text{Log } Df, \\ \text{Log } |Y \circ g| = \text{Log } |Y| + \text{Log } Dg. \end{cases}$$

La fonction  $Z = \text{Log } |X| - \text{Log } |Y|$ , définie et de classe  $C^{r-1}$  sur  $(0, 1]$ , vérifie donc :

$$(3) \quad Z - Z \circ f = \text{Log } Dg - \text{Log } Df + \text{Log } |Y| \circ f - \text{Log } |Y| \circ g.$$

On note  $\Phi$  le second membre de l'équation (3);  $\Phi$  est a priori une fonction définie et de classe  $C^{r-1}$  sur  $(0, 1]$ .

LEMME. — La fonction  $\Phi$  se prolonge en une fonction de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, 1]$ , et on a  $D^i \Phi(0) = 0$  pour  $0 \leq i \leq r - 1$ .

*Démonstration* : Posons  $\Phi_1 = \text{Log } Dg - \text{Log } Df$ ,  $\Phi_2 = \text{Log } |Y| \circ f - \text{Log } |Y| \circ g$ . Il est clair que  $\Phi_1$  possède les propriétés du lemme.

D'autre part, on peut écrire  $|Y(x)| = x^p Y_1(x)$ ,  $g(x) = x g_1(x)$ ,  $f(x) = x f_1(x)$ , où  $f_1, g_1, Y_1$  sont des fonctions à valeurs strictement positives sur  $[0, 1]$ ; de plus  $Y_1$  est polynomial au voisinage de 0, donc  $Y_1$  et  $g_1$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ ; la fonction  $f_1$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, 1]$ . Enfin les fonctions  $g_1$  et  $f_1$  d'une part,  $Y_1 \circ f$  et  $Y_1 \circ g$  d'autre part ont les mêmes  $(r - 1)$ -jets en 0. Comme on a :

$$\Phi_2 = p(\text{Log } f_1 - \text{Log } g_1) + \text{Log } Y_1 \circ f - \text{Log } Y_1 \circ g,$$

on conclut que la fonction  $\Phi_2$  a aussi les propriétés requises. □

5. LEMME. — Soit  $k$  un réel  $> (p - 1)$ . Il existe alors une constante  $C = C(k, f) > 0$  telle qu'on ait, pour  $x \in [0, 1]$  :

$$\sum_{i \geq 0} (f^i(x))^k \leq C x^{k-p+1}.$$

*Démonstration* : Il existe  $K > 0$  tel qu'on ait, pour  $x \in [0, 1]$  :

$$f(x) \leq x(1 + Kx^{p-1})^{-\frac{1}{p-1}}.$$

On en déduit, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $i \in \mathbb{N}$  :

$$f^i(x) \leq x(1 + iKx^{p-1})^{-\frac{1}{p-1}}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} (f^i(x))^k &\leq x^k \left(1 + \sum_{i \geq 1} (1 + iKx^{p-1})^{-\frac{k}{p-1}}\right) \\ &\leq x^k (1 + x^{1-p} \int_0^\infty (1 + Ku)^{-\frac{k}{p-1}} du) \leq C x^{k+1-p}. \end{aligned}$$

□

6. Le lemme suivant résulte immédiatement du précédent.

LEMME. — Soient  $k$  un réel  $> p-1$  et  $\varphi$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  qui vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) x^{-k} = 0;$$

alors la série  $\sum_{i \geq 0} \varphi(f^i(x))$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ , et sa somme  $\Sigma \varphi$  vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-k+p-1} \Sigma \varphi(x) = 0.$$

7. Par IV.3.12, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{X(x)}{f(x) - x} = 1;$$

compte-tenu des relations (1), on en déduit :

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{X(x)}{Y(x)} = 1;$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} Z(x) = 0.$$

D'autre part, pour  $N \geq 1$ ,  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Phi(f^i(x)) = Z(x) - Z(f^N(x)).$$

Donc la série  $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi(f^i(x))$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  et sa somme vaut  $Z$ .

Supposons d'abord que  $p < r$ . D'après le lemme 4, on peut dans le lemme 6 prendre  $k = r - 1$ ,  $\varphi = \Phi$  pour obtenir :

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p-r} Z(x) = 0.$$

On en déduit :

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (X(x) - Y(x))x^{-r} = \lim_{x \rightarrow 0^+} Y(x)(\exp Z(x) - 1)x^{-r} = 0.$$

Lorsque  $p = r$ , ces deux relations restent valides : la relation (6) n'est autre que (5), et la relation (7) résulte de (1) et de (4).

8. On va démontrer par récurrence sur  $i$  ( $0 \leq i \leq r - 1$ ) les propriétés suivantes :

$$(C_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (D^i Z(x))x^{p-r+i} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (D^i X - D^i Y)(x) x^{-r+i} = 0. \end{array} \right.$$

Il est clair que ces propriétés impliquent que le champ de vecteurs  $X$  est de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, 1]$ .

Les relations (6) et (7) forment la propriété  $(C_0)$ . Soit  $1 \leq i \leq r - 1$ , et supposons que les propriétés  $(C_j)$  sont vérifiées pour  $0 \leq j \leq i - 1$ .

Soit  $\Gamma$  la dérivation de Lie suivant le champ  $X$  (cf. IV.3.17). On a alors (cf. IV.3.17) :

$$\Gamma \Phi = X D\Phi,$$

$$\Gamma^i \Phi = P_i(X, DX, \dots, D^{i-1}X, D\Phi, \dots, D^i \Phi)$$

où  $P_i \in \mathbb{Z}(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, u_1, \dots, u_i)$  est un polynôme universel qui a les propriétés suivantes :

- i)  $P_i = P_i^1 u_1 + \dots + P_i^i u_i$ , avec  $p_i^k \in \mathbb{Z}(t_0, \dots, t_{i-1})$ ;
- ii)  $P_i^i = t_0^i$ ;
- iii)  $P_i^k$  est un polynôme homogène de degré  $i$ , et homogène de poids  $i - k$  si on donne à la variable  $t_j$  le poids  $j$ .

Ces propriétés se vérifient par récurrence sur  $i$ , grâce à la relation :

$$P_{i+1} = t_0 \left( \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial P_i}{\partial t_j} t_{j+1} + \sum_{j=1}^i \frac{\partial P_i}{\partial u_j} u_{j+1} \right).$$

Pour  $0 \leq j \leq i - 1$ , la propriété  $(C_j)$  implique que  $D^j X(x)x^{j-p}$  a une limite finie en 0. Il en est donc de même pour  $P_i^k(X, \dots, D^{i-1}X)x^{i-k-pi}$ , par la propriété iii) de  $P_i^k$ .

D'autre part, on déduit du lemme 4 que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} D^k \Phi(x)x^{1-r+k} = 0, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq i.$$

On obtient donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma^i \Phi(x) x^{i-pi+1-r} = 0.$$

On peut alors appliquer le lemme 6 (car  $i(p-1) + r - 1 > p - 1$ ) et conclure que la série  $\sum_{n \geq 0} \Gamma^i \Phi \circ f^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ , sa somme, notée  $\Sigma \Gamma^i \Phi$ , vérifiant :

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \Sigma \Gamma^i \Phi(x) x^{i-pi+p-r} = 0.$$

Or, sur l'intervalle  $(0, 1]$ , on a :

$$\Gamma^i(Z) = \Gamma^i(\Sigma \Phi) = \Sigma(\Gamma^i \Phi) \quad (\text{cf. IV.3.13})$$

$$(9) \quad = X^i D^i Z + \sum_{k=1}^{i-1} P_i^k(X, \dots, D^{i-1} X) D^k Z,$$

par les propriétés i), ii) ci-dessus.

Pour  $1 \leq k \leq i-1$ , la propriété  $(C_k)$  implique qu'on a :

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} P_i^k(X, \dots, D^{i-1} X)(x) D^k Z(x) x^{i-pi+p-r} = 0.$$

En rassemblant (8), (9), (10) on obtient :

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} D^i Z(x) x^{p-r+i} = 0,$$

car  $X(x)x^{-p}$  a une limite finie et non nulle en 0, par (1) et (4).

Démontrons la seconde partie de la propriété  $(C_i)$ .

En dérivant la relation  $X = Y \exp Z$ , on obtient :

$$D^i X = \exp Z (D^i Y + \sum_{k=1}^i (D^{i-k} Y) Q_i^k(DZ, \dots, D^i Z)),$$

où  $Q_i^k \in \mathbb{Z}(u_1, \dots, u_i)$  est homogène de poids  $k$  si  $u_j$  a pour poids  $j$ . L'hypothèse de récurrence et la première partie de la démonstration donnent :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Q_i^k(DZ, \dots, D^i Z)(x) x^{p+k-r} = 0.$$

La relation (6) montre que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\exp Z(x) - 1) x^{p-r} = \lim_{x \rightarrow 0^+} Z(x) x^{p-r} = 0;$$

d'autre part, pour  $0 \leq k \leq i$ ,  $D^{i-k} Y(x) x^{-p+i-k}$  a une limite finie en 0; cela donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} D^i Y(x) (\exp Z(x) - 1) x^{-r+i} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-r+i} \exp(Z(x)) \sum_{k=1}^{i-1} Q_i^k(DZ, \dots, D^i Z)(x) = 0,$$

d'où on tire :

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (D^i Y(x) - D^i(X(x)) x^{-r+i}) = 0;$$

les relations (11) et (12) forment la propriété  $(C_i)$ . Comme on l'a remarqué au début de ce numéro, la démonstration du théorème est alors complète.  $\square$



## APPENDICE 4

### UN RÉSULTAT ÉLÉMENTAIRE DE LINÉARISATION

1. Soit  $r$  un entier au moins égal à 2.

On considère un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^r$  de  $I = [0, 1]$  sur son image qui vérifie :

i)  $f(0) = 0$ ;  $f(t) < t$  pour  $t \in (0, 1]$ ;

ii)  $0 < Df(0) = a < 1$ .

Le résultat qui suit, bien connu des spécialistes, est à rapprocher d'un résultat de Sternberg ([St]). Nous en donnons une démonstration car nous l'utilisons au chapitre VI et n'en connaissons pas de référence.

**PROPOSITION.** — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un difféomorphisme  $h$  de classe  $C^r$  de  $I$  sur son image qui vérifie :*

1)  $h(0) = 0$ ,  $Dh(0) = 1$  ;

2)  $h(f(x)) = ah(x)$ , pour tout  $x \in I$ .

La démonstration de la proposition occupe les numéros 2-5.

2. Comme d'habitude, on désigne par  $J^r$  le groupe des  $r$ -jets de  $C^r$ -difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}$  en 0 qui préservent l'orientation; on désigne par  $J_0^r$  le sous-groupe de  $J^r$  correspondant aux difféomorphismes locaux dont la dérivée en 0 vaut 1.

Soient  $j = (\text{Log } a, D^2 f(0), \dots, D^r f(0))$  le  $r$ -jet de  $f$  en 0, et  $j_0 = (\text{Log } a, 0, \dots, 0)$ . Il est bien connu qu'il existe un (unique) élément  $j'$  dans  $J_0^r$  qui conjugue  $j$  et  $j_0$ .

Soit  $g$  un difféomorphisme préservant l'orientation de  $[0, 1]$ , de classe  $C^r$ , dont le  $r$ -jet en 0 soit  $j'$ . Alors  $f' = g^{-1}fg$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $I$  sur son image qui vérifie les mêmes hypothèses que  $f$ , et dont le  $r$ -jet en 0 est  $j_0$ .

Il suffit donc de démontrer la proposition lorsque  $j = j_0$ , ce que nous supposons dans la suite.

3. Pour  $b \in (0, 1]$ , on pose :

$$C(b) = \text{Max}_{[0, b]} |D^r f(t)| .$$

Pour  $t \in [0, b]$ ,  $0 \leq i \leq r - 2$ , on a donc :

(1)  $|D^{r-i} f(t)| \leq C(b)$ ,

(2)  $Df(t) \leq a + C(b)$ .

Notons aussi que  $\lim_{b \rightarrow 0^+} C(b) = 0$ .

Considérons l'espace  $E = E_b$  des fonctions numériques de classe  $C^r$  sur  $[0, b]$  qui s'annulent en 0 ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $r$ .

Pour  $\psi \in E$ , la formule :

$$\|\psi\| = \text{Max}_{[0,b]} |D^r \psi(t)|,$$

définit une norme d'espace de Banach sur  $E$ ; la topologie associée est la  $C^r$ -topologie usuelle.

Pour  $\psi \in E$ ,  $t \in [0, b]$ ,  $0 \leq i \leq r$ , on a :

$$(3) \quad |D^i \psi(t)| \leq \frac{t^{r-i}}{(r-i)!} \|\psi\|.$$

On définit un opérateur  $T = T_b$  de  $E$  dans lui-même par la formule :

$$T(\psi) = a^{-1}(\psi \circ f).$$

LEMME. — Si  $b$  est assez petit, on a  $\|T\| < 1$ .

Démonstration : La formule de Faa-di-Bruno s'écrit :

$$D^r(\psi \circ f) = \sum_{i=1}^r D^i \psi \circ f Q_i(Df, \dots, D^{r-i+1}f),$$

avec  $Q_i \in \mathbb{Z}(u_1, \dots, u_{r-i+1})$ ,  $Q_r(u_1) = u_1^r$ .

Pour  $1 \leq i \leq r$ , les coefficients de  $Q_i$  sont en fait positifs; on déduit donc de (1), (2), (3) qu'on a, pour  $t \in [0, b]$  :

$$|D^r(\psi \circ f)(t)| \leq K(b) \|\psi\|, \quad \text{avec}$$

$$K(b) = (a + C(b))^r + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{b^{r-i}}{(r-i)!} Q_i(a + C(b), C(b), \dots, C(b)).$$

On a alors  $\lim_{b \rightarrow 0^+} K(b) = a^r$ ,  $\|T\| \leq K(b)$ , et la conclusion du lemme en résulte puisque  $r \geq 2$ . □

4. On choisit  $b$  assez petit pour que  $\|T_b\| < 1$ .

La restriction de  $f(x) - ax$  à l'intervalle  $[0, b]$  définit un élément  $\varphi$  de  $E$ . Considérons l'équation en  $\psi \in E$  :

$$T(\psi) + a^{-1}\varphi = \psi.$$

Comme  $\|T\| < 1$ , elle possède une unique solution  $\psi_0$  dans  $E$ . En posant  $h = id + \psi_0$ , on a alors, pour  $x \in [0, b]$  :

$$(4) \quad h(f(x)) = ah(x).$$

Comme  $\psi_0 \in E$ , on a  $Dh(0) = 1$ ,  $h(0) = 0$ ; la relation (4) permet alors de prolonger  $h$  en un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $[0, 1]$  sur son image, qui vérifie les conclusions de la proposition.

5. Pour démontrer l'unicité de la conjugaison  $h$ , on pourrait faire appel au résultat d'unicité de Kopell ([Ko]); mais ici la situation est plus élémentaire. Si  $h_1$  est un autre difféomorphisme qui satisfait aux conclusions de la proposition, on a, pour  $t \in [0, h_1(1)]$  :

$$ahh_1^{-1}(t) = h \circ f \circ h_1^{-1}(t) = hh_1^{-1}(at),$$

donc

$$hh_1^{-1}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n}hh_1^{-1}(a^n t) = t D(hh_1^{-1})(0) = t.$$

□

6. On tire quelques conséquences élémentaires de la proposition.

La formule :

$$X(x) = h(x)(Dh(x))^{-1} \text{Log } a,$$

définit le champ de vecteurs de classe  $C^{r-1}$  sur  $[0, 1]$  qui est associé à  $f$  (cf. Appendice 3).

Le groupe à un paramètre  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  engendré par  $X$  est donné par :

$$f_t(x) = h^{-1}(a^t h(x)).$$

En particulier, pour tout réel  $t$ ,  $f_t$  est de classe  $C^r$  sur son domaine de définition.

7. Notons que la proposition reste valide lorsque  $r = \infty$  : ceci résulte de l'unicité de  $h$ .

8. Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$  ou  $r = \infty$ ) de  $[-1, +1]$  sur son image. On suppose que 0 est l'unique point fixe de  $f$  et que  $Df(0) \in (0, 1)$ .

On démontre alors de la même façon que précédemment qu'il existe un unique difféomorphisme  $h$  de classe  $C^r$  de  $[-1, +1]$  sur son image qui vérifie :

- i)  $h(0) = 0$ ;  $Dh(0) = 1$ ;
- ii)  $h(f(x)) = Df(0)h(x)$ , pour  $x \in [-1, +1]$ .

9. Soit  $J$  un intervalle ouvert non vide de la droite réelle. Considérons un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^r$  ( $r = \infty$ , ou  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$ ) de  $I$  sur lui-même qui préserve l'orientation et vérifie :

- 1)  $f$  a un unique point fixe  $c$  dans  $J$ ;
- 2)  $Df(c) = a \neq 1$ .

Il existe alors un unique difféomorphisme  $h$  de classe  $C^r$  de  $I$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

- i)  $h(c) = 0$ ,  $Dh(c) = 1$ ;
- ii)  $h(f(x)) = ah(x)$  pour tout  $x \in I$ .

Ceci résulte immédiatement des énoncés précédents.



## Bibliographie

- [H1] M.R. HERMAN : *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. I.H.E.S. n°49 (1979), 5–234.
- [H2] M.R. HERMAN : *Résultats récents sur la conjugaison différentiable*, Proc. of the ICM, Helsinki (1978), vol. 2, 811–820.
- [K–S] J.–P. KAHANE, R. SALEM : *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris (1963).
- [Ka] I. KAPLANSKI : *Infinite Abelian groups*, Ann Arbor, University of Michigan Press (1954).
- [Ko] N. KOPELL : *Commuting diffeomorphisms ; in Global Analysis*, Proc. of Symp. in Pure Math., vol. XIV, A.M.S. (1970).
- [K–N] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER : *Uniform distribution of sequences*, Interscience, Wiley, New York (1974).
- [L] S. LANG : *Introduction to diophantine approximation*, Addison Wesley, New York (1966).
- [Ma] J. MATHER : *Commutators of  $C^r$ -diffeomorphisms of the real line*, preprint, version préliminaire de :
- [Ma] J. MATHER : *Commutators of diffeomorphisms*, Comm. Math. Helv., vol. 48 (1973), 195–233.
- [M–Z] S. MONTGOMERY, L. ZIPPIN : *Topological transformation groups*, Interscience, Wiley, New York (1955).
- [N–P–T] S. NEWHOUSE, J. PALIS, F. TAKENS : *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publ. Math. I.H.E.S. n°57 (1983), 5–72.
- [PM] R. PÉREZ–MARCO : *Uncountable number of symmetries for non-linearizable holomorphic dynamics*, Invent. Math., n°119-1 (1994), 67-127.
- [P–Y1] J. PALIS, J.–C. YOCCOZ : *Rigidity of centralizers of diffeomorphisms*, Ann. Sc. E.N.S., t. 22 (1989), 81–98.
- [P–Y2] J. PALIS, J.–C. YOCCOZ : *Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori*, Ann. Sc. E.N.S., t. 22 (1989), 99–114.
- [Se] F. SERGERAERT : *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité*, Invent. Math., n°39 (1977), 253-275.
- [St] S. STERNBERG : *Local  $C^n$ -transformations of the real line*, Duke Math. J., vol. 24 (1957), 97–102.
- [Sz] G. SZEKERES : *Regular iteration of real and complex functions*, Acta Math., vol. 100 (1958), 203–258.

- [Ta] F. TAKENS : *Normal forms for certain singularities of vector fields*, Ann. Inst. Fourier, vol. 23 (1973), 163–195.
- [Y1] J.-C. YOCCOZ : *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Sc. E.N.S., t. 17 (1984), 333–359.
- [Y2] J.-C. YOCCOZ : *Sur la disparition de propriétés de type Denjoy–Koksma en dimension 2*, C.R.A.S., t. 291 (1980), 655–658.

Jean-Christophe YOCCOZ  
Département de Mathématiques  
Université Paris-Sud  
91405 Orsay  
Unité Associée au CNRS n° 1169