

Astérisque

L. BARBIERI-VIALE

Cicli di codimensione 2 su varietà unirazionali complesse

Astérisque, tome 226 (1994), p. 13-41

http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__226__13_0

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CICLI DI CODIMENSIONE 2 SU VARIETÀ UNIRAZIONALI COMPLESSE

L. BARBIERI-VIALE

Premessa

Sia X una varietà algebrica proiettiva e non-singolare. Un problema generale in teoria dei cicli è quello di determinare la “struttura” dei gruppi abeliani nell’estensione

$$0 \rightarrow A^i(X) \rightarrow CH^i(X) \rightarrow NS^i(X) \rightarrow 0$$

ovvero il gruppo di Chow $CH^i(X)$ dei cicli di codimensione i modulo equivalenza razionale, il suo sottogruppo $A^i(X)$ dei cicli che sono algebricamente equivalenti a zero ed il gruppo di Néron-Severi $NS^i(X)$. I metodi che affrontano tale problema hanno oggi in comune il fatto d’interpretare i cicli mediante “classi di coomologia”; ad esempio, per una varietà complessa, P.A. Griffiths ha definito un toro complesso $J^i(X)$ ed un’applicazione $\theta^i : A^i(X) \rightarrow J^i(X)$, inoltre si ha sempre la mappa ciclo $\mathcal{C}^i : NS^i(X) \rightarrow H_{\mathbb{Z}}^{i,i}$ nel gruppo di Hodge delle classi intere di tipo (i, i) , ma sfortunatamente queste applicazioni non sono surgettive né iniettive, in generale. Per $i = 2$ ed X *unirazionale* o un *fibrato in coniche su una superficie* S. Bloch [7, Prop.1.7 e Prop.1.9] ha mostrato che θ^2 è un’isogenia: ma, come conseguenza del teorema di Merkur’ev-Suslin in K -teoria, si ha (cf. [18, §1.3]) che θ^2 è iniettiva sulla torsione quindi θ^2 è un isomorfismo nelle ipotesi precedenti e, come si vedrà nel seguito, \mathcal{C}^2 è iniettiva.

S. Bloch e D. Quillen [26] hanno ottenuto una mappa ciclo $CH^i(X) \xrightarrow{\cong} H^i(X, \mathcal{K}_i)$ che identifica i gruppi di Chow alla coomologia di Zariski dei

fasci associati ai gruppi di K -teoria algebrica; questo fatto, valido anche per $NS^i(X)$ mediante altre teorie coomologiche (si veda l'Introduzione), permette "magiche" applicazioni (ad esempio che i 2-cicli di n -torsione sono in numero finito per X definita su campi finiti o separabilmente chiusi, si veda [14]).

Se $i = 0, 1$, $\dim X$ ed X è definita su un campo algebricamente chiuso si ha che (a parte il fatto generale che $A^i(X)$ è un gruppo divisibile): per $i = 0$, $A^0(X) = 0$ e $CH^0(X) = NS^0(X) = X\mathbf{Z}$; per $i = \dim X$ si ha ancora $NS_0(X) \cong \mathbf{Z}$ e $A_0(X)_{tors} \cong CH_0(X)_{tors}$ s'identifica alla torsione della varietà di Albanese $Alb(X)$ per un teorema di Roitman; se inoltre X è unirazionale allora $A_0(X) = Alb(X) = 0$ e $CH_0(X) \cong \mathbf{Z}$. Per $i = 1$ l'estensione

$$0 \rightarrow A^1(X) \rightarrow CH^1(X) \rightarrow NS^1(X) \rightarrow 0$$

è tale che $A^1(X)$ è rappresentabile da una varietà abeliana, $CH^1(X) \cong Pic(X)$ e $NS^1(X)$ è finitamente generato. Si pone dunque il problema di ottenere il gruppo $CH^i(X)$ come estensione di una varietà abeliana mediante un gruppo finitamente generato. Un tale risultato è falso, in generale, per $i \geq 2$ ed i gruppi $A^i(X)$ e $NS^i(X)$ ma vi sono, ovvie e meno ovvie, condizioni su X affinché ciò sia vero. S. Bloch e J. Murre [10] hanno posto il problema della "rappresentabilità" di $A^i(X)$ studiando alcuni esempi di varietà di Fano; il motivo della "semplicità" di queste costruzioni è il risultato di S. Bloch [7, Prop.1.7] che $A^2(X)$ è "rappresentabile" se X è unirazionale. Altrettanto semplicemente, sotto questa ipotesi, si può vedere che $NS^2(X)$ è finitamente generato.

Introduzione

Sia X una varietà algebrica complessa. Sia X_{an} lo spazio analitico associato e consideriamo le teorie coomologiche $H^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^*(X_{an}, A)$ che corrispondono ai fasci costanti $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$ ovvero la coomologia singolare a coefficienti in A ; ad esempio, per $A = \mathbf{Q}$ si ha $H^*(X_{an}, \mathbf{Q}) = H^*(X_{an}, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$ mentre per $A = \mathbf{Z}/n$ si ottiene $H^*(X_{an}, \mathbf{Z}/n) \cong$

$H^*(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n)$ la coomologia étale del fascio delle radici n -esime di 1. Per una tale varietà X fissata, consideriamo inoltre i fasci $\mathcal{H}_X^*(A)$ su X con la topologia di Zariski, associati ai prefasci $U \rightsquigarrow H^*(U_{an}, A)$. L'obiettivo di questo testo è di raccogliere, sinteticamente, i principali risultati riguardanti i fasci \mathcal{H}^* , di esemplificare alcune applicazioni allo studio dei cicli algebrici sulle varietà algebriche complesse proiettive e non-singolari e di porre diverse questioni. Ad esempio, mentre i gruppi di coomologia $H^*(X)$ non sono in generale invarianti birazionali, le sezioni globali dei fasci $\mathcal{H}_X^*(A)$ hanno questa proprietà ed inoltre sono nulle se X è razionale; questo suggerisce il loro impiego nello studio di problemi di razionalità. Una costruzione di J.-L. Colliot-Thélène ed M. Ojanguren [15, §3] permette di trovare varietà unirazionali di dimensione ≥ 6 , con invariante di Artin-Mumford nullo i.e. $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, tali che $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/2)) \neq 0$ e quindi non-razionali, ma sono sconosciuti tali esempi in dimensione inferiore a 6: mostriamo qui (cf. Teorema 5.2) che non esistono in dimensione 3 se la congettura di Hodge a *coefficienti interi* è vera per le classi di tipo $(2, 2)$ su X .

Grazie a Bloch ed Ogus [11, Cor.7.4] il gruppo $H^p(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ si identifica al gruppo di Néron-Severi $NS^p(X) \otimes A$ degli A -cicli di codimensione p modulo equivalenza algebrica. Sfruttando l'esistenza di un "misterioso" omomorfismo $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) \xrightarrow{\partial} NS^2(X)$ che ha come immagine il gruppo di Griffiths $G^2(X)$, è possibile mostrare [3] che $\partial \neq 0$, ovvero $G^2(X) \neq 0$, è una condizione sufficiente per la non unirazionalità di X . Infatti, se X è unirazionale, si dimostra [3] che $H^0(X, \mathcal{H}_X^i(\mathbf{Z})) = 0$ per $i = 1, 2, 3$ e si congettura tale annullamento per ogni $i \neq 0$ (§4, §7).

L'annullamento di $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}))$ ha diverse conseguenze in teoria dei cicli. Ad esempio, implica la finitezza di $CH^2(X)/n$; inoltre, consente d'interpretare il gruppo $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$, per una varietà 3-dimensionale, mediante i 2-cicli trascendenti di n -torsione ovvero: $n(H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X))$; la non nullità di $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$ equivale

all'esistenza di una classe ζ di Hodge *intera* di tipo $(2, 2)$ non algebrica. Discutiamo alcuni esempi di varietà di Fano in cui ciò non può avvenire e mostriamo che $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$ se X è un fibrato in coniche su una superficie; in questo caso si ha pure $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) = 0$ per ogni n . Si ha dunque, in questi esempi, che tutti i cicli di Hodge sono algebrici. Infine, per X un fibrato in coniche su una superficie S tale che $A^2(S)$ sia "rappresentabile" o una varietà unirazionale mostriamo che la mappa ciclo

$$c\ell_{\mathcal{D}}^2 : CH^2(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^4(X, \mathbf{Z}(2))$$

in coomologia di Deligne-Beilinson è iniettiva; inoltre, ha conucleo finito se ad esempio $\dim X = 3$ (§6).

Ben lontano dal risultare esauriente, questa esposizione si propone di catturare l'interesse per le problematiche che nascono naturali e promettenti attorno a tali metodologie.

Queste note si avvalgono di generose e corroboranti conversazioni con S. Bloch, J.-L. Colliot-Thélène (che ha inoltre letto e commentato la versione preliminare) e V. Srinivas ai quali rivolgo i miei più sentiti ringraziamenti. Sono infine debitore di oculati suggerimenti da parte di P. Francia, C. Pedrini e S. Verra in occasione di un seminario "genovese".

Notazioni

Se G è un gruppo (o fascio) abeliano indichiamo: ${}_nG$ e G/n rispettivamente il nucleo ed il conucleo della moltiplicazione per n in G . Indichiamo $T(G)$ il 'modulo di Tate' di G , ovvero il limite inverso degli ${}_nG$, e G_{tors} il sottogruppo di torsione, ovvero il limite diretto. Indichiamo $\widehat{\mathbf{Z}}$ il completamento profinito di \mathbf{Z} . Le varietà sono algebriche, irriducibili e sempre definite su \mathbf{C} se non specificato altrimenti; per una tale varietà X indichiamo X_{an} lo spazio analitico con la topologia usuale e $X_{\acute{e}t}$ il sito étale di X . Denotiamo $K(X)$ il campo delle funzioni razionali su X .

1 I fasci \mathcal{H}^*

Sia X una varietà algebrica complessa, ovvero uno schema integro di tipo finito su \mathbf{C} ; lo spazio topologico soggiacente ha dunque la topologia di Zariski. Sia $\omega : X_{an} \rightarrow X$ l'applicazione continua indotta dal fatto che ogni aperto di Zariski è analitico. Sia A un fascio costante su X_{an} e sia $R^q\omega_*A$ per $q \geq 0$ l'immagine diretta superiore di A su X . La sua spiga in un punto $x \in X$ risulta essere il limite di $H^q(U_{an}, A)$ al variare di U intorno aperto di Zariski di x ; ad esempio, per $q = 0$, si ha $\omega_*A = A$ il fascio costante su X . Se $q > \dim X$ allora $R^q\omega_*A = 0$ poichè per U affine si ha che U_{an} è uno spazio di Stein e quindi $H^q(U_{an}, A) = 0$ se $q > \dim U$. Inoltre si ha la sequenza spettrale di Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q\omega_*A) \Rightarrow H^{p+q}(X_{an}, A)$$

che risulta di tipo locale-globale; infatti, per quanto osservato, gli $R^q\omega_*A$ s'identificano ai fasci $\mathcal{H}_X^q(A)$ associati ai prefasci (per la topologia di Zariski) $U \rightsquigarrow H^*(U_{an}, A)$ su X e dunque

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \Rightarrow H^{p+q}(X) \quad (1)$$

dove s'intende $H^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^*(X_{an}, A)$. Si hanno termini $E_2^{p,q}$ possibilmente non nulli per $0 \leq p, q \leq \dim X$.

Elenchiamo le principali proprietà dei gruppi $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$ quando X è non-singolare (anche riducibile purché equidimensionale) e $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$ nei seguenti:

Teorema 1.1 *Nelle ipotesi e notazioni precedenti si ha:*

1. $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) = 0$ se $p > q$.
2. Ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ induce una mappa d'immagine inversa

$$f^* : H^p(Y, \mathcal{H}_Y^q(A)) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$$

3. Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo proprio tra varietà non-singolari allora f induce un omomorfismo d'immagine diretta

$$f_* : H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \rightarrow H^{p+d}(Y, \mathcal{H}_Y^{q+d}(A))$$

dove $d = \dim Y - \dim X$.

4. Si ha un prodotto d'intersezione:

$$\cdot : H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \otimes H^r(X, \mathcal{H}_X^s(A)) \rightarrow H^{p+r}(X, \mathcal{H}_X^{q+s}(A))$$

indotto dal prodotto "cup" sui fasci

$$\mathcal{H}_X^q(A) \otimes \mathcal{H}_X^s(A) \rightarrow \mathcal{H}_X^{q+s}(A)$$

Questo prodotto munisce il gruppo bigraduato

$$\bigoplus_{p,q} H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$$

di una struttura di anello commutativo con identità 1_X la sezione identità del fascio costante $A \cong \mathcal{H}_X^0(A)$.

5. Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo proprio tra varietà non-singolari si ha una formula di proiezione

$$f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x)$$

dove $x \in H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$ e $y \in H^r(Y, \mathcal{H}_Y^s(A))$. Se $\dim X = \dim Y$ e $d = [K(X) : K(Y)]$ è il grado di f allora $f_*(1_X) = d \cdot 1_Y$.

6. Se $Z \subset X$ è un chiuso non-singolare di codimensione pura c

$$H_Z^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \cong H^{p-c}(Z, \mathcal{H}_Z^{q-c}(A))$$

si ha dunque la sequenza esatta lunga

$$\rightarrow H^{p-1}(X - Z, \mathcal{H}^q) \rightarrow H^{p-c}(Z, \mathcal{H}^{q-c}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H}^q) \rightarrow \dots$$

7. Sia $\pi : \mathbf{A}_X^n \rightarrow X$ la proiezione canonica. Allora π induce un isomorfismo

$$\pi^* : H^p(X, \mathcal{H}^q(A)) \cong H^p(\mathbf{A}_X^n, \mathcal{H}^q(A))$$

8. Sia \mathbf{P}_X^n lo spazio proiettivo su X :

$$H^p(\mathbf{P}_X^n, \mathcal{H}^q(A)) \cong \bigoplus_{i=0}^n H^{p-i}(X, \mathcal{H}_X^{q-i}(A))$$

Dimostrazione La 1. (= [11, Cor.6.2]) si ottiene dalla risoluzione aritmetica [11, (4.2.2)] di $\mathcal{H}^q(A)$. La 2. e la 4. sono immediate. Le restanti proprietà sono dimostrate in [4] (cf. [3]): 3. per [4, §5.3], 5. per [4, §5.4], 6. = [4, Lemma 3.1] 7. = [4, Lemma 3.4] e 8. = [4, Theorem 2]. •

Dalla teoria di Bloch-Ogus [11, §4] è possibile identificare – nella categoria derivata – il fascio $\mathcal{H}^q(A)$ ad una sua risoluzione fiacca (detta di Gersten o aritmetica) di lunghezza q , ovvero il complesso di Cousin di $\mathcal{H}^q(A)$ (nella terminologia di [23, Def. p.238] il fascio $\mathcal{H}^q(A)$ è di Cohen-Macaulay rispetto alla filtrazione per codimensione); dunque le proprietà elencate sono conseguenza delle analoghe proprietà delle teorie coomologiche H^* come restano indotte sul complesso di Cousin. Ad esempio, sia $H^q(K(X)) \stackrel{\text{def}}{=} (R^q\omega_*A)_\eta$ la spiga nel punto generico: il fascio $\mathcal{H}_X^q(A)$ è un sottofascio del fascio costante $H^q(K(X))$, che è il primo termine del complesso di Cousin. Ma inoltre: sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo allora si ha un morfismo di fasci $f^\natural : \mathcal{H}_Y^q(A) \rightarrow f_*\mathcal{H}_X^q(A)$; se f è proprio e $d = \dim Y - \dim X$ si ha pure un morfismo nella categoria derivata $f_\natural : Rf_*\mathcal{H}_X^q(A) \rightarrow \mathcal{H}_Y^{q+d}(A)[d]$. Se $d = 0$, ovvero f è genericamente finito, allora $f_{\natural} \circ f^\natural = \text{deg } f$ (tra fasci). Se f è birazionale $H^q(K(X)) \cong H^q(K(Y))$ e quindi:

Teorema 1.2 *Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo proprio e birazionale tra varietà non-singolari allora f^\natural induce l'isomorfismo*

$$\mathcal{H}_Y^q(A) \cong f_*\mathcal{H}_X^q(A)$$

ovvero: le sezioni globali dei fasci $\mathcal{H}^q(A)$ sono invarianti birazionali per varietà proiettive non-singolari.

Dimostrazione Vedere [15, §1], [16, §1.3] per il caso $A = \mathbf{Z}/n$ e [3], [4, §2] in generale. •

Infine, poichè $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) = 0$ per $p > q$, da un calcolo immediato con la sequenza spettrale (1) si ha una “mappa ciclo”

$$H^p(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \rightarrow H^{2p}(X)$$

Teorema 1.3 (Formula di Bloch) *Se X è proiettiva e non-singolare si ha un isomorfismo*

$$\gamma^p : H^p(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \cong NS^p(X) \otimes A$$

dove $NS^p(X)$ è il gruppo di Néron-Severi dei cicli di codimensione p modulo equivalenza algebrica. Il prodotto d’intersezione coincide, via γ^p , con la “classica” intersezione dei cicli così come la mappa ciclo s’identifica alla mappa ciclo $c\ell^p : NS^p(X) \otimes A \rightarrow H^{2p}(X)$.

Dimostrazione Vedere: [11, §7] per l’isomorfismo γ e la compatibilità con $c\ell$ e [4, Theorem 3] per la compatibilità tra i prodotti d’intersezione. ●

Analoghi risultati valgono per i gruppi di \mathcal{K} -coomologia associati alla K -teoria di Quillen [26] o per teorie coomologiche che soddisfano gli assiomi in [4, §6.1-3] ovvero, in parole povere, soddisfino gli assiomi di Bloch-Ogus [11, §1], siano munite di un prodotto “cup” e siano omotopicamente invarianti (senza menzionare le compatibilità di rito).

2 Razionalità e unirazionalità

Consideriamo una varietà X proiettiva e non-singolare. Come semplice e diretta conseguenza dei risultati del §1 si ha che gl’invarianti birazionali (cf. Teorema 1.2) $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ sono nulli per le varietà razionali ($p \neq 0$). Infatti, se X è razionale, $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \cong H^0(\mathbf{P}_C^n, \mathcal{H}^p(A))$ e quest’ultimo, per il Teorema 1.1, risulta essere $H^p(\text{Spec } \mathbf{C}_{an}, A)$ ovvero la coomologia dello spazio puntiforme.

Proposizione 2.1 *Sia $f : X \dashrightarrow Y$ un'applicazione razionale dominante tra varietà lisce e proiettive della stessa dimensione. Sia $d = \deg f$ il suo grado. Se $H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$ è senza d -torsione allora*

$$H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A)) \subset H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$$

Se $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) = 0$ allora $H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$ è un gruppo di d -torsione. Se $H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$ è d -divisibile allora è un quoziente di $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$.

Dimostrazione In virtù dell'eliminazione dell'indeterminazione di una applicazione razionale ed il Teorema 1.2 possiamo supporre che $f : X \rightarrow Y$ sia un morfismo genericamente finito di grado d . Dalla formula di proiezione (cf. Teorema 1.1) si ha che

$$H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A)) \xrightarrow{f^*} H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \xrightarrow{f_*} H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$$

è la moltiplicazione per d da cui la tesi (ad esempio, se è iniettiva allora f^* è iniettiva). •

Corollario 2.2 *Se X è unirazionale e $p \neq 0$ $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ è un gruppo di n -torsione per qualche $n > 0$.*

Il precedente Corollario 2.2 vale anche per X dominata da \mathbf{P}_Y^N se $p > \dim Y$ ma Y non necessariamente razionale.

Come mi ha fatto osservare P. Francia il Corollario 2.2 stabilisce una limitazione al grado delle mappe razionali dominanti $\mathbf{P}^{\dim X} \dashrightarrow X$; ma resta oscuro il suo significato geometrico.

3 Cicli trascendenti, gruppo di Brauer e invariante di Artin-Mumford

Sia X una varietà liscia (eventualmente non completa) su \mathbf{C} e consideriamo il fascio $\mathcal{H}_X^1(A)$. Dalla sequenza spettrale locale-globale (cf. §1) si ha che

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^1(A)) = H^1(X_{an}, A) \tag{2}$$

è un'invariante globale ben noto.

$A = \mathbf{Z}$ Allora $H^1(X_{an}, \mathbf{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(X_{an})_{ab}, \mathbf{Z})$ è senza torsione e dunque pure $\mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})$ è senza torsione; l'annullamento di questo gruppo per X proiettiva unirazionale, come conseguenza del §2, è in sintonia con il risultato di Serre [28] che infatti $\pi_1(X_{an}) = 0$.

$A = \mathbf{Z}/n$ Allora, dalla teoria di Kummer per X completa, si ha

$$H^1(X_{an}, \mathbf{Z}/n) \cong {}_n\text{Pic}(X)$$

che si annulla se X è unirazionale per Serre [28, 'torsione di Severi'].

Dunque il passo successivo riguarda le sezioni globali di $\mathcal{H}_X^2(A)$; anche in questo caso ritroviamo fatti ben noti. Infatti $H^i(X, \mathcal{H}^1) = 0$ se $i > 1$ e quindi abbiamo una sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_X^1(A)) \rightarrow H^2(X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^2(A)) \rightarrow 0 \quad (3)$$

Se X è proiettiva e non-singolare si ha che $H^1(X, \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})) \cong NS^1(X)$ per il Teorema 1.3 ed il "Teorema di Lefschetz" garantisce un isomorfismo

$$H^1(X, \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})) \cong H_z^{1,1}$$

dove $H_z^{1,1} = \text{Ker}(H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X))$ sono i cicli di Hodge di tipo (1, 1). Analogamente $H^1(X, \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z}/n)) \cong \text{Pic}(X)/n$. Sia

$$H_z^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)) \cong H^2(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^1(X)$$

il reticolo dei 'cicli trascendenti' e $H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m)$ il gruppo di Brauer coomologico [22, II. Remarque 2.7]. Per il seguente risultato si veda [5, Cor.2] e [17, Lemma 1.1].

Proposizione 3.1 *Sia X non-singolare. Si hanno isomorfismi*

$$H^0(X, \mathcal{H}^2(\mathbf{Z}/n)) \cong {}_nH^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m)$$

per ogni $n \neq 0$. Se inoltre X è proiettiva si ha

$$H^0(X, \mathcal{H}^2(\mathbf{Z})) \cong H_z^2$$

Dimostrazione Conseguenza della sequenza esatta (3), il Teorema 1.3 e – rispettivamente – la sequenza esponenziale e di Kummer. Ad esempio per $A = \mathbf{Z}$ si ha un isomorfismo di sequenze esatte corte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & NS^1(X) & \rightarrow & H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) & \rightarrow & H_{\mathbf{Z}}^2 & \rightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow & & \parallel & & & & \\ 0 & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})) & \rightarrow & H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{H}_X^2(\mathbf{Z})) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

•

Dalla Proposizione 3.1 segue che $H^0(X, \mathcal{H}^2(\mathbf{Z}))$ è senza torsione, poichè $H_{\mathbf{Z}}^2$ è un reticolo. In effetti si ha il seguente (vedi [5, Cor.3]).

Lemma 3.2 *Sia X uno schema algebrico su \mathbf{C} . Allora il fascio $\mathcal{H}^2(\mathbf{Z})$ è senza torsione.*

Dimostrazione Si consideri la sequenza esatta di fasci $0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n \rightarrow 0$ su X_{an} . Si ottiene la sequenza esatta di fasci indotta dalle immagini dirette superiori rispetto a $\omega : X_{an} \rightarrow X$

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}) \xrightarrow{p} \mathcal{H}^1(\mathbf{Z}/n) \rightarrow {}_n\mathcal{H}^2(\mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

Occorre e basta provare che p è un epimorfismo. Si ha un morfismo canonico $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})$ indotto dalla sequenza esponenziale ed un isomorfismo $\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}/n) \cong \mathcal{O}_X^*/n$ indotto dalla sequenza di Kummer (cf. [5, §1]). Componendo con p si ottiene la proiezione $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_X^*/n$ e quindi la tesi. •

Mostriamo la seguente:

Proposizione 3.3 *Sia X proiettiva e non-singolare. Per ogni intero positivo n si ha una sequenza esatta*

$$0 \rightarrow H_{\mathbf{Z}}^2/n \rightarrow {}_nH^2(X_{ét}, \mathbf{G}_m) \rightarrow {}_nH^3(X_{an}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

Dimostrazione Sia n un intero positivo; allora per la natura topologica della prima classe di Chern (ad esempio cf. [SGA5 Exposé

VII, 3.8]) si ha che il seguente

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) & \xrightarrow{c\ell} & H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m) & \rightarrow & H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n) \end{array}$$

è commutativo (dopo aver fissato una radice primitiva n -esima di 1). Quindi si ottiene il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & NS^1(X)/n & \rightarrow & H^2(X_{an}, \mathbf{Z})/n & \rightarrow & H_{\mathbf{Z}}^2/n \rightarrow 0 \\ & & | \wr & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Pic}(X)/n & \rightarrow & H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n) & \rightarrow & {}_nH^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m) \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & {}_nH^3(X_{an}, \mathbf{Z}) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

dove: la riga superiore è esatta poiché $H_{\mathbf{Z}}^2$ è senza torsione, mentre quella centrale è ottenuta dalla sequenza esatta di Kummer su $X_{\acute{e}t}$; l'isomorfismo verticale di sinistra è indotto per divisibilità, la sequenza esatta verticale dal teorema dei coefficienti universali via l'isomorfismo $H^2(X_{an}, \mathbf{Z}/n) \cong H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n)$. La sequenza esatta si ricava per caccia al diagramma. ●

Corollario 3.4 (Artin-Mumford) *Il gruppo $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors}$ è un invariante birazionale di X proiettiva e non-singolare ed è nullo se X è razionale.*

Dimostrazione Dalle Proposizioni 3.3, 3.1 si ha che ${}_nH^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ è quoziente d'invarianti birazionali, nulli per le varietà razionali. ●

La tesi del Corollario 3.4 compare nell'articolo di Artin e Mumford [2, Prop.1] con un'altra dimostrazione e la versione ℓ -adica è essenzialmente [22, III.(8.9) p.146]; Artin e Mumford hanno mostrato l'esistenza

di una varietà unirazionale non-razionale poichè $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \neq 0$. Considerando il fascio \mathcal{O}_c delle funzioni continue a valori complessi si può mostrare (utilizzando la sequenza esponentiale) un isomorfismo $H^2(X_{an}, \mathcal{O}_c^*) \cong H^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ (cf. [22, I.p.49-50]) e inoltre, per un teorema di Serre (si veda [22, I.Theor. 1.6]), si ha che il gruppo di Brauer “topologico” $Br_c(X_{an})$ s’identifica a $H^2(X_{an}, \mathcal{O}_c^*)_{tors}$ dunque: $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \cong Br_c(X_{an})$.

Corollario 3.5 *Sia X proiettiva e non-singolare e sia r il rango di $H_{\mathbf{Z}}^2$.*

1. *Si ha un isomorfismo:*

$$\widehat{\mathbf{Z}}^{\oplus r} \cong T(H^2(X_{ét}, \mathbf{G}_m))$$

2. *Si ha $r = 0$ se e solo se*

$$H^2(X_{ét}, \mathbf{G}_m) \cong Br_c(X_{an})$$

Dimostrazione Passando al limite inverso nella sequenza esatta della Proposizione 3.3, poichè $T(H^3(X_{an}, \mathbf{Z})) = 0$ si ha la 1. Inoltre $H_{\mathbf{Z}}^2/n$ è zero se e solo se $r = 0$ e passando al limite diretto nella sequenza esatta della Proposizione 3.3 si ottiene la 2. •

Osservazione:

1. Ricordiamo che se X è liscia allora $H^2(X_{ét}, \mathbf{G}_m)$ è di torsione; si ha $H^2(X_{ét}, \mathbf{G}_m) = Br_c(X_{an}) = 0$ se X è razionale come conseguenza dei Teoremi 1.1, 1.2 (cf.§2). Inoltre, per ogni X , il fatto che $H^2(X_{ét}, \mathbf{G}_m)_{tors}$ s’identifichi al gruppo di Brauer delle classi di algebre di Azumaya su $X_{ét}$ è stato recentemente annunciato da O.Gabber.
2. Se X è una *superficie* proiettiva e non-singolare su \mathbf{C} la torsione di $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ s’identifica alla ‘torsione di Severi’ i.e. $NS(X)_{tors}$. Inoltre, la sequenza spettrale locale globale (1) ha tutti i differenziali nulli ed i gruppi $H^p(X, \mathcal{H}^q(A))$ sono completamente determinati mediante invarianti noti; ad esempio, $H^2(X, \mathcal{H}^2(A)) \cong$

$NS^2(X) \otimes A \cong H^4(X) \cong A$ e $H^1(X, \mathcal{H}^2(A)) \cong H^3(X)$. Se $A = \mathbf{Z}$ abbiamo che $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})/n \cong H^3(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n)$ e

$$H^3(X_{an}, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong CH_0(X)_{tors} \cong Alb(X)_{tors}$$

per il Teorema di Roitman-Bloch.

4 \mathcal{H}^3 e gruppo di Griffiths

Per ogni chiuso $Z \subset X$ di codimensione ≥ 1 si consideri la sequenza esatta lunga della coppia (X, Z)

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(X - Z) \rightarrow H_Z^p(X) \rightarrow H^p(X) \xrightarrow{\kappa_p} H^p(X - Z) \rightarrow \dots$$

Denotiamo $H^p(K(X)) \stackrel{\text{def}}{=} (R^p\omega_*A)_\eta = \varinjlim_Z H^p(X - Z)$. Passando al limite diretto al variare di Z e sfruttando la formula di proiezione si ha:

Teorema 4.1 (Grothendieck [22, III.(9.7) p.157]) *L'immagine di*

$$\kappa_p : H^p(X) \rightarrow H^p(K(X))$$

è un'invariante birazionale di X proiettiva e non-singolare.

Inoltre, come abbiamo già osservato nel §1 si ha: $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \subset H^p(K(X))$ e considerando l'omomorfismo canonico $\rho_p : H^p(X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ si ottiene una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) & \hookrightarrow & H^p(K(X)) \\ \rho_p \swarrow & & \nearrow \kappa_p \\ & H^p(X) & \end{array}$$

che identifica l'immagine di ρ_p a quella di κ_p .

Corollario 4.2 *Il conucleo di ρ_p è un'invariante birazionale di X proiettiva e non-singolare.*

Dimostrazione Conseguenza dei Teoremi 1.2, 4.1. •

Bisogna ricordare che ρ_p è surgettivo per $p = 0, 1, 2$ come abbiamo mostrato nel §3, mentre non lo è, in generale, se $p = 3$. Infatti, dalla sequenza spettrale locale-globale si ottiene una sequenza esatta (cf. [11, (8.2)])

$$H^3(X) \xrightarrow{\rho_3} H^0(X, \mathcal{H}^3(A)) \rightarrow NS^2(X) \otimes A \xrightarrow{cl^2} H^4(X) \quad (4)$$

avendo identificato $H^2(X, \mathcal{H}^2(A)) \cong NS^2(X) \otimes A$ per il Teorema 1.3. Quindi si ha che il conucleo di ρ_3 per $A = \mathbf{Z}$ è il gruppo di Griffiths $G^2(X)$ dei cicli omologicamente banali di codimensione 2 modulo equivalenza algebrica.

Si ha il seguente risultato di Bloch-Srinivas [12, p.1240] (conseguenza del Teorema di Merkur'ev-Suslin in K -teoria dei campi) :

Lemma 4.3 *Sia X non-singolare. Il fascio $\mathcal{H}^3(\mathbf{Z})$ è senza torsione.*

Dimostrazione Sfruttando la sequenza esatta di fasci (indotta dalle immagini dirette superiori di $0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n \rightarrow 0$ rispetto a $\omega : X_{an} \rightarrow X$)

$$\mathcal{H}^2(\mathbf{Z}) \xrightarrow{p} \mathcal{H}^2(\mathbf{Z}/n) \rightarrow {}_n\mathcal{H}^3(\mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

ci si riduce a provare che p è un epimorfismo (cf. Lemma 3.2). Sfruttando $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})$ indotto dalla sequenza esponenziale (cf. [5, §1]) si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_X^* \otimes \mathcal{O}_X^* & \rightarrow & \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z}) \otimes \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z}) & \rightarrow & \mathcal{H}_X^2(\mathbf{Z}) \\ \text{sym} \downarrow & & & & \downarrow p \\ \mathcal{K}_2 & \xrightarrow{q} & \mathcal{K}_2/n & \xrightarrow{res} & \mathcal{H}_X^2(\mathbf{Z}/n) \end{array}$$

dove \mathcal{K}_2 è il fascio associato al funtore di K -teoria di Quillen-Milnor che localmente è generato da 'simboli' ovvero sym è epi; q è la proiezione canonica e res è l'isomorfismo di Merkur'ev-Suslin. Dunque la composta di sym , q e res è epi e quindi p è epi. •

Dal Lemma ed il Corollario 2.2 segue che le sezioni globali di $\mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})$ sono nulle se X è unirazionale (proiettiva e non-singolare su \mathbf{C}) ovvero, più in generale, se X è dominata da \mathbf{P}_S^n dove S ha dimensione ≤ 2 .

Corollario 4.4 *Il gruppo di Griffiths $G^2(X)$ è un invariante birazionale ed è nullo se X è unirazionale.*

Corollario 4.5 *Se X è unirazionale allora $NS^2(X)$ è finitamente generato e quindi $CH^2(X)/n$ è finito.*

Osservazione: Analogamente, i precedenti Corollari 4.4 e 4.5 sono validi per X/\mathbf{C} dominata da \mathbf{P}_S^n dove S ha dimensione ≤ 2 , ad esempio i fibrati in coniche su superficie (vedi Esempio 2 nel §5). Il Corollario 4.5 estende facilmente ad X/k dove k è un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero (cf. §7.2). Infine, J.-L.Colliot-Thélène mi ha comunicato che la finitezza di $CH^2(X)/n$ risulta ancora, con un'altra dimostrazione, se X è definita sui reali o i p -adici. Per la finitezza di $CH^2(X)/n$ ma $\dim X = 3$ si veda inoltre [25, Prop.4.4].

5 Varietà di dimensione 3

In questo paragrafo consideriamo esclusivamente varietà proiettive non-singolari di dimensione 3. Se X ha dimensione 3 allora la sequenza spettrale locale-globale consente di identificare il conucleo della mappa ciclo ovvero si ha una sequenza esatta

$$NS^2(X) \otimes A \xrightarrow{cl^2} H^4(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_X^3(A)) \rightarrow 0$$

In effetti, a questo fine, è sufficiente che $H^0(X, \mathcal{H}_X^4(A)) = 0$. Per $\dim X = 3$ si ha inoltre che (cf.[2, §1])

$$H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \cong H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors}$$

e che $H^2(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) \cong H^5(X_{an}, \mathbf{Z})$ si annulla se X è semplicemente connessa.

Se $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$ allora $NS^2(X) \subseteq H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$ ed in particolare

$$NS^2(X)_{tors} \subseteq H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \quad (5)$$

Diremo che l'invariante di Artin-Mumford è *algebrico* se nella (5) vale l'uguaglianza (cf. §7).

Se X è unirazionale allora $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$ (cf. §4) e si ha un criterio puramente geometrico di non-razionalità:

Corollario 5.1 *Se X è unirazionale (proiettiva e non-singolare) di dimensione 3 ed esistono: un ciclo C di codimensione 2 non algebricamente equivalente a zero, ed un intero $n \neq 0$, tali che nC è algebricamente equivalente a zero allora X non è razionale.*

Non mi sono noti, a parte l'esempio di Artin-Mumford, esempi nelle ipotesi del precedente Corollario (cf. §7 e Esempio 2 per i fibrati in coniche); è naturale domandarsi se la torsione del gruppo di Brauer nel recente esempio di Dolgachev-Gross [19] sia algebrica.

Si consideri la mappa canonica $\varepsilon : H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^4(X_{an}, \mathbf{C})$. Poniamo per definizione

$$H_z^{2,2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) / \varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}\}$$

ovvero: $H_z^{2,2}$ è il gruppo di Hodge delle classi *intere* di tipo (2, 2) (nota: $H_z^{2,2}$ contiene anche la torsione).

Nell'ipotesi che $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$ (oppure $G^2(X) = 0$) si ha effettivamente $NS^2(X) \subseteq H_z^{2,2}$.

Teorema 5.2 *Sia X una varietà (proiettiva e non-singolare) di dimensione 3 tale che*

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$$

Allora ($n \neq 0$):

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) \cong {}_n(H_z^{2,2} / NS^2(X))$$

è un gruppo finito, nullo per quasi tutti gli $n \in \mathbf{Z}$, ed esiste N tale che

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/N)) \cong H_z^{2,2} / NS^2(X).$$

Dimostrazione Per $\dim X = 3$ è valida la congettura di Hodge, ovvero $c\ell^2 \otimes \mathbf{Q} : NS^2(X) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow H_z^{2,2} \otimes \mathbf{Q}$ è surgettiva e inoltre $H_z^{2,2}/NS^2(X)$ è finitamente generato, quindi: $(H_z^{2,2}/NS^2(X)) \otimes \mathbf{Q} = 0$ implica che $H_z^{2,2}/NS^2(X)$ è un gruppo *finito*. Dunque, basta mostrare che per ogni $n \neq 0$ il sottogruppo degli elementi di n -torsione di $H_z^{2,2}/NS^2(X)$ s'identifica a $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$ da cui l'esistenza di $N \gg 0$ come sopra segue banalmente.

Lemma 5.3 *Se X ha dimensione 3 e $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$ allora*

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) \cong {}_n H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}))$$

Dimostrazione del Lemma. Poichè ${}_n \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}) = \mathcal{H}_X^4(\mathbf{Z}) = 0$ si ha una sequenza esatta di fasci (cf. Lemma 4.3)

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}) \xrightarrow{n} \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n) \rightarrow 0$$

Siccome $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = 0$ si ha che in coomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) \xrightarrow{n} H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}))$$

•

Poiché $H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) \cong H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X)$ dal Lemma segue che la n -torsione del quoziente s'identifica a $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$; inoltre si ha una sequenza esatta, indotta dalla fattorizzazione della mappa ciclo

$$0 \rightarrow H_z^{2,2}/NS^2(X) \rightarrow H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X) \rightarrow H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/H_z^{2,2} \rightarrow 0$$

Quindi basta mostrare che $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/H_z^{2,2}$ è senza torsione. Si consideri la decomposizione di Hodge $H^4(X_{an}, \mathbf{C}) \cong H^{1,3} \oplus H^{2,2} \oplus H^{3,1}$ e la mappa canonica $\varepsilon : H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^4(X_{an}, \mathbf{C})$. In quanto $H_z^{2,2} = \{\alpha \in H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}\}$ se $\alpha \in H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$ è tale che $n\alpha \in H_z^{2,2}$ allora $\varepsilon(n\alpha) = n\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}$ e quindi le componenti in $H^{1,3}$ e $H^{3,1}$ di $n\varepsilon(\alpha)$ sono nulle; ma $H^{1,3}$ e $H^{3,1}$ sono \mathbf{C} -spazi vettoriali da cui $\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}$ ovvero $\alpha \in H_z^{2,2}$.

•

Corollario 5.4 *Nelle ipotesi del Teorema 5.2, la congettura di Hodge è valida per il gruppo di Hodge $H_{\mathbf{Z}}^{2,2}$ ovvero la classe ciclo è l'isomorfismo*

$$NS^2(X) \cong H_{\mathbf{Z}}^{2,2}$$

se e solo se si ha che

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) = 0$$

per ogni $n \in \mathbf{Z}$.

Osservazione: Atiyah-Hirzebruch [1] hanno mostrato esempi di classi di torsione in coomologia pari che sono non-algebriche; una questione interessante per tali esempi è stabilire se si ha l'annullamento di $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}))$. Infatti nelle ipotesi del Teorema 5.2, mediante il sottogruppo

$$\frac{H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors}}{NS^2(X)_{tors}} \subset H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$$

si avrebbe una sezione globale non-nulla per qualche n . D'altra parte, se l'invariante di Artin-Mumford è nullo i.e. $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, si potrebbe ancora avere $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) \neq 0$ per qualche n .

Se X è unirazionale di dimensione 3 allora si ha che $H^{1,3} = H^{3,1} = 0$ (cf. [2, §1]) e quindi $H_{\mathbf{Z}}^{2,2} = H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$. Inoltre, il quoziente

$$H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/cl^2(NS^2(X))$$

s'identifica al gruppo finito $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$ per qualche $n \neq 0$.

Nei seguenti esempi si discutono casi in cui $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) = 0$; sono sconosciuti, nelle ipotesi del Teorema 5.2, controesempi a questo annullamento.

Esempio 1: (*Varietà di Fano*) Sia X una varietà di Fano (ovvero con sistema anticanonico ampio) unirazionale di prima specie, cioè $\text{Pic } X = H\mathbf{Z}$, con invariante di Artin-Mumford nullo. Abbiamo un

diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} NS^2(X) \otimes NS^1(X) & \rightarrow & NS^3(X) \cong \mathbf{Z} \\ \downarrow & & \cong \downarrow \\ H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) \otimes H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) & \rightarrow & H^6(X_{an}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \end{array}$$

indotto dai prodotti d'intersezione e le mappe ciclo. Dalle nostre ipotesi segue che $NS^1(X) \cong H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) \cong H\mathbf{Z}$, $NS^2(X) = C\mathbf{Z}$ e $H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) = T\mathbf{Z}$; la mappa ciclo $cl^2 : NS^2(X) \rightarrow H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$ è dunque la moltiplicazione per un intero ovvero $cl^2(C) = nT$. Diciamo che C è una “cicloretta” se $C \cdot H = \mp 1$. Come mi ha fatto osservare V. Srinivas, dalla commutatività del diagramma, ed il fatto che $T \cdot H = \mp 1$ per dualità di Poincarè, segue che cl^2 è un isomorfismo se e solo se C è una cicloretta. Questo, per il Teorema 5.2, risulta ancora equivalente all'annullarsi di $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$.

Se $H = -K_X$ ovvero X ha indice 1 allora esiste una cicloretta, ed infatti una retta, per un teorema di Shokurov (“Congettura di Fano”). Restano le varietà di Fano di indice 2 (indice 4 e 3 sono razionali) oppure con secondo numero di Betti ≥ 2 .

Esempio 2: (*Fibrati in coniche*) Nella terminologia di Bloch [7, Def.1.8 p.10] un fibrato in coniche su una superficie S è una varietà X ed una mappa razionale $\pi : X \dashrightarrow S$ tale che la fibra geometrica generica è isomorfa a \mathbf{P}^1 . Ovvero, esiste un morfismo genericamente finito (di grado 2) $f : S' \rightarrow S$ tale che il prodotto fibrato $X \times_S S'$ è birazionale a $\mathbf{P}_{S'}^1$. Si ha dunque una applicazione razionale dominante $\varphi : \mathbf{P}_{S'}^1 \dashrightarrow X$. Mediante un numero finito di scoppiamenti possiamo eliminare l'indeterminazione di φ . Siccome si ha $H^0(P_{S'}^1, \mathcal{H}^3(A)) \cong H^0(S', \mathcal{H}^3(A)) = 0$ per questioni dimensionali, ne consegue che il gruppo $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(A))$ è di 2-torsione. Se $A = \mathbf{Z}$ è quindi nullo. Per il Teorema 5.2 si ha l'esistenza di $N \gg 0$ tale che $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/N)) \cong H_{\mathbf{Z}}^{2,2}/NS^2(X)$ ma $2H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/N)) = 0$ e quindi si può porre $N = 2$. Per quanto precede, il risultato di Colliot-Thélène [13] che dimostra $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/2)) = 0$ ci permette di concludere che (cf.

Corollario 5.4)

$$NS^2(X) \cong H_{\mathbf{Z}}^{2,2}$$

in particolare: l'invariante di Artin-Mumford è *algebrico* per i fibrati in coniche.

L'iniettività della mappa ciclo veniva dimostrata in una lettera di Bloch a Beauville [8] per riduzione ad un aperto U di S e provando che $\pi : V \rightarrow U$ induce l'isomorfismo $\pi_* : NS^2(V) \cong NS^1(U)$; sarebbe interessante stabilire se $NS^2(X)_{tors} \cong NS^1(S)_{tors}$.

In generale, per $\pi : X \dashrightarrow S$ con fibra geometrica generica \mathbf{P}^n si ha $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z})) = 0$, analogamente.

Per un fibrato in coniche ordinario nel senso di A. Beauville [6, Def.1.3 p.322] si ha che $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ non ha torsione [6, Theor.2.1.(i)].

Esempio 3: Se $\pi : X \rightarrow Y$ è un morfismo piatto tale che esiste un aperto denso $U \subset Y$ per cui $\pi : \mathbf{P}_U^n \rightarrow U$ è la proiezione canonica allora $H^0(X, \mathcal{H}^i(A)) = 0$ per $i > \dim Y$ ed $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$: infatti si ha

$$H^0(X, \mathcal{H}^i(A)) \subset H^0(\mathbf{P}_U^n, \mathcal{H}^i(A)) \cong H^0(U, \mathcal{H}^i(A)) = 0$$

se $i > \dim U$.

Esempio 4: Sia X una varietà di dimensione 3, possibilmente non-unirazionale, che contiene una superficie S , chiusa e liscia, e supponiamo $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Allora $H^0(S, \mathcal{H}_S^2(\mathbf{Z})) = 0$ e quindi

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) = H^0(X - S, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z}))$$

(cf. §1, §3). Se inoltre $U = X - S$ è affine allora la sequenza esatta

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z})) \xrightarrow{p} NS^2(U) \rightarrow H^4(U_{an}, \mathbf{Z}) = 0$$

regala la proiezione p . Dunque, se $NS^2(X - S) \neq 0$ allora X non è unirazionale (esiste un tale esempio!?). In questa situazione si ha comunque una sequenza esatta

$$NS^1(S) \rightarrow NS^2(X) \rightarrow NS^2(X - S) \rightarrow 0$$

ed un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} NS^1(S) & \rightarrow & NS^2(X) \\ c\ell^1 \downarrow & & \downarrow c\ell^2 \\ H^2(S) & \xrightarrow{\sigma} & H^4(X) \end{array}$$

nel quale σ e $c\ell^1$ sono surgettive (poichè $H^4(X-S) = H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$) e quindi $c\ell^2$ è surgettiva ovvero $H^4(X) \cong H^{2,2}$. Se X è unirazionale allora $c\ell^2$ è un isomorfismo e si ha $NS^2(X-S) = H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n)) = 0$. Questa situazione si verifica per alcune varietà di Fano dove S è infatti una superficie di Del Pezzo.

6 Coomologia di Deligne-Beilinson

Ricordiamo (vedere [20] e [24] per una esposizione dettagliata) che i gruppi $H_{\mathcal{D}}^q(X, \mathbf{Z}(p))$ di coomologia di Deligne-Beilinson sono definiti, per X proiettiva e non-singolare su \mathbf{C} , come l'ipercoomologia di X_{an} a coefficienti nel complesso di De Rham troncato

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}(p) \rightarrow \mathcal{O}_{X_{an}} \rightarrow \Omega^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^{p-1} \rightarrow 0$$

dove $\mathbf{Z}(p) \stackrel{\text{def}}{=} (2i\pi)^p \mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. Ad esempio, si ha $H_{\mathcal{D}}^2(X, \mathbf{Z}(1)) \cong \text{Pic}(X)$. I gruppi $H_{\mathcal{D}}^{2p}(X, \mathbf{Z}(p))$ estendono le jacobiane intermedie $J^p(X)$ mediante i cicli di Hodge $H_{\mathbf{Z}}^{p,p}$ ovvero si ha una sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow J^p(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{2p}(X, \mathbf{Z}(p)) \rightarrow H_{\mathbf{Z}}^{p,p} \rightarrow 0$$

La definizione di $H_{\mathcal{D}}^*(X, \mathbf{Z}(\cdot))$ si estende alle varietà quasi-proiettive considerando una “buona” compattificazione ed il complesso di De Rham logaritmico troncato; si ottiene (cf. [21], [24, Theor.1.19]) una teoria di dualità di Poincaré con supporti nel senso di Bloch-Ogus [11, §1]. Di conseguenza si hanno risultati analoghi a quelli del §1 per i fasci $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}^*(\cdot)$ ed in particolare (cf. [21], [3], [4, A.3]):

1. Si ha $H^p(X, \mathcal{H}_{\mathcal{D}}^p(p)) \cong CH^p(X)$.
2. Si ha una mappa ciclo $c\ell_{\mathcal{D}}^p : CH^p(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{2p}(X, \mathbf{Z}(p))$.

3. I gruppi delle sezioni globali $H^0(X, \mathcal{H}_{\mathcal{D}}^q(p))$ sono invarianti birazionali che, se X è razionale, s'identificano a

$$H_{\mathcal{D}}^q(\text{Spec } \mathbf{C}, \mathbf{Z}(p)) = \mathbf{H}^q(\text{Spec } \mathbf{C}, \mathbf{Z}(p) \hookrightarrow \mathbf{C})$$

E inoltre:

Teorema 6.1 *Sia X proiettiva e non-singolare su \mathbf{C} . Si ha un morfismo di estensioni*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A^p(X) & \rightarrow & CH^p(X) & \rightarrow & NS^p(X) \rightarrow 0 \\ & & \theta^p \downarrow & & \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^p \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}^p \\ 0 & \rightarrow & J^p(X) & \rightarrow & H_{\mathcal{D}}^{2p}(X, \mathbf{Z}(p)) & \rightarrow & H_{\mathbf{Z}}^{p,p} \rightarrow 0 \end{array}$$

dove θ^p è la mappa di Abel-Jacobi e \mathcal{C}^p è l'usuale classe ciclo.

Dimostrazione Ad esempio: [24, §1.21, Lemma 1.22] (cf. [20, §7] e [21]). •

Corollario 6.2 *Sia X proiettiva e non-singolare su \mathbf{C} .*

1. *Il gruppo dei 2-cicli omologicamente nulli che hanno classe di Abel-Jacobi nulla modulo equivalenza razionale (ovvero il nucleo di $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^2 : CH^2(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^4(X, \mathbf{Z}(2))$) è un invariante birazionale.*
2. *Il sottogruppo dei 2-cicli algebricamente nulli che hanno classe di Abel-Jacobi nulla modulo equivalenza razionale (ovvero il nucleo di $\theta^2 : A^2(X) \rightarrow J^2(X)$) è un invariante birazionale.*

Questi invarianti birazionali sono nulli per le varietà unirazionali. Infatti, sia X unirazionale oppure un fibrato in coniche su una superficie S nel senso che: $\pi : X \dashrightarrow S$ con fibra geometrica generica \mathbf{P}^1 ed inoltre assumiamo che $A^2(S)$ sia "rappresentabile" (cf. [7, Def.1.1]) ovvero $\theta^2 : A^2(S) \cong J^2(S)$ (si confronti l'Esempio 2); sotto queste ipotesi S. Bloch [7, Prop.1.9] ha mostrato che la mappa $\theta^2 : A^2(X) \rightarrow J^2(X)$ è surgettiva con nucleo finito. In effetti, si ha ([18, §1.3]) che θ^2 è iniettiva sulla torsione quindi θ^2 è un isomorfismo nelle ipotesi precedenti. Utilizzando i risultati dei §4, §5 si ha:

Corollario 6.3 *Nelle ipotesi precedenti la mappa ciclo*

$$cl_{\mathcal{D}}^2 : CH^2(X) \hookrightarrow H_{\mathcal{D}}^4(X, \mathbf{Z}(2))$$

è iniettiva. Inoltre la congettura di Hodge per le classi razionali di tipo (2, 2) è vera se e solo se $cl_{\mathcal{D}}^2$ ha conucleo finito; in questo caso si ha un isomorfismo

$$cl_{\mathcal{D}}^2 \otimes \mathbf{Q} : CH^2(X) \otimes \mathbf{Q} \cong H_{\mathcal{D}}^4(X, \mathbf{Z}(2)) \otimes \mathbf{Q}$$

Dimostrazione Per il Teorema 6.1 ed $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z})) = 0$ si ha che cl^2 è iniettiva e quindi $\ker cl_{\mathcal{D}}^2 = \ker \theta^2 = 0$. Inoltre, il conucleo di $cl_{\mathcal{D}}^2$ s'identifica a $H_{\mathbf{Z}}^{2,2}/NS^2(X)$ che è finitamente generato. Se $(H_{\mathbf{Z}}^{2,2}/NS^2(X)) \otimes \mathbf{Q} = 0$ allora la congettura di Hodge è vera e si ha che $H_{\mathbf{Z}}^{2,2}/NS^2(X)$ è un gruppo finito (e viceversa). •

Osservazione: Ogni varietà 3-dimensionale, come sopra, soddisfa le ipotesi del Corollario 6.3. Se X è razionale di dimensione 3 allora la mappa ciclo $cl_{\mathcal{D}}^2$ è già un isomorfismo su \mathbf{Z} . Infatti, la nullità del nucleo ed il conucleo di $cl_{\mathcal{D}}^2$ è birazionale in X .

Conformemente a Soulé-Beilinson (cf. [24, 3.5 p.343]), i gruppi di coomologia motivica $H_{\mathcal{M}}^j(X, \mathbf{Q}(i)) \stackrel{\text{def}}{=} K_{2i-j}^{(i)}(X)$ sono definiti come i \mathbf{Q} -autospaazi $K_*^{(i)}$ associati alle operazioni di Adams sui gruppi $K_*(X) \otimes \mathbf{Q}$ di alta K-teoria di Quillen [26]. Una definizione equivalente di coomologia motivica, dovuta a Soulé, utilizza l'isomorfismo $K_j^{(i)}(X) \cong gr_{\gamma}^i K_j(X) \otimes \mathbf{Q}$ (il graduato associato alla γ -filtrazione). In particolare ($j = 2i$) si ha $H_{\mathcal{M}}^{2i}(X, \mathbf{Q}(i)) \cong CH^i(X) \otimes \mathbf{Q}$ da un calcolo diretto con la sequenza spettrale di Brown-Gersten, infatti: $gr_{\gamma}^i K_0(X) \otimes \mathbf{Q} \cong gr_{top}^i K_0(X) \otimes \mathbf{Q} \cong CH^i(X) \otimes \mathbf{Q}$ dove 'top' indica la filtrazione per codimensione del supporto. Inoltre Beilinson ha definito dei "regolatori" $r_{\mathcal{D}} : H_{\mathcal{M}}^j(X, \mathbf{Q}(i)) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^j(X, \mathbf{Q}(i))$ che s'identificano alla mappa ciclo $cl_{\mathcal{D}} \otimes \mathbf{Q}$ per $j = 2i$ (vedere [24, Lemma 3.8.b]). Nelle ipotesi del Corollario 6.3 si ha che, almeno nel caso X/\mathbf{C} , il regolatore

$$r_{\mathcal{D}} : H_{\mathcal{M}}^4(X, \mathbf{Q}(2)) \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{D}}^4(X, \mathbf{Q}(2))$$

è un isomorfismo.

7 Alcune questioni

Si hanno in generale, per una varietà algebrica definita su un campo k arbitrario, le seguenti questioni.

7.1 $k = \mathbf{C}$

Sempre supponendo X proiettiva e non-singolare su \mathbf{C} . Oltre al problema fondamentale di mostrare l'annullamento o meno dell'invariante $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z}/n))$ per le varietà 3-dimensionali unirazionali, e quindi di discutere nuovi esempi (fibrati in Del Pezzo, in curve ellittiche, etc.), sarebbe interessante stabilire se l'invariante di Artin-Mumford è sempre algebrico. Per le varietà di dimensione ≥ 4 si attende la seguente:

Congettura 1 *Se X è unirazionale allora le sezioni globali di $\mathcal{H}_X^i(\mathbf{Z})$ sono nulle anche per $i \geq 4$.*

Infatti è ragionevole che i fasci $\mathcal{H}_X^i(\mathbf{Z})$ siano sempre senza torsione (cf. [9, p.50-51]).

Ad esempio, se X ha dimensione ≥ 4 ed il fascio $\mathcal{H}_X^4(\mathbf{Z})$ è senza torsione allora, per X unirazionale, si ha analogamente al §5, che: $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbf{Z}/n))$ è la n -torsione del quoziente $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X)$. Infine, è naturale domandarsi:

Problema 1 *Quali gruppi di Griffiths $G^r(X)$ sono invarianti birazionali? Per quali r si ha $G^r(X) = 0$ se X è unirazionale?*

Gli esempi conosciuti sembrano indicare che $G^2(X)$ è non finitamente generato o nullo. S. Bloch congettura che sia un gruppo divisibile mentre vi sono esempi di C. Schoen [27] di ipersuperfici V in \mathbf{P}^{2r} tali che ${}_2G^r(V) \neq 0$.

7.2 $k = \bar{k}$

Sia X una varietà algebrica completa e non-singolare su un campo k algebricamente chiuso arbitrario. Il gruppo di Griffiths $G^2(X_k)$ è definito (cf. [27], [12]) come quoziente dei cicli con classe ℓ -adica nulla (per ogni $\ell \neq \text{char} k$) modulo equivalenza algebrica.

Congettura 2 $G^2(X_k)$ è un invariante birazionale che si annulla per X unirazionale su k (a meno forse di p -torsione per $p = \text{char} k > 0$).

Per quanto riguarda la finita generazione di $NS^2(X)$ poco è conosciuto in generale; se X è unirazionale allora $NS^2(X)$ è finitamente generato, almeno in caratteristica zero: infatti, la n -torsione di $NS^2(X)$ è un gruppo finito (infatti lo è la n -torsione di $CH^2(X)$ per Merkur'ev-Suslin) e se $f : Y \rightarrow X$ è genericamente finito ed Y è razionale allora la moltiplicazione per il grado di f in $NS^2(X)$ si fattorizza per $NS^2(Y)$ che è finitamente generato.

In quanto $NS^2(X)/n \cong CH^2(X)/n$ dalla finita generazione del gruppo $NS^2(X)$ si ottiene la finitezza di $CH^2(X)/n$.

Per X unirazionale di dimensione 3 (se $G^2(X_k) = 0$) l'esistenza di cicli di torsione in $NS^2(X)$ implica la non-razionalità di X .

7.3 k qualunque

Al fine di controllare il gruppo $CH^2(X)/n$ ricordiamo il seguente problema posto da Colliot-Thélène [14, §3.3.2 p. 14], [16, Question 1) §3.1 p.92].

Problema 2 Se X (proiettiva non-singolare) ha un k -punto razionale allora la mappa ciclo

$$CH^2(X)/n \rightarrow H^4(X_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes 2})$$

è iniettiva?

Il problema è aperto anche su \mathbf{C} . Se X è definita su \mathbf{C} , nelle ipotesi del Teorema 5.2, si ha una parziale risposta al Problema 2. Infatti, se ad esempio $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, si ha una sequenza esatta

$$0 \rightarrow H_{\mathbf{Z}}^{2,2}/NS^2(X) \rightarrow CH^2(X)/n \rightarrow H^4(X_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2})$$

per qualche $n \gg 0$.

Per quanto concerne $NS^2(X)$ sembra auspicabile trovare condizioni su k affinché la seguente questione abbia risposta affermativa.

Problema 3 *Se X è geometricamente unirazionale (ovvero lo diviene mediante una estensione algebrica di k) allora $NS^2(X)$ è finitamente generato?*

Ancora, dalla finitezza di $A^2(X)/n$ segue la finitezza di $CH^2(X)/n$.

Bibliografia

- [1] M.F. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH: Analytic cycles on complex manifolds, *Topology* **1** (1962), 25-45.
- [2] M. ARTIN, D. MUMFORD: Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 75-95.
- [3] L. BARBIERI-VIALE: Des invariants birationnels associés aux théories cohomologiques, *C.R. Acad. Sci. Paris* **315** Série I (1992), 1259-1262.
- [4] L. BARBIERI-VIALE: \mathcal{H} -cohomologies versus algebraic cycles, typescript, 1994.
- [5] L. BARBIERI-VIALE, V. SRINIVAS: On the Néron-Severi group of a singular variety, *J. reine angew. Math.* **435** (1993) 65–82.
- [6] A. BEAUVILLE: Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **10** (1977), 309-391.

- [7] S.BLOCH: An example in the theory of algebraic cycles, in *Springer LNM* **551** (1976).
- [8] S.BLOCH: Lettera a A. Beauville, 1977.
- [9] S.BLOCH: Lectures on algebraic cycles, *Duke University*, 1980.
- [10] S.BLOCH, J.MURRE: On the Chow group of certain types of Fano threefolds, *Compositio Math.* **39** (1979), 47-105.
- [11] S.BLOCH, A.OGUS: Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.* **7** (1974), 181-202.
- [12] S.BLOCH, V.SRINIVAS: Remarks on correspondences and algebraic cycles, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 1235-1253.
- [13] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE: Comunicazione ad Oberwolfach, Luglio 1989 (in appendice a R.PARIMALA: Witt groups vis-à-vis Chow groups, preprint.)
- [14] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE: Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in Arithmetic Algebraic Geometry (Corso CIME, 1991) *Springer LNM* **1553** 1-49.
- [15] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE , M. OJANGUREN: Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, *Invent. Math.* **97** (1989), 141-158.
- [16] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE, R.PARIMALA: Real components of algebraic varieties and étale cohomology, *Invent. Math.* **101** (1990), 81-99.
- [17] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE, W.RASKIND: \mathcal{K}_2 -cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165-199.
- [18] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J.SANSUC, C.SOULÉ: Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983), 763-801.

- [19] I.DOLGACHEV, M.GROSS: Elliptic three-folds I: Ogg-Shafarevich theory, preprint, 1992.
- [20] H.ESNAULT, E.VIEHWEG: Deligne-Beilinson cohomology, in *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Academic Press Perspectives in Math. **4** (1987), 43-92.
- [21] H.GILLET: Deligne homology and the Abel-Jacobi maps, *Bull. AMS* **10** (1984), 285-288.
- [22] A.GROTHENDIECK: Le groupe de Brauer: I, II, III, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North Holland, Amsterdam, 1968.
- [23] R.HARTSHORNE: *Residues and Duality*, Springer LNM **20** (1966).
- [24] U.JANNSEN: Deligne homology, Hodge- \mathcal{D} -conjecture and motives, in *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Academic Press Perspectives in Math. **4** (1987), 43-92.
- [25] R.PARIMALA: Witt groups of affine threefolds, *Duke Math.J.* **57** (1988), 947-954.
- [26] D.QUILLEN: Higher algebraic K-theory: I, in *Springer LNM* **341** (1973).
- [27] C.SCHOEN: Some examples of torsion in the Griffiths group, *Math. Annalen* **293** (1992), 651-679.
- [28] J.-P.SERRE: On the fundamental group of a unirational variety, *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 481-484.

LUCA BARBIERI-VIALE
 UNIVERSITÀ DI GENOVA
 DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
 VIA L.B.ALBERTI, 4
 GENOVA 16132 - ITALIA