MAKHLOUF DERRIDJ
D. TARTAKOFF

Analyticité microlocale pour $\square_b$ dans des domaines pseudoconvexes découplés

Astérisque, tome 217 (1993), p. 75-83
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__75_0>

ANALYTICITE MICROLOCALE POUR $\Box_b$ DANS DES DOMAINES PSEUDOCONVEXES DECOUPLES.

Makhlouf DERRIDJ & D. TARTAKOFF

1. Introduction

Le but de ce travail est d'étendre à l'opérateur $\Box_b$ certains résultats que nous avons obtenus pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann [4] concernant la régularité analytique des solutions. En fait dans [4] nous avons aussi donné de tels résultats pour $\Box_b$ mais avec des restrictions de dimension et aussi des restrictions portant sur la taille des blocs apparaissant dans l'hypothèse de découplage. De telles restrictions sont inhérentes à la méthode d'estimations semi-maximales utilisées pour majorer convenablement les dérivées dans les directions complexes et dans la direction dite "manquante" de la solution considérée.

Il s'avère que si on veut s'affranchir de la restriction sur la taille des blocs, en dimension $n \geq 3$, il faut pouvoir se passer d'estimations semi-maximales. Le problème posé par l'opérateur $\Box_b$ est qu'il est caractéristique dans la direction non complexe. Les résultats généraux connus en E.D.P. (par exemple [9], [11]) disent que $\Box_b$ est hypoelliptique analytique dans les directions complexes, qui sont des "directions elliptiques pour $\Box_b$". Donc il suffit de regarder l'hypoellipticité analytique de $\Box_b$, dans deux directions à savoir "direction manquante positive" et "direction manquante négative" : c'est l'analyticité microlocale pour $\Box_b$. Pour cela l'idée naturelle est d'établir, pour chacune de ces deux directions, des estimations, qui sont dites microlocales, qui seront différentes entre elles. La méthode microlocale a été utilisée par J. J. Kohn dans d'autres contextes ([7]).

En fait de telles estimations seront établies dans des domaines plus généraux que ceux considérés dans l'étape concernant la régularité analytique proprement dite, étape qui nécessite des restrictions liées aux exigences dues aux "opérateurs localisants" considérés.

Mentionnons que le cas $n = 2$ relève de techniques plus particulières et on connaît surtout des contre-exemples ([1]), tandis que pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann le cas $n = 2$ ne diffère pas des autres cas. Pour des travaux touchant notre sujet citons ([4] [9] [11] [12] [13] [14]) en ce qui concerne la régularité locale.

2. Quelques notations et définitions.

Commençons par rappeler que l'opérateur $\Box_b$ est défini par

$$\Box_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$$

où $\bar{\partial}_b$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann induit par l'opérateur $\bar{\partial}$ de l'espace ambiant $\mathbf{C}^n$ sur l'hypersurface considérée S, et $\bar{\partial}_b^*$ son adjoint.

Rappelons aussi que l'espace tangent complexifié de S se décompose en :

$$\mathbf{C}TS = \mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}} \oplus \mathbf{T}$$

où $\mathbb{L}$ désigne l'espace des directions holomorphes, $\bar{\mathbb{L}}$ son conjugué, et $\mathbf{T}$ est une "direction manquante". Choisissons une base $L_1, \cdots, L_{n-1}$ de $\mathbb{L}$ et T un vecteur définissant $\mathbf{T}$; on peut choisir T purement imaginaire. Alors la forme de Levi de S est représentée par la matrice (c_{jk}), j, k variant de 1 à $n-1$, où

$$[L_j, \bar{L}_k] = c_{jk}T \quad (\text{modulo } \mathbb{L},\ \bar{\mathbb{L}}). \tag{2.1}$$

Nous travaillerons toujours au voisinage du point 0.

Hypothèse sur la forme de Levi de S :
(2.2) *Il existe une base $(L_1, \cdots, L_{n-1})$ de $\mathbb{L}$ telle que :*

$$(c_{j,k}) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

où chaque bloc A_r est une matrice positive dont les valeurs propres sont comparables (voir [2] pour l'introduction de cette notion).

Notons $t_j = \mathrm{tr}(A_j)$. Alors $\exists \epsilon > 0 : \epsilon t_j \leq A_j$.
Pour bien distinguer les blocs A_r nous donnons des notations supplémentaires.
Notons $(L_1, \cdots, L_{j_1})$ les champs holomorphes qui donnent la partie A_1, $(L_{j_1+1}, \cdots, L_{j_2})$ ceux qui donnent A_2 et ainsi de suite. Si $(w_1, \cdots, w_{n-1})$ est le base duale de $(L_1, \cdots, L_{n-1})$ une $(0,1)$ forme v s'écrira $v = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \bar{w}_j$. Posons alors les définitions

$$\begin{cases} J_1 = (1, \cdots, j_1),\ J_2 = (j_1+1, \cdots, j_2) \ \text{ etc...} \\ v = (v_1, \cdots, v_{n-1}),\quad v_j \in \mathcal{D}(V),\ \ V \text{ voisinage de } 0 \\ v_{J_m} = (v_j)_{j \in J_m} \\ \| \bar{\mathbb{L}} v \|^2 = \sum\limits_{j,k} \| \bar{\mathbb{L}}_j v_k \|^2 \quad , \quad \| L v \|^2 = \sum\limits_{j,k} \| L_j v_k \|^2 \\ \| \bar{L}_{J_k} v_{J_m} \|^2 = \sum\limits_{i \in J_k, j \in J_m} \| \bar{L}_i v_j \|^2 \quad , \quad \| L_{J_k} v_{J_m} \|^2 = \sum\limits_{i \in J_k, j \in J_m} \| L_i v_j \|^2 \,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Introduisons maintenant deux opérateurs pseudodifférentiels qui microlocalisent dans la direction "T positive" et dans la direction "T négative".

Soit $(x_1, \cdots, x_{2n}, t)$ un système de coordonnées tel que $T = \frac{1}{i}\partial_t$. Les variables $(x_1, \cdots, x_{2n})$ sont celles "des directions $\mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}}$". Notons alors (ξ, τ) les variables duales de (x, t). Considérons les fonctions $p^+(\xi, \tau)$ et $p^-(\xi, \tau)$ de J. J. Kohn ([7]).

La fonction p^+ vaut 1 sur le cône tronqué :

$$2 \leq |(\xi, \tau)|, \left| \frac{(\xi, \tau)}{|(\xi, \tau)|} - \frac{\tau}{|\tau|} \right| \leq \frac{1}{10},$$

et vaut 0 hors du cône tronqué :

$$1 \leq |(\xi, \tau)|, \quad \left| \frac{(\xi, \tau)}{|(\xi, \tau)|} - \frac{\tau}{|\tau|} \right| \leq \frac{1}{5}.$$

De façon analogue, la fonction p^- vaut 1 sur le cône tronqué :

$$2 \leq |(\xi,\tau)|, \quad \left|\frac{(\xi,\tau)}{|(\xi,\tau)|} + \frac{\tau}{|\tau|}\right| \leq \frac{1}{10} ;$$

et vaut 0 hors du cône tronqué :

$$1 \leq |(\xi,\tau)|, \quad \left|\frac{(\xi,\tau)}{|(\xi,\tau)|} + \frac{\tau}{|\tau|}\right| \leq \frac{1}{5}.$$

On note alors $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^+(D)$ et $\mathcal{P}^- = \mathcal{P}^-(D)$, les opérateurs pseudo différentiels d'ordre 0 de symboles p^+ et p^-. Remarquons alors qu'en dehors des supports de p^+ et p^-, $\square_b$ est elliptique, donc (microlocalement) hypoelliptique analytique.

3. Estimations microlocales et sous-elliptiques.

Ces estimations sont regroupées dans les deux théorèmes suivants :

THEOREME 3.1. *Sous l'hypothèse (2.2) les estimations suivantes sont satisfaites :*

$$a) \ \| \bar{L}\mathcal{P}^+ v \|^2 + \sum_{j=1}^{p} \| L_{J_j}\mathcal{P}^+ v_{J_j} \|^2 + \sum_{j=1}^{p} \| \sqrt{t_j} L\mathcal{P}^+ v_{J_j} \| + \sum_{j=1}^{p} (t_j T\mathcal{P}^+ v_{J_j}, \mathcal{P}^+ v_{J_j}) \leq$$

$$\leq C\,(\square_b \mathcal{P}^+ v, \mathcal{P}^+ v) + C \| \mathcal{P}^+ v \|^2 \qquad \forall v \in \mathcal{D}^{0,1}(V).$$

$$b) \ \| L\mathcal{P}^- v \|^2 + \sum_{j\neq m} \| \bar{L}_{J_j}\mathcal{P}^- v_{J_m} \|^2 + \sum_{|J_m|>1} \| \bar{L}_{J_m}\mathcal{P}^- v_{J_m} \|^2 + \sum_{j\neq m} \| \sqrt{t_j}\bar{L}\mathcal{P}^- v_{J_m} \|^2 +$$

$$+ \sum_{|J_m|>1} (t_m T\mathcal{P}^- v_{J_m}, \mathcal{P}^- v_{J_m}) - \sum_{k\neq m} (t_k T\mathcal{P}^- v_{J_m}) \leq C(\square_b \mathcal{P}^- v, \mathcal{P}^- v) + C \| \mathcal{P}^- v \|^2 \quad \forall v \in \mathcal{D}^{0,1}(V)$$

Idée de la démonstration du théorème 3.1. On traite le cas de v^-. Le cas de v^+ relève des mêmes techniques.

$$J^{\pm} = O(\| \bar{L}\mathcal{P}^{\pm} v \|_{L^2} \| \mathcal{P}^{\pm} v \|_{L^2} + \| \mathcal{P}^{\pm} v \|_{L^2}^2) \tag{2.3}$$

et

$$J^{\pm} = O(\| L\mathcal{P}^{\pm} v \|_{L^2} \| \mathcal{P}^{\pm} v \|_{L^2} + \| \mathcal{P}^{\pm} v \|_{L^2}^2).$$

On utilisera

$$\| \sqrt{t_k} L_j v_m \|_{L^2}^2 = \| \sqrt{L_k}\bar{L}_j v_m \|_{L^2}^2 + (t_k c_{jj} T v_m, v_m)_{L^2} + J \tag{2.4}$$

$$Q_b(\mathcal{P}^- v \mathcal{P}^- v) = \sum_{k,m} \| \bar{L}_{J_k}\mathcal{P}^- v_{J_m} \|_{L^2}^2 + \sum_{k,m} (c_{km} T\mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2} + J^-$$

$$= \sum_{k=m} (1-\alpha_m) \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + (1-\beta) \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2$$

$$+ \sum_{k=m} \alpha_m \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \beta \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_{k,m} (c_{km} T \mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2} + J^-$$

$$= \sum_k (1-\alpha_k) \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel_{L^2}^2 + (1-\beta) \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_k \alpha_k \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel_{L^2}^2$$

$$+ \beta \sum_{k\neq m} \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_{k,m} (c_{km} T \mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2} + J^-$$

$$- \sum_m \sum_{k,r\in J_m} \alpha_m (c_{kk} T \mathcal{P}^- v_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2} - \beta \sum_m \sum_{k\in J_m, r\notin J_m} (c_{kk} T \mathcal{P}^- v_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2}$$

$$= \sum_k (1-\alpha_k) \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel_{L^2}^2 + (1-\beta) \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_k \alpha_k \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel_{L^2}^2$$

$$+ \beta \sum_{k\neq m} \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_{k,m} (c_{km} T \mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2}$$

$$- \sum_m \sum_{r\in J_m} \alpha_m (t_m T \mathcal{P}^- r_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2} - \beta \sum_{p\neq m} \sum_{r\in J_m} (t_p T \mathcal{P}^- v_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2} + J^-.$$

Soit $t'_k = \sum_{j\neq k} t_j$. Alors on écrit les quatre derniers termes comme :

$$\sum_m ((A_m - \alpha_m t_m - \beta t'_m) T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} + J^-.$$

Quand la dimension de A_m est au moins 2 la condition de trace dit que $A_m \leq (1-\delta) t_m$ pour un $\delta > 0$. Ainsi pour α_m plus grand que $1-\delta$, $A_m - \alpha_m t_m$ est un opérateur négatif et d'après l'inégalité précisée de Gärding, on a :

$$((A_m - \alpha_m t_m) T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} \geq 0 \bmod J^-,$$

ainsi que

$$\sum_m (-\beta t'_m T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} = \beta \sum_m (-t'_m T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} \geq 0 \mod J^-.$$

Quand la dimension de A_m est 1, on prend $\alpha_m = 1$ de telle sorte que $(A_m - \alpha_m t_m) T \mathcal{P}^-$ est un opérateur positif. Tenant compte de tout cela, on a :

$$\sum_{|J_k|>1} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel_{L^2}^2 + \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_k \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel_{L^2}^2$$

$$+ \sum_{k\neq m} \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel_{L^2}^2 + \sum_{|J_m|>1} (t_m T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} +$$

$$+\sum_m \left(-t'_m T \mathcal{P}^- v_{J_m}, \mathcal{P}^- v_{J_m}\right)_{L^2} \leq C Q_b(\mathcal{P}^- v, \mathcal{P}^- v) + J^-.$$

Le cas à forme de Levi diagonalisable est fait dans [6].

Maintenant, en vue de la régularité C^∞, l'estimation sous-elliptique suivante est utile, lorsqu'on a une hypothèse de finitude d'un certain type (voir [3]).

Soit $\mathcal{L}_j$ le système de champs $(\Re\mathrm{e}\, L_k, \Im\mathrm{m}\, L_k)_{k\in J_j}$. Soit m_j l'entier minimum tel que un crochet de longueur m_j formé de champs de $\mathcal{L}_j$ ait une composante non nulle sur T dans V.

Hypothèse de finitude : $m = \sup\limits_j m_j$ est fini.

THEOREME 3.2. *Supposons de plus m fini et $n \geq 3$. Alors*

$$\| v \|^2_{1/m} \leq C(\Box_b v, v) + C \| v \|^2) \qquad \forall v \in \mathcal{D}^{0,1}(V).$$

Idée de la démonstration du théorème 3.2.

La démonstration repose sur le théorème de L. Hörmander suivant [7] (amélioré par L. Rothschild & E. Stein).

THEOREME. *Soit $(X_1, \cdots, X_r)$ r champs de vecteurs, C^∞ dans un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que le rang de Lie $(X_1, \cdots, X_r)$ en 0 est maximal (engendré en considérant des crochets de longueur $\leq m$). Alors si K est un compact de V, il existe C_K tel que*

$$\| u \|^2_{\frac{1}{m}} \leq C_k \left(\| u \|^2 + \sum_{j=1}^{r} \| X_j u \|^2 \right) \qquad \forall u \in C_0^\infty(K).$$

Commençons par le cas d'un bloc (i.e. $p = 1$). Dans ce cas l'hypothèse de finitude faite revient à la précédente en prenant $X_j = \mathcal{R}\mathrm{e}\, L_j$ si $j \leq n-1$, $X_j = \mathcal{I}\mathrm{m}\, L_{j-(n-1)}$ si $n \leq j \leq 2n-2$. Ici $N = 2n - 1$.

Dans le cas de plusieurs blocs, on a le raffinement suivant : (en notant $u_{(j)} = (u_k)_{k\in J_j}$

$$\| u_{(j)} \|_{\frac{1}{m_j}} \leq Q_b(u, u) + \| u \|^2 \qquad \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V).$$

Cette inégalité provient de

$$\| \bar{L} u_{(j)} \|^2 + \| L_{(j)} u_{(j)} \|^2 + \| \sqrt{t_j} L u_{(j)} \|^2 \lesssim Q_b(u, u) + \| u \|^2$$

(qui a été vu) et du

LEMME. *La famille de champs de vecteurs (pour j fixé)*

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\, L_\ell, \mathcal{I}\mathrm{m}\, L_\ell)_{\ell\in I_j} \cup (\mathcal{R}\mathrm{e}\, t_j L_\ell, \mathcal{I}\mathrm{m}\, t_j L_\ell)_{\ell \notin L_j}$$

vérifie l'hypothèse du théorème de L. Hörmander.

Ce lemme se démontre en considérant les différents crochets de cette famille et en exprimant l'hypothèse de finitude de m_j sur la non-annulation de certaines dérivées de t_j.

4. Régularité analytique microlocale.

Afin de construire des opérateurs localisants permettant de majorer localement les dérivées, on montre l'existence d'un champ de vecteurs, holomorphe, M, qui intervient de façon essentielle. C'est pour trouver un tel opérateur que l'on a des restrictions supplémentaires sur les domaines considérés. Afin d'énoncer les choses clairement, prenons le modèle suivant au voisinage de l'origine

$$S = \left\{ \Im\mathrm{m}\, z_n + \sum_{j=1}^{m} |\ z_j\ |^2 + (\sum_{m+1}^{n-1} |\ z_j\ |^2)^k = 0 \right\} \tag{4.1}$$

avec $m+1 \leq n-1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Une telle hypersurface contient visiblement deux types de directions complexes : celles qui sont en z_j, $j \in \{1, \cdots, m\}$ et celles qui sont en z_j, $j \in \{m+1, \cdots, n-1\}$, ces dernières contenant "les directions de dégénérescences de la forme de Levi". Ce sont ces directions qui nécessitent l'introduction d'un champ holomorphe spécial M.

THEOREME 4.1. *Notons* $g(z_1, \cdots, z_{n-1}) = \sum_{j=1}^{m} |\ z_j\ |^2 + \left(\sum_{m+1}^{n-1} |\ z_j\ |^2\right)^k$. *Il existe un champ de vecteurs holomorphes M tel que*

$$[L_j, \bar{M}] = ig_{z_j}\partial_t \quad , \quad L_j = \partial_{z_j} - ig_{z_j}\partial_t, \quad j \geq m+1. \tag{4.1}$$

Démonstration du théorème 4.1. Le cas intéressant est $k \geq 2$.

Ce théorème est vrai en fait pour des situations un peu plus générales. Montrons-le dans notre cas : c'est un calcul explicite :

$$[L_j, \bar{L}_p] = 2ig_{z_j\bar{z}_p}\partial_t = 2ik(k-1)\bar{z}_j z_p \left(\sum_{m+1}^{n-1} |\ z_j\ |^2\right)^{k-2} \partial_t$$

et

$$ig_{z_j} = ik\bar{z}_j \left(\sum_{m+1}^{n-1} |\ z_j\ |^2\right)^{k-1}.$$

Donc

$$\sum_{p=m+1}^{n-1} [L_j, \bar{z}_p \bar{L}_p] = 2(k-1)ig_{z_j}\partial_t.$$

Ainsi si on prend

$$2(k-1)M = \sum_{p=m+1}^{n-1} z_p L_p,$$

on obtient

$$[L_j, \bar{M}] = ig_{z_j}\partial_t, \quad \text{pour } j \geq m+1.$$

Dans le cadre où g est plus générale on cherche M sous la forme $\sum_{m+1}^{n-1} a_j L_j$ où a_j sont des fonctions analytiques réelles qu'on arrive à déterminer par leur développement en série.

Le terme $\sum_{j=1}^{m} \mid z_j \mid^2$ de non dégénérescence a une vertu supplémentaire, c'est que l'on a

$$(4.2) \qquad [L_j, \bar{L}_k] = \delta_{jk} T \qquad j,k \in \{1, \cdots, m\}$$

c'est-à-dire que dans la "direction strictement pseudoconvexe" on a, sans changement de variables qui risquerait de détruire la forme de notre hypersurface, la "propriété de Darboux".

Pour mettre en valeur seulement ce qui est nouveau ici, on introduit les opérateurs localisants suivants :

(4.3) Pour $\psi \in \mathcal{D}(V)$ et $m = (m_1', m_2', m_1'', m_2'') \in \mathbb{N}^4$ soit

$$T_\psi^m = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha| \leq m_1', a \leq m_1'' \\ |\beta| \leq m_2', b \leq m_2''}} \frac{L'^\alpha}{\alpha!} \tilde{N}_a T^{m_1' - |\alpha| + m_2'' - |\beta|} (\bar{L}'^\alpha L'^\beta \psi^{(a+b)}) \circ \\ \qquad\qquad \circ \dfrac{(-\bar{L}')^\beta}{\beta!} \bar{N}_b T^{m_2' - |\beta| + m_2'' - |\beta|} \end{array} \right.$$

où $\psi^{(c)} = \partial_t^c \psi(z,t)$

$$\tilde{N}_a = \sum_{0 \leq a' \leq a} \tilde{A}_{a'}^a (M^{a'}/a'!), \qquad \bar{N}_b = \sum_{0 \leq b' \leq b} A_{b'}^b (\bar{M}^{b'}/b'!)$$

$\tilde{A}_{a'}^a$ et $A_{b'}^b$ constantes données dans [4]

$$L' = (L_1, \cdots, L_m), \qquad L'' = (L_{m+1}, \cdots, L_{n-1}).$$

Alors l'estimation en factorielle des différentes dérivées en $\mathbb{L}$, $\bar{\mathbb{L}}$ et T de la solution u se fait en appliquant à chaque étape les inégalités microlocales à $T_\psi^m u$ et en faisant des estimations convenables des différents commutateurs qui interviennent. C'est dans cette étape que les propriétés (4.1) et (4.2) sont utilisées pour faire disparaître les termes qui ne sont pas majorables autrement.

Remarque. Il y a des cas où on peut se ramener au cas où (4.2) est vérifiée par changement de coordonnées holomorphes, la partie $\left(\sum_{m+1}^{n-1} \mid z_j \mid^2\right)_k$ étant perturbée de façon non essentielle. Mais dans un cadre plus général, nous ne savons pas éliminer des termes non majorables de "façon visible".

Pour finir, voici le théorème auquel on aboutit.

THEOREME. *Considérons une hypersurface S du type (4.1) ou du type $S = \{\Im m\, z_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mid h_k(z_k) \mid^2 = 0\}$ où h_k sont des fonctions holomorphes près de 0, $h_k \not\equiv 0$. Soit u solution de $\Box_b u = f$, dans V. Alors si f est analytique dans une direction alors u est analytique dans cette direction (i.e. $\Box_b$ est microlocalement hypoelliptique analytique).*

Bibliographie

[1] M. CHRIST & D. GELLER Counter examples to analytic hypoellipticity for domains of inite type. *Ann. Math.* 135 (1992), 551-566.

[2] M. DERRIDJ Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines pseudoconvexes. *J. Diff. Geom.* 13 (1978), 559-576.

[3] M. DERRIDJ Microlocalisation et estimations pour $\bar{\partial}_b$ dans quelques hypersurfaces pseudoconvexes. *Invent. Math.* 104 (1991), 631-642.

[4] M. DERRIDJ & D. TARTAKOFF Local analyticity for $\Box_b$ and the $\bar{\partial}$-Neumann problem at certain weakly pseudo-convex points. *Comm. P.D.E.* 13 (1988), 1521-1600.

[5] M. DERRIDJ & D. TARTAKOFF Local analyticity for $\Box_b$ and the $\bar{\partial}$-Neumann problem in some domains without maximal estimates. *Proc. Symposia in Pure Math.* 52 (1991), part 3, 119-128 ; and *Duke Math. J.* 64 (1991).

[6] C. FEFFERMAN, J. J. KOHN & M. MACHEDON Hölder estimates on CR manifolds with a diagonalizable Levi form. *Advances in Math.* 84 (1990), 1-90.

[7] L. HORMANDER Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.* 119 (1967), 147-171.

[8] J. J. KOHN The range of the tangential Cauchy Riemann operator. *Duke Math. J.* 53 (1986), 525-545.

[9] G. METIVIER Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics. *Comm. on P.D.E.* 6 (1981), 1-90.

[10] L. ROTHSCHILD & E. STEIN Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math.* 137 (1977), 248-315.

[11] J. SJOSTRAND Analytic wave front sets and operators with multiple characteristics. *Hokkaido Math. J.* 12 (1983), 392-433.

[12] D. TARTAKOFF Local analytic hypoellipticity for $\Box_b$ on non degenerate Cauchy-Riemann manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 75 (1978), 3027-3028.

[13] D. TARTAKOFF On the local real analyticity of solutions to $\Box_b$ and the $\bar{\partial}$-Neumann problem. *Acta Math.* 145 (1980), 117-204.

[14] F. TREVES Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and application to the $\bar{\partial}$-Neumann problem. *Comm. P.D.E.* 3 (1978), 475-642.

Makhlouf Derridj
CNRS UA 757
Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 ORSAY CEDEX (France)
et
Université de Rouen
Département de Mathématiques
76134 MONT ST AIGNAN

David Tartakoff
Department of Mathematics
University of Illinois
CHICAGO, Ill. 60680-4348
USA