Astérisque

BERNADETTE PERRIN-RIOU

Fonctions Lp-adiques des représentations p-adiques

Astérisque, tome 229 (1995)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__229__1_0>

A Georges POITOU

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'interprétation arithmétique des valeurs aux entiers des fonctions L complexes associées aux variétés projectives sur un corps de nombres est fondamentale en théorie des nombres. A la suite de nombreux travaux, les conjectures à la Bloch-Kato ont permis de comprendre quelle est l'interprétation de ces nombres dans un cadre très général. D'autre part, depuis les premiers exemples d'interpolation p-adique de ces nombres, on rêve de construire des fonctions L p-adiques qui auraient des propriétés les plus semblables possibles à celles des fonctions L complexes. Ainsi, par la théorie d'Iwasawa, on cherche à construire deux types de fonctions L p-adiques : les premières à partir des valeurs des fonctions L complexes et les secondes à partir de l'interprétation arithmétique de ces valeurs. Un lien entre ces deux types de fonctions est alors conjecturé.

Reprenons rapidement quelques cas bien connus. Le premier exemple de fonction L est celui de la fonction ζ de Riemann définie comme le prolongement méromorphe $\zeta(s)$ à $\mathbb{C}$ de

$$\sum_{n>0} n^{-s} = \prod_{l} (1 - l^{-s})^{-1}$$

où le produit est pris sur les nombres premiers l. Un analogue p-adique de ζ a été construit par Kubota-Leopoldt puis par Iwasawa, non comme produit de facteurs eulériens, ce qui n'a pas (encore !) de sens en p-adique mais par interpolation p-adique des $\zeta(k)$ pour k entier strictement négatif impair : ainsi, l'étude des propriétés p-adiques des $\zeta(k)$ ou plutôt de

$$\zeta_{\{p\}}(k) = (1 - p^{-k})\zeta(k) \tag{1}$$

permet de construire, pour toute classe j modulo $p-1$ une fonction continue $\zeta_p(s, \omega^j)$ pour $s \in \mathbb{Z}_p - \{1\}$ et ω le caractère de Teichmüller telle que $\zeta_p(k, \omega^j) = \zeta_{\{p\}}(k)$ pour $k \equiv j \mod p-1$, k entier négatif impair. En utilisant l'équation fonctionnelle, on peut aussi réécrire cette formule en termes des entiers positifs pairs : les valeurs interpolées sont alors

$$\Gamma(k)(1 - p^{-k})^{-1}(1 - p^{k-1})\frac{\zeta_{\{p\}}(k)}{(2i\pi)^k} \tag{2}$$

pour k entier positif pair appartenant à une classe de congruence fixée modulo $p-1$. On peut d'autre part définir cette fonction ζ p-adique par interpolation des valeurs en k fixé des fonctions L associées aux caractères de Dirichlet η de conducteur une puissance de p et tels que $\eta(-1)=(-1)^k$.

Un autre exemple désormais classique est celui des courbes elliptiques E sur $\mathbb{Q}$ ayant bonne réduction ordinaire en p, modulaire ou à multiplication complexe. Les premières constructions des fonctions L p-adiques associées à de telles courbes elliptiques modulaires sont dues à Mazur et Swinnerton-Dyer dans le premier cas, à Coates et Wiles dans le second cas. Dans le cas des courbes elliptiques modulaires ordinaires en p, la fonction L p-adique est obtenue par interpolation p-adique des valeurs de la fonction de Hasse-Weil de $E/\mathbb{Q}$ en 1 twistée par un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de p arbitrairement grande ; la valeur en $\mathbf{1}$ (en un sens à préciser) de cette fonction L p-adique est alors de la forme

$$(3) \qquad (1-\alpha_p^{-1})(1-p^{-1}\alpha_p)^{-1}L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)$$

où $L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)$ est la fonction L “incomplète” en p de $E/\mathbb{Q}$,

$$L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},s)=(1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})L(E/\mathbb{Q},s)$$

et où $(1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})$ est le facteur d'Euler en p avec α_p unité p-adique.

L'idée de la théorie d'Iwasawa est alors de construire un idéal de l'algèbre d'Iwasawa à partir de la représentation p-adique associée à la situation : $\mathbb{Q}_p(1)$ dans le premier cas, tensorisé de $\mathbb{Q}_p$ avec le module de Tate des points d'ordre une puissance de p sur la courbe elliptique dans le deuxième cas (Iwasawa, Mazur, Greenberg, Schneider...). Dans ces cas déjà bien étudiés, on a à faire à des représentations dites ordinaires et cet idéal est construit comme l'idéal caractéristique d'un certain module (dual de Pontryagin d'un groupe de Selmer). Les conjectures principales relient alors cet idéal caractéristique et la fonction L p-adique d'interpolation.

Nous proposons dans ce texte une généralisation à des représentations p-adiques ayant bonne réduction en p. Le cas le plus simple non ordinaire est le cas de la représentation p-adique associée à une courbe elliptique modulaire E ayant bonne réduction supersingulière en p. Plusieurs phénomènes nouveaux apparaissent. Du côté de l'interpolation p-adique, deux fonctions L p-adiques peuvent être construites, de valeur en $\mathbf{1}$ respectivement

$$(4) \qquad (1-\alpha_p^{-1})(1-p^{-1}\alpha_p)^{-1}L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)$$

et

$$(5) \qquad (1-\beta_p^{-1})(1-p^{-1}\beta_p)^{-1}L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)\ .$$

D'autre part, ces fonctions n'appartiennent plus à l'algèbre d'Iwasawa (algèbre isomorphe à l'algèbre des séries formelles en une variable à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$) mais ont dans leur développement en série des dénominateurs. Du côté des modules d'Iwasawa, les candidats naturels ne sont pas de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa.

Indiquons grossièrement comment ces difficultés peuvent être surmontées.

D'abord, toutes les sortes de fonctions L p-adiques que nous construisons dépendront d'un paramètre appartenant à une puissance extérieure convenable du module de Dieudonné-Fontaine D associé à la représentation p-adique. Lorsqu'elles seront évaluées au caractère trivial $\mathbf{1}$, apparaît alors la même puissance extérieure d'un opérateur $(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}$ où φ est l'opérateur de Frobenius agissant sur D. Les valeurs propres de cet opérateur permettent d'expliquer les facteurs d'Euler "bizarres" apparaissant dans les formules d'interpolation.

Du côté de la théorie d'Iwasawa arithmétique, nous n'essayons pas de construire un module de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa, qui à notre avis n'a en général pas de raison d'exister. Très grossièrement dit, nous nous contentons d'utiliser des modules construits à partir de la cohomologie galoisienne "non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places S suffisamment grand" H^1 et H^2 et de les "mesurer" à l'aide d'une application "logarithme élargi" ou régulateur à valeurs dans le produit tensoriel de D et d'une algèbre de fonctions contenant l'algèbre d'Iwasawa.

Pour préciser un peu cela, fixons quelques notations.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Si F est un corps de nombres contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}$, on pose $\overline{F}=\overline{\mathbb{Q}}$, $G_F=\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit p un nombre premier impair. On choisit dans tout le texte un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On fixe un corps de nombres F non ramifié en p. On note $F_\infty = F(\mu_{p^\infty})$ et $F_n = F(\mu_{p^{n+1}})$. On pose $G_n=\mathrm{Gal}(F_n/F)$, $G_\infty=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. Le groupe G_∞ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$. Si S est un ensemble fini de places contenant les places à l'infini, les places divisant p, on note $G_{S,F}$ le groupe de Galois de la plus grande extension algébrique de F non ramifiée en dehors de S.

Soit V une représentation p-adique pseudo-géométrique de G_F (non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places de F et de de Rham aux places de F divisant p) et cristalline en toutes les places divisant p. Soit S un ensemble fini de places contenant les places divisant p, l'infini et les places où V est ramifiée. Ainsi, V est une représentation p-adique de $G_{S,F}$. Nous attachons à tout réseau $\mathbf{T}$ de V stable par G_F un Λ-module de rang ≤ 1, noté $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ et que l'on appelle **module des fonctions L p-adiques arithmétiques de $\mathbf{T}$**. La construction est fonctorielle en $\mathbf{T}$, multiplicative en les suites exactes, compatible aux homomorphismes de twist par la représentation $\mathbb{Q}_p(j)$ de Tate pour tout entier j et l'on a une équation fonctionnelle lorsque l'on change V en $V^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p(1))$ et $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}, \mathbb{Z}_p(1))$. Plus précisément, si $\mathbf{D}_p(V)$ est le φ-module filtré associé par la théorie de Fontaine à $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$ sur $\mathbb{Q}_p$, le Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ est naturellement contenu (à un grain de sel près) dans $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \wedge^*\mathbf{D}_p(V^*(1))$ où $\mathcal{K}(G_\infty)$ est l'anneau total des fractions d'une algèbre $\mathcal{H}(G_\infty)$ contenant l'algèbre d'Iwasawa Λ et où $\wedge^*\mathbf{D}_p(V^*(1))$ est l'algèbre extérieure de $\mathbf{D}_p(V^*(1))$ (on peut en fait remplacer $\mathcal{K}(G_\infty)$ par $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes Frac(\Lambda)$ où $Frac(\Lambda)$ est l'anneau total des fractions de Λ). Si l'on considère la composante $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ fixée par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}(\mu_p)^+)$, la puissance extérieure convenable est la puissance d_+-ième où d_+ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$ fixé par une conjugaison complexe.

Comment construit-on ce Λ-module ? Le premier ingrédient est le logarithme élargi $\mathcal{L}_V$ qui est un homomorphisme de Λ-modules

$$Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T}) \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$$

où $Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T})$ est la limite projective des $\oplus_{v|p} H^1(F_{n,v}, \mathbf{T})$. Cet homomorphisme (ou plutôt son inverse Ω_V) est construit dans [P94] (il dépend d'un entier h mais nous l'oublierons et ne tiendrons pas compte de cette difficulté un peu technique dans l'introduction, quitte à être incorrect). L'existence de Ω_V et de $\mathcal{L}_V$ repose sur des propriétés d'analycité des logarithmes de Bloch-Kato associés aux twists $V(j)$ de V pour j assez grand. Par exemple, une conséquence de ces propriétés de continuité est que pour v divisant p, si j et j' sont des entiers assez grands congrus modulo $(p-1)p^n$, si $P \in H^1(F_v, T(j))$ et $P' \in H^1(F_v, T(j'))$ sont congrus modulo p^{n+1} (c'est-à-dire que leurs projections dans $H^1(F_v, T(j)/p^{n+1}T(j)) \cong H^1(F_v, T(j')/p^{n+1}T(j'))$ sont égales), les logarithmes de Bloch-Kato de P et de P' relativement à $V(j)$ et à $V(j')$ respectivement et convenablement modifiés sont congrus modulo p^n. Pour un énoncé exact, cf. §4.5 et en particulier §4.5.5.

Revenons à la construction de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ ou plutôt de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ pour simplifier. Si M est un $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$-module, on note M_+ le sous-module de M fixé par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}(\mu_p)^+)$. On peut voir $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ comme un sous-Λ-module de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_+)$$

par l'isomorphisme $\mathcal{K}(G_\infty)_+ \otimes \wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V^*(1)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_+)$. Considérons les Λ-modules

$$H^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) = \varprojlim_n H^i(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) \ .$$

Par localisation, on obtient un homomorphisme de Λ_+-modules de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$ dans $Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})_+$. A des facteurs techniques près, si $n \in \wedge^{d_+}\mathbf{D}_p(V)$, $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+(n)$ est essentiellement

$$\Lambda_+ f_+(H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})).n \wedge \det_{\Lambda_+}\mathcal{L}_V(H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+)$$

où $f_+(H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))$ est une série caractéristique du Λ_+-module $H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$. Ainsi, $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ mesure à la fois la position de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$ dans $\mathcal{K}(G_\infty)_+ \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))$ par l'application logarithme (régulateur) et la taille de $H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$.

Pour que cette définition ne donne pas un Λ-module nul, nous devons supposer vraies les conjectures dites de Leopoldt faibles pour V et pour $V^*(1)$, ce que l'on note ici $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$: il s'agit de la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$ et de $H^2(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$. Nous conjecturons donc $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$ et montrons que $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ est alors libre de rang 1.

Sous certaines hypothèses de régularité, il est d'autre part possible de calculer à une unité près la valeur en $\mathbf{1}$ du coefficient dominant d'un générateur de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$. Ce calcul fait en particulier apparaître l'opérateur

$$\wedge^{d_+}(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}$$

(qui intervenait déjà dans les propriétés d'interpolation des logarithmes) et les nombres (ou leurs analogues p-adiques quand il s'agit de périodes complexes) intervenant dans les conjectures de Bloch-Kato. Cela nous permettra de faire des comparaisons entre nos conjectures et les conjectures de Bloch-Kato dans le cadre motivique.

De même, si V est toujours une représentation pseudo-géométrique cristalline aux places divisant p et si c est une conjugaison complexe, on attache à (V, c) un Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(V, c)$ libre de rang 1 contenu dans l'anneau total des fractions $\mathbb{K}$ de $\mathbb{H} = B_{cris} \otimes \mathcal{H}(G_\infty)$. Le Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(V, c)$ est obtenu à partir de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ par une projection convenable. Contrairement à $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$, il est indépendant du choix de $\mathbf{T}$.

Lorsque V est la représentation p-adique de $G_{\mathbb{Q}}$ associée à une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ ayant bonne réduction en p, $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ est lié au sous-Λ-module $\mathcal{I}_{arith}(\mathbf{T})$ de $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ défini dans [P93]. Pour $V = \mathbb{Q}_p(j)$, on retrouve l'idéal caractéristique de certains modules d'Iwasawa classiques (2.5, voir aussi [P]).

Soit maintenant M une structure motivique sur $\mathbb{Q}$ au sens de [FP94], de réalisation de de Rham M_{dR}, de réalisation de Betti M_B et de réalisation l-adique M_l. Sa réalisation p-adique M_p est une représentation p-adique pseudo-géométrique de G_F. Supposons de plus qu'elle soit cristalline aux places de F divisant p. Le facteur d'Euler en p de la fonction L complexe peut être interprété comme le polynôme caractéristique de l'"opérateur de Frobenius" φ agissant sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbf{D}_p(M_p) \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M_{dR}$ (dans les exemples évoqués, M_p est le tensorisé avec $\mathbb{Q}_p$ du module de Tate des racines p^n-ièmes de l'unité ou des points d'ordre une puissance de p de la courbe elliptique).

Soit $\mathcal{M}$ une $\mathbb{Z}$-structure sur M, c'est-à-dire la donnée d'un sous-$\mathbb{Z}$-module libre maximal $\mathcal{M}$ de M_B et pour tout nombre premier l d'un $\mathbb{Z}_l$-module libre maximal $\mathcal{M}_l$ de M_l stable par $G_{\mathbb{Q}}$ et tel que $\mathbb{Z}_l \otimes \mathcal{M} = \mathcal{M}_l$. On peut alors définir le Λ-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathcal{M}_p)$. D'autre part, M admet une fonction L complète $\mathbf{L}^\infty(M)$:

$$\mathbf{L}^\infty(M,s) = \prod_{l \in \overline{P}} L_l(M,s)$$

où $\overline{P}$ est l'ensemble formé par les nombres premiers et ∞. Notons $\mathbf{L}^\infty(M,\eta,s)$ la fonction L tordue par un caractère de Dirichlet η. En utilisant les valeurs spéciales de $\mathbf{L}^\infty(M,\eta,j)$ pour j entier et η caractère d'ordre fini de conducteur une puissance de p, nous donnons une conjecture sur l'existence d'un **générateur privilégié** de $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathcal{M}_p)$ qui sera noté $\mathbf{L}^{p,2i\pi}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ (il dépend aussi du choix de $2i\pi$ à la fois p-adique et complexe). C'est **la fonction L p-adique de $\mathcal{M}$**. Une fois les objets définis, une grande partie du travail est de vérifier les compatibilités entre les conjectures faites et les conjectures à la Bloch et Kato, l'équation fonctionnelle, les exemples déjà connus ...

Donnons quelques précisons sur les propriétés définissant (conjecturalement) la fonction L p-adique $\mathbf{L}^{p,2i\pi}_{\{p\}}(\mathcal{M})$. Celle-ci est caractérisée par ses valeurs sur χ^j pour j assez grand (χ est le caractère cyclotomique). Rappelons que pour j assez grand, les conjectures de Beilinson prédisent que le quotient de $L(M(j),0)$ par une certaine période $\underline{\mathrm{Per}}_{\mathcal{M}(j)}$ est un nombre rationnel. Cette période est le déterminant (dans des bases rationnelles) de $H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)) \to \mathbb{C} \otimes M_{dR}(j)/\mathbb{C} \otimes M_B(j)^+$ pour

$H^1_f(\mathbb{Q}, M(j))$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des points motiviques de $M(j)$. Nous définissons de même une période p-adique $\mathrm{Per}_{M(j)_p}(n)$ pour $n \in \wedge^{d+} M_B$. Posons d'autre part $\mathbf{L}^{\infty}_{\{p,\infty\}}(M) = \prod_{l \text{ premier}, l \neq p} L_l(M, s)$. Alors,

$$\wedge^{d+}((1 - p^j\varphi)^{-1}(1 - p^{-j-1}\varphi^{-1}))\chi^{-j}\mathbf{L}^{p,2i\pi}_{\{p\}}(\mathcal{M})$$

est essentiellement égal (pour j pair) à

$$\frac{\mathbf{L}^{\infty}_{\{p,\infty\}}(M(j), 0)}{\underline{\mathrm{Per}}_{\mathcal{M}(j)}} \mathrm{Per}_{M(j)_p}$$

(il y a aussi des factorielles que nous ne précisons pas dans cette présentation). Nous renvoyons au corps du texte pour les formules précises (cf. aussi[Pa]).

Ce texte fait suite à [P94] où est construit ce que nous avons appelé ci-dessus le logarithme élargi. Le cas particulier des courbes elliptiques a été traité en détail dans [P93] (voir aussi [BP93]). Toutes les représentations p-adiques considérées sont supposées pseudo-géométriques et cristallines aux places divisant p et définies sur un corps de nombres non ramifié en p. On aurait aimé pouvoir aussi traiter le cas des représentations p-adiques semi-stables. C'est le manque de théorie locale dans ce cadre-là qui nous en a empêché. On s'appuie aussi sur [FP91] ou [FP94] pour les notions de "base" sur les représentations géométriques, les $\mathbb{Z}_p$-modules $H^1_f(F, \mathbf{T})$, les structures motiviques...

Nous avons d'autre part pris le point de vue de ne pas parler de motifs et de cohomologie de variétés projectives, en particulier dans les trois premières parties, mais uniquement de représentations p-adiques. Bien sûr, si l'on veut vérifier les conjectures fondamentales sur les fonctions L p-adiques, les exemples à prendre se trouvent entre autres dans ces cohomologies.

Donnons un résumé rapide des différentes parties de ce texte.

Dans la partie 1, nous construisons le module des fonctions L p-adiques sans facteurs à l'infini d'une représentation V géométrique et cristalline en p en utilisant d'une part des résultats de cohomologie galoisienne et d'autre part la théorie locale développée dans [P94].

Dans la partie 2, nous définissons les facteurs à l'infini et le module des fonctions L p-adiques de V ; nous en étudions quelques propriétés dont l'équation fonctionnelle.

Dans la partie 3, nous définissons les périodes p-adiques et étudions leur lien avec la valeur en $\mathbf{1}$ à une unité près d'une base du module des fonctions L p-adiques.

Dans la partie 4, nous commençons une théorie des fonctions L p-adiques d'un motif dont la représentation p-adique associée est du type étudié précédemment.

Nous avons ajouté trois appendices. Le premier ne comporte pas de démonstrations et rappelle des résultats maintenant classiques de cohomologie galoisienne. Le deuxième précise la conjecture Leop(V) faite dans le texte et donne des exemples. Les cas où nous savons la montrer sont toujours des applications faciles de théorèmes difficiles (de Kolyvagin, Rubin, Flach entre autres).

Le troisième appendice, qui est un travail en collaboration avec J.-M. Fontaine, donne une conjecture sur le calcul de certains nombres de Tamagawa locaux. On y montre aussi comment cette conjecture locale permet de vérifier la compatibilité des conjectures à la Bloch-Kato à l'équation fonctionnelle. Il est totalement indépendant du reste.

Ce travail a été fait durant les années passées à l'université Pierre et Marie Curie. Je tiens en particulier à remercier de son accueil le laboratoire de Mathématiques fondamentales (équipe CNRS 747). Merci aussi à Pierre Colmez pour ses remarques toujours fructueuses.

Notations

i) Si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, on note V^* son dual :

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p) \ .$$

Si $\mathbf{T}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, $\mathbf{T}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}, \mathbb{Z}_p)$ est canoniquement contenu dans $(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T})^*$. On les notera aussi respectivement V^{-1} et $\mathbf{T}^{-1}$. Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module, on note $M\hat{}$ le dual de Pontryagin de M :

$$M\hat{} \ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \ .$$

ii) Si $A \subset R$ sont deux anneaux et si M est un A-module, on note $M_R = R \otimes_A M$ le R-module obtenu par extension des scalaires. Si α est une application A-linéaire de M dans N (où M et N sont des A-modules), on note α_R l'application obtenue par extension des scalaires : $M_R \to N_R$.

iii) Si L est un corps de nombres ou un corps local, on note $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers.

iv) On note $\mathbb{Z}_p(1)$ la limite projective des racines p^{n+1}-ièmes de l'unité et $\mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p(1)$. On note $\mathbb{Q}_p(0) = \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p(j) = \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes j}$ si $j > 0$, $\mathbb{Q}_p(j) = \mathbb{Q}_p(-j)^*$ si $j < 0$. On fixe un générateur ϵ (multiplicatif) de $\mathbb{Z}_p(1)$, c'est-à-dire un système de racines de l'unité $\zeta_n \in \mu_{p^{n+1}}$ d'ordre p^{n+1} tel que $(\zeta_{n+1})^p = \zeta_n$. On note $2i\pi$ l'élément de B_{cris} égal à $\log([\epsilon^p])$. On note χ le caractère cyclotomique de $G_{\mathbb{Q}}$. On a donc $g(2i\pi) = \chi(g)2i\pi$. Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}$ non ramifié en p. Si $G_\infty = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$, G_∞ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. Il s'écrit $G_\infty = \Gamma \times \Delta$ avec Δ d'ordre premier à p, $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ l'algèbre de groupes continue de G_∞. On note $\Lambda_\Gamma = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre continue de Γ et γ un générateur topologique de Γ. On a $\Lambda = \Lambda_\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\Delta]$. On pose $G_n = \mathrm{Gal}(F_n/F)$ avec $F_n = F(\mu_{p^{n+1}})$, $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n) = \Gamma^{p^n}$. On note ι l'involution de Λ induite par $\tau \mapsto \tau^{-1}$ pour $\tau \in G_\infty$. Si η est un caractère de Δ, on note e_η l'idempotent associé.

On note $\mathbf{1}$ (resp. $\mathbf{1}_\Delta$) le caractère trivial de G_∞ (resp. de Δ). Enfin, on note Tw l'opérateur twist de Λ induite par linéarité et par continuité par $\tau \mapsto \chi(\tau)\tau$.

v) Si V est une représentation p-adique de G_F, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_F (resp. si $\mathbf{T}$ est une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de G_F), on note $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$ (resp. $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbf{T})$) la représentation induite de V (resp. $\mathbf{T}$) de G_F à $G_\mathbb{Q}$. On note $d(V)$ la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$; on pose $\tilde{d}(V) = [F:\mathbb{Q}]d(V) = dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$. On note $V(j)$ la représentation p-adique $V \otimes \mathbb{Q}_p(j)$.

vi) On note $e_\pm$ l'idempotent de Λ relatif à la conjugaison complexe $c_\Delta \in \Delta \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$; si M est un Λ-module et si $m \in M$, on a $e_+(m) = (1+c_\Delta)(m)/2$, $e_-(m) = (1-c_\Delta)(m)/2$. On pose $M_\pm = e_\pm M$. Si η est un caractère de G_∞, on note $\epsilon(\eta)$ sa parité c'est-à-dire le signe de $\eta(c)$ pour c une conjugaison complexe (par exemple c_Δ). Si V est une représentation p-adique de G_F, on pose $d_\pm(V) = dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V))^{c=\pm 1}$ pour c une conjugaison complexe. On a donc $d_+(V) + d_-(V) = \tilde{d}(V)$.

vii) Si M est un Λ-module de type fini, on appelle abusivement sous-Λ-module de torsion de M le sous-module $t_\Lambda(M)$ tel que $e_\eta t_\Lambda(M)$ est le sous-$e_\eta\Lambda$-module de torsion de $e_\eta M$ pour tout caractère η de Δ. De même, M est dit de Λ-torsion si pour tout caractère η de Δ, $e_\eta M$ est un $e_\eta\Lambda$-module de torsion. Si M est un Λ-module de torsion, on note $f(M) \in \Lambda$ une série caractéristique. Si M est un Λ-module (resp. $\Lambda_\pm$-module) de type fini, on dit que M est de rang r sur Λ (resp. sur $\Lambda_\pm$) si $e_\eta M$ est un $e_\eta\Lambda$-module de rang r pour tout caractère η de Δ (resp. tout caractère η de Δ de parité $\pm$). D'autre part, on associe à tout Λ-module de type fini M un Λ-module libre de rang 1 noté $\det_\Lambda(M)$ ([KM76], cf. [P94, 3.1.5]). Il n'est unique qu'au signe près. Cela n'aura pas d'importance pour nous. Lorsque M est de Λ-torsion, $\det_\Lambda(M)$ est canoniquement contenu dans l'anneau total des fractions $Frac(\Lambda)$ de Λ et engendré par $f(M)^{-1}$. Si M est sans torsion, il s'injecte naturellement dans le Λ-module $M^{**} = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\Lambda),\Lambda)$ dont les η-composantes sont libres sur $e_\eta\Lambda$ et tout Λ-homomorphisme $g : M \to L$ se prolonge en une application $g : M^{**} \to L^{**}$; on peut définir la puissance extérieure r-ième de g, $\wedge^r g : \wedge^r M^{**} \to \wedge^r L^{**}$. En particulier si M est un Λ-module sans torsion de rang r et si L est libre, on en déduit une application

$$\wedge^r g : \det_\Lambda(M) = \det_\Lambda(M^{**}) \to \wedge^r L \ .$$

Si maintenant M n'est plus supposé sans torsion, on a

$$\det_\Lambda(M) \cong \det_\Lambda(t_\Lambda(M)) \otimes \det_\Lambda(M/t_\Lambda(M))$$

et on note encore

$$\wedge^r g : \det_\Lambda(M) \to Frac(\Lambda) \otimes \wedge^r L$$

l'application obtenue à partir des applications

$$\det_\Lambda(M/t_\Lambda(M)) \to \wedge^r L$$

et

$$\det_\Lambda(t_\Lambda(M)) \to Frac(\Lambda) \ .$$

La même chose peut être faite pour les $\Lambda_\pm$-modules de type fini.

viii) Si L est une extension de $\mathbb{Q}$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et M un G_L-module continu avec $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$, on note $H^i(L, M)$ les groupes de cohomologie galoisienne continue $H^i(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L), M)$. On renvoie à l'appendice A.

1. Construction du module des fonctions L p-adiques (sans facteur à l'infini)

Résumé. Nous rappelons ici des résultats locaux p-adiques et en particulier l'existence d'un homomorphisme "à la Coleman", sorte d'application exponentielle de $\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V)$ dans le Λ-module limite projective des $\oplus_{v|p} H^1(F_{n,v}, \mathbf{T})$ tensorisé sur Λ par un anneau de "fonctions" convenable ; l'inverse de cet homomorphisme est l'application "logarithme élargi" (ou encore régulateur) dont il a été question dans l'introduction. Nous montrons ensuite comment définir un module canoniquement associé à V à l'aide de cet homomorphisme, en utilisant les modules de cohomologie galoisienne "non ramifiée en dehors de S". Pour que ce module ne soit pas identiquement nul, nous sommes amenés à introduire les conjectures faibles de Leopoldt Leop$(V, V^*(1))$ pour V et $V^*(1)$.

1.1. Notations.

1.1.1. Deux anneaux jouent ici un rôle fondamental. Le premier est l'anneau des périodes B_{cris} dont nous ne rappelons pas la définition ([Bu]). Le second est lié à l'algèbre d'Iwasawa Λ. Pour $r \in \mathbb{N}$, soient $\mathcal{H}_r$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des éléments de $\mathbb{Q}_p[[X]]$ qui sont $o(\log^r(1+X))$ lorsque $|X| \to 1^-$, $\mathcal{H}_\infty$ la réunion des $\mathcal{H}_r$. Pour $1 \leq r \leq \infty$, on note $\mathcal{H}_r(\Gamma)$ l'ensemble des $h(\gamma-1)$ pour $h \in \mathcal{H}_r$ et $\mathcal{H}_r(G_\infty) = \mathcal{H}_r(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\Delta]$. On pose aussi $\mathcal{H}(G_\infty) = \mathcal{H}_\infty(G_\infty)$ et on note $\mathcal{K}(G_\infty)$ son anneau total des fractions. Si $\alpha \in \mathcal{H}_\infty(\Gamma)$, on note $\alpha_\pm$ l'élément de $\mathcal{H}(G_\infty)$ défini par $e_\pm\alpha_\pm = \alpha$, $e_{-\pm}\alpha_\pm = 1$.

On pose $\mathbb{H} = B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{H}(G_\infty)$. On note $\mathbb{K}$ l'anneau total des fractions de $\mathbb{H}$. L'anneau B_{cris} est naturellement plongé dans $\mathbb{H}$.

Nous renvoyons à [P94] pour une étude analytique de ces anneaux et leur lien avec les distributions p-adiques tempérées.

1.1.2. On note $S_p = S_p(F)$ l'ensemble des places de F au dessus de p. On a $S_p = S_p(F_\infty)$. On note S_∞ l'ensemble des places à l'infini de F. Si S est un ensemble de places, on note S_f le sous-ensemble des places finies de S. Si v est une place de F, on choisit une clôture algébrique $\overline{F}_v$ de F_v, on note $G_{F_v} = \mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ le sous-groupe de décomposition de v. Soit V une représentation pseudo-géométrique de G_F, cristalline aux places divisant p comme dans l'introduction. Lorsque v est une place de F divisant p, on note $\mathbf{D}_v(V)$ le φ-module filtré associé à la restriction de V à G_{F_v} : on a donc

$$\mathbf{D}_v(V) = (B_{cris,v} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{F_v}}$$

où $B_{cris,v}$ est l'anneau B_{cris} associé à $\overline{F}_v/F_v$. C'est un F_v-espace vectoriel de dimension $d(V)$. On note

$$\mathbf{D}_{F,p}(V) = \mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V) \cong \oplus_{v \in S_p}\mathbf{D}_v(V) \ .$$

C'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $\tilde{d}(V) = [F:\mathbb{Q}]d(V)$.

1.1.3. Pour toute place $v \in S_p$, Bloch et Kato ont défini une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire $\mathbf{D}_v(V) \to H^1(F_v, V)$ qu'on note $\exp_{F_v,V}$ et qu'on appelle exponentielle de V (cf. Appendice A.2.6). Lorsque 1 n'est pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_v(V)$, son image est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $H^1_f(F_v, V)$ défini par Bloch et Kato et $\exp_{F_v,V}$ est un isomorphisme de $t_{V,v} = \mathbf{D}_v(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_v(V)$ sur $H^1_f(F_v, V)$. On note alors $\log_{V,v}$ son application réciproque : $H^1_f(F_v, V) \to t_{V,v}$ et $\log_V$ la somme directe des $\log_{V,v}$, c'est un homomorphisme

$\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\oplus_{v\in S_p} H^1_f(F_v,V)$ dans $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. Si $\mathrm{Fil}^{-1}\mathbf{D}_p(V)$ est nul, le logarithme $\log_V$ est un isomorphisme de $\oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,V)$ sur $\mathbf{D}_p(V)$.

1.1.4. Notons φ l'application linéaire de $\mathbb{Z}_p[[T]]$ définie par

$$\varphi(g)(T) = g((1+T)^p - 1)$$

et ψ l'unique application linéaire de $\mathbb{Z}_p[[T]]$ telle que

$$\varphi\circ\psi(g)(T) = p^{-1}\sum_{\zeta\in\mu_p} g(\zeta(1+T)-1)\ .$$

On munit $\mathbb{Z}_p[[T]]^{\psi=0}$ de l'action linéaire continue de G_∞ induite par

$$\tau.(1+T) = (1+T)^{\chi(\tau)}$$

où χ est le caractère cyclotomique de G_∞ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$. Le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p[[T]]^{\psi=0}$ est ainsi muni d'une structure de Λ-module compact et est en fait un Λ-module libre de rang 1 de base $(1+T)$. Il est aussi muni d'une dérivation bijective $D = (1+T)d/dT$. On a $D(h.(1+T)) = Tw(h).(1+T)$ où Tw est l'opérateur twist de Λ.

1.2. Etude de quelques Λ-modules locaux.

1.2.1. On définit

$$\mathcal{D}_{\infty,p}(V) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{D}_p(V) \cong \oplus_{v|p} \mathcal{D}_{\infty,F_v}(V)$$

avec

$$\mathcal{D}_{\infty,F_v}(V) = \mathcal{O}_{F_v}[[\mathrm{Gal}(F_{\infty,v}/F_v)]] \otimes_{\mathcal{O}_{F_v}} \mathbf{D}_v(V)$$

où $\mathcal{O}_{F_v}$ est l'anneau des entiers de F_v. La notation est différente de celle de [P94] où l'on a posé $\mathcal{D}_{\infty,v}(V) = \mathcal{O}_{F_v}[[T]]^{\psi=0} \otimes_{\mathcal{O}_{F_v}} \mathbf{D}_v(V)$. Les deux modules sont canoniquement isomorphes par l'application linéaire et continue induite par $\tau \mapsto (1+T)^{\chi(\tau)}$.

Le $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$-module $\mathcal{D}_{\infty,p}(V)$ est un $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$-module libre de rang $\tilde{d}(V)$. Il est muni d'un endomorphisme de Frobenius φ, d'une filtration induite par celle de $\mathbf{D}_p(V)$. On note $\tilde{\Delta}_j : \mathcal{D}_{\infty,p}(V) \to \mathbf{D}_p(V)/(1-p^j\varphi)$ le composé de l'évaluation en $\chi^j : f \mapsto \chi^j(f)$ et de la projection de $\mathbf{D}_p(V)$ sur $\mathbf{D}_p(V)/(1-p^j\varphi)$. On pose $\tilde{\Delta} = \oplus \tilde{\Delta}_j$. On note e_{-j} la base canonique de $\mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Q}_p(j)) = (B_{cris} \otimes \mathbb{Q}_p(j))^{G_{\mathbb{Q}_p}}$: on a $\varphi e_{-j} = p^{-j} e_{-j}$, $\mathrm{Fil}^{-j}\mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Q}_p(j)) = \mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Q}_p(j))$, $\mathrm{Fil}^{-j+1}\mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Q}_p(j)) = 0$. On note aussi $\mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Q}_p(j)) = \mathbb{Q}_p[-j]$.

1.2.2. Posons $\mathcal{V}_{\infty,p}(V) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V$. C'est un $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$-module libre de rang $\tilde{d}(V)$. Toute conjugaison complexe c induit un automorphisme d'ordre 2 de $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V$. On la fait agir sur $\mathcal{V}_{\infty,p}(V)$ à travers l'action de c sur $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V$ et la multiplication par c_Δ sur Λ. Soit

$$\mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c) = (\Lambda \otimes \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=1} .$$

L'action de G_∞ sur Λ permet de munir $\mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c)$ d'une structure de Λ-module. Si $\mathbf{T}$ est un réseau de V stable par G_F, on pose $\mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T},c) = (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=1}$.

1.2.3. Comme V est cristalline en toutes les places au dessus de p, on a un isomorphisme canonique (isomorphisme de comparaison) de $G_{\mathbb{Q}_p}$-modules

$$B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V) \cong B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V) .$$

On en déduit un isomorphisme de $B_{cris} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$-modules

$$i_V : B_{cris} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}_{\infty,p}(V) \to B_{cris} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{D}_{\infty,p}(V)$$

et un homomorphisme injectif de $B_{cris} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$-modules

$$\beta_{V,c} : B_{cris} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c) \to B_{cris} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{D}_{\infty,p}(V) .$$

1.2.4. Si v est une place de F_∞, on note $Z^i_{\infty,v}(F,\mathbf{T})$ la limite projective relativement aux applications de normes des $H^i(F_{n,v},\mathbf{T})$. On pose $Z^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) = \oplus_{v\in S_f} Z^i_{\infty,v}(F,\mathbf{T})$ (resp. $Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}) = \oplus_{v\in S_p} Z^i_{\infty,v}(F,\mathbf{T})$).

Les Λ-modules $Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ et $Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})$ sont des Λ-modules de rang constant égal à $[F:\mathbb{Q}]d(V) = \tilde{d}(V)$ (cf. A.2.3).

On définit un opérateur de twist

$$Tw^\epsilon_{1,V} : Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}(1))$$

(voir A.4) qui dépend de ϵ et que l'on note aussi de manière assez parlante $x \mapsto x \otimes \epsilon$.

On déduit de [P94] une famille d'homomorphismes pour tout entier h assez grand (et pour tout h à condition de passer à l'anneau total des fractions)

$$\Omega^\epsilon_{V,h} : \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda \mathcal{D}_{\infty,p}(V) \to \mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})$$

vérifiant $\Omega^\epsilon_{V,h+1} = l_h \Omega^\epsilon_{V,h}$ avec $l_h = h - \log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ pour $\gamma \in G_\infty$ quelconque d'ordre infini. Rappelons le théorème définissant les $\Omega^\epsilon_{V,h}$ (version semi-locale de [P94]). Si $g \in \mathcal{D}_{\infty,p}(V)^{\tilde{\Delta}=0}$, on montre qu'il existe un élément $G \in \mathbb{Q}_p[[T]] \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)$ tel que $(1-\varphi)G = g.(1+T)$ et convergeant sur le disque unité ouvert. On pose

$$\Xi_{n,V}(g) = (p\otimes\varphi)^{-(n+1)}(G)(\zeta_n - 1) \in (\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V))/\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=1}\ .$$

Soit h un entier ≥ 1, supérieur à la longueur de la filtration de Hodge de V et tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$.

1.2.5. ***Théorème.*** *Il existe une unique famille de Λ-homomorphismes*

$$\Omega^\epsilon_{V(j),h+j} : \mathcal{D}_{\infty,p}(V(j))^{\tilde{\Delta}=0} \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes_\Lambda (Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T}(j))/ \oplus_{w\in S_p} \mathbf{T}(j)^{G_{F_{\infty,w}}})$$

pour $j \in \mathbb{Z}$ telle qu'on ait les propriétés suivantes :

(i) *pour tout entier j tel que $Fil^0\mathbf{D}_p(V(j)) = 0$, pour tout entier $n \geq 0$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_{\infty,p}(V(j))^{\tilde{\Delta}=0} & \longrightarrow & \mathcal{H}(G_\infty) \otimes (Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T}(j))/ \oplus_{v|p} \mathbf{T}(j)^{G_{F_{\infty,v}}}) \\
{\scriptstyle \Xi_{n,V(j)}} \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V(j)) & \xrightarrow{(h+j-1)!\exp_{F_{n,p},V(j)}} & \oplus_{v\in S_p} H^1(F_{n,v},V(j))
\end{array}$$

où l'application verticale de droite se déduit de la projection naturelle

$$Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T}(j)) \rightarrow \oplus_{v\in S_p} H^1(F_{n,v},\mathbf{T}(j))$$

et où

$$exp_{F_{n,p},V(j)} = \oplus_{v\in S_p} exp_{F_{n,v},V(j)}$$

est l'exponentielle de Bloch-Kato [1]*;*

(ii) *pour tout entier* j*, on a*

$$Tw^{\epsilon}_{1,V(j)} \circ \Omega^{\epsilon}_{V(j),h+j} \circ (Tw \otimes e_1) = -\Omega^{\epsilon}_{V(j+1),h+j+1} \ .$$

Rappelons que e_1 est la base de $\mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Q}_p(-1))$. Ensuite, donnons quelques précisions sur l'application

$$\mathcal{H}(G_\infty) \otimes (Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T}(j))/\oplus_{v|p}\mathbf{T}(j)^{G_{F_{\infty,v}}}) \rightarrow \oplus_{v\in S_p} H^1(F_{n,v},\mathbf{V}(j)) \ :$$

d'une part, pour j comme dans l'énoncé, les Γ_n-coinvariants de $\oplus_{v\in S_p}\mathbf{T}(j)^{G_{F_{\infty,v}}}$ sont en fait finis ; d'autre part, on montre que l'évaluation d'un élément de $\mathcal{H}(G_\infty)$ sur $\oplus_{v\in S_p} H^1(F_{n,v},\mathbf{T}(j))$ converge et est bien définie ([P94, 3.1.2]).

On en déduit une famille d'homomorphismes injectifs de $\mathbb{K}$-modules

$$\Omega^{\epsilon}_{V,h,\mathbb{K}} : \mathcal{D}_{\infty,p}(V)_{\mathbb{K}} \rightarrow Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})_{\mathbb{K}}$$

vérifiant

$$\Omega^{\epsilon}_{V,h+1,\mathbb{K}} = l_h \Omega^{\epsilon}_{V,h,\mathbb{K}}$$

pour tout entier h. On note $\Omega^{\epsilon}_{V,\mathbb{K}} = (\Omega^{\epsilon}_{V,h,\mathbb{K}})$ et $\Omega^{\epsilon}_V = (\Omega^{\epsilon}_{V,h})$.

1.2.6. Rappelons la conjecture sur le déterminant de $\Omega^{\epsilon}_{V,h}$ faite dans [P94]. Nous la présentons ici sous forme semi-locale. Le déterminant de $\Omega^{\epsilon}_{V,h}$ permet de définir une application $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$-linéaire

$$\det(\Omega^{\epsilon}_{V,h}) : \det_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{D}_p(V)) \otimes (\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i}) \rightarrow \mathcal{K}(G_\infty) \ .$$

Conjecture $(\delta(V))$. *L'image de* $\prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p} Fil^j \mathbf{D}_p(V)} \det(\Omega^{\epsilon}_{V,h})$ *est égale à* $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$.

[1] cf. A.2.6 pour des rappels

Pour justifier cette conjecture, rappelons quelques résultats de [P94]. L'opérateur $\prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)}\det(\Omega^{\epsilon}_{V,h})$ est indépendant de h et son image est contenue dans $\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$. De plus, cette conjecture est stable par suite exacte. Enfin, elle est démontrée pour les représentations p-adiques ordinaires en p. D'autre part, nous verrons après l'introduction de "facteurs Γ" comment réécrire cette conjecture de manière plus esthétique (cf. §2.1.3).

1.2.7. ***Lemme.*** *Si* $\mathbf{T}$ *est un réseau de* V *stable par* G_F*, l'image de*

$$\det{}_\Lambda \mathcal{V}_{\infty,p}(\mathbf{T})\otimes(\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det{}_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i})$$

par le déterminant de $\Omega^{\epsilon}_{V,h}\circ i_V$ *est indépendant du choix de* $\mathbf{T}$.

Démonstration. Posons

$$\Delta_\infty(\mathbf{T})^{-1}=\det{}_\Lambda\mathcal{V}_{\infty,p}(\mathbf{T})\otimes(\otimes(\det{}_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i})\ .$$

Toute suite exacte de représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de G_F

$$0\to\mathbf{T}'\to\mathbf{T}\to\mathbf{T}''\to 0$$

induit un isomorphisme canonique $\Delta_\infty(\mathbf{T})\cong\Delta_\infty(\mathbf{T}')\otimes\Delta_\infty(\mathbf{T}'')$. Il suffit donc de montrer que si $\mathbf{T}$ est fini, $\Delta_\infty(\mathbf{T})$ est canoniquement isomorphe à Λ. Lorsque $\mathbf{T}$ est fini, ce que l'on suppose maintenant, les modules $Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T})$ sont annulés par une puissance de p et l'image de

$$\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det{}_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i}$$

dans $Frac(\Lambda)$ est de la forme $p^{-\mu_{loc}}\Lambda$. Il suffit alors de vérifier que

$$\mu_{loc}=-[F:\mathbb{Q}]ord_p(\sharp\mathbf{T})\ .$$

Soit v une place de F_∞ au dessus de p. Comme $\mathbf{T}$ est fini, on déduit de la dualité locale que

$$Z^2_{\infty,v}(F,\mathbf{T})\cong H^0(F_{\infty,v},\mathbf{T}^\wedge(1))^\wedge$$

et que

$$Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})\cong H^1(F_{\infty,v},\mathbf{T}^\wedge(1))^\wedge\ .$$

D'où les isomorphismes

$$Z^2_{\infty,v}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n}\cong H^0(F_{n,v},\mathbf{T}^\wedge(1))^\wedge\ ,$$

$$Z^2_{\infty,v}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n}\cong H^1(F_{\infty,v}/F_{n,v},H^0(F_{\infty,v},\mathbf{T}^\wedge(1)))^\wedge$$

qui est de cardinal égal à celui de $H^0(F_{n,v},\mathbf{T}^\wedge(1))$ et

$$Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n}\cong(H^1(F_{\infty,v},\mathbf{T}^\wedge(1))^{\Gamma_n})^\wedge\ ,$$

$$Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n}\cong H^1(F_{\infty,v}/F_{n,v},H^1(F_{\infty,v},\mathbf{T}^\wedge(1))^\wedge\cong H^2(F_{n,v},\mathbf{T}^\wedge(1))^\wedge\ .$$

On en tire la suite exacte (par la suite exacte de restriction-inflation)

$$0 \to Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n} \to H^1(F_{n,v},\mathbf{T}^{\hat{}}(1))^{\hat{}} \to Z^2_{\infty,v}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n} \to 0 .$$

Par les théorèmes de structure sur les Λ-modules, le calcul de μ_{loc} se ramène à calculer des entiers μ_v tels que

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i ord_p(\sharp(e_\eta Z^i_{\infty,v}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n})) - \sum_{i=0}^{2}(-1)^i ord_p(\sharp(e_\eta Z^i_{\infty,v}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n})) = p^n\mu_v$$

c'est-à-dire tels que

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i ord_p(\sharp(e_\eta H^i(F_{n,v},\mathbf{T}^{\hat{}}(1)))) = p^n\mu_v$$

pour η caractère de Δ et e_η l'idempotent correspondant (ici Δ est vu comme $\mathrm{Gal}(F(\mu_p)/F)$). En utilisant le théorème sur la caractéristique d'Euler locale de Tate (cf. [Mi86, chapitre I]), on trouve

$$\mu_v = -ord_p(\sharp(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})) = -[F_v:\mathbb{Q}_p]ord_p(\sharp\mathbf{T}) .$$

On en déduit le lemme. Remarquons que le même calcul dans le cas où v ne divise pas p montre que l'image de $\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_\Lambda Z^i_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i}$ est Λ. $\square$

1.2.8. Soit $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Posons

$$t_H(V) = \sum_r r.dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^r\mathbf{D}_p(V) = \sum_r r\tilde{h}_r(V) .$$

Donnons une formulation un peu différente de la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ de [P94].

Conjecture ($\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$). *L'image de*

$$\det_\Lambda \mathcal{V}_\infty(\mathbf{T}) \otimes (\otimes_{i\in\{1,2\}}\det_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i})$$

par $(2i\pi)^{t_H(V)}\prod_{r>-h} l_{-r}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}Fil^r\mathbf{D}_p(V)}\det(\Omega^\epsilon_{V,h}\circ i_V)$ *est égale à* $u\Lambda \subset \mathbb{H}$ *où* u *est une unité de* $W(\overline{\mathbb{F}}_p)\otimes\mathbb{Z}_p[\Delta]$

De nouveau, cf. 2.1.3. La constante $(2i\pi)^{-t_H(V)}u$ provient du déterminant de l'isomorphisme de comparaison.

Rappelons que la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ est démontrée pour les représentations p-adiques cristallines ordinaires en p ([P94, proposition 4.2.5]) et qu'elle est stable par suite exacte. Enfin, cette formule ou plutôt sa valeur au caractère trivial est extrêmement liée aux conjectures locales de Tamagawa énoncées dans l'appendice C et qui généralisent la formule démontrée par Bloch et Kato pour $\mathbb{Q}_p(r)$ (cf. Appendice C). Ainsi, il est démontré dans [P94] que si $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$ (resp. en général), $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ implique ces conjectures locales de Tamagawa (resp. sous des conditions supplémentaires).

1.2.9. ***Remarque***. Soit $\mathbf{T}$ un réseau de V stable par G_F. On associe à $\mathbf{T}$ un sous-$\mathbb{Z}_p$-module $M(\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}))$ de $\det_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V)$ par la formule

$$M(\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T})) = ((2i\pi)^{t_H(V)}A_{cris} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}T))^{G_{\mathbb{Q}_p}}$$

où A_{cris} est un sous-anneau de B_{cris} (pour la définition de A_{cris}, voir l'exposé II de [Bu], on pourrait d'ailleurs remplacer ici A_{cris} par $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$). Par exemple, si $F = \mathbb{Q}$, $M(\mathbb{Z}_p(r))$ est le $\mathbb{Z}_p$-module engendré par e_{-r}.

1.3. Cohomologie galoisienne.

1.3.1. Soit S un ensemble fini de places de F contenant **les places au dessus de p, les places de mauvaise réduction de V et l'ensemble S_∞ des places à l'infini**. On note $S_f = S - S_\infty$. Soit $\mathbf{T}$ une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de G_F telle que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T} = V$. On note G_{S,F_n} le groupe de Galois sur F_n de la plus grande extension de F_n non ramifiée en dehors de S. On note $H^i(G_{S,F_n}, -)$ les groupes de cohomologie continue et $H^i(G_{S,F_\infty}, -)$ la limite inductive des $H^i(G_{S,F_n}, -)$ pour les applications de restriction. On pose pour $i \in \{0,1,2\}$

$$H^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) = \varprojlim_n H^i(G_{S,F_n}, \mathbf{T})$$

et

$$X^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) = H^i(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge \ .$$

Les Λ-modules $X^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ et $H^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ sont de type fini (cf. par exemple entre autres [P92, §3]). De plus, ces modules sont liés par la suite exacte de Λ-modules

$$(1.3.1)\quad 0 \to X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \\ \to H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to 0$$

qui se déduit par passage à la limite des suites exactes de Poitou-Tate pour F_n ([P92], loc. cité, cf. aussi A.3).

1.3.2. ***Proposition***. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *le Λ-module $H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ est de torsion ;*
(ii) *les $\Lambda_\pm$-modules $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm$ sont de rang $d_{-\pm}(V)$ sur $\Lambda_\pm$;*
(iii) *le Λ-module $X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))$ est nul ;*
(iv) *les $\Lambda_\pm$-modules $X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_\pm$ sont de rang $d_{-\pm}(V)$ sur $\Lambda_\pm$.*

La démonstration donne en fait que

$$rg_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm - rg_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm = d_{-\pm}(V)$$

et que

$$rg_{\Lambda_\pm} X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm - rg_{\Lambda_\pm} X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm = d_{\pm}(V) \ .$$

Démonstration. Montrons que le Λ-module $X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))$ est de torsion (ce que l'on va appeler (iii)') si et seulement si (iv) est vraie. On déduit de la suite exacte de

Hochschild-Serre et du fait que Γ_n est de dimension cohomologique 1 que l'on a les suites exactes

$$(1.3.2)\quad 0 \to H^1(\Gamma_n, (V/\mathbf{T})^{G_{F_\infty}}) \to H^1(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T}) \to H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})^{\Gamma_n} \to 0$$

et

$$(1.3.3)\quad 0 \to H^1(\Gamma_n, H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})) \to H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T}) \\ \to H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})^{\Gamma_n} \to 0\ .$$

D'où, en prenant le dual de Pontryagin et en remarquant que

$$H^1(\Gamma_n, (V/\mathbf{T})^{G_{F_\infty}})\hat{} = X^0_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n}\ ,$$

les suites exactes

$$(1.3.4)\quad 0 \to X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n} \to H^1(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})\hat{} \to X^0_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n} \to 0$$

et

$$(1.3.5)\quad 0 \to X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n} \to H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})\hat{} \to X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n} \to 0\ .$$

Remarquons que $X^0_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n}$ et $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n}$ sont des $\mathbb{Z}_p$-modules de rang borné par rapport à n (les $X^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ étant de type fini sur Λ). L'affirmation (iii)' est équivalente à ce que les $\mathbb{Z}_p$-modules $X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}$ soient de rang borné par rapport à n ; il en est alors de même des $H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})\hat{}$. Comme d'autre part, on a pour tout caractère d'ordre fini η de G_∞ et si $\epsilon(\eta)$ est le signe de $\eta(c)$,

$$rg_{\mathbb{Z}_p} e_\eta H^1(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T}) - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} e_\eta H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T}) = p^n d_{-\epsilon(\eta)}(V) + \alpha_n$$

où α_n est borné par rapport à n, on en déduit que (iii)' est équivalent à

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} e_\eta X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n} = p^n d_{-\epsilon(\eta)}(V) + \beta_n$$

avec β_n borné par rapport à n, c'est-à-dire à (iv).

Montrons que (i) et (iii)' sont équivalents. Comme $H^3(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) = 0$, on a l'isomorphisme

$$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) \cong H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})\ .$$

On en déduit facilement que

$$H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})/tor = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})\hat{}, \mathbb{Z}_p)$$

où tor désigne le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de torsion. En appliquant $\mathrm{Hom}(\, , \mathbb{Z}_p)$ à la suite exacte (1.3.5), on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})/tor \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow fini \ .$$

Si $X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ est de torsion, on a

$$\varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)), \Lambda)^\iota = 0 \ .$$

Donc,

$$\varprojlim_n H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})/tor = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\cup X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p)$$

est de torsion et il en est de même de $H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$. Réciproquement, si $H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est de Λ-torsion, il en est de même de $\varprojlim_n H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})/tor$. On en déduit que $\mathrm{Hom}_\Lambda(X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)), \Lambda)$ est de Λ-torsion, ce qui implique qu'il est nul et que $X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ est de torsion.

Montrons que (iii) et (iii') sont équivalents (théorème de Greenberg). En effet, $X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ est libre, car $X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}$ s'injecte dans le $\mathbb{Z}_p$-module libre

$$H^2(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})^\wedge = H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})^*$$

(on utilise ici le fait que p est impair).

Pour montrer que (ii) et (iii) sont équivalents, on utilise le lemme qui suit. □

1.3.3. Remarquons que le Λ-module $\mathbf{T}^{G_{F_\infty}} \cong \varprojlim_n H^1(\Gamma_n, \mathbf{T}^{G_{F_\infty}})$ s'injecte dans $H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$.

Lemme. *Le sous-Λ-module de torsion de $H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est isomorphe à $\mathbf{T}^{G_{F_\infty}}$. Le Λ-module $H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})/\mathbf{T}^{G_{F_\infty}}$ s'injecte dans $Hom_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)), \Lambda)^\iota$ avec un conoyau fini.*

Démonstration. La démonstration est très similaire à celle de [P92, proposition 4.2.3]. On part de la suite exacte (1.3.2), de l'isomorphisme

$$(H^1(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})^\wedge)^* = H^1(G_{S,F_n}, \mathbf{T})/tor$$

où *tor* est le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de torsion de $H^1(G_{S,F_n}, \mathbf{T})$ et de la suite exacte

$$fini \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes H^1(\Gamma_n, \mathbf{T}^{G_{F_\infty}}) \to H^1(\Gamma_n, (V/\mathbf{T})^{G_{F_\infty}}) \to fini \to 0$$

(cf. par exemple, [P92, loc. cit.]). En prenant le dual de Pontryagin puis en appliquant $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_p)$, on en déduit une injection

$$H^1(G_{S,F_n}, \mathbf{T})/tor + H^1(\Gamma_n, \mathbf{T}^{G_{F_\infty}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p)$$

dont le conoyau est fini d'ordre borné par rapport à n. Comme

$$tor + H^1(\Gamma_n, \mathbf{T}^{G_{F_\infty}})/H^1(\Gamma_n, \mathbf{T}^{G_{F_\infty}})$$

s'injecte dans le module de torsion de $H^1(G_{S,F_\infty}, \mathbf{T})$, il est d'ordre borné. Par passage à la limite projective, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathbf{T}^{G_{F_\infty}} \to H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)), \Lambda)^\iota \to fini\ .$$

D'où le lemme. $\square$

Conjecture (Leop(V)). *Les affirmations de la proposition 1.3.2 sont vraies : par exemple, le Λ-module $H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est de torsion.*

Remarques : i) Il est clair que si la conjecture Leop(V) est vraie, il en est de même de Leop($V(j)$) pour tout $j \in \mathbb{Z}$. D'autre part, soit $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ une suite exacte de représentations p-adiques. On déduit de la suite exacte

$$X^2_{\infty,S}(\mathbf{T}'^*(1)) \to X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)) \to X^2_{\infty,S}(\mathbf{T}''^*(1)) \to 0$$

que Leop(V) implique Leop(V''), que Leop(V') et Leop(V'') implique Leop(V).

ii) La conjecture Leop($\mathbb{Q}_p(r)$) est vraie pour tout entier r : il suffit en effet de vérifier que Leop($\mathbb{Q}_p$) est vraie ce qui est équivalent à la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, \mathbb{Q}_p(1)/\mathbb{Z}_p(1))$. Remarquons que le fait que Leop($\mathbb{Q}_p(1)$) soit vrai est un théorème d'Iwasawa, [Iw73].

iii) Il peut être commode de préciser la conjecture Leop(V) selon les caractères de Δ. Si η est un caractère de Δ, on note Leop(V, η) la propriété que $e_\eta H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est de torsion.

iv) Pour justifier le nom de conjecture de Leopoldt faible, rappelons que la conjecture de Leopoldt usuelle sur un corps de nombres F est équivalente à la nullité du groupe de cohomologie galoisienne $H^2(G_{S,F}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. On demande ici que $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$ soit nul.

v) Notons Leop($V, V^*(1)$) la réunion des conjectures Leop(V) et Leop($V^*(1)$).

Pour d'autres résultats, voir l'appendice B.

1.4. Module des fonctions L p-adiques (sans facteurs à l'infini).

1.4.1. Supposons Leop(V) vraie : le rang du $\Lambda_\pm$-module $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm$ est donc égal à $d_{-\pm}(V)$ et le Λ-module $H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ est de torsion. Posons

$$\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T}) = \otimes_{i\in\{1,2\}}(\det{}_\Lambda H^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i}$$

$$\Delta^{loc}_{\infty,S}(\mathbf{T}) = \otimes_{i\in\{1,2\}}(\det{}_\Lambda Z^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i}$$

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}) = \Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T}) \otimes \Delta^{loc}_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} .$$

Ce sont des Λ-modules libres de rang 1. Si D est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et n et m deux entiers, on pose

$$\wedge^{(n,m)}(\Lambda\otimes D) = \Lambda_+ \otimes \wedge^n D \oplus \Lambda_- \otimes \wedge^m D ,$$

où $\wedge^j D$ est la j-ième puissance extérieure de D. On pose

$$\underline{d}^+(V) = (d_+(V), d_-(V)), \quad \underline{d}^-(V) = \underline{d}^+(V^*(1)) = (d_-(V), d_+(V)) .$$

Pour tout entier h, on définit un Λ-homomorphisme :

$$\lambda_{\mathbf{T},S,h} : \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \to \wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{K}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))) ;$$

pour cela, on commence par identifier $\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{K}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$ à

$$\oplus_{\rho\in\{+,-\}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_\rho(V)}\mathbf{D}_p(V), \mathcal{K}(G_\infty)_\rho) .$$

Soient $s\in \wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V)$ et $\omega \in \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}$: $\omega = \omega_{loc,S}\otimes(\omega_{glob,S})^{-1}$ où $\omega_{loc,S}\in\Delta^{loc}_{\infty,S}(\mathbf{T})$ et $\omega_{glob,S}\in\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T})$; on définit $\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}(\omega)(s)$ comme l'élément de $\mathcal{K}(G_\infty)_\pm$ tel que

$$\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}(\omega)(s) e_\pm \omega^{-1}_{loc,S} = \wedge^{d_\pm(V)}\Omega^\epsilon_{V,h,\pm}(s)\wedge e_\pm\omega^{-1}_{glob,S} \tag{1.4.1}$$

dans $\mathcal{H}(G_\infty)_\pm \otimes_\Lambda \det_\Lambda Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})$ (rappelons que si M est un Λ-module de torsion, $\det_\Lambda(M)$ s'injecte naturellement dans $Frac(\Lambda)$). On définit ainsi un homomorphisme de Λ-modules :

$$\lambda_{\mathbf{T},S,h} : \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \to \wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{K}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))) .$$

On note $\lambda_{\mathbf{T},S}$ la famille des $\lambda_{\mathbf{T},S,h}$: on déduit des propriétés de $\Omega^\epsilon_{V,h}$ que

$$\lambda_{\mathbf{T},S,h+1,\pm} = l_h^{d_\pm(V)}\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm} .$$

De même, si c est une conjugaison complexe, notons $\xi_{V,c,h,\mathbb{H}}$ le composé de $\beta_{V,c,\mathbb{H}}$ et de $\Omega^\epsilon_{V,h,\mathbb{H}}$:

$$\xi_{V,c,h,\mathbb{H}} : \mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c)_\mathbb{H} \to \mathcal{D}_{\infty,p}(V)_\mathbb{H} \to Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})_\mathbb{H} \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\mathbb{H} .$$

On obtient une famille de Λ-homomorphismes

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S,h} : \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T},c) \to \mathbb{K}$$

dépendant de h et la famille $\lambda_{\mathbf{T},c,S}$ des $\lambda_{\mathbf{T},c,S,h}$ vérifie

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S,h+1,\pm} = l_h^{d_\pm(V)} \lambda_{\mathbf{T},c,S,h,\pm} \ .$$

Si $\omega \in \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}$ et si $v \in \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T},c)$, on a

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S}(\omega \otimes v) = \lambda_{\mathbf{T},S}(\omega)(\beta_{V,c,\mathbb{H}} v)$$

ou encore

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S}(\omega \otimes v)\omega_{loc,S}^{-1} = \wedge^{d^+(V)} \xi_{V,c,h,\mathbb{H}}(v) \wedge \omega_{glob,S}^{-1} \ .$$

1.4.2. ***Proposition.*** (i) $\mathrm{Leop}(V^*(1))$ *est vraie si et seulement si* $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\mathbb{K}}$ *s'injecte dans* $Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\mathbb{K}}$.

(ii) $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$ *implique que* $\lambda_{\mathbf{T},S}$ *est injectif.*

Démonstration. L'assertion (i) se déduit de la suite exacte (1.3.1). L'assertion (ii) se déduit de (i) et de la proposition 1.3.2, (i) et (ii). □

1.4.3. ***Lemme.*** *Le Λ-module engendré par l'image de*

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T},c)$$

par $\lambda_{\mathbf{T},c,S,h}$ *ne dépend que de* $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T}$.

Remarque : Le Λ-module engendré par l'image de $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}$ par $\lambda_{\mathbf{T},S}$ dépend par contre de $\mathbf{T}$.

Pour démontrer ce lemme, nous démontrons d'abord une propriété plus générale d'invariance par multiplicativité. Soit

$$(\beta) \qquad 0 \to \mathbf{T}' \to \mathbf{T} \to \mathbf{T}'' \to 0$$

une suite exacte de représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de $G_{S,F}$ telles que $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbf{T}$, $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbf{T}'$, $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbf{T}''$ soient cristallines aux places divisant p. Les suites exactes longues de cohomologie induisent des isomorphismes canoniques de Λ-modules

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}') \otimes \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}'') \cong \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})$$

$$\det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}',c) \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}'',c) \cong \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T},c) \ .$$

Si $\omega' \in \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}')^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}', c)$, $\omega'' \in \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}'')^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}'', c)$, on note $\omega'.\omega''$ l'image de $\omega' \otimes \omega''$ dans $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c)$.

Notons $\wedge^n_\beta \mathbf{D}_p(V^*(1))$ le sous-espace vectoriel de $\wedge^n \mathbf{D}_p(V^*(1))$ engendré par les $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ où au moins un vecteur parmi les e_i est dans $\mathbf{D}_p(V''^*(1))$. On a alors une application naturelle

$$\wedge^r \mathbf{D}_p(V'^*(1)) \otimes \wedge^s \mathbf{D}_p(V''^*(1)) \to \wedge^n \mathbf{D}_p(V^*(1)) / \wedge^n_\beta \mathbf{D}_p(V^*(1))$$

avec $n = r + s$. On pose

$$\begin{aligned}&\tilde{\wedge}^{d^+(V)}_\beta(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))\\ &\quad = \wedge^{d^+(V)}(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))) / \wedge^{d^+(V)}_\beta (\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))) .\end{aligned}$$

1.4.4. ***Proposition.*** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S,h}(\omega'.\omega'') = \lambda_{\mathbf{T},c,S,h}(\omega).\lambda_{\mathbf{T},c,S,h}(\omega'') \in \mathbb{K}$$

pour toute conjugaison complexe et

$$\lambda_{\mathbf{T},S,h}(\omega'.\omega'') \equiv \lambda_{\mathbf{T},S,h}(\omega) \otimes \lambda_{\mathbf{T},S,h}(\omega'')$$

dans $\mathbb{K} \otimes \tilde{\wedge}^{d^+(V)}_\beta \mathbf{D}_p(V^*(1))$.

L'argument est formel. La deuxième propriété signifie que si l'on a une suite exacte $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels avec N sous-espace vectoriel de $\mathbf{D}_p(V)$, $dim_{\mathbb{Q}_p} N = d_\pm(V)$, N' sous-espace vectoriel de $\mathbf{D}_p(V')$, $dim_{\mathbb{Q}_p} N' = d_\pm(V')$, N'' sous-espace vectoriel de $\mathbf{D}_p(V'')$, $dim_{\mathbb{Q}_p} N'' = d_\pm(V'')$, et si $n' \in \det_{\mathbb{Q}_p} N$, $n'' \in \det_{\mathbb{Q}_p} N''$, on a

$$\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}(\omega'.\omega'')(n' \wedge n'') = \lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}(\omega)(n').\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}(\omega'')(n'') .$$

1.4.5. Démontrons le lemme 1.4.3. Par multiplicativité, il suffit de montrer que lorsque $\mathbf{T}$ est fini, le Λ-module engendré par l'image de

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c)$$

par $\lambda_{\mathbf{T},c,S,h}$ est Λ. Supposons donc $\mathbf{T}$ fini. Les Λ-modules intervenant dans $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})$ sont de torsion (avant de prendre le déterminant) de même que $\mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c)$. L'application

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S} : \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c) \to \mathbb{K}$$

est l'application canonique

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det{}_{\Lambda}\mathcal{V}^{+}_{\infty,p}(\mathbf{T},c) \to \det{}_{\mathbb{K}}(0) = \mathbb{K} \ .$$

i) Calculons $\det_{\Lambda}\mathcal{V}^{+}_{\infty,p}(\mathbf{T},c)$. On a $\mathcal{V}^{+}_{\infty,p}(\mathbf{T},c) = (\Lambda \otimes \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=1}$. Comme $\mathcal{V}^{+}_{\infty,p}(\mathbf{T},c)_{\pm}$ est le produit tensoriel de $\Lambda_{\pm}$ avec le module fini $(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=\pm 1}$, sa série caractéristique est égale à $\sharp(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=\pm 1}$. On a donc

$$\det{}_{\Lambda}\mathcal{V}^{+}_{\infty,p}(\mathbf{T},c) = \prod_{\rho\in\{+,-\}} (\sharp(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=\rho.1})^{-1}\Lambda_{\rho} \ .$$

ii) L'image de $\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_{\Lambda}H^{i}_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^{i}}$ dans $Frac(\Lambda)$ est de même de la forme

$$(p^{-\mu_{+}}\Lambda_{+}, p^{-\mu_{-}}\Lambda_{-}) \ .$$

Le calcul de (μ_{+},μ_{-}) se ramène à calculer des entiers μ_{η} tels que

$$\sum_{i\in\{1,2\}} (-1)^{i} ord_{p}(\sharp(e_{\eta}H^{i}_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_{n}})) - \sum_{i\in\{1,2\}} (-1)^{i} ord_{p}(\sharp(e_{\eta}H^{i}_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_{n}})) = p^{n}\mu_{\eta}$$

pour η caractère de Δ. Nous allons montrer que le premier membre est égal à

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^{i} ord_{p}(\sharp(e_{\eta}H^{i}(G_{S,F_{n}},\mathbf{T}))) \ .$$

En utilisant le théorème sur la caractéristique d'Euler de Tate, on en déduira que

$$\mu_{\eta} = ord_{p}(\sharp(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=\eta(c)}) - [F:\mathbb{Q}]ord_{p}(\sharp\mathbf{T}) \ .$$

On déduit de la suite spectrale de Hochschild-Serre et du fait que $\Gamma_{n} = \mathrm{Gal}(F_{\infty}/F_{n})$ est de dimension cohomologique 1 que

$$H^{2}(G_{S,F_{n}},\mathbf{T}) \cong H^{1}(G_{S,F_{\infty}},\mathbf{T})_{\Gamma_{n}} \ .$$

D'où

$$H^{2}_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) = \varprojlim_{n} H^{2}(G_{S,F_{n}},\mathbf{T}) = H^{1}(G_{S,F_{\infty}},\mathbf{T}) \ ,$$

$$H^{2}_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_{n}} = H^{2}(G_{S,F_{n}},\mathbf{T})$$

et on a la suite exacte

$$(1.4.2) \qquad 0 \to H^{1}(\Gamma_{n},\mathbf{T}^{G_{F_{\infty}}}) \to H^{1}(G_{S,F_{n}},\mathbf{T}) \to H^{1}(G_{S,F_{\infty}},\mathbf{T})^{\Gamma_{n}} \to 0$$

c'est-à-dire la suite exacte

$$0 \to H^{1}(\Gamma_{n},\mathbf{T}^{G_{F_{\infty}}}) \to H^{1}(G_{S,F_{n}},\mathbf{T}) \to H^{2}_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_{n}} \to 0 \ .$$

Comme $H^1(G_{S,F_\infty},\mathbf{T})$ est fini, la limite projective des $H^1(G_{S,F_\infty},\mathbf{T})^{\Gamma_n}$ est nulle et on déduit de la suite exacte (1.4.2) que $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ est isomorphe à $\mathbf{T}^{G_{F_\infty}}$ et fini. Ainsi,

$$\begin{aligned} ord_p(\sharp(e_\eta H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n}))-ord_p(\sharp(e_\eta H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n})) \\ =ord_p(\sharp(e_\eta H^2(G_{S,F_n},\mathbf{T}))) - ord_p(\sharp(e_\eta H^1(G_{S,F_n},\mathbf{T}))) \\ + ord_p(\sharp(e_\eta(H^1(\Gamma_n,\mathbf{T}^{G_{F_\infty}}))) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ord_p(\sharp(e_\eta H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n}))-ord_p(\sharp(e_\eta H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n})) \\ =ord_p(\sharp(e_\eta(H^1(\Gamma_n,\mathbf{T}^{G_{F_\infty}}))) - ord_p(\sharp(e_\eta(H^0(F_n,\mathbf{T}))) \ . \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\{1,2\}}(-1)^i ord_p(\sharp(e_\eta H^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\Gamma_n}))- \sum_{i\in\{1,2\}}(-1)^i ord_p(\sharp(e_\eta H^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{\Gamma_n})) \\ =\sum_{i=0}^{2}(-1)^i ord_p(\sharp(e_\eta H^i(G_{S,F_n},\mathbf{T}))) \ . \end{aligned}$$

iii) D'après la démonstration du lemme 1.2.7, l'image de

$$\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_\Lambda Z^i_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i}$$

dans $\mathrm{Frac}(\Lambda)$ est de même de la forme $p^{-\mu_{loc}}\Lambda$ avec $\mu_{loc} = -[F:\mathbb{Q}]ord_p(\sharp\mathbf{T})$.

On déduit de (i), (ii), (iii) que, lorsque $\mathbf{T}$ est fini, l'image de $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}\otimes \det_\Lambda\mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T},c)$ par $\lambda_{\mathbf{T},c,S}$ dans $\mathbb{K}$ est Λ. Ce qui démontre le lemme 1.4.3.

1.4.6. Soit S' un ensemble de places contenant S. On a alors la suite exacte

$$\begin{aligned} 0\to H^1(G_{S,F},\mathbf{T})\to H^1(G_{S',F},\mathbf{T})\to \oplus_{v\in S'-S}H^1_{/f}(F_v,\mathbf{T}) \\ \to H^2(G_{S,F},\mathbf{T})\to H^2(G_{S',F},\mathbf{T})\to \oplus_{v\in S'-S}H^2(F_v,\mathbf{T})\to 0 \end{aligned}$$

où $H^1_{/f}(F_v,\mathbf{T}) = H^1(I_v,\mathbf{T})^{G_v/I_v}$ et I_v le sous-groupe d'inertie de G_v (cf. par exemple [FP94, II, 4.1.8]). En appliquant cette suite exacte à F_n, en prenant la limite projective sur n et en utilisant le fait que

$$\varprojlim_n H^1_{/f}(F_{n,v},\mathbf{T}) = \varprojlim_n H^1(F_{n,v},\mathbf{T})/\varprojlim_n H^1_f(F_{n,v},\mathbf{T}) = 0$$

pour toute place v ne divisant pas p ([P92], cf. A.2), on obtient la suite exacte de Λ-modules

$$\begin{aligned} (1.4.3)\quad 0\to H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to H^1_{\infty,S'}(F,\mathbf{T})\to 0\to H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to H^2_{\infty,S'}(F,\mathbf{T}) \\ \to \oplus_{v\in S'-S}(\oplus_{w|v}Z^2_{\infty,w}(F,\mathbf{T}))\to 0 \end{aligned}$$

où w parcourt les places de F_∞ au dessus de v. En particulier, on a

$$H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \cong H^1_{\infty,S'}(F,\mathbf{T}) .$$

On a d'autre part les suites exactes

$$0 \to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^2_{\infty,S'}(F,\mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S'-S}(\oplus_{w|v} Z^2_{\infty,w}(F,\mathbf{T})) \to 0 ,$$

$$0 \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S'}(F,\mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S'-S}(\oplus_{w|v} Z^1_{\infty,w}(F,\mathbf{T})) \to 0 .$$

D'où l'isomorphisme

$$\Delta_{\infty,S'}(\mathbf{T}) = \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}) \otimes \otimes_{v\in S'-S}(\det_\Lambda \oplus_{w|v} Z^1_{\infty,w}(F,\mathbf{T}) .$$

Pour $v \in S'-S$, $Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})$ est de torsion sur Λ. On en déduit que si $\omega' = \omega \otimes (\otimes_{v\in S'-S}\omega_v)$ avec $\omega' \in \Delta_{\infty,S'}(\mathbf{T})$, $\omega \in \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})$, $\omega_v \in \det_\Lambda \oplus_{w|v} Z^1_{\infty,w}(F,\mathbf{T})$ et si $\eta \in \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T})$

$$\lambda_{\mathbf{T},c,S'}(\omega'^{-1}\otimes\eta) = \lambda_{\mathbf{T},c,S}(\omega^{-1}\otimes\eta) \otimes_{v\in S'-S} \omega_v^{-1} .$$

De même, on a

$$\lambda_{\mathbf{T},S'}(\omega'^{-1}\otimes\eta) = \lambda_{\mathbf{T},S}(\omega^{-1}\otimes\eta) \otimes_{v\in S'-S} \omega_v^{-1} .$$

Remarquons pour se rassurer que l'image de

$$\det_\Lambda(\oplus_{w|v} Z^1_{\infty,w}(F,\mathbf{T})) = \det_\Lambda(\oplus_{w|v} \mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}})$$

dans $\mathrm{Frac}(\Lambda)$ pour v ne divisant pas p, ne dépend que de $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T}$. Cette étude justifie la définition qui suit :

1.4.7. Soit Σ un ensemble fini de places **contenant** S_∞ et S_p. On pose

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = (\prod_{v\in S-\Sigma} \det_\Lambda(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}))\lambda_{\mathbf{T},S}(\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}) ,$$

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(V,c) = (\prod_{v\in S-\Sigma} \det_\Lambda(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}))\lambda_{\mathbf{T},c,S}(\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}\otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}))$$

où S est un ensemble fini quelconque de places contenant Σ et les places de mauvaise réduction de V. Remarquons que

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = (\mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T}))_{h\in\mathbb{Z}}$$

où les $\mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T})_\pm$ vérifient

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma,h+1}(\mathbf{T})_\pm = l_h^{d_\pm(V)}\mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T})_\pm$$

et de même pour $\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(V,c)$.

En vertu de 1.4.6, $\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})$ ne dépend pas du choix de S et si Σ' est un ensemble fini de places contenant Σ, on a

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma'}(\mathbf{T}) = \mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) \prod_{v\in\Sigma'-\Sigma} (\det_\Lambda(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}))^{-1} ,$$

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma'}(V,c) = \mathbb{I}_{arith,\Sigma}(V,c) \prod_{v\in\Sigma'-\Sigma} (\det_\Lambda(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}))^{-1} .$$

On pose pour simplifier

$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T}) = \mathbb{I}_{arith,S_p\cup S_\infty}(\mathbf{T}) ,$$

$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(V,c) = \mathbb{I}_{arith,S_p\cup S_\infty}(V,c)$$

Ainsi, si S est un ensemble fini de places contenant S_∞, S_p et les places où V a mauvaise réduction, on a

$$\mathbb{I}_{arith,S}(\mathbf{T}) = \lambda_{\mathbf{T},S}(\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}) ,$$

$$\mathbb{I}_{arith,S}(V,c) = \lambda_{\mathbf{T},c,S}(\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c)) .$$

On peut voir les termes $\det_\Lambda(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}})$ comme un analogue des facteurs d'Euler. Nous y reviendrons au paragraphe 2.2.3.

Si Σ est contenu dans S et contient S_p et S_∞, posons

$$\Delta_{\infty,\Sigma}(\mathbf{T}) = \Delta_{\infty,S}(\mathbf{T}) \otimes (\otimes_{v\in S-\Sigma}\det_\Lambda(\oplus_{w|v}Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})))^{-1} ,$$

$$\lambda_{\mathbf{T},\Sigma,h} : \Delta_{\infty,\Sigma}(\mathbf{T})^{-1} \to \wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{K}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$$

et

$$\lambda_{\mathbf{T},c,\Sigma,h} : \Delta_{\infty,\Sigma}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}) \to \mathbb{K}$$

les applications qui se déduisent respectivement de $\lambda_{\mathbf{T},S}$ et de $\lambda_{\mathbf{T},c,S}$ (pour S contenant S_∞, S_p, Σ et les places de mauvaise réduction). On a alors pour $S_\infty \cup S_p \subset \Sigma$

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T}) = \lambda_{\mathbf{T},\Sigma,h}(\Delta_{\infty,\Sigma}(\mathbf{T})^{-1})$$

et

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = \lambda_{\mathbf{T},\Sigma}(\Delta_{\infty,\Sigma}(\mathbf{T})^{-1}) .$$

On déduit de la proposition 1.4.2 la proposition suivante :

Proposition. *Si* Leop$(V,V^*(1))$ *est vraie, les* Λ*-modules* $\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})$ *sont libres de rang 1.*

1.4.8. On déduit de la proposition 1.4.4 la proposition suivante :

Proposition. *Soit*

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte de représentations p-adiques de $G_{S,F}$ géométriques et cristallines aux places divisant p. Si Σ est un ensemble fini de places contenant S_∞ et S_p et si l'extension (β) a bonne réduction en dehors de Σ,

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T}) \equiv \mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T}') \otimes \mathbb{I}_{arith,\Sigma,h}(\mathbf{T}'')$$

dans $\tilde{\wedge}_{\beta}^{d^+(V)}\mathbb{K} \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))$.

1.4.9. ***Remarque.*** Supposons $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ vraie ; alors, si $e_\mathbf{T}$ est une base de $M(\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}))$,

$$\prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)} \det(\Omega_{V,h})(e_\mathbf{T})$$

est une base de $\Delta^{loc}_{\infty,S_p}(\mathbf{T})$ (cf. 1.2.9). On en déduit une autre définition possible de $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T})$ par

$$(1.4.4) \quad \mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T})_\pm(s)e_\mathbf{T} = \prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)} \det{}_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T})_\pm \; s \wedge (\wedge^{d-\pm(V)}(\Omega^\epsilon_{V,h,\pm})^{-1}(\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T})_\pm^{-1}))$$

pour $s \in \wedge^{d\pm(V)}\mathbf{D}_p(V)$ et pour h assez grand.

2. MODULES DES FONCTIONS L p-ADIQUES DE V

Résumé. Nous avons défini dans le paragraphe précédent un Λ-module libre

$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T}) = (\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T}))_{h\in\mathbb{Z}}$$

où $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T})$ appartient à $\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$. Nous allons maintenant à l'aide d'un opérateur que nous traitons comme un facteur à l'infini enlever la dépendance en h et définir un Λ-module libre $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ de rang 1, sous-Λ-module de $\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$. Pour définir cet opérateur, on commence par définir un opérateur $\mathbb{\Gamma}(j)$ pour tout entier j. Le facteur à l'infini est alors à quelque chose près défini comme un opérateur $\prod_q \mathbb{\Gamma}(-q)^{n_q^{\pm}(V)}$ pour certains entiers $n_q^{\pm}(V)$. Dans certains cas, la définition à prendre pour les $n_q^{\pm}(V)$ est claire. En général, nous ne savons donner une "bonne définition" de ce facteur à l'infini qu'en s'appuyant sur des conjectures difficilement vérifiables, ce qui sera fait en §3. Le problème est en fait analogue à celui de donner une bonne définition des facteurs à l'infini pour des motifs mixtes. Bien qu'il soit agréable d'avoir une jolie définition, on peut toujours prendre le facteur à l'infini du semi-simplifié du motif. Il en est de même ici. Aussi, dans le doute, sommes-nous amenés à considérer tous les choix raisonnables de facteur à l'infini. Nous vérifions ensuite la cohérence de nos définitions en regardant le comportement par twist, la multiplicativité et en démontrant une équation fonctionnelle.

Pour expliquer notre opérateur $\mathbb{\Gamma}(j)$, faisons quelques considérations sans leur donner un sens mathématique précis (cela sera fait dans le paragraphe 2.1). On aimerait poser

$$\mathbb{\Gamma}(j) = \prod_{r\geq j} l_r^{-1}$$

pour tout entier j. On aurait alors $\mathbb{\Gamma}(j+1) = l_j\mathbb{\Gamma}(j)$ et $(\eta\chi^k)^{-1}(\mathbb{\Gamma}(j))$ serait infini pour tout caractère η d'ordre fini et k entier $\leq -j$. Ainsi, $\rho \mapsto \rho^{-1}(\mathbb{\Gamma}(0))$ aurait un pôle simple en tout caractère $\rho = \eta\chi^k$ avec η d'ordre fini et k entier négatif ou nul.

Rappelons à ce propos la formule classique

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\\ &=e^{-\gamma x}x^{-1} \prod_{1\leq n<\infty} \frac{ne^{x/n}}{x+n}\end{aligned}$$

et son interprétation par Deninger ([Den91])

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(z)^{-1} = \prod_{0\leq \nu<\infty} \frac{\nu+z}{2\pi}$$

où le produit est un produit "régularisé" permettant d'obtenir la convergence.

2.1. Facteurs Γ.

2.1.1. Si M est un $\mathbb{H}$-module, on note $\mathcal{L}_r(M)$ l'ensemble des familles $(\omega_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ de $M_{\mathbb{K}}$ vérifant $\omega_{h+1} = l_h^r\omega_h$. Alors $\mathcal{L}(M) = \oplus_r\mathcal{L}_r(M)$ est un $\mathbb{K}$-module gradué. On définit pour tout couple d'entiers (s,j) une application $\mathbb{\Gamma}(j)^s : \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(M)$ de degré $-s$ par la formule $(\omega_h)_{h\in\mathbb{Z}} \mapsto (\eta_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ avec $\eta_h = \prod_{j\leq i<h} l_i^{-s}\omega_h$ pour h assez grand (cela suffit à déterminer η_h pour tout h). En particulier, la restriction de $\mathbb{\Gamma}(j)^r$ à $\mathcal{L}_r(M)$ est l'opérateur de projection sur la j-ième composante : $\mathcal{L}_r(M) \to M_{\mathbb{K}}$ qui à $(\omega_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ associe ω_j ([P94, 3.3.3 et suivants]).

2.1.2. Si de plus M est muni d'une action d'une involution c, on pose pour simplifier $\mathcal{L}_{r,\pm}(M) = \mathcal{L}_r(M^{c=\pm 1})$; on a donc $\mathcal{L}_r(M) = \mathcal{L}_{r,+}(M) \oplus \mathcal{L}_{r,-}(M)$.

Soit M un $\mathbb{H}$-module. On note $\mathbb{\Gamma}_+(j)$ et $\mathbb{\Gamma}_-(j)$ les opérateurs de $\mathbb{H}$-modules de $\oplus_r\mathcal{L}_r(M)$ défini par

$$\mathbb{\Gamma}_+(j)(\omega) = (\mathbb{\Gamma}(j)e_+(\omega), e_-(\omega)),$$

$$\mathbb{\Gamma}_-(j)(\omega) = (e_+(\omega), \mathbb{\Gamma}(j)e_-(\omega)).$$

On a donc

$$\mathbb{\Gamma}_+(j)(\mathcal{L}_{r,+}(M)) \subset \mathcal{L}_{r-1,+}(M)\ ,\quad \mathbb{\Gamma}_+(j)(\mathcal{L}_{r,-}(M)) \subset \mathcal{L}_{r,-}(M),$$

$$\mathbb{\Gamma}_-(j)(\mathcal{L}_{r,+}(M)) \subset \mathcal{L}_{r,+}(M)\ ,\quad \mathbb{\Gamma}_-(j)(\mathcal{L}_{r,-}(M)) \subset \mathcal{L}_{r-1,-}(M).$$

Enfin, on a l'équation fonctionnelle

$$\mathbb{\Gamma}(j) = \mathbb{\Gamma}_+(j)\mathbb{\Gamma}_-(j)\ .$$

On peut ainsi donner un sens à

$$\prod_j \mathbb{\Gamma}_+(j)^{n_j}\mathbb{\Gamma}_-(j)^{m_j} : \oplus_r\mathcal{L}_r(M) \to \oplus_r\mathcal{L}_r(M)$$

pour toute famille d'entiers $(n_j), (m_j)$ nuls pour presque tout j. Remarquons que l'image de $\mathcal{L}_{r,+}(M)$ est contenue dans $\mathcal{L}_{r-\sum n_j,+}(M)$ et que l'image de $\mathcal{L}_{r,-}(M)$ est contenue dans $\mathcal{L}_{r-\sum m_j,-}(M)$. On dit que cet opérateur est de degré $(-\sum n_j, -\sum m_j)$.

On pose $2i\pi = \log([\epsilon^p]) \in B_{cris}$ où $\epsilon = (\zeta_n)$. On note $(2i\pi)_\pm$ les éléments de $B_{cris} \otimes \Lambda$ tels que $e_\pm((2i\pi)_\pm) = (2i\pi)_\pm$, $e_{-\pm}((2i\pi)_\pm) = 1$. On pose si $\rho \in \{+,-\}$

$$\mathbb{\Gamma}^\pi_\rho(n) = (2i\pi)_\rho^{-n}\mathbb{\Gamma}_\rho(n)\ .$$

2.1.3. ***Exemples***. (1) $\mathbb{I}_{arith,\Sigma,\pm}(\mathbf{T})$ est un sous-Λ-module de

$$\mathcal{L}_{d_\pm(V)}(\mathbb{K}\otimes\wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V^*(1)))\ .$$

(2) En posant

$$\tilde{h}_r(V)=dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^r\mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^{r+1}\mathbf{D}_p(V)\ ,$$

avec les notations précédentes et en notant $\Omega_V^\epsilon=(\Omega_{V,h}^\epsilon)$, la conjecture $\delta(V)$ (cf. 1.2.5) et la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ (cf. 1.2.7) disent que

(1) l'image de $\det_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{D}_p(V))\otimes(\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i})$ par

$$\prod_r \mathbb{\Gamma}(-r)^{\tilde{h}_r(V)}\det(\Omega_V^\epsilon)$$

est égale à $\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$,

(2) l'image de $\det_\Lambda\mathcal{V}_\infty(\mathbf{T})\otimes(\otimes_{i\in\{1,2\}}(\det_\Lambda Z^i_{\infty,p}(F,\mathbf{T}))^{(-1)^i})$ par

$$\prod_r \mathbb{\Gamma}^\pi(-r)^{\tilde{h}_r(V)}\det(\Omega_V^\epsilon\circ i_V)$$

est égale à $u\Lambda$

(les produits $\prod_r\mathbb{\Gamma}^\pi(-r)^{\tilde{h}_r(V)}$ sont des produits finis).

2.1.4. La donnée τ de quatre familles $(m_i^\pm(\tau))_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(m_i^{\pm,*}(\tau))_{i\in\mathbb{Z}}$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $m_i^\pm(\tau)$ et $m_i^{\pm,*}(\tau)$ sont nuls pour i assez grand ;
(ii) $m_i^\pm(\tau)=d_\pm(V)$ et $m_i^{\pm,*}(\tau)=d_{-\pm}(V)$ pour i assez petit ;
(iii) $m_{-i}^{\pm,*}(\tau)=m_i^\pm(\tau)-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V)+d_{-\pm}(V)$,

est appelée un type à l'infini de V. On associe à τ un type à l'infini τ^* de $V^*(1)$ par $m_i^\pm(\tau^*)=m_i^{\pm,*}(\tau)$ et $m_i^{\pm,*}(\tau^*)=m_i^\pm(\tau)$.

On pose alors $n_i^\pm(\tau)=m_i^\pm(\tau)-m_{i+1}^\pm(\tau)$, $n_i^{\pm,*}(\tau)=m_i^{\pm,*}(\tau)-m_{i+1}^{\pm,*}(\tau)$ et $t(\tau,\pm)=\sum_i in_i^\pm(\tau)$. Les propriétés (i), (ii) et (iii) impliquent que

(iv) $n_i^\pm(\tau)$ et $n_i^\pm(\tau^*)$ sont nuls pour presque tout i ;
(v) $\sum_i in_i^\pm(\tau)=d_\pm(V)$;
(vi) $n_i^\pm(\tau)+n_{-i-1}^\pm(\tau^*)=[F:\mathbb{Q}]h_i(V)=\tilde{h}_i(V)$;
(vii) $t(\tau,\pm)=t_H(V)+t(\tau^*,\pm)+d_{-\pm}(V)$.

Montrons (vii). On a

$$\begin{aligned}
t(\tau,\pm) =& \sum_i i n_i^{\pm}(\tau) = \sum_i i\tilde{h}_i(V) - \sum_i i n_{-i-1}^{\pm}(\tau^*) \\
=& t_H(V) - \sum_i (-i-1) n_i^{\mp}(\tau^*) \\
=& t_H(V) + t(\tau^*,\pm) + d_{\pm}(V^*(1)) \\
=& t_H(V) + t(\tau^*,\pm) + d_{-\pm}(V) \ .
\end{aligned}$$

Si τ est un type à l'infini de V, on note $\tau(j)$ le type à l'infini de $V(j)$ défini par $m_i^{\pm}(\tau(j)) = m_{i+j}^{\pm}(\tau)$ et $m_i^{\pm,*}(\tau(j)) = m_{i-j}^{\pm,*}(\tau)$.

2.1.5. Pour τ type à l'infini, on note $\mathbb{\Gamma}_\tau$ et $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi$ les opérateurs suivants de $\oplus_r \mathcal{L}_r$ de degré $(-d_+(V), -d_-(V))$:

$$\mathbb{\Gamma}_\tau = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_+(-i)^{n_i^+(\tau)} \Gamma_-(-i)^{n_i^-(\tau)}$$

et

$$\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_+^\pi(-i)^{n_i^+(\tau)} \Gamma_-^\pi(-i)^{n_i^-(\tau)} \ .$$

On a donc

$$e_\pm \mathbb{\Gamma}_\tau^\pi = (2i\pi)^{t(\tau,\pm)} e_\pm \mathbb{\Gamma}_\tau = (2i\pi)^{t(\tau,\pm)} \prod_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_\pm(-i)^{n_i^\pm(\tau)} \ .$$

2.1.6. Donnons deux exemples de types à l'infini. Le premier est relatif à une conjugaison complexe c. Notons B le corps des fractions de B_{cris}. Pour tout entier n, on définit une filtration sur $B \otimes \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)^{c=\pm 1}$ par

$$\gamma_c^{i,\varphi^n,\pm}(B\otimes V) = B \otimes \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)^{c=\pm 1} \cap B \otimes \varphi^n \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V) \ .$$

Il est clair que l'opérateur φ de $B \otimes \mathbf{D}_p(V)$, agissant comme l'identité sur $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$, induit un isomorphisme de B-modules de $\gamma_c^{i,\varphi^n,\pm}(B\otimes V)$ sur $\gamma_c^{i,\varphi^{n+1},\pm}(B\otimes V)$. En particulier, le rang $m_i^{\pm}(V,c)$ du B-espace vectoriel $\gamma_c^{i,\varphi^n,\pm}(B\otimes V)$ est indépendant de n. On pose

$$\begin{aligned}
m_i(V,c) =& m_i^+(V,c) + m_i^-(V,c) \\
n_i^{\pm}(V,c) =& m_i^{\pm}(V,c) - m_{i+1}^{\pm}(V,c) \\
n_i(V,c) =& n_i^+(V,c) + n_i^-(V,c) \ .
\end{aligned}$$

Remarquons que $m_i^{\pm}(V,c)$ est nul pour $i \gg 0$, que $m_i(V,c) = \tilde{d}(V)$ pour $i \ll 0$. Donc $\sum_i n_i(V,c) = \tilde{d}(V)$, $\sum_i n_i^{\pm}(V,c) = d_{\pm}(V)$. Si l'on définit $m_i^{\pm,*}(V,c) = m_i^{\pm}(V^*(1),c)$, nous montrerons dans le lemme 2.1.7 que les $(m_i^{\pm}(V,c), m_i^{\pm,*}(V,c))$ forment un type à l'infini de V que l'on note $\tau(V,c)$.

Le deuxième exemple ne dépend d'aucun choix. Posons

$$m_i^{\pm}(\tau_{min}(V)) = \inf_W \{dim_B W \cap (B \otimes \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V))\}$$

où la borne inférieure est prise sur les B-sous-espaces vectoriels de $B \otimes \mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_{\pm}(V)$. On définit de même

$$m_i^{\pm,*}(\tau_{min}(V)) = \inf\{dim_B W \cap (B \otimes \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V^*(1)))\}$$

où la borne inférieure est prise sur les B-espaces vectoriels W de $B \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))$ de dimension $d_{\pm}(V^*(1)) = d_{-\pm}(V)$. Remarquons que l'on a

$$m_i^{\pm}(V,c) \geq m_i^{\pm}(\tau_{min}(V)) ,$$

$$m_i^{\pm}(V^*(1),c) \geq m_i^{\pm,*}(\tau_{min}(V)) = m_i^{\pm}(\tau_{min}(V^*(1)))$$

2.1.7. ***Lemme.*** *Les $\tau(V,c) = (m_i^{\pm}(V,c), m_i^{\pm,*}(V,c))$ d'une part et $\tau_{min}(V)$ d'autre part sont des types à l'infini de V. Ainsi, on a*

$$m_{-i}^{\pm}(V^*(1),c) = m_i^{\pm}(V,c) - dim_{\mathbb{Q}_p} Fil^i \mathbf{D}_p(V) + d_{-\pm}(V)$$

$$m_{-i}^{\pm}(\tau_{min}(V^*(1))) = m_i^{\pm}(\tau_{min}(V)) - dim_{\mathbb{Q}_p} Fil^i \mathbf{D}_p(V) + d_{-\pm}(V) .$$

Démonstration. On doit donc montrer que

$$m_{-i}^{\pm}(\tau_{min}^*(V)) = m_i^{\pm}(\tau_{min}(V)) - dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V) + d_{-\pm}(V)$$

$$m_{-i}^{\pm}(V^*(1),c) = m_i^{\pm}(V,c) - dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V) + d_{-\pm}(V) .$$

Montrons les assertions relatives aux $m_i^{\pm}(\tau_{min}(V))$. Si W est de dimension $d_{\pm}(V)$, l'orthogonal de $W \cap (B \otimes \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V))$ est égal à la somme des orthogonaux de W et $B \otimes \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V)$ (on note l'orthogonal par $\perp$) et en posant $m_i^{\pm}(V,W) = dim_B W \cap (B \otimes \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V))$ et de même pour $m_{-i}^{\pm}(V^*(1), W^{\perp})$, on a donc

$$\begin{aligned}\tilde{d}(V) - m_i^{\pm}(V,W) = \tilde{d}(V) - d_{\pm}(V) + \tilde{d}(V) \\ - dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V) - m_{-i}^{\pm}(V^*(1), W^{\perp}) ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$m_i^{\pm}(V,W) = m_{-i}^{\pm}(V^*(1), W^{\perp}) + dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V) - d_{-\pm}(V) .$$

En prenant la borne inférieure sur les espaces W de dimension $d_{\pm}(V)$, puis en échangeant les rôles de V et $V^*(1)$, on obtient que

$$m^{\pm}_{-i}(\tau^*_{min}(V)) = m^{\pm}_i(\tau_{min}(V)) - dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V) + d_{-\pm}(V) \ .$$

Pour les $m_i(V, c)$, le même raisonnement convient : faisons-le de manière plus précise. Soit

$$\alpha^{(n),\pm}_{V,c} : B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=\pm 1} \longrightarrow B \otimes \mathbf{D}_p(V) \to \varphi^n B \otimes \mathbf{D}_p(V) \longrightarrow t_V(B)$$

avec $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ et $t_V(B) = B \otimes t_V$. On peut définir un accouplement

$$\mathrm{coker}\, \alpha^{(n),\pm}_{V,c} \times \ker \alpha^{(n),\pm}_{V^*(1),c} \longrightarrow B$$

de la manière suivante : en utilisant la décomposition

$$B \otimes \mathbf{D}_p(V) = B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=+1} \oplus B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=-1} \ ,$$

on vérifie que l'application

$$B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V(-1))^{c=\pm 1} \longrightarrow \mathrm{coker}\, \alpha^{(n),\pm}_{V,c}$$

est surjective. L'orthogonal de son noyau pour la dualité induite par

$$(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V(-1))^{c=\pm 1} \times (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V^*(1))^{c=\pm 1} \longrightarrow \mathbb{Q}_p$$

est $\ker \alpha^{(n),\pm}_{V^*(1),c}$. On en déduit que $dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{coker}\, \alpha^{(n),\pm}_{V,c} = dim_{\mathbb{Q}_p}\ker \alpha^{(n),\pm}_{V^*(1),c}$. On a alors avec $W = V(i)$,

$$\begin{aligned} m^{\pm}_{-i}(V^*(1), c) &= m_0^{\pm(-1)^i}(V^*(1)(-i), c) = m_0^{\pm(-1)^i}(W^*(1), c) \\ &= \ker \alpha^{(n),\pm(-1)^i}_{W^*(1),c} = dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{coker}\, \alpha^{(n),\pm(-1)^i}_{W,c} \end{aligned}$$

(en appliquant à W ce qui précède)

$$\begin{aligned} &= dim_{\mathbb{Q}_p}\ker \alpha^{(n),\pm(-1)^i}_{W,c} + dim_{\mathbb{Q}_p}t_W(F) - dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}W)^{c=\pm(-1)^i} \\ &= m_i^{\pm}(V, c) - dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V) + \tilde{d}(V) - dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=\pm 1} \ . \end{aligned}$$

On en déduit l'assertion relative à c ; on a d'autre part obtenu un accouplement complètement analogue à [FP94, III, 1.2.3] $\square$

2.1.8. Donnons un autre type à l'infini possible. Pour le justifier, démontrons d'abord le lemme suivant qui exhibe des "zéros trivaux" de $\lambda_{\mathbf{T},S,h}$:

Lemme. *Pour $h \gg 0$, $\lambda_{\mathbf{T},c,S,h,\pm}$ est divisible par $(l_0/(\gamma-1))_{\pm}^{m_0^{\pm}(V,c)}$ et $\lambda_{\mathbf{T},S,h}$ est divisible par $(l_0/(\gamma-1))_{\pm}^{m_0^{\pm}(\tau_{min}(V))}$.*

Démonstration. Si n est un entier ≥ 0, notons Y_n l'intersection de $B(\mu_{p^{n+1}})\otimes \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ et de l'image X_n de $\mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c)$ dans $B(\mu_{p^{n+1}})\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V)$ par l'application $(1\otimes\Xi_{n,V})\circ i_V$ (B étant le corps des fractions de B_{cris}). Comme $\exp_{V,\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})}(Y_n)$ est nul et grâce au diagramme définition du théorème 1.2.5, $e_\eta\lambda_{\mathbf{T},S,h}$ est divisible dans $e_\eta\mathcal{H}(G_\infty)$ par $[(\gamma^{p^{n+1}}-1)/(\gamma^{p^n}-1)]^{dim_{B(\mu_{p^{n+1}})}e_\eta Y_n}$ pour tout caractère η de Δ non trivial. Il suffit donc de montrer que pour un tel η, $e_\eta Y_n$ est de dimension $\geq m_0^{\epsilon(\eta)}(V,c)$ sur $B(\mu_{p^{n+1}})$ avec $\epsilon(\eta)$ le signe de $\eta(c)$. Or, on a

$$\begin{aligned} e_\eta Y_n &= (1\otimes\varphi)^{-(n+1)}(i_V(B(\mu_{p^{n+1}})\otimes \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)^{c=\eta(c)})\cap(B(\mu_{p^{n+1}})\otimes\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)))\\ &= (B(\mu_{p^{n+1}})\otimes \mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)^{c=\eta(c)})\cap(B(\mu_{p^{n+1}})\otimes\varphi^{-(n+1)}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V))\ , \end{aligned}$$

ce qui est de dimension $m_0^{\epsilon(\eta)}(V,c)$ par définition.

La même démonstration montre que si W est un sous-B-espace vectoriel de $B\otimes\mathbf{D}_p(V)$ de rang $d_\pm(V)$, si $m_i^{\pm}(V,W) = dim_B W\cap(B\otimes\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V))$ et si w est un élément non nul de $\det_B(W)$, l'élément $\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}(w)$ de $\mathbb{H}_\pm$ est divisible par $(l_i/(\gamma-1))^{m_i^+(V,W)}$. On en déduit le lemme. □

2.1.9. ***Corollaire.*** *L'image de $\Gamma^\pi_{\tau(V,c)}\circ\lambda_{\mathbf{T},c,S}$ est contenue dans $\mathbb{H}\otimes Frac(\Lambda)$. L'image de $\Gamma^\pi_{\tau_{min}(V)}\circ\lambda_{\mathbf{T},S}$ est contenue dans $\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathbb{H}\otimes Frac(\Lambda)\otimes\mathbf{D}_p(V^*(1)))$. De plus, il existe un sous-ensemble fini J de $\mathbb{Z}$ et des entiers $r_j\in\mathbb{N}$ pour $j\in J$ tels que l'image de $\Gamma^\pi_{\tau_{min}(V)}\circ\lambda_{\mathbf{T},S}$ (resp. $\Gamma^\pi_{\tau(V,c)}\circ\lambda_{\mathbf{T},c,S}$) soit contenue dans*

$$\prod_j(\chi^j(\gamma)\gamma-1)^{-r_j}(\det_\Lambda\mathbf{T}^{G_{F_\infty}})(\det_\Lambda\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^\iota\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathbb{H}\otimes\mathbf{D}_p(V^*(1)))$$

(resp.

$$\prod_j(\chi^j(\gamma)\gamma-1)^{-r_j}(\det_\Lambda\mathbf{T}^{G_{F_\infty}})(\det_\Lambda\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^\iota\mathbb{H})\ .$$

(Rappelons que ι est l'involution de Λ.)

Démonstration. Soit h un entier assez grand. L'image de $\lambda_{\mathbf{T},c,S,h,\pm}$ est contenue dans $\mathbb{H}\otimes \mathrm{Frac}(\Lambda)_{\pm}$. On a

$$\Gamma_{\tau(V,c)}\circ\lambda_{\mathbf{T},c,S,\pm}=\prod_{j>-h} l_{-j,\pm}^{-m_j^{\pm}(V,c)}\lambda_{\mathbf{T},c,S,h,\pm}\ .$$

En appliquant le lemme précédent à $V(j)$, on en déduit que les seuls pôles introduits éventuellement sont de la forme $\chi(\gamma)^j\gamma-1$ pour un nombre fini de j. D'où la première partie du corollaire. Les autres pôles éventuels proviennent de la contribution des modules de torsion intervenant dans $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})$, c'est-à-dire en utilisant le lemme 1.3.3 et l'appendice A.2

$$\begin{aligned}\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})_{tor}=_{\text{déf}}\ &\det{}_\Lambda\mathbf{T}^{G_{F_\infty}}\otimes(\det{}_\Lambda H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{-1}\\ &\otimes(\det{}_\Lambda(\oplus_{v\in S}(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}})))^{-1}\otimes\det{}_\Lambda Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\ .\end{aligned}$$

On remarque que l'on a la suite exacte (cf (1.3.1))

$$H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to H^0(F_\infty,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))\hat{}\to 0\ .$$

Comme $\det_\Lambda H^0(F_\infty,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))\hat{}=(\det_\Lambda\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^\iota$, on en déduit que $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})_{tor}$ est contenu dans

$$(\det{}_\Lambda\mathbf{T}^{G_{F_\infty}})\otimes(\det{}_\Lambda\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^\iota\otimes(\otimes_{v\in S_f}\det{}_\Lambda(\oplus_{w|v}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}))^{-1})\mathbb{H}$$

d'où la proposition pour $\Gamma^\pi_{\tau(V,c)}\circ\lambda_{\mathbf{T},c,S}$. L'homomorphisme $\Gamma^\pi_{\tau_{min}(V)}\circ\lambda_{\mathbf{T},S}$ se traite de la même manière. □

2.1.10. **On suppose Leop$(V,V^*(1))$ vraie.** Pour tout entier i, on note $m^{\pm}_{i,max}(V)$ le plus grand entier m tel que $(l_{-i}/(\chi(\gamma)^i\gamma-1))^m_{\pm}$ divise $\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}$, c'est-à-dire tel que l'image de $l^{-m}_{-i,\pm}\lambda_{\mathbf{T},S,h,\pm}$ soit contenue dans

$$\prod_{j\in J}(\chi(\gamma)^j\gamma-1)^{-r_j}(\det{}_\Lambda\mathbf{T}^{G_{F_\infty}})(\det{}_\Lambda\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^\iota\wedge^{d_\pm(V)}(\mathbb{H}_\pm\otimes\mathbf{D}_p(V^*(1)))$$

pour un sous-ensemble fini J de $\mathbb{Z}$ et des entiers r_j. On note $m^{\pm}_{i,max}(V^*(1))$ l'entier défini de la même manière en remplaçant V par $V^*(1)$.

2.1.11. ***Lemme.*** *Les* $(m^{\pm}_{i,max}(V),m^{\pm}_{i,max}(V^*(1)))_{i\in\mathbb{Z}}$ *vérifient les conditions* (i) *et* (ii) *de* 2.1.4 *et on a* $m^{\pm}_{i,max}(V)\geq m^{\pm}_i(\tau_{min}(V))$.

On note $m^{\pm}_{i,max}(V)=m^{\pm}_i(\tau_{max}(V))$. Nous montrerons au paragraphe 2.5 que $\tau_{max}(V)=(m^{\pm}_{i,max}(V),m^{\pm}_{i,max}(V^*(1)))_{i\in\mathbb{Z}}$ est un type à l'infini. Cependant, le lemme précédent suffit pour donner un sens à l'opérateur :

$$\Gamma^\pi_{\tau_{max}(V)}=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\Gamma^\pi_+(-i)^{n_i^+(\tau_{max}(V))}\Gamma^\pi_-(-i)^{n_i^-(\tau_{max}(V))}\ ,$$

$$\Gamma_{\tau_{max}(V)} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_+(-i)^{n_i^+(\tau_{max}(V))}\Gamma_-(-i)^{n_i^-(\tau_{max}(V))} .$$

Si $t(\tau_{max}(V), \pm) = \sum_q qn_q^\pm(\tau_{max}(V))$, on a donc

$$e_\pm\Gamma^\pi_{\tau_{max}(V)} = (2i\pi)^{t(\tau_{max}(V),\pm)}e_\pm\Gamma_{\tau_{max}(V)}$$

Remarquons que les $\tau_{max}(V)$ vérifient

$$\Gamma^\pi_{\tau_{max}(V_1)}\Gamma^\pi_{\tau_{max}(V_2)} = \Gamma^\pi_{\tau_{max}(V_1\oplus V_2)} ,$$

ce qui n'est pas toujours vérifié par $\tau_{min}(V)$ (mais vérifié par $\tau(V,c)$)...

2.2. Module des fonctions L p-adiques.

2.2.1. ***Lemme.*** *Soit τ un type à l'infini de V. Alors, $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S}$ est à valeurs dans*

$$\mathcal{L}_0(\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathbb{K}\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))) = \wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathbb{K}\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))) \ .$$

De même, $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},c,S}$ est à valeurs dans $\mathcal{L}_0(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Démonstration. L'opérateur $\mathbb{\Gamma}_\tau$ est de degré $-\underline{d}^+(V) = (-d_+(V), -d_-(V))$. D'autre part, il est clair sur la définition que $\lambda_{\mathbf{T},c,S,\pm}$ est à valeurs dans $\mathcal{L}_{d_\pm(V)}(\mathbb{K})$. D'où l'assertion pour $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},c,S}$. L'assertion pour $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S}$ se démontre de la même manière. $\square$

Remarque : La puissance de $2i\pi$ intervenant dans $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S,\pm}$ est égal à $(2i\pi)^{t(\tau,\pm)}$ avec $t(\tau,\pm) = \sum_q q n_q^\pm(\tau)$. Si τ et τ' sont deux types à l'infini, on a

$$\mathbb{\Gamma}_{\tau'}^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S,\pm}/\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S,\pm} = (2i\pi)^{t(\tau',\pm)-t(\tau,\pm)} \prod_i l_{-i,\pm}^{m_i^\pm(\tau')-m_i^\pm(\tau)} \in \mathbb{K} \ .$$

En effet, posons $\lambda = \lambda_{\mathbf{T},S,\pm}$, on a pour h assez grand

$$\begin{aligned}\mathbb{\Gamma}_{\tau,\pm} \circ \lambda &= \prod_{j>-h} \prod_{-h<i\leq j} l_{-i}^{-n_i^\pm(\tau)} \lambda_h \\ &= \prod_{i\geq -h} l_{-i}^{-\sum_{j\geq i} n_j^\pm(\tau)} \lambda_h = \prod_{i\geq -h} l_{-i}^{-m_i^\pm(\tau)} \lambda_h\end{aligned}$$

car $n_j^\pm(\tau) = m_j^\pm(\tau) - m_{j+1}^\pm(\tau)$. Par un calcul similaire pour $\mathbb{\Gamma}_{\tau'} \circ \lambda$, on obtient le résultat. Ainsi, si de plus $m_i^\pm(\tau') \geq m_i^\pm(\tau)$ pour tout i (on dira que $\tau' \geq \tau$), le quotient $\mathbb{\Gamma}_{\tau'}^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S}/\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S}$ appartient à $\mathbb{H}$.

2.2.2. Notons $\mathbb{I}_{arith,S_f}^\tau(\mathbf{T})$ le sous-Λ-module libre de rang 1 (sous Leop$(V, V^*(1))$) de

$$\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathbb{K}\otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$$

engendré par l'image par $\mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S}$ de $\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{arith,S_f}^\tau(\mathbf{T}) =& \mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \lambda_{\mathbf{T},S}(\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}) \\ =& \mathbb{\Gamma}_\tau^\pi \circ \mathbb{I}_{arith,S}(\mathbf{T}) \ .\end{aligned}$$

Soit c une conjugaison complexe. Notons $\mathbb{I}_{arith,S_f}(V,c)$ l'image de

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_\Lambda \mathcal{V}_{\infty,p}^+(\mathbf{T},c)$$

par $\Gamma^{\pi}_{\tau(V,c)} \circ \lambda_{\mathbf{T},c,S}$ dans $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{I}_{arith,S_f}(V,c) = \Gamma^{\pi}_{\tau(V,c)} \circ \lambda_{\mathbf{T},c,S}(\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \otimes \det_{\Lambda} \mathcal{V}^{+}_{\infty,p}(\mathbf{T},c)) \ .$$

Remarquons que $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,S_f}(\mathbf{T})_{\pm}$ est en fait contenu dans $(2i\pi)^{t(\tau,\pm)}\mathcal{K}(G_\infty)$. Enfin, le lien entre $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,S_f}(\mathbf{T})$ et $\mathbb{I}_{arith,S_f}(V,c)$ est donné par :

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,S_f}(\mathbf{T})_{\pm}(t_{\pm}) = (2i\pi)^{t(\tau,\pm)-t(V,c,\pm)} \prod_i l_i^{m_i^{\pm}(V,c)-m_i^{\pm}(\tau)} \mathbb{I}_{arith,S_f}(V,c)_{\pm}$$

si $t_{\pm}$ est un générateur de $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbf{T})^{c=\pm 1})$ et si $t(V,c,\pm) = \sum_q n_q^{\pm}(V,c)$.

2.2.3. On appelle

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T}) = \Gamma^{\pi}_{\tau} \circ \mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T}) \subset \wedge^{\underline{d}^{+}(V)}(\mathbb{K} \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$$

le module des fonctions L p-adiques de $\mathbf{T}$ (relativement à τ). Si Σ est un ensemble fini de places ne contenant pas de places à l'infini et contenant S_p, on pose

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = \Gamma^{\pi}_{\tau} \circ \mathbb{I}_{arith,\Sigma\cup S_\infty}(\mathbf{T}) \ .$$

Ainsi, on a explicitement pour tout entier h

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})_{\pm} = (2i\pi)^{t(\tau,\pm)} \prod_{i \geq -h} l_{-i}^{-m_i^{\pm}(\tau)} \mathbb{I}_{arith,\Sigma\cup S_\infty,h}(\mathbf{T}) \ .$$

Si S est un ensemble fini de places contenant Σ, S_∞, S_p et les places de mauvaise réduction de V, on a donc

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = \prod_{v \in S_f - \Sigma} \det_{\Lambda}(\oplus_{w|v} \mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}) \Gamma^{\pi}_{\tau} \circ \mathbb{I}_{arith,S}(\mathbf{T})) \ .$$

Ainsi, on a défini $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})$ pour tout ensemble fini Σ de places tel que $\Sigma \cap S_\infty$ est vide ou égal à S_∞ (lorsque Σ contient S_∞, on note $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = \mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})$ bien que cela ne dépende pas de τ pour éviter les cas particuliers). Si Σ et Σ' sont deux ensembles de ce type tels que $\Sigma \subset \Sigma'$, on a l'égalité

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) = \prod_{v \in \Sigma' - \Sigma} \mathbb{I}_v(V) \mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma'}(\mathbf{T})$$

où $\mathbb{I}_v(V) = \det_{\Lambda}(\oplus_{w|v} \mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}})$ si v est une place finie et où l'on convient que

$$\prod_{v \in S_\infty} \mathbb{I}_v(V) = \Gamma^{\pi}_{\tau} \ .$$

Bien que l'on ne puisse pas remplacer Σ par un produit infini, il faut bien sûr rapprocher cette formule de la factorisation en produit eulérien des fonctions L. En effet, pour v

finie et pour η caractère de Δ , $e_\eta \mathbb{I}_v(V)$ est l'idéal de $e_\eta Frac(\Lambda)$ engendré par $P_{v,\eta}(\gamma)^{-1}$ où

$$P_{v,\eta}(X) = \det(X - \gamma | e_\eta(\oplus_{w|v} \mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}})) \ .$$

Ainsi, pour $v \notin S_p$, $\mathbf{1}(P_{v,\mathbf{1}_\Delta}(\gamma))^{-1}$ est égal à $\det(1 - \gamma | e_{\mathbf{1}_\Delta}(\oplus_{w|v} \mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}))^{-1}$, c'est-à-dire à une unité près à $\sharp((V/\mathbf{T})^{G_{F_v}})^{-1}$, ce qui est encore égal au facteur d'Euler $L_v(V,1)$ en v de V.

2.3. Quelques propriétés.

2.3.1. ***Proposition.*** *Si $j \in \mathbb{Z}$, pour tout ensemble fini Σ de places de F avec $\Sigma \cap S_\infty$ vide, on a*

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(V(j), c) = (2i\pi)^{-j\underline{d}^+(V(j))} Tw^{-j}(\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(V, c)) \ ,$$

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}(j)) \otimes e_j = (2i\pi)^{-j\underline{d}^+(V(j))} Tw^{-j}(\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})) \ .$$

Lorsque Σ contient S_∞, on a

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}(j)) = Tw^{-j}(\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})) \ .$$

Démonstration. Cela se déduit de ce que

$$\mathbb{\Gamma}_{V(j),c} \circ \lambda_{V(j),c,S} = \pm Tw^{-j}(\mathbb{\Gamma}_{V,c} \circ \lambda_{V,c,S}) \ ,$$

$$\mathbb{\Gamma}_{\tau(j)} \circ \lambda_{V(j),S} = \pm Tw^{-j}(\mathbb{\Gamma}_{\tau} \circ \lambda_{V,S})$$

et de ce que $t(\tau(j), \pm) = t(\tau, \pm\epsilon_j) - jd_{\pm\epsilon_j}(V)$ avec ϵ_j le signe de $(-1)^j$. $\square$

2.3.2. Soit

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte de représentations p-adiques de $G_{S,F}$ géométriques et cristallines aux places divisant p et τ, τ', τ'' des types à l'infini de V, V', V''. Disons que l'extension (V, τ) de (V', τ') par (V'', τ'') a bonne réduction (p-adique) en ∞ si $\tau(V) = \tau(V') + \tau(V'')$.

Proposition. *Soit*

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte de représentations p-adiques de $G_{S,F}$ géométriques et cristallines aux places divisant p. Si Σ est un ensemble fini de places tel que $S_\infty \cap \Sigma$ est vide ou $S_\infty \subset \Sigma$ et si l'extension (β) a bonne réduction en dehors de Σ (y compris l'infini si $S_\infty \cap \Sigma$ est vide), alors

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}) \equiv \mathbb{I}^{\tau'}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}') \otimes \mathbb{I}^{\tau''}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T}'')$$

dans $\tilde{\Lambda}^{\underline{d}^+(V)}_{\beta}(\mathbb{K} \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$.

2.3.3. Supposons $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ vraie ; alors, en utilisant la remarque 1.4.9, on a une autre définition possible de $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ par

$$(2.3.1)\quad \mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_{\pm}(s)e_{\mathbf{T}} = \\ (2i\pi)^{t(\tau,\pm)} \prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_p(V) - m_j^{\pm}(\tau)} \det{}_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T})_\pm \\ s \wedge (\wedge^{d-\pm}\Omega_{V,h,\pm})^{-1}(\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1}_{\pm})$$

pour $s \in \wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V)$ et pour h assez grand avec toujours $t(\tau,\pm) = \sum_q q n_q^{\pm}(\tau)$ (rappelons que $e_{\mathbf{T}}$ est un générateur de $\det_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V)$ associé à $\mathbf{T}$).

2.4. Lien avec les séries caractéristiques usuelles et exemples.

2.4.1. Soit $R_h(V)$ l'application composée

$$\mathbb{H} \otimes \mathbf{D}_p(V) \to \mathbb{H} \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}) \to \mathbb{H} \otimes_\Lambda X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}),$$

la première application étant $\Omega^\epsilon_{V,h}$ et la seconde l'application intervenant dans la suite exacte de Poitou-Tate (1.3.1). Soit $R_h(V,c) : \mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c) \to \mathbb{H} \otimes_\Lambda X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ le composé de $\mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c) \to \mathbb{H} \otimes \mathbf{D}_p(V)$ avec $R_h(V)$.

Proposition. (i) *La suite exacte* 1.3.1 *donne un isomorphisme canonique*

$$\Delta_{\infty,S}(\mathbf{T})^{-1} \cong \otimes_i (\det{}_\Lambda X^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{(-1)^i} .$$

(ii) *Supposons* $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$. *Les* $R_h(V,c)$ *fournissent une application* Λ-*linéaire* $\mathcal{R}(V,c)$ *de*

$$\otimes_{i\in\{0,1\}} (\det{}_\Lambda X^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{(-1)^i} \otimes \det{}_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c)$$

dans $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ *et on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{arith,S}(V,c) =&(\det{}_\Lambda \mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^\iota \\ &\mathbb{\Gamma}^\pi_{V,c} \circ \mathcal{R}(V,c)((\det{}_\Lambda X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{-1} \otimes \det{}_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c)) \\ =&\mathbb{\Gamma}^\pi_{V,c} \circ \mathcal{R}(V,c)(\otimes_{i\in\{0,1\}} (\det{}_\Lambda X^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{(-1)^i} \otimes \det{}_\Lambda \mathcal{V}^+_{\infty,p}(\mathbf{T}, c)) .\end{aligned}$$

(iii) *Supposons* $\mathrm{Leop}(V, V^*(1))$. *Les* $R_h(V)$ *fournissent une application* Λ-*linéaire* $\mathcal{R}(V)$

$$(\det{}_\Lambda X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{-1} \to \mathcal{L}(\wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathit{Frac}(\Lambda) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1))))$$

et on a

$$\mathbb{I}^\tau_{arith,S}(\mathbf{T})(\delta) = \mathbb{\Gamma}^\pi_\tau \circ \mathcal{R}(V)(\otimes_{i\in\{0,1\}} (\det{}_\Lambda X^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{(-1)^i})(\delta)$$

pour $\delta \in \wedge^{\underline{d}^+(V)}(\mathbb{H} \otimes \mathit{Frac}(\Lambda) \otimes \mathbf{D}_p(V))$.

Démonstration. (i) est clair. On déduit (ii) de l'isomorphisme précédent, du fait que $X^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est nul sous $\mathrm{Leop}(V)$ et que $X^0_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est le dual de Pontryagin de $(V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_{F_\infty}}$ et est isomorphe à un groupe fini près à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}^*(1), \mathbb{Z}_p)$. □

2.4.2. Supposons que l'action de c sur $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V$ soit donnée par $\rho_V = \pm 1$. On a clairement $\tau(V,c) = \tau_{min}(V)$. On oublie l'exposant τ dans ce qui suit. Le lien entre $\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(V,c)$ et $\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})$ est alors donné par

$$\mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})_{\pm}(t^{\pm}) = \mathbb{I}_{arith,\Sigma}(\mathbf{T})_{\pm} \ ,$$

si $t^{\pm}$ est une base de $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbf{T})^{c=\pm 1})$; ici $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbf{T})^{c=\pm 1})$ vaut $\mathbb{Z}_p$ ou $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbf{T}))$.

2.4.3. ***Proposition.*** *Supposons que c agisse sur $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}(V)$ par $\rho_V = \pm 1$. Soit η un caractère de Δ tel que $\eta(c) = -\rho_V$. Si* $\mathrm{Leop}(V^*(1), \eta^{-1})$ *est vraie,*

(i) *$e_\eta \mathbb{I}_{arith,S}(\mathbf{T})$ et $e_\eta \mathbb{I}_{arith,S}(V,c)$ sont non nuls.*

(ii) *$e_\eta X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ et $e_\eta X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ sont des Λ_Γ-modules de torsion et on a*

$$\begin{aligned} e_\eta \mathbb{I}_{arith,S}(\mathbf{T}) =& \det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \otimes (\det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{-1} \\ =& f(e_\eta X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))/f(e_\eta X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))\Lambda_\Gamma \ . \end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons que si η est un caractère de Δ tel que $\eta(c) = -\rho_V$, $\mathrm{Leop}(V^*(1), \eta^{-1})$ implique $\mathrm{Leop}(V, \eta)$. Le fait que $\mathrm{Leop}(V^*(1), \eta^{-1})$ soit vrai est équivalent à ce que $e_{\eta^{-1}} H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ soit de torsion. La suite exacte 1.3.1 implique alors que $e_\eta H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$ est de torsion, c'est-à-dire que $\mathrm{Leop}(V,\eta)$ est vrai.

Ainsi, sous les hypothèses de la proposition, $\mathrm{Leop}(V,\eta)$ est vraie et

$$e_\eta \mathcal{V}^+_{\infty,p}(V,c) = 0 \ .$$

L'opérateur $e_\eta \mathbb{\Gamma}^\pi_\tau$ est trivial. Les Λ_Γ-modules $e_\eta H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ et $e_\eta Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ sont de même rang et $e_\eta X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ est de torsion (1.3.2 et 2.4.1) grâce à $\mathrm{Leop}(V^*(1), \eta^{-1})$. D'autre part, $\mathrm{Leop}(V,\eta)$ implique que $e_\eta H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ s'injecte dans $e_\eta Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$. Donc, (i) est clair. Par définition,

$$\begin{aligned} e_\eta \mathbb{I}_{arith,S}(\mathbf{T}) =& (\det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})/H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{-1} \\ & \otimes (\det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{-1}) \otimes (\det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))) \\ =& \det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \otimes (\det\nolimits_{\Lambda_\Gamma} e_\eta X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}))^{-1} \end{aligned}$$

grâce à 2.4.1, (ii). □

2.4.4. En supposant toujours que c agit sur V par $\rho_V = \pm 1$, soit η un caractère de Δ tel que $\eta(c) = \rho_V$. L'opérateur $e_\eta \mathbb{I}\Gamma^\pi_\tau$ est égal à $(2i\pi)^{t_H(V)} \prod \mathbb{I}\Gamma(-r)^{\tilde{h}_r(V)}$ avec $t_H(V) = \sum_r r\tilde{h}_r(V)$.

Proposition. *Supposons que c agisse sur V par $\rho_V = \pm 1$. Soit η un caractère de Δ tel que $\eta(c) = \rho_V$. Si* Leop(V, η) *est vraie,*

(i) *$e_\eta \mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ et $e_\eta \mathbb{I}_{arith,\{p\}}(V, c)$ sont non nuls ; $e_\eta H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est un Λ_Γ-module de torsion isomorphe à $e_\eta \mathbf{T}^{G_{F_\infty}}$ et $e_\eta H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ est un Λ_Γ-module de torsion;*

(ii) *Supposons vraie la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$. On a*

$$\begin{aligned}&(2i\pi)^{-t_H(V)} e_\eta \mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})\\ &\quad =(\det_{\Lambda_\Gamma} e_\eta(\mathbf{T}^*(1))^{G_{F_\infty}})^\iota \otimes (\otimes_{v \in S_p} \det_{\Lambda_\Gamma}(e_\eta \mathbf{T}^*(1)^{G_{F_{\infty,v}}})^{-\iota} \otimes \det_{\Lambda_\Gamma}(e_\eta \mathbf{T}^{G_{F_\infty}})\\ &\qquad \otimes (\det_{\Lambda_\Gamma} e_\eta H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbf{T}))^{-1} e_{\mathbf{T}^*(1)}\end{aligned}$$

où $e_{\mathbf{T}^*(1)}$ est une base de $M(\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}^*(1)))$ (cf. 1.2.8*).*

Démonstration. D'après la démonstration précédente, Leop$(V^*(1), \eta^{-1})$ est vraie. La première affirmation se déduit de la proposition 1.3.2 et de Leop(V, η). Pour le reste, on regarde la définition et ce qui précède. □

2.4.5. Regardons le cas où $V = \mathbb{Q}_p(r)$ et $F = \mathbb{Q}$. Les conjectures Leop$(\mathbb{Q}_p(r))$ et Leop$(\mathbb{Q}_p(1-r))$ sont démontrées, la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p(r))$ est démontrée. On a $\rho_V = (-1)^r$ et $t_H(V) = -r$. On en déduit en appliquant les résultats précédent,

$$\begin{aligned}&e_{(-1)^{r+1}} \mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbb{Z}_p(r))\\ &\qquad =f(e_{(-1)^{r+1}}(\mathbb{Z}_p(1-r))^{-\iota} f(e_{(-1)^{r+1}} X^1_{\infty,\{\infty,p\}}(\mathbb{Z}_p(r)))\Lambda_{(-1)^{r+1}} .\end{aligned}$$

(remarquons que dans cette situation, $e_{(-1)^{r+1}}\mathbb{Z}_p(r) = 0$) ;

$$\begin{aligned}&(2i\pi)^r e_{(-1)^r} \mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbb{Z}_p(r))\\ &\qquad =f(e_{(-1)^r}\mathbb{Z}_p(r))^{-1} f(e_{(-1)^r} H^2_{\infty,S_p}(\mathbb{Z}_p(r))))\Lambda_{(-1)^{r+1}} e_{\mathbb{Z}_p(1-r)} .\end{aligned}$$

Faisons le lien avec la théorie classique. Grâce à 2.4, il suffit de regarder le cas $r = 1$. Dans le cas de la e_+-composante, on obtient donc

$$\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbb{Z}_p(1))_+ = (\gamma - 1)^{-1} f(X^1_{\infty,\{\infty,p\}}(\mathbb{Z}_p(1))_+)\Lambda_+ ,$$

ce qui est la définition classique ([C77]). Regardons maintenant la e_--composante. On note A_∞ la limite projective des p-groupes de classes d'idéaux de F_n, U_∞ la limite projective des unités semi-locales en p de F_n, $\mathcal{E}_\infty$ la limite projective des unités globales de F_n, $\mathcal{E}_{\infty,\{p\}}$ la limite projective du groupe des éléments de $F_n^\times$ qui sont des unités en dehors de p. On a le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & \oplus_{v\in S_p}\mathbb{Z}_p & & & & \\ & & & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{E}_{\infty,\{p\}} & \to & Z^1_{\infty,p}(\mathbb{Z}_p(1) & \to & X^1_{\infty,\{\infty,p\}}(\mathbb{Z}_p(1)) & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow= & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{E}_\infty & \to & U_\infty & \to & X^1_{\infty,\{\infty,p\}}(\mathbb{Z}_p(1)) & \to & A_\infty & \to & 0 \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

En comparant avec la suite exacte de Poitou-Tate (1.3.1), on obtient donc que

$$H^2_{\infty,S_p}(\mathbb{Z}_p(1))_- = A_{\infty,-}$$

et

$$\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbb{Z}_p(1))_- = \frac{1}{2i\pi}(\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)^{-1} f(A_{\infty,-})\Lambda_- \ ,$$

ce qui est aussi la définition classique ([C77]).

2.4.6. Le cas où $V = V_p(E)$ est la représentation p-adique de $G_{\mathbb{Q}}$ attachée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$: $V_p(E) = \mathbb{Q}_p \otimes (\varprojlim_n E_{p^n})$ est étudié en détail dans [P93]. Prenons pour type à l'infini $\tau = \tau_{min}(V)$. On a donc $n^{\pm}_{-1}(\tau) = n^{\pm}_{-1}(\tau^*) = 1$, les autres étant nuls. On vérifie facilement que

$$\Gamma^{\pi}_{\tau(j)} = (2i\pi)^{-(j+1)}\Gamma(j+1) \ .$$

Remarquons que le Λ-module $\mathcal{J}_{arith}(T_p(E))$ introduit dans [P93] et

$$\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(T_p(E)) =_{\text{déf}} \mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(T_p(E))$$

ne sont pas définis de la même manière. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbf{D}_p(V_p(E))$, si ω_E est une forme différentielle de Néron de E, attachée à un modèle de Weierstrass de coordonnées x et y et si $\eta = x\omega_E$ est la forme différentielle de seconde espèce associée à ce modèle, on a

$$\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(T_p(E))(n)\omega_E \wedge \eta = \frac{1}{2i\pi}\mathcal{J}_{arith}(T_p(E)) \wedge n \ .$$

Par l'équation fonctionnelle que nous démontrons au §2.5, cela signifie que

$$(2i\pi)^{-1}\mathcal{J}_{arith}(T_p(E)) = \mathbb{I}_{arith,\{p\}}(T_p(E)^*(1))^{\iota} \ .$$

En identifiant $T_p(E)$ et $T_p(E)^*(1)$ grâce à l'accouplement de Weil, on en déduit que

$$\mathcal{J}_{arith}(T_p(E)) = (2i\pi)\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(T_p(E))^{\iota} \ .$$

2.4.7. Regardons rapidement le cas où V vérifie la condition de Dabrowski-Panchishkin. Supposons pour simplifier que $F = \mathbb{Q}$, que 1 et p^{-1} ne sont pas valeurs propres de φ et donc que $V^{G_{F_{\infty,v}}} = 0$ pour v divisant p. On suppose qu'il existe un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel D_{sc} (sc pour scindé) de $\mathbf{D}_p(V)$ stable par φ et tel que l'application naturelle

$$D_{sc} \rightarrow t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$$

soit un isomorphisme. Les $\mathbb{Q}_p$-espaces D_{sc} et $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ sont donc supplémentaires. De plus, comme D_{sc} est stable par φ, t_V est ainsi muni d'une action de φ. La condition précédente est équivalente à l'existence d'une sous-représentation du groupe de décomposition en p, $\mathrm{Fil}^1_pV \subset V$, telle que $\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1_pV) = D_{sc}$. On pose $\mathrm{Fil}^1_p\mathbf{T} = \mathrm{Fil}^1_pV \cap \mathbf{T}$.

Supposons de plus que la dimension de D_{sc} sur $\mathbb{Q}_p$ est égale à $d_\pm(V)$ (V est dit $\pm$-critique). On a alors une injection naturelle

$$\det{}_{\mathbb{Q}_p}D_{sc} \rightarrow \wedge^{d_\pm(V)}\mathbf{D}_p(V) \ .$$

La restriction de $\Omega^\epsilon_{V,h}$ à $\Lambda \otimes D_{sc}$ est égale à $\Omega_{\mathrm{Fil}^1_pV,h}$. Si l'on suppose vraie la conjecture $\delta(\mathrm{Fil}^1_pV)$, on a donc pour $s \in \det_{\mathbb{Q}_p}D_{sc} = \det_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1_pV)$

$$\prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D_{sc}} \wedge^{d_\pm(V)} \Omega^\epsilon_{V,h,\pm}(s) = ue_\pm\omega_1 \tag{2.4.1}$$

où ω_1 est une base de $\det_\Lambda Z^1_{\infty,p}(\mathrm{Fil}^1_p\mathbf{T})$, u une unité de $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_\pm$, $\mathrm{Fil}^jD_{sc} = \mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V) \cap D_{sc}$ et où $t_0(V) = t_H(\mathrm{Fil}^1_pV) = \sum_{r<0} r\tilde{h}_r(V)$. Notons τ_{sc} le type à l'infini vérifiant $m^\pm_j(\tau_{sc}) = dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^jD_{sc}$. Comme D_{sc} est de dimension $d_\pm(V)$, on a $m^\pm_j(\tau_{sc}) \geq m^\pm_j(\tau_{min}(V))$. Posons pour $s \in \det_{\mathbb{Q}_p}D_{sc}$,

$$\mathbb{I}_{sc}(s)_\pm =_{\text{déf}} (2i\pi)^{t_0(V)} \prod_{j>-h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^jD_{sc}}\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(s)_\pm \ .$$

On déduit de (2.4.1) que $\mathbb{I}_{sc}(s)_\pm$ est un sous-Λ-module libre de rang 1 de $(2i\pi)^{t_0(V)}\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_\pm$. On définit ainsi un sous-Λ-module $\mathbb{I}_{sc}$ de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\det{}_{\mathbb{Q}_p}D_{sc}, (2i\pi)^{t_0(V)}\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_\pm) \ ,$$

d'où en choisissant une base de $\det_{\mathbb{Q}_p}D_{sc}$ associée à $\mathbf{T}/\mathrm{Fil}^1_p\mathbf{T}$, un sous-$\Lambda_\pm$-module de $(2i\pi)^{t_0(V)}\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_\pm$ libre de rang 1. C'est donc un cas où, comme l'ont vu Dabrowski et Panchiskhin, on peut prédire qu'une certaine fonction L p-adique est dans $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$. Remarquons d'autre part que l'expression

$$L_p(V,0)^{-1}\det(1-\varphi|D_{sc})^{-1}\det(1-p^{-1}\varphi^{-1}|D_{sc})$$

qui joue un rôle important lorsqu'on évalue le sous-module des fonctions L p-adiques en $\mathbf{1}$ vaut

$$\prod_{v(\alpha_j)\geq 0}(1-\alpha_j)\prod_{v(\alpha_j)<0}(1-p^{-1}\alpha_j^{-1})$$

où

$$L_p(V,s)^{-1}=\det(1-p^{-s}\varphi|\mathbf{D}_p(V))=\prod(1-\alpha_j p^{-s})\ ,$$

à comparer avec les "facteurs d'Euler" dans [CP89] ; nous y reviendrons dans le paragraphe 4.3.

Faisons maintenant le lien entre $\mathbb{I}_{sc}$ et le module d'Iwasawa introduit par Greenberg dans cette situation et revu avec l'éclairage de [BK90] (cf. aussi [P92]). **On suppose toujours que V vérifie la condition de Dabrowski-Panchishkin et est $\pm$-critique et que les conjectures $\delta_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{Fil}_p^1 V)$, $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ et $\mathbf{Leop}(V)$ sont vraies.**

Rappelons que dans [BK90] est défini un sous-$\mathbb{Z}_p$-module $H^1_f(L,\mathbf{T})$ de $H^1(L,\mathbf{T})$ pour toute extension finie L de F ou de F_v (cf. A.2.6 pour des rappels). On définit aussi $H^1_f(L,V/\mathbf{T})$ comme le noyau de

$$H^1(F,V/\mathbf{T})\to\oplus_{v\in S_f}H^1(F_v,V/\mathbf{T})/\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^1_f(L_v,\mathbf{T})\ .$$

Notons $Z_{\infty,f,p}(F,\mathbf{T})$ la limite projective des $\oplus_{v\in S_p}H^1_f(F_{n,v},\mathbf{T})$ pour les applications de corestriction. Notons $Z_{\infty,f}(F,\mathbf{T})$ la limite projective des $H^1_f(F_n,\mathbf{T})$, $X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ le dual de Pontryagin de $H^0(F_\infty,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$ et $X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})$ le dual de Pontryagin de la limite inductive

$$H^1_f(F_\infty,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$$

des $H^1_f(F_n,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$. Le Λ-module $X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})$ est le dual de Pontryagin du groupe de Selmer associé à $\mathbf{T}$ et à F_∞/F.

En remarquant que la limite projective des $\oplus_{v\in S_f-S_p}H^1_f(F_{n,v},\mathbf{T})$ est égale à $Z^1_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T})$ (cf. A.2.4) et par passage à la limite des suites exactes du type de A.3.2 rappelées dans l'appendice A, on obtient la suite exacte de Λ-modules

$$\begin{aligned}0\to Z_{\infty,f}(F,\mathbf{T})\to &H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})/Z_{\infty,f}(F,\mathbf{T})\to X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})\\ &\to H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T})\to 0\ .\end{aligned}$$

Le $\Lambda_\pm$-module $\det_\Lambda(Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})/Z_{\infty,f,p}(\mathbf{T}))$ est isomorphe à

$$\det{}_\Lambda Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T}/\mathrm{Fil}^1_p\mathbf{T})\ .$$

D'autre part, $Z_{\infty,f}(F,\mathbf{T})$ est nul si et seulement si $X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})$ est de torsion. **Supposons-le.** Choisissons une base s de $\det_{\mathbb{Z}_p} M(\mathrm{Fil}^1_p\mathbf{T})$ (rappelons que $\mathbb{Q}_p \otimes \det_{\mathbb{Z}_p} M(\mathrm{Fil}^1_p\mathbf{T}) = \det_{\mathbb{Q}_p} D_{sc}$). Notons $\mathcal{H}$ le determinant du conoyau de

$$H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm \to Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})_\pm / Z_{\infty,p,f}(F,\mathbf{T})_\pm \ .$$

Alors, en utilisant la formule (2.3.1) appliquée à $\tau = \tau_{sc}$ et la conjecture $\delta(\mathrm{Fil}^1_p V)$, on vérifie que

$$\begin{aligned}(2i\pi)^{-t_0(V)}\mathbb{I}_{sc}(s) =& \mathcal{H} \otimes (\det_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm)^{-1} \otimes \det_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T})_\pm \\ =& (\det_{\Lambda_\pm} X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})_\pm)^{-1} \otimes \det_{\Lambda_\pm} X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_\pm \\ =& (\det_{\Lambda_\pm} X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})_\pm)^{-1} \ .\end{aligned}$$

Ainsi, $(2i\pi)^{-t_0(V)}\mathbb{I}_{sc}(s)$ est l'idéal de $\Lambda_\pm$ engendré par une série caractéristique de $X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})_\pm$.

Greenberg ([Gr89]) conjecture que $X_{\infty,f}(F,\mathbf{T})_\pm$ est de torsion, généralisant ainsi une conjecture de Mazur ([M72], cas d'une variété abélienne ordinaire en p). Si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, à multiplication complexe et ayant bonne réduction ordinaire en p, cette conjecture a été montrée par Rubin ([R88, theorem 4.4]).

2.5. Equation fonctionnelle.

2.5.1. Rappelons rapidement la conjecture Réc(V) faite dans [P92b] et développée dans [P94, (3.6)]. On étend par linéarité la forme bilinéaire naturelle

$$[\ ,\ ]_{\mathbf{D}_p(V)} : \mathbf{D}_p(V) \times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

à $(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V)) \times (\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V^*(1)))$ d'une part et à

$$(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)) \times (\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)))$$

d'autre part ; on conserve la même notation. Si l'on note $<\ ,\ >_n$ l'application de dualité

$$(\oplus_{v|p} H^1(F_{n,v}, V)) \times (\oplus_{v|p} H^1(F_{n,v}, V^*(1))) \to \mathbb{Q}_p$$

induite par le cup-produit et l'application naturelle de $\oplus_{v|p} H^2(F_{n,v}, \mathbb{Q}_p(1))$ dans $\mathbb{Q}_p$, soit

$$<\ ,\ >_{V,\infty} : Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T}) \times Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T}^*(1)) \to \Lambda$$

l'application définie par

$$< x, y >_{V,\infty} = \lim_n \Big(\sum_{\tau \in G_n} < \tau^{-1} x_n, y_n >_n \tau \Big) \ .$$

C'est une forme sesquilinéaire pour l'automorphisme $\iota : \mathcal{H}(G_\infty) \to \mathcal{H}(G_\infty)$ induit par $\tau \mapsto \tau^{-1}$ pour $\tau \in G_\infty$:

$$< \lambda x, y >_{V,\infty} = < x, \lambda^\iota y >_{V,\infty} = \lambda < x, y >_{V,\infty} \ .$$

On la prolonge à $\mathcal{H}(G_\infty)$ par linéarité. D'où une forme bilinéaire $<,>_{V,\infty}$ de $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules

$$(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T})) \times (\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_\Lambda Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T}^*(1))^\iota) \to \mathcal{H}(G_\infty) \ .$$

On montre facilement ([P94]) que si $x \in \mathcal{D}_{\infty,p}(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ et $y \in \mathcal{D}_{\infty,p}(V^*(1))^{\tilde{\Delta}=0}$, l'élément

$$(-1)^{h-1} < \Omega^\epsilon_{V,h}(x), \Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h}(y^\iota) >_{V,\infty}$$

de $\mathcal{H}(G_\infty)$ est indépendant de $h \in \mathbb{Z}$. On le note

$$< \Omega_V(x), \iota \circ \Omega_{V^*(1)}(y) >_{V,\infty} \ .$$

Conjecture (Réc(V)). *Soit V une représentation p-adique géométrique de G_F cristalline aux places divisant p. Alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_{\infty,p}(V)^{\tilde{\Delta}=0}$, $y \in \mathcal{D}_{\infty,p}(V^*(1))^{\tilde{\Delta}=0}$, on a*

$$< \Omega_V(x), \iota \circ \Omega_{V^*(1)}(y) >_{V,\infty} = [x, y]_{\mathbf{D}_p(V)} \ .$$

Rappelons que Réc(V) implique $\delta(V)$.

2.5.2. Soit $e \in \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(V^*(1))$. Notons encore $[\ ,\ ]_{\mathbf{D}_p(V)}$ le crochet de dualité induit sur l'algèbre extérieure de $\mathbf{D}_p(V)$ et de $\mathbf{D}_p(V^*(1))$. Si $x \in \wedge^n \mathbf{D}_p(V)$, on note $x \perp e$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{\tilde{d}(V)-n}\mathbf{D}_p(V), \mathbb{Q}_p)$ défini par

$$(x \perp e)(y) = e(x \wedge y) = [x \wedge y, e]_{\mathbf{D}_p(V)} .$$

Théorème. *Supposons* $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V^*(1))$, Réc$(V)$ *et* Leop$(V, V^*(1))$ *vraies. Alors,*

(i) $\tau_{max}(V)$ *est un type à l'infini ;*

(ii) *si* τ *est un type à l'infini,* $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ *et* $\mathbb{I}^{\tau^*}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T}^*(1))$ *vérifient l'équation fonctionnelle*

$$\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T}) = \mathbb{I}^{\tau^*}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T}^*(1))^{\iota} \perp (2i\pi)^{t_H(V)+\underline{d}^-(V)} e_{\mathbf{T}^*(1)}$$

où $e_{\mathbf{T}^*(1)}$ *est une base du* $\mathbb{Z}_p$*-module* $M(\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{T}^*(1)))$.

Remarques : (i) Soit c une conjugaison complexe. En choisissant pour s une base de $\det_{\mathbb{Z}_p}((\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=\pm})$ et pour s'^* la base duale dans $\det_{\mathbb{Z}_p}((\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T}^*(1))^{c=-\pm})$, on déduit facilement du théorème que l'on a

$$\mathbb{I}'_{arith,\{p\}}(V, c) = \mathbb{I}'_{arith,\{p\}}(V^*(1), c)^{\iota}$$

où le $'$ signifie que l'on a enlevé les facteurs $2i\pi$.

(ii) On peut énoncer l'équation fonctionnelle pour $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T})$. Prenons h assez grand pour que $m_i^{\pm}(\tau) = d_{\pm}(V)$ pour $i \leq -h$, $m_i^{\pm}(\tau) = 0$ pour $i \geq h$; alors, (ii) est équivalent à ce que

(2.5.1)
$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T})_{\pm} = \prod_{-h<i<h} l_{-i}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V^*(1))+d_{\pm}(V)} \mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T}^*(1))^{\iota}_{\pm} \perp e_{\mathbf{T}^*(1)}$$

ou encore

$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T}) = \prod_{i<h} l_{-i}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V^*(1))+\tilde{d}(V)} \mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},1-h}(\mathbf{T}^*(1))^{\iota} \perp e_{\mathbf{T}^*(1)} .$$

Pour montrer l'équivalence avec la formule du théorème, on utilise le fait que τ est un type à l'infini et donc que

$$t(\tau, \pm) = t(\tau^*, \pm) + t_H(V) + d_{-\pm}(V) .$$

Nous montrons au paragraphe 2.5.3 et suivants la formule (2.5.1). On en déduit facilement que $\tau_{max}(V)$ est un type à l'infini de V : grâce au lemme 2.1.10, il suffit de montrer que

$$m^{\pm}_{-i}(\tau_{max}(V)^*) = m^{\mp}_{i}(\tau_{max}(V)) - dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V) + d_{-\pm}(V)$$

ou ce qui est équivalent en échangeant les rôles de τ et τ^*,

$$m^{\pm}_{-i}(\tau_{max}(V)) = m^{\mp}_{i}(\tau_{max}(V)^*) - dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V^*(1)) + d_{\pm}(V)$$

ce qui se déduit de la formule (2.5.1).

(iii) Faisons uniquement l'hypothèse que Leop$(V, V^*(1))$ et Réc(V) sont vraies. Alors, $\delta(V^*(1))$ est vraie et on peut alors montrer l'équation fonctionnelle à un élément de $\mathbb{Q}_p$ près.

2.5.3. On pose $\tilde{d} = \tilde{d}(V)$, $d_\pm = d_\pm(V)$. Soit s un élément non nul de $\wedge^{d_\pm}\mathbf{D}_p(V)$ de la forme $s = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{d_\pm}$. Ecrivons $e_{\mathbf{T}} = s \wedge s'$ avec $s' = e_{d_\pm+1} \wedge \cdots \wedge e_{\tilde{d}}$ et soit $(e_1^*, \cdots, e_{\tilde{d}}^*)$ la base duale de $(e_1, \cdots, e_{\tilde{d}})$. On a donc $e_{\mathbf{T}^*(1)} = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{\tilde{d}}^*$. Posons $s'^* = e_{d_\pm+1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\tilde{d}}^*$. Alors, $[s', s'^*]_{\mathbf{D}_p(V)} = 1$ et (2.5.1) est équivalent à

$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T})_\pm(s)^\iota = \prod_{-h<j<h} l_{-j}^{-dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V^*(1))+d_\pm(V)}\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T}^*(1))_\pm(s'^*)$$

avec h assez grand pour que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$, $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V^*(1)) = \mathbf{D}_p(V^*(1))$ par exemple.

Soient $\omega_{loc,S}$ une base du Λ-module $\Delta^{loc}_{\infty,S}(\mathbf{T})$ et $\omega_{glob,S}$ une base de $\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T})$. Par définition,

$$\mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T})_\pm(s)e_\pm\omega_{loc,S}^{-1} = \wedge^{d_\pm(V)}\Omega^\epsilon_{V,h,\pm}(s) \wedge e_\pm\omega_{glob,S}^{-1}\Lambda_\pm\ .$$

En utilisant 2.4.1, cela peut s'écrire

$$\mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T})_\pm(s)(e_\pm(\omega_1 \otimes \omega_0^{-1})) = R_{V,h,\pm}(s)\Lambda_\pm$$

où ω_i est une base de $\det_\Lambda X^i_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$ pour $i = 0, 1$. Par la proposition 1.3.3, les Λ-modules

$$(\det_\Lambda t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})) \otimes (\det_\Lambda X^0_{\infty,S}(F, \mathbf{T}))^{-1})^\iota$$

et

$$\det_\Lambda H^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)) \otimes \det_\Lambda(\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}})^{-1}$$

sont en dualité ($t_\Lambda(M)$ désigne le sous-Λ-module de torsion de M). Comme

$$\det_\Lambda X^0_{\infty,S}(F, \mathbf{T})^\iota = \det_\Lambda \mathbf{T}^*(1)^{G_{F_\infty}}\ ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T})_{\pm}(s)(\det_{\Lambda_\pm} t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_\pm)\\
&\quad =< R_{V,h,\pm}(s), \det_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_\pm >^\iota_{V,\infty}\\
&\quad = \quad < \wedge^{d_\pm(V)}\Omega^\epsilon_{V,h,\pm}(s), \det_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_\pm >^\iota_{V,\infty}\\
&\quad = [s, (\wedge^{d_\pm(V)}\Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h,\pm})^{-1}(\det_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_\pm)]^\iota_{\mathbf{D}_p(V)}
\end{aligned}$$

(par Réc(V))

$$= \det_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))^\iota_\pm [s, (\wedge^{d_\pm(V)}\Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h,\pm})^{-1}(\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))^{-1}_\pm)]^\iota_{\mathbf{D}_p(V)}$$

Nous montrons dans la proposition 2.5.4 que $\det_\Lambda t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))$ est isomorphe à $\det_\Lambda H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))^\iota$. Supposons-le pour l'instant. Donc,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T})_{\pm}(s)^\iota =\\
&\qquad [e_{\mathbf{T}}, \wedge^{d_\pm(V)}(\Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h,\pm})^{-1}(\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))_\pm)^{-1}) \wedge s'^*]_{\mathbf{D}_p(V)}\ .
\end{aligned}$$

Par la formule (1.4.3) appliquée à $V^*(1)$ et démontrée sous $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T}^*(1))_{\pm}(s'^*)e_{\mathbf{T}^*(1)}\\
&\qquad = B_h \Delta^{loc}_{\infty,S-S_p}(\mathbf{T}^*(1))_\pm s'^* \wedge (\wedge^{d_\pm(V)}\Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),h,\pm})^{-1}(\Delta^{glob}_{\infty,S}(\mathbf{T}^*(1))^{-1}_\pm)
\end{aligned}$$

avec $B_h = \prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V^*(1))}$. D'où, en posant

$$L_h = \prod_{-h<j<h} l_{-j}^{d_\pm(V)}\ ,$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T})_{\pm}(s)^\iota\\
&\qquad = \Delta^{loc}_{\infty,S-S_p}(\mathbf{T}^*(1))_\pm [e_{\mathbf{T}}, B_h^{-1} L_h \mathbb{I}_{arith,S,h}(\mathbf{T}^*(1))_{\pm}(s'^*)e_{\mathbf{T}^*(1)}]_{\mathbf{D}_p(V)}\ .
\end{aligned}$$

Comme

$$\Delta^{loc}_{\infty,S-S_p}(\mathbf{T}^*(1)) = \det_\Lambda(\otimes_{v\in S-S_p}\mathbf{T}^*(1)^{G_{F_{\infty,v}}})^{-1} \otimes \det_\Lambda(\otimes_{v\in S-S_p}\mathbf{T}^{G_{F_{\infty,v}}})^\iota\ ,$$

on déduit de la définition de $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T}^*(1))$ et de $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T})$ (cf. (1.4.4)) que

$$\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T})_\pm(s)^\iota = \prod_{-h<j<h} l_{-j}^{-dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V^*(1))+d_\pm(V)} \mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathbf{T}^*(1))_\pm(s'^*)\ .$$

Ce qui démontre (2.5.1) et donc le théorème, à condition de montrer la proposition suivante.

2.5.4. ***Proposition***. *Supposons* Leop(V) *vrai. Il existe un homomorphisme naturel injectif à conoyau fini de* Λ*-modules*

$$H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Ext^1_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1)),\Lambda)^\iota \ .$$

En remarquant que si M est un Λ-module de type fini, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,\Lambda)$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(t_\Lambda(M),\Lambda)$ à un sous-groupe fini près, on déduit de la proposition un isomorphisme de Λ-modules

$$\begin{aligned}\det_\Lambda H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \cong & \det_\Lambda \mathrm{Ext}^1_\Lambda(t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))),\Lambda)^\iota \\ \cong & \det_\Lambda t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1)))^\iota \ ,\end{aligned}$$

ce qui finit la démonstration du théorème 2.5.2.

Pour démontrer la proposition 2.5.4, nous utilisons le lemme suivant :

2.5.5. ***Lemme***. *Si* Leop(V) *est vraie, il existe un entier* j *tel que*

$$H^2(G_{S,F_n},\mathbf{T}(j))$$

soit fini pour tout entier n.

Démonstration. Soit η un caractère de Δ ; on note $\epsilon(\eta)$ le signe de $\eta(c)$. Pour j tel que $\mathbf{T}(j)^*(1)^{G_{F_n}} = \mathbf{T}(j)^{G_{F_n}} = 0$, on a

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} e_\eta H^1(G_{S,F_n},\mathbf{T}(j)) - \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} e_\eta H^2(G_{S,F_n},\mathbf{T}(j)) = p^n d_{-\epsilon(\eta)}(V(j)) \ .$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} e_\eta H^1(G_{S,F_n},\mathbf{T}(j)) = & \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} e_\eta X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}(j)^*(1))_{\Gamma_n} \\ = & p^n d_{-\epsilon(\eta)}(V(j)) + \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}(j)^*(1)))_{\Gamma_n} \ .\end{aligned}$$

Sauf pour un nombre fini de j, le $\mathbb{Z}_p$-rang de $t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}(j)^*(1)))_{\Gamma_n}$ est nul. On en déduit le lemme. □

Remarque : En fait, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Leop(V) est vrai ;
(2) pour une infinité d'entiers j, $H^2(G_{S,F_0},\mathbf{T}(j))$ est fini ;
(3) pour une infinité d'entiers j, $H^1(G_{S,F_0},\mathbf{T}(j))_\pm$ est de rang

$$[F_0 : F] d_{-\pm}(V) \ .$$

2.5.6. *Démonstration de la proposition.* Il suffit de démontrer la proposition pour un twist convenable. Quitte à changer V en un $V(j)$, on peut donc supposer que $H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})$ est fini pour tout entier n. Le $\mathbb{Z}_p$-module $t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)))_{\Gamma_n}$ est lui aussi fini pour tout entier n (démonstration du lemme 2.5.5). On en déduit que $t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}$ est égal à un groupe fini d'ordre borné près au sous-$\mathbb{Z}_p$-module de torsion de $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T})_{\Gamma_n}$. D'autre part, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes H^1(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) \longrightarrow H^1(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T}) \longrightarrow H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) \longrightarrow 0$$

où la surjectivité se déduit de la finitude de $H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T})$. Comme le groupe $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))_{\Gamma_n}$ est égal à un groupe fini d'ordre borné près à $H^1(G_{S,F_n}, V/\mathbf{T})\hat{}$, on en déduit des homomorphismes de Λ-modules dont les noyaux et conoyaux sont finis d'ordre borné par rapport à n

$$(t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)))_{\Gamma_n})\hat{} \sim H^2(G_{S,F_n}, \mathbf{T}) \ .$$

Passons à la limite projective sur n. Pour le membre de droite, on obtient $H^2_{\infty,S}(F, \mathbf{T})$. Pour calculer le membre de gauche, rappelons ([P84]) que si M est un Λ-module de torsion et si ω_n est premier à la série caractéristique de M pour tout entier n (ce qui est équivalent à ce que M_{Γ_n} soit fini pour tout entier n), on a

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda)^\iota = \varprojlim_n (M_{\Gamma_n})\hat{} = (\varinjlim M_{\Gamma_n})\hat{}$$

où la limite inductive est relative aux applications de transition

$$\begin{aligned} M_{\Gamma_{n+1}} &\longrightarrow M_{\Gamma_n} \\ x &\longmapsto \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} x \ . \end{aligned}$$

Comme $t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)))_{\Gamma_n}$ est fini, la limite projective des

$$(t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)))_{\Gamma_n})\hat{}$$

est bien

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(t_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))), \Lambda)^\iota$$

qui est isomorphe (à un groupe fini près) à

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1)), \Lambda)^\iota \ .$$

On en déduit la proposition 2.5.4.

3. Etude des valeurs du module de fonctions L p-adiques

Résumé. Une fois construit le module des fonctions L p-adiques de $\mathbf{T}$, il est important de connaître l'ordre du zéro au caractère trivial et de savoir évaluer un générateur en ce caractère. Cette évaluation permet de retrouver les invariants arithmétiques de V sur le corps F. Ainsi, c'est ce genre de calcul qui permet de démontrer l'analogue de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer à une unité près dans le cas des courbes elliptiques. Apparaît dans ce cas la hauteur p-adique et les nombres de Tamagawa.

C'est le but de ce chapitre : étude de l'ordre au caractère trivial $\mathbf{1}$ d'un générateur du module des fonctions L p-adiques et du calcul à une unité près de son coefficient dominant en $\mathbf{1}$. Cette étude demande de construire certaines hauteurs p-adiques et les "périodes p-adiques". On remarquera que ces hauteurs dépendent du choix d'un sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$. Les périodes p-adiques qu'elles définissent interviennent alors dans l'évaluation de $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T})(n)$ ou de $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})(n)$ où n est un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_p} N$. On notera le rôle de l'opérateur

$$(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}$$

ou plutôt de sa puissance extérieure $d_+(V)$. Il permet d'expliquer le facteur d'Euler un peu anormal que l'on rencontre toujours dans les problèmes d'interpolation p-adique.

Les formules trouvées dans ce chapitre nous servent de guide dans l'établissement des conjectures ou questions du chapitre 4. Ainsi, la conjecture définissant la fonction L p-adique d'un motif et la conjecture principale affirmant que cette fonction est un générateur du module des fonctions L p-adiques que nous avons construit dans les chapitres 1 et 2 impliqueront la "partie en p" des conjectures à la Bloch-Kato grâce aux résultats de ce chapitre (sous Réc(V)).

Signalons que nous avons toutefois supposé pour simplifier que les opérateurs $1-\varphi$ et $1-p^{-1}\varphi^{-1}$ sont inversibles, laissant les autres cas, pourtant extrêmement intéressants, pour plus tard.

3.1. Périodes p-adiques.

3.1.1. Le but de ce paragraphe est d'associer à la représentation p-adique pseudo-géométrique V, cristalline aux places divisant p, des périodes p-adiques analogues aux périodes complexes de Beilinson-Deligne-Bloch-Kato des motifs. Pour cela, nous reprenons le point de vue de [FP91] et de [FP94] et le transposons dans le cadre p-adique.

Nous ferons tout du long l'hypothèse simplificatrice que 1 et p^{-1} ne sont pas valeurs propres de φ agissant sur $\mathbf{D}_p(V)$; en particulier, $H^0(F,V) = H^0(F,V^*(1)) = 0$. Posons

$$\tilde{\Delta}_f(F,V) = (\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V^*(1)))^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} t_V$$

avec toujours $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$; c'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 (cf. Appendice A pour des rappels sur les H^1_f). Si N est un sous-espace de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$, on construit en 3.1.2 et 3.1.3 une application

$$\mathrm{Per}_{V,N} : \tilde{\Delta}_f(F,V)^{-1} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\det_{\mathbb{Q}_p} N, \mathbb{Q}_p)$$

que l'on peut étendre par linéarité en une application

$$\mathrm{Per}_{V,N} : \tilde{\Delta}_f(F,V)^{-1} \to \mathrm{Hom}_{B_{cris}}(B_{cris} \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} N, B_{cris}) .$$

Plus généralement, la même construction est valable si N est un sous-espace de $B \otimes \mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$ et B le corps des fractions de B_{cris}.

Choisissons une conjugaison complexe c. Elle détermine un sous-espace $(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=1}$ de $\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V$ de dimension $d_+(V)$ et donc par extension des scalaires et via l'isomorphisme de comparaison un sous-B-espace vectoriel $B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=1}$ de $B \otimes \mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$. Si

$$\Delta_f(F,V,c) = \tilde{\Delta}_f(F,V) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p}((\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}V)^{c=1}))^{-1} ,$$

on note $\underline{\mathrm{Per}}_{V,c}$ l'application linéaire :

$$\underline{\mathrm{Per}}_{V,c} : \Delta_f(F,V,c)^{-1} \to B$$

déduite de Per_V. En particulier, si $\omega_{\mathbf{T}}$ est une base du $\mathbb{Z}_p$-module

$$\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T}) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1)) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{T})^{c=1}$$

et si ω est un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$, le $\mathbb{Z}_p$-module engendré par

$$\Omega_{\mathbf{T},c}(\omega) = \underline{\mathrm{Per}}_{V,c}(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega^{-1})$$

dépend de $\mathbf{T}$, c et ω.

3.1.2. Fixons un sous-espace vectoriel N de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$. Notons

$$\alpha_{V,N} = \alpha_{F,V,N} : N \to t_V$$

l'application naturelle. On a alors la suite exacte tautologique

$$(st_{V,N}) \qquad 0 \to \ker \alpha_{V,N} \to N \to t_V \to \operatorname{coker} \alpha_{V,N} \to 0 \ .$$

Notons $u_{V,N} : H^1_f(F,V) \to t_V \to \operatorname{coker} \alpha_{V,N}$ le composé de l'application logarithme $\log_V$ relative à V et de la projection naturelle et

$$v_{V^*(1),N} : H^1_f(F,V^*(1)) \to t_{V^*(1)} = (\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V))^* \to (\ker \alpha_{V,N})^*$$

le composé du logarithme relatif à $V^*(1)$ et de la transposée de l'inclusion naturelle de $\ker \alpha_{V,N}$ dans $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$, l'isomorphisme $t_{V^*(1)} = (\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V))^*$ étant induit par la dualité entre $\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathbf{D}_p(V^*(1))$; on peut interpréter $v_{V^*(1),N}$ comme $u_{V^*(1),N^\perp}$ où $N^\perp \subset \mathbf{D}_p(V^*(1))$ est l'orthogonal de N. Par dualité, on obtient à partir de $v_{V^*(1),N}$ une application linéaire

$$v'_{V^*(1),N} : \ker \alpha_{V,N} \to H^1_f(F,V^*(1))^* \ .$$

On construit maintenant une application bilinéaire

$$< \ , \ >_{V,N}: \ker u_{V,N} \times \ker v_{V^*(1),N} \to \mathbb{Q}_p \ .$$

Pour cela, soient $y \in H^1_f(F,V)$ et $x \in H^1_f(F,V^*(1))$ appartenant à $\ker v_{V^*(1),N}$. L'élément x définit, à isomorphisme près, une extension V_x de G_F-modules de V par $\mathbb{Q}_p(1)$:

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to V_x \to V \to 0 \ .$$

On a la suite exacte ([FP94, II, 2.2.3])

$$0 \to H^1_f(F,\mathbb{Q}_p(1)) \to H^1_f(F,V_x) \to H^1_f(F,V) \to 0 \ .$$

On note $s_{glob,x}(y)$ un relèvement quelconque de y dans $H^1_f(F,V_x)$. On a d'autre part le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \oplus_v H^1_f(F_v,\mathbb{Q}_p(1)) & \to & \oplus_v H^1_f(F_v,V_x) & \to & \oplus_v H^1_f(F_v,V) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) & \to & t_{V_x} & \to & t_V & \to & 0
\end{array}$$

où les sommes sont prises sur les places $v \in S_p$. Comme p^{-1} n'est pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_p(V)$, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbf{D}_p(V_x^*(1)) \to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p) \to 0$$

admet un scindage (respectant l'action de φ) donné par $\mathbf{D}_p(V_x^*(1))^{\varphi=1} \cong \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)$. D'où, par dualité, une section σ_x de la projection $\mathbf{D}_p(V_x) \to \mathbf{D}_p(V)$; le fait que $x \in \ker v_{V^*(1),N}$ signifie que

$$\sigma_x(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \cap N) \subset \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_x) \ .$$

Supposons que $y \in \ker u_{V,N}$. L'image $\mathrm{Loc}_p y$ de y par localisation dans t_V appartient à l'image de N : $\mathrm{Loc}_p y = \alpha_N(n_y)$. Notons $s_{p,N,x}(y)$ l'image de n_y dans $\oplus_{v \in S_p} H^1_f(F, V_x)$ par le composé

$$N \longrightarrow \mathbf{D}_p(V) \xrightarrow{\sigma_x} \mathbf{D}_p(V_x) \longrightarrow t_{V_x} \longrightarrow \oplus_{v \in S_p} H^1_f(F_v, V_x) \ ;$$

elle est définie modulo l'image de $\ker \alpha_{V,N} = N \cap \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V)$. Notons

$$l_\chi : \oplus_{v \in S_p} H^1_f(F_v, \mathbb{Q}_p(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

l'application composée

$$\oplus_{v \in S_p} H^1_f(F_v, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \oplus_{v \in S_p} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n \mathcal{O}_{F_v}^\times / \mathcal{O}_{F_v}^{\times p^n} \to \mathbb{Q}_p$$

où la dernière application est égale à $\sum_{v \in S_p} \log_p N_{F_v/\mathbb{Q}_p}$. On pose

$$< y, x >_{V,N} = l_\chi(s_{glob,x}(y) - s_{p,N,x}(y)) \ .$$

Cela ne dépend pas du choix de $s_{glob,x}(y)$ (la somme des invariants locaux d'un élément global est nulle) ni, pour $x \in \ker v_{V^*(1),N}$, du choix de $s_{p,N,x}(y)$ puisque $\sigma_x(\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) \cap N) \subset \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V_x)$. Lorsque cette forme bilinéaire est non dégénérée, elle induit une application $H^1_f(F, V^*(1))^* \to H^1_f(F, V)$ telle que la suite

$$\ker \alpha_{V,N} \to H^1_f(F, V^*(1))^* \to H^1_f(F, V) \to \mathrm{coker}\, \alpha_{V,N}$$

soit une suite exacte.

Remarque : Le fait de choisir $s_{glob,x}(y)$ dans $H^1_f(F, V_x)$ n'est pas essentiel. On peut prendre $s_{glob,x}(y)$ dans $H^1(G_{S,F}, V_x)$ à condition de choisir ensuite pour tout $v \in S_f - S_p$ un relèvement $s_{v,x}(y)$ de y dans $H^1_f(F_v, V_x)$ et de définir

$$< y, x >_{V,N} = l_\chi(s_{glob,x}(y) - s_{p,N,x}(y)) + \sum_{v \in S_f - S_p} ord_v(s_{glob,x}(y) - s_{v,x}(y)) \log_p Nv \ .$$

Définition : On dit que N est régulier si la forme bilinéaire $< \ , \ >_{V,N}$ est non dégénérée et si la suite

$$(sf_{V,N}) \qquad 0 \to \ker \alpha_{V,N} \to H^1_f(F, V^*(1))^* \to H^1_f(F, V) \to \mathrm{coker}\, \alpha_{V,N} \to 0$$

est exacte (pour parler de la première condition, on dira désormais que la suite $sf_{V,N}$ existe).

Rappelons que l'on a ([FP94, II, 2.2.2])

(3.1.1)
$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V^*(1)) - dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V) &= d_+(V) - dim_{\mathbb{Q}_p} t_V \\ &= dim_{\mathbb{Q}_p} \ker \alpha_{V,N} - dim_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{coker} \alpha_{V,N} \ . \end{aligned}$$

On en déduit que si la suite exacte $(sf_{V,N})$ existe, N est régulier si et seulement si l'application $H^1_f(F, V) \to \operatorname{coker} \alpha_{V,N}$ est surjective.

3.1.3. Supposons que la suite $(sf_{V,N})$ existe. On déduit des deux suites $(st_{V,N})$ et $(sf_{V,N})$ une application

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}_{V,N} : \tilde{\Delta}_f(F, V)^{-1} &\to \det_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{coker} \alpha_{V,N} \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} \ker \alpha_{V,N})^{-1} \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} t_V)^{-1} \\ &\cong (\det_{\mathbb{Q}_p} N)^{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\det_{\mathbb{Q}_p} N, \mathbb{Q}_p) \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme si et seulement si la suite $(sf_{V,N})$ est exacte. Lorsque la suite $(sf_{V,N})$ n'existe pas ou lorsqu'elle n'est pas exacte, nous conviendrons que $\mathrm{Per}_{V,N} = 0$. On obtient aussi à partir de $\mathrm{Per}_{V,N}$ une application

$$\mathrm{Per}_V : \tilde{\Delta}_f(F, V)^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} N \to \mathbb{Q}_p \ .$$

3.1.4. Soit

$$\mathrm{Loc}_{p,V} : H^1_f(F, V) \to \oplus_{v \in S_p} H^1_f(F_v, V)$$

et

$$\mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} : H^1_f(F, V^*(1)) \to \oplus_{v \in S_p} H^1_f(F_v, V^*(1))$$

les applications de localisation. Notons d'autre part $H^1_{f,\{p\}}(F, V)$ le noyau de l'application

$$H^1(G_{S,F}, V) \to \oplus_{v \in S_f - S_p} H^1(F_v, V)/H^1_f(F_v, V) \ .$$

En reprenant la construction de $< \ , \ >_{V,N}$, on voit que la forme bilinéaire $< \ , \ >_{V,N}$ s'étend de manière naturelle en une forme bilinéaire

$$H^1_{f,\{p\}}(F, V) \times \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \to \mathbb{Q}_p$$

indépendante de N que l'on note provisoirement B_F. Soit $H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o$ le sous-espace vectoriel de $H^1_{f,\{p\}}(F, V)$ formé des éléments x tels qu'il existe un entier M et pour tout n un élément x_n de $H^1(G_{S,F_n}, \mathbf{T})$ tel que $Mx = \mathrm{Tr}_{F_n/F} x_n$. Nous en verrons une autre définition au paragraphe 3.3.1.

Lemme. *Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o$ est contenu dans le noyau à gauche de B_F.*

Démonstration. Notons provisoirement $X(F)$ le noyau de

$$H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1)) \to \oplus_{v\in S_p} H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1)) \oplus (\oplus_{v\in S_f - S_p} H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1))/H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1))^u)$$

où $\oplus_{v\in S_f-S_p} H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1))^u$ est l'image de

$$\oplus_{v\in S_f-S_p} Z^1_{\infty,v}(F, \mathbf{T}^*(1))_{G_\infty}$$

dans

$$\oplus_{v\in S_f-S_p} H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1)) \ .$$

Il est montré dans [P92, §2.2] (cf. aussi Appendice A.2.4) que $H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1))^u$ est d'indice fini dans $H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1))$. De plus, le noyau de l'homomorphisme

$$H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1)) \to H^1_f(F_v, V^*(1))$$

est fini d'ordre $\sharp((V/\mathbf{T})^{G_{F_v}})$. On en déduit que $X(F)$ est d'indice fini dans l'image réciproque de $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ dans $H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1))$. De plus, si $X(F_n)$ est défini de manière similaire pour le corps F_n, l'indice corespondant est borné par rapport à n (*loc.cit.*).

Revenons à notre forme bilinéaire. Si $x \in X(F)$, il définit une extension $\mathbf{T}_x$ de $\mathbf{T}$ par $\mathbb{Z}_p(1)$. On montre facilement que $H^1_f(F_v, \mathbf{T})$ est dans l'image de $H^1_f(F_v, \mathbf{T}_x)$ pour $v \in S_f$: en effet, pour $v \in S_f - S_p$, l'application

$$H^1_f(F_v, \mathbf{T}_x) \to H^1_f(F_v, \mathbf{T})$$

est surjective ([P92, lemme 2.2.3], énoncé en A.2.5) ; pour $v \in S_p$, il est clair que l'extension $\mathbf{T}_x$ étant scindée, tout élément de $H^1_f(F_v, \mathbf{T})$ admet un relèvement canonique dans $H^1_f(F_v, \mathbf{T}_x)$. Si $y \in H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T})$, si $s_{glob,x}(y)$ en est un relèvement dans $H^1(F, \mathbf{T}_x)$, si $s_{v,x}(y)$ en est un relèvement dans $H^1_f(F_v, \mathbf{T}_x)$ pour $v \in S_f - S_p$ et si $s_{v,x}(y)$ est le relèvement canonique de y dans $H^1_f(F_v, \mathbf{T}_x)$ pour $v \in S_p$, il est facile de vérifier que

$$B_F(y, x) = l_\chi(s_{glob,x}(y) - \sum_{v\in S_f} s_{v,x}(y)) \in \mathbb{Z}_p \ ;$$

$l_\chi : \oplus_{v\in S_f} H^1_f(F_v, \mathbb{Z}_p(1)) \to \mathbb{Z}_p$ désigne maintenant l'application composée

$$\oplus_{v\in S_f} H^1_f(F_v, \mathbb{Z}_p(1)) \cong \oplus_{v\in S_f} \varprojlim_n \mathcal{O}^\times_{F_v}/\mathcal{O}^{\times p^n}_{F_v} \to \mathbb{Z}_p$$

où la dernière application est égale à

$$\sum_{v\in S_p} \log_p N_{F_v/\mathbb{Q}_p} - \sum_{v\in S_f - S_p} (\log_p Nv) ord_v \ .$$

En particulier, sur $H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T}) \times X(F)$, B_F est à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. On définit de la même manière B_{F_n} (en utilisant encore l'homomorphisme l_χ) ; B_{F_n} est encore à valeurs entières sur $H^1_{f,\{p\}}(F_n, \mathbf{T}) \times X(F_n)$ et en particulier, il existe une constante C, indépendante de n, telle que B_{F_n} est à valeurs dans $C^{-1}\mathbb{Z}$ sur $H^1_{f,\{p\}}(F_n, \mathbf{T}) \times \mathrm{res}_{F_n/F} X(F)$. Soit maintenant $y \in H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o$. On a donc $My = \mathrm{Tr}_{Fn/F} y_n$ avec

$y_n \in H^1_{f,\{p\}}(F_n, \mathbf{T})$. Les relations de compatibilité par restriction et corestriction de B_F et B_{F_n} impliquent que

$$MB_F(y,x) = p^n B_{F_n}(y_n, \mathrm{res}_{F_n/F} x) \in p^n C^{-1}\mathbb{Z}_p \ ,$$

ce qui tend vers 0 avec n. D'où la nullité de $B_F(x,y)$. $\square$

Notons $<< \ , \ >>_V$ la forme bilinéaire qui se déduit de B_F :

$$H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o \times \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} \to \mathbb{Q}_p \ .$$

Le problème de la non-dégénérescence de $<< \ , \ >>_V$ sera fondamental dans la suite.

3.1.5. ***Proposition.*** *Si $y \in \ker u_{V,N}$ et si $x \in \ker v_{V^*(1),N}$, on a*

$$< y, x >_{V,N} = - < x, y >_{V^*(1),N^\perp} \ .$$

Remarquons que

$$\ker u_{V,N} = \ker v_{V,N^\perp} \ , \ker v_{V^*(1),N} = \ker u_{V^*(1),N^\perp} \ .$$

Un corollaire de la proposition est que, au signe près, les suites $sf_{V,N}$ et $sf_{V^*(1),N^\perp}$ sont duales.

Démonstration (cf [Ne93, §4]*).* Rappelons que x (resp. y) définit une extension V_x de V par $\mathbb{Q}_p(1)$ (resp. une extension $V^*(1)_y$ de $V^*(1)$ par $\mathbb{Q}_p(1)$). Se donner un relèvement $s_{glob,x}(y) \in H^1_f(F, V_x)$ de y revient à se donner une extension $E_{x,y}$ de $\mathbb{Q}_p$ par V_x. On peut aussi voir $E_{x,y}$ comme une extension , c'est-à-dire un diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Q}_p(1) & \to & V_x & \to & V & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Q}_p(1) & \to & E_{x,y} & \to & V^*(1)^*_y(1) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & \mathbb{Q}_p & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

On dira que $E_{x,y}$ est une extension panachée de $V^*(1)^*_y(1)$ par V_x ou associée à (x,y). Soit de même $E_{x,y,N,p}$ la somme directe des extensions cristallines de $\mathbb{Q}_p[G_{F_v}]$-modules de $\mathbb{Q}_p$ par V_x, pour $v \in S_p$, qui correspond au relèvement choisi $s_{p,N,x}(y)$. Si

$(E_{x,y})_p$ est $E_{x,y}$ muni de l'action de $\oplus_{v\in S_p} G_{F_v}$, $(E_{x,y})_p - E_{x,y,N,p}$ définit un élément de $\oplus_{v\in S_p}\mathrm{Ext}^1_{G_{F_v}}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)) = \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p(1))$ et on a par définition même

$$< y, x >_{V,N} = l_\chi((E_{x,y})_p - E_{x,y,N,p}) \ .$$

On remarque alors que $-(E_{x,y})^*(1)$ est une extension panachée associée à (y, x) ; on la note $E_{y,x}$. Le signe vient de ce que si a est la classe d'une extension de B par A dans $H^1(G_F, B^* \otimes A)$, la classe de l'extension de $A^*(1)$ par $B^*(1)$ qui s'en déduit par dualité et twist à la Tate dans

$$H^1(G_F, A^*(1)^* \otimes B^*(1)) = H^1(G_F, B^* \otimes A)$$

est $-a$. Il ne reste plus qu'à montrer que $-(E_{x,y,N,p})^*(1)$ est une extension panachée associée à (y, x) correspondant à un relèvement de x du type $s_{p,N^\perp,y}(x)$. Décrivons explicitement les φ-modules filtrés associés à V_x, $E_{x,y,N,p}$, etc ... On a une décomposition canonique de φ-modules

$$\mathbf{D}_p(V_x) = \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)), \ \mathbf{D}_p(V^*(1)_y)) = \mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \ .$$

La filtration sur $\mathbf{D}_p(V_x)$ compatible avec les filtrations de $\mathbf{D}_p(V)$ et de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$ est déterminée par $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_x)$: une fois celui-ci connu, $\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V_x)$ est l'image réciproque de $\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V)$ pour $i < 0$ et l'image réciproque de $\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_x)$ pour $i > 0$. On a

$$\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_x) = \{(d, \lambda_x(d)), \quad d \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)\}$$

avec $\lambda_x : \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \to \mathbb{Q}_p = \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$ donnée par

$$\lambda_x(d) = -[d, \log_{V^*(1)} x]_{\mathbf{D}_p(V)} \ .$$

De même, la filtration sur $\mathbf{D}_p(V^*(1)_y)$ est entièrement déterminée par

$$\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1)_y) = \{(d^*, \lambda_y(d^*)), \quad d^* \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1))\}$$

avec $\lambda_y : \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p = \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$ donnée par

$$\lambda_y(d^*) = -[d^*, \log_V y]_{\mathbf{D}_p(V^*(1))} \ .$$

Maintenant se donner une extension panachée E cristalline de $\mathbb{Q}_p[\prod_{v\in S_p} G_{F_v}]$- modules associée à (x, y) revient à se donner dans

$$D = \mathbf{D}_p(V_x) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p) \ ,$$

muni de la structure naturelle de φ-modules, un sous-espace $\mathrm{Fil}^0 D$ tel que l'on ait les suites exactes

$$0 \to \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_x) \to \mathrm{Fil}^0 D \to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p) \to 0 \ .$$

La filtration sur D est alors déterminée :

$$\mathrm{Fil}^i D = \begin{cases} \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V_x) & \text{pour } i > 0 \\ \mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(V_x) + \mathrm{Fil}^0 D & \text{pour } i \leq 0. \end{cases}$$

L'extension panachée $E_{x,y,N,p}$ associée à (x,y) est telle que $\mathbf{D}_p(E_{x,y,N,p}) = D$ et

$$\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(E_{x,y,N,p}) = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V_x) + \mathbb{Q}_p(\mu, 0, 1)$$

où μ est un élément de N congru à $\log_V(y)$ modulo $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ et où $(\mu, 0, 1) \in \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)$. De même, $-E_{y,x,N^\perp,p}$ est telle que

$$\mathbf{D}_p(-E_{y,x,N^\perp,p}) = \mathbf{D}_p(V^*(1)_y) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)$$

et

$$\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(E_{y,x,N^\perp,p}) = \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V^*(1)_{-y}) + \mathbb{Q}_p(\nu, 0, 1)$$

où $(\nu, 0, 1) \in \mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \oplus \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)$ et ν un élément de $N^\perp$ congru à $-\log_{V^*(1)}(x)$ modulo $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1))$. On a alors une dualité naturelle de φ-modules :

$$\mathbf{D}_p(E_{x,y,N,p}) \times \mathbf{D}_p(-E_{y,x,N^\perp,p}) \to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathbb{Q}_p[-1] .$$

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que $\mathrm{Fil}^0 E_{x,y,N,p}$ et $\mathrm{Fil}^0(-E_{y,x,p})$ sont orthogonaux, i.e. pour tout $d \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$, $d^* \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1))$, $k \in \mathbb{Q}_p$, $k' \in \mathbb{Q}_p$,

$$[(d + k\mu, \lambda_x(d), k), (d^* + k'\nu, -\lambda_y(d^*), k')]_{\mathbf{D}_p(E_{x,y,N,p})} = 0 .$$

Or cela vaut

$$\begin{aligned}[(d + k\mu, d^* + k'\nu]_{\mathbf{D}_p(V)} &+ [\lambda_x(d), k']_{\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))} - [k, \lambda_y(d^*)]_{\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p)} \\ &= [d, d^*] + k[\mu, d^*] + k'[d, \nu] + kk'[\mu, \nu] + k'\lambda_x(d) - k\lambda_y(d^*)\end{aligned}$$

en posant $[\ ,\ ] = [\ ,\ ]_{\mathbf{D}_p(V)}$

$$= k[\mu - \log_V(y), d^*] + k'[d, \nu + \log_{V_x^*(1)}] = 0$$

en utilisant le fait que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1))$ sont orthogonaux, la définition de λ_y et λ_x, le fait que $\mu \in N$, $\nu \in N^\perp$ et que $\mu - \log_V(y)$ (resp. $\nu + \log_{V^*(1)} x$) appartient à $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ (resp. $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V^*(1))$). La proposition s'en déduit. □

3.1.6. Plus généralement, soit n un entier ≥ 0 et η un caractère de $\mathrm{Gal}(F_n/F)$ de conducteur p^{n+1}, c'est-à-dire ne se factorisant pas par $\mathrm{Gal}(F_{n-1}/F)$ et de signe $\epsilon(\eta)$. Si $\mathbb{Q}_p(\eta)$ est le corps engendré sur $\mathbb{Q}_p$ par les valeurs de η, notons $V(\eta)$ la représentation p-adique à coefficients dans $\mathbb{Q}_p(\eta)$ tordue de V par η. On définit alors encore un $\mathbb{Q}_p(\eta)$-espace vectoriel $\tilde{\Delta}_f(F, V(\eta))$ de dimension 1

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_f(F, V(\eta)) = (\det_{\mathbb{Q}_p(\eta)} H^1_f(F, V(\eta)) &\otimes \det_{\mathbb{Q}_p(\eta)} H^1_f(F, V(\eta)^*(1)))^{-1} \\ &\otimes \det_{\mathbb{Q}_p(\eta)} t_{V(\eta)}\end{aligned}$$

et une application

$$\mathrm{Per}_{V(\eta),N} : \tilde{\Delta}_f(F, V(\eta))^{-1} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p(\eta)}(\det_{\mathbb{Q}_p(\eta)} N, \mathbb{Q}_p(\eta))$$

où N est un sous-espace de $\mathbf{D}_p(V(\eta)) = \mathbb{Q}_p(\eta) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_{\epsilon(\eta)}(V)$. On pose

$$\mathrm{Per}_{V(\eta)}(\omega \otimes n) = \mathrm{Per}_{V(\eta),N}(\omega)(n) \ .$$

3.2. Exemples et cas particuliers.

3.2.1. On suppose toujours que 1 et p^{-1} ne sont pas valeurs propres de φ agissant sur $\mathbf{D}_p(V)$. Donnons quelques cas particuliers de la définition de $\mathrm{Per}_{V,N}$ et de $\Omega_{\mathbf{T},c}$.

3.2.2. Cas (I) : **Supposons que $H^1_f(F, V^*(1)) = H^1_f(F, V) = 0$.** Cela se produit par exemple (au moins conjecturalement) si V est la représentation p-adique associée à une courbe elliptique définie sur F de rang de Mordell-Weil nul ou si V est la réalisation p-adique d'un motif critique dont la fonction L ne s'annule pas en 0.

Soit N un sous-espace régulier de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$. Alors, nécessairement $\ker \alpha_{V,N} = 0$. La relation sur les dimensions (3.1.1) jointe à la nullité de $H^1_f(F, V^*(1))$ et de $H^1_f(F, V)$ implique qu'alors $\operatorname{coker} \alpha_{V,N} = 0$. Ainsi, N est régulier si et seulement si $N \cap \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$.

On a ici $\tilde{\Delta}_f(F, V) = \det_{\mathbb{Q}_p} t_V$. Choisissons un élément non nul ω de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$ et un élément non nul n de $\det_{\mathbb{Q}_p} N$. Alors, $\mathrm{Per}_V(\omega^{-1} \otimes n)$ est simplement égal au déterminant de l'isomorphisme $\alpha_{V,N} : N \to t_V$ calculé dans les bases n et ω, i.e

$$\det(\alpha_{V,N})(n) = \mathrm{Per}_V(\omega^{-1} \otimes n)\omega \ ,$$

ce qu'il est commode de noter avec un abus de notation

$$\mathrm{Per}_V(\omega^{-1} \otimes n) = \det(\alpha_{V,N})(n)/\omega \ .$$

Soit c une conjugaison complexe telle que $B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1}$ soit régulier, i.e. telle que $B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1} \cap B \otimes \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$. Notons $\alpha_{V,c}$ l'application $\alpha_{V,N}$ pour $N = B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1}$:

$$\alpha_{V,c} : B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1} \to B \otimes t_V \ .$$

Alors, si t_+ est une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} \mathbf{T})^{c=1}$,

$$\Omega_{\mathbf{T},c}(\omega) = \det(\alpha_{V,c})(t_+)/\omega$$

est l'analogue de la période de Deligne.

3.2.3. Cas (II) : **Supposons qu'il existe un sous-espace N tel que la suite exacte $(sf_{V,N})$ se réduit à**

$$0 \to H^1_f(F, V^*(1))^* \to H^1_f(F, V) \to 0 \ .$$

Cela se produit (au moins conjecturalement) lorsque V est la représentation p-adique associée à une courbe elliptique définie sur F.

On a $\ker \alpha_{V,N} = \operatorname{coker} \alpha_{V,N} = 0$ et $m_0^+(\tau_{min}(V)) = m_0^-(\tau^*_{min}(V)) = 0$. L'application bilinéaire $< \ , \ >_{V,N}$ est alors définie sur $H^1_f(F, V) \times H^1_f(F, V^*(1))$. Choisissons une base $\omega_{\mathbf{T}}$ du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1))$, ω un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$ et n un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_p} N$. Notons

$$\mathrm{disc}_{\omega_{\mathbf{T}}} < \ , \ >_{V,N}$$

le déterminant de $H^1_f(F, \mathbf{T}) \to H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1))^*$ relativement à $\omega_{\mathbf{T}}$. Alors, on définit $\mathrm{Per}_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega^{-1} \otimes n)$ par

$$disc_{\omega_{\mathbf{T}}} < \ , \ >_{V,N} \det(\alpha_{V,N})(n) = \mathrm{Per}_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega^{-1} \otimes n)\omega$$

ce que l'on note par abus de notation

$$\mathrm{Per}_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega^{-1} \otimes n) = disc_{\omega_{\mathbf{T}}} < \ , \ >_{V,N} (\det(\alpha_{V,N})(n)/\omega) \ .$$

Soit c une conjugaison complexe telle que $(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1}$ soit régulier. Notons $\alpha_{V,c}$ (resp. $< \ , \ >_{V,c}$) l'application $\alpha_{V,N}$ (resp. la forme bilinéaire) associée à $N = B \otimes (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1}$. Alors, si t_+ est une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p} (\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} \mathbf{T})^{c=1}$,

$$\Omega_{\mathbf{T},c}(\omega) = disc_{\omega_{\mathbf{T}}} < \ , \ >_{V,c} \det(\alpha_{V,c})(t_+)/\omega \in B_{cris}$$

est l'analogue de la période de Deligne et Birch-Swinnerton-Dyer.

3.2.4. Cas (III) : **On suppose que $H^1_f(F, V^*(1)) = 0$.**

Alors, N est régulier si et seulement si $N \cap \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) = 0$ et si l'application

$$H^1_f(F, V) \to \operatorname{coker} \alpha_{V,N} = \mathbf{D}_p(V)/(\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) + N)$$

est injective. Elle est alors bijective. Un tel N existe à cause de l'égalité déduite de (3.1.1)

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V) = dim_{\mathbb{Q}_p} t_V - d_+(V) \ .$$

Si $\omega_{\mathbf{T}}$ est une base du $\mathbb{Z}_p$-module libre $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T})$, si $r(V)$ est la dimension de $H^1_f(F, V)$, si ω est une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$ et si n est une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} N$, on a

$$\mathrm{Per}_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega^{-1} \otimes n)\omega = \wedge^{r(V)} \log_V(\omega_{\mathbf{T}}) \wedge (\wedge^{d_+(V)}(\alpha_{V,N})(n))$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\mathrm{Per}_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega^{-1} \otimes n) = \wedge^{r(V)} \log_V(\omega_{\mathbf{T}}) \wedge (\wedge^{d_+(V)}(\alpha_{V,N})(n))/\omega \ .$$

Choisissons une conjugaison complexe c telle que $(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} V)^{c=1}$ soit régulier. Si t_+ est une base de $\det_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Ind}_{F/\mathbb{Q}} \mathbf{T})^{c=1}$,

$$\Omega_{\mathbf{T},c}(\omega) = \wedge^{r(V)} \log_V(\omega_{\mathbf{T}}) \wedge (\wedge^{d_+(V)}(\alpha_{V,c})(t_+))/\omega \ ,$$

est un “régulateur” du type régulateur de Beilinson.

3.2.5. En général, on peut décrire “explicitement” Per_V de la manière suivante. Dans ce qui suit nous ferons un certain nombre d'abus de notations afin de pas alourdir trop la description. On suppose toujours N régulier.

Soient ω_1 base de $\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V)$, ω_2 base de $\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V^*(1))$ et ω_{tg} base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$. Soient $\omega_{1,N}$ (resp $\omega_{2,N}$) une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} \ker u_{V,N}$ (resp. $\det_{\mathbb{Q}_p} \ker v_{V^*(1),N}$). Ecrivons

$$\omega_1 = \omega_{1,N} \wedge \omega'_{1,N},\ \omega_2 = \omega_{2,N} \wedge \omega'_{2,N} \ .$$

Soit $n \in \det_{\mathbb{Q}_p} N$. On note $n_1 \in \det_{\mathbb{Q}_p} \ker \alpha_{V,N}$, $\omega^n \in \det_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{coker}\, \alpha_{V,N}$ tels que $(n_1, n, \omega_{tg}, \omega^n)$ soit compatible à la suite exacte $(st_{V,N})$. On note $\log_{\omega^n}(\omega'_{1,N})$ et $\log_{n_1^{-1}}(\omega'_{2,N})$ les éléments de $\mathbb{Q}_p^\times$ tels que

$$\log_V(\omega'_{1,N}) = \log_{\omega^n}(\omega'_{1,N})\omega^n \in \det_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{coker}\, \alpha_{V,N}$$

et

$$\log_{V^*(1)}(\omega'_{2,N}) = \log_{n_1^{-1}}(\omega'_{2,N}) n_1^{-1} \in \det_{\mathbb{Q}_p} (\ker \alpha_{V,N})^* \cong \det_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{coker}\, \alpha_{V^*(1),N^\perp} \ .$$

Alors

(3.2.1)

$$\mathrm{Per}_V(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_{tg}^{-1} \otimes n) = disc_{\omega_{1,N} \otimes \omega_{2,N}} < \ , \ >_{V,N} \log_{\omega^n}(\omega'_{1,N}) \log_{n_1^{-1}}(\omega'_{2,N}) \ .$$

3.3. Multiplicité du zéro (première forme).

3.3.1. On suppose toujours que 1 et p^{-1} ne sont pas valeurs propres de φ agissant sur $\mathbf{D}_p(V)$. Rappelons que $H^1_{f,\{p\}}(F,V)$ est le noyau de l'application

$$H^1(G_{S,F},V) \to \oplus_{v\in S_f-S_p} H^1(F_v,V)/H^1_f(F_v,V) \ .$$

L'image de $\mathbb{Q}_p\otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ dans $H^1(G_{S,F},V)$ est en fait contenue dans $H^1_{f,\{p\}}(F,V)$ (l'image de $Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})$ dans $H^1(F_v,\mathbf{T})$ étant contenue dans $H^1_f(F_v,\mathbf{T})$ pour $v\notin S_p$, cf. A.2.3) et c'est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel que l'on a noté $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$. Notons $H^1_f(F,V)_o$ l'intersection de $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$ avec $H^1_f(F,V)$. Posons

$$\delta(V) = dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_{f,\{p\}}(F,V) - d_-(V) - (dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V) - dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V)_o) \ .$$

Nous montrerons dans la proposition 3.4.2 que $\mathbb{Q}_p\otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ s'injecte dans $H^1_{f,\{p\}}(F,V)$; on a alors

$$d_-(V) \le dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o \ ,$$

avec égalité si Leop$(V,\mathbf{1}_\Delta)$ est vraie[2] et $\delta(V)$ est supérieur ou égal à

$$dim_{\mathbb{Q}_p}(H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o) - dim_{\mathbb{Q}_p}(H^1_f(F,V)/H^1_f(F,V)_o) \ ,$$

avec égalité si Leop$(V,\mathbf{1}_\Delta)$ est vraie. Le nombre $\delta(V)$ devrait être nul, comme on le montre sous des conditions supplémentaires dans la proposition 3.3.4.

Nous supposons implicitement Leop$(V,V^*(1),\mathbf{1}_\Delta)$ vraie dans le paragraphe 3.3 (dans le cas contraire le module $\mathbf{1}_\Delta\mathbb{I}^\tau_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ est nul et les propositions qui suivent sont encore vraies mais sans intérêt).

Proposition. *Supposons* Réc(V) *si* $Fil^0\mathbf{D}_p(V)\neq 0$. *Soit* τ *un type à l'infini de* V. *Alors,* $\mathbb{I}^\tau_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ *a un zéro en* $\mathbf{1}$ *de multiplicité supérieure ou égale à*

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V^*(1)) - m_0^+(\tau) + \delta(V) \ .$$

Pour énoncer la proposition sans faire intervenir de type à l'infini, introduisons une convention. Si $f=(f_h)\in\mathcal{L}(\mathbb{K}\otimes M)$ où M est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, on dit que f a un zéro de multiplicité r en un caractère ρ continu de G_∞ si $\rho((\gamma-1)^{-r}f_h)$ est définie et non nul pour h assez grand ; plus précisément

[2] rappelons que $\mathbf{1}_\Delta$ est le caractère trivial de Δ et que Leop$(V,\mathbf{1}_\Delta)$ signifie que $H^2(G_{S,F_\infty},V/\mathbf{T})^\Delta = 0$

si $\rho = \eta\chi^j$, avec η un caractère d'ordre fini, on peut prendre $h > j$. L'entier r est indépendant de h, car $\rho(l_s)$ est non nul pour $s > j$.

Proposition. *(bis) Supposons* Réc(V) *si* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$. *Alors,* $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T})$ *a un zéro en* $\mathbf{1}$ *de multiplicité supérieure ou égale à*

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V^*(1)) + \delta(V) \ .$$

Les deux propositions sont équivalentes. La démonstration est faite dans le reste du §3.3. D'autre part, ce résultat sera amélioré dans les §3.4 et 3.5.

3.3.2. Si $\alpha \in H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$, notons $P(\alpha)$ l'image de α dans $H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})$. On note $\alpha \mapsto \mathcal{L}_{\alpha,h}$ l'application inverse de $\Omega^{\epsilon}_{V,h}$. A priori, $\mathcal{L}_{\alpha,h}$ est un élément de $\mathcal{K}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$. Notons λ_V l'application

$$\oplus_{v\in S_p} H^1(F_v, V) \to \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$$

duale de l'application exponentielle

$$t_V \to \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v, V) \ .$$

On fixe un entier $h > 0$.

Lemme. *On suppose* Réc(V) *si* $Fil^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$. *Soit* $\alpha \in H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$. *Alors,*

(i) *si* $Fil^0\mathbf{D}_p(V) = 0$, *on a*

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h}) = \pm(h-1)!^{-1}log_V(P(\alpha)) \ ;$$

(ii) *si* $Fil^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$, *on a*

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}) = \pm(h-1)!^{-1}\lambda_V(P(\alpha)) \ .$$

En particulier, lorsque $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$, $\mathcal{L}_{\alpha,h}$ pour $h > 0$ a un "pôle" en $\mathbf{1}$ si et seulement si $P(\alpha)$ n'appartient pas à $H^1_f(F,V)$. Remarquons aussi que les formules peuvent aussi s'écrire en termes de $\mathcal{L}_{\alpha,0}$: on a

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0^{-1}\mathcal{L}_{\alpha,0}) = \pm\log_V(P(\alpha))$$

si $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$ et

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,0}) = \pm\lambda_V(P(\alpha))$$

si $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$.

Démonstration. Pour la commodité de la démonstration, nous prenons h assez grand. Les formules pour $h > 0$ quelconque s'en déduisent.

Supposons $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$. L'application exponentielle $\exp_{V,F}$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}_p(V)$ sur $\oplus_{v\in S_p} H^1(F_v, V)$. Il suffit donc de montrer que

$$\exp_{V,F}((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h})) = (h-1)!^{-1}P(\alpha) \ .$$

Soit f un élément de $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)$ et $\beta = \Omega^{\epsilon}_{V,h}(f) \in \mathcal{H}(G_\infty)\otimes Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})$. Posons $g = f.(1+T)$, $G \in \mathbb{Q}_p[[T]] \otimes \mathbf{D}_p(V)$ tel que $(1-\varphi)G = g$. Alors, on a pour $n \geq 0$,

$$(h-1)! \exp_{V,F_n}(\Xi_{n,V}(g)) = P(\beta_n)$$

avec $\Xi_{n,V}(g) = (p\otimes\varphi)^{-(n+1)}(G)(\zeta_n - 1)$. Prenons $n = 0$. On a d'une part

$$(h-1)! \exp_{V,F}(\mathrm{Tr}_{F_0/F}(\Xi_{0,V}(g)) = P(\beta) \ ,$$

d'autre part

$$\mathrm{Tr}_{F_0/F}(\Xi_{0,V}(g)) = (1-p^{-1}\varphi^{-1})G(0) = (1-p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}g(0) = \mathbf{1}(f)$$

(cf. par exemple [P94, 3.2.2]). D'où,

$$\exp_{V,F}((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(f)) = (h-1)!^{-1}P(\beta) \ .$$

Remarquons d'autre part que si $P(\beta)$ est nul, β est divisible par $\gamma - 1$ dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})$ et qu'il en est de même pour f.

Revenons à α. Ce qui précède implique que l'on peut écrire $\mathcal{L}_{\alpha,h} = f/k$ avec $\mathbf{1}(k) \neq 0$. On a alors avec les notations précédentes

$$P(\alpha) = \mathbf{1}(k)^{-1}P(\beta) \ ,$$

et $\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h}) = \mathbf{1}(k)^{-1}.\mathbf{1}(f)$. La formule (i) s'en déduit.

Supposons maintenant que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$. Soit y un élément de $\mathbf{D}_p(V^*(1))$ et f un élément de $\Lambda\otimes\mathbf{D}_p(V^*(1))$ tel que $\Xi_{0,V^*(1)}(f) = y$. On a comme précédemment

$$Tr_\Delta(y) = (p-1)y = (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(f)$$

et

$$(h-1)! \exp_{V^*(1),F}(y) = \Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),h}(f)_0 \ .$$

On a

$$\begin{aligned}
&(h-1)!^{-1}[\lambda_V(P(\alpha)), Tr_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\quad =(h-1)!^{-1} < Tr_\Delta(\alpha_0), \exp_{V^*(1),F}(y) >_{V,0}\\
&\quad = \pm\, (h-1)!^{-2}\mathbf{1}(< \Omega^\epsilon_{V,h}(\mathcal{L}_{\alpha,h}), \Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),h}(f) >_{V,\infty})\\
&\quad = \pm\, \mathbf{1}(< l_0\Omega^\epsilon_{V,1-h}(\mathcal{L}_{\alpha,h}), \Omega^{\epsilon^{-1}}_{V^*(1),h}(f) >_{V,\infty})\\
&\quad = \pm\, \mathbf{1}[l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}, f]_{\mathbf{D}_p(V)},
\end{aligned}$$

en utilisant Réc(V) (cf. 2.5.1). Ce qui implique en particulier que $l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}$ est définie en $\mathbf{1}$. D'où,

$$\begin{aligned}
&(h-1)!^{-1}[\lambda_V(P(\alpha)), Tr_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\quad = \pm\, [\mathbf{1}(l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}), \mathbf{1}(f)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\quad = \pm\, [\mathbf{1}(l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}), (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})Tr_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\
&\quad = \pm\, [(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}), Tr_\Delta(y)]_{\mathbf{D}_p(V)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0\mathcal{L}_{\alpha,h}) = \pm(h-1)!^{-1}\lambda_V(P(\alpha)) \ ,$$

c'est-à-dire la formule (ii). □

3.3.3. On suppose toujours Réc(V) et Leop($V, V^*(1), \mathbf{1}_\Delta$). Choisissons des éléments α_i pour $i \in J$ avec $\sharp J = d_-(V)$ de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$ tel que $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+/\sum_{i\in J}\Lambda_+\alpha_i$ soit un Λ_+-module de torsion et de série caractéristique première à $\gamma-1$. On note $r_0(V)$ la dimension de $H^1_f(F,V)_o$.

Lemme. *$\prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbf{Q}_p} Fil^j \mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)} \wedge_{i\in J}\mathcal{L}_{\alpha_i,h}$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité supérieure ou égale*

$$dim_{\mathbf{Q}_p} Fil^0\mathbf{D}_p(V) - m_0^+(\tau) - d_-(V) + r_0(V) \ .$$

Démonstration. Prenons h assez grand. Alors, $\prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbf{Q}_p} Fil^j \mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)}$ a en $\mathbf{1}$ un zéro de multiplicité $dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) - m_0^+(\tau)$. Supposons $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$. Le lemme 3.3.2 implique que $\wedge_{i\in J}\mathcal{L}_{\alpha_i,h}$ est défini en $\mathbf{1}$. Comme dans ce cas $r_0(V) \leq d_-(V)$, le lemme est vrai. Supposons maintenant que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$. On peut choisir les α_i et un sous-ensemble J_0 de J de cardinal $r_0(V)$ de manière à ce que les $P(\alpha_j)$ pour $j \in J_0$ engendrent $H^1_f(F,V)_o$. Le lemme 3.3.2 implique que $l_0^{d_-(V)-r_0(V)} \wedge_{j\in J-J_0}\mathcal{L}_{\alpha_j,h}$ et $\wedge_{j\in J_0}\mathcal{L}_{\alpha_j,h}$ sont définies en $\mathbf{1}$. On en déduit le lemme. □

3.3.4. Nous allons maintenant étudier la série caractéristique de $H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})$. Rappelons la suite exacte (1.3.1)

$$\begin{aligned} 0 \to X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to & H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \\ & \to H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to 0 . \end{aligned}$$

On note Y le conoyau de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$. On note $H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})$ le noyau de $H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$. La suite (1.3.1) se coupe alors en trois suites exactes

$$0 \to X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Y \to 0 , \tag{3.3.1}$$

$$0 \to Y \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}) \to 0 \tag{3.3.2}$$

et

$$0 \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}) \to H^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to Z^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to X^0_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to 0. \tag{3.3.3}$$

On a le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes et dont les premières flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p\otimes Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p\otimes X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p\otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & & & \\ Z & \longrightarrow & H^1(G_{S,F},V^*(1))^* & \longrightarrow & (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec

$$Z = \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,V) \oplus (\oplus_{v\in S_f - S_p} H^1_f(F_v,V)) :$$

pour cela, on remarque que pour $v \in S_p$,

$$\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_{\infty,p}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} = \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,V) ,$$

que pour $v \in S_f - S_p$,

$$\oplus_{w|v} Z^1_{\infty,w}(F,\mathbf{T}) = \oplus_{w|v} \mathbf{T}^{G_{F_{\infty,w}}}$$

([P92, 2.1 ou A.2.4]) et donc que

$$\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \cong H^1(G_\infty, \oplus_{w|v} V^{G_{F_{\infty,w}}}) \cong H^1_f(F_v,V) ;$$

pour le second isomorphisme, cf. (1.3.2) ; enfin rappelons que $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ est par définition contenu dans $H^1_f(F,V^*(1))$: c'est le noyau de $H^1(G_{S,F},V^*(1)) \to Z^*$.

On en déduit un isomorphisme naturel

$$\mathbb{Q}_p \otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* .$$

Notons $\mathrm{Loc}^2_{S,V}$ l'application de localisation

$$H^2(G_{S,F},V) \to \oplus_{v\in S_f} H^2(F_v,V) .$$

L'application définie rend commutatif le diagramme suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\oplus_{v\in S_f-S_p} H^1_f(F_v,V) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p\otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} & \longrightarrow & \ker \mathrm{Loc}^2_{S,V} & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{=} & & \downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} & & \\
\oplus_{v\in S_f-S_p} H^1_f(F_v,V) & \longrightarrow & (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* & \longrightarrow & (\ker \mathrm{Loc}_{S,V^*(1)}))^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

($\ker \mathrm{Loc}_{S,V^*(1)}$ étant le noyau de localisation aux places de S_f).

3.3.5. On peut maintenant montrer la proposition 3.3.1. Le lemme 3.3.4 implique que la série caractéristique $f(H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}))$ de $H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité $\geq dim_{\mathbb{Q}_p}\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$. En utilisant la définition de $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ donnée dans 2.3.3 que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_{\pm}(s)e_{\mathbf{T}}\\
&\quad=(2i\pi)^{t_H(\tau,\pm)}\prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^{\pm}(\tau)}\\
&\qquad s\wedge(\wedge^{d_{\pm}(V)}\Omega^{\epsilon}_{V,h,\pm})^{-1}(\det_{\Lambda}H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{\pm}\otimes(\det_{\Lambda}H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}))^{-1}_{\pm})\ ,
\end{aligned}$$

on voit que la multiplicité du zéro est supérieure ou égale à

$$\begin{aligned}
&dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)-m_0^{+}(\tau)-d_-(V)\\
&\qquad+r_0(V)+dim_{\mathbb{Q}_p}\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}\ .
\end{aligned}$$

Le lemme qui suit implique l'égalité des dimensions :

$$\begin{aligned}
&dim_{\mathbb{Q}_p}\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}+dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)\\
&\quad=dim_{\mathbb{Q}_p}H^1_f(F,V^*(1))+dim_{\mathbb{Q}_p}H^1_{f,\{p\}}(F,V)-dim_{\mathbb{Q}_p}H^1_f(F,V)-d_-(V)\ .
\end{aligned}$$

La proposition s'en déduit facilement.

3.3.6. ***Lemme.*** *On a la suite exacte*

$$\begin{aligned}
&0\to H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_f(F,V)\to Fil^0\mathbf{D}_p(V)\\
&\qquad\to(H^1_f(F,V^*(1))/ker\,Loc_{p,V^*(1)})^*\to 0\ .
\end{aligned}$$

Démonstration. Cela se déduit des suites exactes du type "Poitou-Tate", et plus précisément de suites exactes (tensorisées par $\mathbb{Q}_p$) de la proposition 4.1.1 de [P92] (cf. aussi A.3) pour

$$\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}A=\oplus_{v\in S_f}H^1_f(F_v,V)$$

et

$$\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}A=\oplus_{v\in S_f-S_p}H^1_f(F_v,V)\oplus\oplus_{v\in S_p}H^1(F_v,V)\ ,$$

et de l'isomorphisme $\oplus_{v\in S_p}H^1(F_v,V)/H^1_f(F_v,V)\cong \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. □

3.4. Multiplicité du zéro (deuxième forme).

3.4.1. Nous allons maintenant construire une application

$$H^1_{f,\{p\}}(F,V) \to \mathbb{Q}_p \otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty}$$

(comparer avec [P92, 4.3]). On a la suite exacte

$$0 \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^\wedge \to H^1(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)) \to \oplus_{v\in S_f} H^1(F_{\infty,v}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)) .$$

Soit $x \in H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})$ et $\mathbf{T}_x$ l'extension de $\mathbf{T}^*(1)$ par $\mathbb{Z}_p(1)$ associée à x à isomorphisme près. Soit $\mathcal{X}_x(F_\infty)$ l'image réciproque de $H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^\wedge \subset H^1(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$ dans $H^1(G_{S,F_\infty}, V_x/\mathbf{T}_x)$. Montrons que l'application

$$\mathcal{X}_x(F_\infty) \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^\wedge$$

est surjective : il suffit de vérifier que si y est un élément de

$$H^1(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$$

dont l'image dans $H^1(F_{\infty,v}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$ est nulle pour tout $v \in S_f$, le cup-produit local en v de y avec x est nul pour $v \in S_f$, ce qui est clair. On a donc une suite exacte

$$0 \to H^1(G_{S,F_\infty}, \mathbb{Q}_p(1)/\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathcal{X}_x(F_\infty) \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^\wedge \to 0 .$$

Soit $z \in H^1(G_{S,F_\infty}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$ appartenant à l'image de $H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^\wedge$. Soit $s_{glob,x}(z)$ un relèvement de z dans $\mathcal{X}_x(F_\infty)$. Comme z devient trivial dans

$$H^1(F_{\infty,v}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$$

pour toute place v de S, l'image $s_{glob,x}(z)_v$ de $s_{glob,x}(z)$ dans $H^1(F_{\infty,v}, V_x/\mathbf{T}_x)$ appartient en fait à l'image de $H^1(F_{\infty,v}, \mathbb{Q}_p(1)/\mathbb{Z}_p(1))$. Soit

$$\mathcal{L}_\chi : \oplus_{v\in S_f} H^1(F_{\infty,v}, \mathbb{Q}_p(1)/\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

l'application définie à partir des $p^{-m} l_{\chi_m}$ où χ_m est la restriction de χ à $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)$ (cf [P92, 4.3.1]) ; on pose

$$\lambda_\chi(x)(z) = \mathcal{L}_\chi(s_{glob,x}(z)) .$$

On définit ainsi une application λ_χ

$$\begin{aligned} H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T}) &\to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \\ x &\mapsto (z \mapsto \mathcal{L}_\chi(s_{glob,x}(z))) . \end{aligned}$$

3.4.2. ***Proposition.*** (i) *L'application* λ_χ

$$H^1_{f,\{p\}}(F,V) \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty}$$

est surjective et $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ *s'injecte dans* $H^1_{f,\{p\}}(F,V)$. *Ainsi, la suite*

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to H^1_{f,\{p\}}(F,V) \xrightarrow{\lambda_\chi} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \to 0$$

est exacte et $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \cong H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$.

(ii) *L'application composée*

$$\begin{aligned} H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \\ & \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \cong (\ker Loc_{p,V^*(1)})^* \end{aligned}$$

est l'application linéaire associée à la forme bilinéaire $<<\ ,\ >>_{V^*(1)}$.

Démonstration. Pour (ii), il suffit de comparer les définitions. On montre ensuite (comme dans le lemme du §3.1.4 ou en le déduisant de (ii)) que l'image $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$ de $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ dans $H^1(G_{S,F},V)$ est contenue dans le noyau de λ_χ. Notons K le conoyau de l'application $X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) \to H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\otimes K^{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{v\in S_f} V^{G_{F_v}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}_p\otimes Y^{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\otimes X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G_{S,F},V^*(1))^* \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{f,\{p\}}(F,V) \arrow[r, "\lambda_\chi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathbb{Q}_p\otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\otimes K_{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}_p\otimes Y_{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & H^1(G_{S,F},V^*(1))^* \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{Q}_p\otimes X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \arrow[d] & \\
 & & (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{Q}_p\otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La commutativité de (1) (resp. (2)) se démontre comme dans [P92, 4.4] (resp. [P92, 4.5]). Les colonnes sont exactes, les lignes sont exactes sauf peut-être la troisième (les ... signifiant que la première ligne se prolonge par la quatrième). Enfin, la troisième ligne est un complexe. On en déduit par une chasse au diagramme que la troisième ligne est exacte. Plus précisément, on montre d'abord que λ_χ est surjective, puis que l'on a une surjection de $\mathbb{Q}_p\otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ sur le noyau de λ_χ. En utilisant l'exactitude de toutes les autres colonnes et lignes, on montre ensuite que $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ et le noyau de λ_χ ont même dimension, ce qui finit la démonstration. $\square$

Remarque : On déduit facilement du diagramme que $\mathrm{Leop}(V^*(1), \mathbf{1}_\Delta)$ est vraie si et seulement si l'intersection de $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$ (image de $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ dans $H^1_{f,\{p\}}(F,V)$) et du noyau de localisation $\ker \mathrm{Loc}_{S,V}$ est nulle, c'est à dire si et seulement si $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$ s'injecte dans $\oplus_{v\in S_f} H^1(F_v,V)$. Quand à $\mathrm{Leop}(V, \mathbf{1}_\Delta)$, elle est vraie si et seulement si $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$ est de dimension $d_-(V)$.

3.4.3. ***Corollaire.*** *La forme bilinéaire $<<\ ,\ >>_V$ est non dégénérée si et seulement si $f(H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}))$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité $\dim_{\mathbb{Q}_p} \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$.*

Remarquons que la deuxième condition implique $\mathrm{Leop}(V, \mathbf{1}_\Delta)$.

Démonstration. Posons $r_1(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$. La multiplicité du zéro est supérieure ou égale à la dimension de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ qui grâce à 3.3.4 est $r_1(V)$. De plus la dimension de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty}$ est inférieure ou égale à celle de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$. Ainsi, la série caractéristique $f(H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}))$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité $r_1(V)$ si et seulement si l'application naturelle

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$$

est surjective. Supposons $<<\ ,\ >>_V$ non dégénérée. L'application

$$\begin{aligned} H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \\ \to & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \cong (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \end{aligned}$$

est donc un isomorphisme. Comme la première flèche est surjective, on en déduit que

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$$

est surjective et $f(H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}))$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité $r_1(V)$. Réciproquement, si $f(H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T}))$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité $r_1(V)$, l'application

$$H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$$

est surjective. D'autre part, on déduit du lemme 3.3.6 et de (3.1.1) où l'on échange les rôles de V et de $V^*(1)$ que

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{Q}_p} \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)} =& dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V^*(1)) - dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_p(V) \\ & - dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V) + dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_{f,\{p\}}(F, V) \\ =& - d_-(V) + dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_{f,\{p\}}(F, V) \ . \end{aligned}$$

D'autre part, $H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o$ est de dimension $d_-(V)$ grâce à $\mathrm{Leop}(V, \mathbf{1}_\Delta)$ (qui est impliqué par le fait que la série caractéristique de $H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})^\Delta$ est non nulle). Donc, les dimensions de $H^1_{f,\{p\}}(F, V)/H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o$ et de $(\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$ sont égales et

$$H^1_{f,\{p\}}(F, V)/H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$$

est un isomorphisme. Ce qui signifie que $<< \ , \ >>_V$ est non dégénérée. □

3.4.4. ***Proposition.*** *S'il existe un sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ tel que la forme bilinéaire*

$$< \ , \ >_{V,N}: ker u_{V,N} \times ker v_{V^*(1),N} \to \mathbb{Q}_p$$

soit non dégénérée, alors la forme bilinéaire

$$<< \ , \ >>_V: H^1_{f,\{p\}}(F, V)/H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o \times ker\, Loc_{p,V^*(1)} \to \mathbb{Q}_p$$

est non dégénérée et on a les isomorphismes

$$\begin{aligned} ker u_{V,N}/H^1_f(F, V)_o \cap ker u_{V,N} \cong& H^1_f(F, V)/H^1_f(F, V)_o \\ \cong& H^1_{f,\{p\}}(F, V)/H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o \ ; \end{aligned}$$

en particulier, $\delta(V) = 0$, $\mathrm{Leop}(V, V^*(1), \mathbf{1}_\Delta)$ est vraie, i.e $H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o$ est de dimension $d_-(V)$ et s'injecte dans $\oplus_{v \in S_f} H^1(F_v, V)$.

Démonstration. Supposons $< \ , \ >_{V,N}$ non dégénérée. Comme

$$(\ker u_{V,N})_o \stackrel{\text{déf}}{=} H^1_f(F, V)_o \cap \ker u_{V,N}$$

est contenu dans l'orthogonal de $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ dans $\ker u_{V,N}$, on a une surjection

$$\ker u_{V,N}/(\ker u_{V,N})_o \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \ .$$

Cette flèche se factorise :

$$\begin{aligned} \ker u_{V,N}/(\ker u_{V,N})_o \subset H^1_f(F, V)/H^1_f(F, V)_o \subset H^1_{f,\{p\}}(F, V)/H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o \\ \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \ . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$H^1_{f,\{p\}}(F, V)/H^1_{f,\{p\}}(F, V)_o \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$$

est surjective. On montre comme dans le corollaire 3.4.3 que

$$dim_{\mathbb{Q}_p}(\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \geq dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o :$$

en effet, comme $H^1_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ s'injecte dans $H^1_{f,\{p\}}(F,V)$, $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o$ est de dimension égale au rang sur Λ^Δ de $H^1_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^\Delta$ et donc supérieure ou égale à $d_-(V)$. Donc $H^1_{f,\{p\}}(F,V)/H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$ est un isomorphisme, d'où la première assertion. De plus, $\ker u_{V,N}/(\ker u_{V,N})_o \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^*$ est bijective et on a les isomorphismes désirés. Enfin, on a $\mathrm{Leop}(V,\mathbf{1}_\Delta)$ grâce à 3.4.3 et $\mathrm{Leop}(V^*(1),\mathbf{1}_\Delta)$ car la forme bilinéaire $<\ ,\ >_{V^*(1),N^\perp}$ est non dégénérée par 3.1.5. □

3.4.5. ***Définition :*** On dit que V est régulier en $\mathbf{1}$ s'il existe un sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$ régulier.

Donnons quelques conséquences de la notion de régulier :

i) Si V est régulier en $\mathbf{1}$ et si N est régulier, l'application

$$H^1_f(F,V)_o \to \mathrm{coker}\, \alpha_{V,N}$$

est surjective ; on a en effet d'après le (ii) de 3.4.4,

$$H^1_f(F,V)_o/H^1_f(F,V)_o \cap \ker u_{V,N} \cong H^1_f(F,V)/\ker u_{V,N}\ ;$$

ii) Si V est régulier en $\mathbf{1}$, on a la suite exacte

(3.4.1)
$$0 \to H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o/H^1_f(F,V)_o \to \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \to (H^1_f(F,V^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)})^* \to 0\ .$$

On utilise pour montrer ceci le lemme 3.3.6 et les isomorphismes de la proposition 3.4.4.

iii) Si V est régulier, $\mathrm{Leop}(V,V^*(1),\mathbf{1}_\Delta)$ est vraie.

iv) Si V est régulier en $\mathbf{1}$, $V^*(1)$ est régulier en $\mathbf{1}$.

3.4.6. ***Proposition.*** *On suppose* $\mathrm{Réc}(V)$ *vraie si* $Fil^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$. *Si* V *est régulier en* $\mathbf{1}$, $\mathbb{I}^\tau_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})$ *(resp.* $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T})$*) a un zéro en* $\mathbf{1}$ *de multiplicité*

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V^*(1)) - m_0^+(\tau)$$

(resp. $dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V^*(1))$*).*

Plus précisément, si N est régulier et si n est un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_p}(N)$, $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T})(n)$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité égale à $dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F, V^*(1))$.

Démontrons d'abord la proposition lorsque $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$. Avec les notations de 3.3.3, $\prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^{\pm}(V)} \wedge_{i\in J} \mathcal{L}_{\alpha_i,h}$ a un zéro en $\mathbf{1}$ de multiplicité égale à $-d_-(V)+r_0(V) = 0$. En effet, comme V est régulier en $\mathbf{1}$, pour N un sous-espace de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$, l'application $H^1_f(F,V)_o \to \operatorname{coker}\alpha_{V,N} = \mathbf{D}_p(V)/N$ est surjective ; c'est donc un isomorphisme puisque $H^1_{f,\{p\}}(F,V)_o = H^1_f(F,V)_o$ est de dimension $d_-(V)$ (par $\mathrm{Leop}(V, \mathbf{1}_\Delta)$). On en déduit que nécessairement $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} = H^1_f(F,V)_o$ s'injecte dans $\mathbf{D}_p(V)$ et on utilise alors les arguments de la démonstration du lemme 3.3.3. Comme $\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ est égal dans ce cas à $H^1_f(F,V^*(1))$, on en déduit la proposition en utilisant 3.4.3 et 3.4.4.

On suppose dans les lemmes et propositions qui suivent (3.4.7 à 3.4.13) que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$ et $\mathrm{Réc}(V)$ vraie .

3.4.7. On note β_N la projection de $N + \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ sur $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)/N \cap \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ parallèlement à N.

Proposition. *Soit $\alpha \in H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$ tel que $P(\alpha) \in H^1_f(F,\mathbf{T})$. Alors,*

(i) $(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h}) \equiv (h-1)!^{-1} log_V P(\alpha) \mod Fil^0\mathbf{D}_p(V)$;

(ii) *si de plus $P(\alpha) \in ker u_{V,N}$ et si $y \in ker v_{V^*(1),N}$,*

$$[\beta_N((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h})), log_{V^*(1)}(y)]_{\mathbf{D}_p(V)} = (h-1)!^{-1} < P(\alpha), y >_{V,N} \ .$$

Remarquons que le premier membre de (ii) est bien défini puisque $\log_{V^*(1)}(y)$ annule $N \cap \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. D'autre part, sous les mêmes hypothèses, les formules peuvent s'écrire

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0^{-1}\mathcal{L}_{\alpha,0}) \equiv \log_V P(\alpha) \mod \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \ ,$$

$$[\beta_N((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0^{-1}\mathcal{L}_{\alpha,0})), \log_{V^*(1)}(y)]_{\mathbf{D}_p(V)} =< P(\alpha), y >_{V,N} \ .$$

Démonstration de (i). Posons

$$g = \mathbf{1}_\Delta((\gamma-1)^{-1}\mathcal{L}_{\alpha,0}) = \mathbf{1}_\Delta((\gamma-1)^{-1}\beta_h l_0 \mathcal{L}_{\alpha,h})$$

avec $\beta_h = \prod_{0<j<h} l_{-j}$. Comme $P(\alpha) \in H^1_f(F, \mathbf{T})$, g est un élément de $\mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Gamma)) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ qui est bien définie en $\mathbf{1}$ et on a

$$\mathbf{1}_\Delta((\gamma-1)^{-1}l_0\beta_h\alpha) = \Omega^\epsilon_{V,h}(g) \ .$$

D'où,

$$\log_V P(\alpha) = \log_V(\mathrm{Tr}_\Delta(\alpha_0)) = \log\chi(\gamma)(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(g)$$

et

$$\mathbf{1}(g) = (h-1)!(\log\chi(\gamma))^{-1}\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h}) \ .$$

On en déduit (i).

L'assertion (ii) se déduit des lemmes 3.4.8 et 3.4.9 qui suivent et où l'on suppose toujours que $P(\alpha) \in H^1_f(F, \mathbf{T})$. □

3.4.8. Reprenons les notations de la démonstration de (i). Ecrivons $g = g_N + g^N + f$ avec

$$g_N \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Gamma)) \otimes (1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}N \ ,$$
$$g^N \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Gamma)) \otimes (1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$$

et

$$f \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Gamma)) \otimes (1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}S$$

où S est un supplémentaire de $N + \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. Les g_N, g^N, f sont bien définis en $\mathbf{1}$. La projection $P(\beta)$ de $\beta = \Omega^\epsilon_{V,h}(g^N)$ dans $\oplus_{v\in S_p} H^1(F_v, V)$ est nulle : en effet, $\lambda_V(P(\beta))$ est nul grâce au lemme 3.3.2 car

$$(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}\lambda_V(P(\beta)) = (h-1)!\mathbf{1}(l_0 g^N) = 0$$

puisque g^N est définie en $\mathbf{1}$. D'autre part, la partie (i) du lemme 3.4.7 implique que

$$\begin{aligned}\log_V P(\beta) &\equiv (h-1)!(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(g^N)\\ &\equiv 0 \mod \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)\end{aligned}$$

et donc que $\log_V P(\beta)$ est nul. D'où la nullité de $P(\beta)$. Comme $Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T})_{G_\infty}$ s'injecte dans $\oplus_{v\in S_p} H^1(F_v, \mathbf{T})$, on en déduit que $\beta = (\gamma-1)\beta'$ où $\beta' \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Gamma)) \otimes Z^1_{\infty,p}(F, \mathbf{T})$ et $P(\beta')$ a un sens. On pose

$$\delta_{V,N}(\alpha) = \lambda_V(P(\beta')) \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \cap N \ .$$

Il est facile de voir que $\delta_{V,N}(\alpha)$ ne dépend que de α et non des choix faits.

Lemme. *On a*

$$\beta_N((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h})) = (h-1)!^{-1}\delta_{V,N}(\alpha) \ .$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, on a

$$\mathbf{1}_\Delta(\mathcal{L}_{\alpha,h}) = \beta_h(\gamma-1)l_0^{-1}g = \beta_h(\gamma-1)l_0^{-1}(g_N + g^N + f)$$

avec $\mathbf{1}((\gamma-1)l_0^{-1}) = \pm\log\chi(\gamma) \neq 0$. Donc,

$$\begin{aligned}&\beta_N((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha,h}))\\ &\qquad = \pm\,(h-1)!\log\chi(\gamma)\beta_N((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(g^N))\\ &\qquad = \pm\,(h-1)!\log\chi(\gamma)(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(g^N)\end{aligned}$$

Alors, si $\tilde{g}^N = (\gamma-1)^{-1}g^N$ et $\beta' = \Omega^\epsilon_{V,h}(\tilde{g}^N)$, on a $g^N = ((\gamma-1)/l_0)l_0\tilde{g}^N$, $\beta = (\gamma-1)\beta'$ et

$$\begin{aligned}\log\chi(\gamma)(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(g^N) =&(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0\tilde{g}^N)\\ =&\lambda_V(\beta')\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.3.2. D'où le lemme. □

3.4.9. ***Lemme.*** *Pour $y \in ker v_{V^*(1),N}$ et $\alpha \in H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})$, on a*

$$[\delta_{V,N}(\alpha), log_{V^*(1)}(y)]_{\mathbf{D}_p(V)} = < P(\alpha), y >_{V,N} \quad .$$

Démonstration. Prenons $y \in H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))$. Pour toute place v, le cup-produit local de α_n et de y est nul dans $H^2(F_{n,v},\mathbb{Q}_p(1))$ et donc dans $H^2(F_{n,v},\mathbb{Z}_p(1))$. On en déduit qu'il existe $\alpha_y \in H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}_y)$ relevant α. Nécessairement, pour $v \in S_f - S_p$, $P(\alpha_y)$ appartient à l'image de $Z^1_{\infty,v}(F,\mathbf{T})$ dans $H^1(F_v,\mathbf{T})$ qui est contenue dans $H^1_f(F_v,\mathbf{T})$. Donc $P(\alpha_y) \in H^1_{f,\{p\}}(F,V_y)$. On prend alors

$$s_{glob,y}(P(\alpha)) = P(\alpha_y) \ .$$

D'autre part, reprenons les notations de 3.4.7 et 3.4.8. Posons

$$d_N = (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}\mathbf{1}(g_N)$$

et

$$d^N = (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}\mathbf{1}(g^N) \ .$$

On a donc

$$(\log\chi(\gamma))^{-1}\delta_{V,N}(\alpha) = d^N \ .$$

D'autre part,

$$(\log\chi(\gamma))^{-1}s_{p,N,y}(P(\alpha)) = P(\Omega^\epsilon_{V_y,h}(\sigma_y(g_N)))$$

où σ_y est la section naturelle :

$$\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(V_y)$$

compatible à φ. Comme

$$(\gamma-1)^{-1}l_0\alpha_y - \Omega^{\epsilon}_{V_y,h}(\sigma_y(g_N+g^N))$$

appartient à $\mathcal{K}(G_\infty)\otimes Z^1_{\infty,p}(F,\mathbb{Z}_p(1))$ et est bien définie en $\mathbf{1}$, comme l_χ est nul sur cet espace, on en déduit que

$$l_\chi(s_{glob,y}(P(\alpha)) - \sum_{v\in S_p} s_{p,N,y}(P(\alpha))) = \log\chi(\gamma) l_\chi(\exp_{V_y,F}(\sigma_y(d^N)) \ .$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\sigma_y(d^N) \equiv \sum_{v\in S_p}[d^N, \log_{V^*(1)} y]e_v \mod \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_y)$$

où (e_v) est la base de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$ telle que $l_\chi(\exp_{\mathbb{Q}_p(1),F}(e_v)) = 1$. On en déduit le lemme. □

3.4.10. On choisit un **sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ régulier.** Commençons la démonstration de la proposition 3.4.6 proprement dite. On choisit les $\alpha_i \in H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$ pour $i\in J$ (avec $\sharp J = d_-(V)$) de manière à ce que si $x_i = P(\alpha_i)$,

i) les x_i pour $i \in J$ forment une base de $\mathbb{Q}_p\otimes H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$,

ii) les x_i pour $i\in J_0$ (avec $\sharp J_0 = r_0$ et $J_0\subset J$) forment une base de $H^1_f(F,V)_o$,

iii) les x_i pour $i\in J_{0,N}$ (avec $\sharp J_{0,N} = r_{0,N}$ et $J_{0,N}\subset J_0$) forment une base de

$$(\ker u_{V,N})_o = H^1_f(F,V)_o \cap \ker u_{V,N} \ .$$

En particulier, $\sum_{i\in J}\Lambda_+\alpha_i$ est un sous-Λ_+-module de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$ de rang $d_-(V)$ tel que la série caractéristique de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+/\sum_{i\in J}\Lambda_+\alpha_i$ soit première à $\gamma-1$.

On choisit un système libre $(y_i)_{i\in\tilde{J}^*}$ de $H^1_f(F,V^*(1))$ (avec $\sharp\tilde{J}^* = \tilde{r}^*$) dont l'image dans $H^1_f(F,V^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ en est une base ; on demande que les $(y_i)_{i\in\tilde{J}^*_N}$ (avec $\sharp\tilde{J}^*_N = \tilde{r}^*_N$ et $\tilde{J}^*_N\subset\tilde{J}^*$) appartiennent à $\ker v_{V^*(1),N}$ et que leurs images dans $\ker v_{V^*(1),N}/\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$ en forment une base.

Posons $K = (J - J_0)\sqcup\tilde{J}^*$. Comme, grâce à la suite exacte (3.4.1),

$$d_-(V) - r_0 = dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) - \tilde{r}^* \ ,$$

on a $\sharp K = dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. D'autre part, grâce à la conséquence (i) de 3.4.5, on a

$$r_0 - r_{0,N} = \tilde{d}(V) - dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) + N)\ .$$

Donc, comme $\tilde{r}^*_N = \tilde{r}^* - dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \cap N)$ et que $dim_{\mathbf{Q}_p}N = d_+(V)$, on a

$$\tilde{r}^*_N = r_0 - d_-(V) + dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) + N) = r_{0,N}\ .$$

3.4.11. ***Lemme.*** *Il existe une unique base $(a_i)_{i\in K}$ de $Fil^0\mathbf{D}_p(V)$ telle que*
(i) $a_i = \lambda_V(x_i)$ *pour* $i \in J - J_0$;
(ii)

$$[a_i, log_{V^*(1)}y_i]_{\mathbf{D}_p(V)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases}$$

pour $i \in K$ et $j \in \tilde{J}^*$. On peut de plus supposer les y_i choisis de manière à ce que les a_i pour $i \in \tilde{J}^* - \tilde{J}^*_N$ forment une base de $Fil^0\mathbf{D}_p(V) \cap N$.

Démonstration. C'est une traduction de la suite exacte (3.4.1) d'une part et de la surjectivité de $H^1_f(F, V^*(1)) \to \operatorname{coker}\alpha_{V^*(1),N^\perp}$ d'autre part. □

Remarque : On complète avec un système libre $(a_i)_{i\in L}$ de N de manière à ce que les a_i pour $i \in K \sqcup L$ forment une base de $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) + N$; une base de N est alors donnée par les a_i pour $i \in L \sqcup \tilde{J}^* - \tilde{J}^*_N$.

3.4.12. ***Lemme.*** *Si n est un élément non nul de $\det_{\mathbf{Q}_p}N$, $\mathbf{1}(\wedge_{i\in J}\mathcal{L}_{\alpha_i,h}) \wedge n$ est non nul.*

Remarque : On montre en fait et on l'utilisera dans le paragraphe suivant qu'avec les notations précédentes (en particulier du lemme 3.4.11)

$$\begin{aligned}(h-1)!^{d_-(V)}\, \wedge^{d_-(V)}\, &(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\wedge_{i\in J}\mathcal{L}_{\alpha_i,h}) \wedge n \\ &= \pm \det(< x_i, y_j >_{V,N})_{i\in J_{0,N}, j\in \tilde{J}^*_N}\ \wedge_{i\in\tilde{J}^*_N} a_i \\ &\quad \wedge (\wedge_{i\in J-J_0}\lambda_V(x_i)) \wedge (\wedge_{i\in J_0-J_{0,N}}\log_V x_i) \wedge n\ .\end{aligned}$$

Démonstration. Prenons d'abord $i \in J_{0,N}$. Alors $(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha_i,h})$ appartient à $N + \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. Ecrivons

$$(h-1)!(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha_i,h}) = \sum_{j\in K\sqcup L} A_{ij}a_j\ ;$$

par la proposition 3.4.7, (ii), on a

$$[\beta_N(\sum_{j\in K\sqcup L} A_{ij}a_j), \log_{V^*(1)}y]_{\mathbf{D}_p(V)} =< P(\alpha_i), y >_{V,N}=< x_i, y >_{V,N}$$

pour $y \in \ker v_{V^*(1),N}$. D'où, en prenant $y = y_j$, $j \in \tilde{J}_N^*$,

$$A_{ij} =< x_i, y_j >_{V,N}$$

pour $i \in J_{0,N}, j \in \tilde{J}_N^*$. Donc

$$\begin{aligned}(h-1)!^{r_{0,N}} \wedge^{r_{0,N}} (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\wedge_{i\in J_{0,N}}\mathcal{L}_{\alpha_i,h})\\ \equiv \det(< x_i, y_j >_{V,N})_{i\in J_{0,N},j\in \tilde{J}_N^*} \wedge_{k\in \tilde{J}_N^*} a_k\\ \mod \sum_{j\in K\sqcup L-\tilde{J}_N^*} \mathbb{Q}_p a_j \wedge (\wedge^{r_{0,N}-1}\mathbf{D}_p(V)) .\end{aligned}$$

Le nombre $\delta_N = \det(< x_i, y_j >_{V,N})_{i\in J_{0,N},j\in \tilde{J}_N^*}$ est non nul grâce à la stricte régularité de N et la proposition 3.4.4, (i). Pour $i \in J - J_0$, on a

$$(h-1)!(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_{\alpha_i,h}) = a_i$$

(lemme 3.3.2, (ii)). Ainsi, avec

$$t = r_{0,N} + d_-(V) - r_0 = dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) + N) - d_+(V) ,$$

$$\begin{aligned}(h-1)!^t \wedge^t (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\wedge_{i\in J_{0,N}\sqcup J-J_0}\mathcal{L}_{\alpha_i,h})\\ =\delta_N \wedge_{i\in \tilde{J}_N^*\sqcup J-J_0} a_i \mod N \wedge \wedge^{t-1}\mathbf{D}_p(V) .\end{aligned}$$

Comme $(\wedge_{i\in \tilde{J}_N^*\sqcup J-J_0}a_i) \wedge n$ est un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) + N)$, on a

$$\begin{aligned}(h-1)!^t \wedge^t (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})(\mathbf{1}(\wedge_{i\in J_{0,N}\sqcup J-J_0}\mathcal{L}_{\alpha_j,h})) \wedge n\\ = \pm\, \delta_N \wedge_{i\in \tilde{J}_N^*\sqcup J-J_0} a_i \wedge n .\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la proposition 3.4.7, (i), on a

$$\begin{aligned}[\wedge^{d_-(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\wedge_{i\in J}\mathcal{L}_{\alpha_i,h})] \wedge n\\ = \pm\, \delta_N \wedge_{i\in \tilde{J}_N^*\sqcup J-J_0} a_i \wedge n \wedge (\wedge_{j\in J_0-J_{0,N}}\log_V x_j .\end{aligned}$$

Comme

$$H^1_f(F,V)_o/(\ker u_{V,N})_o \cong H^1_f(F,V)/\ker u_{V,N} \cong \operatorname{coker} \alpha_{V,N}$$

(cf. 3.4.5, (ii)), $\wedge_{j\in J_0-J_{0,N}}\log_V x_j$ est une base de $\det_{\mathbb{Q}_p}\operatorname{coker} \alpha_{V,N}$; on en déduit que

$$[\wedge^{d_-(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\wedge_{j\in J}\mathcal{L}_{\alpha_j,h})] \wedge n$$

est non nul. □

3.4.13. La proposition 3.4.6 se déduit alors de la formule (3.3.4) et du corollaire 3.4.3 comme en 3.3.5.

3.5. Valeurs spéciales et périodes.

3.5.1. Si j est un entier, notons $\Gamma^*(j)$ le coefficient dominant de la fonction $\Gamma(s)$ en $s=j$. On a donc

$$\Gamma^*(j)=\begin{cases}(j-1)! & \text{si } j>0\\ (-1)^j(j!)^{-1} & \text{si } j\leq 0\ .\end{cases}$$

Si τ est un type à l'infini, on pose

$$\begin{aligned}\Gamma(\tau,\pm) &=\prod_q \Gamma^*(-q)^{n_q^\pm(\tau)}\ ;\\ t(\tau,\pm) &=\sum_q q n_q^\pm(\tau)\ ;\\ \Gamma^\pi(\tau,\pm) &=(2i\pi)^{t(\tau,\pm)}\Gamma(\tau,\pm)\ .\end{aligned}$$

Ce dernier est un élément de $(2i\pi)^{t(\tau,\pm)}\mathbb{Q}$.

Si F est un élément de $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes M$ où M est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, si $\rho\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty,\overline{\mathbb{C}}_p^\times)$, on pose

$$\rho^*(F)=F^*(\rho)=\lim_{s\to 0}\rho<\chi>^s(F)/s^r$$

où r est l'ordre du zéro en ρ.

Si $F=(F_h)$ est un élément de $\mathcal{L}_s(\mathcal{K}(G_\infty)\otimes M)$, et si ρ est un homomorphisme continu de G_∞ à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}_p^\times$ tel que $\rho\chi^{-j}$ est d'ordre fini, $((h-j-1)!)^{-s}F_h^*(\rho)$ est indépendant de h pour h assez grand. On le note $F^*(\rho)$ ou $\rho^*(F)$. De plus, on note $a\sim b$ si a et b diffèrent d'une unité de $\mathbb{Z}_p$.

Enfin, posons $L_p(V,0)=\det(1-\varphi|\mathbf{D}_p(V))^{-1}$.

3.5.2. ***Théorème.*** *Supposons V régulier en $\mathbf{1}$. Soit $\omega_{tg}\in \det_{\mathbb{Q}_p}t_V$, non nul et $\omega_{\mathbf{T}}$ une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p}H^1_f(F,\mathbf{T})\otimes\det_{\mathbb{Z}_p}H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))$. Alors, il existe un élément $C(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})$ de $\mathbb{Q}_p$ tel que, pour tout sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$ régulier et $n\in\det_{\mathbb{Q}_p}N$, on ait*

$$\begin{aligned}&\wedge^{d_+(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}^*(\mathbb{I}^\tau_{arith,\{p\}}(\mathbf{T}))(n)\\ &\qquad\sim\Gamma^\pi(\tau,+)L_p(V,0)^{-1}C(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})Per_V(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})(n)\end{aligned}$$

pour tout type à l'infini τ et ce qui est équivalent

$$\begin{aligned}&\wedge^{d_+(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}^*(\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T}))(n)\\ &\qquad\sim L_p(V,0)^{-1}C(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})Per_V(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})(n).\end{aligned}$$

La démonstration du théorème 3.5.2 est faite dans le reste de §3.5. On remarquera à la fin de cette démonstration que la constante $C(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})$, qui ne dépend pas de N, peut être définie sans hypothèse de régularité. Dans le paragraphe 3.6, on la calculera complètement en termes d'invariants arithmétiques classiques.

3.5.3. ***Lemme.*** *On a*

$$\begin{aligned}&\prod_{j>-h,j\neq 0}\mathbf{1}(l_{-j})^{dim_{\mathbb{Q}_p}Fil^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)}\\ &\qquad=((h-1)!^{d_-(V)}\prod_q\Gamma^*(-q)^{-\tilde{h}_q(V)}\Gamma(\tau,+)\ .\end{aligned}$$

Démonstration. Notons A le membre de gauche. On a

$$A=\prod_{j>-h,j\neq 0}(-j)^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)}\ .$$

Comme

$$dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)=\sum_{h>q\geq j}\tilde{h}_q(V)-n_q^+(\tau)\ ,$$

on a

$$\begin{aligned}A&=\prod_{j>-h,j\neq 0}\prod_{h>q\geq j}(-j)^{\tilde{h}_q(V)-n_q^+(\tau)}\\ &=\prod_{h>q>-h}\Big(\prod_{q\geq j>-h,j\neq 0}(-j)\Big)^{\tilde{h}_q(V)-n_q^+(\tau)}\ .\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\prod_{q\geq j>-h,j\neq 0}(-j)=(h-1)!/\Gamma^*(-q)\ .$$

En effet, si $q<0$, cela vaut

$$\prod_{-q\leq j<h,j\neq 0}j=(h-1)!/(-q-1)!=(h-1)!/\Gamma(-q)=(h-1)!/\Gamma^*(-q)\ ;$$

si $q>0$, cela vaut

$$\Big(\prod_{0<j<h}j\Big)\prod_{0<j\leq q}(-j)=(h-1)!(-1)^q q!=(h-1)!/\Gamma^*(-q)\ .$$

D'où,

$$\begin{aligned} A =&(h-1)!^{d_-(V)}\prod_q \Gamma^*(-q)^{-\tilde{h}_q(V)}\prod_q \Gamma^*(-q)^{n_q^+(\tau)} \\ =&(h-1)!^{d_-(V)}\prod_q \Gamma^*(-q)^{-\tilde{h}_q(V)}\Gamma(\tau,+)\ . \end{aligned}$$

□

3.5.4. Fixons quelques notations (cf. aussi 3.2.7). On écrit $\omega_{\mathbf{T}}^{-1} = \omega_1 \otimes \omega_2$ avec

$$\omega_1 \in \det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V)\ ,\quad \omega_2 \in \det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V^*(1))\ .$$

On note $\omega_{1,0}$ une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F,V)/H^1_f(F,V)_o$ que l'on peut choisir de la forme $z_1\wedge\cdots\wedge z_s$ avec les z_i appartenant à $\ker u_{V,N}$ et $\omega_{2,0}$ une base de $\det_{\mathbb{Q}_p}\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}$. Choisissons $(\alpha_i)_{i\in J}$ dans $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+$ comme en 3.4.10. En particulier, si H_1 est une série caractéristique de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_+/(\sum_{i\in J}\Lambda\alpha_i)_+$, elle est non nulle et première à $\gamma-1$. On pose toujours $x_i = P(\alpha_i)$. Notons $L(\mathbf{T})$ (resp. $\Delta(\mathbf{T})$) l'image (resp. le noyau) de $H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$ dans $H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})_o$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(H_1) \sim& \sharp\Delta(\mathbf{T})[L(\mathbf{T}) : \sum_{i\in J}\mathbb{Z}_p x_i)] \\ \stackrel{\text{déf}}{=}& C_1(\mathbf{T},x_*) \in \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times\ . \end{aligned}$$

On reprend les notations du §3.4.10. On pose

$$\begin{aligned} \omega_{1,N} =&\omega_{1,0}\wedge \wedge_{i\in J_{0,N}} x_i \in \det_{\mathbb{Q}_p}\ker u_{V,N}\ , \\ \omega'_{1,N} =& \wedge_{i\in J_0 - J_{0,N}} x_i\ , \\ \omega_{2,N} =&\omega_{2,0} \wedge_{i\in J^*_N} y_i \in \det_{\mathbb{Q}_p}\ker v_{V^*(1),N}\ , \\ \omega'_{2,N} =& \wedge_{i\in J^*-J^*_N} y_i\ . \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \omega_{1,N}\wedge\omega'_{1,N} =&u_1(\omega_1,\omega_{1,0},x_*)\omega_1\ , \\ \omega_{2,N}\wedge\omega'_{2,N} =&u_2(\omega_2,\omega_{2,0},y_*)\omega_2 \end{aligned}$$

où $u_1 = u_1(\omega_1,\omega_{1,0},x_*)$ et $u_2 = u_2(\omega_2,\omega_{2,0},y_*)$ sont des éléments non nuls de $\mathbb{Q}_p$, indépendants de N.

3.5.5. Soit H_2 une série caractéristique de $H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_+$. On peut choisir un générateur I de $(2i\pi)^{-t(\tau,+)}\mathbb{I}^\tau_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})_+$ tel que

$$I(n)e_{\mathbf{T}} = \prod_{j>-h} l_{-j}^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)} H_1^{-1}H_2 n\wedge(\wedge_{j\in J}\mathcal{L}_{\alpha_j,h})$$

et le calcul de l'ordre de multiplicité implique que

$$I^*(n)e_{\mathbf{T}} = \prod_{j>-h, j\neq 0} \mathbf{1}(l_{-j})^{dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(V)-m_j^+(\tau)}\mathbf{1}(H_1)^{-1}\mathbf{1}(H_2^*)n \wedge \mathbf{1}(\wedge_{j\in J}\mathcal{L}_{\alpha_j,h})^* \ .$$

Ecrivons

$$\mathbf{1}(H_2^*) \sim C_2(\omega_{1,0}\otimes\omega_{2,0})\mathrm{disc}_{\omega_{1,0}\otimes\omega_{2,0}} << \ , \ >>_V$$

où $C_2 = C_2(\omega_{1,0}\otimes\omega_{2,0}) \in \mathbb{Q}_p^\times$. Ecrivons d'autre part

$$I(n)e_{\mathbf{T}} = n \wedge m \ ;$$

si l'on pose

$$P_\pm(\varphi) = \wedge^{d_\pm(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})$$

et

$$L_p(V^*(1),0) = \det(1-\varphi|\mathbf{D}_p(V^*(1)))^{-1} = \det(1-p^{-1}\varphi^{-1}|\mathbf{D}_p(V))^{-1} \ ,$$

on a

$$\begin{aligned} n \wedge P_-(\varphi)(m) & \\ &=(\wedge^{\tilde{d}(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1}))[P_+(\varphi)^{-1}(n)\wedge m] \\ &=\det(1-\varphi|\mathbf{D}_p(V))^{-1}\det(1-p^{-1}\varphi^{-1}|\mathbf{D}_p(V))I(P_+(\varphi)^{-1}(n))e_{\mathbf{T}} \\ &=L_p(V,0)L_p(V^*(1),0)^{-1}P_+(\varphi)(I)(n)e_{\mathbf{T}} \ . \end{aligned}$$

Enfin, on choisit n_1, ω^n comme en 3.2.5 : $(n_1, n, \omega_{tg}, \omega^n)$ sont compatibles à la suite exacte $(st_{V,N})$. On pose $n = n_1 \wedge n_2$. On a

$$\wedge_{j\in \tilde{J}_N^*} a_j = (\log_{n_1^{-1}}(\omega'_{2,N}))^{-1} n_1$$

et

$$\wedge_{j\in J_0-J_{0,N}} \log_V x_j = \log_{\omega^n}(\omega'_{1,N})\omega^n \ .$$

Ainsi, en posant

$$\tau = \wedge_{j\in\tilde{J}_N^*} a_j \wedge (\wedge_{j\in J-J_0}\lambda_V(x_j)) \ ,$$

on a

$$\begin{aligned} &\wedge_{j\in\tilde{J}_N^*} a_j \wedge (\wedge_{j\in J-J_0}\lambda_V(x_j)) \wedge (\wedge_{j\in J_0-J_{0,N}}\log_V x_j) \wedge n \\ &\quad =(\log_{n_1^{-1}}(\omega'_{2,N}))\log_{\omega^n}(\omega'_{1,N})\tau \wedge \omega^n \wedge n_2 \ . \end{aligned}$$

Mais τ (resp. $\tau\wedge\omega^n\wedge n_2 = \tau\wedge\omega_{tg}$) est une base de $\det_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ (resp $\det_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(V)$) indépendante de N (et de n). Posons $\tau\wedge\omega_{tg} = C_3 e_{\mathbf{T}}$ avec $C_3 = C_3(\omega_{tg}, \mathbf{T}, x_*, y_*) \in \mathbb{Q}_p^\times$. On déduit alors de la formule (3.4.2), de la formule

$$\begin{aligned} &\mathrm{disc}_{\omega_{1,0}\otimes\omega_{2,0}} << \ , \ >>_V \det(< x_i, y_j >_{V,N})_{i\in J_{0,N}, j\in\tilde{J}_N^*} \\ &\quad =\mathrm{disc}_{\omega_{1,N}\otimes\omega_{2,N}} < \ , \ >_{V,N} \ . \end{aligned}$$

et de ce qui précède que

$$\begin{aligned}&P_+(\varphi)\mathbf{1}(I^*)(n)e_{\mathbf{T}}\\ =&L_p(V,0)^{-1}L_p(V^*(1),0)\Gamma(\tau,+)(\prod_q \Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(V)})^{-1}\mathrm{disc}_{\omega_{1,N}\otimes\omega_{2,N}} <\ ,\ >_{V,N}\\ &\qquad \log_{n_1^{-1}}(\omega'_{2,N})\log_{\omega^n}(\omega'_{1,N})C_1^{-1}C_2C_3e_{\mathbf{T}}\ .\end{aligned}$$

D'où,

$$P_+(\varphi)\mathbf{1}(I^*)(n)=\Gamma(\tau,+)L_p(V,0)^{-1}C(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})\mathrm{Per}_V(\omega_1\otimes\omega_2\otimes\omega_{tg}^{-1})(n)$$

avec

$$C(\omega_{\mathbf{T}}\otimes\omega_{tg}^{-1})=L_p(V^*(1),0)(\prod_q \Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(V)})^{-1}u_1u_2C_1^{-1}C_2C_3\ .$$

3.6. Valeurs spéciales.

3.6.1. Nous rappelons ici la construction faite dans [FP94] permettant de comprendre la partie "algébrique" des valeurs spéciales des fonctions L dans les conjectures de Bloch-Kato généralisées. Nous ne supposons rien dans les paragraphes 3.6.1-3.6.3 sur les valeurs propres de φ.

Posons

$$\begin{aligned}&\Delta_S(F,V)\\&=(\otimes_{i\in\{0,1,2\}}(\det_{\mathbb{Q}_p}H^i(G_{S,F},V))^{(-1)^i})\otimes\otimes_{v\in S}(\otimes_{i\in\{0,1,2\}}(\det_{\mathbb{Q}_p}H^i(F_v,V))^{(-1)^{i+1}})\ .\end{aligned}$$

C'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1. En utilisant l'existence de suites exactes longues de cohomologie, il est facile de vérifier que le sous-$\mathbb{Z}_p$-module

$$\begin{aligned}&\Delta_S(F,\mathbf{T})\\&=(\otimes_{i\in\{0,1,2\}}(\det_{\mathbb{Z}_p}H^i(G_{S,F},\mathbf{T}))^{(-1)^i})\otimes\otimes_{v\in S}(\otimes_{i\in\{0,1,2\}}(\det_{\mathbb{Z}_p}H^i(F_v,\mathbf{T}))^{(-1)^{i+1}})\end{aligned}$$

de $\Delta_S(F,V)$ est indépendant de $\mathbf{T}$. On définit

$$\Delta_f(F,V)=L_f(F,V)\otimes L_f(F,V^*(1))\otimes(\det_{\mathbb{Q}_p}(\oplus_{v\in S_\infty}H^0(F_v,V)))^{-1}\otimes\det_{\mathbb{Q}_p}t_V$$

avec

$$L_f(F,V)=\det_{\mathbb{Q}_p}H^0(F,V)\otimes(\det_{\mathbb{Q}_p}H^1_f(F,V))^{-1}\ ,$$
$$L_f(F,V^*(1))=\det_{\mathbb{Q}_p}H^0(F,V^*(1))\otimes(\det_{\mathbb{Q}_p}H^1_f(F,V^*(1)))^{-1}\ .$$

C'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1. La suite exacte de Poitou-Tate pour F, les suites exactes locales rappelées en A.2.4 et A.2.6 (voir aussi le paragraphe suivant) permettent de définir un isomorphisme canonique de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$\Delta_f(F,V)\cong\Delta_S(F,V)$$

(comme en [FP94, II], par exemple). On note $\Delta_{EP,\mathbb{Z}_p}(F,V)$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1, image réciproque de $\Delta_S(F,\mathbf{T})$ par l'isomorphisme $\Delta_f(F,V)\cong\Delta_S(F,V)$. Rappelons (cf. [FP94, II, 4.1.7]) que si $S'\subset S$, la flèche naturelle $\Delta_S(F,\mathbf{T})\to\Delta'_S(F,\mathbf{T})$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules.

3.6.2. Rappelons sans démonstration le lien entre ce module et des invariants plus classiques comme le groupe de Shafarevich-Tate ou les nombres de Tamagawa ([FP91] ou [FP94, 5.3]). On définit $\text{Ш}(\mathbf{T},F)$ comme le noyau de l'application

$$H^1(G_{S,F},V/\mathbf{T})/\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\otimes H^1_f(F,\mathbf{T})\to\oplus_{v\in S}H^1(F_v,V/\mathbf{T})/\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\otimes H^1_f(F_v,\mathbf{T})\ ,$$

c'est un groupe fini (cf. [FP94, 5.3.5]). C'est aussi le noyau de

$$H^1_f(F,V/\mathbf{T})/\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes H^1_f(F,\mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S} H^1_f(F_v,V/\mathbf{T})/\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes H^1_f(F_v,\mathbf{T}) \ .$$

D'autre part, pour toute place v de S et $\omega_{tg,v}$ base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(F_v)$ pour $v \in S_p$, on définit les nombres de Tamagawa $Tam^o_{v,\omega_{tg,v}}(\mathbf{T}) \in p^{\mathbb{Z}}$ pour $v \in S_p$ (resp. $Tam^o_v(\mathbf{T})$ pour $v \in S - S_p$) de la manière suivante : Pour toute place v de F, posons

$$L_{f,F,v}(V) = \det_{\mathbb{Q}_p}(H^0(F_v,V)) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F_v,V))^{-1} \ .$$

Si v ne divise pas p et si I_v est le groupe d'inertie en v, posons $\mathbf{D}_v(V) = V^{I_v}$ muni de l'action du Frobenius φ et $t_{V,v} = 0$; si v divise p,

$$\mathbf{D}_v(V) = (B_{cris} \otimes V)^{G_{F_v}}, \quad t_{V,v} = \mathbf{D}_v(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_v(V) \ .$$

La suite exacte

$$0 \to H^0(F_v,V) \to \mathbf{D}_v(V) \to \mathbf{D}_v(V) \oplus t_{V,v} \to H^1_f(F_v,V) \to 0 \ ,$$

où $\mathbf{D}_v(V) \to \mathbf{D}_v(V)$ est donné par l'application $1-\varphi$, induit un isomorphisme :

$$\otimes_{v\in S_p} L_{f,F,v}(V) \cong (\det_{\mathbb{Q}_p} t_V)^{-1} \ .$$

Si $\omega_{tg,v}$ est une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V,v}$, on définit l'élément de Tamagawa par

$$L_{f,F,v}(V) = Tam^o_{v,\omega_{tg,v}}(\mathbf{T})\omega^{-1}_{tg,v} \ .$$

Si $\omega_{tg} \in \det_{\mathbb{Q}_p} t_V$, avec $\omega_{tg} = \otimes_{v\in S_p}\omega_{tg,v}$, on pose ensuite

$$\mathrm{Tam}^0_{\omega_{tg}}(\mathbf{T}) = \prod_{v\notin S_p} Tam^o_v(\mathbf{T}) \prod_{v\in S_p} Tam^o_{v,\omega_{tg,v}}(\mathbf{T}) \in p^{\mathbb{Z}} \ .$$

Posons

$$L_f(F,\mathbf{T}) = \det_{\mathbb{Z}_p} H^0(F,\mathbf{T}) \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T}))^{-1}$$

et de même pour $\mathbf{T}^*(1)$. Finalement, posons

$$\mathcal{T}(\mathbf{T},\omega_{tg}) = \frac{\mathrm{Tam}^0_{\omega_{tg}}(\mathbf{T})\sharp Ш(\mathbf{T}^*(1),F)}{\sharp(V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_F}} \ .$$

3.6.3. ***Proposition.*** *Si $\tilde{\omega}_{\mathbf{T}}$ est une base du $\mathbb{Z}_p$-module*

$$L_f(F,\mathbf{T}) \otimes L_f(F,\mathbf{T}^*(1)) \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p}(\oplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v,\mathbf{T})))^{-1}$$

et ω_{tg} une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$, on a

$$\Delta_{EP,\mathbb{Z}_p}(F,V) = \mathbb{Z}_p \mathcal{T}(\mathbf{T},\omega_{tg})^{-1}\tilde{\omega}_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg} \ .$$

3.6.4. On suppose de nouveau que 1 et p^{-1} ne sont pas valeurs propres de φ agissant sur $\mathbf{D}_p(V)$. Nous montrons dans les §3.6.6 et suivants le théorème qui suit.

Théorème. *Soient $\tilde{\omega}_{\mathbf{T}}$ une base du $\mathbb{Z}_p$-module*

$$(\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}))^{-1} \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1)))^{-1} \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p}(\oplus_{v \in S_\infty} H^0(F_v, \mathbf{T}))^{-1} ,$$

$\omega_{\mathbf{T}}$ une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1))$ et ω_{tg} une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$, on a

$$\Delta_{EP, \mathbb{Z}_p}(F, V) = \mathbb{Z}_p C(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1})^{-1} \tilde{\omega}_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg} .$$

Ainsi, $C(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1}) \sim \mathcal{T}(\mathbf{T}, \omega_{tg})$.

3.6.5. On déduit de 3.6.4 et 3.5.1 le théorème suivant.

Théorème. *(bis) Supposons V régulier en* $\mathbf{1}$. *Supposons que* $\mathrm{Réc}(V)$ *est vraie. Soient $\omega_{tg} \in \det_{\mathbb{Q}_p} t_V$, non nul et $\omega_{\mathbf{T}}$ une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1))$. Alors, pour tout sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$ régulier et $n \in \det_{\mathbb{Q}_p} N$, on a*

$$\begin{aligned}&\wedge^{d_+(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})(\mathbf{1}^*(\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathbf{T})))(n)\\ &\qquad\sim \Gamma^{\pi}(\tau, +) L_p(V,0)^{-1} \mathcal{T}(\mathbf{T}, \omega_{tg}) Per_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1})(n)\end{aligned}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\begin{aligned}&\wedge^{d_+(V)}(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}^*(\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathbf{T}))(n)\\ &\qquad\sim L_p(V,0)^{-1} \mathcal{T}(\mathbf{T}, \omega_{tg}) Per_V(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1})(n) .\end{aligned}$$

3.6.6. Si A et B sont des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini et si $f : \mathbb{Q}_p \otimes A \to \mathbb{Q}_p \otimes B$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels, on note $h(A \to B) = h(f : A \to B) = [B : A]$ le déterminant de f dans des bases des $\mathbb{Z}_p$-modules $\det_{\mathbb{Z}_p} A$ et $\det_{\mathbb{Z}_p} B$; lorsque f induit une application $f_{\mathbb{Z}_p}$ (resp. injective) de A dans B, c'est le quotient de Herbrand $h(f_{\mathbb{Z}_p}) = \sharp \mathrm{coker}\, f_{\mathbb{Z}_p} / \sharp \ker f_{\mathbb{Z}_p}$ (resp. l'indice de $f(A)$ dans B).

Commençons par transformer un peu la constante $C(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1})$. Dans sa définition, interviennent certains choix de $x_i = P(\alpha_i)$ et de y_i. Il est facile de voir que si l'on change les x_i par un multiple dans $\mathbb{Q}_p$, la définition de $C(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1})$ en termes des nouveaux C_j et u_j est encore valable.

i) Rappelons que l'on a noté $\Delta(\mathbf{T})$ (resp. $L(\mathbf{T})$) le noyau fini (resp. l'image) de l'application naturelle

$$H^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T}) .$$

On peut supposer que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{d_-(V)}$ est une base de $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})_o$. On a alors (cf. 3.5.4)

$$C_1 = \sharp\Delta(\mathbf{T})[H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})_o : L(\mathbf{T})]^{-1} .$$

ii) On prend pour $\omega_{1,0}$ (resp. $\omega_{2,0}$) une base du $\mathbb{Z}_p$-module

$$\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T})/H^1_f(F,\mathbf{T})_o$$

(resp. $\det_{\mathbb{Z}_p} \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)}$ où

$$\mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)} : H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1)) \to \oplus_{v\in S_p} H^1_f(F_v,V^*(1)) \cong t_{V^*(1)} = (\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V))^*$$

est l'application de localisation et où $H^1_f(F,\mathbf{T})_o$ est l'image réciproque de $H^1_f(F,V)_o$ dans $H^1_f(F,\mathbf{T})$. Prenons pour ω_1 une base de $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T})$ et pour ω_2 une base de $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))$.

iii) On peut choisir les x_i de manière à ce que $\wedge_{i\in J_0} x_i$ soit une base de $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T})_o$. On a alors (cf. 3.5.4) $u_1 = 1$.

iv) On choisit les y_j de manière à ce que $\omega_{2,0} \wedge (\wedge_{i\in J^*} y_i)$ soit une base du $\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))$. On a alors $u_2 = 1$ (cf. 3.5.4).

v) Calculons C_3 (cf. 3.5.5). Posons $L' = H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})_o/H^1_f(F,\mathbf{T})_o$; on a la suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels :

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes L' \to \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \to \mathbb{Q}_p \otimes (H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* \to 0 .$$

Par un argument analogue à celui du lemme 3.3.6, on démontre d'autre part la suite exacte de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\begin{aligned} 0 \to H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})/H^1_f(F,\mathbf{T}) &\to \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,\mathbf{T})/H^1_f(F_v,\mathbf{T}) \\ &\to (H^1_f(F,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})^\wedge \to 0 \end{aligned}$$

qui tensorisée par $\mathbb{Q}_p$ donne la suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels précédente. Ici, $\mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)}$ est l'application de localisation en p sur $H^1_f(F,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$.

Remarquons que $L' = H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})/H^1_f(F,\mathbf{T})$. Par définition de C_3, on a $C_3 = M_1 M_2$ avec

$$\begin{aligned} &M_1 \\ &=[(H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* : (H^1_f(F,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})\hat{}\,] \end{aligned}$$

$$M_2 = h(\oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,\mathbf{T})/H^1_f(F_v,\mathbf{T}) \to \mathbb{Z}_p\omega')$$

où ω' est la base de $\det_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ telle que $e_{\mathbf{T}} = \omega' \wedge \omega_{tg}$.

3.6.7. ***Lemme.*** *Posons* $\tau_p = \prod_{v\in S_p} \sharp(H^0(F_v, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)))$. *On a*

$$M_2 \sim \tau_p^{-1} \prod_q \Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(V)}\, Tam^0_{p,\omega_{tg}}(\mathbf{T}) L_p(V^*(1),0)^{-1}\ .$$

Démonstration. Le dual de Pontyragin de $H^1(F_v,\mathbf{T})/H^1_f(F_v,\mathbf{T})$ est

$$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes H^1_f(F_v,\mathbf{T}^*(1))\ .$$

On en déduit que

$$(H^1(F_v,\mathbf{T})/H^1_f(F_v,\mathbf{T}))^* \cong H^1_f(F_v,\mathbf{T}^*(1))/C_v$$

où $C_v = H^0(F_v, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))$ est le sous-groupe de torsion de $H^1(F_v,\mathbf{T}^*(1))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_2 =&\tau_p^{-1} h(\mathbb{Z}_p\omega'^{-1} \to \oplus_{v\in S_p} H^1_f(F_v,\mathbf{T}^*(1))) \\ =&\ \tau_p^{-1} Tam^0_{p,\omega'^{-1}}(\mathbf{T}^*(1)) L_p(V^*(1),0)^{-1} \end{aligned}$$

par définition des nombres de Tamagawa de $\mathbf{T}^*(1)$. On utilise alors la conséquence de $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ qui est aussi une conséquence de $\mathrm{Réc}(V)$ ([P92, §3.5], cf. aussi l'appendice C)

$$Tam^0_{p,\omega'^{-1}}(\mathbf{T}^*(1))/\mathrm{Tam}^0_{p,\omega_{tg}}(\mathbf{T}) \sim \prod_q \Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(V)}\ .$$

□

3.6.8. ***Lemme.*** *Posons* $M_3 = [(\ker Loc_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* : (\ker Loc_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})\hat{}\,]$. *Alors,*

$$M_1 = M_3 \sharp Ш(\mathbf{T}^*(1),F)\ .$$

Démonstration. Posons

$$A = H^1_f(F,\mathbf{T}^*(1))/\ker \mathrm{Loc}'_{p,\mathbf{T}^*(1)}$$

où

$$\ker \mathrm{Loc}'_{p,\mathbf{T}^*(1)} = \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)} \oplus (V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_F}$$

et

$$B = H^1_f(F,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))/\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)}/\mathbf{T}^*(1)$$

Alors, $M_1 = [A^* : B\hat{}]^{-1}$. On a le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes, ce qui force la définition de A_1 et de A_2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & A_1 & \rightarrow & B & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 \rightarrow & & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1)) & \rightarrow & H^1_f(F, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)) & \rightarrow & Ш(\mathbf{T}^*(1), F) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 \rightarrow & & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \ker \mathrm{Loc}'_{p,\mathbf{T}^*(1)} & \rightarrow & \ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)} & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Remarquons que A est sans torsion et que l'on a $A_1 = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes A$ et $A_1\hat{} = A^*$. Donc,

$$\begin{aligned} M_1^{-1} =& [A_1\hat{} : B\hat{}]^{-1} = [B : A_1] \\ =& \sharp Ш(\mathbf{T}^*(1), F)(\sharp A_2)^{-1} \\ =& \sharp Ш(\mathbf{T}^*(1), F)[\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)} : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes \ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)}]^{-1} \\ =& \sharp Ш(\mathbf{T}^*(1), F)[(\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* : (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})\hat{}] . \end{aligned}$$

□

3.6.9. ***Lemme.*** *On a*

$$M_3 C_2 = C_1 \prod_{v \in S_f - S_p} Tam^0_{\omega_{tg},v}(\mathbf{T}) \tau_p / \sharp (H^0(F, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))) .$$

Démonstration. Rappelons que

$$\mathbf{1}(H_2^*) = (\log \chi(\gamma))^{-s} h(H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})^{G_\infty} \rightarrow H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})_{G_\infty})$$

avec $s = dim_{\mathbb{Q}_p} H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})^{G_\infty}$ et que

$$(\log \chi(\gamma))^s \mathrm{disc}_{\omega_{1,0} \otimes \omega_{2,0}} << \, , \, >>_V$$

est égal à l'indice généralisé de

$$\begin{aligned} H^1_f(F, \mathbf{T})/H^1_f(F, \mathbf{T})_o = H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T})/H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T})_o \rightarrow H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})^{G_\infty} \\ \rightarrow H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})_{G_\infty} \rightarrow (\ker \mathrm{Loc}_{p,\mathbf{T}^*(1)})^* \end{aligned}$$

où les flèches précédentes ne sont peut-être définies qu'après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}_p$. On en déduit que

$$\begin{aligned} M_3 C_2 =& M_3 \mathbf{1}(H_2^*)/\mathrm{disc}_{\omega_{1,0} \otimes \omega_{2,0}} << \, , \, >>_V \\ =& h(H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T})/H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T})_o \rightarrow H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})^{G_\infty})^{-1} \\ & h(H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})_{G_\infty} \rightarrow (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})\hat{})^{-1} . \end{aligned}$$

Considérons les suites exactes de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$0 \to Y^{G_\infty} \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty} \to Y_{G_\infty}$$
$$\to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to 0$$

et

$$0 \to \prod_{v\in S} \mathbf{T}^{G_{F_v}} \to \mathcal{H}_2 \to H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})/L(\mathbf{T}) \to Z/L(\mathbf{T}) \to \mathcal{H}_1$$
$$\to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})^\wedge \to 0$$

avec $\mathcal{H}_i = H^i(G_{S,F}, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^\wedge$ et $Z = \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,\mathbf{T}) \oplus_{v\in S-S_p} H^1_f(F_v,\mathbf{T})$. On a d'autre part construit des isomorphismes de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}
f_{1,\mathbb{Q}_p}: &\quad \mathbb{Q}_p \otimes \prod_{v\in S} \mathbf{T}^{G_{F_v}} \to \mathbb{Q}_p \otimes Y^{G_\infty}\\
f_{2,\mathbb{Q}_p}: &\quad \mathbb{Q}_p \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathbb{Q}_p \otimes X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{G_\infty}\\
f_{3,\mathbb{Q}_p}: &\quad \mathbb{Q}_p \otimes H^1_{f,\{p\}}(F,\mathbf{T})/L(\mathbf{T}) \to \mathbb{Q}_p \otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})^{G_\infty}\\
f_{4,\mathbb{Q}_p}: &\quad \mathbb{Q}_p \otimes Y_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes Z^u/L(\mathbf{T})
\end{aligned}$$

(avec $Z^u = Z^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty}$)

$$\begin{aligned}
f_{5,\mathbb{Q}_p}: &\quad \mathbb{Q}_p \otimes X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes \mathcal{H}_1\\
f_{6,\mathbb{Q}_p}: &\quad \mathbb{Q}_p \otimes H^2_{\infty,\{p\}}(F,\mathbf{T})_{G_\infty} \to \mathbb{Q}_p \otimes (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})^\wedge
\end{aligned}$$

qui font commuter le diagramme formé des deux suites exactes précédentes tensorisées par $\mathbb{Q}_p$ et des flèches f_i. On en déduit que

$$h(f_1)h(f_3)h(f_2)^{-1} = h(f_4)^{-1}h(f_6)^{-1}h(f_5) \ ,$$

où les $h(f_i)$ valent

$$h(f_1) = h(\prod_{v\in S_f} \mathbf{T}^{G_{F_v}} \to Y^{G_\infty}) = \sharp\Delta(\mathbf{T})$$

grâce à la suite exacte déduite de la suite exacte (3.3.1) avec $X^2_{\infty,S}(F,\mathbf{T}) = 0$,

$$h(f_2) = h(\mathcal{H}_2 \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T})^{G_\infty}) = 1$$

(cf. (1.3.5)),

$$h(f_4) = h(Y_{G_\infty} \to Z^u/L(\mathbf{T})) = [Z' : Z^u] \ ,$$

avec $Z' = \oplus_{v\in S_p} H^1(F_v,\mathbf{T}) \oplus_{v\in S-S_p} H^1_f(F_v,\mathbf{T})$,

$$h(f_5) = \sharp(H^0(F, V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)),$$

(suite exacte (1.3.4))

$$h(f_6) = h(H^2_{\infty,\{p\}}(F, \mathbf{T})_{G_\infty} \to (\ker \mathrm{Loc}_{p,V^*(1)/\mathbf{T}^*(1)})\hat{})$$

avec

$$(M_3C_2)^{-1} = h(f_6)h(f_3)[H^1_{f,\{p\}}(F, \mathbf{T})_o : L(\mathbf{T})]$$

On remarque que

$$[Z' : Z^u] = \prod_{v \in S_f - S_p} \mathrm{Tam}^0_{\omega_{tg},v}(\mathbf{T})\tau_p$$

(cf. par exemple lemme 2.2.5 de [P92] ou A.2.4). On en déduit le lemme. □

3.6.10. Le théorème 3.6.4 se déduit alors de la formule

$$C(\omega_{\mathbf{T}} \otimes \omega_{tg}^{-1}) = L_p(V^*(1), 0) \prod_q \Gamma^*(-q)^{-\tilde{h}_q(V)} u_1 u_2 C_1^{-1} C_2 C_3$$

et des calculs qui viennent d'être faits.

3.6.11. Nous allons maintenant poser quelques questions audacieuses. Auparavant, remarquons que les calculs qui viennent d'être faits dans le cas du caractère $\mathbf{1}$ peuvent aussi être faits dans le cas d'un caractère d'ordre fini de G_∞ et donc en remplaçant V par un twist $V(j)$ pour $j \in \mathbb{Z}$ pour tout caractère $\rho = \chi^j \eta$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et η d'ordre fini (nous appelons un tel caractère un caractère géométrique et l'entier $j = j_\rho$ sera appelé le type de ρ). En particulier, un sous-espace N de $\mathbf{D}_p(V)$ sera dit régulier en η d'ordre fini et de conducteur $p^{a(\eta)} = p^{n+1}$ (relativement à V) s'il est de dimension $d_{\epsilon(\eta)}(V)$ et si la suite $(sf_{\eta,V,N})$

$$0 \to (\ker \alpha_{F_n,V,N})^{(\eta)} \to (H^1_f(F_n, V^*(1))^{(\eta^{-1})})^* \to H^1_f(F, V)^{(\eta)} \to (\mathrm{coker}\, \alpha_{V,N})^{(\eta)} \to 0$$

existe et est exacte. On dit que N est régulier pour $\rho = \chi^j \eta$ si $N[-j] \subset \mathbf{D}_p(V(j))$ est régulier en η relativement à $V(j)$.

Question : Existe-t-il un sous-espace N^+ (resp. N^-) de $\mathbf{D}_p(V)$ de dimension $d_+(V)$ (resp. $d_-(V)$) tel que N^+ (resp. N^-) soit régulier en presque tout caractère η de G_∞ d'ordre fini et de signe $\epsilon(\eta) = +$ (resp. $\epsilon(\eta) = -$) ? Si oui, la dimension $m_0^+(V)$ (resp. $m_0^-(V)$) de $N^+ \cap \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ (resp. $N^- \cap \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$) est-elle indépendante du choix de $N^\pm$? Si la réponse à ces questions est positive, on dit que V est fortement régulier.

Remarquons que si V est fortement régulier, il en est de même de $V^*(1)$ grâce à la proposition 3.1.5 et son analogue pour η.

En supposant que, pour tout entier j, $V(j)$ est fortement régulier, on pose $m_j^{\pm}(V) = m_0^{\pm}(V(j))$. Alors,

$$\tau(V) = (m_j^+(V), m_j^-(V), m_j^+(V^*(1)), m_j^-(V^*(1)))$$

est un type à l'infini de V appelé type de Hodge p-adique de V.

On a $\tau_{min}(V) \leq \tau(V) \leq \tau_{max}(V)$ (la première inégalité est claire, la seconde vient de la proposition 3.4.6 et de son analogue pour tout caractère d'ordre fini η). Lorsque V est une représentation irréductible (resp. semi-simple), on s'attend à ce que

$$\tau_{min}(V) = \tau(V) = \tau_{max}(V) \quad (\text{resp. } \tau(V) = \tau_{max}(V)\ .)$$

Par contre, on ne peut espérer l'égalité en général, comme le montrent les 2 exemples suivants :

i) Soit V une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ (cristalline en p). Cette extension doit être comme son analogue motivique "ramifiée en l'infini", ce qui se traduit par le fait que $\tau(V) < \tau(\mathbb{Q}_p) + \tau(\mathbb{Q}_p(1))$. Par contre, il est clair que

$$\tau_{max}(V) = \tau_{max}(\mathbb{Q}_p) + \tau_{max}(\mathbb{Q}_p(1))\ .$$

ii) Soit $V = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p(1)$. On a alors

$$\tau(V) = \tau(\mathbb{Q}_p) + \tau(\mathbb{Q}_p(1)) = \tau_{max}(V)\ ,$$

mais

$$\begin{aligned}\tau_{min}(V) &< \tau_{min}(\mathbb{Q}_p) + \tau_{min}(\mathbb{Q}_p(1))\\ &= \tau_{max}(\mathbb{Q}_p) + \tau_{max}(\mathbb{Q}_p(1)) = \tau_{max}(V)\ .\end{aligned}$$

Pour conclure, une réponse positive à la question permettrait de définir le type de Hodge p-adique et le facteur à l'infini de V. Cependant, il faut bien être conscient que

i) cette question est peut-être sans réels fondements autre que l'espoir que les réponses p-adiques sont les mêmes que les réponses complexes, celles-ci étant prédites par les conjectures de Bloch-Kato généralisées ;

ii) savoir définir "le" facteur p-adique à l'infini d'une représentation p-adique géométrique n'est pas vraiment utile et n'a pour l'instant aucune application autre qu'esthétique ; en particulier ne pas le savoir n'empêche pas d'énoncer les conjectures principales ...

4. Fonction L p-adique d'un motif

Résumé. Ce chapitre est très conjectural et tout en s'appuyant sur quelques exemples concrets relève pour une très grande partie de l'utopie. Par exemple, on y suppose implicitement les conjectures de Beilinson. Soit M une structure motivique dont la réalisation p-adique est cristalline en p. On donne une caractérisation de la fonction L p-adique associée à M par ses valeurs en (presque) tous les caractères géométriques de G_∞. On essaie surtout de donner un tableau le plus complet possible du paysage. Il reste ensuite à vérifier dans le plus de cas particuliers possibles que la réalité cadre avec ce tableau.

Dans le paragraphe 4, nous donnons une présentation différente en introduisant des éléments "spéciaux" de $\det_\Lambda H^1_{\infty,S}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$ qui contiendraient toutes les informations sur les fonctions L p-adiques.

4.1. Rappels.

4.1.1. Soit M une structure motivique ([FP94]) sur $\mathbb{Q}$ dont la réalisation p-adique $V = M_p$ est cristalline en p. Nous prendrons le point de vue optimiste que tout ce qui est espéré sur M est vrai tout en essayant de rappeler ce que l'on utilise en pratique. L'avantage de ce point de vue est de pouvoir prendre un motif explicite et d'essayer de vérifier les conjectures générales faites sur les valeurs spéciales sans vérifier les propriétés supposées de la "catégorie des motifs".

On note respectivement M_{dR}, M_B, M_l, pour l nombre premier, les réalisations respectivement de de Rham, de Betti et l-adiques de M. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel M_B est muni d'une involution. On note $M_B^{\pm}$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de M_B sur lequel l'involution agit par ± 1. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel M_{dR} est muni d'une filtration $\mathrm{Fil}^i M_{dR}$. On note

$$t_M = M_{dR}/\mathrm{Fil}^0 M_{dR}$$

l'espace tangent de M. On dispose d'un isomorphisme de comparaison

$$\iota_M : \mathbb{C} \otimes M_B \to \mathbb{C} \otimes M_{dR} .$$

On dispose d'autre part d'un isomorphisme

$$\mathbf{D}_p(M) \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} M_{dR}$$

où $\mathbf{D}_p(M) = \mathbf{D}_{\mathbb{Q},p}(M_p)$ et d'un isomorphisme

$$\iota_{M_p} \ : \ B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_p \cong B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(M) \cong B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}} M_{dR} .$$

4.1.2. La structure motivique M possède une fonction L. Notons $\mathbf{L}^{\infty}(M)$ la fonction L complète de M. Ainsi, on a

$$\mathbf{L}^{\infty}(M,s) = L_{\infty}(M,s) \prod_l L_l(M,s)$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers l de $\mathbb{Q}$ et où $L_l(M,s)$ est le facteur local en l de M. Rappelons-en une définition. Si l est un nombre premier, on pose

$$L_l(M,s) = \begin{cases} \det(1 - Frob_l^{-1} l^{-s} | M_p^{I_l})^{-1} & \text{si } l \neq p \\ \det(1 - \varphi p^{-s} | \mathbf{D}_p(M))^{-1} & \text{si } l = p. \end{cases}$$

Pour le facteur à l'infini, on pose

$$m_q^{\pm}(M) = dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \otimes M_B^{\pm} \cap \mathbb{R} \otimes \mathrm{Fil}^q(M_{dR})$$

et on pose

$$n_q^{\pm}(M) = m_q^{\pm}(M) - m_{q+1}^{\pm}(M) .$$

Alors, on a avec $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$

$$L_\infty(M,s) = \prod_q \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\epsilon_q - q)^{n_q^+(M)}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-\epsilon_q-q)^{n_q^-(M)}$$

où $\epsilon_q \in \{0,1\}$ est congru à $q \mod 2$ (cf. [FP94, III, §1]).

On suppose que $\mathbf{L}^\infty(M)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe.

Si Σ est un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$, on note

$$\mathbf{L}_\Sigma^\infty(M) = \prod_{l\notin\Sigma} L_l(M,s)$$

la fonction L Σ-incomplète. Par exemple,

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^\infty(M) = L_\infty(M,s) \prod_{l\notin\{p,\infty\}} L_l(M,s) ,$$

$$\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^\infty(M) = \prod_{l\notin\{p,\infty\}} L_l(M,s) .$$

Plus généralement, soit η un caractère de Dirichlet à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ de conducteur f. Soit $[\eta]$ le motif d'Artin sur $\mathbb{Q}$ associé au caractère η : l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $[\eta]_l$ est donnée par η. On identifie le caractère de Dirichlet et le caractère de $G_{\mathbb{Q}}$ correspondant par l'homomorphisme d'Artin : si $r \in \mathbb{Z}$ et si σ_r désigne l'automorphisme de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ vérifiant $\sigma_r(\beta) = \beta^r$ pour toute racine de l'unité β d'ordre premier à r, on note abusivement $\eta(r) = \eta(\sigma_r)$. On note $M(\eta) = M \otimes [\eta]$ la structure motivique tordue par η à coefficients dans le corps $E = \mathbb{Q}(\eta)$ engendré sur $\mathbb{Q}$ par les valeurs de η. Soit σ un plongement de E dans $\mathbb{C}$. Le composé $\eta^\sigma = \sigma \circ \eta$ est alors à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'isomorphisme de comparaison associé à σ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\otimes[\eta]_B &\to \mathbb{C}\otimes[\eta]_{dR} \\ 1\otimes 1_B &\mapsto G(\eta^\sigma, 2i\pi)^{-1}\otimes 1_{dR} \end{aligned}$$

avec

$$G(\eta^\sigma, 2i\pi) = \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_f)/\mathbb{Q})} \eta^\sigma(\tau)\tau(exp(2i\pi/f)) .$$

On peut encore définir une fonction

$$\mathbf{L}^\infty(M(\eta),s) = (\mathbf{L}^{\infty,\sigma}(M(\eta),s))_\sigma$$

à valeurs dans $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\eta) = \prod_\sigma \mathbb{Q}(\eta)_\sigma$ avec

$$\mathbf{L}^{\infty,\sigma}(M(\eta), s) = \mathbf{L}^{\infty}(M, (\eta^\sigma)^{-1}, s) = \sum_{(n,f)=1} \eta^\sigma(n)^{-1} a_n n^{-s}$$

si $\mathbf{L}^\infty(M, s) = \sum_n a_n n^{-s}$.

4.1.3. On "dispose" d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1_f(\mathbb{Q}, M)$ (resp. $H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1))$) et d'une application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$H^1_f(\mathbb{Q}, M) \to H^1_f(\mathbb{Q}, M_p)$$

(resp.

$$H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)) \to H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)_p) \text{)}$$

qui, tensorisée par $\mathbb{Q}_p$, devient un isomorphisme. Si

$$\begin{aligned}\Delta_f(M) = \det{}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathbb{Q}, M) &\otimes (\det{}_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M))^{-1} \\ &\otimes \det{}_{\mathbb{Q}} H^0(\mathbb{Q}, M^*(1)) \otimes (\det{}_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)))^{-1} \\ &\otimes (\det{}_{\mathbb{Q}} M_B^+)^{-1} \otimes \det{}_{\mathbb{Q}} t_M \ ,\end{aligned}$$

on dispose d'une application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\Delta_f(M) \to \Delta_f(\mathbb{Q}, M_p)$$

qui devient un isomorphisme lorsqu'on tensorise $\Delta_f(M)$ par $\mathbb{Q}_p$:

$$\mathbb{Q}_p \otimes \Delta_f(M) \cong \Delta_f(\mathbb{Q}, M_p) \ .$$

4.1.4. Supposons que M soit admissible à l'infini au sens de [FP94] : on dispose ainsi d'une application de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\alpha_M^+ = \alpha_M : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} M_B^+ \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} t_M$$

et d'une suite exacte fondamentale

$$(sf_M) \qquad 0 \to H^0(\mathbb{Q}, M) \to \ker \alpha_M \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H^1(\mathbb{Q}, M^*(1))^*$$
$$\to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H^1(\mathbb{Q}, M) \to \operatorname{coker} \alpha_M \to H^0(\mathbb{Q}, M^*(1))^* \to 0 \ .$$

On construit alors à partir de (sf_M) et de la suite exacte tautologique

$$(st_M) \qquad 0 \to \ker \alpha_M \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} M_B^+ \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} t_M \to \operatorname{coker} \alpha_M \to 0$$

une application linéaire de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\underline{\mathrm{Per}}_M : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_f(M)^{-1} \cong \mathbb{R} \ ;$$

avec les notations de [FP94], on a $\underline{\mathrm{Per}}_M(\omega) = \iota_{M,\mathbb{Q},\infty}(\omega^{-1})^{-1}$.

Notons $\Gamma^{\pi,*}(M) \in \mathbb{Q}2^{\mathbb{Z}/2}\pi^{\mathbb{Z}/2}$ le coefficient dominant de $L_\infty(M,s)$ en $s=0$. Les conjectures de Beilinson et als prédisent alors que

(i) $\mathbf{L}^\infty(M,s)$ (resp. $\mathbf{L}^\infty_{\{\infty\}}(M,s)$) a un zéro en $s=0$ d'ordre

$$dim_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)) - dim_{\mathbb{Q}} H^0(\mathbb{Q}, M^*(1)) - dim_{\mathbb{R}} \ker \alpha_M$$

(resp.

$$dim_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)) - dim_{\mathbb{Q}} H^0(\mathbb{Q}, M^*(1)) \ ) \ ;$$

(ii) si l'on note $\mathbf{L}^{\infty,*}(M,0)$ le coefficient dominant du développement de $\mathbf{L}^\infty(M,s)$ en $s=0$,

$$\Gamma^{\pi,*}(M)^{-1} \frac{\mathbf{L}^{\infty,*}(M,0)}{\underline{\mathrm{Per}}_M(\omega)} \in \mathbb{Q}^\times$$

dès que ω est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Delta_f(M)^{-1}$ et, ce qui est équivalent,

$$\frac{\mathbf{L}^{\infty,*}_{\{\infty\}}(M,0)}{\underline{\mathrm{Per}}_M(\omega)} \in \mathbb{Q}^\times \ .$$

De même, si η est un caractère de Dirichlet, des conjectures analogues peuvent être faites ([F92]). On définit une application $\mathbb{Q}(\eta)$-linéaire $\underline{\mathrm{Per}}_{M(\eta)}$ de $\Delta_f(M(\eta))$ dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{Q}(\eta)$, avec

$$\begin{aligned}\Delta_f(M(\eta)) = \det{}_{\mathbb{Q}(\eta)} H^0(\mathbb{Q}, M(\eta)) \otimes \det{}_{\mathbb{Q}(\eta)} H^1_f(\mathbb{Q}, M(\eta))^{-1} \\ \otimes \det{}_{\mathbb{Q}(\eta)} H^0(\mathbb{Q}, M(\eta)^*(1)) \otimes \det{}_{\mathbb{Q}(\eta)} H^1_f(\mathbb{Q}, M(\eta)^*(1))^{-1} \\ \otimes (\det{}_{\mathbb{Q}(\eta)} M(\eta)^+_B)^{-1} \otimes \det{}_{\mathbb{Q}(\eta)} t_{M(\eta)} \ .\end{aligned}$$

En notant $\Gamma^{\pi,*}(M(\eta))$ le coefficient dominant de $L_\infty(M(\eta),s)$ et si ω est une base de $\Delta_f(M(\eta))$, on devrait avoir

$$\Gamma^{\pi,*}(M)^{-1} \frac{\mathbf{L}^{\infty,*}(M(\eta),0)}{\underline{\mathrm{Per}}_{M(\eta)}(\omega)} \in \mathbb{Q}(\eta)^\times$$

plongé dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{Q}(\eta)$ et, ce qui est équivalent,

$$\frac{\mathbf{L}^{\infty,*}_{\{\infty\}}(M(\eta),0)}{\underline{\mathrm{Per}}_{M(\eta)}(\omega)} \in \mathbb{Q}(\eta)^\times \ .$$

4.1.5. Les définitions, notations et conjectures précédentes sont encore valables pour $M(j)$ et pour $M(j)(\eta)$. On dit que ρ est un caractère géométrique de G_∞ s'il existe un entier $j = j_\rho$ tel que $\rho\chi^{-j}$ est un caractère $\eta = \eta_\rho$ d'ordre fini à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}^\times$. Pour simplifier les notations, on posera alors $M(\rho) = M(\chi^j\eta) = M(j)(\eta)$, $H^1_f(\mathbb{Q}, M(\rho)) = H^1_f(\mathbb{Q}, M(j)(\eta))$ etc... et $\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\eta)$, $\mathbb{Z}[\rho] = \mathbb{Z}[\eta]$.

4.2. Définition conjecturale de la fonction L p-adique d'un motif.

4.2.1. Les conjectures qui vont suivre sont maximalistes au sens où on y a mis le maximum de propriétés des fonctions L p-adiques. Nous verrons ensuite comment les transformer en des conjectures plus raisonnables à vérifier. Nous en donnons deux versions, l'une pour une fonction L p-adique complète, l'autre pour une fonction L sans facteurs à l'infini. Avant de les énoncer, donnons quelques notations et conventions.

Soit $\mathcal{M} \subset M_B$ une $\mathbb{Z}$-structure sur M, c'est-à-dire la donnée d'un $\mathbb{Z}$-réseau $\mathcal{M}$ dans M_B tel que $\mathbb{Z}_l \otimes \mathcal{M} \subset M_l$ soit stable par $G_\mathbb{Q}$ pour tout nombre premier l. Nous la supposons orientée au sens où l'on suppose choisies sur $\det_\mathbb{Z}\mathcal{M}^+$ et sur $\det_\mathbb{Z}\mathcal{M}^-$ des bases $\omega_B^+(\mathcal{M})$ et $\omega_B^-(\mathcal{M})$ de $\mathbb{Z}$-modules. Le choix d'une orientation de $\mathbb{Z}(1)$ est équivalent au choix de i ou plutôt de $2i\pi$. On en choisit une.

On note $\mathcal{M}(j)$ la $\mathbb{Z}$-structure orientée sur $M(j)$ qui s'en déduit : sur le motif $\mathbb{Q}(j) = \mathbf{1}(j)$, il y a une $\mathbb{Z}$-structure canonique orientée que l'on note $\mathbb{Z}(j)$. Les définitions, notations et conjectures précédentes sont encore valables pour $M(j)$. De même, si ρ est un caractère géométrique, il y a sur $M(\rho)$ une $\mathbb{Z}[\rho]$-structure (à un sens évident) qui se déduit de $\mathcal{M}$. L'orientation de $\mathcal{M}$ munit $\det_{\mathbb{Z}[\rho]}\mathcal{M}(\rho)^+$ et $\det_{\mathbb{Z}[\rho]}\mathcal{M}(\rho)^-$ de bases $\omega_B^{\epsilon(\rho)}(\mathcal{M})$ de $\mathbb{Z}[\rho]$-modules (en identifiant $M(\rho)_B$ et $\mathbb{Q}(\rho) \otimes M_B$). Ainsi, si ρ est un caractère géométrique et si l'on identifie $\mathbb{Q}(\rho) \otimes M_{dR}$ et $M(\rho)_{dR}$ d'une part, et $\mathbb{Q}_p(\rho) \otimes \mathbf{D}_p(M)$ et $\mathbf{D}_p(M(\rho))$ d'autre part, les isomorphismes de comparaison

$$\iota_M : \mathbb{C} \otimes M_B \to \mathbb{C} \otimes M_{dR}$$

et

$$\iota_{M(\rho)} : \mathbb{C} \otimes M(\rho)_B \to \mathbb{C} \otimes M(\rho)_{dR}$$

d'une part et

$$\iota_{M_p} : B_{cris} \otimes M_p \to B_{cris} \otimes \mathbf{D}_p(M)$$

et

$$\iota_{M_p(\rho)} : B_{cris} \otimes M(\rho)_p \to B_{cris} \otimes \mathbf{D}_p(M(\rho)))$$

d'autre part sont liés par

$$\iota_{M(\rho)} = (2i\pi)^{j_\rho} G(\eta_\rho, 2i\pi)^{-1} \otimes \iota_M$$

et

$$\iota_{M_p(\rho)} = (2i\pi)^{j_\rho} G(\eta_\rho, 2i\pi)^{-1} \otimes \iota_{M_p} .$$

Posons, lorsque $H^0(\mathbb{Q}, M) = H^0(\mathbb{Q}, M^*(1) = 0$,

$$\tilde{\Delta}_f(M) = (\det_\mathbb{Q} H^1_f(\mathbb{Q}, M) \otimes \det_\mathbb{Q} H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)))^{-1} \otimes \det_\mathbb{Q} t_M .$$

On a donc

$$\Delta_f(M) = \tilde{\Delta}_f(M) \otimes \det_{\mathbb{Q}} M_B^+ \ .$$

De même, si ρ est un caractère géométrique de G_∞ et lorsque

$$H^0(\mathbb{Q}, M(\rho)) = H^0(\mathbb{Q}, M(\rho)^*(1)) = 0$$

posons

$$\tilde{\Delta}_f(M(\rho)) = (\det_{\mathbb{Q}(\rho)} H^1_f(\mathbb{Q}, M(\rho)) \otimes \det_{\mathbb{Q}(\rho)} H^1_f(\mathbb{Q}, M(\rho)^*(1)))^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}(\rho)} t_{M(\rho)} \ .$$

Si $\omega \in \Delta_f(M(\rho))^{-1}$ et $\omega' \in \tilde{\Delta}_f(M(\rho))^{-1}$ sont tels que $\omega' \otimes \omega^{-1} = \omega_B^{\epsilon(\rho)}(\mathcal{M})$, on dira que ω et ω' sont compatibles à l'orientation de $\mathcal{M}$ ou à $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}(\rho)$).

Notons

$$P_{\chi^j}(\varphi) = \wedge^{d_{\epsilon(\chi^j)}(M)}((1 - p^j\varphi)^{-1}(1 - p^{-j-1}\varphi^{-1}))$$

l'opérateur de $\wedge^{d_+(M(j))}\mathbf{D}_p(M^*(1))$. Si η est un caractère non trivial de G_∞ d'ordre fini, de conducteur $p^{a(\eta)}$, notons

$$P_{\eta\chi^j}(\varphi) = \wedge^{d_{\epsilon(\chi^j\eta)}(M)}(p^j\varphi)^{-a(\eta)} \ ,$$

opérateur de $\wedge^{d_{\epsilon(\chi^j\eta)}(M)}\mathbf{D}_p(M^*(1))$. Ainsi si ρ est un caractère géométrique de G_∞, nous avons défini un opérateur $P_\rho(\varphi)$ de $\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathbf{D}_p(M^*(1))$.

Si τ est un type à l'infini de M_p et si ρ est un caractère géométrique de G_∞, on pose (cf. §3.5.1)

$$\Gamma^{\pi,\tau,*}(M(\rho)_p) = \Gamma^\pi(\tau(j_\rho), \epsilon(\rho)) \ .$$

Enfin, rappelons que si W est un $\mathbb{Q}_p$-espace de dimension finie et si ρ est un caractère continu de G_∞ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^\times$, si F est un élément de $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes W$ ayant un zéro en ρ d'ordre r (c'est-à-dire que la fonction $s \mapsto \rho < \chi >^s (F)$ a un zéro en $s = 0$ d'ordre r), on note

$$\rho^*(F) = r!^{-1}(\frac{d}{ds})^r \rho < \chi >^s (F)|_{s=0} \ .$$

Si $F = (F_h)$ est un élément de $\mathcal{L}_m(\mathcal{K}(\Gamma) \otimes W)$, on appelle ordre du zéro de F en ρ l'ordre du zéro de F_h en ρ pour h assez grand (précisément pour $h > j_\rho$) et on note

$$\rho^*(F) = (h - j_\rho - 1)!^{-m}\rho^*(F_h) = \Gamma(h - j_\rho)^{-m}\rho^*(F_h) \ ,$$

ce qui est bien indépendant de h.

4.2.2. ***Conjecture.*** (CP(M,τ)). *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathbb{Z}$-structure orientée sur M et τ un type à l'infini de M_p. Il existe une base $\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ du Λ-module libre $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathcal{M}_p)$ telle que*

- pour tout caractère géométrique ρ de G_∞ tel que $\eta_\rho(p)p^{j_\rho}$ et $\overline{\eta}_\rho(p)p^{-j_\rho-1}$ ne soient pas valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_p(M)$, $\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ a un zéro en ρ^{-1} d'ordre

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(\chi\rho^{-1})) - m^{\epsilon(\rho)}_{j_\rho}(\tau) \ ;$$

- pour un tel ρ et pour $\omega \in \Delta_f(M(\rho))^{-1}$ et $\omega' \in \tilde{\Delta}_f(M(\rho))^{-1}$ compatibles à $\mathcal{M}$, on a l'égalité dans $\mathbb{C}_p^\times$

(VAL.SP.(M,ρ,τ))

$$P_\rho(\varphi)(\rho^{-1})^*(\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})) \otimes (2i\pi)^{-j_\rho d_{\epsilon(\rho)}(M)} e_{j_\rho d_{\epsilon(\rho)}(M)}$$
$$= 2^{-d_{-\epsilon(\rho)}(M)} \frac{L^{\infty,*}_{\{p\}}(M(\rho),0)}{\Gamma^{\pi,*}(M(\rho))\underline{Per}_{M(\rho)}(\omega)} \Gamma^{\pi,\tau,*}(M(\rho)_p) Per_{M(\rho)_p}(\omega') \ .$$

Donnons une formulation équivalente en termes de $\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\}}(\mathcal{M})$.

Conjecture (CP(M)). *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathbb{Z}$-structure orientée sur M. Il existe une base $\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\}}(\mathcal{M})$ du Λ-module libre $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathcal{M}_p)$ telle que*

- pour tout caractère géométrique ρ de G_∞ tel que $\eta_\rho(p)p^{j_\rho}$ et $\overline{\eta}_\rho(p)p^{-j_\rho-1}$ ne soient pas valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_p(M)$, $\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\}}(\mathcal{M})$ a un zéro en ρ^{-1} de multiplicité

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(\chi\rho^{-1})) \ ;$$

- pour un tel ρ et pour $\omega \in \Delta_f(M(\rho))^{-1}$ et $\omega' \in \tilde{\Delta}_f(M(\rho))^{-1}$ compatibles à $\mathcal{M}$, on a l'égalité dans $\mathbb{C}_p^\times$

(VAL.SP.(M,ρ))

$$P_\rho(\varphi)(\rho^{-1})^*(\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\}}(\mathcal{M})) \otimes e_{j_\rho d_{\epsilon(\rho)}(M)} = 2^{-d_{-\epsilon(\rho)}(M)} \frac{\mathbf{L}^{\infty,*}_{\{\infty,p\}}(M(\rho),0)}{\underline{Per}_{M(\rho)}(\omega)} Per_{M(\rho)_p}(\omega')$$

Faisons quelques premières remarques sur la manière dont ces conjectures ont été formulées.

(i) Dans les définitions de $\mathrm{Per}_{M(\rho)_p}(\omega')$ et de $\underline{\mathrm{Per}}_{M(\rho)}(\omega)$, il y a des choix de signes à faire. On les fait exactement de la même manière. Le terme de gauche est alors bien défini et indépendant des choix de ω et ω'.

(ii) Il intervient dans ce texte un $2i\pi$ complexe et un $2i\pi$ p-adique que j'ai noté intentionnellement de la même manière, mais sans les simplifier. L'exposant $2i\pi$ intervenant dans la définition de la fonction $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$ signifie que l'on a choisi une orientation de $\mathbb{Z}(1)$.

(iii) Les formules VAL.SP.(M,ρ,τ) et VAL.SP.(M,ρ) sont une égalité entre deux éléments de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p(\rho)}(\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathbf{D}_p(M(\rho)), B_{cris}\otimes\mathbb{Q}_p(\rho))$$

où si l'on préfère de

$$B_{cris}\otimes\mathbb{Q}_p(\rho)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathbf{D}_p(M(\rho)^*(1)) \ .$$

Le facteur $e_{j_\rho d_{\epsilon(\rho)}(M)}$ (rappelons que e_r est la base de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(-r)) = \mathbb{Q}_p[r]$) est là car nous n'avons pas voulu identifier $\mathbf{D}_p(M^*(1))$ et $\mathbf{D}_p(M(\rho)^*(1))$: on a donc $\wedge^s\mathbf{D}_p(M(\rho)^*(1)) = \wedge^s\mathbf{D}_p(M^*(1))\otimes e_{j_\rho s}$. Il y a cependant une incorrection : en effet, $\mathrm{Per}_{M(\rho)_p}(\omega')$ dépend d'un élément $n\in\det_{\mathbb{Q}_p}N$ où N est un sous-espace de $\mathbf{D}_p(M)$ de dimension $d_{\epsilon(\rho)}(M)$, ainsi n appartient à $\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathbf{D}_p(M)$; mais nous n'avons en fait pas montré que $\mathrm{Per}_{M(\rho)_p}(\omega')$ s'étend par linéarité à tout $\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathbf{D}_p(M)$.

(iv) On remarque que dans la conjecture n'apparaissent pas explicitement de sommes de Gauss. Cependant, on a pour $t\in\wedge^{d_\pm(M)}M_p$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Per}_{M(\rho)_p}(\omega')(\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\iota_{M(\rho)_p}(t)\\ &\quad=(G(\eta_\rho,2i\pi)^{-1}(2i\pi)^{j_\rho})^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathrm{Per}_{M(\rho)_p}(\omega')(\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\iota_{M_p}(t))\end{aligned}$$

où

$$\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\iota_{M(\rho)_p} : \wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}M(\rho)_p\to B_{cris}\otimes\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\mathbf{D}_p(M(\rho))$$

est induit par l'isomorphisme de comparaison $\iota_{M(\rho)_p}$, (ici, $G(\eta_\rho,2i\pi)$ est vu comme un élément de $\overline{\mathbb{Q}}_p$:

$$G(\eta_\rho,2i\pi)=\sum_{b \mod p^{a(\eta_\rho)}}\eta_\rho(b)\zeta^b_{a(\eta_\rho)-1}$$

où $2i\pi=\log([\epsilon^p])$ dans B_{cris} et $\epsilon=((\zeta_n)_n)$. La formule VAL.SP.(M,ρ,τ) appliquée à $n=\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\iota_{M_p}(t)$ devient, en notant

$$\underline{\mathrm{Per}}_{M(\rho)_p}(\omega'\otimes t)=\mathrm{Per}_{M(\rho)_p}(\omega')(\wedge^{d_{\epsilon(\rho)}(M)}\iota_{M(\rho)_p}(t))$$

et avec $\pm=\epsilon(\rho)$,

$$\begin{aligned}&P_\rho(\varphi)(\rho^{-1})^*(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}))(\wedge^{d_\pm(M)}\iota_{M_p}(t))\otimes e_{j_\rho d_\pm(M)}\\ &\quad=2^{-d_{-\pm}(M)}\frac{G(\eta_\rho,2i\pi)^{d_\pm(M)}\mathbf{L}^{\infty,*}_{\{\infty,p\}}(M(\rho),0)}{\Gamma^{\pi,*}(M(\rho))\underline{\mathrm{Per}}_{M(\rho)_p}(\omega'\otimes t)}\Gamma^{\pi,\tau,*}(M(\rho)_p)\underline{\mathrm{Per}}_{M(\rho)}(\omega'\otimes t) \ .\end{aligned}$$

(v) Remplacer $\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ par $\mathbf{L}^{p,-2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ revient à rajouter dans la formule VAL.SP(M,ρ,τ) le signe de $\eta_\rho(-1)(-1)^{t(M(\rho)_p,\epsilon(\eta_\rho))}$. On a par exemple pour η caractère d'ordre fini

$$\eta(\mathbf{L}^{p,-2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})) = \eta(-1)(-1)^{t(M_p,\epsilon(\eta))}\eta(\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})) \ .$$

(vi) On peut voir le terme $\Gamma^{\pi,\tau,*}(M(\rho)_p)$ comme une modification du facteur à l'infini en remplaçant le $2i\pi$ p-adique par le $2i\pi$ complexe. Je préfère le voir comme un facteur p-adique qui joue le rôle du facteur à l'infini de la fonction L p-adique.

(vii) Il vaudrait peut-être mieux considérer la fonction $\rho \mapsto \rho^{-1}(\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M}))$ plutôt que $\rho \mapsto \rho(\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M}))$ ...

4.2.3. Pour r convenable, les éléments du Λ-module $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathcal{M}_p)$ sont des $o(\log^r)$: au pire, on peut prendre pour r la longueur de la filtration de M. S'il existe un élément de $\mathbb{I}^{\tau}_{arith,\{p\}}(\mathcal{M}_p)$ vérifiant la condition VAL.SP.(M,ρ,τ) pour r valeurs de j_ρ et pour presque tout η, il est unique.

Si la conjecture CP(M,τ) (resp. CP(M)) est vraie, elle détermine donc un unique élément $\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ (resp. $\mathbf{L}^{p}_{\{p,\infty\}}(\mathcal{M})$) de $\wedge^{d_+(M)}(\mathbb{K}\otimes \mathbf{D}_p(M^*(1)))$ (resp. de $\mathcal{L}(\wedge^{d_+(M)}(\mathcal{K}(G_\infty)\otimes \mathbf{D}_p(M^*(1))))$: c'est la fonction L p-adique analytique de $\mathcal{M}$ (resp. incomplète). Elle dépend de la structure entière $\mathcal{M}$ de M. Remarquons cependant que si l'on choisit une conjugaison complexe c de $\overline{\mathbb{Q}}$, par exemple en choisissant un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, on obtient alors un isomorphisme

$$\mathbb{Z}_p \otimes \det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}^{\pm} \cong \det_{\mathbb{Z}_p}\mathbf{T}^{c=\pm 1} \ ;$$

si $m^{\pm}$ est la base (orientée) de $\det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}^{\pm}$, l'élément suivant de $\mathbb{K}$:

$$\mathbf{L}^{p,2i\pi,c}_{\{p\}}(M)_{\pm} = \mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau_c}_{\{p\}}(\mathcal{M})_{\pm}(\wedge^{d_{\pm}(M)}\iota_{M_p}(m_{\pm}))$$

ne dépend que de M et non de la $\mathbb{Z}$-structure $\mathcal{M}$.

4.2.4. La conjecture CP(M,τ) peut être séparée en plusieurs parties : dans les exemples, seuls des morceaux de CP(M,τ) sont démontrés :

I) **Conjecture d'existence** (CP(M,τ,J)) **de la fonction** L p**-adique associée à un sous-ensemble** J **de** $\mathbb{Z}$: *Il existe un élément* $\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(\mathcal{M})$ *de*

$\wedge^{\underline{d}^+(M)}(\mathbb{H} \otimes Frac(\Lambda) \otimes \mathbf{D}_p(M^*(1)))$ *vérifiant les propriétés* VAL.SP.(M, ρ, τ) *pour* $\rho = \eta\chi^j$ *géométrique,* $j \in J$ *et pour presque tout caractère d'ordre fini* η *de* G_∞.

Si $\sharp J$ est suffisamment grand pour assurer l'unicité de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$, on dira que J est admissible.

II) **Conjecture sur les valeurs spéciales** (CP$(M, \tau, \mathbb{Z})$) : *Supposons qu'il existe un ensemble* J *admissible tel que* CP(M, τ, J) *soit vraie. L'élément* $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$ *ainsi trouvé vérifie* VAL.SP.$(M, \chi^j\eta, \tau)$ *pour tout* $j \in \mathbb{Z}$ *et tout* η *où cela a un sens.*

III) **Conjecture principale** (CP$^*(M, \tau)$) : *Supposons qu'il existe un ensemble* J *admissible tel que* CP(M, τ, J) *soit vraie. Alors,* $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$ *appartient au* Λ*-module libre* $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}^{\tau}(\mathbf{T})$ *et en est une base.*

Ainsi, la conjecture CP$^*(M, \tau)$ peut être énoncée (et, ce qui serait encore mieux, démontrée !) dès qu'il existe un sous-ensemble J admissible qui permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$.

Remarquons une fois de plus que ces conjectures ne dépendent pas du choix de τ et que l'on peut les énoncer de manière équivalente pour $\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}$:

I) **Conjecture d'existence de la fonction L p-adique** (CP(M, J)) **associée à un sous-ensemble J de $\mathbb{Z}$** : *Il existe un élément* $\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M})$ *de*

$$\mathcal{L}(\wedge^{\underline{d}^+(M)}(\mathbb{H} \otimes Frac(\Lambda) \otimes \mathbf{D}_p(M^*(1))))$$

vérifiant les propriétés VAL.SP.(M, ρ) *pour* $\rho = \eta\chi^j$ *géométrique,* $j \in J$ *et pour presque tout caractère d'ordre fini* η *de* G_∞.

II) **Conjecture sur les valeurs spéciales** (CP$(M, \mathbb{Z})$) : *Supposons qu'il existe un ensemble* J *admissible tel que* CP(M, J) *soit vraie. L'élément* $\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M})$ *ainsi trouvé vérifie* VAL.SP.$(M, \chi^j\eta)$ *pour tout* $j \in \mathbb{Z}$ *et tout* η *où cela a un sens.*

III) **Conjecture principale** (CP$^*(M)$) : *Supposons qu'il existe un ensemble* J *admissible tel que* CP(M, J) *soit vraie. Alors,* $\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M})$ *appartient au* Λ*-module* *libre* $\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\}}(\mathcal{M}_p)$ *et en est une base.*

Enfin, comme nous le verrons dans la suite, les exemples que l'on peut donner ne concernent souvent non pas l'existence de toute la fonction L p-adique comme cela est énoncé ici, mais son existence dans une direction donnée, c'est-à-dire avec nos notations l'existence de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})(n)$ pour n appartenant à un sous-espace privilégié de $\wedge^{\underline{d}^+(M)}(\mathbb{K}\otimes\mathbf{D}_p(M))$. Cela se produit par exemple lorsque M_p est une représentation de Dabrowski-Panchiskhin (cf. 2.4.7 et infra).

4.3. Remarques et exemples.

4.3.1. ***Proposition.*** (i) *Si j est un entier, on a*

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau(j)}(\mathcal{M}(j)) = (2i\pi)^{-j\underline{d}^+(M(j))}Tw^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}))$$

et

$$\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M}(j)) = Tw^{-j}(\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M})).$$

(ii) *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une extension de structures motiviques et $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ des $\mathbb{Z}$-structures orientées respectivement de M, M', M'' tels que l'on ait la suite exacte*

$$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$$

de $\mathbb{Z}$-structures orientées. On suppose que l'extension a bonne réduction en toutes les places finies. Alors, si N' (resp. N, N'') est un sous-espace de $\mathbf{D}_p(M'_p)$ (resp. $\mathbf{D}_p(M)$, $\mathbf{D}_p(M''_p)$) de dimension $d_\pm(M')$ (resp. $d_\pm(M)$, $d_\pm(M'')$), vérifiant la suite exacte

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0\ ,$$

on a

$$\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M})(n) = \mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M}')(n')\mathbf{L}_{\{p,\infty\}}^{p}(\mathcal{M}'')(n'')$$

avec $n' \in det_{\mathbb{Q}_p}N'$, $n'' \in det_{\mathbb{Q}_p}N''$ et $n = n' \wedge \tilde{n}''$ si $\tilde{n}''$ un relèvement de n'' dans $\wedge^{d_\pm(M'')}N$.

(iii) *Avec les conditions et notations de* (ii), *si τ, τ', τ'' sont respectivement des types à l'infini de M_p, M'_p et M''_p tels que $\tau = \tau' + \tau''$, on*

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})(n) = \mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau'}(\mathcal{M}')(n')\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau''}(\mathcal{M}'')(n'')\ .$$

Les versions (ii) et (iii) sont bien sûr équivalentes. La proposition se déduit des propositions 1.4.8 et 2.3.1.

4.3.2. *Equation fonctionnelle.* Supposons CP(M) et CP($M^*(1)$). De plus, faisons l'hypothèse (conjecture de Deligne) que le déterminant de M est le produit tensoriel d'un motif d'Artin (de dimension 1) et du motif de Tate $\mathbf{1}(-t_H(M))$ avec

$$t_H(M) = \sum_j j\tilde{h}_j(M)$$

et

$$\tilde{h}_j(M) = dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Fil}^i M_{dR}/\mathrm{Fil}^{i+1}M_{dR}\ ;$$

il existe alors une base canonique $e_{\mathcal{M}^*(1)}$ de $\det_{\mathbb{Q}} M^*(1)_{dR}$ telle que l'image de $(\det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M})^{-1} \otimes e_{\mathcal{M}^*(1)}$ par l'isomorphisme de comparaison soit la base canonique du $\mathbb{Z}$-module

$$(\det_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}(-t_H(M))_B)^{-1} \otimes (\det_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}(-t_H(M))_{dR})^{-1}$$

($\mathbb{Z}(1)$ est toujours supposé muni d'une orientation). On fixe un type à l'infini de M_p. Le théorème 2.5.2 implique qu'il existe un élément $\epsilon(\mathcal{M})$ de $\Lambda^\times$ tel que

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}) = \epsilon(\mathcal{M})\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau^*}(\mathcal{M}^*(1))^\iota \perp (2i\pi)^{t_H(M)+\underline{d}^-(M)} e_{\mathcal{M}^*(1)} \ .$$

En particulier, comme $\epsilon(\mathcal{M})$ appartient a priori à $B_{cris}\otimes\Lambda$, il est uniquement déterminé, soit pour tout entier j fixé, par les valeurs $\chi^j\eta(\epsilon(\mathcal{M}))$ pour η caractère d'ordre fini, soit par les valeurs $\chi^j(\epsilon(\mathcal{M}))$ pour suffisamment de j. Supposons que les $\mathbf{L}^\infty(M(\eta), s)$ admettent une équation fonctionnelle

$$\mathbf{L}^\infty(M(\eta), s) = \epsilon(M(\eta), s)\mathbf{L}^\infty(M^*(1)(\eta^{-1}), -s) \ ,$$

avec les $\epsilon(M(\eta), s) = \epsilon_\infty(M(\eta), s)\prod_l \epsilon_l(M(\eta), s)$ donnés comme usuellement (cf. par exemple [FP94, III,§4.3], cf. aussi l'appendice C). Ici, les ϵ_l pour l premier (resp. ϵ_∞) sont définis à l'aide du caractère additif $\Psi_{o,l}$ vérifiant $\Psi_{o,l}(x, 2i\pi) = exp(-2i\pi x_l)$ où x_l est un rationnel congru à x modulo $\mathbb{Z}$ (resp. $\Psi_{o,\infty}$ vérifiant $\Psi_{o,\infty}(x, 2i\pi) = exp(2i\pi x)$). Rappelons que si $\pm = \epsilon(\eta)$ et si $p^{a(\eta)}$ est le conducteur de η, on a alors les formules

$$\epsilon_\infty(M(\eta)) = i^{\sum q(\tilde{h}_q(M)-n_q(M))+\sum_{q\ impair} n_q^{\pm}(M)+\sum_{q\ pair} n_q^{-\pm}(M)} \ ,$$

$$\epsilon_p(M(\eta)) = \det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{-a(\eta)} G(\eta^{-1}, -2i\pi)^{d_\pm(M)}$$

et que pour $l \neq p$,

$$\epsilon_l(M(\eta)) = \epsilon_l(M)\eta^{-1}(\sigma_{f_l(M)}) = \epsilon_l(M)\eta^{-1}(f_l(M))$$

où $f_l(M)$ est la l-partie du conducteur de M, (c'est-à-dire le conducteur de la représentation M_l en tant que représentation de $G_{\mathbb{Q}_l}$). Pour ρ caractère géométrique de G_∞, on note

$$\epsilon^{(p,\infty)}(M(\rho)) = \prod_{l\notin\{p,\infty\}} \epsilon_l(M(\rho)) = \rho^{-1}(f_M)\epsilon^{(p,\infty)}(M)$$

avec $f(M) = \prod_l f_l(M)$ le conducteur de M.

Proposition. *Supposons qu'il existe un sous-ensemble J de $\mathbb{Z}$ admissible pour M et un sous-ensemble J' de $\mathbb{Z}$ admissible pour $M^*(1)$ tels que $J \cap (-J')$ soit non vide et tels que $CP(M, J)$ et $CP(M^*(1), J')$ soient vraies. Si de plus, $CP^*(M)$ et $CP^*(M^*(1))$ sont vraies, alors pour tout caractère ρ continu de G_∞, on a*

$$\rho(\epsilon(\mathcal{M})) = \rho(f_M)\epsilon^{(p,\infty)}(M) \ .$$

Remarque : Les hypothèses faites sont tout à fait démesurées ! En particulier, l'hypothèse que $\mathrm{CP}^*(M)$ et $\mathrm{CP}^*(M^*(1))$ sont vraies est là uniquement pour assurer que $\epsilon(\mathcal{M})$ est un élément de $B_{cris} \otimes \Lambda$. Si on le sait par un autre moyen, par exemple si l'on sait que $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$ et $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau}(\mathcal{M}^*(1))$ sont à valeurs dans $B_{cris} \otimes \Lambda$, il n'est pas nécessaire de la faire. En conclusion, cette proposition est plutôt faite pour se rassurer sur les conjectures faites et ses hypothèses peuvent être adaptées à chaque cas particulier.

Démonstration. Quitte à remplacer M par un twist convenable, on peut supposer que $0 \in J \cap (-J')$. De plus, comme l'on sait a priori que $\epsilon(\mathcal{M})$ appartient à Λ, il suffit de calculer $\eta(\epsilon(\mathcal{M}))$ pour η caractère d'ordre fini de G_∞.

A) On commence par montrer que si ω_1 est un élément non nul de $\Delta_f(M)$, si ω_2 est un élément non nul de $\Delta_f(M^*(1))$ tels que $\omega_1 \otimes \omega_2^{-1} = e_{\mathcal{M}}$, on a

$$\underline{\mathrm{Per}}_{M(\eta)}(\omega_1) = uG(\eta, 2i\pi))^{-\tilde{d}(M)}(2i\pi)^{t_H(M)+d_{-\pm}(M)}\underline{\mathrm{Per}}_{M(\eta)}(\omega_2)$$

avec $u \in \pm$. La démonstration de ce fait se déduit de l'anti-autodualité de la suite exacte fondamentale sf_M (cf. Appendice C). D'autre part, si ω_1' et ω_1 sont compatibles à $\mathcal{M}$, si ω_2' et ω_2 sont compatibles à $\mathcal{M}^*(1)$, muni de l'orientation déduite de celle de $\mathcal{M}$ et de l'orientation "$2i\pi$" choisie de $\mathbb{Z}(1)$, on a

$$\mathrm{Per}_{M(\eta)_p}(\omega_1') = u\mathrm{Per}_{M(\eta)_p}(\omega_2') \perp e_{\mathcal{M}^*(1)}$$

(remarquons une fois encore que le fait qu'il n'y ait pas de $2i\pi$ et de sommes de Gauss contrairement à la formule complexe vient de ce que l'isomorphisme de comparaison n'intervient pas dans la définition de Per, cf. remarque (ii) dans 4.2.2).

B) Prenons toujours $\pm = \epsilon(\eta)$. On a la formule :

$$\begin{aligned}(-1)^{s_{M^*(1)}}&(2i\pi)^{-t_H(M)-d_{-\pm}(M)}\Gamma^{\pi,*}(M,\pm)/\Gamma^{\pi,*}(M^*(1),\pm)\\ &=2^{d_{\pm}(M)-d_{-\pm}(M)}(-1)^{d_{-\pm}(M)}\epsilon_\infty(M,0)\prod\Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(M)}\end{aligned}$$

où $s_{M^*(1)} = dim_{\mathbb{R}}\ker\alpha_{M^*(1)}$ est l'ordre du zéro de $L_\infty(M^*(1),s)$ en $s=0$. En effet

$$(-1)^{s_{M^*(1)}}\Gamma^{\pi,*}(M(\eta))/\Gamma^{\pi,*}(M(\eta)^*(1))$$

est le coefficient dominant en $s=0$ de

$$\begin{aligned}F(s) = &\prod_q \Gamma_{\mathbb{R}}(s-q)^{n_q^{\pm\epsilon_q}(M)}\prod_q \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-q)^{n_q^{-\pm\epsilon_q}(M)}\\ &\prod_q \Gamma_{\mathbb{R}}(-s-q)^{-n_q^{\pm\epsilon_q}(M^*(1))}\prod_q \Gamma_{\mathbb{R}}(-s+1-q)^{-n_q^{\pm\epsilon_q}(M^*(1))}\ .\end{aligned}$$

On a

$$n_q^{\pm}(M) + n_{-1-q}^{\pm}(M^*(1)) = \tilde{h}_q(M) \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} F(s) =& \prod_q (\Gamma_{\mathbb{R}}(s-q)\Gamma_{\mathbb{R}}(2-s+q))^{n_q^{\pm\epsilon_q}(M)} \\ & \prod_q (\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-q)\Gamma_{\mathbb{R}}(2-s-1+q))^{n_q^{-\pm\epsilon_q}(M)} \\ & \prod_q (\Gamma_{\mathbb{R}}(-s+1+q)\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s+1+q))^{-\tilde{h}_q(M)} \ . \end{aligned}$$

On utilise ensuite les faits suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) =& \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s) \\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(2-s) =& \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} s} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(1-s) =& \frac{2}{\sin \pi s} \ . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} F(s) = 2^{-\tilde{d}(M)} & \prod_q \sin(\pi \frac{s-q}{2})^{-n_q^{\pm\epsilon_q}(M)} \\ \sin(\pi \frac{s+1-q}{2})^{-n_q^{-\pm\epsilon_q}(M)} & (\sin \pi(s-q))^{\tilde{h}_q(M)} \prod_q \Gamma_{\mathbb{C}}(s-q)^{\tilde{h}_q(M)} \ . \end{aligned}$$

Lorsque s tend vers 0, on a les équivalents

$$\sin(\pi \frac{s-q}{2}) \sim \begin{cases} (-1)^{q/2} \frac{\pi}{2} s & \text{si } q \text{ est pair} \\ (-1)^{(q+1)/2} & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\sin(\pi \frac{s+1-q}{2}) \sim \begin{cases} (-1)^{(q-1)/2} \frac{\pi}{2} s & \text{si } q \text{ est impair} \\ (-1)^{q/2} & \text{si } q \text{ est pair,} \end{cases}$$

$$\sin \pi(s-q) \sim (-1)^q \pi s \ ;$$

on obtient, en faisant apparaître $2i\pi$ à chaque fois que l'on recontre π, que le coefficient dominant $F^*(0)$ de $F(s)$ en $s = 0$ est

$$F^*(0) = 2^{d_{\pm}(M) - d_{-\pm}(M)} i^f (2i\pi)^{t_H(M) + d_{-\pm}(M)} \prod_q \Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(M)}$$

avec

$$\begin{aligned}
f \equiv & - \sum_{q\ pair} q n_q^{\pm}(M) - \sum_{q\ impair} (q+1) n_q^{-\pm}(M) \\
& - \sum_{q\ impair} (q-1) n_q^{\pm}(M) - \sum_{q\ pair} q n_q^{-\pm}(M) \\
& +2 \sum_q \tilde{h}_q(M) + \sum_{q\ pair} n_q^{\pm}(M) + \sum_{q\ impair} n_q^{\pm}(M) \\
& - \sum_q q\tilde{h}_q(M) - \sum_q \tilde{h}_q(M) \mod 4 \\
& \equiv \sum_q q(\tilde{h}_q(M) - n_q(M)) + \sum_{q\ impair} n_q^{\pm}(M) \\
& + \sum_{q\ pair} n_q^{-\pm}(M) + 2(\sum_q n_q^{-\pm}(M)) \mod 4 .
\end{aligned}$$

D'où

$$i^f = \epsilon_\infty(M(\eta))(-1)^{d_{-\pm}(M)} .$$

On montre de même par un calcul explicite que

$$\begin{aligned}
(-1)^{s_{M^*(1)_p}} & (2i\pi)^{-t_H(M) - d_{-\pm}(M)} \Gamma^{\pi,\tau,*}(M(\eta)_p)/\Gamma^{\pi,\tau^*,*}(M(\eta)^*(1)_p, \pm) \\
& = (-1)^{\sum q(\tilde{h}_q(M) - n_q^{\pm}(\tau))} \prod \Gamma^*(-q)^{\tilde{h}_q(M)}
\end{aligned}$$

où

$$s_{M^*(1)_p} = m_0^{\pm}(\tau^*) .$$

Posons

$$\beta_\pm = (-1)^{\sum q(\tilde{h}_q(M) - n_q^{\pm}(\tau)) + d_{-\pm}(M)} .$$

Si

$$X = (2i\pi)^{-t_H(M) - d_{-\pm}(M)} \Gamma^{\pi,*}(M(\eta))/\Gamma^{\pi,*}(M(\eta)^*(1)) \in \mathbb{Q}$$

et

$$X_p = (2i\pi)^{-t_H(M) - d_{-\pm}(M)} \Gamma^{\pi,\tau,*}(M(\eta)_p)/\Gamma^{\pi,\tau^*,*}(M(\eta)^*(1)_p) \in \mathbb{Q} ,$$

on a

$$(-1)^{s_{M^*(1)} - s_{M^*(1)_p}} \frac{X}{X_p} = \beta_\pm 2^{d_\pm(M) - d_{-\pm}(M)} \epsilon_\infty(M, 0) .$$

Remarquons que, comme

$$\begin{aligned}
t_H(M^*(1)_p, \pm) & = \sum (q+1)(\tilde{h}_q(M) - n_q^{\pm}(\tau)) \\
& = \sum q(\tilde{h}_q(M) - n_q^{\pm}(M_p)) + \sum (\tilde{h}_q(M) - n_q^{\pm}(\tau)) \\
& = \sum q(\tilde{h}_q(M) - n_q^{\pm}(M_p)) + d_{-\pm}(M) ,
\end{aligned}$$

on a $\beta_\pm = (-1)^{t_H(M^*(1)_p, \pm)}$.

C) Si $a \in \wedge^\alpha \mathbf{D}_p(M^*(1))$, $b \in \wedge^\beta \mathbf{D}_p(M)$ avec $a = b \perp e$ et $\alpha + \beta = \tilde{d}$, pour $e \in \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(M^*(1))$, on a la formule

$$\wedge^\alpha(\varphi)(a) = p^{-\alpha}\det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{-1} \wedge^\beta (\varphi)(b) \perp e \ .$$

En effet, pour $n \in \wedge^\alpha \mathbf{D}_p(M)$, on a

$$\begin{aligned}\wedge^\alpha(\varphi)(a)(n) =&p^{-\alpha}a(\wedge^\alpha(\varphi^{-1})n)\\ =&p^{-\alpha}[b \wedge (\wedge^\alpha(\varphi^{-1})(n), e]\\ =&p^{-\alpha}\det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{-1}[\wedge^\beta(\varphi)b \wedge n, e]\\ =&p^{-\alpha}\det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{-1}(\wedge^\beta(\varphi)(b) \perp e)(n)\end{aligned}$$

On déduit donc de l'équation

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}) = \epsilon(\mathcal{M})\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau^*}(\mathcal{M}^*(1))^\iota \perp (2i\pi)^{t_H(M)+\underline{d}^-(M)}e_{\mathcal{M}^*(1)}$$

que

$$\begin{aligned}&\wedge^{d_\pm(M_p)}(\varphi)^{-a(\eta)}\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})\\ =&(2i\pi)^{t_H(M)+d_\pm(M_p)}\epsilon(\mathcal{M})p^{a(\eta)d_\pm(M)}\det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{a(\eta)}\\ &\wedge^{d_\pm(M^*(1)_p)} (\varphi^{-a(\eta)})\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau^*}(\mathcal{M}^*(1))^\iota \perp e_{\mathcal{M}^*(1)} \ .\end{aligned}$$

On prend alors le coefficient dominant en η. On remarque que

$$\begin{aligned}&G(\eta, 2i\pi)^{d_\pm(M)}p^{-a(\eta)d_\pm(M)}G(\eta^{-1}, -2i\pi)^{-d_{-\pm}(M)}\det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{-a(\eta)}\\ &=G(\eta^{-1}, -2i\pi)^{-\tilde{d}(M)}\det(\varphi|\mathbf{D}_p(M))^{-a(\eta)}\\ &=\epsilon_p(M(\eta))^{-1} \ .\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}&\eta^{-1}(\epsilon(\mathcal{M}))\\ &=(-1)^{t(M^*(1)_p,\pm)+s_{M^*(1)}-s_{M_p^*(1)}}2^{d_\pm(M)-d_{-\pm}(M)}\epsilon(M(\eta))\epsilon_p(M(\eta))^{-1}X_p/X\\ &=\epsilon^{(p,\infty)}(M(\eta)) \ .\end{aligned}$$

On en déduit la proposition. □

4.3.3. Prenons pour M le motif $\mathbb{Q}$ muni de sa $\mathbb{Z}$-structure $\mathbb{Z}$. Notons simplement

$$\zeta_{\{p\}}(s) = \mathbf{L}_{\{\infty,p\}}^\infty(\mathbb{Q}, s)$$

et

$$L_{\{p\}}(j, \eta^{-1}) = \mathbf{L}_{\{\infty,p\}}^\infty(\mathbb{Q}(j)(\eta), 0) = \mathbf{L}_{\{\infty,p\}}^\infty(\mathbb{Q}(\chi^j\eta), 0) \ .$$

Notons d'autre part $\log_{\mathbb{Q}(j)}$ l'application logarithme

$$H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(j)(\eta)) \cong \mathbb{R} = \operatorname{coker} \alpha_{\mathbb{Q}(j)}$$

et $\lambda_{\mathbb{Q}(j)}$ l'application $H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(j)) \to \ker \alpha_{\mathbb{Q}(j)}$ duale de l'exponentielle de $\mathbb{Q}(1-j)$ et de même pour $\mathbb{Q}(j)(\eta)$. On prend comme type à l'infini le seul qui est raisonnable et qui est $\tau_{min}(\mathbb{Q}_p)$: on a donc $n_0^+(\tau) = 1$, $n_{-1}^-(\tau^*) = 1$, les autres $n_i^{\pm}$ étant nuls. La conjecture CP($\mathbb{Z}$) devient :

Il existe une base $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})$ du Λ-module libre $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}(\mathbb{Z}_p)$ telle qu'on ait

1) *si $\epsilon(\chi^j\eta) = -$ et $j < 0$,*

$$\eta^{-1}\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = \frac{1}{2}L_{\{p\}}(j, \eta^{-1}) \in \mathbb{Q}$$

2) *si $\epsilon(\chi^j\eta) = -$ et $j > 0$, pour $\omega \in \det_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(j)(\eta))$ non nul,*

$$\eta^{-1}\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = \frac{1}{2}\frac{L_{\{p\}}(j,\eta^{-1})}{\log_{\mathbb{Q}(j)(\eta)}(\omega)}(\log_{\mathbb{Q}_p(j)(\eta)} \omega / e_{-j}) \ ,$$

3) *si $\epsilon(\chi^j) = +$ et $j > 0$,*

$$(1-p^{j-1})^{-1}(1-p^{-j})\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = \Gamma(j)\frac{\zeta_{\{p\}}(j)}{(2i\pi)^j}e_{-1}$$

et si $\epsilon(\eta\chi^j) = +$ et $j > 0$ avec η non trivial

$$\eta^{-1}\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = p^{(j-1)a(\eta)}\Gamma(j)G(\eta, 2i\pi)\frac{L_{\{p\}}(j,\eta^{-1})}{(2i\pi)^j}e_{-1} \ ;$$

4) *si $\epsilon(\chi^j\eta) = +$ et $j < 0$, si $\omega \in \det_{\mathbb{Q}} H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(j)(\eta))$ est non nul, on a*

$$(1-p^{j-1})^{-1}(1-p^{-j})\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = \Gamma^*(j)\frac{L_{\{p\}}(j,\eta^{-1}}{(2i\pi)^j\lambda_{\mathbb{Q}(j)}(\omega)}\lambda_{\mathbb{Q}_p(j)}(\omega)e_{-1}$$

pour $\eta = \mathbf{1}$ et

$$\eta^{-1}\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = p^{(j-1)a(\eta)}\Gamma^*(j)G(\eta, 2i\pi)\frac{L_{\{p\}}(j,\eta^{-1})}{(2i\pi)^j\lambda_{\mathbb{Q}(j)(\eta)}(\omega)}\lambda_{\mathbb{Q}_p(j)(\eta)}(\omega)e_{-1}$$

pour η non trivial.

Remarque : On peut aussi écrire la formule (3) pour η non trivial sous la forme

$$\eta^{-1}\chi^{-j}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = p^{ja(\eta)}\Gamma(j)G(\eta^{-1}, -2i\pi)\frac{L_{\{p\}}(j,\eta^{-1})}{(2i\pi)^j}e_{-1}$$

La condition (1) détermine la fonction $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})_-$. C'est à des normalisations près la fonction de Kubota-Leopoldt (par exemple à un facteur 2 près). La condition (3) détermine la fonction $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})_+$. On a d'autre part l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z}) = \mathbf{L}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau}(\mathbb{Z}(1))^{\iota} \perp (2i\pi)^{\underline{d}^-(\mathbb{Z})} e_{-1} \ ,$$

car $\epsilon^{(p,\infty)}(\mathbb{Z}) = 1$. Par exemple pour $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty, \mathbb{C}_p^\times)$ et $\epsilon(\rho) = -1$, cela signifie que

$$\rho(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) = \chi^{-1}\rho^{-1}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})) \ ,$$

ce qui, en prenant ρ de la forme $\eta^{-1}\chi^{-(1-k)}$ avec $\eta(-1)(-1)^k = -1$ et η non trivial, signifie que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L(1-k,\eta^{-1}) &= G(\eta, 2i\pi)^{-1}\left(\frac{p^{a(\eta)}}{-2i\pi}\right)^k \Gamma(k) L(k,\eta) \\ &= G(\eta^{-1}, -2i\pi) p^{(k-1)a(\eta)} (-2i\pi)^{-k} \Gamma(k) L(k,\eta) \ ;\end{aligned}$$

c'est bien sûr l'équation fonctionnelle complexe de la fonction L d'un caractère de Dirichlet et ce calcul est un cas particulier de 4.3.2. Le fait que $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathbb{Z})$ soit une base du Λ-module libre $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}^{\tau}(\mathbb{Z}_p)$ est un théorème de Mazur-Wiles ([MW84]) dont une autre démonstration a été donnée par Rubin ([R91]) avec les idées de Kolyvagin.

4.3.4. Soit E une courbe elliptique modulaire définie sur $\mathbb{Q}$, ayant bonne réduction en p et prenons pour motif $M = h_1(E)$ le motif dont la réalisation l-adique est $V_l(E) = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} T_l(E)$ avec $T_l(E)$ la limite projective des points de l^n-torsion pour n entier. Le dual $h^1(E)$ de $h_1(E)$ a comme réalisation de de Rham $H^1_{dR}(E)$ et comme réalisation p-adique la cohomologie étale $H^1_{et}(E/\overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)$. On a donc l'isomorphisme de φ-modules filtrés

$$\mathbf{D}_p(h_1(E)^*(1)) \cong \mathbf{D}_p(h^1(E))[-1] = \mathbb{Q}_p \otimes H^1_{dR}(E)[-1] \ .$$

C'est le module noté $\mathbf{D}_p(E)$ dans [P93] et [BP93]. Rappelons qu'on dispose une application bilinéaire alternée canonique de motifs $h^1(E) \times h^1(E) \to \mathbb{Q}(-1)$. D'où un isomorphisme $h_1(E) = h^1(E)^* \cong h^1(E)(1)$. Enfin, on note $h_{1,\mathbb{Z}}(E)$ la $\mathbb{Z}$-structure naturelle sur $h_1(E)$ associée aux $T_l(E)$.

La fonction L de $h_1(E)$ est liée à la fonction L de Hasse-Weil de E par

$$L(h_1(E), s) = L(E/\mathbb{Q}, s+1)$$

comme cela se voit en regardant les facteurs locaux ; ici $L(h_1(E), s)$ est la fonction sans facteur à l'infini. Le facteur à l'infini $L_\infty(h_1(E), s)$ de $L(h_1(E), s)$ est $\Gamma_{\mathbb{C}}(s+1)$.

La conjecture $\mathrm{CP}(h_1(E),\tau,\{0\})$ est liée au théorème d'existence de la fonction L p-adique de Mazur-Swinnerton-Dyer (dans le cas ordinaire) et de Amice-Vélu et Vishik dans le cas supersingulier (on prend pour τ le type défini en 2.4.4). Plus précisément, choisissons un modèle de Weierstrass associé à une base (ω_E,η_E) de $H^1_{dR}(E)$ où ω_E est une forme différentielle de Néron. Alors $e_{\mathcal{M}}=\omega_E\wedge\eta_E$ est une base de $\det_{\mathbb{Q}} H^1_{dR}(E)\cong\mathbb{Q}(-1)_{dR}$ et est aussi une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}(-1)_{dR}$. Choisissons ω_E pour que $e_{\mathcal{M}}$ soit la base canonique, $\mathbb{Z}(-1)$ étant toujours orienté. Par l'identification

$$\mathbf{D}_p(h_1(E)^*(1))=\mathbb{Q}_p\otimes H^1_{dR}(E)[-1]\ ,$$

$\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))$ est identifié à l'élément $\tilde{\mathbf{L}}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))$ de

$$\mathbb{H}\otimes H^1_{dR}(E)[-1]=\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_p(E)$$

tel que

$$\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))(n)e_{\mathcal{M}}=\tilde{\mathbf{L}}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))\wedge n$$

pour $n\in\mathbf{D}_p(h_1(E))$.

A) Supposons d'abord que E est supersingulière en p. Les formules $\mathrm{VAL.SP.}(h_1(M),\eta)$ suffisent pour déterminer de manière unique

$$\mathbf{L}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))$$

ou ce qui revient au même $\tilde{\mathbf{L}}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))$. Elles s'écrivent pour η caractère d'ordre fini de G_∞ non trivial

$$\begin{aligned}&\varphi^{-a(\eta)}\eta^{-1}(\tilde{\mathbf{L}}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))\\&\quad=\frac{1}{2}G(\eta,2i\pi)\frac{L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},\eta^{-1},1)}{2i\pi\Omega_E^{\epsilon(\eta)}}\omega_E\end{aligned}$$

où $\Omega_E^{\epsilon(\eta)}=\int_{\gamma^\pm}\omega_E$ avec $\gamma^\pm$ générateur du $\mathbb{Z}$-module $H_1(E,\mathbb{Z})_\pm$, ou encore

$$\begin{aligned}&(p\varphi)^{-a(\eta)}\eta^{-1}(\tilde{\mathbf{L}}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))\\&\quad=\frac{1}{2}G(\eta^{-1},-2i\pi)^{-1}\frac{L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},\eta^{-1},1)}{2i\pi\Omega_E^{\epsilon(\eta)}}\omega_E\ .\end{aligned}$$

Si η est trivial, on trouve

$$\begin{aligned}&(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\tilde{\mathbf{L}}^{p,2i\pi,\tau}_{\{p\}}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))\\&\quad=\frac{1}{2}\frac{L_{\{p\}}(E/\mathbb{Q},1)}{2i\pi\Omega_E^{\epsilon(\eta)}}\omega_E\ .\end{aligned}$$

On en déduit que si $\mathcal{L}_{p,MSD}$ est la fonction de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty, \mathbb{C}_p^\times)$ dans $\overline{\mathbb{C}}_p^\times \otimes \mathbf{D}_p(E)$ étudiée dans dans [P93] et dans [BP93], on a

$$\mathcal{L}_{p,MSD}(\rho^{-1}) = \frac{2}{c_0^\pm}(-2i\pi)\rho(\tilde{\mathbf{L}}_{\{p\}}^{p,-2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))$$

pour tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_\infty, \mathbb{C}_p^\times)$, avec $c_0^\pm$ désignant le nombre de composantes connexes de $E(\mathbb{C})^\pm$.

B) Supposons que E a **bonne réduction ordinaire en p.** Dans ce cas, l'existence de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))$ n'est pas prouvée. Seule a été prouvée l'existence de

$$\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))$$

(vérifiant π(VAL.SP.$(h_1(E),\rho)$ pour presque tout caractère d'ordre fini de G_∞) où π est la projection de $\mathbf{D}_p(E)$ sur le sous-espace propre de $\mathbf{D}_p(E)$ pour φ, associé à la valeur propre qui est une unité, parallèlement à l'espace propre de valeur propre un élément de valuation -1. Nous verrons au paragraphe 4.4.5 comment on pourrait construire $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E))$ tout entier.

Le théorème suivant en direction de la conjecture principale est dû à Rubin ([R88, theorem 4.4], [R91, theorem 12.3]), le passage à la formulation de Rubin se fait à l'aide des considérations de 2.4.7 ; comme il est remarqué dans [P93], les conjectures $\delta_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E))$ sont alors vraies.

Théorème. *(Rubin) Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, à multiplication complexe ayant bonne réduction ordinaire en p. La conjecture* $\mathrm{Leop}(V_p(E))$ *est vraie. Le Λ-module libre $\pi(\mathbb{I}_{arith,\{p\}}^\tau(T_p(E)))$ est de rang 1 et $\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))$ en est une base.*

En particulier, $X_{\infty,f}(\mathbb{Q}(\mu_p), T_p(E))$ est de torsion (cf. 2.4.7).

Un autre bout de la conjecture $\mathrm{CP}(h_1(E))$ est que $\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))$ vérifie π(VAL.SP.$(h_1(E),\mathbf{1})$). Lorsque $L(E/\mathbb{Q},0)$ est non nul, cela est clair. Lorsque $L(E/\mathbb{Q},1)=0$, le théorème suivant qui utilise les résultats de Gross-Zagier ([GZ86]) et de [P87] va dans cette direction :

Théorème. *Soit E une courbe modulaire définie sur $\mathbb{Q}$ ayant bonne réduction ordinaire en p. On suppose que $\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))$ a un zéro simple en $\mathbf{1}$. Alors,*

$\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(h_{1,\mathbb{Z}}(E)))$ *vérifie* $\pi(\mathrm{VAL.SP.}(h_1(E),\mathbf{1}))$.

L'idée de la démonstration est la suivante. L'hypothèse implique que $L(E/\mathbb{Q},1)$ est nul. On choisit un caractère quadratique imaginaire ψ tel que $L(E/\mathbb{Q},\psi,1)\neq 0$ et tel que $\psi(p)=1$ et $\psi(l)=1$ pour tout l divisant le conducteur de E : cela existe par un théorème de Waldspurger. Si K est le corps quadratique imaginaire associé, soit $P\in E(K)$ le point de Heegner associé. Par [P87], la hauteur p-adique de P est non nulle et P est donc d'ordre infini. On en déduit par [GZ86], que la fonction L de E/K a un zéro simple en $s=1$ et la comparaison des formules complexe et p-adique implique VAL.SP.$(h_1(E),\mathbf{1})$ ou plutôt sa projection $\pi(\mathrm{VAL.SP.}(h_1(E),\mathbf{1}))$.

Enfin, rappelons que des vérifications numériques ont été faites tant dans le cas ordinaire ([BGS84], [BG85], [MTT86]) que dans le cas supersingulier ([BP93]).

4.3.5. On peut remplacer dans ce qui précède la courbe elliptique modulaire par une forme modulaire primitive pour $\Gamma_0(N)$ de poids k et de caractère ψ. Nous supposons que N est premier à p. Notons $M(f)$ le motif de poids $k-1$ associé à f par Scholl. Par un théorème de Faltings, le polynôme caractéristique du Frobenius géométrique agissant sur $M(f)_l$ est

$$X^2-a_pX+\psi(p)p^{k-1}=(X-\alpha_p)(X-\beta_p)\ .$$

De même, on a $\det(1-\varphi X|\mathbf{D}_p(M(f))=1-a_lX+\psi(l)l^{k-1}X^2$. Ainsi,

$$L(M(f),s)=\prod(1-a_ll^{-s}+\psi(l)l^{k-1-s})=L(f,s)\ .$$

On a

$$\mathrm{Fil}^iM(f)=\begin{cases}M(f) & \text{si } i\leq 0\\ \mathbb{Q}\omega & \text{si } 0<i\leq k-2\\ 0 & \text{si } i\geq k-1.\end{cases}$$

On a d'autre part $d_\pm(M(f))=1$. Ainsi, comme cela est bien connu, si ρ est un caractère géométrique, $M(f)(\rho)$ est critique si et seulement si $1\leq j_\rho\leq k-2$. Enfin, on a un isomorphisme canonique

$$M(f)^*\cong M(f)(k-1)\ .$$

Remarquons qu'avec cette définition, si f est une forme modulaire primitive de poids 2 dont le développement de Fourier est rationnel sur $\mathbb{Q}$ et si E est la courbe elliptique associée, on a $h^1(E)=M(f)\cong h_1(E)(-1)$.

Notons $\mathcal{M}(f)$ une structure entière de $M(f)$. La fonction L p-adique telle que nous la définissons ici (au moins conjecturalement) appartient à $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(M(f)^*)$. Il est facile de voir que les valeurs propres de φ agissant sur $\mathbf{D}_p(M(f)^*)$ sont α_p^{-1} et β_p^{-1} et que les nombres de Hodge de $D = \mathbf{D}_p(M(f)^*)$ sont $-k+1$ et 0. Regardons d'abord le cas où f est ordinaire : a_p est alors une unité en p. Comme pour les courbes elliptiques, l'existence de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}(f)(1))$ n'a pas été montrée, mais seulement l'existence de la projection $\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}(f)(1)))$ de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}(f)(1))$ sur le sous-espace propre $D_{[0]}$ relatif à α_p^{-1} parallèlement au sous-espace propre relatif à β_p^{-1}(ici, α_p est supposé être une unité). Soit L_{p,α_p} l'unique élément de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$ tel que, pour $1 \leq j < k-1$,

$$\eta\chi^j(L_{p,\alpha_p}(f)) = \alpha_p^{-a(\eta)} p^{a(\eta)(j+1)} G(\eta^{-1}, 2i\pi)^{-1}\Gamma(j+1)\frac{L(f,\eta^{-1},j+1)}{(-2i\pi)^j\Omega_f^{\epsilon(\eta\chi^j)}}$$

si η est un caractère non trivial de G_∞ et

$$\chi^j(L_{p,\alpha_p}(f)) = (1-\psi(p)\frac{p^{k-2-j}}{\alpha_p})(1-\frac{p^j}{\alpha_p})\Gamma(j+1)\frac{L(f,j+1)}{(-2i\pi)^j\Omega_f^{\epsilon(\chi^j)}}$$

où $\Omega_f^{\pm}$ sont des nombres complexes rendant rationnel le membre de droite. On vérifie facilement que, à une constante près, $L_{p,\alpha_p}(f)^\iota$ vérifie la propriété désirée pour $\pi(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}(f)(1)))$.

Lorsque f n'est pas ordinaire, c'est-à-dire que p divise a_p, les théorèmes d'interpolation de Amice-Vélu et Manin-Vishik, comme dans le cas de poids 2, peuvent s'interpréter comme un théorème d'existence d'un élément

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M}(f)(1))$$

de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(\mathcal{M}(f)(1))_p)$ vérifiant VAL.SP.$(M(f)(1), \chi^j\eta)$ pour $0 \leq j \leq k-2$ et η caractère d'ordre fini tel que $L(f,\eta^{-1},j) \neq 0$.

4.3.6. Supposons que M est **critique**, c'est-à-dire que l'application

$$\alpha_M : M_B^+ \to t_M(\mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Pour $\omega \in (\det_{\mathbb{Q}} t_M)^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}} M_B^+$ et $\omega' \in (\det_{\mathbb{Q}} t_M)^{-1}$ compatibles à $\mathcal{M}$, notons $\Omega_\infty(\omega)$ le déterminant de α_M dans des bases ω_1 de $\det_{\mathbb{Q}} t_M$ et ω_2 de $\det_{\mathbb{Q}} M_B^+$ telles que $\omega = \omega_1^{-1} \otimes \omega_2$ et $\Omega_p(\omega')$ l'élément de $\mathbf{D}_p(M^*(1))$ tel que $\Omega_p(\omega')(n)\omega'^{-1} = \alpha_{M_p}(n)$.

Supposons de plus que M_p **vérifie la condition de Dabrowski-Panchishkin** (cf. 2.4.6). Alors, M_p est $+$-critique (au sens de 2.4.6). Rappelons que l'on a défini un Λ_+-module libre $\mathbb{I}_{sp,+}(\mathcal{M}_p)(n)$ de rang 1 conjecturalement contenu dans $(2i\pi)^{t_0(M_p)}\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_+$

$$\mathbb{I}_{sp,+}(\mathcal{M}_p)(n) \stackrel{\text{déf}}{=} (2i\pi)^{t_0(M)} \prod_{j>-h} l_{-j}^{-\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D_{sc}} \mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathcal{M}_p)(n)_\pm$$

pour $n \in \det_{\mathbb{Q}_p} D_{sc}$ avec $t_0(M) = t_0(M_p) = \sum_{i<0} i\tilde{h}_i(M)$. On pose

$$\Gamma_{sc}^{\pi,*}(M_p) = \prod_{i<0} \Gamma^{\pi,*}(-i)^{\tilde{h}_i(M_p)} = \prod_{i<0} \Gamma^{\pi,*}(-i)^{\tilde{h}_i(M)} .$$

On a $\Gamma_{sc}^{\pi,*}(M_p) \in (2i\pi)^{t_0(M)}\mathbb{Q}$.

Sous les hypothèses que M est **critique** et que M_p **vérifie la condition de Dabrowski-Panchishkin**, la conjecture $\mathrm{CP}(M,0)$ devient la conjecture suivante.

Conjecture. *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathbb{Z}$-structure orientée sur M. Il existe un unique élément $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(\mathcal{M})_+$ de $Hom_{\mathbb{Q}_p}(\det_{\mathbb{Q}_p} D_{sc}, (2i\pi)^{t_0(M)}\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_+)$ telle que*

- pour tout caractère η de G_∞, avec $\epsilon(\eta) = 1$ tel que

$$H^0(M(\eta)) = H^0(\mathbb{Q}, M^*(1)(\eta^{-1})) = 0 ,$$

- pour $\omega \in (\det_{\mathbb{Q}} t_M)^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}} M_B^+$ et $\omega' \in (\det_{\mathbb{Q}} t_M)^{-1}$ compatibles à $\mathcal{M}$, on ait

$$\mathbf{1}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(\mathcal{M})_+) = \prod_{v(\alpha_j)\geq 0} (1-\alpha_j) \prod_{v(\alpha_j)<0} (1-p^{-1}\alpha_j^{-1}) \Gamma_{sc}^{\pi,*}(M_p) \frac{\mathbf{L}_{\{\infty,p\}}^{\infty}(M,0)}{\Omega_\infty(\omega)} \Omega_p(\omega')$$

et

(VAL.SP.(M,η,sc))

$$\eta^{-1}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(\mathcal{M})_+) = (\prod_{v(\alpha_j)<0} \alpha_j)^{-a(\eta)} \Gamma_{sc}^{\pi,*}(M_p) \frac{G(\eta^{-1}, -2i\pi)^{-d_+(M)} \mathbf{L}_{\{\infty,p\}}^{\infty}(M(\eta),0)}{\Omega_\infty(\omega)} \Omega_p(\omega') .$$

On retrouve ainsi la conjecture introduite dans [CP89]. On peut vérifier que le facteur $\Gamma_{sc}^{\pi,*}(M_p)$ est égal au facteur à l'infini modifié de [CP89], [C89], [P90], une fois identifié le $2i\pi$ p-adique et le $2i\pi$ complexe.

Si l'on veut éliminer la dépendance en $\mathcal{M}$, on procède comme en 4.2.2. Soit c une conjuguaison complexe. Pour c sufisamment général, l'application ι_c composée de $\mathcal{M}^+ \to M_p$, de l'application $M_p \to B_{cris} \otimes \mathbf{D}_p(M)$ déduite de l'isomorphisme de comparaison et de la projection de $\mathbf{D}_p(M) \to D_{sc}$ parallèlement à $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(M)$ est un isomorphisme car M_p est +-critique. Si $m(c)$ est une base de $\det_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}^+$, l'image $\iota_c(m(c))$ de $m(c)$ dans $\det_{\mathbb{Q}_p} D_{sc}$ est non nulle et

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(M,c) = \mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(\mathcal{M})(\iota_c(m(c))) \in B_{cris} \otimes \Lambda_+$$

ne dépend pas du choix du réseau $\mathcal{M}$ et est définie au signe près. Plus précisément, il existe un élément $\Omega(c)$ de B_{cris} tel que $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(M,c)$ appartient à $\Omega_p(c)(\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_+)$. Donc à condition d'avoir choisi un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ et une "période" $\Omega_p(c) \in B_{cris}$, on obtient (conjecturalement) un élément de $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_+$ (rappelons que l'on a dès le début choisi un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$).

Faisons maintenant quelques remarques qui permettent de passer de la conjecture générale au cas particulier où M est critique et M_p de Dabrowski-Panchiskhin.

(A) Sous l'hypothèse faite sur η, on a

$$\tilde{\Delta}_f(M(\eta))^{-1} = \mathbb{Q}(\eta) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} t_M)^{-1}$$

et

$$\Delta_f(M(\eta))^{-1} = \mathbb{Q}(\eta) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} t_M)^{-1} \otimes \det M_B^+ \ .$$

On a alors

$$\underline{\mathrm{Per}}_{M(\eta)}(\omega) = \underline{\mathrm{Per}}_M(\omega) G(\eta, 2i\pi)^{-d_+(M)} \ .$$

D'autre part,

$$\mathrm{Per}_{M(\eta)_p}(\omega') = \mathrm{Per}_{M_p}(\omega') \ .$$

(B) Le sous-espace D_{sc} est stable par φ, on en déduit que $P_\eta(\varphi)$ est simplement la multiplication par le scalaire :

$$\begin{aligned} P_1(\varphi) =& \det(1-\varphi|(D_{sc})^*(1))^{-1}\det(1-p^{-1}\varphi^{-1}|(D_{sc})^*(1)) \\ =& \det(1-\varphi|D_{sc})\det(1-p^{-1}\varphi^{-1}|D_{sc})^{-1} \end{aligned}$$

si η est trivial ou, si η est non trivial,

$$\begin{aligned} P_\eta(\varphi) =& \det(\varphi|(D_{sc})^*(1))^{-a(\eta)} \\ =& \det(p\varphi|D_{sc})^{a(\eta)} \ . \end{aligned}$$

En écrivant

$$\det(1-\varphi X|\mathbf{D}_p(M)) = \prod_{\alpha_j}(1-\alpha_j X) \ ,$$
$$\det(1-\varphi X|D_{sc}) = \prod_{v(\alpha_j)<0}(1-\alpha_j X) \ ,$$

on a alors

$$L_p(M_p,0)^{-1}P_1(\varphi)^{-1} = \prod_{v(\alpha_j)\geq 0}(1-\alpha_j)\prod_{v(\alpha_j)<0}(1-p^{-1}\alpha_j^{-1}) \ ,$$

$$G(\eta,2i\pi)^{d_+(M)}L_p(M_p(\eta),0)^{-1}P_\eta(\varphi)^{-1}$$
$$=G(\eta^{-1},-2i\pi)^{-d_+(M)}(\prod_{v(\alpha_j)<0}\alpha_j)^{-a(\eta)}$$

pour η non trivial (on utilise le fait que $G(\eta,2i\pi)G(\eta^{-1},-2i\pi)=p^{a(\eta)}$) .

(C) On a

$$\Gamma^{\pi,\tau,*}(M_p) = (2i\pi)^{t(\tau,+)}\prod\Gamma^*(-q)^{n_q^+(\tau)} \ .$$

En remarquant que, si $\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D_{sc}$ est nul (par exemple pour $j\geq 0$), il en est de même de $m_j^+(\tau)$ (cf. §2.4.6), on a

$$\mathbf{1}(\prod_j l_{-j}^{dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D_{sc}-m_j^+(\tau)})$$
$$=\prod_{-h<j<0}(-j)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D_{sc}-m_j^+(\tau)}$$

pour h assez grand, car alors $\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D_{sc}=d_+(M)=m_j^+(\tau)$ pour $j\geq h$;

$$=\prod_{-h<j<0}(-j)^{\sum_{j\leq i<0}\tilde h_i(M_p)-n_i^+(\tau)}$$
$$=\prod_{i<0}(\prod_{-h<j\leq i}-j)^{\tilde h_i(M_p)-n_i^+(\tau)}$$

(pour $j\leq -h$, $\tilde h_i(M_p)=n_i^+(\tau)=0$) , ce qui vaut

$$=\prod_{i<0}(\prod_{-i\leq j<h}j)^{\tilde h_i(M_p)-n_i^+(\tau)}=\prod_{i<0}((h-1)!/(-i)!)^{\tilde h_i(M_p)-n_i^+(\tau)}$$
$$=\prod_{i<0}\Gamma(-i)^{n_i^+(\tau)-\tilde h_i(M_p)}=\prod_{i<0}\Gamma^*(-i)^{n_i^+(\tau)-\tilde h_i(M_p)} \ ,$$

car $\sum_{i<0}\tilde h_i(M_p)=\sum_{i<0}n_i^+(\tau)=d_+(M)$. Remarquons de plus que pour $i>0$, les nombres $n_i^+(\tau)$ sont nuls car M_p vérifie la condition de Dabrowski-Panchiskhin. On en déduit que lorsqu'on remplace $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})$ par $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,sc}(\mathcal{M})$, le facteur $\Gamma^{\pi}(\tau,+)$ est remplacé par

$$\Gamma^{\pi}(\tau,+)\prod_{i<0}\Gamma^{\pi,*}(-i)^{\tilde{h}_i(M_p)-n_i^+(\tau)}=\prod_{i<0}\Gamma^{\pi,*}(-i)^{\tilde{h}_i(M_p)}\ .$$

4.3.7. Regardons maintenant le carré symétrique $Sym^2(M(f))$ de $M(f)$ où f est une forme modulaire de poids k et de caractère ψ avec $\psi(-1)=(-1)^k$. Remarquons que comme nous n'avons regardé que les motifs à coefficients dans $\mathbb{Q}$, nous sommes obligés de supposer que ψ est un caractère quadratique pour rentrer dans le cas précédent. Rappelons les résultats obtenus par Coates-Schmidt et Schmidt ([CS87], [Sc88] et par Hida ([H90]).

Rappelons quelques invariants classiques attachés à $Sym^2(M(f))$ qui est un motif de poids $2(k-1)$. La réalisation p-adique $Sym^2(M(f))_p$ de $Sym^2(M(f))$ est la représentation p-adique $Sym^2(M(f)_p)$. Les nombres de Hodge sont 0, $k-1$, $2(k-1)$. Plus précisément, si $\mathrm{Fil}^{k-1}M(f)_{dR}=\mathbb{Q}\omega$ et $M(f)_{dR}=\mathbb{Q}\omega\oplus\mathbb{Q}\eta$, la filtration $\mathrm{Fil}^i Sym^2(M(f))$ est donnée par

$$\mathrm{Fil}^i Sym^2(M(f))_{dR}=\begin{cases} Sym^2(M(f)_{dR}) & \text{si } i\leq 0\\ \mathbb{Q}\omega^2\oplus\mathbb{Q}\omega\eta & \text{si } 0<i\leq k-1\\ \mathbb{Q}\omega^2 & \text{si } k-1<i\leq 2(k-1)\\ 0 & \text{si } 2(k-1)<i\ .\end{cases}$$

On a d'autre part $d_+=d_+(Sym^2(M(f)))=2$ et $d_-=d_-(Sym^2(M(f)))=1$.

Soit $\rho=\chi^j\eta$ un caractère géométrique de G_∞. Alors, $Sym^2(M(f))(\rho)$ est de poids $2(k-1-j)$, a comme nombres de Hodge $-j$, $k-1-j$, $2(k-1)-j$, son espace tangent est de dimension

$$\begin{cases} 3 & \text{si } 2(k-1)<j\\ 2 & \text{si } k-1<j\leq 2(k-1)\\ 1 & \text{si } 0<j\leq k-1\\ 0 & \text{si } j\leq 0\ .\end{cases}$$

D'autre part, on a $d_\pm(Sym^2(M(f))(\rho))=d_{\pm\epsilon(\rho)}$ avec $\epsilon(\rho)$ le signe de $\epsilon(\eta)(-1)^j$. On en déduit que $Sym^2(M(f))(\rho)$ est critique (c'est-à-dire que l'application $\alpha^+_{Sym^2(M(f))(\rho)}$ est un isomorphisme) si et seulement si on est dans une des situations suivantes

A) $k-1<j\leq 2(k-1)$ et $\epsilon(\rho)=+$ (on a alors $d_{\epsilon(\rho)}=2$) ;

B) $0<j\leq k-1$ et $\epsilon(\rho)=-$ (on a alors $d_{\epsilon(\rho)}=1$).

Pour calculer le facteur à l'infini de la fonction L de $Sym^2(M(f))$, il reste à calculer les nombres $m_i^+(Sym^2(M(f))$ et $n_i^+(Sym^2(M(f))$; on trouve

$$m_i^+(Sym^2(M(f)) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < i \leq k-1 \\ 0 & \text{si } i > k-1 \end{cases}$$

et

$$m_i^-(Sym^2(M(f)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < i \end{cases}$$

et donc

$$n_0^+(Sym^2(M(f)) = 1, \ n_{k-1}^+(Sym^2(M(f))) = 1, \ n_0^-(Sym^2(M(f)) = 1 \ ,$$

les autres $n_i^\pm$ étant nuls. Ainsi,

$$L_\infty(Sym^2(M(f), s) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s-k+1) & \text{si } k \text{ est impair} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s-k+2) & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Remarquons qu'on a $m_i^\pm(Sym^2(M(f))) = m_{i,min}^\pm(Sym^2(M(f)_p))$.

Enfin, les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_p(Sym^2(M(f)_p)$ sont α_p^2, β_p^2 et $\psi(p)p^{k-1}$ et pour une place l de bonne réduction pour E, le facteur local en l de la fonction L est

$$L_l(Sym^2(M(f)), s) = ((1-\alpha_p^2 p^{-s})(1-\psi(p)p^{k-1-s})(1-\beta_p^2 p^{-s}))^{-1}$$

si $L_l(M(f), s) = (1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})$. Aux places de mauvaise réduction, le calcul des facteurs locaux est fait dans [CS87] pour $k = 2$ et $\psi = 1$ et [Sc88] en général. Remarquons que $Sym^2(M(f))$ est invariant par twists et qu'il est commode pour ce calcul de choisir f de conducteur minimal parmi ses twists.

Le produit

$$L(Sym^2(M(f)), s) = \prod_l L_l(Sym^2(M(f)), s)$$

converge pour $Re(s) > k$ et admet un prolongement analytique à tout le plan complexe. L'équation fonctionnelle

$$\mathbf{L}^\infty(Sym^2(M(f)), s) = \epsilon(Sym^2(M(f)), s)\mathbf{L}^\infty(Sym^2(M(f)), 2k-1-s)$$

a été démontrée par Shimura [Sh76]. L'isomorphisme de motifs

$$Sym^2(M(f))^* = Sym^2(M(f))(2k-2)$$

permet de l'écrire sous la forme

$$\mathbf{L}^\infty(Sym^2(M(f)),s) = \epsilon(Sym^2(M(f)),s)\mathbf{L}^\infty(Sym^2(M(f))^*(1),-s)\ .$$

On suppose maintenant que a_p est une unité en p et on note α_p le zéro de $X^2 - a_pX + \psi(p)p^{k-1}$ qui est une unité. On note c_ψ le conducteur du caractère ψ. Le théorème 5.5 de Schmidt peut alors s'énoncer avec des notations un peu différentes des siennes (en particulier, on prend $\rho = \chi^{m+k-1}\eta$ où m est l'entier qui intervient dans [Sc88]).

Théorème. *Il existe un unique élément G de $Frac(\Lambda)$ tel que pour tout caractère géométrique ρ de G_∞ tel que $Sym^2(M(f))(\rho)$ soit critique, on ait*

A) si $k-1 < j_\rho \leq 2(k-1)$ et $\epsilon(\rho) = +$,

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(G) =& 2\Gamma(j_\rho)\Gamma(j_\rho-k+1)(p^{2j_\rho-(k-1)}\psi(p)^{-1}\alpha_p^{-2})^{a(\eta_\rho)}\\ &\rho(c_\psi)^2c_\psi^{-2k}G(\psi^{-1})^2G(\eta_\rho)^2\frac{L(Sym^2(M(f))(\rho),0)}{\Omega_f(\rho)}\\ =&2\rho(c_\psi)^2c_\psi^{-2k+1}(-1)^{k-1}\Gamma(j_\rho)\Gamma(j_\rho-k+1)\\ &(p^{2j_\rho-(k-1)}\psi(p)^{-1}\alpha_p^{-2})^{-a(\eta_\rho)}G(\eta_\rho)^2\frac{L(Sym^2(M(f))(\rho),0)}{\Omega_f(\rho)}\end{aligned}$$

avec $\Omega_f(\rho) = (2i\pi)^{2(j_\rho-k+1)}\pi^{k-1} < f,f >$;

B) si $0 < j_\rho \leq k-1$ et si $\epsilon(\rho) = -$,

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(G) =& \pm\,\rho(c_\psi)(-c_\psi)^{-(k-1)}G(\psi^{-1})\\ &\Gamma(j_\rho-k+1)(p^{j_\rho-1}\alpha_p^{-2})^{a(\eta_\rho)}G(\eta_\rho)\frac{L(Sym^2(M(f))(\rho),0}{\Omega_f(\rho)}\end{aligned}$$

avec $\Omega_f(\rho) = (2i\pi)^{j_\rho-k+1}\pi^{k-1} < f,f >$.

Si de plus p est non exceptionnel (cf. infra) et si ψ n'est pas un caractère quadratique imaginaire (resp. ψ est un caractère quadratique imaginaire), G appartient à Λ (resp. appartient à $(1-\chi(\gamma)^{-(k-1)}\gamma)^{-1}\Lambda$).

On dit que p est exceptionel (cf. [Sc88]) s'il vérifie la condition suivante : choisissons f de conducteur N minimal parmi ses twists ; alors l'ensemble des nombres premiers l divisant N, tels que $ord_l c_\psi = ord_l N$ et tel que $0 < |1 - l^{2k-2}a_l^{-4}|_p < 1$ est non vide.

Faisons le lien avec notre conjecture. L'hypothèse d'ordinarité implique que $Sym^2(M(f))_p$ est une représentation p-adique de Dabrowski-Panchiskin. Le cas de $Sym^2(M(f))$ entre donc dans le cas de 4.3.6 et ce calcul a déjà été fait. Nous le recommençons en faisant quelques remarques :

(i) $\rho \mapsto \rho(c_\psi)$ est un élément de Λ ;

(ii) on reconnait dans $\Gamma(j)\Gamma(j-k+1)$ si $\epsilon(\rho) = 1$ et dans $\Gamma(j-k+1)$ si $\epsilon(\rho) = -1$ le terme $\Gamma(M(\rho)_p)$.

(iii) on reconnait dans $p^{2j-(k-1)}\psi(p)^{-1}\alpha_p^{-2}$ une des valeurs propres de l'opérateur $\wedge^2(p^j\varphi)$ de $\wedge^2\mathbf{D}_p(Sym^2M(f)^*(1)_p)$: celle correspondant au sous-espace D' de dimension 2 de $\mathbf{D}_p(Sym^2M(f)^*(1)_p)$ somme directe des sous-espaces propres pour φ de valeur propre $p^{-1}\alpha_p^{-2}$ et $p^{-1}(p^{k-1}\psi(p))^{-1} = p^{-k}\psi(p)^{-1}$. De même, on reconnait dans $p^{j-1}\alpha_p^{-2}$ la valeur propre de l'opérateur $\wedge^1p^j\varphi = p^j\varphi$ de $\mathbf{D}_p(Sym^2M(f)^*(1)_p)$ correspondant au sous-espace propre D'' de dimension 1 de $\mathbf{D}_p(Sym^2M(f)^*(1)_p)$ de valeur propre $p^{-1}\alpha_p^{-2}$.

On en déduit que si $n' \in \det(D')$ (resp. $n'' \in \det(D'')$),

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(Sym^2(\mathcal{M}(f)))_+(n')$$

(resp. $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(Sym^2(\mathcal{M}(f)))_-(n'')$) existe ; à une unité de $\mathbb{Q}_p(2i\pi)\mathbb{Z}\otimes\Lambda$ près, c'est G^ι. Le type à l'infini naturel dans ce cas est $\tau_{min}(V)$.

Nous verrrons dans l'appendice B qu'une conséquence facile d'un théorème de Flach ([F192]) est que $\mathrm{Leop}(Sym^2(h^1(E)(2), \mathbf{1}_\Delta)$ est vraie.

De nouveau dans le cas où E est à multiplication complexe, on a des résultats en direction de $\mathrm{CP}(Sym^2(h^1(E)))$.

Théorème. *(Coates-Schmidt* [CS87] *+Rubin) Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$, à multiplication complexe et ayant bonne réduction ordinaire. Alors, pour $n \in \det(D'')$, $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(Sym^2(\mathcal{M}(f)))(n)_-$ est une base du Λ-module*

$$\mathbb{I}_{arith,\{p\}}^{\tau}(Sym^2(\mathcal{M}(f))_p)_-(n) \ .$$

En utilisant les diverses équations fonctionnelles et en supposant vraie la conjecture Réc$(Sym^2(\mathcal{M}(f))_p)$, on en déduit que sous les mêmes hypothèses sur E et pour $n \in \det(D')$, $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(Sym^2(\mathcal{M}(f)))_+(n)$ est une base du Λ_+-module $\mathbb{I}_{arith,\{p\}}^{\tau}(Sym^2(\mathcal{M}(f))_p)_+(n)$. On peut aussi le démontrer directement par un raisonnement semblable à celui de [CS87].

4.3.8. Une dernière remarque pour faire le lien entre le §3 et les conjectures du §4 : si la conjecture 4.2.1 est vraie, les résultats du §3 peuvent s'interpréter comme la démonstration à une unité p-adique près des conjectures de Bloch-Kato généralisées.

4.4. Eléments spéciaux.

4.4.1. Dans ce paragraphe, nous donnons quelques conséquences des conjectures principales que nous avons faites. Beaucoup d'autres formulations sont possibles. Selon les cas particuliers, il est possible de vérifier l'une ou l'autre. On trouve certainement dans [Ka] et [Kb] des formulations du même type.

Notons $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$ le noyau de $H^2_{\infty,S}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p) \to Z^2_{\infty,S}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$. Rappelons que si $\omega_\pm$ est un générateur de

$$\det_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm = \det_{\Lambda_\pm} H^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm ,$$

le Λ-module des fonctions L p-adiques arithmétiques est défini par

$$\begin{aligned}&I_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathcal{M}_p)_\pm(s)e_{\mathcal{M}_p}\\ &= \prod_{j>-h} l_{-j}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(M)}(\det_{\Lambda_\pm}\mathcal{M}_p^*(1)^{G_{\mathbb{Q}_\infty}})(\det_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,p}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm)^{-1}\\ &(\det_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm)^{-1}(\wedge^{d-\pm(M_p)}\Omega^\epsilon_{M_p,h,\pm})^{-1}(\omega_\pm)\wedge s\end{aligned}$$

pour $s \in \wedge^{d_\pm(M)}\mathbf{D}_p(M)$, cf. (1.4.3) et pour h assez grand et

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^\tau_{arith,\{p\}}(\mathcal{M}_p)_\pm(s)e_{\mathcal{M}_p} =&(2i\pi)^{t_H(\tau,\pm)}\prod_{j>-h}(l_{-j})^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(M)-m_j^\pm(\tau)}\\ &(\det_{\Lambda_\pm}\mathcal{M}^*(1)_p^{G_{\mathbb{Q}_\infty}})(\det_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,p}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm)^{-1}\\ &(\det_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm)^{-1}(\wedge^{d-\pm(M_p)}\Omega^\epsilon_{M_p,h,\pm})^{-1}(\omega_\pm)\wedge s\end{aligned}$$

pour τ un type à l'infini de M_p, cf. (2.3.1).

Il existe un élément $\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p)$ de $Frac(\Lambda)\otimes\det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$ tel que pour tout entier h, on ait pour tout $s\in\wedge^{d_\pm(M)}\mathbf{D}_p(M)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{arith,\{p,\infty\},h}(\mathcal{M}_p)_\pm(s)e_{\mathcal{M}_p} &= \Lambda_\pm\prod_{j>-h} l_{-j}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(M)}\\ &(\wedge^{d-\pm(M)}\Omega^\epsilon_{M_p,h,\pm})^{-1}(\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p)_\pm)\wedge s\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}\Lambda_\pm\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p)_\pm =&(\det_{\Lambda_\pm}\mathcal{M}^*(1)_p^{G_{\mathbb{Q}_\infty}})(\det_{\Lambda_\pm} Z^2_{\infty,p}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm)^{-1}\\ &(\det_{\Lambda_\pm} H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm)^{-1}\omega_\pm .\end{aligned}$$

Ainsi, si $f(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p))$ est une série caractéristique du Λ-module de torsion $H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$ (sous $\mathrm{Leop}(M_p)$), f_0 une série caractéristique de $\mathcal{M}^*(1)_p^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}$ et $f_{0,p}$ une série caractéristique de $\oplus_{v\in S_p}\mathcal{M}^*(1)_p^{G_{\mathbb{Q}_{\infty,v}}}$, on a

$$\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p) = \frac{f^{\iota}_{0,p}f(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p))}{f^{\iota}_0}\omega$$

c'est-à-dire

$$\Lambda\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p) = \frac{f^{\iota}_{0,p}f(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p))}{f^{\iota}_0}\det{}_{\Lambda}H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)\ .$$

4.4.2. Supposons vraie la conjecture CP(M, J) pour un sous-ensemble admissible J de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire supposons l'existence de $\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\}}(\mathcal{M})$ vérifiant les formules VAL.SP.(M,ρ) pour suffisamment de caractères géométriques ρ. La conjecture CP*(M) peut alors s'écrire de la manière suivante :

Conjecture. (i) *Il existe* $\omega_{sp\acute{e}c}(\mathcal{M}_p) \in Frac(\Lambda)\otimes\det_{\Lambda}H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$ *tel que*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\},h}(\mathcal{M})_\pm(s)e_{\mathcal{M}_p}&\\ &= \prod_{j>-h} l_{-j}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}Fil^j\mathbf{D}_p(M)}(\wedge^{d_\pm(M)}\Omega^{\epsilon}_{\mathcal{M}_p,h,\pm})^{-1}(\omega_{sp\acute{e}c}(\mathcal{M}_p)_\pm)\wedge s\end{aligned}$$

(ii) *On a*

$$\omega_{sp\acute{e}c}(\mathcal{M}_p) = \frac{f^{\iota}_{0,p}f(H^2_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p))}{f^{\iota}_0}\det{}_{\Lambda}H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)\ .$$

4.4.3. On exprime maintenant un sous-produit de la conjecture principale en termes uniquement de $\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p)$ en utilisant le paragraphe 3. Reprenons certaines notations de ce paragraphe : si α est un élément de $H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}(j)_p)$, on note $P(\alpha)$ l'image de α dans $H^1(G_{S,\mathbb{Q}},\mathcal{M}(j)_p)$ et on prolonge cette application en une application de $\det_{\Lambda}H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}(j)_p)$ dans $\wedge^{d_-(M(j))}H^1(G_{S,\mathbb{Q}},\mathcal{M}(j)_p)$. D'autre part, notons $\Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))$ le quotient de $\mathrm{Per}_{M(j)_p}(\omega')$ par $\underline{Per}_{M(j)}(\omega)$ où $\omega\in\Delta_f(M(j))^{-1}$ et $\omega'\in\tilde{\Delta}_f(M(j))^{-1}$ sont compatibles à la $\mathbb{Z}$-structure orientée $\mathcal{M}(j)$ (cf. 4.2.1) et où l'on a mélangé allègrement les nombres complexes et p-adiques. On laisse le lecteur les séparer et vérifier que finalement ce qui est écrit a un sens. Dans la suite, nous continuerons à faire cet abus.

Supposons par exemple que l'espace tangent de M est M_{dR}, que $L(M(j),0)$ est non nul, que $H^1_f(\mathbb{Q},M(j)^*(1)_p) = H^1_f(\mathbb{Q},M(j)^*(1)) = 0$ et que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1_f(\mathbb{Q},M(j))$ et le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $H^1_f(\mathbb{Q},M(j)_p))$ sont de dimension $d_-(M(j))$, ce qui doit être vrai pour j assez grand. Pour un tel j, on note $\log_{\mathcal{M}(j)}$ la composante de $\log_{M(j)}$:

$$\det_{\mathbb{Z}} H^1_f(\mathbb{Q}, \mathcal{M}) \to \det_{\mathbb{R}}(\operatorname{coker} \alpha_M) = \det_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} M_{dR} / \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} M_B^+)$$

dans la base déduite de la base $e_{\mathcal{M}}$ de $\det_{\mathbb{Q}}(M_{dR})$ et de la base $\omega_B^+(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}_B^+$ (donnée par l'orientation de $\mathcal{M}$). Si z_j est une base de $\det_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j))$, on a alors

$$\Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))(n) = \frac{1}{\log_{\mathcal{M}(j)}(z_j))} \log_{M(j)_p}(z_j) \wedge n$$

pour $n \in \wedge^{d_+(M(j))} \mathbf{D}_p(M(j))$.

Conjecture. *Il existe un élément $\omega_{spéc}(\mathcal{M}_p)$ de $Frac(\Lambda) \otimes \det_{\Lambda} H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$ tel que pour tout entier j avec $Fil^{-1} M(j)_{dR} = 0$ et $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathcal{M}(j))$ de dimension $d_-(M(j))$, pour tout $n \in \wedge^{d_\pm(M(j))} \mathbf{D}_p(M(j))$,*

$$\begin{aligned} &\log_{M_p(j)} P(\omega_{spéc}(\mathcal{M}) \otimes \epsilon^{\otimes j}) \wedge n \\ &\quad = \pm\, 2^{-d_-(M(j))} \prod_i \Gamma(-i)^{\tilde{h}_i(M(j))} L_p(M(j)^*(1), 0)^{-1} \\ &\quad \mathbf{L}^{\infty}_{\{\infty\}}(M(j), 0) \Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))(n)\ . \end{aligned}$$

Remarquons que si $d_-(M(j)) = 0$, la puissance extérieure $d_-(M(j))$-ième de $\mathbf{D}_p(M(j))$ est canoniquement $\mathbb{Q}_p$ et que la conjecture ne dit rien dans ce cas, sauf que $\mathbf{L}^{\infty}_{\{\infty\}}(M(j), 0)/\underline{\mathrm{Per}}_{M(j)}(\omega)$ est un élément de $\mathbb{Q}_p$.

La compatibilité avec la conjecture 4.4.2 se fait à l'aide des calculs du paragraphe 3. Plus précisément, en remplaçant M par $M(j)$, on peut supposer $j = 0$; on utilise alors

- que sous les hypothèses faites et en posant comme dans le paragraphe 3

$$\mathcal{L}_{\alpha,h} = (\wedge^{d_{-\pm}(M)} \Omega^{\epsilon}_{M_p,h,\pm})^{-1}(\alpha)$$

et

$$\mathcal{L}_\alpha = (\mathcal{L}_{\alpha,h})_h$$

avec $\alpha \in H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$, on a

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_\alpha) = \pm \log_{M_p} P(\alpha)\ ;$$

- la formule

$$\mathbf{1}(\prod_{i>-h} l_{-i})^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^i \mathbf{D}_p(M))} = (h-1)!^{d_-(M)} \prod_i \Gamma(-i)^{-\tilde{h}_i(M)} \ ,$$

- la remarque que si $L(s) = L' \wedge s$,

$$\begin{aligned}((1-\varphi)^{-1}&(1-p^{-1}\varphi^{-1})L)(s) \\ &= L_p(M_p,0)^{-1}L_p(M^*(1)_p,0)((1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})L') \wedge s \ .\end{aligned}$$

Remarque : De la formule

$$\frac{L^*_\infty(M,0)}{L^*_\infty(M^*(1),0)} = \pm 2^{d_+(M)-d_-(M)}(2\pi)^{d_-(M)+t_H(M)} \prod_j \Gamma^*(-j)^{\tilde{h}_j(M)} \ ,$$

on déduit que la formule peut aussi s'écrire de manière plus symétrique en p et ∞ :

$$\begin{aligned}\log_{M_p(j)} P(\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}) \otimes \epsilon^{\otimes j}) &= \pm 2^{-d_+(M(j))}(2\pi)^{-d_-(M(j))-t_H(M(j))} \\ & L^*_\infty(M(j)^*(1),0)^{-1}L_p(M(j)^*(1),0)^{-1}\mathbf{L}^\infty(M(j),0)\tilde{\Omega}_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))\end{aligned}$$

en notant

$$\Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))(n) = \tilde{\Omega}_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j)) \wedge n \ .$$

On pose

$$\mathbb{L}(M(j)) = 2^{-d_+(M(j))}(2\pi)^{-d_-(M(j))-t_H(M(j))}L^*_\infty(M(j)^*(1),0)^{-1}\mathbf{L}^\infty(M(j),0) \ .$$

Nous ne garantissons pas le signe dans les formules qui suivent ...

4.4.4. On peut être encore plus optimiste : On dit qu'un élément x de $H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$ et même de son bidual $H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)^{**}$ est fortement motivique si pour tout entier j et pour tout entier n la projection de $x \otimes \epsilon^{\otimes j}$ dans $H^1(G_{S,F_n}, M_p)$ appartient en fait au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1(\mathbb{Q}_n, M)$. On dit que $x \in \det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)_\pm$ est fortement motivique si l'on peut écrire $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ avec x_i fortement motivique. Supposons $d_{-\pm}(M) \neq 0$.

Conjecture. *Il existe un élément fortement motivique $\omega_{spéc}(\mathcal{M})$ de*

$$\det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{M}_p)$$

tel que pour tout entier j assez grand avec $(-1)^j = \pm$ (en particulier $Fil^{-1}M(j)_{dR} = 0$ et $H^1_f(\mathbb{Q},\mathcal{M}(j))$ de dimension $d_{-\pm}(M)$)

$$\log_{\mathcal{M}(j)} P(\omega_{spéc}(\mathcal{M}) \otimes \epsilon^{\otimes j}) = L_p(M(j)^*(1),0)^{-1}\mathbb{L}(M(j)) \mod \mathcal{M}(j)^+ \ .$$

On passe de cette formule à celle de 4.4.3 en prenant

$$z_j = P(\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}) \otimes \epsilon^{\otimes j}) .$$

Il n'y a plus de fonction L p-adique visible. Cependant, un tel élément, une fois qu'il est connu, permet de définir la fonction L p-adique par la formule

$$\mathbf{L}^p_{\{p,\infty\},h}(\mathcal{M})_\pm(s)e_{\mathcal{M}} = \prod_{j>-h} l_{-j}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_p(M)}(\wedge^{d-\pm(M)}\Omega^\epsilon_{M_p,h,\pm})^{-1}(\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M})_\pm) \wedge s .$$

On peut réécrire la conjecture précédente sous la forme suivante :

Conjecture. A) *Pour tout entier j assez grand ($Fil^{-1}M(j)_{dR} = 0$ et $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathcal{M}(j))$ de dimension $d_-(M(j))$ en particulier),*

$$Q(\mathcal{M}(j)) \overset{\text{déf}}{=} \wedge^{d_{-(-1)^j}(M)} \exp_{\mathcal{M}(j)}(\mathbb{L}(M(j))e_{\mathcal{M}(j)}) \in \det{}_{\mathbb{Z}}H^1_f(\mathbb{Q}, \mathcal{M}(j))$$

où $\exp_{\mathcal{M}(j)}$ *est l'application réciproque de* $\log_{\mathcal{M}(j)}$.

B) *De plus, il existe $\omega_{spéc}(\mathcal{M}) \in \det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$ fortement motivique tel que*

$$P(\omega_{spéc}(\mathcal{M}) \otimes \epsilon^{\otimes j}) = L_p(M(j)^*(1), 0)^{-1}Q(\mathcal{M}(j)) .$$

Remarquons que si $\omega \in \det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$, il est caractérisé par la connaissance de $\log_{M(j)_p} P(\omega \otimes \epsilon^{\otimes j})$ pour j assez grand ou si l'on sait de plus que ω est fortement motivique par la connaissance de $\log_{\mathcal{M}(j)} P(\omega \otimes \epsilon^{\otimes j})$. En effet deux éléments de $\det_\Lambda H^1_{\infty,\{p\}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$ diffèrent par un élément de $Frac(\Lambda)$ qui est caractérisé par ses valeurs en tout entier $j \gg 0$.

4.4.5. *Exemples.* (i) Si $\epsilon = (\zeta_n)$, on prend $\omega_{\text{spéc}}(\mathbb{Z}(1)) = (1-\zeta_n)_n$. Alors, pour j impair et positif, $Q(\mathbb{Z}(j))$ est l'élément de Soulé-Deligne [De89] (voir aussi [P]).

(ii) Pour $h_1(E)(1)$, Kato construit par un choix convenable d'unités modulaires un élément $\omega_{\text{spéc}}(h_1(E)(1))$ selon la méthode de Beilinson et Bloch. Cet $\omega_{\text{spéc}}(h_1(E)(1))$ permet de définir la fonction L p-adique à valeurs dans le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbf{D}_p(h_1(E))$ de dimension 2. On peut espérer que les résultats de Kato permettent de montrer qu'une projection convenable de la fonction L p-adique que l'on obtient à partir de $\omega_{\text{spéc}}(h_1(E)(1))$ est à une translation près la fonction L p-adique de Mazur-Swinnerton-Dyer. On peut même espérer construire à partir de $\omega_{\text{spéc}}(h_1(E)(1))$ la fonction L p-adique tout entière par la formule de 4.4.2

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,2i\pi,\tau}(\mathcal{M})(s)e_{\mathcal{M}} = (2i\pi)^{-1}(\Omega^{\epsilon}_{M_p,0})^{-1}(\omega_{\text{spéc}}(\mathcal{M}_p)) \wedge s$$

pour $s \in \mathbf{D}_p(h_1(E))$.

(iii) Supposons maintenant que E est une courbe elliptique à multiplication complexe. Les unités elliptiques permettent alors de construire un élément $\omega_{\text{spéc}}(h_1(E))$ de la manière suivante.

Soit K le corps de multiplication complexe de E. Soit p un nombre premier non ramifié dans K. Posons $L_n = K(E_{p^{n+1}})$. Le corps $L_\infty = K(E_{p^\infty})$ contient $K_\infty = K\mathbb{Q}_\infty$. On vérifie comme dans A.4 que

$$\begin{aligned}
&\varprojlim_n H^1(G_{S,L_n}, T_p(E)) \\
&\qquad = \varprojlim_n H^1(G_{S,L_n}, T_p(E)/p^{n+1}T_p(E)) \\
&\qquad = \varprojlim_n H^1(G_{S,L_n}, \mu_{p^{n+1}}) \otimes T_p(E)/p^{n+1}T_p(E) \otimes \mathbb{Z}_p(-1) \\
&\qquad = \varprojlim_n H^1(G_{S,L_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes T_p(E)(-1) \ .
\end{aligned}$$

Posons

$$\mathcal{E}_{L_{\infty,\{p\}}} = \varprojlim_n H^1(G_{S,L_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \ .$$

En utilisant l'accouplement de Weil et l'isomorphisme $T_p(E)^* = T_p(E)(-1)$, on obtient l'isomorphisme de $\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbb{Q})$-modules

$$\varprojlim_n H^1(G_{S,L_n}, T_p(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E), \mathcal{E}_{L_{\infty,\{p\}}}) \ .$$

Les applications de corestriction

$$H^1(G_{S,L_n}, T_p(E)) \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}_n}, T_p(E))$$

induisent une application projection

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E), \mathcal{E}_{L_{\infty,\{p\}}}) \to\ & H^1_{\infty,S}(T_p(E)) \\
&= \varprojlim_n H^1(G_{S,K_n}, T_p(E))^{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}
\end{aligned}$$

qui se factorise en une application

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E), \mathcal{E}_{L_{\infty,\{p\}}})_{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)} \to H^1_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T_p(E)) \ .$$

D'autre part, soit $\mathcal{C}_\infty$ le $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(L_\infty/K]]$-module des unités elliptiques associé à E. C'est un $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbb{Q}]]$-module de type fini. Notons $\omega_{\text{spéc}}$ l'image de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E), \mathcal{C}_\infty)$ dans $H^1_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T_p(E))$. En faisant le lien entre notre application $\Omega_{V_p(E)}$ et les applications δ de Coates-Wiles utilisées par Rubin, on devrait pouvoir montrer une partie des conjectures précédentes, par exemple dans le cas ordinaire pour la projection sur $D_{[0]}$ parallèlement à $D_{[-1]}$. Il serait alors intéressant de calculer complètement $(\Omega_{V_p(E),0})^{-1}(\omega_{\text{spéc}})$ que ce soit dans le cas ordinaire ou dans le cas supersingulier.

4.5. Continuité.

4.5.1. On énonce dans ce paragraphe des conjectures plus faibles en ne s'intéressant qu'à l'analycité et en ne faisant intervenir que les $M(j)$ pour suffisamment d'entiers j. Il s'agit alors de ne s'intéresser qu'aux valeurs spéciales de la fonction L de M aux entiers j pour j assez grand. Cela suffit à déterminer une fonction analytique. Les propriétés d'interpolation impliquées par nos conjectures sont alors dans l'esprit des premiers résultats d'analycité de la fonction de Kubota.

4.5.2. Soit j et j' deux entiers congrus modulo $(p-1)p^n$. On a alors un isomorphisme canonique

$$H^1(\mathbb{Q}, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j)) \cong H^1(\mathbb{Q}, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j')) \ .$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{Q}, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j)) & \xrightarrow{\cong} & H^1(\mathbb{Q}, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{Q}_n, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j)) & \xrightarrow{\cong} & H^1(\mathbb{Q}_n, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j')) \ . \end{array}$$

Remarquons que, pour j assez grand, les noyaux des applications verticales sont d'ordre borné indépendamment de n. Si $Q \in H^1(\mathbb{Q}, \mathbf{T}(j))$ et $Q' \in H^1(\mathbb{Q}, \mathbf{T}(j'))$, on dira que Q et Q' sont congrus modulo p^{n+1} si leurs images dans

$$H^1(\mathbb{Q}, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j)) \cong H^1(\mathbb{Q}, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j'))$$

sont les mêmes. Il existe une constante C indépendante de n telle que si les images de Q et de Q' sont les mêmes dans $H^1(\mathbb{Q}_n, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j))$, Q et Q' sont congrus modulo $C^{-1}p^{n+1}$.

4.5.3. ***Conjecture***. *Soit h un entier positif assez grand. Pour tout $k \mod p-1$, il existe un ensemble fini R contenu dans $\mathbb{Z}$ et une fonction analytique $\mathbf{L}_{p,h}(M, s, \omega^k)$ sur $\mathbb{Z}_p - R$ à valeurs dans $Hom_{\mathbb{Q}_p}(\wedge^{d_-(M(k))}\mathbf{D}_p(M), \mathbb{Q}_p)$ tels que pour tout entier $j \equiv k \mod p-1$, $j \gg 0$, on ait pour $n \in \wedge^{d_-(M(k))}\mathbf{D}_p(M)$,*

$$\begin{aligned}(1-p^j\varphi)^{-1}&(1-p^{1-j}\varphi^{-1})(\mathbf{L}_{p,h}(M, j, \omega^k))(n) \\ &= (h-1)!^{d_-(M(k))} 2^{-d_-(M(k))} \mathbf{L}^{\infty}_{\{\infty,p\}}(M(j), 0)\Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))(n \otimes e_{jd_-(M(k))}) \ .\end{aligned}$$

Pour l'existence, il suffit de demander la condition pour un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ contenu dans la classe k dense dans $\mathbb{Z}_p$.

Bien sûr, $\Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))$ est difficile à contrôler. Le seul exemple vraiment simple est celui où $d_-(M(j)) = 0$, $\mathrm{Fil}^0 M(j)_{dR} = 0$, $M(j)$ est donc critique ; $\Omega_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))(n)$ est alors le quotient de n par la période de Deligne associée à $\mathcal{M}$. L'exemple type est dans ce cas la fonction ζ p-adique. On prend alors $h = j$.

4.5.4. ***Conjecture***. *Pour $j >> 0$,*

$$Q(\mathcal{M}(j)) = \exp_{\mathcal{M}(j)}(\mathbb{L}(M(j))e_{\mathcal{M}(j)})$$

est un élément du groupe motivique $\det_{\mathbb{Q}} H^1_f(\mathbb{Q}, M(j))$. *On a*

$$\log_{M(j)_p} Q(\mathcal{M}(j)) = \tilde{\Omega}_{(p,\infty)}(\mathcal{M}(j))\mathbb{L}(M(j))e_{\mathcal{M}(j)}) \ .$$

Il existe une constante C telle que, si j et j' sont deux entiers assez grands congrus modulo $(p-1)p^n$, les points

$$L_p(M(j')^*(1), 0)^{-1} Q(\mathcal{M}(j'))$$

et

$$L_p(M(j)^*(1), 0)^{-1} Q(\mathcal{M}(j))$$

sont congrus modulo $C^{-1}p^{n+1}$.

Si $\alpha \in H^1_{\infty,S}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p)$ et si j et j' sont deux entiers congrus modulo $(p-1)p^n$, les éléments $P(\alpha \otimes \epsilon^{\otimes j})$ et $P(\alpha \otimes \epsilon^{\otimes j'})$ respectivement de $H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p(j))$ et de $H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_p(j'))$ sont congrus modulo $C^{-1}p^{n+1}$ car l'image de $P(\alpha \otimes \epsilon^{\otimes j})$ dans $H^1(\mathbb{Q}_n, \mathcal{M}_p(j))$ est congrue à

$$\left(\sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})} \chi^j(\tau)\tau\alpha_n\right) \otimes \zeta_n^{\otimes j}$$

modulo p^{n+1}. La conjecture se déduit alors de la conjecture, partie B dans 4.4.4.

4.5.5. Dans le même ordre d'idées, remarquons qu'on peut se poser dans les mêmes termes la question de la "continuité de l'application $\log_{M(j)_p}$ " en fonction de j, question qui m'a été posée par J.-M. Fontaine. Il s'agit d'un problème local. Soit K une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, V une représentation p-adique de G_K cristalline et $\mathbf{T}$ un réseau de V stable par G_K. Comme en 4.5.2, si j et j' sont deux entiers positifs congrus modulo $(p-1)p^n$ et si $Q \in H^1(K, \mathbf{T}(j))$ et $Q' \in H^1(K, \mathbf{T}(j'))$, Q et Q' sont dits congrus modulo p^{n+1} si leurs images dans

$$H^1(K, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j)) \cong H^1(K, (\mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})(j'))$$

sont les mêmes. En utilisant les propriétés d'analycité de l'homomorphisme $\Omega_{V,h}$ pour h entier suffisamment grand, on peut facilement montrer la propriété suivante : soit L un réseau de $D(V)$; pour tout k, il existe une constante C telle que pour n assez grand, si j et j' sont des entiers positifs congrus à $(p-1)p^n$ et non congrus à un zéro de $\det_\Lambda(\Omega_{V,h})$ appartenant à $\mathbb{Z}_p$ modulo $(p-1)p^k$, et si $Q \in H^1(K, \mathbf{T}(j)), Q' \in H^1(K, \mathbf{T}(j))$, les éléments

$$(-1)^j(1-p^{-j}\varphi)(1-p^{j-1}\varphi^{-1})^{-1}\frac{\log_{V(j)} Q}{(h+j-1)!}$$

et

$$(-1)^{j'}(1-p^{-j'}\varphi)(1-p^{j'-1}\varphi^{-1})^{-1}\frac{\log_{V(j')} Q'}{(h+j'-1)!}$$

de $\mathbf{D}_p(V)$ sont congrus modulo $Cp^{n+1}L$ (on identifie ici $\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathbf{D}_p(V(j))$). Si j est un élément de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1))\mathbb{Z}$, on peut alors donner un sens, pour h suffisament grand et à quelques exceptions près à l'application

$$H^1(K, \mathbf{T}(j)) = \varprojlim_n H^1(K, \mathbf{T}(j_k)) \to D(V)$$

par passage à la limite des applications $(h+j_k-1)!^{-1}\log_{V(j_k)}$ où j_k est une suite d'entiers positifs vérifiant $j \equiv j_k \mod (p-1)p^k$. Par exemple, si $V = \mathbb{Q}_p$, on peut en fait prendre $h = 0$ et les seules exceptions sont $j = (0,0)$ et $(1,1)$ dans $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

A.1. Cohomologie galoisienne.

A.1.1. Soit G un groupe profini et M un G-module topologique, c'eŝt-à-dire un $\mathbb{Z}$-module muni d'une action de G sur M telle que l'ensemble des $g \in M$ vérifiant $gm = m$ est ouvert pour tout $m \in M$. Notons $C^n(G,M)$ le groupe des applications continues de G^n dans M. On définit de la manière usuelle des applications $d : C^n(G,M) \to C^{n+1}(G,M)$. On obtient ainsi le complexe standard $C^\cdot(G,M)$. Si $Z^n(G,M)$ est l'ensemble des éléments de $C^n(G,M)$ tels que $df = 0$ (cocyles continus), on définit le groupe de cohomologie continue $H^n(G,M)$ comme le quotient de $Z^n(G,M)$ par l'image de $C^{n-1}(G,M)$. Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ est une suite exacte de G-modules topologiques continus et si $M \to N$ admet une section continue, la suite de complexes

$$0 \to C^\cdot(G,L) \to C^\cdot(G,M) \to C^\cdot(G,N) \to 0$$

est exacte. On peut alors définir des flèches de connexion $H^n(G,N) \to H^{n+1}(G,L)$ et on obtient la suite exacte longue de cohomologie continue

$$\begin{aligned} \cdots \to H^n(G,L) \to H^n(G,M) \to H^n(G,N) \\ \to H^{n+1}(G,L) \to H^{n+1}(G,M) \to H^{n+1}(G,N) \to \cdots \end{aligned}$$

A.1.2. Nous utilisons constamment dans le texte sans le dire les résultats qui suivent (cf. [Ta76] ou [J88] pour les démonstrations et les précisions).

Un système projectif (A_i, π_i) vérifie **la condition de Mittag-Leffler** si pour tout entier i, l'image des applications de transition $A_{i+j} \to A_i$ est constant pour j assez grand.

Soit $(\mathbf{T}_i, \pi_i)_i$ un système projectif de G-modules discrets. La limite projective $\mathbf{T}$ des $\mathbf{T}_i$ munie de la topologie de la limite projective est un G-module topologique. Pour tout entier n, les $H^n(G,\mathbf{T}_i)$ munis des applications $H^n(\pi_i)$ induites : $H^n(G,\mathbf{T}_i)\to H^n(G,\mathbf{T}_{i-1})$ par les π_i forment un système projectif.

A.1.3. ***Proposition.*** *Soit $(\mathbf{T}_i,\pi_i)$ un système projectif de G-modules discrets et $\mathbf{T}$ sa limite projective. Soit n un entier. On suppose que*

i) *$(\mathbf{T}_i,\pi_i)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler ;*

ii) *$(H^{n-1}(G,\mathbf{T}_i),H^{n-1}(\pi_i))_i$ vérifie la condition de Mittag-Leffler.*

Alors, l'application naturelle

$$H^n(G,\mathbf{T})\to\varprojlim_n H^n(G,\mathbf{T}_i)$$

est un isomorphisme.

Prenons pour $\mathbf{T}$ un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de G. Alors $\mathbf{T}=\varprojlim_n \mathbf{T}/p^i\mathbf{T}$ où $\mathbf{T}_i=\mathbf{T}/p^i\mathbf{T}$ est fini. Les $(\mathbf{T}_i)_i$ vérifient donc la condition de Mittag-Leffler.

A.1.4. ***Proposition.*** *Si Y est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini de $H^n(G,\mathbf{T})$, $H^n(G,\mathbf{T})/Y$ ne contient pas de sous-groupes non nuls p-divisibles. En particulier, $H^n(G,\mathbf{T})$ ne contient pas de sous-groupes divisibles non nuls.*

A.1.5. ***Corollaire.*** *Le $\mathbb{Z}_p$-module $H^n(G,\mathbf{T})$ est de type fini si et seulement si le $\mathbb{Z}_p$-module $H^n(G,\mathbf{T})/pH^n(G,\mathbf{T})$ est fini.*

Soit $V=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbf{T}$, c'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel et on a la suite exacte

$$0\to\mathbf{T}\to V\to V/\mathbf{T}\to 0\ .$$

A.1.6. ***Proposition.*** *Le noyau de*

$$H^{n-1}(G,V/\mathbf{T})\to H^n(G,\mathbf{T})$$

est le sous-groupe divisible maximal de $H^{n-1}(G,V/\mathbf{T})$.

Ainsi, si G est un groupe profini tel que $H^n(G,M)$ soit fini pour tout G-module fini et pour tout entier n, si $\mathbf{T}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini et $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T}$, alors pour tout entier n,

i) $H^n(G,\mathbf{T}) = \varprojlim_i H^n(G,\mathbf{T}/p^i\mathbf{T})$ et $H^n(G,\mathbf{T})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini ;

ii) $H^n(G,V) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^n(G,\mathbf{T})$.

Si de plus $\mathbf{T}$ n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion, on a la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^n(G,\mathbf{T}) \to H^n(G,V/\mathbf{T}) \to H^{n+1}(G,\mathbf{T})_{tor} \to 0$$

où $H^{n+1}(G,\mathbf{T})_{tor}$ est le sous-module de torsion de $H^{n+1}(G,\mathbf{T})$.

A.1.7. Par les résultats de théorie de classes local ou global, les conditions sur G sont vérifiées pour

i) $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K ([Se64]) : de plus $H^n(G,M) = 0$ pour $n > 2$ et M G-module topologique.

ii) $G = G_{S,F} = \mathrm{Gal}(\overline{F}_S/F)$ où F est un corps de nombres, S un ensemble fini de places contenant les places à l'infini et les places de F divisant p et $\overline{F}_S$ la plus grande extension de F non ramifiée en dehors de S, ceci par les théorèmes de Poitou-Tate (cf. par exemple [Mi86]).

Pour finir cette partie, donnons un lemme qui permet de déduire des résultats de caractéristique d'Euler-Poincaré de Tate (local et global) pour les modules finis les résultats similaires pour les représentations p-adiques. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

A.1.8. ***Lemme.*** *Soit* $\mathbf{T}$ *un* $\mathbb{Z}_p$*-module de type fini sans torsion et* $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{T}$. *Alors*

$$\sum_n (-1)^n dim_{\mathbb{Q}_p} H^n(G,V) = \sum_n (-1)^n dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G,\mathbf{T}/p\mathbf{T}) .$$

Démonstration. Comme $\dim_{\mathbb{Q}_p} H^n(G,V) = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} H^n(G,\mathbf{T})$, il s'agit de calculer

$$\sum_n (-1)^n rg_{\mathbb{Z}_p} H^n(G,\mathbf{T}) .$$

On remarque que si M est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, on a

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} M = dim_{\mathbb{F}_p} M/pM - dim_{\mathbb{F}_p} M_p$$

où M_p désigne l'ensemble des points de p-torsion de M. De la suite exacte

$$0 \to \mathbf{T} \to \mathbf{T} \to \mathbf{T}/p\mathbf{T} \to 0 \ ,$$

on déduit la suite exacte

$$0 \to H^n(G, \mathbf{T})/pH^n(G, \mathbf{T}) \to H^n(G, \mathbf{T}/p\mathbf{T}) \to H^{n+1}(G, \mathbf{T})_p \to 0 \ .$$

D'où,

$$\begin{aligned}\sum_n (-1)^n dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G,\mathbf{T}/p\mathbf{T}) \\ = \sum_n (-1)^n dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G, \mathbf{T})/pH^n(G, \mathbf{T}) \\ - \sum_n (-1)^n dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G, \mathbf{T})_p \ ,\end{aligned}$$

en remarquant que $H^0(G, \mathbf{T})_p$ est nul car $\mathbf{T}$ est sans torsion. $\square$

A.2. Théorie d'Iwasawa locale : premiers résultats.

A.2.1. On résume ici quelques résultats locaux sur certains modules d'Iwasawa. Les démonstrations se trouvent entre autres dans [P92], mais certains de ces résultats se retrouvent un peu partout dans la littérature sous des formes diverses. Les résultats plus précis et plus profonds dans le cas où K est une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et où V est une représentation p-adique cristalline sur K sont donnés dans le corps du texte (§1.2).

On suppose que K est un corps de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète v de corps résiduel fini k. On note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ où $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K. Soit K_∞/K la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, c'est-à-dire la $\mathbb{Z}_p$-extension contenue dans $K(\mu_{p^\infty}) \subset \overline{K}$. On pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_n = \Gamma^{p^n}$ et K_n est la sous-extension de K_∞/K fixée par Γ_n, $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ (la notation est donc différente du texte principal).

Soit V une représentation p-adique de G_K qui est de de Rham si v est une place divisant p et soit $\mathbf{T}$ un réseau de V stable par G_K.

Posons $Z^i_\infty(K,\mathbf{T}) = \varprojlim_n H^i(K_n,\mathbf{T})$ où la limite projective est prise relativement aux applications de corestriction. Pour $i = 0$ ou pour $i > 2$, $Z^i_\infty(K,\mathbf{T})$ est nul. On déduit de la suite exacte inflation-restriction et de ce que Γ est de dimension cohomologique 1 le lemme suivant :

A.2.2. ***Lemme.*** *On a la suite exacte :*

$$0 \to Z^1_\infty(K,\mathbf{T})_\Gamma \to H^1(K,\mathbf{T}) \to H^1(K_\infty/K,(V^*(1)/\mathbf{T}^*(1))^{G_{K_\infty}})^\wedge \to 0 .$$

Ici $M^\wedge$ désigne le dual de Pontryagin de M : $M^\wedge = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M,\mathbb{Z}_p)$, $M^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M,\mathbb{Z}_p(1))$. On déduit alors des théorèmes de dualité locale que

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} Z^1_\infty(K,\mathbf{T})_\Gamma = \begin{cases} [K:\mathbb{Q}_p]\dim_{\mathbb{Q}_p} V + \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(K,V) & \text{si } v \mid p \\ \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(K,V) & \text{si } v \nmid p. \end{cases}$$

A.2.3. ***Proposition.*** i) *A un groupe fini près, $Z^2_\infty(K,\mathbf{T})$ est isomorphe à $(\mathbf{T}^*(1)^{G_{K_\infty}})^*$. En particulier, c'est un Λ-module de torsion.*

ii) *Le Λ-module $Z^1_\infty(K,\mathbf{T})$ est un Λ-module de rang $[K:\mathbb{Q}_p]dim_{\mathbb{Q}_p}V$ si v divise p et de torsion si v ne divise pas p.*

iii) *Le sous-Λ-module de torsion de $Z^1_\infty(K,\mathbf{T})$ est isomorphe à $\mathbf{T}^{G_{K_\infty}}$.*

Plus précisément, on peut montrer que l'on obtient à partir de la dualité naturelle induite par limite projective convenable des cup-produits et de l'isomorphisme $H^2(K,\mathbb{Z}_p(1))\cong\mathbb{Z}_p$ un homomorphisme de Λ-modules

$$Z^1_\infty(K,\mathbf{T})\to \mathrm{Hom}_\Lambda(Z^1_\infty(K,\mathbf{T}^*(1))^\iota,\Lambda)$$

et que l'on a la suite exacte

$$0\to\mathbf{T}^{G_{K_\infty}}\to Z^1_\infty(K,\mathbf{T})\to \mathrm{Hom}_\Lambda(Z^1_\infty(K,\mathbf{T}^*(1))^\iota,\Lambda)\to S^\iota$$

où S est un groupe fini isomorphe au quotient de $H^0(K_\infty,V/\mathbf{T})$ par sa partie divisible maximale.

A.2.4. Supposons maintenant que v ne divise pas p. On déduit de ce qui précède que $Z^1_\infty(K,\mathbf{T})$ est isomorphe à $\mathbf{T}^{G_{K_\infty}}$. Rappelons que $H^1_f(K,V)$ est le noyau de l'application restriction

$$H^1(K,V)\to H^1(I_K,V)$$

où I_K est le sous-groupe d'inertie de G_K, que l'on a la suite exacte

$$0\to H^0(K,V)\to V^{I_K}\to V^{I_K}\to H^1_f(K,V)\to 0$$

et que $H^1_f(K,\mathbf{T})$ est par définition l'image réciproque de $H^1_f(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{T})$.

Remarquons que

$$\varprojlim_n H^1_f(K_n,\mathbf{T})=Z^1_\infty(K,\mathbf{T})=\mathbf{T}^{G_{K_\infty}}\ .$$

L'image de $Z^1_\infty(K,\mathbf{T})$ dans $H^1(K,\mathbf{T})$ est donc contenue dans $H^1_f(K,\mathbf{T})$. On déduit facilement du lemme A.2.2 que l'indice de $Z^1_\infty(K,\mathbf{T})_\Gamma$ dans $H^1_f(K,\mathbf{T})$ est fini et égal au nombre de Tamagawa $Tam^o_K(\mathbf{T})$.

Notons $H^1_f(K,\mathbf{T})^u$ le noyau de l'application restriction

$$H^1(K,\mathbf{T})\to H^1(I_K,\mathbf{T})\ .$$

Il est démontré dans [P92] que l'indice de $H^1_f(K_n,\mathbf{T})^u$ dans $H^1_f(K,\mathbf{T})$ est borné par rapport à n. Nous aurons aussi besoin du lemme suivant (lemme 2.2.3 de [P92]) :

A.2.5. ***Lemme.*** *Soit une extension de G_K-modules*

$$0 \to \mathbb{Z}_p(1) \to \mathbf{T}_x \to \mathbf{T} \to 0$$

dont la classe x appartient à $H^1_f(K, \mathbf{T}^*(1))^u$. Alors on a la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(K, \mathbb{Z}_p(1)) \to H^0(K, \mathbf{T}_x) \to H^0(K, \mathbf{T}) \to H^1_f(K, \mathbb{Z}_p(1)) \\ \to H^1_f(K, \mathbf{T}_x) \to H^1_f(K, \mathbf{T}) \to 0. \end{aligned}$$

A.2.6. Supposons ici que v divise p. En suivant [BK90], on définit $H^1_f(K, V)$ comme le noyau de l'application

$$H^1(K, V) \to H^1(K, B_{cris} \otimes V)$$

et $H^1_f(K, \mathbf{T})$ comme le noyau de l'application

$$H^1(K, \mathbf{T}) \to H^1(K, B_{cris} \otimes V) \ ,$$

c'est-à-dire encore comme l'image réciproque de $H^1_f(K, V)$ dans $H^1(K, \mathbf{T})$. On renvoie à [FP94] pour une théorie plus complète. Rappelons seulement que, si l'on pose $\mathbf{D}(V) = (B_{cris} \otimes V)^{G_K}$ (encore noté $\mathbf{D}_K(V)$ ou $\mathbf{D}_v(V)$), on déduit de la suite exacte de G_K-modules

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{cris} \to B_{cris} \oplus B_{dR}/\mathrm{Fil}^0 B_{dR} \to 0$$

où la seconde application est donnée par

$$b \mapsto ((1 - \varphi)b, b \mod \mathrm{Fil}^0 B_{dR}) \ ,$$

que l'on a la suite exacte fondamentale

$$0 \to H^0(K, V) \to D(V) \to D(V) \oplus t_V(K) \to H^1_f(K, V) \to 0$$

où

$$t_V(K) = ((B_{dR}/\mathrm{Fil}^0 B_{dR}) \otimes V)^{G_K} \ ;$$

ce dernier K-espace vectoriel est aussi égal à $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}(V)/\mathrm{Fil}^0(K \otimes_{K_0} \mathbf{D}(V))$ lorsque V est cristalline et K_0 la plus grande extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K. L'application

$$\mathbf{D}(V) \oplus t_V(K) \to H^1_f(K, V)$$

est l'exponentielle de Bloch-Kato ($\exp_{V,K}$). On parlera aussi de l'exponentielle de Bloch-Kato pour les applications qui s'en déduisent

$$t_V(K) \to H^1_f(K, V)$$

et

$$K \otimes_{K_0} \mathbf{D}(V) \to t_V(K) \to H^1_f(K, V) \ .$$

Dès que 1 n'est pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_p(V)$, l'application

$$t_V(K) \to H^1_f(K,V)$$

est un isomorphisme. On appelle logarithme de V ($\log_{V,K}$) son application inverse.

Rappelons enfin que, dans l'accouplement induit par le cup produit

$$H^1(K,V) \times H^1(K,V^*(1))$$

et si V est une représentation de de Rham, l'orthogonal de $H^1_f(K,V)$ est $H^1_f(K,V^*(1))$ (cela est vrai que v divise ou non p). L'application duale de $\exp_{V,K}$ est notée $\lambda_{V,K}$. C'est une application de $H^1(K,V)$ dans $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}(V)$ qui s'annule sur $H^1_f(K,V)$.

A.3. Suites exactes de Poitou-Tate.

A.3.1. On désire donner ici un aperçu de différentes variantes de la suite exacte de Poitou-Tate.

Soient F un corps de nombres, S un ensemble fini de places contenant les places au dessus de p et les places à l'infini, $G_{S,F}$ le groupe de Galois de la plus grande extension de F non ramifiée en dehors de S. Soit V une représentation p-adique pseudo-géométrique de $G_{S,F}$ (c'est-à-dire de de Rham aux places divisant p) et $\mathbf{T}$ un réseau de V stable par $G_{S,F}$. Alors la suite exacte de Poitou-Tate est la suite exacte :

$$\begin{aligned} H^1(G_{S,F},\mathbf{T}^*(1)) &\to \oplus_{v\in S_f} H^1(F_v,\mathbf{T}^*(1)) \to H^1(G_{S,F},V/\mathbf{T})\hat{} \\ &\to H^2(G_{S,F},\mathbf{T}^*(1)) \to \oplus_{v\in S_f} H^2(F_v,\mathbf{T}^*(1)) \to H^0(F,V/\mathbf{T})\hat{} \to 0 \end{aligned}$$

Pour la définition des flèches, on renvoie par exemple à [Mi86] ou à [FP94], §1.2.

Pour chaque place v de S_f, supposons donné un sous-$\mathbb{Z}_p$-module A_v de $H^1(F_v,\mathbf{T}^*(1))$ et notons B_v son orthogonal dans $H^1(F_v,V/\mathbf{T})$. Notons ici

$$H^1_A(F,\mathbf{T}^*(1))$$

(resp.

$$H^1_B(F,V/\mathbf{T})\ )$$

l'ensemble des éléments de $H^1(G_{S,F},\mathbf{T}^*(1))$ (resp. de $H^1(G_{S,F},V/\mathbf{T})$) dont la restriction à $H^1(F_v,\mathbf{T}^*(1))$ appartient à A_v (resp. à B_v).

A.3.2. ***Proposition***. *On a les suites exactes*

$$\begin{aligned} 0 \to & H^1_A(F,\mathbf{T}^*(1)) \to H^1(G_{S,F},\mathbf{T}^*(1)) \to \oplus_{v\in S_f} H^1(F_v,\mathbf{T}^*(1))/A_v \\ &\to H^1_B(F,V/\mathbf{T})\hat{} \to H^2(G_{S,F},\mathbf{T}^*(1)) \to \oplus_{v\in S_f} H^2(F_v,\mathbf{T}^*(1)) \\ &\to H^0(F,V/\mathbf{T})\hat{} \to 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \to & H^1_B(F,V/\mathbf{T}) \to H^1(G_{S,F},V/\mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S_f} H^1(F_v,V/\mathbf{T})/B_v \\ &\to H^1_A(F,\mathbf{T}^*(1))\hat{} \to H^2(G_{S,F},V/\mathbf{T}) \\ &\to \oplus_{v\in S_f}\ H^2(F_v,V/\mathbf{T}) \to H^0(F,\mathbf{T}^*(1))\hat{} \to 0\ . \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\mathbf{T}' = \mathbf{T}^*(1)$. En partant de la suite exacte de Poitou-Tate, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \bigoplus_{v\in S_f} A_v & \cong & \bigoplus_{v\in S_f} (H^1(F_v, V/\mathbf{T})/B_v)\hat{} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(G_{S,F}, \mathbf{T}') & \to & \bigoplus_{v\in S_f} H^1(F_v, \mathbf{T}') & \to & H^1(G_{S,F}, V/\mathbf{T})\hat{} & \to & H^2(G_{S,F}, \mathbf{T}') \\
\downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
H^1(G_{S,F}, \mathbf{T}') & \to & \bigoplus_{v\in S_f} H^1(F_v, \mathbf{T}')/A_v & \to & H^1_B(F, V/\mathbf{T})\hat{} & \to & H^2(G_{S,F}, \mathbf{T}')
\end{array}$$

dans lequel la deuxième ligne et les colonnes sont exactes. On en déduit la première suite exacte. La deuxième suite exacte se démontre de manière analogue. □

Notons $H^1_A(F, V^*(1))$ (resp. $H^1_B(F, V)$) le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des éléments de $H^1(G_{S,F}, V^*(1))$ (resp. de $H^1(G_{S,F}, V)$) dont la restriction à $H^1(F_v, V^*(1))$ appartient à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_v$ (resp. à l'orthogonal de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_v$ dans $H^1(F_v, V)$) pour toute place v de S_f. En tensorisant par $\mathbb{Q}_p$ et en utilisant l'appendice A.1, on obtient le corollaire suivant :

A.3.3. ***Proposition.*** *On a la suite exacte*

$$\begin{aligned}
0 &\to H^1_A(F, V^*(1)) \to H^1(G_{S,F}, V^*(1)) \to \oplus_{v\in S_f} H^1(F_v, V^*(1))/\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_v \\
&\to H^1_B(F, V)^* \to H^2(G_{S,F}, V^*(1)) \to \oplus_{v\in S_f} H^2(F_v, V^*(1)) \to H^0(F, V)^* \to 0 .
\end{aligned}$$

A.3.4. On note $H^1_f(F, V)$ le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $H^1(F, V)$ formé des éléments dont l'image par localisation en v est dans $H^1_f(F_v, V)$ pour toute place v de F ; on note $H^1_f(F, \mathbf{T})$ l'image réciproque de $H^1_f(F, V)$ dans $H^1(F, \mathbf{T})$ (cf. [FP91], [FP94], [Ne93], [P92]).

Si l'on prend pour toute place v de S_f, $A_v = H^1_f(F_v, \mathbf{T}^*(1))$, on a

$$B_v = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1_f(F_v, \mathbf{T})$$

et

$$H^1_A(F, \mathbf{T}^*(1)) = H^1_f(F, \mathbf{T}^*(1)) .$$

On pose alors $H^1_f(F, V/\mathbf{T}) = H^1_B(F, V/\mathbf{T})$.

Par exemple, la proposition A.3.3 fournit la suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^1_f(F, V^*(1)) \longrightarrow H^1(G_{S,F}, V^*(1))\\ \longrightarrow \oplus_{v\in S_f} H^1(F_v, V^*(1))/H^1_f(F_v, V^*(1)) \longrightarrow H^1_f(F,V)^* \longrightarrow H^2(G_{S,F}, V^*(1))\\ \longrightarrow \oplus_{v\in S_f} H^2(F_v, V^*(1)) \longrightarrow H^0(F,V)^* \longrightarrow 0\ .\end{aligned}$$

Nous utilisons dans ce texte les propositions A.3.2 et A.3.3 pour d'autres choix de A_v.

A.4. Théorie d'Iwasawa et twists.

A.4.1. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{Q}_p$ et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Prenons ici $K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$, $G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $K_n = K(\mu_{p^{n+1}})$. Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension finie et $\mathbf{T}$ un réseau de V stable par G_K. On désire justifier ici l'existence d'un isomorphisme canonique de

$$\varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T} \otimes \mathbb{Z}_p(1)) \to \varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}) \otimes \mathbb{Z}_p(1)$$

où les limites projectives sont prises relativement aux applications de corestriction.

Considérons l'application

$$H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T}) \to H^1(K_n, \mathbf{T}/p^n\mathbf{T}) \to H^1(K_{n-1}, \mathbf{T}/p^n\mathbf{T})$$

composée de l'application induite par la projection $\mathbf{T}/p^n\mathbf{T} \to \mathbf{T}/p^{n-1}\mathbf{T}$ et par la corestriction.

A.4.2. ***Lemme.*** *Les applications naturelles*

$$H^1(K_n, \mathbf{T}) \to H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})$$

induisent par passage à la limite un isomorphisme

$$\varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}) \cong \varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T}) \ .$$

Démonstration. Partant de la suite exacte de G_{K_n}-modules

$$0 \to \mathbf{T} \to \mathbf{T} \to \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T} \to 0 \ ,$$

on obtient la suite exacte de cohomologie

$$H^1(K_n, \mathbf{T}) \to H^1(K_n, \mathbf{T}) \to H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T}) \to H^2(K_n, \mathbf{T})_{p^{n+1}} \ .$$

Ces modules étant compacts, la suite reste exacte après passage à la limite projective. L'application de transition

$$H^2(K_n, \mathbf{T})_{p^{n+1}} \to H^2(K_{n-1}, \mathbf{T})_{p^n}$$

est induite par la corestriction et par la multiplication par p. Comme les $H^2(K_n, \mathbf{T})_{p^\infty}$ sont finis, la limite projective des $H^2(K_n, \mathbf{T})_{p^{n+1}}$ relativement à $p\times$ la corestriction est nulle. De même, l'application de transition

$$H^1(K_n, \mathbf{T}) \to H^1(K_{n-1}, \mathbf{T})$$

(sur le premier facteur de la suite exacte) est induite par la corestriction et par la multiplication par p. Comme $H^1(K_n, \mathbf{T})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, on en déduit encore que cette limite projective est nulle. D'où l'isomorphisme

$$\varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}) \cong \varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T}) \ .$$

□

A.4.3. Comme G_{K_n} agit trivialement sur $\mu_{p^{n+1}} = \mathbb{Z}_p(1)/p^{n+1}\mathbb{Z}_p(1)$, on a un isomorphisme

$$\alpha_n : H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T}) \otimes \mu_{p^{n+1}} \cong H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T} \otimes \mu_{p^{n+1}}) \ .$$

On note d'autre part

$$\beta_n : H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T} \otimes \mu_{p^{n+1}}) \to H^1(K_{n-1}, \mathbf{T}/p^{n}\mathbf{T} \otimes \mu_{p^{n}})$$
$$\delta_n : H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T}) \to H^1(K_{n-1}, \mathbf{T}/p^{n}\mathbf{T})$$

les applications de transition de A.4.1. En remarquant que l'image de $\zeta \in \mu_{p^{n+1}}$ dans μ_{p^n} par la projection $\mathbb{Z}_p(1)/p^{n+1}\mathbb{Z}_p(1)$ dans $\mathbb{Z}_p(1)/p^{n}\mathbb{Z}_p(1)$ est ζ^p, on vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme. *On a*

$$\beta_n(\alpha_n(x \otimes \zeta)) = \alpha_{n-1}(\delta_n(x) \otimes \zeta^p)$$

pour $x \in H^1(K_n, \mathbf{T}/p^{n+1}\mathbf{T})$ *et* $\zeta \in \mu_{p^{n+1}}$.

En utilisant le lemme A.4.2, on obtient le résultat suivant :

A.4.4. ***Corollaire.*** *Les applications α_n induisent un isomorphisme*

$$\varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}) \otimes \mathbb{Z}_p(1) \cong \varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T} \otimes \mathbb{Z}_p(1)) \ .$$

Ainsi, si $\epsilon = (\zeta_n)$ est un générateur de $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^{n+1}}$, on peut définir un isomorphisme

$$Tw^{\epsilon} : \varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T}) \cong \varprojlim_n H^1(K_n, \mathbf{T} \otimes \mathbb{Z}_p(1))$$

noté aussi $x \mapsto x \otimes \epsilon$.

Appendice B. Conjecture de Leopoldt faible

B.1. Soient F un corps de nombres et V une représentation p-adique pseudo-géométrique de G_F. Soit S un ensemble de places contenant les places de ramification de V, les places au dessus de p et les places à l'infini. On note $G_{S,F}$ le groupe de Galois de la plus grande extension de F non ramifée en dehors de S. Soit $\mathbf{T}$ un réseau de V stable par G_F. Reprenons les notations du texte principal (cet appendice fait appel au §1.4 en particulier). Nous y avons fait les conjectures suivantes

$$\mathrm{Leop}(V) \qquad H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T}) = 0$$

et pour η un caractère de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$,

$$\mathrm{Leop}(V,\eta) \qquad H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})^{(\eta)} = 0$$

et donné d'autres formes équivalentes. Nous avons aussi vu que $\mathrm{Leop}(\mathbb{Q}_p)$ est démontré. Nous allons dans cet appendice faire le point sur d'autres cas où cette conjecture a été montrée. Les premiers résultats autre que le cas où $V = \mathbb{Q}_p(j)$ ont été démontrés par Greenberg et Schneider. Rappelons ces résultats.

B.2. *Proposition.* *Supposons que le μ-invariant de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique $F'(\mu_{p^\infty})/F'$ où $F' = F(p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T}, \mu_p)$ est nul. Alors, Leop(V) et Leop$(V^*(1))$ sont vraies.*

Démonstration. Remarquons que

$$F(p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T}, \mu_p) = F(p^{-1}\mathbf{T}^*(1)/\mathbf{T}^*(1), \mu_p) \ .$$

Il suffit donc de montrer l'une des deux. On remarque ensuite que si $\mathrm{Leop}(V)$ est vraie pour une extension finie L de F, elle l'est pour F : en effet, par la suite de Hochshild-Serre, comme $H^2(L_\infty/F_\infty, (V/\mathbf{T})^{G_{L_\infty}})$ est fini et que $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$ est divisible, la nullité de $H^2(G_{S,L_\infty}, V/\mathbf{T})$ implique celle de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$.

On peut donc supposer que $F' = F$. Montrons que

$$H^2(G_{S,F_\infty}, p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T}) = 0 .$$

Comme $p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T}$ est défini sur F, il suffit de montrer que $H^2(G_{S,F_\infty}, p^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = 0$. De la suite exacte

$$0 \to p^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0 ,$$

on déduit la suite exacte

$$H^1(G_{S,F_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)/p \to H^2(G_{S,F_\infty}, p^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \to H^2(G_{S,F_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_p .$$

Par Leop($\mathbb{Q}_p$), $H^2(G_{S,F_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$. D'autre part, le dual de Pontryagin du premier terme est le sous-$\mathbb{Z}_p$-module annulé par p du plus grand quotient abélien $(G_{S,F_\infty})^{ab}$ de G_{S,F_∞}. Le Λ-module $(G_{S,F_\infty})^{ab}$ n'a pas de sous-Λ-modules finis non nuls (comme le remarque Greenberg dans [Gr89], cela peut se déduire de la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, cf un peu plus loin dans le cas général). La nullité du μ-invariant implique alors que $(G_{S,F_\infty})^{ab}$ n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion ([Iw72]). Finalement, la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T})$ implique la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})_p$, car on a une surjection du premier sur le second, et donc celle de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$, ce qui termine la démonstration. □

En utilisant le théorème de Ferrero-Washington ([FW79]), on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire. (i) *Si $F(p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T})$ est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$, Leop(V) est vraie.*

(ii) [Sc85] *Soit E une courbe elliptique sur une extension abélienne F de $\mathbb{Q}$. On suppose que $E(F)$ contient un point d'ordre p. Alors, Leop($V_p(E)$) est vraie.*

Démonstration. Pour (ii), on remarque que si $E(F)$ contient un point non nul d'ordre p, l'existence de l'acouplement de Weil implique que

$$F(E_p) = F(p^{-1}T_p(E)/T_p(E)) = F(\mu_p) .$$

□

La démonstration montre qu'en fait les deux assertions suivantes sont équivalentes :

A) $H^2(G_{S,F_\infty}, p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T}) = 0$

B) Leop(V) est vraie et le μ-invariant du sous-Λ-module de torsion de $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ est nul.

En effet, la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, p^{-1}\mathbf{T}/\mathbf{T})$ est équivalente à la nullité de $H^2(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$ et de $H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})/pH^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})$. Le dual de Pontryagin du dernier groupe est le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ annulé par p. On remarque alors ([Gr89]) que Leop(V) implique que

$$H^1(\Gamma, H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T})) = H^2(G_{S,F}, V/\mathbf{T}) \ .$$

Comme ce dernier module est divisible car $G_{S,F}$ est de dimension cohomologique ≤ 2, le dual de Pontryagin de $H^1(\Gamma, H^1(G_{S,F_\infty}, V/\mathbf{T}))$ qui est isomorphe à $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))^\Gamma$ n'a pas de sous-$\mathbb{Z}_p$-module fini, ce qui est équivalent par des arguments classiques à ce que $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ n'a pas de sous-Λ-module finis. On en déduit l'équivalence de (A) et de (B).

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition. *Soit V' une représentation p-adique de $G_{S,F}$ et $\mathbf{T}'$ un réseau de V' stable par $G_{S,F}$. On suppose que Leop(V') est vraie et que le μ-invariant du sous-Λ-module de torsion de $X^1_{\infty,S}(\mathbf{T}'^*(1))$ est nul. Alors, si V est une représentation p-adique de $G_{S,F}$ et si V admet un réseau $\mathbf{T}$ stable par $G_{S,F}$ tel que les deux modules galoisiens $\mathbf{T}/p\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'/p\mathbf{T}'$ soient isomorphes, Leop(V) est vraie.*

On pourrait espérer appliquer cette proposition au cas où $V' = V_p(E)$ avec E courbe elliptique à multiplication complexe (cf. B.4). Lorsque E est ordinaire en p, il n'est pas difficile de voir que la nullité du μ-invariant du sous-Λ-module de torsion de $X^1_{\infty,S}(F, \mathbf{T}^*(1))$ est impliquée par celle du μ-invariant de la fonction L p-adique de Katz dans la direction cyclotomique. Malheureusement, cette nullité n'est pas prouvée en général. On ne peut donc donner que des applications numériques explicites.

B.3. Une autre manière d'aborder la conjecture Leop(V) se trouve dans le paragraphe 3.4 comme conséquence de non dégénérescence de formes bilinéaires (dans le cas des courbes elliptiques et des variétés abéliennes, voir [Sc85], [P84]).

B.4. ***Théorème.*** *Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau* *des entiers d'un corps quadratique imaginaire. On suppose que E a potentiellement réduction ordinaire en p ou que E a bonne réduction supersingulière en p et que $(K,p) \neq (\mathbb{Q}(\sqrt{-3}),3)$. Alors, $Leop(V_p(E),\mathbf{1}_\Delta)$ est vraie.*

Le cas de réduction ordinaire est dû à Rubin ([R88, theorem 4.4), le cas supersingulier est dû à Mc Cornell ([Mc]). Dans les deux cas, ils utilisent la conjecture principale à 2 variables démontrée par Rubin ([R88]).

B.5. Enfin, d'autres exemples sont fournis par la proposition très facile suivante, la difficulté étant ensuite de vérifier ses hypothèses !

Proposition. *Supposons que*
i) $H^0(F_v,V^*(1))=0$ *pour toute place v de S_p ;*
ii) *l'application $H^1_f(F,V^*(1)) \to \oplus_{v|p} H^1_f(F_v,V^*(1))$ est injective.*
Alors, $Leop(V,\mathbf{1}_\Delta)$ est vraie.

Démonstration. Pour toute extension L de F, notons $D(L)$ le noyau de

$$H^1(G_{S,L},V/\mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S_f-S_p} H^1(L_v,V/\mathbf{T})\ .$$

On a donc la suite exacte

$$0 \to D(F_\infty) \to H^1(G_{S,F_\infty},V/\mathbf{T}) \to \oplus_{v\in S_f-S_p} H^1(F_{\infty,v},V/\mathbf{T})$$

d'où en prenant le dual de Pontryagin et en posant $Y = D(F_\infty)\hat{}$, la suite exacte

$$Z^1_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T}^*(1)) \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1)) \to Y \to 0\ .$$

Ainsi, les Λ-modules $X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))$ et $Y = D(F_\infty)\hat{}$ sont de même rang. Rappelons que le Λ_+-rang de $X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_+$ est supérieur à $d_-(V)$. Pour montrer que Leop$(V,\mathbf{1}_\Delta)$ est vraie, il suffit de montrer que Y_{G_∞} est de $\mathbb{Z}_p$-rang $\leq d_-(V)$. En prenant les G_∞-coinvariants, on obtient la suite exacte

$$Z^1_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T}^*(1))_{G_\infty} \to X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_{G_\infty} \to Y_{G_\infty} \to 0\ .$$

Comme $\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_{\infty,S-S_p}(F,\mathbf{T}^*(1))_{G_\infty} \cong \oplus_{v\in S_f-S_p} H^1_f(F_v,V^*(1))$ et que

$$\mathbb{Q}_p \otimes X^1_{\infty,S}(F,\mathbf{T}^*(1))_{G_\infty} \cong \mathbb{Q}_p \otimes H^1(G_{S,F},V/\mathbf{T})\hat{} = H^1(G_{S,F},V)^*$$

car $H^0(F,V^*(1))=0$, le dual de $\mathbb{Q}_p \otimes Y_{G_\infty}$ est isomorphe au noyau de l'application

$$H^1(G_{S,F},V) \to \oplus_{v\in S_f-S_p} H^1(F_v,V)/H^1_f(F_v,V)\ .$$

Par la proposition A.3.3 (en remplaçant V par $V^*(1)$ et en prenant $\mathbb{Q}_p \otimes A_v = H^1_f(F_v, V)$ pour $v \in S_f - S_p$ et $\mathbb{Q}_p \otimes A_v = H^1(F_v, V)$ pour $v \in S_p$), le conoyau de cet homomorphisme est isomorphe au noyau de $H^1_f(F, V^*(1)) \to \oplus_{v|p} H^1_f(F_v, V^*(1))$ et est donc nul par hypothèse. D'autre part, pour $v \in S_f - S_p$, on a

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(F_v, V)/H^1_f(F_v, V) &= dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(F_v, V^*(1)) \\ &= dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(F_v, V^*(1)) = dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(F_v, V) \ . \end{aligned}$$

Donc, le $\mathbb{Z}_p$-rang de Y_{G_∞} est égal à $dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(G_{S,F}, V) - \sum_{v \in S_f - S_p} dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(F_v, V)$. D'autre part, l'hypothèse (ii) implique que le noyau de

$$H^2(G_{S,F}, V) \to \oplus_{v \in S_f} H^2(F_v, V)$$

est nul. Comme cette application est surjective (car $H^0(F, V^*(1)) = 0$ et que l'on a supposé que $H^2(F_v, V) = 0$ pour $v \in S_p$), on en déduit que

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(G_{S,F}, V) = \sum_{v \in S_f - S_p} H^2(F_v, V) \ .$$

Par la formule de caractéristique de Tate, on obtient donc

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(G_{S,F}, V) - \sum_{v \in S_f - S_p} dim_{\mathbb{Q}_p} H^2(F_v, V) = d_-(V)$$

et le $\mathbb{Z}_p$-rang de Y_{G_∞} est égal à $d_-(V)$, ce qui termine la démonstration. □

B.6. Corollaire. *(Coates-McConnell) Soit E une courbe elliptique modulaire définie sur $\mathbb{Q}$. On suppose que la fonction $L(E, s)$ a un zéro en $s = 1$ de multiplicité inférieure ou égale à 1. Alors, $Leop(V_p(E), \mathbf{1}_\Delta)$ est vraie.*

Démonstration. Par un théorème de Kolyvagin, le groupe de Shafarevich-Tate de $E/\mathbb{Q}$ est fini ; $H^1_f(F, V_p(E)^*(1))$ est égal à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})$ et s'injecte dans $H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_p(E)^*(1))$ (l'image d'un point de $E(\mathbb{Q})$ par localisation est nulle si et seulement le point est de torsion). Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de p^∞-torsion de E définis sur $\mathbb{Q}_p$, les hypothèses de la proposition précédente sont vérifiées. D'où le corollaire. □

B.7. Regardons maintenant le carré symétrique $Sym^2(V_p(E))$ de la représentation p-adique $V_p(E)$ associée à E. Cette représentation ne change pas lorsque l'on tord E et $V_p(E)$ par un caractère quadratique. Nous supposons que la courbe elliptique E (et donc la représentation p-adique $V_p(E)$) est choisi de conducteur minimal parmi ses tordues par un caractère quadratique. On a le corollaire suivant de la proposition B.5 et plus fondamentalement des résultats de [Fl92] :

Proposition. *Si E a bonne réduction en p et si l'homomorphisme $G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ donné par l'action sur les points de p-torsion est surjectif, Leop$(Sym^2(V_p(E))(-1), \mathbf{1}_\Delta)$ et Leop$(Sym^2(V_p(E)), \mathbf{1}_\Delta)$ sont vraies.*

Remarques : (i) Les hypothèses du corollaire devraient pouvoir être affaiblies. Nous avons ici repris sans les modifier les hypothèses faites dans [Fl92].

(ii) Ainsi, Leop$(Sym^2(V_p(E))(j), \omega^{j-1})$ et Leop$(Sym^2(V_p(E))(j), \omega^j)$ sont vraies pour tout entier j.

Démonstration. L'isomorphisme $V_p(E) \cong V_p(E)^*(1)$ implique que $Sym^2(V_p(E))^*(1)$ et $Sym^2(V_p(E))(-1)$ sont isomorphes ainsi que $Sym^2(V_p(E))^*(2)$ et $Sym^2(V_p(E))$. Les résultats très profonds de Flach disent que sous les hypothèses faites,

$$H^1_f(F, Sym^2(V_p(E)) = H^1_f(F, Sym^2(V_p(E)(-1)) = 0 .$$

Il suffit donc de montrer que $H^0(\mathbb{Q}_p, Sym^2(V_p(E)))$ et $H^0(\mathbb{Q}_p, Sym^2(V_p(E))(-1))$ sont nuls pour que les hypothèses de la proposition B.5 soient vérifiées. Les valeurs propres de φ sur le φ-module associé à $Sym^2(V_p(E))$ en p ne sont pas égales à 1. D'autre part, comme $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V_p(E))$ ne coïncide pas avec un espace propre pour φ, un petit calcul montre que l'intersection de $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(Sym^2(V_p(E))(-1))$ et de $\mathbf{D}_p(Sym^2(V_p(E))(-1))^{\varphi=1}$ est réduite à 0. □

B.8. ***Proposition.*** *Soit V une représentation géométrique de $G_{S,\mathbb{Q}}$ et $L(V,s)$ la fonction L complexe associée à V. On suppose qu'il existe un entier j tel que*

(i) $V^*(1-j)^{G_{\mathbb{Q}_p}} = 0$,

(ii) *$L(V,s)$ est définie autour de j et $L(V,j)$ est définie et non nulle,*

(iii) *la conjecture $C_{ord}(S_\infty(F), V)$ de* [FP91, II, 3.4.5] *sur l'ordre du zéro de $L(V,s)$ est vraie en j.*

Alors, Leop$(V(j'), \omega^{j-j'})$ est vraie pour tout entier j'.

La conjecture $C_{ord}(S_\infty(F), V)$ est une variante des conjectures de Bloch-Kato ; elle dit que l'ordre du zéro de $L(V,s)$ en $s = j$ est égal à

$$dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1-j) - dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(\mathbb{Q}, V^*(1-j)) .$$

Sous les autres hypothèses faites, elle implique donc que $H^1_f(\mathbb{Q}, V(j)^*(1)) = 0$ et on peut appliquer la proposition B.5.

Remarque : Pour j assez grand et V réalisation p-adique d'un motif, les hypothèses (i) et (ii) sont vraies. Les conjectures généralisées de Bloch-Kato sur l'ordre des zéros des fonctions L impliquent donc la conjecture $\mathrm{Leop}(V)$, ce qui est assez rassurant.

APPENDICE C. NOMBRES DE TAMAGAWA LOCAUX ET CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ. APPLICATION À L'ÉQUATION FONCTIONNELLE.

Résumé. Si K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et si V une repésentation p-adique potentiellement semi-stable de G_K, on énonce une conjecture sur le quotient des nombres de Tamagawa de V et de son dual tordu $V^*(1)$. On donne une application à la compatibilité des conjectures de Bloch-Kato généralisées avec l'équation fonctionnelle pour une structure motivique M sur un corps de nombres (cf. [FP91, II], [FP94]). Bien que les notations soient en général compatibles avec le reste du texte, cet appendice a été rédigé de manière indépendante. Remarquons en particulier que nous ne supposons plus V cristalline. Faisant suite à [FP91] et [FP94], il s'agit d'un travail en collaboration avec J.-M. Fontaine.

C.1. Facteurs locaux et facteurs ϵ : le cas non archimédien.

C.1.1. Dans ce paragraphe, p est un nombre premier, K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, q le cardinal du corps résiduel k de K, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, $I_K \subset G_K$ le sous-groupe d'inertie, $f_k \in G_K/I_K$ l'homomorphisme de Frobenius géométrique. Pour tout $g \in G_K$, il existe un unique $n(g) \in \hat{\mathbb{Z}}$ tel que l'image de g dans G_K/I_K est de la forme $f_k^{n(g)}$. On note W_K le groupe de Weil de K (qui est donc le sous-groupe de G_K formé des g tels que $n(g) \in \mathbb{Z}$). Enfin, F est un corps de caractéristique 0. Choisissons un homomorphisme non trivial $\psi : K \longrightarrow F^\times$ dont le noyau contient une puissance de l'idéal maximal de l'anneau des entiers de K et une mesure de Haar μ sur le groupe additif K à valeurs dans F. Rappelons ([De73a, §4] qu'à toute représentation linéaire de dimension finie ρ de W_K à coefficients dans F, on peut associer un entier $a(\rho)$, son conducteur d'Artin, et un élément non nul $\epsilon(\rho, \psi, \mu) \in F^\times$, son facteur ϵ.

C.1.2. On note W'_K le groupe de Weil-Deligne de K et $Rep_F(W'_K)$ la catégorie des représentations linéaires de dimension finie sur F de W'_K. Rappelons ([De73a, 8.4.1)] qu'un objet de $Rep_F(W'_K)$ est un triplet (D, ρ, N) formé d'un F-espace vectoriel D de dimension finie, d'un homomorphisme

$$\rho : W_K \longrightarrow Aut_F(D)$$

dont le noyau contient un sous-groupe ouvert de I_K et d'un endomorphisme

$$N : D \longrightarrow D$$

tel que $N\rho(w) = q^{n(g)}\rho(w)N$ pour tout $w \in W_K$. Le conducteur $a(D)$ de la représentation est l'entier $a(D) = a(\rho) + dim_F D^{I_K} - dim_F(D^{I_K})^{N=0}$, son "polynôme caractéristique de Frobenius" est

$$P(D,t) = \det(1 - f_k|(D^{I_K})^{N=0}) ,$$

tandis que son facteur ϵ est

$$\epsilon(D, \psi, \mu) = \epsilon(\rho, \psi, \mu)\det(-f_k|D^{I_K}/(D^{I_K})^{N=0}) .$$

C.1.3. Soit l un nombre premier différent de p. Le choix d'une base de $\mathbb{Q}_l(1)$ permet de munir toute représentation l-adique V de G_K d'une action de W'_K ([De73a, §8]). La classe d'isomorphisme de la représentation du groupe de Weil-Deligne ainsi obtenue ne dépend pas du choix de la base de $\mathbb{Q}_l(1)$ et, par conséquent, $a(V)$, $P(V,t)$ et $\epsilon(V, \psi, \mu)$ non plus.

C.1.4. A toute représentation p-adique de G_K, on associe une représentation de W'_K. Nous renvoyons à [Bu] pour la définition de l'anneau B_{st} relatif à $\overline{K}/K$. Pour toute représentation p-adique V de G_K, on pose

$$\mathbf{D}_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} ,$$
$$\mathbf{D}_{pst}(V) = \varinjlim (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$$

pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$. Si K_o^{nr} est la plus grande extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{K}$, on a toujours $dim_{K_o^{nr}} \mathbf{D}_{pst}(V) \leq dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$; V est potentiellement semi-stable ou pst si l'on a l'égalité. On associe alors à V une représentation ρ_V de W'_K sur K_o^{nr} de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ (avec égalité si V est pst) : le K_o^{nr}-module sous-jacent est $\mathbf{D}_{pst}(V)$; si $w \in W_K$, $\rho_V(w)$ est donné par l'action de $w\varphi^{h\nu(w)}$ sur $\mathbf{D}_{pst}(V)$ où $f_k^{\nu(w)}$ est l'image de w dans G_k ; l'opérateur N est l'opérateur donné. On pose alors $a(V) = a(\mathbf{D}_{pst}(V))$, $P(V,t) = P(\mathbf{D}_{pst}(V),t)$, $L(V,s) = P(V,q^{-s})^{-1}$ et $\epsilon(V,\psi,\mu) = \epsilon(\mathbf{D}_{pst}(V),\psi,\mu)$. On vérifie facilement que $P(V,t) \in \mathbb{Q}_p[t]$.

C.2. Caractéristique d'Euler-Poincaré locale.

C.2.1. Dans ce paragraphe, K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (comme en C.1.1) et V est une repésentation l-adique de G_K qui est pst lorsque $l = p$. On reprend les notations de [FP91, I]. On pose $\mathbf{D}_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ lorsque $l = p$ et 0 sinon et

$$t_V = \begin{cases} (B_{dR}/B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} & \text{lorsque } l = p \\ 0 & \text{lorsque } l \neq p \ . \end{cases}$$

Posons

$$\Delta_{EP,K}(V) = \otimes_{0 \leq i \leq 2} (\det_{\mathbb{Q}_l} H^i(K, V))^{(-1)^i} \ ,$$

$$\tilde{\Delta}_{EP,K}(V) = \otimes_{0 \leq i \leq 2} (\det_{\mathbb{Q}_l} H^i(K, V))^{(-1)^i} \otimes \det_{\mathbb{Q}_l}(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_p} V)$$

où $\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_l} V$ est la représentation induite de V de G_K à $G_{\mathbb{Q}_l}$.

C.2.2. ***Lemme***. *Le $\mathbb{Z}_l$-sous-module*

$$\otimes_{0 \leq i \leq 2} (\det_{\mathbb{Z}_l} H^i(K, \mathbf{T}))^{(-1)^i} \otimes \det_{\mathbb{Q}_l}(Ind_{K/\mathbb{Q}_l} \mathbf{T})$$

de $\tilde{\Delta}_{EP,K}(V)$ ne dépend pas du choix de la représentation $\mathbb{Z}_l$-adique $\mathbf{T}$ de G_K telle que $\mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbf{T} = V$.

Démonstration. Si $\mathbf{T}$ est un $\mathbb{Z}_l$-module fini, on a

$$(\det_{\mathbb{Z}_l} \mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_l} \mathbf{T}) = |\sharp \mathbf{T}|_l^{-[K:\mathbb{Q}_p]} \mathbb{Z}_l \ ;$$

Les calculs de caractéristique d'Euler-Poincaré (cf [Mi86], chap. I) impliquent que

$$\otimes_{0 \leq i \leq 2} (\det_{\mathbb{Z}_l} H^i(K, \mathbf{T}))^{(-1)^i} = |\sharp \mathbf{T}|_l^{-[K:\mathbb{Q}_p]} \mathbb{Z}_l \ .$$

On en déduit que

$$\otimes_{0 \leq i \leq 2} (\det_{\mathbb{Z}_l} H^i(K, \mathbf{T}))^{(-1)^i} \otimes \det_{\mathbb{Z}_l}(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_l} \mathbf{T}) = \mathbb{Z}_l \ .$$

Le cas général s'en déduit. □

C.2.3. Posons $\mathbf{D}(V) = \mathbf{D}_{st}(V)^{I_K}$. On a donc

$$\mathbf{D}(V) = \begin{cases} (\mathbf{D}_{pst}(V)^{I_K})^{N=0} & \text{lorsque } l \neq p \\ (B_{cris} \otimes V)^{G_K} & \text{lorsque } l = p \end{cases}$$
$$= \mathbf{D}_f(V)$$

avec les notations de [FP94]. On déduit des suites exactes sf(V) et sf($V^*(1)$) de [FP91, I] la suite exacte de $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels :

$(s_K(V))$

$$0 \longrightarrow H^0(K,V) \longrightarrow \mathbf{D}(V) \xrightarrow{(1-\varphi,\lambda_V)} \mathbf{D}(V) \oplus t_V \longrightarrow H^1(K,V)$$

$$\longrightarrow \mathbf{D}(V^*(1))^* \oplus (t_{V^*(1)})^* \xrightarrow{(1-{}^t\varphi^{-1},{}^t\lambda_V^*(1))} \mathbf{D}(V^*(1))^* \longrightarrow H^2(K,V) \longrightarrow 0$$

où λ_V et $\lambda_V^*(1)$ sont les projections naturelles, où l'application

$$H^1(K,V) \to D(V^*(1))^* \oplus (t_{V^*(1)})^*$$

est obtenue comme composé de

$$H^1(K,V) \to H^1(K,V)/H^1_f(K,V) \ ,$$

de l'isomorphisme

$$H^1(K,V)/H^1_f(K,V)) \cong H^1_f(K,V^*(1))^*$$

et de la transposée de l'application

$$\mathbf{D}(V^*(1)) \oplus t_{V^*(1)} \to H^1_f(K,V^*(1)) \ .$$

La suite exacte

$$0 \to (t_{V^*(1)})^* \to \mathbf{D}_{dR}(V) \to t_V \to 0$$

permettant d'identifier $\det_{\mathbb{Q}_l}(\mathbf{D}_{dR}(V))$ et $\det_{\mathbb{Q}_l}(t_V) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_l} t_{V^*(1)})^{-1}$, la suite exacte $s_K(V)$ définit (au signe près) des isomorphismes de $\mathbb{Q}_l$-droites

$$e_V : (\det_{\mathbb{Q}_l}\mathbf{D}_{dR}(V))^{-1} \cong \Delta_{EP,K}(V) \ ,$$

$$\tilde{e}_V : \Delta_K(V) \cong \tilde{\Delta}_{EP,K}(V)$$

avec

$$\Delta_K(V) = \det_{\mathbb{Q}_l}(\mathbf{D}_{dR}(V))^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}_l}(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_l}V) \ .$$

C.2.4. Notons

$$\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V) = \tilde{e}_V^{-1}(\otimes_{0\leq i\leq 2}(\det_{\mathbb{Z}_l}H^i(K,\mathbf{T}))^{(-1)^i} \otimes \det_{\mathbb{Q}_l}(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_l}\mathbf{T})) \ .$$

C'est un sous-$\mathbb{Z}_l$-module de $\Delta_K(V)$ de rang 1. Lorsque $l \neq p$, $\Delta_K(V)$ est canoniquement $\mathbb{Q}_l$ et $\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V)$ est $\mathbb{Z}_l$. Dans la suite de C.2, on formule une conjecture calculant $\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V)$ pour $l = p$.

C.2.5. Soit $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ une suite exacte de représentations l-adiques. On a alors un isomorphisme canonique

$$\Delta_K(V') \otimes \Delta_K(V'') \cong \Delta_K(V) .$$

Lemme. *On a*

$$\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V') \otimes \Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V'') \cong \Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V) .$$

Le lemme se déduit de la suite exacte de cohomologie des $H^i(K,-)$, de la suite exacte ([FP94], preuve de 2.1.3, V est suposé pst)

(C.2.1)
$$0 \to \mathbf{D}(V') \to \mathbf{D}(V) \to \mathbf{D}(V'') \to \mathbf{D}(V'^*(1))^* \to \mathbf{D}(V^*(1)) \to \mathbf{D}(V''^*(1))^* \to 0$$

et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(V'') & \xrightarrow{1-\varphi} & \mathbf{D}(V'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{D}(V'^*(1))^* & \xrightarrow{1-{}^t\varphi^{-1}} & \mathbf{D}(V'^*(1))^* \end{array}$$

C.2.6. Faisons le lien entre $\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V)$ et les nombres $Tam^o_\omega(\mathbf{T})$ (nombres de Tamagawa) définis pour $\omega \in \det_{\mathbb{Q}_p} t_V$ dans [FP91, I, §4].

Proposition. *Soient* $\mathbf{T}$ *un réseau de* V *et* $\omega_\mathbf{T}$ *une base du sous-*$\mathbb{Z}_l$*-module* $\det_{\mathbb{Z}_l}(Ind_{K/\mathbb{Q}_p}\mathbf{T})$ *de* $\det_{\mathbb{Q}_l}(Ind_{K/\mathbb{Q}_p}V)$*. Soit* $\omega \in \det_{\mathbb{Q}_l}\Delta_K(V)$*, non nul ; écrivons*

$$\omega = \omega_2 \otimes \omega_1^{-1} \otimes \omega_\mathbf{T}$$

avec $\omega_1 \in \det_{\mathbb{Q}_l} t_V$ *et* $\omega_2 \in \det_{\mathbb{Q}_l} t_{V^*(1)}$*. Alors,*

$$\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_l}(V) = \mathbb{Z}_l \det(-f_K | D(V^*(1))) \frac{Tam^0_{\omega_1}(\mathbf{T})}{Tam^0_{\omega_2}(\mathbf{T}^*(1))} \omega .$$

Démonstration. $\mathbb{Z}_l Tam^0_{\omega_1}(\mathbf{T})\omega^{-1}$ est l'image de

$$\det_{\mathbb{Q}_l} H^0(K,\mathbf{T}) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_l} H^1_f(K,\mathbf{T}))^{-1}$$

dans $(\det_{\mathbb{Q}_l} t_V)^{-1}$ par l'application qui se déduit de la suite exacte

$$0 \to H^0(K,V) \to \mathbf{D}(V) \xrightarrow{(1-\varphi,\lambda_V)} \mathbf{D}(V) \oplus t_V \to H^1_f(K,V) \to 0$$

et de même pour $V^*(1)$. La proposition se déduit alors de l'égalité

$$1 -^t \varphi^{-1} = -^t\varphi^{-1}\ ^t(1-\varphi)\ .$$

□

C.2.7. On suppose dans la suite de C.2 que $l = p$. L'isomorphisme de comparaison

$$B_{dR} \otimes_K \mathbf{D}_{dR}(V) = B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

donne une injection $\mathbb{Q}_p$-linéaire canonique

$$\xi_V : \Delta_K(V) \to \overline{K} t^{t_H(V)} \subset B_{dR}$$

pour un entier $t_H(V)$ convenable et t un générateur (additif) de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans B_{cris}. On pose $\tilde{\xi}_V = t^{-t_H(V)}\xi_V$.

Soit $\psi_o = \psi_{o,\mathbb{Q}_p}$ le cararatère de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ défini par

$$\psi_o(x) = exp(-2i\pi\tau_p(x))$$

où $\tau_p(x)$ est un rationnel congru à x modulo $\mathbb{Z}_p$ et posons $\psi_{o,K} = \psi_o \circ Tr_{K/\mathbb{Q}_p}$. On note $\mu_{o,K}$ la mesure de Haar de K telle que $\mu_{o,K}(\mathcal{O}_K) = 1$. On pose $\mu_o = \mu_{o,\mathbb{Q}_p}$. Soit d_K le discriminant de K sur $\mathbb{Q}_p$.

C.2.8. ***Lemme***. *Si* $\omega \in \Delta_K(V)$,

$$\frac{\tilde{\xi}_V(\omega)}{|d_K|^{dim(V)/2}\epsilon(V,\psi_{o,K},\mu_{o,K})} \in \mathbb{Q}_p^{nr}\ .$$

En particulier, sa valeur absolue $\eta_V(\omega)$ *appartient à* $p^{\mathbb{Z}}$.

Démonstration. On commence par vérifier la formule classique

$$|d_K|^{dim(V)/2}\epsilon(V,\psi_{o,K},\mu_{o,K})/\epsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_p}(V),\psi_o,\mu_o) \in \pm p^{\mathbb{Z}}\ :$$

pour les représentations du groupe de Weil, le terme de gauche est égal à ± 1 (on peut par exemple utiliser les formules 5.6.2 et 5.7.1 de [De73a]), le cas général s'en déduit. Les $\mathbb{Q}_p$-droites $\Delta_K(V)$ et $\Delta_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_p}(V))$ sont naturellement isomorphes, $t_H(\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_p}(V)) = t_H(V)$ et les applications $\tilde{\xi}_V$ et $\tilde{\xi}_{\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}_p}(V)}$ s'identifient. On est alors ramené à démontrer le lemme pour V représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$, ce que l'on suppose maintenant. Ecrivons $\det_{\mathbb{Q}_p}(V) = \mathbb{Q}_p(t_H(V))(\alpha)$ où α est un caractère de $G_{\mathbb{Q}_p}$ trivial sur un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie ; si $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ et $\omega \in \Delta_K(V)$, on a

$$g(t^{-t_H(V)}\xi_V(\omega))/t^{-t_H(V)}\xi_V(\omega) = \alpha(g) .$$

D'autre part, si $g \in G_{\mathbb{Q}_p^{nr}}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{g(\epsilon(V,\psi,\mu))}{\epsilon(V,\psi_o,\mu_o)} =& \frac{g(\epsilon(\mathbf{D}_{pst}(V),\psi_o,\mu_o))}{\epsilon(\mathbf{D}_{pst}(V),\psi_o,\mu_o)} \\ =& \frac{\epsilon(\mathbf{D}_{pst}(V),\psi_o\chi(g),\mu_o)}{\epsilon(\mathbf{D}_{pst}(V),\psi_o,\mu_o)} \\ =& \alpha(g)\end{aligned}$$

où χ est le caractère cyclotomique de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$. D'où le lemme. □

C.2.9. Posons $h_j(V) = dim_K \mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_{dR}(V)/\mathrm{Fil}^{j+1}\mathbf{D}_{dR}(V)$. Si $j \in \mathbb{Z}$, posons

$$\Gamma^*(j) = \begin{cases}\Gamma(j) = (j-1)! & \text{si } j > 0 \\ \lim_{s\to j}(s-j)\Gamma(s) = (-1)^j((-j)!)^{-1} & \text{si } j \leq 0.\end{cases}$$

Conjecture ($\mathrm{C}_{EP}(V)$). *Soit V une représentation p-adique pst de G_K. Alors, pour tout $\omega \in \Delta_K(V)$,*

$$\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_p}(V) = \mathbb{Z}_p \det(-\varphi|\mathbf{D}(V^*(1))) \prod_j \Gamma^*(-j)^{-h_j(V)[K:\mathbb{Q}_p]}\eta_V(\omega)\omega .$$

Remarques : i) L'équivalence de $\mathrm{C}_{EP,K}(V)$ et de $\mathrm{C}_{EP,K}(V^*(1))$ se déduit facilement des faits suivants :

a) $\epsilon(V,\psi_{K,o},\mu_{K,o})\epsilon(V^*(1),\psi_{K,o},\mu_{K,o}) = |d_K|^{-dim(V)}$ ([De73a, 5.7.1]) ;

b) si $Q(V) = \prod_j \Gamma^*(-j)^{h_j(V)}$, $Q(V)Q(V^*(1)) = \pm 1$ (calcul explicite) ;

c) dans l'isomorphisme

$$\Delta_K(V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \Delta_K(V^*(1)) \cong \Delta_K(\mathbb{Q}_p(1)) ,$$

on a

$$\begin{aligned}|\det(-\varphi|\mathbf{D}(V))|_p|\det(-\varphi|\mathbf{D}(V^*(1)))|_p\Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_p}(V) \otimes \Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_p}(V^*(1)) \\ \cong \Delta_{EP,K,\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p(1)) .\end{aligned}$$

ii) Soit $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ une suite exacte de représentations p-adiques potentiellement semi-stables de G_K. Si la conjecture $\mathrm{C}_{EP,K}$ est vraie pour deux des représentations V, V', V'', elle est vraie pour la troisième : il s'agit de vérifier que $\epsilon(V, \psi_o, \mu_o)\det(-\varphi|\mathbf{D}(V^*(1)))^{-1}$ est "multiplicatif". On commence par vérifier que si ρ est la représentation du groupe de Weil associé à V, $\epsilon(\rho, \psi_o, \mu_o) = \epsilon(V, \psi_o, \mu_o)\det(-\varphi|\mathbf{D}_{st}(V)/\mathbf{D}(V))^{-1}$ est multiplicatif. Les suites exactes (C.2.1) et

$$0 \to \mathbf{D}_{st}(V') \to \mathbf{D}_{st}(V) \to \mathbf{D}_{st}(V'') \to 0$$

impliquent le résultat.

iii) Enfin, si L/K est une extension finie et si V est une représentation potentiellement semi-stable de G_L, la représentation $\mathrm{Ind}_{L/K}(V)$ induite de V de G_L à G_K est encore potentiellement semi-stable et on vérifie que les conjectures $\mathrm{C}_{EP,L}(V)$ et $\mathrm{C}_{EP,K}(\mathrm{Ind}_{L/K}(V))$ sont équivalentes.

C.2.10. Supposons $K/\mathbb{Q}_p$ non ramifié. La conjecture $\mathrm{C}_{EP,K}(\mathbb{Q}_p(r))$ a été montrée par Bloch et Kato ([BK90, Theorem 4.2] : pour $r \geq 1$, si ω est une base du sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p}(W(k)[-r])$ de $\det_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{pst}(\mathbb{Q}_p(r))$, on a

$$\frac{Tam^o_\omega(\mathbb{Z}_p(r))}{Tam^o(\mathbb{Z}_p(1-r))} = |(r-1)!|_p^{[K:\mathbb{Q}_p]} .$$

Plus généralement, la conjecture $\mathrm{C}_{EP,K}(V)$ est vraie pour V représentation p-adique ordinaire. Cela se déduit des résultats de [P94] de la manière suivante. On y montre que la conjecture $\mathrm{C}_{EP,K}(V)$ est une conséquence de $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ (cf. 1.2.7). Si V_0 est une représentation non ramifiée de G_K et r un entier, la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V_0(r))$ est montrée. On en déduit donc que $\mathrm{C}_{EP,K}(V_0(r))$ est vraie et par dévissage (remarque C.2.9, (ii)), $\mathrm{C}_{EP,K}(V)$ est vraie pour toute représentation p-adique ordinaire.

C.3. Compatibilité des conjectures à la Bloch-Kato à l'équation fonctionnelle.

C.3.1. Soit M une structure motivique sur un corps de nombres F. Si $\mathcal{P}$ est une place finie de F, notons M_p la représentation p-adique de G_F associée à M et $M_{(\mathcal{P})}$ la restriction de M_p au groupe de décomposition $G_{\mathcal{P}}$ en $\mathcal{P}$ divisant p ; si $\mathcal{P}$ est une place infinie, notons $M_{(\mathcal{P})}$ la structure de Hodge mixte sur $F_{\mathcal{P}}$ associée à M. Rappelons ([FP94, III]) que l'on peut définir un facteur local $L_{\mathcal{P}}(M,s) = L(M_{(\mathcal{P})},s)$ pour toute place $\mathcal{P}$ finie ou non, ainsi qu'un facteur $\epsilon_{\mathcal{P}}(M,s) = \epsilon(M_{(\mathcal{P})},s)$. Si $\Lambda(M,s)$ est la fonction L complète :

$$\Lambda(M,s) = \prod_{\mathcal{P}} L_{\mathcal{P}}(M,s)$$

où le produit est pris sur toutes les places de F, on conjecture ($\mathrm{C}_{\text{éq.fon}}(M)$ dans [FP94, III, 4.3])que $\Lambda(M,s)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe et que si $\epsilon(M,s) = \prod_{\mathcal{P}} \epsilon_{\mathcal{P}}(M,s)$, on a l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(M,s) = \epsilon(M,s)\Lambda(M^*(1),-s)\ .$$

On pose $\epsilon(M) = \epsilon(M,0)$.

C.3.2. Il est d'autre part énoncé dans [FP94] (généralisation des conjectures de Bloch-Kato) une conjecture sur l'ordre $r(M)$ du zéro en $s=0$ de la fonction $L(M,s) = \prod_{\mathcal{P}\ finie} L_{\mathcal{P}}(M,s)$ et sur

$$L^*(M,0) = \lim_{s\to 0} \frac{L(M,s)}{s^{r(M)}}$$

(conjecture $\mathrm{C}_{BK}(M)$). Il est alors naturel de se poser le problème de la compatibilité de $\mathrm{C}_{BK}(M)$ et $\mathrm{C}_{BK}(M^*(1))$ avec $\mathrm{C}_{\text{éq.fonc}}(M)$. Nous avons pour cela besoin d'une hypothèse supplémentaire (conjecture de Deligne) :

(*) *La structure motivique* $\det(M)$ *de rang 1 sur* F *est isomorphe à* $\mathbb{Q}(-t_H(M))(\eta) = \mathbb{Q}(-t_H(M)) \otimes [\eta]$ *où* $t_H(M) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} jh_j(M)$, *où* η *est un caractère multiplicatif de* G_F *dans* $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ *et* $[\eta]$ *le motif d'Artin de rang 1 associé à* η.

Les $h_j(M)$ sont les nombres de Hodge de M : on a donc $h_j(M) = h_j(M_{(\mathcal{P})})$ pour toute place $\mathcal{P}$.

C.3.3. ***Proposition.*** *Si M vérifie (*) et si les conjectures $C_{EP,F_{\mathcal{P}}}(M_{(\mathcal{P})})$ sont vraies pour toute place $\mathcal{P}$ finie, si $C_{éq.fonc}(M)$ est vraie, alors les conjectures $C_{BK}(M)$ et $C_{BK}(M^*(1))$ sont équivalentes.*

C.3.4. Commençons la démonstration de la proposition. On peut supposer que $F = \mathbb{Q}$ en remplaçant M par la structure motivique $Res_{F/\mathbb{Q}}M$: en effet, $(Res_{F/\mathbb{Q}}M)_{(\mathcal{P})} = \mathrm{Ind}_{F_{\mathcal{P}}/\mathbb{Q}_p}M_{(\mathcal{P})}$, M vérifie (*) si et seulement $Res_{F/\mathbb{Q}}M$ vérifie (*), les conjectures $\mathrm{C}_{BK}(M)$ et $\mathrm{C}_{EP,F_{\mathcal{P}}}(M_{(\mathcal{P})}))$ sont vraies si et seulement si les conjectures $\mathrm{C}_{BK}(Res_{F/\mathbb{Q}}M)$ et $\mathrm{C}_{EP,F_{\mathcal{P}}}(\mathrm{Ind}_{F_{\mathcal{P}}/\mathbb{Q}_p}M_{(\mathcal{P})}))$ respectivement sont vraies.

C.3.5. On prend donc désormais $F = \mathbb{Q}$. La place à l'infini est notée ∞. On note P l'ensemble des nombres premiers et $\overline{P} = P \cup \infty$. Posons $d_{\pm}(M) = dim_{\mathbb{Q}}(M_{B,\infty})^{c=\pm 1}$ où M_B est la réalisation de Betti de M.

Posons $\Delta_{\mathbb{Q}}(M) = \det_{\mathbb{Q}}(M_B) \otimes_{\mathbb{Q}} (\det_{\mathbb{Q}} M_{dR})^{-1}$. Il est clair que pour toute place p, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_{\mathbb{Q}}(M) \cong \Delta_{\mathbb{Q}_p}(M_{(p)}) \ .$$

Soit $\Delta_{\mathbb{R}}(M_{(\infty)})$ la $\mathbb{R}$-droite $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_{\mathbb{Q}}(M)$. L'isomorphisme de comparaison fournit une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\xi_{M_{(\infty)}} : \Delta_{\mathbb{R}}(M_{(\infty)}) \longrightarrow (2i\pi)^{t_H(M)}\mathbb{R} \ .$$

On pose

$$\tilde{\xi}_{M_{(\infty)}} = (2i\pi)^{-t_H(M)}\xi_{M_{(\infty)}} \ .$$

Si ω est un élément de $\Delta_{\mathbb{Q}}(M)$ et $p \in \overline{P}$, on note ω_p l'image de $1 \otimes \omega$ dans $\Delta_{\mathbb{Q}_p}(M_{(p)})$.

Posons $Tam^o_{\infty}(M) = 2^{d_-(M)}$ (voir [FP94, I]).

C.3.6. ***Lemme.*** *Soit ω un élément non nul de $\Delta_{\mathbb{Q}}(M)$. Choisissons pour tout p un réseau $\mathcal{M}_p$ de M_p stable par $G_{\mathbb{Q}}$, $\omega_{1,p} \in t_{M_{(p)}}$ et $\omega_{2,p} \in t_{M^*(1)_{(p)}}$ tels que*

$$\mathbb{Z}_p\omega_p = \mathbb{Z}_p\omega_{2,p} \otimes \omega_{1,p}^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{M}_p \ .$$

Les conjectures $C_{BK}(M)$ et $C_{BK}(M^*(1))$ sont équivalentes si et seulement si

$$\frac{L^*_{\infty}(M,0)}{L^*_{\infty}(M^*(1),0)}(2\pi)^{-d_-(M)-t_H(M)}\tilde{\xi}_{M_{(\infty)}}(\omega_{\infty})\frac{Tam^o_{\infty}(M)}{Tam^o_{\infty}(M^*(1))}\prod_{p\in P}\frac{Tam^0_{\omega_{1,p},p}(\mathcal{M}_p)}{Tam^0_{\omega_{2,p},p}(\mathcal{M}^*_p(1))} = \pm\,\epsilon(M) \ .$$

Nous laissons la démonstration au lecteur. Elle s'appuie sur les faits suivants :

i) la suite exacte $sf_M(\mathbb{Q})$ est anti-autoduale : la démonstration de ce fait est semblable à la démonstration de la proposition 3.1.5, qui en est l'analogue p-adique.

ii) les groupes de Shafarevich-Tate de $\mathcal{M}_p$ et de $\mathcal{M}_p^*(1)$ ont même cardinal.

C.3.7. De même, on vérifie facilement le lemme suivant (cf. aussi 4.3.2).

Lemme. *On a* (i)

$$\frac{L_\infty^*(M,0)}{L_\infty^*(M^*(1),0)} = \pm 2^{d_+(M)-d_-(M)}(2\pi)^{d_-(M)+t_H(M)} \prod_j \Gamma^*(-j)^{h_j(M)} \ ;$$

(ii)

$$\frac{Tam_\infty^o(M)}{Tam_\infty^o(M^*(1))} = 2^{d_-(M)-d_+(M)} \ .$$

C.3.8. Supposons maintenant les conjectures $C_{EP,\mathbb{Q}_p}(M_p)$ vraies pour tout nombre premier p. La formule (C.3.1) s'écrit alors en oubliant dans les notations les caractères ψ_o et les mesures μ_o

$$\text{(C.3.1)} \qquad \tilde{\xi}_{M_{(\infty)}}(\omega_\infty) \prod_p |\frac{\tilde{\xi}_{M_{(p)}}(\omega_p)}{\epsilon(M_{(p)})}|_p = \pm\epsilon(M) \ .$$

Remarquons que $\tilde{\xi}_{M_{(p)}}(\omega_p)$ ne dépend en fait que de $\det_{\mathbb{Q}_p} M_p$. Sous l'hypothèse $\det(M) \cong \mathbb{Q}(-t_H(M))[\eta]$ et pour $\omega \in \Delta_{\mathbb{Q}}(M)$, on a

$$\tilde{\xi}_{M_{(\infty)}}(\omega_\infty) \prod_p |\frac{\tilde{\xi}_{M_{(p)}}(\omega_p)}{\epsilon(M_{(p)})}|_p = G(\eta, \exp 2i\pi/f)^{-1} \prod_p |\frac{G(\eta_p, \exp(2i\pi/f_p))}{\epsilon(M_p)}|_p \ ;$$

ici, f (resp. f_p) est le conducteur de η (resp. de la restriction η_p de η à $G_{\mathbb{Q}_p}$), on note de la même manière η et le caractère de Dirichlet associé et on pose

$$G(\eta, \exp(2i\pi/f)) = \sum_{a \bmod f} \eta(a)\exp(2i\pi a/f) \ ,$$

$$G(\eta_p, \exp(2i\pi/f_p)) = \sum_{a \bmod f} \eta(a)\exp(2i\pi a/f_p) \ .$$

En remarquant que

$$\epsilon([\eta_p]) = G(\eta_p^{-1}, \exp(-2i\pi/f_p)) = f_p G(\eta_p, \exp(2i\pi/f_p))^{-1} ,$$

$$\epsilon([\eta]) = fG(\eta, \exp(2i\pi/f))^{-1}$$

et que $f = \prod_p f_p$, on en déduit que (C.3.1) est équivalent à

$$\epsilon(M)/\epsilon([\eta]) \prod_p |\epsilon(M_p)/\epsilon([\eta_p])|_p = \pm 1 . \tag{C.3.2}$$

Pour montrer (C.3.2) et donc terminer la proposition C.3.3, il ne reste plus qu'à montrer que $\epsilon(M_p)/\epsilon([\eta_p])$ est égal au produit d'une racine de l'unité par une puissance de p. Mais, $\epsilon_p(M_p)$ est à une puissance de p près égal à $\epsilon_p(\rho_p)$ où ρ_p est une représentation du groupe de Weil de déterminant η_p (§C.1). Comme M vérifie la propriété de $\mathbb{Q}$-rationalité en p, la représentation ρ_p est définie sur $\mathbb{Q}$ et on a ([Ta77])

$$\epsilon_p(\rho_p)/\epsilon_p([\eta_p]) = \pm 1 ,$$

ce qui termine la démonstration.

Index

Chapitre 1

Chapitre 2

Chapitre 3

Chapitre 4

Appendice A

Appendice C

RÉFÉRENCES

[AV75] Y. Amice et J. Vélu, *Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke,* Astérisque **24-25**, Soc. Math. France, Paris (1975), pp.119–131.

[BG85] D. Bernardi et C. Goldstein, *Variante p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer,* C.R. Acad. Sci. Paris **301** (1985), 455-458.

[BGS84] D. Bernardi, C. Goldstein et N. Stephens, *Notes p-adiques sur les courbes elliptiques,* J. reine angew. Math. **351** (1984), 129-170.

[BP93] D. Bernardi et B. Perrin-Riou, *Variante p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (le cas supersingulier),* C.R. Acad. Sci. Paris, **317**, série I (1993), 227-232 .

[BK90] S. Bloch et K. Kato, *L functions and Tamagawa numbers of motives,* dans The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math. **86**, Birkhaüser, Boston, 1990, pp. 333–400.

[Bu] *Séminaire sur les périodes p-adiques,* (tenu à Bures en 1988), Astérisque (1994) (édité par J.-M. Fontaine).

[C77] J. Coates, *p-adic L functions and Iwasawa theory,* dans Algebraic Number Fields, (édité par A. Fröhlich) Academic Press, 1977, pp. 269–353.

[C89] J. Coates, *p-adic L functions,* Séminaire Bourbaki (1988), exposé 70, Astérisque 177-178 (1989), pp. 33-59.

[CMc] J. Coates et G. Mc Cornell, *On the Iwasawa theory of modular elliptic curves of analytic rank ≤ 1,* (1992), Journ. Lond. Math. Soc. **50** (1994), 243-264.

[CP89] J. Coates et B. Perrin-Riou, *On p-adic L-functions attached to motives over $\mathbb{Q}$,* Advanced Studies in Pure Math **17** (1989), 23-54.

[CS87] J. Coates et C.-G. Schmidt, *Iwasawa theory for the symmetric square of an elliptic curve,* J. reine angew. Math **375/376** (1987), 104-156.

[Co82] R. F. Coleman, *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions,* Invent. Math. **69** (1982), 171-208.

[De71] P. Deligne, *Théorie de Hodge II,* Publ. Math. I.H.E.S. **40** (1971), p. 5-57.

[De73] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L,* Antwerp II, in Modular functions of one variable II, Lecture Notes in Math. **349**, Springer (1973), p.501-595.

[De73a] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales,* dans Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math., American Math. Soc., **33** (1979), p. 313-346.

[De89] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points,* dans Galois Groups over $\mathbb{Q}$, (édité par Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre), MSRI publications **16**, Springer Berlin (1989), pp. 79-293.

[Den91] C. Deninger, *On the Γ-factors attached to motives,* Invent. Math. **104** (1991), 245-265.

[Fl90] M. Flach, *A generalisation of the Cassels pairing,* J. reine. angew. Math **412** (1990), 113-127.

[Fl92] M. Flach, *A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve,* Invent. math. **109** (1992) 307–327.

[FW79] B. Ferrero et L. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields,* Ann. Math. **109** (1979), 377-395.

[F82] J.-M. Fontaine, *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate,* Ann. Math. **115** (1982), 529-577.

[F92] J.-M. Fontaine, *Valeurs spéciales de fonctions L des motifs,* Séminaire Bourbaki, exposé **751**, février 1992.

[FP91] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato,* C.R. Acad. Sci. Paris, **313**, série I (1991), *I - Cohomologie galoisienne,* 189-196, *II - Structures motiviques f-closes,* 349-356; *III - Le cas général,* 421-428.

[FP94] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L,* dans Motives (Seattle) Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **55**, part 1 (1994), pp. 599-706.

[Gr89] R. Greenberg, *Iwasawa theory for p-adic representations, Adv. Stud. Pure Math.* ***17*** *(1989),* 97-137.

[GK90] M. Gros, *Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p-adiques I,* avec un appendice de M. Kurihara : *Computation of the syntomic regulator in the cyclotomic case,* Invent. Math. **99** (1990), 293–320.

[GZ86] B. Gross et D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series,* Invent. Math. **84** (1986), 225-320.

[H90] H. Hida, *p-adic L-functions for base change lifts of GL_2 to GL_3,* dans Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math. **11**, Academic Press, Boston (1990), pp. 93-142.

[Iw69] K. Iwasawa, *On p-adic L functions,* Ann. of Math. **89** (1969), 198-205.

[Iw72] K. Iwasawa, *Lectures on p-adic L functions,* Ann. Math. Studies **74**, Princeton University Press 1972.

[Iw73] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields,* Ann. of Math. **98** (1973), 246-326.

[Iw89] K. Iwasawa, *On p-adic L functions,* Ann. of Math. **89**, 198-205.

[J88] U. Jannsen, *Continuous Etale cohomology,* Math. Ann. **280** (1988), 207-245.

[Ka] K. Kato, *Iwasawa theory and p-adic Hodge theory.*

[Kb] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR},* dans Arithmetic Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **1553** (1993).

[KM76] F. Knudsen et D. Mumford, *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div",* Math. Scand. **39** (1976), 19-55.

[Ko90] V.A. Kolyvagin, *Euler systems,* The Grothendieck Festschrift, vol. **2**, Prog. in Math. **87**, Birkhaüser, Boston, 1990, pp. 436–483.

[Ku92] M. Kurihara, *Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K-groups of $\mathbb{Z}$,* Comp. Math. **81** (1992), 223-236.

[L79] W. Li, *L-series of Rankin type and their functional equations,* Math. Ann. **244** (1979), 135-166.

[Mc] G. McCornell, *On the Iwasawa theory of CM elliptic curves at supersingular primes,* (1993).

[M72] B. Mazur, *Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields,* Invent. Math. **18** (1972), 183-266.

[MTT86] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer,* Invent. Math. **84** (1986), 1-48.

[MW84] B. Mazur et A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76** (1984), 179-330.

[Mi86] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems,* Perspectives in Mathematics, vol. **1**, Academic Press (1986).

[Ne93] J. Nekovář, *On p-adic height pairings,* dans Séminaire de théorie des nombres 1990-1991, édité par S. David, Birkhaüser Boston 1993, pp. 127-202.

[Pa90] A. A. Panchiskhin, *Convolutions of Hilbert modular forms, motives and p-adic L-functions,* prépublication MPI 43 (1990)

[P84] B. Perrin-Riou, *Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa,* Mémoire de de la S.M.F. **17** (1984).

[P87] B. Perrin-Riou, *Points de Heegner et dérivées de fonctions L p-adiques,* Invent. Math. **89** (1987), 455-510.

[P90] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa p-adique locale et globale,* Invent. Math. **99** (1990), 247-292.

[P90] B. Perrin-Riou, *Représentations p-adiques, périodes et fonctions L p-adiques,* dans Séminaire de théorie des nombres 1987-1988, édité par C. Goldstein, Birkhaüser Boston (1990), vol **81**, pp. 213-258.

[P92] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques,* Invent. Math. **109** (1992), 137-185.

[P92b] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques : le cas local,* C.R. Acad. Sci. Paris, **315**, série I (1992), 629-632.

[P93] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels,* Ann. Inst. Fourier, **43**, 945-995 (1993).

[P94] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local,* Invent. Math. **115** (1994), 81-149.

[P] B. Perrin-Riou, *La fonction de Kubota-Leopoldt,*(1993), à paraître dans Contemp. Math.

[Pa] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques, ICM 94.

[R88] K. Rubin, *On the main conjecture of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields,* Invent. **93** (1988), 701-719 .

[R90] K. Rubin, *The main conjecture,* Appendix to Cyclotomic fields (seconde édition) par S. Lang, Graduate Texts in Math. **121**, Springer-Verlag (1990).

[R91] K.Rubin, *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields,* Invent. Math **103** (1991), 25-68.

[S90] A. J.Scholl, *Motives for modular forms,* Invent. Math. **100** (1990), 419-430.

[Sc88] C.-G. Schmidt, *p-adic measures attached to automorphic representations of* $GL(3)$, Invent. Math. **92** (1988), 597-631.

[Sc85] P. Schneider, *p-adic height pairings, II,* Invent. Math. **79** (1985), 329-374.

[Sc89] P. Schneider, *Motivic Iwasawa Theory,* Adv. Stud. Pure Math. **17** (1989), 421-456.

[Se64] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne,* Lectures Notes in Math. **5**, Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1964.

[Se70] J.-P. Serre, *Facteurs locaux de fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures),* Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1969/70, exp. **19**.

[Sh76] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms,* Com. Pure Appl. Math. **29** (1976), 783-804.

[So80] C. Soulé, *On higher p-adic regulators,* Algebraic K-theory, Evanston 1980, Lecture Notes in Math., vol. **854**, Springer-Verlag, Berlin et New-York, pp. 372–401.

[So83] C. Soulé, *K-théorie et zéros aux points entiers de fonctions zêta,* Proc. ICM. Warszawa (1983).

[So87] C. Soulé, *Eléments cyclotomiques en K-théorie,* Astérisque **147-148** (1987), 225-257.

[So87] C. Soulé, *p-adic K theory of elliptic curves,* Duke Math. Journal **54** (1987), 249-269.

[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups,* Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer, Berlin (1967), 158-183.

[Ta76] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology,* Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[Ta77] J. Tate, *Local constants,* dans Algebraic Number Fields, édité par A. Fröhlich, Academic Press (1977), pp. 89-131.

[Vi76] M. M. Visik, *Non-archimedian measures connected with Dirichlet series,* Math. USSR Sbornik **28** (1976), 216-228.

Bernadette Perrin-Riou
Mathématiques, Batiment 425
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay
France
email : bpr@matups.matups.fr