

Astérisque

MICHEL DUFLO

MICHÈLE VERGNE

Cohomologie équivariante et descente

Astérisque, tome 215 (1993), p. 5-108

http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215_5_0

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Cohomologie équivariante et descente

Michel Duflo et Michèle Vergne

Introduction.

Soient G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. On suppose que le groupe G agit sur une variété M . Dans cet article nous étudions un procédé pour construire des fonctions centrales sur G basé sur l'intégration de formes différentielles équivariantes sur M et sur la méthode de descente.

La motivation de ce travail est la suivante: dans certains cas, on sait associer à l'action de G sur M et à la donnée d'un fibré G -équivariant $\mathcal{L} \rightarrow M$ un espace de Hilbert $H(M, \mathcal{L})$ et une représentation traçable $T_{\mathcal{L}}$ de G dans $H(M, \mathcal{L})$. La trace $\text{Tr } T_{\mathcal{L}}(g)$ de la représentation $T_{\mathcal{L}}$ est alors une fonction généralisée centrale sur G . On peut souvent donner une formule pour le caractère $\text{Tr } T_{\mathcal{L}}(g)$ de la représentation $T_{\mathcal{L}}$ en fonction de la cohomologie équivariante de M et du caractère de Chern de \mathcal{L} . Les formules données par exemple dans [8], [18], [12] sont une généralisation des formules de points fixes d'Atiyah-Segal-Singer [3] combinées avec la formule universelle des caractères de Kirillov [26]. Dans [31] nous utilisons les notions introduites dans cet article pour donner une formule universelle pour le caractère $\text{Tr } T_{\mathcal{L}}(g)$.

Nous considérons ici une action régulière d'un groupe presque algébrique G sur une variété M (voir la définition 51 dans la section 2.4). Les exemples d'actions régulières incluent l'action d'un groupe compact sur une variété compacte et l'action d'un groupe algébrique sur une variété algébrique. Nous associons à une action régulière de G sur M un espace $\mathcal{K}_G(M)$ de cohomologie équivariante globale. Soit \bullet un point. Alors on a $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$ et l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ est un module sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$.

Pour définir la notion d'intégration, il est nécessaire d'introduire un espace $\mathcal{K}_G(M)_t$ de cohomologie équivariante globale tordue (l'indice t est pour "tordu"). Alors, tout au moins si G et M sont compacts, l'intégration définit une application $\mathcal{K}_G(M)_t \rightarrow C^\infty(G)^G$.

Décrivons les notions introduites et les résultats de cet article plus précisément. Introduisons quelques notations. Si M est une variété différentiable, on note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_i \mathcal{A}^i(M)$ l'algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur M . Si M est orientée, et si $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ est à support compact, on note $\int_M \alpha = \int_M \alpha_{[\dim M]}$ l'intégrale de son terme de degré maximal. Cependant, il n'est pas toujours naturel de choisir une orientation, ni même de supposer M

orientable. Considérons la variété \tilde{M} dont les éléments sont des couples (m, o) , où m est dans M et où o est une orientation de l'espace tangent $T_m(M)$. C'est un revêtement d'ordre 2 de M , le groupe $\mathbb{Z}^\times = \{+1, -1\}$ opère dans \tilde{M} de sorte que \tilde{M} est un fibré principal de base M . Notons ε l'action de -1 dans \tilde{M} . On note encore ε l'action induite dans les formes différentielles sur \tilde{M} . On peut identifier $\mathcal{A}(M)$ à la sous-algèbre des éléments $\omega \in \mathcal{A}(\tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = \omega$. On note $\mathcal{A}(M)_t$ l'espace des éléments $\omega \in \mathcal{A}(\tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = -\omega$. C'est un module sur $\mathcal{A}(M)$, stable par la différentielle de de Rham de $\mathcal{A}(\tilde{M})$. Un élément de $\mathcal{A}(M)_t$ sera appelé une forme différentielle tordue. Les formes différentielles tordues de degré maximum sont aussi appelées densités. On notera $\int_M \beta = \int_M \beta_{[\dim M]}$ l'intégrale d'un élément $\beta \in \mathcal{A}(M)_t$ à support compact.

Soit M une variété différentiable sur laquelle G opère. Soit U un voisinage ouvert G -invariant de 0 dans \mathfrak{g} . Soit $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $X \mapsto \alpha(X)$ sur M dépendant de manière différentiable de $X \in U$. Soit $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ la sous-algèbre de $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ formée des éléments G -invariants. C'est une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On sait que $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ est munie d'une dérivation impaire de carré nul, notée d_g . Un élément de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ sera appelé une forme équivariante. On notera $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. Si $M = \bullet$ est un point, on a $\mathcal{H}_G^\infty(\bullet) = C^\infty(U)^G$. (Ces notions sont redéfinies dans la section 1.1).

L'action de G se relève de manière canonique en une action dans \tilde{M} commutant à ε . L'espace des éléments $\omega \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ tels que $\varepsilon(\omega) = -\omega$ sera noté $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$. C'est l'espace des formes différentielles équivariantes tordues (pour le fibré tangent). Il est stable par d_g . C'est un module différentiel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué sur l'algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. Soit $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_t$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$ (ces notions font l'objet de la section 5.1). Supposons pour un moment M compacte. Soit $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$ une forme équivariante tordue. L'intégrale $\int_M \beta(X)$ sur M définit une fonction différentiable et G -invariante dans U . Si l'application exponentielle est un difféomorphisme dans U , on obtient par composition une fonction différentiable et centrale dans l'ouvert $\exp(U)$ de G . Cette fonction ne dépend que de la classe de β modulo $d_g(\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t)$. Donc si β est fermée, cette fonction ne dépend que de la classe de β dans $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_t$.

L'origine de cet article vient de l'observation suivante. Soit G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G (cette notion est définie dans la section 2.1; si G est compact, $G_{ell} = G$). Soit $s \in G_{ell}$ et soit $G(s)$ le centralisateur de s . Soit $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$. Pour $s \in G_{ell}$ notons $M(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans M . C'est une sous-variété de M dans laquelle $G(s)$ opère. On choisit pour chaque $s \in G_{ell}$ un voisinage U_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ et une classe $\beta_s \in \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(U_s, M_s)_t$. La fonction $\int_{M(s)} \beta_s(X)$ définie pour $X \in U_s$ est invariante par $G(s)$. Si les choix sont bien faits, il existe une unique fonction centrale Θ sur G telle que pour $X \in U_s$ on ait

$$\Theta(se^X) = \int_{M(s)} \beta_s(X).$$

Nous nous sommes interrogés sur les conditions que la famille β_s doit satisfaire pour assurer l'existence de la fonction Θ . Considérons tout d'abord le cas où M est un point \bullet . La description de Θ revient à utiliser la *méthode de descente*. Si f_s est une fonction différentiable $G(s)$ -invariante sur U_s , alors il est facile de déterminer les conditions que doit satisfaire la famille $(f_s)_{s \in G_{ell}}$ pour qu'il existe une fonction Θ différentiable et G -invariante sur G telle que

$$f_s(X) = \Theta(se^X)$$

pour $X \in U_s$. Tout d'abord le système de fonctions f_s doit satisfaire la condition d'invariance suivante:

$$(1) \quad f_{gsg^{-1}}(g \cdot X) = f_s(X)$$

pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. D'autre part, il est clair que si $S \in \mathfrak{g}(s)$ est une transformation elliptique et si $Y \in \mathfrak{g}(s)$ commute à S on doit avoir

$$f_s(S + Y) = \Theta(se^{S+Y}) = \Theta(se^S e^Y)$$

(si S et Y sont assez petits). Les fonctions f_s satisfont donc la relation de recollement suivante

$$(2) \quad f_s(S + Y) = f_{se^S}(Y)$$

pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)$ elliptique et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)$ commutant à S assez petits.

Réciproquement, si les ouverts U_s sont des ouverts elliptiques (voir la définition 35 d'ouverts elliptiques dans la section 2.2) et si $(f_s)_{s \in G_{ell}}$ est une famille de fonctions différentiables définies sur un voisinage elliptique U_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ satisfaisant les relations (1) et (2) d'invariance et de recollement, il existe une unique fonction différentiable Θ centrale définie dans G tout entier telle que $f_s(X) = \Theta(se^X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ (ceci est expliqué dans la section 2.2).

Soit M une variété munie d'une action régulière de G . On définit dans la section 3.2 l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante. Un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une famille $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ de classes de cohomologie $G(s)$ -équivariantes sur $M(s)$ (définies sur U_s) satisfaisant des conditions d'invariance et de recollement données précisément dans la définition 61. Énonçons succinctement la condition de recollement que nous imposons: soit $s \in G_{ell}$ et soit $S \in \mathfrak{g}(s)$ une transformation elliptique petite. Alors $G(se^S)$ est contenu dans $G(s)$ et comme l'action de G sur M est régulière, la sous-variété $M(se^S)$ est contenue dans $M(s)$. Pour tout $s \in G_{ell}$ soit $\tilde{\alpha}_s \in \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(U_s, M(s))$ une forme différentielle équivariante fermée représentant α_s . Considérons l'opérateur de translation $T_{s,S}$ défini par $(T_{s,S}\tilde{\alpha}_s)(X) = \tilde{\alpha}_s(S + X)|_{M(se^S)}$ pour $X \in \mathfrak{g}(se^S)$ petit. La forme $T_{s,S}\tilde{\alpha}_s$ est une forme $G(se^S)$ -équivariante fermée sur $M(se^S)$. Nous demandons l'égalité *en cohomologie* et sur un petit voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(se^S)$

$$(3) \quad T_{s,S}\tilde{\alpha}_s \cong \tilde{\alpha}_{se^S}$$

J.Block et E.Getzler [10] ont étudié pour l'action d'un groupe compact G sur une variété compacte M un espace $\mathcal{K}'_G(M)$ où les conditions de recollement

sont imposées au niveau des formes différentielles. Ils montrent que l'espace $\mathcal{K}'_G(M)$ s'identifie à la cohomologie cyclique équivariante de M . Il est probable que l'application naturelle $\mathcal{K}'_G(M) \rightarrow \mathcal{K}_G(M)$ est un isomorphisme.

On peut déterminer l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ dans diverses situations. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G . Supposons que la fibration principale $G \rightarrow G/H$ admette une connection G -invariante. On dira alors que G/H est un espace homogène réductif. On obtient comme cas particulier du théorème 64 de la section 3.4 un isomorphisme:

$$\mathcal{K}_G(G/H) \cong C^\infty(H)^H.$$

Ce résultat est l'analogie d'un résultat décrivant la cohomologie équivariante de M en terme de fonctions H -invariantes sur l'algèbre de Lie \mathfrak{h} , bien connu lorsque H est compact, et que nous démontrons ici dans la section 1.8 dans le cas réductif.

Soit $P \rightarrow P/H$ un fibré principal de groupe H et soit G un groupe de Lie agissant à gauche sur P (avec une action commutant à l'action à droite de H). Sous certaines hypothèses de compacité, nous montrons dans la section 3.5 que $\mathcal{K}_G(P/H)$ est isomorphe à $\mathcal{K}_{G \times H}(P)$.

Supposons qu'il existe une connection G -invariante pour la fibration $P \rightarrow P/H$. En adaptant la construction de Chern-Weil en cohomologie équivariante [16] [7], on définit dans la proposition 69 l'homomorphisme de Chern-Weil

$$W : C^\infty(H)^H \rightarrow \mathcal{K}_G(P/H).$$

En particulier le caractère de Chern $\text{ch}(\mathcal{L})$ d'un fibré G -équivariant $\mathcal{L} \rightarrow M$ muni d'une connection G -invariante est un élément de $\mathcal{K}_G(M)$. Si M et G sont compacts, nous pensons que le caractère de Chern induit un isomorphisme

$$\text{ch} : C^\infty(G)^G \otimes_{R(G)} K_G(M) \rightarrow \mathcal{K}_G(M),$$

où $K_G(M)$ est l'espace de K -théorie équivariante de M et $R(G) \subset C^\infty(G)^G$ l'espace des caractères des représentations de dimension finie de G . Ceci résulte probablement de [10] puisque dans cet article cet isomorphisme est démontré pour le groupe $\mathcal{K}'_G(M)$.

On définit dans la section 5.2 la notion de *botte de classes de cohomologie équivariantes tordues*: c'est une fonction qui à $s \in G_{\text{ell}}$ associe un élément $\alpha_s \in \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(U_s, M(s))_t$, vérifiant un certain nombre de conditions (voir la définition 108) d'invariance et de recollement presque identiques à celles définissant l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ mais faisant aussi intervenir une orientation du fibré normal à la variété des zéros de S dans $M(s)$. Plus généralement pour tout fibré G -équivariant réel $\mathcal{V} \rightarrow M$, on définit l'espace $\mathcal{K}_G^\mathcal{V}(M)$ des classes de cohomologie équivariante tordue par rapport au fibré \mathcal{V} ainsi que l'espace $\mathcal{K}_{\text{cpt}, G}^\mathcal{V}(M)$ des bottes à support compact sur M . Le cas $\mathcal{K}_G(M)_t$ précédent est le cas particulièrement important où \mathcal{V} est le fibré tangent à M . Si le fibré \mathcal{V} est orienté et muni

d'une structure métalinéaire (par exemple un fibré spinoriel) l'espace $\mathcal{K}_G^\mathcal{V}(M)$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ (proposition 111). Les propriétés des fibrés métalinéaires dont nous avons besoin pour établir cet isomorphisme font l'objet de la section 4.

Considérons le cas d'un point \bullet . Un fibré G -équivariant sur \bullet est simplement la donnée d'une représentation $\lambda : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Supposons, pour simplifier, que λ soit à valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{GL}(V)^+$ des transformations linéaires inversibles de V dont le déterminant est strictement positif. Il existe un revêtement canonique à deux feuillets $\mathrm{ML}(V)^+$ de $\mathrm{GL}(V)^+$. Soit $G_V \rightarrow G$ l'image réciproque de ce revêtement par l'application λ . Alors l'espace $\mathcal{K}_G^\mathcal{V}(\bullet)$ est isomorphe à l'espace des fonctions centrales impaires différentiables sur G_V (c'est le théorème 121 de la section 5.3).

Lorsque $M = G/H$ est un espace homogène réductif et lorsque $\mathcal{V} = G \times_H V$ est un fibré associé à une représentation $\lambda : H \rightarrow \mathrm{GL}(V)^+$, l'espace $\mathcal{K}_G^\mathcal{V}(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante tordues pour \mathcal{V} est isomorphe à l'espace des fonctions centrales impaires différentiables sur le revêtement à deux feuillets H_V de H (c'est le théorème 123 de la section 5.4).

Par exemple, soient G un groupe semi-simple ayant un nombre fini de composantes connexes, f une forme linéaire sur \mathfrak{g} , H son stabilisateur dans G , \mathfrak{h} son algèbre de Lie, $M = G.f = G/H$ l'orbite (co-adjointe) de f dans le dual de \mathfrak{g} et $TM = G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ le fibré tangent. Dans ce cas, $H_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est isomorphe au revêtement \tilde{H} de H défini dans [17]. On suppose M fermée de sorte que G/H est réductif. Soit τ une représentation irréductible de \tilde{H} , impaire et dont la différentielle est la restriction de if à \mathfrak{h} . (S'il existe une telle représentation, on dit que f est admissible). La représentation τ est de dimension finie et son caractère est une fonction impaire centrale sur \tilde{H} . Il lui correspond donc une botte $\alpha_{f,\tau}$ de formes équivariantes tordues sur M .

Revenons au problème initial d'intégration. Lorsque $M \rightarrow B$ est une fibration G -équivariante de fibré tangent vertical \mathcal{V} on peut définir, tout au moins si G est compact, une application p_* d'image directe

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{K}_{cpt,G}(B).$$

La définition de p_* fait l'objet de la section 6.2. Elle imite la définition de l'application p_* en K -théorie donnée par Atiyah-Hirzebruch. Elle nécessite l'introduction (voir la section 6.1) de genres équivariants, comme le genre associé à la fonction $\det^{1/2}(\frac{X/2}{\sinh(X/2)})$. En particulier, si B est un point et si M est une variété compacte orientée spinorielle de dimension paire, de sorte que $\mathcal{K}_G(M)_t$ est isomorphe à $\mathcal{K}_G(M)$, l'image $p_*(\mathrm{ch}(\mathcal{E}))$ du caractère de Chern d'un fibré G -équivariant est le caractère de la représentation virtuelle de G donnée par l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac $D_{\mathcal{E}}$ de M tordu par \mathcal{E} (voir [2],[3],[4],[5]).

La formule de localisation de J.M.Bismut le long des fibres [9] (que nous redémontrons dans la proposition 106 de la section 5.1) permet de montrer l'existence de l'application p_* (théorème 134).

Si $M = \mathcal{V}$ est un fibré vectoriel sur B , l'application p_* est un isomorphisme. C'est l'analogie de l'isomorphisme de Thom en K -théorie équivariante démontré par Karoubi [25].

Si $p : M \rightarrow \bullet$ est l'application sur un point, on obtient donc une application

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}(M)_t \rightarrow \mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G.$$

Il est utile de considérer des variétés M non compactes. Dans certains cas, si les intégrales veulent bien converger au sens des distributions, on pourra encore associer à une botte de formes équivariantes tordues sur M une fonction généralisée invariante sur le groupe G . Le cas de la variété $M = G \cdot f$ et de la botte $\alpha_{f,\tau}$ est particulièrement important. Dans [31] nous définissons par le même formalisme

$$\Theta_{f,\tau} = \int_M \alpha_{f,\tau}$$

lorsque M est une orbite fermée. La fonction $\Theta_{f,\tau}$ est une fonction généralisée centrale sur G . C'est le caractère de la représentation unitaire irréductible $T_{f,\tau}$ de G associée à ces données (ceci est démontré dans [18] et [12] si M est de dimension maximale).

On voit que notre ambition est de donner des procédés géométriques de construction de caractères de représentations unitaires associées à l'action d'un groupe opérant dans une variété munie de quelques structures supplémentaires.

Nous sommes heureux de remercier Yves Benoist, Max Karoubi et Mustapha Rais pour leur aide.

1 Cohomologie équivariante.

Nous commençons par préciser quelques résultats sur la cohomologie équivariante à coefficients C^∞ d'une G -variété M .

Dans toute la suite, variété signifie variété C^∞ sur \mathbb{R} , de dimension finie, séparée et séparable. Soit M une variété. Rappelons les notations concernant les formes différentielles. On note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions C^∞ sur M à valeurs complexes et $C_{cpt}^\infty(M)$ le sous-espace des fonctions à support compact. On note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_i \mathcal{A}^i(M)$ l'algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur M . On note $\mathcal{A}_{cpt}(M)$ l'espace des formes différentielles à support compact. Pour $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ on note $\alpha = \sum_i \alpha_{[i]}$ sa décomposition en une somme d'éléments homogènes $\alpha_{[i]} \in \mathcal{A}^i(M)$.

On note $d : \mathcal{A}^*(M) \rightarrow \mathcal{A}^{*+1}(M)$ la différentielle extérieure. Si ξ est un champ de vecteurs sur M , on note $\iota(\xi) : \mathcal{A}^*(M) \rightarrow \mathcal{A}^{*-1}(M)$ la contraction par le champ de vecteurs ξ . Les applications d et $\iota(\xi)$ sont des dérivations de carré nul de $\mathcal{A}(M)$. On note $\mathcal{L}(\xi) : \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(M)$ l'action de ξ sur $\mathcal{A}(M)$ par dérivation de Lie. Les opérateurs $\iota(\xi)$, d , $\mathcal{L}(\xi)$ vérifient la relation de Cartan

$$(4) \quad d\iota(\xi) + \iota(\xi)d = \mathcal{L}(\xi).$$

On note d_ξ la dérivation $d_\xi = d - \iota(\xi)$ de $\mathcal{A}(M)$.

Si V est un espace vectoriel, on note ΛV l'algèbre extérieure de V et $S(V)$ l'algèbre symétrique. Si G est un groupe opérant linéairement dans V , on note V^G le sous-espace des points fixes.

Dans cet article, les formules sont numérotées indépendamment des propositions.

Remarque. Dans cet article, les algèbres considérées sont naturellement graduées sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et nous respectons la règle des signes dans la définition des produits tensoriels, des dérivations, etc...

1.1 Cohomologie équivariante: définition.

Supposons M munie d'une action différentiable du groupe de Lie G . Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Pour $X \in \mathfrak{g}$ on note X_M le champ de vecteurs sur M donné au point $m \in M$ par

$$(5) \quad X_M(m) = \frac{d}{d\varepsilon} \exp(-\varepsilon X) \cdot m|_{\varepsilon=0}.$$

Si X est dans \mathfrak{g} , on posera $d_X = d_{X_M}$.

Soit $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g} à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. En plus de la graduation par le degré des formes différentielles, on introduit une seconde graduation dans l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par

$$(6) \quad \deg(P \otimes \alpha) = 2 \deg P + \deg \alpha$$

si $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ sont des éléments homogènes. Nous dirons que le degré défini par (6) est le degré total.

Soit $X \mapsto \alpha(X)$ un élément de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$. On note ι (où $\iota_{\mathfrak{g}}$ s'il faut préciser) la dérivation de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ telle que

$$(7) \quad \iota(\alpha)(X) = \iota(X_M)(\alpha(X)).$$

Soit E_i une base de \mathfrak{g} et soit $x^i \in \mathfrak{g}^*$ la base duale. On considère x^i comme une fonction polynomiale sur \mathfrak{g} et on note encore x^i la multiplication par x^i dans $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$. On a donc

$$\iota = \sum_i x^i \iota((E_i)_M).$$

On définit un opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_X(\alpha(X)).$$

L'opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ s'écrit donc comme différence de deux dérivations de carré nul de l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$:

$$(8) \quad d_{\mathfrak{g}} = d - \iota.$$

C'est une dérivation impaire de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$. Elle augmente de 1 le degré total.

Le groupe G opère sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par produit tensoriel de l'action adjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et de l'action donnée sur $\mathcal{A}(M)$. Soit

$$\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M))^G$$

la sous-algèbre des G -invariants. L'opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ laisse stable la sous-algèbre $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. La relation de Cartan (4) implique que $d_{\mathfrak{g}}^2$ est nul sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On note $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)$ la cohomologie de l'algèbre différentielle $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M), d_{\mathfrak{g}})$. C'est l'espace de *cohomologie équivariante* de la G -variété M . Lorsque G est compact et connexe, c'est la cohomologie équivariante usuelle de M [15] [16].

Soit U un ouvert G -invariant de \mathfrak{g} . Soit $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $\alpha(X)$ sur M dépendant de manière C^∞ de $X \in U$. Le groupe G agit sur $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ par $(g \cdot \alpha)(X) = g \cdot (\alpha(g^{-1} \cdot X))$ pour $g \in G$, $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$, $X \in \mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{A}_G^\infty(U, M) = (C^\infty(U, \mathcal{A}(M)))^G$ la sous-algèbre des formes équivariantes.

On définit un opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ sur $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ par

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_X(\alpha(X)).$$

Les formes équivariantes telles que $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$ sont appelées formes fermées équivariantes. Celles de la forme $d_{\mathfrak{g}}\beta$ avec $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ sont appelées exactes. On note $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ la cohomologie $\ker d_{\mathfrak{g}} / \text{Im } d_{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. C'est une algèbre, graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais pas sur \mathbb{Z} en général.

Soit N une autre variété dans laquelle G opère. Soit ϕ un morphisme G -équivariant de M dans N . L'image réciproque ϕ^* induit un morphisme d'algèbres de $\mathcal{H}_G^\infty(U, N)$ dans $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ et $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ est une algèbre sur $\mathcal{H}_G^\infty(U, N)$.

Exemple 1 Si $N = \bullet$ est un point, $\mathcal{H}_G^\infty(U, \bullet)$ est égal à $C^\infty(U)^G$.

En particulier, $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ est une algèbre sur $C^\infty(U)^G$. Explicitons cette structure. Soit $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ une forme équivariante sur M . Soit $\theta \in C^\infty(U)^G$. Alors $\theta\alpha$ est la forme définie par la formule $(\theta\alpha)(X) = \theta(X)\alpha(X)$ pour tout $X \in U$.

Si $\phi : H \rightarrow G$ est un homomorphisme de groupes et si on note aussi ϕ l'application $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ différentielle de ϕ , alors ϕ induit une application

$$\phi^* : \mathcal{H}_G^\infty(U, M) \rightarrow \mathcal{H}_H^\infty(\phi^{-1}(U), M).$$

1.2 Cohomologie équivariante d'un espace homogène.

Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe fermé de G . On note \mathfrak{g} et \mathfrak{h} leurs algèbres de Lie. On considère l'espace homogène $M = G/H$. On note e le point $\{H\}$ de M . Bien que ce ne soit pas vraiment nécessaire dans la suite, il est agréable d'expliciter la forme des opérateurs $d, \iota, d_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$.

Nous commençons par donner une autre description de l'algèbre différentielle $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On identifie l'espace tangent $T_e(M)$ à M au point e à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de la manière usuelle. Soit π la projection de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Il résulte de la formule (5) que l'on a $X_M(e) = -\pi(X)$. L'espace cotangent à M au point $e \in M = G/H$ est égal à $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$ une application polynomiale G -invariante de \mathfrak{g} dans $\mathcal{A}(M)$. Soient ξ_1, \dots, ξ_p des éléments de $T_e(M)$, $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$. Avec les notations évidentes, on a, à cause de l'équivariance,

$$(\alpha_{[p]}(Ad(g)(X)))_{g \cdot e}(g \cdot \xi_1, \dots, g \cdot \xi_p) = \alpha_{[p]}(X)_e(\xi_1, \dots, \xi_p).$$

Posons $\tilde{\alpha}(X) = \alpha(X)_e$. Donc $\tilde{\alpha}$ est une application polynomiale de \mathfrak{g} dans $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ et l'on a

$$\alpha_{[p]}(X)_{g \cdot e}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \tilde{\alpha}_{[p]}(Ad(g^{-1})(X))(g^{-1} \cdot \xi_1, \dots, g^{-1} \cdot \xi_p).$$

Cette formule montre que l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$ sur l'algèbre $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ formée des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g} à valeurs dans $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ qui sont H -invariantes.

Nous poserons $T = S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$ et $T_H = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$. On a donc $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M) \cong T_H$.

Considérons la dérivation ι de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On notera $\tilde{\iota}$ la dérivation de T_H qui lui correspond. Soit $\tilde{\alpha} \in T_H$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. On a $\tilde{\iota}\tilde{\alpha}(X) = -\iota(\pi(X))\tilde{\alpha}(X)$. Fixons une base E_1, \dots, E_s de \mathfrak{g} telle que les vecteurs E_1, \dots, E_r forment une base de \mathfrak{h} . Notons x^i les fonctions coordonnées correspondantes. Les x^i avec $i > r$ forment une base de l'espace $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$, identifié à l'orthogonal \mathfrak{h}^{\perp} de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g}^* . Posons

$$j = \sum_{i>r} x^i \iota(\pi E_i).$$

C'est une dérivation de carré nul de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ et $\tilde{\iota}$ est la restriction de $-j$ au sous-espace T_H .

Considérons l'opérateur d sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On notera \tilde{d} la dérivation correspondante de T_H .

Rappelons la définition de Koszul d'un complexe calculant la cohomologie de \mathfrak{g} dans un \mathfrak{g} -module \mathcal{V} . Soit $\alpha \in \mathcal{V} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g}^*$. On définit $\delta\alpha \in \mathcal{V} \otimes \Lambda^{p+1} \mathfrak{g}^*$ par la formule

$$(9) \quad (\delta\alpha)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \cdot \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}),$$

où X_1, \dots, X_{p+1} sont des éléments de \mathfrak{g} . La cohomologie du complexe $\mathcal{V} \otimes \Lambda^* \mathfrak{g}^*$ est isomorphe à la cohomologie $H^*(\mathfrak{g}, \mathcal{V})$. Soit \mathcal{V} un $\mathfrak{g} - H$ -module. Ceci signifie que \mathcal{V} est un H -module différentiable et un \mathfrak{g} -module, que la différentielle de l'action de H est la restriction à \mathfrak{h} de l'action de \mathfrak{g} , et que les actions sont compatibles: $h \cdot (Xv) = (\text{Ad}(h)(X)) \cdot hv$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $h \in H$ et $v \in \mathcal{V}$. Par exemple, un G -module différentiable \mathcal{V} est muni canoniquement d'une telle structure. Alors le sous-espace $(\mathcal{V} \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ de $\mathcal{V} \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$ est stable par δ . Par définition la cohomologie relative $H^*(\mathfrak{g}, H, \mathcal{V})$ est la cohomologie de $(\mathcal{V} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ muni de la différentielle δ .

On considère la dérivation de Koszul δ dans $T_H = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$, où $S(\mathfrak{g}^*)$ est considéré comme G -module grâce à l'action adjointe de G .

Lemme 2 On a $\tilde{d} = \delta$.

Démonstration. En considérant la projection de G sur G/H , on voit qu'il suffit d'établir l'assertion lorsque $M = G$. Nous supposons donc dans la suite de cette démonstration que l'on est dans ce cas.

Soit α une application polynomiale G -invariante de \mathfrak{g} dans les formes différentielles de degré p sur G , et soit $\tilde{\alpha}$ la fonction de \mathfrak{g} dans $\Lambda^p \mathfrak{g}^*$ obtenue en évaluant α au point e de G . Soient X_1, \dots, X_{p+1} des éléments de \mathfrak{g} . On note par la même lettre les champs de vecteurs invariants à gauche sur G qui prolongent ces éléments. Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$, on a donc

$$\alpha(X)_g(X_1, \dots, X_p) = \tilde{\alpha}(\text{Ad}(g^{-1})(X))(X_1, \dots, X_p).$$

On en déduit

$$X_1 \cdot (\alpha(X)(X_2, \dots, X_{p+1})) = \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{\alpha}(\text{Ad}(\exp -\varepsilon X_1)(X))(X_2, \dots, X_{p+1})|_{\varepsilon=0}.$$

Le lemme s'obtient en comparant la formule (9) avec la formule bien connue pour $d(\alpha(X))$:

$$(10) \quad d(\alpha(X))(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \cdot (\alpha(X)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(X)([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}).$$

Ceci termine la démonstration. ■

Notons $\tilde{d}_{\mathfrak{g}}$ l'opérateur dans T_H correspondant à $d_{\mathfrak{g}}$.

Corollaire 3 On a $\tilde{d}_{\mathfrak{g}} = j + \delta$.

En particulier, on a $(j + \delta)^2 = 0$ sur T_H ce qui peut aussi se voir directement.

1.3 G -algèbres différentielles.

Il sera utile de généraliser la notion de cohomologie équivariante d'une variété en la notion de cohomologie équivariante d'une G -algèbre en remplaçant l'algèbre $\mathcal{A}(M)$ par une G -algèbre abstraite.

Définition 4 Dans cet article, une algèbre de Fréchet A est une algèbre associative sur \mathbb{R} , à élément unité, graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, supercommutative, munie d'une structure d'espace vectoriel topologique qui en fait un Fréchet et pour laquelle la multiplication est continue (comme application de $A \times A$ dans A). Une algèbre de Fréchet différentielle est une algèbre de Fréchet munie d'une dérivation impaire continue de carré nulle (notée d ou d_A). On note $H(A)$ ou $H(A, d)$ l'algèbre d'homologie correspondante. Si elle est séparée, c'est une algèbre de Fréchet graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, supercommutative.

Exemple 5 Soit M une variété. Alors l'algèbre $C^\infty(M)$ (munie de la différentielle nulle et de la graduation triviale) et l'algèbre de de Rham $\mathcal{A}(M)$ des formes différentielles sont des algèbres différentielles.

Si V et W sont des espaces de Fréchet, notons $V \hat{\otimes} W$ le produit tensoriel projectif complété, au sens de Grothendieck. Par exemple, si $V = C^\infty(M)$ comme ci-dessus, $V \hat{\otimes} W$ est canoniquement égal à l'espace $C^\infty(M, W)$ des applications différentiables de M dans W (voir [29], p 533). Si T est un endomorphisme continu de V on note encore T l'endomorphisme continu de $V \hat{\otimes} W$ prolongeant $T \otimes 1$. De même, si T est un endomorphisme continu de W , et si V et W sont gradués sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on note encore T l'endomorphisme continu de $V \hat{\otimes} W$ prolongeant l'endomorphisme $v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||T|} v \otimes Tw$.

Si A et B sont des algèbres de Fréchet différentielles, $A \hat{\otimes} B$ devient une algèbre de Fréchet différentielle en définissant la différentielle comme $d_A + d_B$ et la multiplication comme d'habitude, avec la règle des signes.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Considérons une représentation différentiable (à gauche) de G dans un espace de Fréchet V . On note $\mathcal{L}_V(X)$ l'endomorphisme de V associé à un élément $X \in \mathfrak{g}$.

Soit A une algèbre de Fréchet différentielle. Nous dirons que G opère sur A , ou que A est une G -algèbre, si l'on s'est donné une représentation différentiable de G dans A respectant le produit, la graduation et la différentielle de A , et une application linéaire $X \mapsto \iota_A(X)$ de \mathfrak{g} dans les dérivations impaires continues de A , vérifiant les relations de Cartan [15]

$$(11) \quad [d, \iota_A(X)] = \mathcal{L}_A(X), \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g},$$

$$(12) \quad g \circ \iota_A(X) \circ g^{-1} = \iota_A(g \cdot X), \quad \text{pour tout } g \in G, X \in \mathfrak{g},$$

$$(13) \quad \iota_A(X)^2 = 0, \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Par exemple, si G opère à gauche dans une variété différentiable M , l'algèbre $A = \mathcal{A}(M)$ devient une G -algèbre pour laquelle $\iota_A(X) = \iota(X_M)$ et $\mathcal{L}_A(X) = \mathcal{L}(X_M)$.

De même, si G opère à droite sur M , on obtient une G -algèbre en considérant les champs de vecteurs

$$(14) \quad {}_M X(m) = \frac{d}{d\varepsilon} m \cdot \exp(\varepsilon X)|_{\varepsilon=0}.$$

On définit de manière évidente les notions de morphismes de G -algèbres, de produit tensoriel projectif de G -algèbres.

On note A_{hor} la sous-algèbre des éléments horizontaux (c'est-à-dire annulés par les dérivations $\iota(X)$, $X \in \mathfrak{g}$) et A_{bas} la sous-algèbre des éléments basiques (c'est-à-dire horizontaux et G -invariants).

La relation de Cartan (11) implique que la sous-algèbre A_{bas} est stable par d_A .

Soit (A, d_A) une G -algèbre. Considérons l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g} à valeurs dans A . Comme précédemment, les éléments de \mathfrak{g}^* sont considérés comme pairs et l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ hérite de la graduation sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'algèbre A . Soit $X \mapsto a(X)$ un élément de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$. On note ι (où $\iota_{\mathfrak{g}}$ s'il faut préciser) la dérivation de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ telle que

$$(15) \quad \iota(a)(X) = \iota_A(X)(a(X)).$$

Soit E_i une base de \mathfrak{g} et soit $x^i \in \mathfrak{g}^*$ la base duale. On considère x^i comme une fonction polynomiale sur \mathfrak{g} et on note encore x^i la multiplication par x^i dans $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$. On a

$$\iota = \sum_i x^i \iota_A(E_i).$$

On pose

$$(16) \quad d_{\mathfrak{g}} = d - \iota.$$

C'est une dérivation impaire de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$.

Le groupe G opère sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ par produit tensoriel de l'action adjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et de l'action donnée sur A . Soit

$$A_G(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes A)^G$$

la sous-algèbre des G -invariants. La relation de Cartan (11) implique que $d_{\mathfrak{g}}^2$ est nul sur $A_G(\mathfrak{g})$.

On note $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, A)$ la cohomologie de l'algèbre différentielle $(A_G(\mathfrak{g}), d_{\mathfrak{g}})$. On dira que $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, A)$ est l'espace de cohomologie équivariante de A .

Soit U un ouvert G -invariant de \mathfrak{g} . Considérons l'algèbre $C^\infty(U) \hat{\otimes} A = C^\infty(U, A)$. Soit $X \mapsto a(X)$ un élément de $C^\infty(U, A)$. En considérant l'action adjointe de G dans $C^\infty(U)$, on obtient une action naturelle de G dans $C^\infty(U, A)$. On note $A_G^\infty(U) = C^\infty(U, A)^G$ la sous-algèbre de Fréchet formée des éléments G -invariants de $C^\infty(U, A)$. On note encore x^i la restriction de x^i à U . Soit $X \mapsto a(X)$ un élément de $C^\infty(U, A)$. L'opérateur ι est encore défini sur $C^\infty(U, A)$ par

$$\iota(a)(X) = \iota(X) \cdot a(X).$$

Les relations de Cartan entraînent que $d_{\mathfrak{g}}^2$ s'annule dans $A_G^\infty(U)$.

L'algèbre de cohomologie correspondante est notée $\mathcal{H}_G^\infty(U, A)$. C'est la cohomologie (différentiable à coefficients dans U) équivariante de A .

Exemple 6 Si G opère à gauche dans la variété différentiable M et si $A = \mathcal{A}(M)$, l'espace $A_G(\mathfrak{g})$ est égal à l'espace des formes équivariantes $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$ et l'espace $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ est à l'espace $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)$ de cohomologie équivariante de la variété M . De même, on a $A_G^\infty(U) = \mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ et $\mathcal{H}_G^\infty(U, A) = \mathcal{H}_G^\infty(U, M)$.

Définition 7 L'algèbre de Weil est définie par: $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$.

Notons ${}_G G$ le groupe G considéré comme variété dans laquelle G opère à gauche. On note e l'identité de G . Rappelons que l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ consistant à évaluer en e fournit un isomorphisme de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_G G)$ sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$. On note j , δ et d_W les dérivations de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ obtenues en transportant les dérivations $-\iota$, d et $d_{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_G G)$. Nous les avons explicitées au paragraphe précédent. La dérivation δ de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ obtenue en transportant la différentielle d de de Rham est la dérivation de Koszul δ dans $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$, où $S(\mathfrak{g}^*)$ est considéré comme un \mathfrak{g} -module grâce à l'action adjointe.

Si $X \in \mathfrak{g}$, on note ι_X la dérivation de $\Lambda \mathfrak{g}^*$ telle que $\iota_X(f) = f(X)$ pour $f \in \mathfrak{g}^*$. On a

$$j = \sum x^i \iota_X(E_i) \quad \text{et} \quad d_W = j + \delta.$$

Si $x \in \mathfrak{g}^*$, on note encore x l'élément $x \otimes 1$ de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$ et πx l'élément x considéré comme élément impair de $\Lambda \mathfrak{g}^*$ (la lettre π est employée dans cette section pour "changement de parité", et non pour 3, 14...). Les éléments x et πx engendrent $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$. Il est utile de donner les formules pour les dérivations ci-dessus sur ces générateurs. On a

$$(17) \quad j(x) = 0, \quad j(\pi x) = x,$$

$$(18) \quad \delta(x) = \sum \mathcal{L}(E_i)(x) \pi x^i, \quad \delta(\pi x) = \sum \frac{1}{2} \pi x^i \pi \mathcal{L}(E_i)(x)$$

(formules de Koszul, voir [20] p. 177).

Il est commode de réécrire les formules de Koszul en introduisant la superalgèbre de Lie $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$. On pose

$$(19) \quad \omega_W = \sum \pi x^i E_i \in \Lambda \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}, \quad \Omega_W = \sum x^i E_i \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathfrak{g}.$$

On vérifie que les formules de Koszul sont équivalentes aux formules suivantes

$$(20) \quad \Omega_W = d_W(\omega_W) + \frac{1}{2}[\omega_W, \omega_W]$$

et

$$(21) \quad d_W(\Omega_W) = [\Omega_W, \omega_W].$$

L'action de G à droite dans G induit une représentation de G dans $\mathcal{A}(G)$ que l'on prolonge trivialement à $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(G)$. Elle laisse stable le sous-espace $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_G G)$. En transportant cette représentation sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_G G)$, on obtient une représentation de G dans $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, dont on vérifie que c'est la représentation naturelle dans le produit tensoriel $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$.

De même, si $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs ${}_G X$ est invariant à gauche et la dérivation $\iota({}_G X)$ de $\mathcal{A}(G)$, étendue naturellement à $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(G)$, laisse stable le sous-espace $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_G G)$. En transportant $\iota({}_G X)$ sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_G G)$, on obtient la dérivation $\iota_\Lambda(X)$ de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$.

Munie des dérivations d_W , $\iota_\Lambda(X)$, et de l'action naturelle de G , $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ est une G -algèbre (voir Cartan [15]). Disons brièvement pourquoi. Il résulte de ce qui précède que, munie de la différentielle δ au lieu de d_W , $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ est une G -algèbre (une sous- G -algèbre de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(G)$ où on a mis sur le premier facteur l'action triviale de G , et sur le second, l'action provenant de l'action à droite sur G). On sait d'autre part que l'on a $d_W^2 = 0$, car $d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$. Il suffit donc de voir que l'opérateur j commute aux opérateurs $\iota_\Lambda(X)$ et à l'action de G , ce qui est clair.

On définit l'algèbre de Weil à coefficients C^∞ par

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) = C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*.$$

L'opérateur $j = \sum x^i \iota_\Lambda(E_i)$ s'étend naturellement à $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$. Considérons $C^\infty(\mathfrak{g})$ comme un G -module par l'action adjointe. La dérivation de Koszul du complexe $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda \mathfrak{g}^*$ sera encore notée δ . L'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, {}_G G)$ sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ et si on note encore d_W la dérivation obtenue en transportant $d_{\mathfrak{g}}$, on obtient:

$$d_W = j + \delta.$$

1.4 Connections.

Soit A une G -algèbre et soit ω un élément impair de l'algèbre de Lie $A \otimes \mathfrak{g}$. On écrit

$$\omega = \sum \omega^i \otimes E_i,$$

où les ω^i sont des éléments impairs de A . On note κ_ω l'homomorphisme d'algèbres de $\Lambda \mathfrak{g}^*$ dans A tel que $\kappa_\omega(\pi x^i) = \omega^i$.

On dit que ω est une connexion si ω est G -invariant et si κ_ω commute aux opérateurs $\iota(X)$ (définis respectivement dans $\Lambda \mathfrak{g}^*$ et A). On a donc $\iota_A(E_i) \omega^j = \delta_{ij}$ et $\iota_A(X) \omega = X$. Ceci entraîne que A est l'algèbre extérieure $A_{\text{hor}}[\omega_1, \dots, \omega_n]$. On note h le projecteur correspondant sur A_{hor} . On dira que h est l'opérateur de projection horizontale déterminé par ω . Cet opérateur commute à l'action de G . Donnons une formule pour h . On note encore ω^i la multiplication par ω^i sur A . L'opérateur $\omega^i \iota_A(E_i)$ est un opérateur pair et commute aux $\omega^j \iota_A(E_j)$.

On a

$$(22) \quad h = \prod_i (I - \omega^i \iota_A(E_i)).$$

On pose $\Omega = d_A\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$. On dit que Ω est la courbure de ω . On écrit

$$\Omega = \sum \Omega^i \otimes E_i.$$

L'élément Ω est basique, pair, et vérifie l'identité de Bianchi

$$d_A\Omega = [\Omega, \omega].$$

On prolonge κ_ω de manière unique en un morphisme d'algèbres de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ dans A en posant

$$\kappa_\omega(x^i) = \Omega^i.$$

Les formules (20) montrent que κ_ω est un morphisme de G -algèbres.

Pour $\alpha = \alpha(\dots, x^j, \dots, \pi x^i, \dots) \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$, le morphisme $\kappa_\omega(\alpha)$ consiste à substituer les éléments impairs ω^i de A aux variables impaires πx^i et les éléments pairs Ω^j aux variables paires x^j . Si $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)$, on note

$$\kappa_\omega(\phi) = \phi(\Omega).$$

La sous-algèbre des éléments horizontaux de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ est égale à $S(\mathfrak{g}^*)$, et celle des éléments basiques à $S(\mathfrak{g}^*)^G$. Tous les éléments de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ sont annulés par $d_W = j + \delta$. L'application κ_ω induit donc une application de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ dans les éléments basiques et fermés de A . Montrons que, pour $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)^G$, la classe de cohomologie de $\phi(\Omega) \in H(A_{\text{bas}})$ est indépendante du choix de la connexion.

Soit $\tilde{\omega} \in C^\infty(\mathbb{R}, A \otimes \mathfrak{g})$ et soit $\omega_t = \tilde{\omega}(t)$. Supposons que ω_t , $t \in \mathbb{R}$, soit une famille à un paramètre de connexions. Soit Ω_t la courbure de ω_t . Notons $\omega'_t = \frac{d}{dt}\omega_t$.

Considérons l'algèbre $\tilde{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes} A$. On étend l'action de G sur A par action triviale sur le premier facteur. Munie de $\tilde{d} = d_{\mathbb{R}} + d_A$ et des opérateurs $\iota_A(X)$, l'algèbre \tilde{A} est une G -algèbre. On a

$$\tilde{A} = C^\infty(\mathbb{R}, A) \oplus C^\infty(\mathbb{R}, A)dt.$$

On considère $\tilde{\omega}$ comme une connexion sur \tilde{A} . Sa courbure est $\tilde{\Omega} = -\omega'_t dt + \Omega_t$. Notons $\tilde{\kappa}$ l'application correspondante de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ dans \tilde{A} . Soit $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)$. Dans la décomposition $\tilde{A} = C^\infty(\mathbb{R}, A) \oplus C^\infty(\mathbb{R}, A)dt$, on a

$$\phi(\tilde{\Omega}) = \phi(\Omega_t) - \sum_i (\omega'_t)^i (\partial_i \phi)(\Omega_t) \wedge dt$$

où ∂_i est la dérivée partielle du polynôme $\phi(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots)$ par rapport à la variable x^i .

Le même argument que ci-dessus montre que si $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)^G$ est G -invariant, $\phi(\tilde{\Omega})$ est $(d_{\mathbb{R}} + d_A)$ -fermée et basique. On en déduit la formule de transgression dans les éléments basiques de A :

$$(23) \quad \frac{d}{dt}\phi(\Omega_t) = d_A\left(\sum_i (\omega'_t)^i (\partial_i \phi)(\Omega_t)\right).$$

Ceci montre que la classe de cohomologie de $\phi(\Omega_t)$ dans (A_{bas}, d_A) est indépendante de t . En particulier, si ω_0 et ω_1 sont deux connections, $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ est une famille de connections égale à ω_0 au temps $t = 0$ et à ω_1 au temps $t = 1$. Donc $\phi(\Omega_1) = \phi(\Omega_0)$ dans $H(A_{\text{bas}})$.

Par conséquent, l'application κ_ω induit un homomorphisme indépendant du choix de ω , appelé *homomorphisme de Chern-Weil* et noté W , de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ dans l'algèbre d'homologie $H(A_{\text{bas}})$.

Nous dirons que ω est une *connection différentiable* si κ_ω est continue pour la topologie de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$. C'est le cas si et seulement si l'application $x^i \mapsto \Omega^i$ se prolonge en un homomorphisme continu de $C^\infty(\mathfrak{g})$ dans A . Dans ce cas nous noterons encore κ_ω le morphisme continu de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ dans A qui prolonge κ_ω et nous noterons encore

$$\kappa_\omega(\phi) = \phi(\Omega)$$

si $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$.

La sous-algèbre des éléments horizontaux de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ est égale à $C^\infty(\mathfrak{g})$, et celle des éléments basiques à $C^\infty(\mathfrak{g})^G$. Tous les éléments de $C^\infty(\mathfrak{g})^G$ sont annihilés par d_W . L'application κ_ω induit donc une application de $C^\infty(\mathfrak{g})^G$ dans les éléments basiques et fermés de A , et donc un homomorphisme W_ω prolongeant l'homomorphisme de Chern-Weil de $C^\infty(\mathfrak{g})^G$ dans l'algèbre d'homologie $H(A_{\text{bas}})$. Cet homomorphisme est indépendant de la connection dans le sens suivant: soient ω_0 et ω_1 deux connections différentiables faisant partie d'une famille différentiable $t \mapsto \omega_t$ de sorte que la formule de transgression (23) ci-dessus reste valable. Alors $W_{\omega_0}\phi = W_{\omega_1}\phi$ pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ et nous notons cette classe $W(\phi)$.

L'exemple fondamental est celui d'un fibré principal P de base B où G opère à droite [15] [16]. On choisit une forme de connection $\omega \in (\mathcal{A}^1(P) \otimes \mathfrak{g})^G$ (une telle forme existe) et on a $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in (\mathcal{A}^2(P) \otimes \mathfrak{g})^G$. On dit que Ω est la forme de courbure de la connection. Si $\phi = \phi(x^1, \dots, x^i, \dots) \in C^\infty(\mathfrak{g})$, alors $\phi(\Omega) \in \mathcal{A}(P)$ est donné par la formule de Taylor

$$\phi(\Omega) = \sum_I \frac{\Omega^I}{I!} (\partial_I \phi)(0),$$

où I désigne un multi-indice $I = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$, $\Omega^I = \prod \Omega^{i_k}$, etc Cette somme est finie, puisque les formes Ω^i sont de degré extérieur 2.

Soit p la projection de P sur B . On identifie par p^* l'algèbre $\mathcal{A}(B)$ et l'algèbre $\mathcal{A}(P)_{\text{bas}}$. Si ϕ est G -invariante, $\phi(\Omega)$ représente une classe $W(\phi) \in H(B)$ indépendante du choix de la connection ω .

Ce qui précède se généralise à une situation équivariante (voir [7]). Soit L un groupe de Lie opérant à gauche dans P avec une action commutant à celle de G , et supposons de plus que ω soit L -invariante. La sous-algèbre $\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{g}, P)$ des éléments L -invariants de $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{A}(P)$ est invariante par l'action de G et

des opérateurs $\iota(PX)$ ($X \in \mathfrak{g}$). Munie de la différentielle d_ι , c'est une G -algèbre (cela résulte immédiatement de ce que la dérivation ι_ι commute (au sens gradué) aux dérivations $\iota(PX)$ ($X \in \mathfrak{g}$)). On pose

$$(24) \quad \Omega_\iota = d_\iota\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P) \otimes \mathfrak{g}.$$

On a donc

$$\Omega_\iota = \Omega + \mu,$$

où

$$(25) \quad \mu = -\iota_\iota(\omega) \in \Gamma^* \otimes C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}.$$

On dit que Ω_ι est la courbure équivariante de ω et que μ est le moment équivariant de ω [7]. Pour $Y \in \mathfrak{l}$, $\mu(Y) = -\sum \omega^i(Y_P)E_i \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$.

Si $\phi = \phi(x^1, \dots, x^i, \dots) \in C^\infty(\mathfrak{g})$, alors $\phi(\Omega_\iota) \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P)$ est donnée par la formule de Taylor

$$\phi(\Omega_\iota) = \sum_I \frac{\Omega^I}{I!} (\partial_I \phi)(\mu),$$

c'est-à-dire

$$(26) \quad \phi(\Omega_\iota)_p(X) = \sum_I \frac{\Omega_p^I}{I!} (\partial_I \phi)(\mu_p(X)).$$

Dans la suite, si $X \in \mathfrak{l}$, nous écrivons $\Omega(X)$ pour $\Omega_\iota(X) = \Omega + \mu(X)$. On répète pour ce cas particulier les propriétés générales de l'application W_ω .

Proposition 8 *Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G muni d'une connexion ω . Soit L un groupe de Lie opérant à gauche dans P et supposons que ω soit L -invariante. Si $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$, la forme différentielle équivariante $W_\omega(\phi) = \phi(\Omega_\iota) \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ associée à ϕ par l'homomorphisme de Chern-Weil est une forme différentielle équivariante fermée sur B . La classe de cohomologie de $W_\omega\phi$ représente une classe $W(\phi) \in \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ indépendante de la connexion ω .*

1.5 Classes caractéristiques.

Nous utiliserons dans la suite l'homomorphisme de Chern-Weil dans le cas de fibrés vectoriels. Nous explicitons les formes équivariantes obtenues à l'aide de l'opérateur de courbure équivariante.

Soit M une variété. On note ΛT^*M le fibré d'algèbres extérieures du fibré cotangent. Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur M , on note $\Gamma(M, \mathcal{E})$ l'espace des sections de \mathcal{E} et $\mathcal{A}(M, \mathcal{E}) = \Gamma(M, \Lambda T^*M \otimes \mathcal{E})$ l'espace des formes différentielles sur M à valeurs dans \mathcal{E} . Supposons \mathcal{E} de rang constant N . On note $\mathrm{GL}(N)$ le groupe $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ ou le groupe $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ suivant le contexte. Soit P le fibré des repères de \mathcal{E} . La fibre P_m de P au point $m \in M$ est l'espace des isomorphismes linéaires de \mathbb{R}^N (ou \mathbb{C}^N) avec \mathcal{E}_m . Le groupe $\mathrm{GL}(N)$ opère à droite sur P et P est un fibré principal sur M de groupe $\mathrm{GL}(N)$. Notons τ la représentation canonique de $\mathrm{GL}(N)$ dans \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^N . Le fibré vectoriel \mathcal{E} est le

fibré $P \times_{\mathrm{GL}(N)} \mathbb{R}^N$ (si \mathcal{E} est réel) ou $P \times_{\mathrm{GL}(N)} \mathbb{C}^N$ (si \mathcal{E} est complexe) associé à la représentation τ .

Soient L un groupe opérant sur M et $\mathcal{E} \rightarrow M$ un fibré vectoriel L -équivariant de rang N sur la variété M . Soit N le rang de \mathcal{E} . Le groupe L opère à gauche sur $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$. Supposons \mathcal{E} muni d'un opérateur de connexion L -invariante ∇ . Par définition, l'opérateur ∇ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$. Si U est un ouvert au-dessus duquel $\mathcal{E} \cong U \times E$ est trivial, alors l'opérateur ∇ est égal à $d + \omega_U$, où ω_U est une 1-forme sur U à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$. Les 1-formes de connexion ω_U sur les ouverts de trivialisations U déterminent une forme de connexion ω sur le fibré principal des repères P , comme expliqué par exemple dans [6], chapitre 1.

Soit $\mathcal{L}^\mathcal{E}(X)$ la dérivée de Lie de l'action de G sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$. On définit la courbure équivariante de ∇ comme l'opérateur sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$

$$F(X) = (\nabla - \iota(X_M))^2 + \mathcal{L}^\mathcal{E}(X) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{l}.$$

On voit facilement que cet opérateur est donné par l'action sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ d'un élément de $\mathcal{A}(M, \mathrm{End} \mathcal{E})$ qu'on notera encore $F(X)$. On écrit aussi

$$F(X) = F + \mu(X),$$

où

$$F = \nabla^2 \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End} \mathcal{E})$$

est la courbure de la connexion ∇ et

$$\mu(X) = \mathcal{L}^\mathcal{E}(X) - (\nabla \iota(X_M) + \iota(X_M) \nabla) \in \Gamma(M, \mathrm{End} \mathcal{E})$$

est le *moment* de la connexion ∇ . Le rapport entre l'opérateur $F(X)$ et la forme de courbure équivariante $\Omega(X)$ de ω sur P définie en (24) est expliqué dans [6], chapitre 7.

Si ϕ est une fonction $\mathrm{GL}(N)$ -invariante sur $\mathfrak{gl}(N)$ et si $X \in \mathfrak{l}$, on peut définir $\phi(F(X))$. En effet, si e_i est un repère local de \mathcal{E} et e^i le repère dual, alors $F_i^j(X) = (e^j, F(X)e_i)$ est une matrice $N \times N$ à coefficients formes (locales) sur la base. Puisque ϕ est invariante, $\phi(F(X)) = \phi(F_i^j(X))$ est indépendante du repère local e_i choisi et donc la forme $\phi(F(X))$ est une forme différentielle sur M . Elle est égale à la forme $\phi(\Omega(X))$ donnée par (26). Donc $X \mapsto \phi(F(X))$ est une forme équivariante fermée et sa classe de cohomologie ne dépend pas de ∇ .

On considère en particulier la fonction $\phi(Y) = \mathrm{Tr}(e^Y)$, $Y \in \mathfrak{gl}(N)$.

Définition 9 Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel L -équivariant sur M muni d'une connexion L -invariante ∇ de courbure équivariante $F(X)$, on définit le caractère de Chern équivariant $\mathrm{ch}(\mathcal{E}, \nabla)$ par

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}, \nabla)(X) = \mathrm{Tr}(e^{F(X)}) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{l}.$$

La forme différentielle équivariante $\text{ch}(\mathcal{E}, \nabla)$ est fermée et sa classe de cohomologie équivariante notée $\text{ch}(\mathcal{E})$ est indépendante du choix de la connexion ∇ . On notera que la convention de signe dans cet article diffère de [6]. Si M est un point, \mathcal{E} est un espace de représentation de L et $\text{ch}(\mathcal{E})(X) = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\exp X)$.

Définition 10 Soit E un espace vectoriel réel. Notons J la fonction invariante par conjugaison sur $\text{End } E$ définie par

$$J(Y) = \det\left(\frac{\sinh(Y/2)}{Y/2}\right) \quad \text{pour } Y \in \text{End } E.$$

Définition 11 Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel réel L -équivariant sur M muni d'une connexion L -invariante ∇ de courbure équivariante $F(X)$, on définit le J -genre équivariant $J(\mathcal{E}, \nabla)$ de (\mathcal{E}, ∇) par

$$J(\mathcal{E}, \nabla)(X) = J(F(X)) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{l}.$$

Le J -genre équivariant est une forme différentielle équivariante fermée sur M et sa classe de cohomologie $J(\mathcal{E})$ ne dépend que du fibré \mathcal{E} .

1.6 Algèbre de Weil et cohomologie équivariante.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit $B = B^+ \oplus B^-$ une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et supercommutative. Supposons que B soit munie d'une structure de ΛV -module au sens suivant. Si e_i est une base de V , on s'est donné des dérivations impaires $\iota(e_i)$ de B vérifiant les relations

$$\iota(e_i)\iota(e_j) + \iota(e_j)\iota(e_i) = 0.$$

Un élément de connexion pour ι est un élément $\omega = \sum_i \omega^i e_i \in B^- \otimes V$ tel que $\iota(e_i)\omega^j = \delta_i^j$.

Lemme 12 Soit B une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et supercommutative. Soient ι_1 et ι_2 deux structures de ΛV -modules sur B , commutant entre elles (c'est-à-dire $\iota_1(v)\iota_2(w) + \iota_2(w)\iota_1(v) = 0$, pour tout $v, w \in V$). Supposons qu'il existe un élément de connexion ω commun pour ι_1 et ι_2 . Alors les deux structures ι_1 et ι_2 de ΛV -module sur B sont isomorphes.

Démonstration. Soit $\omega = \sum \omega^i e_i$. Les opérateurs impairs ω^i et $\iota_1(e_j) - \iota_2(e_j)$ commutent. Considérons la dérivation

$$\theta = \sum_i \omega^i (\iota_1(e_i) - \iota_2(e_i))$$

de B . Elle est paire et nilpotente de sorte que

$$(27) \quad \Theta = \exp(\theta) = \prod (1 + \omega^i (\iota_1(e_i) - \iota_2(e_i)))$$

est un automorphisme de B . On voit facilement que pour tout $v \in V$:

$$\iota_2(v)\Theta = \Theta\iota_1(v).$$

En effet, il suffit de le vérifier pour un espace vectoriel V de dimension 1 où la vérification est aisée. ■

Soit A une G -algèbre différentiable. On considère l'algèbre $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$. Les structures $\iota_1(X) = \iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)$ et $\iota_2(X) = \iota_\Lambda(X)$ commutent entre elles et ont l'élément de connection commun $\omega_V = \sum_i \pi x^i \otimes E_i$. On note θ la dérivation

$$\theta = \sum \pi x^i \iota_A(E_i).$$

D'après le lemme 12

$$\Theta = \exp(\theta) = \prod (1 + \pi x^i \iota_A(E_i))$$

est un automorphisme de $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$ et on a

$$(28) \quad \iota_\Lambda(X)\Theta = \Theta(\iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)).$$

Il en résulte que Θ induit un isomorphisme d'algèbres de $(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\text{hor}}$ (munie de la contraction totale $\iota_\Lambda + \iota_A$) sur la sous-algèbre $A = 1 \otimes A$ de $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$. Notons $r(\alpha) \in A$ la projection d'un élément $\alpha \in \Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$ sur la composante de degré extérieur 0. Alors, pour tout $\alpha \in (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\text{hor}}$, $\Theta(\alpha) \in A$ est égal à $r(\alpha)$.

Définissons

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A) = \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A = C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A).$$

On considère sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ la structure de G -algèbre obtenue par produit tensoriel (gradué) des structures de G -algèbres de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ et de A . En particulier $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ est muni de la différentielle $d_W + d_A$. On étend Θ en un automorphisme $C^\infty(\mathfrak{g})$ -linéaire de $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A) = \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Comme ci-dessus, on voit que Θ induit un isomorphisme de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{hor}}$ sur $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$ et de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}$ sur $A_G^\infty(\mathfrak{g}) = (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A)^G$. L'isomorphisme Θ coïncide sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{hor}} = C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\text{hor}}$ avec la projection r sur la composante de degré extérieur 0.

Notons j_A et c_A les dérivations impaires de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ définies par

$$j_A = \sum_i x^i \iota_A(E_i) \quad \text{et} \quad c_A = \sum_i \pi x^i \mathcal{L}_A(E_i).$$

Lemme 13 [24] Posons $k = \Theta(d_W + d_A)\Theta^{-1}$. On a

$$k = d_W + d_A - j_A + c_A = j + \delta + d_A - j_A + c_A.$$

Démonstration. D'après (28), on a $\iota_\Lambda(X) = \Theta(\iota_\Lambda(X) + \iota_A(X))\Theta^{-1}$. Donc la dérivation k vérifie

$$\iota_\Lambda(X)k + k\iota_\Lambda(X) = \mathcal{L}(X)$$

où $\mathcal{L}(X)$ est la représentation de \mathfrak{g} dans $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes A)$ produit tensoriel des représentations de G sur les trois facteurs. Il est facile de voir que l'opérateur $k' = j + \delta + d_A - j_A + c_A$ vérifie aussi

$$\iota_\Lambda(X)k' + k'\iota_\Lambda(X) = \mathcal{L}(X).$$

On voit donc que

$$\iota_\Lambda(X)(k' - k) + (k' - k)\iota_\Lambda(X) = 0.$$

Pour montrer que $k = k'$, nous procédons par récurrence descendante sur le degré extérieur. Il suffit de montrer que $k = k'$ pour tout $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda^{\max} \mathfrak{g}^* \otimes A)$. On calcule sans difficulté que

$$\begin{aligned} k\alpha &= \Theta(j + \delta + d_A)\alpha \\ &= \Theta(j + d_A)\alpha \\ &= d_A\alpha + j\alpha - j_A\alpha \\ &= k'\alpha. \end{aligned}$$

■

Corollaire 14 [16] *La projection r induit un isomorphisme de l'algèbre différentielle $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}, d_W + d_A)$ sur l'algèbre différentielle $(A_G^\infty(\mathfrak{g}), d_{\mathfrak{g}})$.*

Démonstration. Si $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$, alors $k\alpha = d_A\alpha - j_A\alpha + (\delta + c_A)\alpha$. Mais $(\delta + c_A)\alpha = \sum_i \pi x^i \mathcal{L}(E_i)\alpha$. Si $\alpha \in A_G^\infty(\mathfrak{g}) = (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A)^G$, alors $(\delta + c_A)\alpha = 0$ et $k\alpha = (d_A - j_A)\alpha = d_{\mathfrak{g}}\alpha$. ■

Remarque 15 *Dans [16] le corollaire est donné sous sa forme algébrique. D'après [16] l'algèbre $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ joue le rôle d'une algèbre de formes différentielles sur l'espace classifiant E_G . Lorsque A est la G -algèbre $\mathcal{A}(M)$ associée à l'action de G dans la variété M , le corollaire est lié à l'interprétation de la cohomologie équivariante comme cohomologie de l'espace $E_G \times_G M$.*

1.7 Action libre.

Nous dirons que l'action de G dans une G -algèbre différentiable A est infinitésimalement libre s'il existe une connection différentiable $\omega \in A \otimes \mathfrak{g}$. On note κ_ω^A l'homomorphisme d'algèbres de Fréchet de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ dans A qui prolonge l'application $\alpha \otimes a \mapsto \kappa_\omega(\alpha)a$. C'est un morphisme de G -algèbres différentielles. Donc κ_ω^A envoie $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}$ dans A_{bas} .

Considérons l'isomorphisme Θ^{-1} de $A_G^\infty(\mathfrak{g})$ avec $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}$. Alors $\kappa_\omega^A \Theta^{-1}$ est un homomorphisme d'algèbres différentielles de $A_G^\infty(\mathfrak{g})$ dans A_{bas} et $\kappa_\omega^A \Theta^{-1}$ est égal à l'identité sur la sous-algèbre $A_{\text{bas}} \subset (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A)^G$. Explicitons $\kappa_\omega^A \Theta^{-1}$. Soit $\Omega = \sum_i \Omega^i E_i$ la courbure de la connexion ω . Si $\alpha = \phi \otimes a \in C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes A$, avec $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ et $a \in A$, on a $\kappa_\omega^A(\alpha) = \phi(\Omega)a$. Pour $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$, on note $\kappa_\omega^A \alpha = \alpha(\Omega)$. Comme $\phi(\Omega) \in A_{\text{hor}}$, on voit que, si $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$,

$$\kappa_\omega^A \Theta^{-1} \alpha = \prod_i (I - \omega^i \iota_A(E_i))(\alpha(\Omega)).$$

Donc $\kappa_\omega^A \Theta^{-1} \alpha = h(\alpha(\Omega))$ où $h : A \rightarrow A_{\text{hor}}$ est l'opérateur de projection horizontale (22) déterminé par ω .

Définition 16 On note W_ω l'opérateur de $A_G^\infty(\mathfrak{g}) \rightarrow A_{\text{bas}}$ défini par

$$W_\omega(\alpha) = h(\alpha(\Omega)).$$

Comme $W_\omega = \kappa_\omega^A \Theta^{-1}$, l'application W_ω est un morphisme d'algèbres différentielles, prolongeant l'application $\phi \mapsto \phi(\Omega)$ définie pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G \subset A_G^\infty(\mathfrak{g})$, et égal à l'identité sur $A_{\text{bas}} \subset A_G^\infty(\mathfrak{g})$. Nous dirons encore que c'est l'homomorphisme de Chern-Weil.

L'application $x^i \mapsto x^i + \Omega^i$ définit un automorphisme T_Ω de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$. On dit que T_Ω est la translation par Ω . Nous supposons que cet automorphisme se prolonge en un automorphisme de $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$. Cette condition est vérifiée dans l'exemple de la section 1.4 d'un fibré principal $P \rightarrow B$ de groupe G muni d'une action à gauche de L . En effet, on a $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A = C^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, \mathcal{A}(P))^L$ et pour $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{l}, p \in P, \phi \in C^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, \mathcal{A}(P))^L$, on a

$$(T_\Omega \phi)_p(X, Y) = \phi(X + \Omega(Y), Y)_p = \sum_I \frac{\Omega_p^I}{I!} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^I \phi(X + \mu_p(Y), Y)_p.$$

Théorème 17 Soit A une G -algèbre différentiable. On suppose que l'action de G dans A est munie d'une connexion ω de courbure Ω et que la translation T_Ω est définie sur $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$. Alors l'injection canonique de A_{bas} dans $(C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A)^G$ induit un isomorphisme en cohomologie de $H(A_{\text{bas}})$ sur $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, A)$. L'inverse est induit par W_ω .

Remarque 18 Ce résultat est dû à H. Cartan [15][16] pour la cohomologie à coefficients polynomiaux.

Démonstration. Ecrivons $\omega = \sum \omega^i \otimes E_i$ la connexion de la G -algèbre A . Considérons les deux structures $\iota_1(X) = \iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)$ et $\iota_2(X) = \iota_A(X)$ de $\Lambda\mathfrak{g}$ -module sur $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$. La connexion ω est commune aux deux structures. D'après le lemme 12, l'opérateur $\Theta_A = \prod_i (1 + \omega^i \iota_\Lambda(E_i))$ vérifie $\Theta_A(\iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)) = \iota_A(X) \Theta_A$. L'automorphisme Θ_A de $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$ consiste à remplacer πx^i par $\pi x^i + \omega^i$.

L'application Θ_A induit donc un isomorphisme de $(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\text{hor}}$ avec $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A_{\text{hor}}$. Par prolongement $C^\infty(\mathfrak{g})$ -linéaire, Θ_A se prolonge en un automorphisme de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Cet automorphisme définit un isomorphisme de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}$ sur $(C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A_{\text{hor}}))^G$.

Notons $\Omega = \sum_i \Omega^i \otimes E_i \in A \otimes \mathfrak{g}$ la courbure de la connection ω . On note encore Ω^i l'opérateur de multiplication par Ω^i sur A . Notons j_Ω et c_ω les dérivations impaires de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ définies par

$$j_\Omega = \sum \Omega^i \iota_\Lambda(E_i) \quad \text{et} \quad c_\omega = \sum_i \omega^i \mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(E_i)$$

où $\mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(X)$ désigne la dérivée de Lie de de l'action de G dans $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$.

On note C l'opérateur $\Theta_A(d_W + d_A)\Theta_A^{-1}$ sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$.

Lemme 19 *On a $C = d_W + d_A - j_\Omega + c_\omega = j - j_\Omega + c_\omega + d_A + \delta$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\Theta_A(d_W + d_A)\alpha = (j - j_\Omega + c_\omega + d_A + \delta)\Theta_A\alpha$ pour α parcourant un système de générateurs (au sens topologique) de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$.

Pour $\alpha \in A$, la relation précédente est évidente. Pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$, nous avons:

$$\begin{aligned} \Theta_A(d_W + d_A)\phi &= \Theta_A\delta\phi \\ &= \Theta_A\left(\sum_i \pi x^i \mathcal{L}(E_i)\phi\right) \\ &= \sum_i (\pi x^i + \omega^i) \mathcal{L}(E_i)\phi \\ &= \delta\phi + c_\omega\phi \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation désirée pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$.

Soit $\pi x^i \in \mathfrak{g}^*$. On a, en écrivant $\Theta_A = \exp \theta_A$,

$$\begin{aligned} \Theta_A(d_W + d_A)\pi x^i &= \Theta_A(x^i + \delta\pi x^i) \\ &= x^i + \delta\pi x^i + \theta_A\delta\pi x^i + \frac{1}{2}\theta_A^2\delta\pi x^i \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} (j + \delta + d_A - j_\Omega + c_\omega)\Theta_A\pi x^i &= (j + \delta + d_A - j_\Omega + c_\omega)(\pi x^i + \omega^i) \\ &= x^i + \delta\pi x^i + d_A\omega^i - \Omega^i + c_\omega\pi x^i \\ &= x^i + \delta\pi x^i - \frac{1}{2}(x^i, [\omega, \omega]) + c_\omega\pi x^i. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier sur les formules explicites pour $\delta\pi x^i$ que l'on a $\theta_A\delta\pi x^i = c_\omega\pi x^i$ et $\theta_A^2\delta\pi x^i = -(x^i, [\omega, \omega])$. Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Sur A l'opérateur Θ_A est l'identité et C coïncide avec d_A .

Considérons la graduation de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ induite par le degré extérieur:

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet = \sum_{q=0}^{\dim \mathfrak{g}} C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda^q \mathfrak{g}^* \otimes A).$$

Décomposons C en somme d'opérateurs C_i homogènes de degré i pour cette graduation. On a $C = C_{-1} + C_0 + C_1$ avec $C_{-1} = j - j_\Omega$, $C_0 = d_A + c_\omega$ et $C_1 = \delta$.

Considérons enfin l'opérateur T_Ω de translation par Ω sur $C^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Il consiste à remplacer x^i par $x^i + \Omega^i$. L'opérateur T_Ω est un automorphisme de degré 0 et commute à l'action de G .

Si $\alpha \in \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A) = C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes A)$, on note $\alpha(0)$ la valeur de α en 0, c'est un élément de $\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes A$. On note $\alpha_{[0]}$ la composante de degré extérieur 0 de α . C'est un élément de $C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$. Donc $\alpha_{[0]}(0) \in A$.

Lemme 20 1. Soit $D = T_\Omega \circ C \circ T_\Omega^{-1}$. Alors D est une différentielle G -invariante sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Elle vérifie $\iota_A(X)D + D\iota_A(X) = \mathcal{L}(X)$.

2. On a $D = D_{-1} + D_0 + D_1$ où les D_i sont des opérateurs homogènes de degré i pour la graduation $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet$ et $D_{-1} = j$, $D_0 = d_A + c_\omega$.

3. Sur A , l'opérateur D coïncide avec d_A . L'application $\alpha \mapsto \alpha_{[0]}(0)$ est un morphisme d'algèbres différentielles de $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A), D)$ dans (A, d_A) et on a $\kappa_\omega^A \alpha = (T_\Omega \Theta_A \alpha)_{[0]}(0)$.

Démonstration. L'opérateur T_Ω commute aux opérateurs $\iota_A(X)$ car Ω est horizontale. On obtient donc 1.

Il est clair que $T_\Omega(j - j_\Omega)T_\Omega^{-1} = j$. On vérifie sur les générateurs par un calcul analogue au précédent (utilisant la relation $d_A \Omega = [\omega, \omega]$) que $T_\Omega(c_\omega + d_A) = (c_\omega + d_A)T_\Omega$.

Enfin l'application $T_\Omega \Theta_A$ consiste à substituer $x^i + \Omega^i$ à x^i et $\pi x^i + \omega^i$ à πx^i . Donc $(T_\Omega \Theta_A \alpha)_{[0]}(0) = \kappa_\omega^A \alpha$. ■

La sous-algèbre $(C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes A_{\text{hor}}))^G$ est donc stable par D . Comme algèbre différentielle, elle est isomorphe à $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}, d_W + d_A)$ par l'application $T_\Omega \Theta_A$. Le théorème 17 est donc équivalent à la proposition suivante:

Proposition 21 Soit $D = T_\Omega \Theta_A (d_W + d_A) \Theta_A^{-1} T_\Omega^{-1}$. L'injection

$$A_{\text{bas}} \rightarrow (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes A_{\text{hor}}))^G$$

induit un isomorphisme de $H(A_{\text{bas}})$ sur la cohomologie de $((C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} (\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes A_{\text{hor}}))^G, D)$.

Démonstration. Considérons l'algèbre différentielle $((\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A), D)$. Nous utiliserons le lemme de Poincaré.

Soit V l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . L'espace $C^\infty(V) \otimes \Lambda V^*$ est l'espace des formes différentielles dans V . On note x^i les fonctions coordonnées et e_i la base canonique. On note j_V la dérivation de degré -1 définie par $j_V = \sum x^i \iota(e_i)$. Notons $C^\infty(V)_0$ le sous-espace des fonctions nulles en 0. Le complexe

$$R^\bullet(V) : \quad \dots \xrightarrow{j_V} C^\infty(V) \otimes V^* \xrightarrow{j_V} C^\infty(V) \rightarrow 0$$

contient le sous-complexe

$$R_0^\bullet(V) : \quad \dots \xrightarrow{j_V} C^\infty(V) \otimes V^* \xrightarrow{j_V} C^\infty(V)_0 \rightarrow 0.$$

Le groupe $GL(V)$ opère dans le complexe $R^\bullet(V)$ en commutant à j_V . Le complexe $R_0^\bullet(V)$ est exact. En fait, il existe une homotopie h de degré 1 de $R_0^\bullet(V)$ telle que l'on ait $hj_V + j_Vh = I$ dans $R_0^\bullet(V)$ qui est de plus $GL(V)$ -invariante. Nous la décrivons ci-dessous.

On définit un opérateur \mathcal{F}_V de degré 0 dans le complexe $R_0^\bullet(V)$ en posant $\mathcal{F}_V(f dx^{i_1} \dots dx^{i_p}) = g dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$, où $g(x) = \int_0^1 f(tx) t^{p-1} dt$. Cela a un sens, car si $p = 0$, on a $f(0) = 0$ par hypothèse. Soit d_V la différentielle de de Rham dans $R^\bullet(V)$. Soit \mathcal{E}_V la dérivation d'Euler dans $R^\bullet(V)$ par rapport à l'ensemble des variables x^i et dx^i . Donc $\mathcal{E}_V = [d_V, j_V] = d_V j_V + j_V d_V$. On sait que \mathcal{E}_V est inversible dans $R_0^\bullet(V)$, d'inverse \mathcal{F}_V . Les opérateurs d_V , j_V , \mathcal{E}_V , et \mathcal{F}_V commutent à l'action de $GL(V)$. Les opérateurs \mathcal{E}_V et \mathcal{F}_V commutent avec j_V et d_V . On pose

$$h_V = \mathcal{F}_V d_V.$$

On a $h_V^2 = 0$ et

$$h_V j_V + j_V h_V = I$$

sur $R_0^\bullet(V)$. L'opérateur h_V est une homotopie du complexe $R_0^\bullet(V)$, commutant à l'action de $GL(V)$.

Nous démontrons maintenant la proposition. Considérons

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet = (C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*) \hat{\otimes} A = R^\bullet(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A.$$

On a $j = j_{\mathfrak{g}} \otimes I$. Considérons $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet = R_0^\bullet(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$ et $h = h_{\mathfrak{g}} \otimes I$. Comme A est graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les espaces $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ et $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$ ont une graduation totale sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'opérateur h est un opérateur homogène de degré 1 pour la graduation extérieure. Il est donc impair pour la graduation totale. Il commute à l'action de G et commute (au sens gradué) aux opérateurs impairs $\iota_A(X)$: $h \iota_A(X) + \iota_A(X) h = 0$. Les opérateurs h et j vérifient $hj + jh = I$ sur $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$.

Soit $D = j + D_0 + D_1$. D'après le lemme 20, l'opérateur $D_0 = d_A + \sum_i \omega^i \mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(E_i)$ laisse stable $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$ car les opérateurs $\mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(E_i)$ préservent le sous-espace des fonctions sur \mathfrak{g} s'annulant en 0. Comme $j(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A))$ est contenu dans $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$, le sous-espace $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet$ est stable par $D = j + D_0 + D_1$. Soit $N = (D_1 + D_0)h + h(D_1 + D_0)$. C'est un opérateur pair (pour la graduation totale) qui commute à l'action de G . On a $Dh + hD = I + N$ sur

$\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Comme $D^2 = 0$, on voit que N commute à D . De même, N commute à h . L'opérateur N est un opérateur nilpotent, car somme d'opérateurs homogènes de degré strictement positif pour la graduation extérieure. Comme $(D_1 + D_0)\iota_A(X) + \iota_A(X)(D_1 + D_0) = \mathcal{L}(X)$, et comme h commute à G , l'opérateur N vérifie $[\iota_A(X), N] = 0$ et N laisse stable le sous-espace $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A_{\text{hor}})^G$. L'opérateur $I + N$ est inversible dans $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$, d'inverse $1 - N + N^2 + \dots$. Si on note k l'endomorphisme de $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$ défini par la formule $k = (I + N)^{-1}h$, on a $kD + Dk = I$. La cohomologie de $(\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A), D)$ est donc nulle. De même, comme k préserve le sous-espace $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A_{\text{hor}})^G$, la cohomologie de ce sous-espace est nulle. D'après le lemme 20, l'application $\alpha \mapsto \alpha_{[0]}(0)$ est un morphisme d'algèbres différentielles de $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A), D)$ dans (A, d_A) . Soit $\alpha \in \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ un élément fermé pour D . Donc $\beta = \alpha - \alpha_{[0]}(0)$ est un élément fermé de $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$. C'est donc un bord. On voit donc que l'application $\alpha \mapsto \alpha_{[0]}(0)$ induit un isomorphisme en cohomologie. Ceci termine la démonstration de la proposition 21 et du théorème 17. ■

1.8 Actions principales et espaces homogènes.

Soit P une variété munie d'une action à droite d'un groupe de Lie N . (Bien entendu, toute variété munie d'une action à gauche peut être considérée comme munie de l'action à droite $x \cdot g = g^{-1} \cdot x$, pour $x \in P, g \in N$). On dira que l'action de N est principale si l'espace des orbites P/N est une variété C^∞ et si l'application quotient $q : P \rightarrow P/N$ est une fibration principale de groupe N .

Soit G un groupe de Lie et soit N un sous-groupe distingué de G . Soit P une variété munie d'une action à droite de G . Supposons que l'action du sous-groupe N soit principale. La variété P/N est donc munie d'une action à droite du groupe G/N .

Théorème 22 *Soit G un groupe de Lie et soit $N \subset G$ un sous-groupe fermé distingué de G . Soit P une variété munie d'une action à droite de G telle que l'action du sous-groupe N soit principale. Supposons qu'il existe une connexion G -invariante pour la fibration $q : P \rightarrow P/N$. Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N) \rightarrow \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$$

induit un isomorphisme

$$q^* : \mathcal{H}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P).$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas particulier suivant. Soient L et G deux groupes de Lie. Soit $q : P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G . Nous supposons que L opère à gauche dans P avec une action commutant à celle de G et nous supposons qu'il existe une connexion ω pour la fibration q qui soit L -invariante. L'espace quotient $B = P/G$ est donc muni d'une action de L . Nous sommes dans la situation décrite en 1.4. Considérons $(A, d_A) = (\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P), d_l)$. Munie de l'action de G sur P et des opérateurs $\iota_{(P)X}, X \in \mathfrak{g}$ et de la connexion

ω , c'est une G -algèbre infinitésimalement libre. Le sous-espace des éléments G -basiques de A s'identifie à $\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ par l'application q^* . Considérons

$$C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A = C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} C^\infty(\mathfrak{l}, \mathcal{A}(P))^L.$$

L'espace $A_G^\infty(\mathfrak{g}) = (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A)^G$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, P)$ et la différentielle $d_A - \iota_{\mathfrak{g}} = d_P - \iota_{\mathfrak{l}} - \iota_{\mathfrak{g}}$ est la différentielle $d_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}}$. Les hypothèses du théorème 17 sont vérifiées et l'application

$$q^* : \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B) \rightarrow \mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, P)$$

est un isomorphisme.

Montrons maintenant que nous pouvons nous ramener à ce cas particulier. Soit P une G -variété telle que le sous-groupe distingué N de G agisse de manière principale. Soit $q : P \rightarrow P/N$ l'application quotient. Notons L le groupe quotient G/N . Considérons la variété $L \times P$. Munissons la de l'action à droite diagonale de G : $(u, x) \cdot g = (ug, xg)$ pour $g \in G$, $u \in L$ et $x \in P$ et de l'action à gauche de L : $u_0 \cdot (u, x) = (u_0 u, x)$. Il est facile de voir que l'action de G est principale. La variété quotient par l'action de G est isomorphe à la variété P/N par l'application $q_G(u, x) \rightarrow q(x) \cdot u^{-1}$. De plus la fibration $q_G : L \times P \rightarrow P/N$ admet une connexion G -invariante. En effet le fibré tangent horizontal HP pour la fibration $q : P \rightarrow P/N$ (déterminé par la connexion), considéré comme sous-fibré du fibré tangent $T(L \times P)$ à $L \times P$, est un supplémentaire $L \times G$ -invariant au sous-espace engendré par les vecteurs tangents aux G -orbites dans $L \times P$. D'après le cas précédent (appliqué à la variété $L \times P$), on sait que q_G^* induit un isomorphisme

$$q_G^* : \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, P/N) \rightarrow \mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P).$$

Il est clair que l'action de L sur $L \times P$ est libre et admet une connexion $G \times L$ invariante. La projection $q_L : L \times P \rightarrow P$ induit un isomorphisme

$$q_L^* : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P) \rightarrow \mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P).$$

Considérons le sous-groupe $\Delta(G) = \{(\bar{g}, g); g \in G\}$ de $L \times G$ et son action à gauche $(\bar{g}, g) \cdot (u, x) = (\bar{g}ug^{-1}, xg^{-1})$ sur $L \times P$. Soit e_L l'identité de L . On note $r_P(x) = (e_L, x)$ l'injection de P dans $L \times P$. La sous-variété (e_L, P) de $L \times P$ est stable par $\Delta(G)$. Considérons l'application $r_P^* : \mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$ obtenue par composition des restrictions successives

$$\mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P) \rightarrow \mathcal{H}_{\Delta(G)}^\infty(\mathfrak{g}, L \times P) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P).$$

On voit facilement que $r_P^* q_L^* = I$. Donc r_P^* est l'isomorphisme inverse de q_L^* (c'est l'homomorphisme W_ω de la définition 16 dans le cas d'une connexion de courbure nulle). Le composé $r_P^* q_G^* : \mathcal{H}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$ coïncide avec q^* et nous obtenons notre théorème. ■

Soit ω la connection G -invariante pour la fibration $q : P \rightarrow P/N$. Nous explicitons un morphisme d'algèbres différentielles

$$W_\omega : (\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P), d_\mathfrak{g}) \rightarrow (\mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N), d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}})$$

inverse à gauche de q^* .

Soit $X \in \mathfrak{g}$. On appellera encore $\mu(X) = -\omega_P X \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{n}$ le moment de X . Si $Y \in \mathfrak{n}$, $\mu(Y) = -Y$. Soit $\Omega(X) = \mu(X) + \Omega \in \mathcal{A}(P) \otimes \mathfrak{n}$. On appellera $\Omega(X)$ la courbure équivariante de ω . Si $X \in \mathfrak{g}$, alors $X + \Omega(X) \in \mathcal{A}(P) \otimes \mathfrak{g}$, et on voit que $X + \Omega(X)$ ne dépend que de la projection de $X \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. La connection ω définit un projecteur h sur l'espace des formes N -horizontales. Définissons pour $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P))$, $\bar{X} \in \mathfrak{l} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ image de $X \in \mathfrak{g}$,

$$W_\omega(\alpha)(\bar{X}) = h(\alpha(X + \Omega(X))).$$

Comme N est distingué, N agit trivialement sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Par N -invariance on voit donc que $\alpha(X + \Omega(X)) \in \mathcal{A}(P)^N$ et $h(\alpha(X + \Omega(X))) \in \mathcal{A}(P/N)$. Donc $W_\omega(\alpha)$ est un élément de $C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathcal{A}(P/N))$ et de plus est G/N -invariant. L'application W_ω est donc une application de $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$ dans $\mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$. C'est une généralisation de l'homomorphisme de Chern-Weil de la définition 16 (qui correspond au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$ et $\mathcal{A}(P) = A$).

Lemme 23 *L'application $W_\omega : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P) \rightarrow \mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$ est un morphisme d'algèbres différentielles. De plus, si $\beta \in \mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$, alors*

$$W_\omega q^* \beta = \beta.$$

Démonstration. L'assertion $W_\omega q^* = I$ est évidente. Montrons que W_ω est un morphisme d'algèbres différentielles. Commençons par le cas produit. Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G sur lequel le groupe de Lie L opère à gauche. On peut alors exprimer l'application W_ω grâce au morphisme κ_ω^A de la section précédente. En effet soit $(A, d_A) = (\mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P), d_\mathfrak{l})$. La connection ω détermine un homomorphisme $\kappa_\omega : \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$. L'homomorphisme $\kappa_\omega \otimes I : \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \rightarrow \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$ suivi de l'application

$$\mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \rightarrow \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$$

obtenue par restriction à la diagonale est l'application $\kappa_\omega^A : \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A) \rightarrow A$ dans le cas particulier où $A = \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$. L'algèbre différentielle $\mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, P)$ est isomorphe à $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}_G}$ par l'application Θ_A . Notons $F_\omega = \kappa_\omega^A \Theta_A^{-1}$. C'est un morphisme d'algèbres différentielles

$$F_\omega : \mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, P) \rightarrow \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P)_{\text{bas}_G} = \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P/G).$$

On a vu que $F_\omega = W_\omega$.

Considérons maintenant la situation générale d'une fibration $q : P \rightarrow P/N$. Soit $L = G/N$. Considérons la $L \times G$ -variété $L \times P$ et la G -algèbre différentielle $(A, d_A) = (\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, L \times P), d_l)$. Alors $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}) = \mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, L \times P)$. Soit $\tilde{\omega}$ la connection $G \times L$ -invariante pour la fibration $q_G : L \times P \rightarrow P/N$ dont l'espace horizontal coïncide avec HP . Notons $\tilde{\Omega} \in A \otimes \mathfrak{g}$ la courbure équivariante de $\tilde{\omega}$. Alors

$$W_{\tilde{\omega}} : \mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, L \times P) \rightarrow \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$$

est un morphisme d'algèbres différentielles.

Soit $\alpha \in (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, L \times P))^G$. Le morphisme $W_{\tilde{\omega}}$ consiste à calculer $\alpha(\tilde{\Omega}) \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, L \times P)$ puis à projeter sur l'espace des formes horizontales pour l'action de G . Comme (e_L, P) s'envoie surjectivement sur $(L \times P)/G$, une forme basique est déterminée par sa restriction à (e_L, P) . Cette restriction est horizontale pour l'action de N . On a donc $W_{\tilde{\omega}}\alpha = h(\alpha(\tilde{\Omega})|P)$. Il suffit maintenant de montrer que $\tilde{\Omega}|P \in \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \otimes \mathfrak{g}$ coïncide avec l'application $\bar{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{n} \mapsto \Omega(X) + X$ définie précédemment. Il est clair que la restriction de $\tilde{\omega}$ à P est ω . Calculons pour $Y \in \mathfrak{l}$ l'élément $\tilde{\omega}(Y_L)|P \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{g}$ est un représentant de Y , le champ produit par l'action à droite diagonale de G sur $L \times P$ coïncide sur la sous-variété (e_L, P) avec $(-Y_L, P X)$. Par définition $\tilde{\omega}(-Y_L, P X) = X$. On obtient donc $-\tilde{\omega}(Y_L)|P = X + \mu(X)$ et $\tilde{\Omega}(Y)|P = X + \Omega(X)$. ■

Nous montrons maintenant comment le théorème précédent nous permet de calculer la cohomologie d'espaces induits.

Soit $G \rightarrow G/H$ un espace homogène. Considérons une H -variété M . Le groupe H opère librement à droite dans $G \times M$ par $(g, m) \cdot h = (gh, h^{-1}m)$ tandis que G opère à gauche. L'espace $G \times_H M$ des H -orbites est appelé l'espace induit (de H à G) de M . Il est muni d'une action de G à gauche. On note $[g, m]$ la classe de (g, m) dans $G \times_H M$.

Soit e l'identité de G . La sous-variété M se plonge dans $G \times_H M$ par $m \mapsto (e, m)$. C'est une sous-variété H -invariante de $G \times_H M$. Les applications de restriction successives $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M) \rightarrow \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, G \times_H M) \rightarrow \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ sont bien définies. On note

$$E : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M) \rightarrow \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$$

l'application composée. C'est un morphisme d'algèbres différentielles.

Nous dirons que G/H est un espace homogène réductif si la fibration H -principale $G \rightarrow G/H$ admet une connection G -invariante. En d'autres termes, si \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie de H , il existe un sous-espace supplémentaire H -invariant \mathfrak{r} de \mathfrak{g} .

Théorème 24 *Supposons que l'espace homogène $G \rightarrow G/H$ soit réductif. Alors l'application E induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$ sur $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$.*

Démonstration. La connection ω pour la fibration $G \rightarrow G/H$ définit une connection $G \times H$ -invariante pour la fibration $q_H : G \times M \rightarrow G \times_H M$. D'après le théorème 17, q_H^* induit un isomorphisme en cohomologie

$$q_H^* : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M) \rightarrow \mathcal{H}_{G \times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M).$$

Considérons l'action à gauche de G sur $G \times M$. La variété quotient est la variété M . L'action de G sur $G \times M$ est libre et la fibration $q_G : G \times M \rightarrow M$ est munie d'une connection $G \times H$ -invariante. L'application q_G^* induit donc un isomorphisme de $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ sur $\mathcal{H}_{G \times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M)$. Considérons le sous-groupe diagonal $\Delta(H) = \{(h, h)\}$ de $G \times H$. Soit e l'identité de G . La sous-variété (e, M) est une sous-variété invariante de $G \times M$ sous l'action de $\Delta(H)$. Notons r_M l'injection ainsi obtenue. L'application de restriction $r_M^* : \mathcal{H}_{G \times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M) \rightarrow \mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ obtenue par composition successive des applications de restriction $\mathcal{H}_{G \times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M) \rightarrow \mathcal{H}_{\Delta(H)}^\infty(\mathfrak{h}, G \times M) \rightarrow \mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ vérifie $r_M^* q_G^* = I$. Donc $r_M^* = q_G^{*-1}$ et $r_M^* q_H^*$ coïncide avec l'application E . ■

Soit $\omega \in \mathcal{A}^1(G) \otimes \mathfrak{h}$ la forme de connection de la fibration principale $G \rightarrow G/H$. La forme $\omega \otimes 1$ détermine une forme de connection pour la fibration H -principale $G \times M \rightarrow G \times_H M$. Considérons le morphisme d'algèbres différentielles $W_\omega : \mathcal{A}_{G \times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M) \rightarrow \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$. On note encore

$$W_\omega : \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M) \rightarrow \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$$

l'application W_ω restreinte à la sous-algèbre $\mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ de $\mathcal{A}_{G \times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M)$. On a $EW_\omega = 1$. Donc l'application W_ω donne une formule pour l'inverse de l'application de restriction E .

Nous l'explicitons un peu plus. On identifie les formes sur $G \times_H M$ aux formes basiques sur $G \times M$. Si $\alpha \in \mathcal{A}(G \times M)$, on a $\alpha(e) \in \Lambda \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{A}(M)$.

Si $\alpha \in \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$, alors l'élément $W_\omega \alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$ est déterminée par $(W_\omega \alpha)(e) \in C^\infty(\mathfrak{g}, (\Lambda \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{A}(M))_{\text{hor}_H})^H$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ la décomposition H -invariante donnée de \mathfrak{g} . La forme $\omega \in \mathcal{A}^1(G) \otimes \mathfrak{h}$ est déterminée par sa valeur en e . C'est l'élément $\tilde{\omega} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{h}$ tel que $\tilde{\omega}(X) = pr_{\mathfrak{h}} X$ où $pr_{\mathfrak{h}}$ est la projection de \mathfrak{g} sur \mathfrak{h} parallèlement à \mathfrak{r} . On écrit $\tilde{\omega} = \sum_i \tilde{\omega}^i \otimes E_i$, où E_i est une base de \mathfrak{h} . Soit $\Omega \in \mathcal{A}^2(G) \otimes \mathfrak{h}$ la courbure de ω . Elle est déterminée par sa valeur en e . C'est l'élément $\tilde{\Omega} \in (\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathfrak{h})^H$ donné par la formule

$$\tilde{\Omega}(X, Y) = [\tilde{\omega}(X), \tilde{\omega}(Y)] - \tilde{\omega}([X, Y])$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}$.

Le moment $\mu \in \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G/H) \otimes \mathfrak{h}$ est déterminé par sa restriction $\tilde{\mu}$ à $g = e$ et on a

$$\tilde{\mu}(X) = \tilde{\omega}(X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

La courbure équivariante de ω est déterminée par sa restriction en e et on a

$$\tilde{\Omega}(X) = \tilde{\omega}(X) + \tilde{\Omega}.$$

C'est un élément pair de $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathfrak{h}$. Si $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{h}) \hat{\otimes} \mathcal{A}(M)$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a $\alpha(\tilde{\Omega}(X)) \in \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathcal{A}(M)$ et

$$(W_\omega \alpha)(X)(e) = \prod_i (1 - \tilde{\omega}^i \iota((E_i)_M)) \alpha(\tilde{\Omega}(X)).$$

Si M est un point, c'est un cas particulier (pour la fibration H -principale $G \rightarrow G/H$) de l'homomorphisme de Chern-Weil équivariant

$$W_\omega : C^\infty(\mathfrak{h})^H \rightarrow \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G/H)$$

défini dans la proposition 8 par

$$(W_\omega \phi)(X) = \phi(\Omega(X)).$$

2 Méthode de descente.

2.1 Groupes presque algébriques.

Nous aurons besoin d'une classe de groupes de Lie réels qui ne soit pas trop éloignée de celle des groupes de Lie algébriques et qui contienne leurs revêtements (en fait les revêtements d'ordre 2 suffiraient).

Définition 25 *Un groupe presque algébrique est la donnée d'un groupe de Lie réel séparable G , d'un espace vectoriel réel V de dimension finie et d'un morphisme de groupes de Lie j de G dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$ vérifiant les conditions suivantes: le noyau $\ker j$ de j est un sous-groupe discret et central de G , et l'image $j(G)$ de j est un sous-groupe ouvert (pour la topologie ordinaire) de son adhérence de Zariski dans $\mathrm{GL}(V)$.*

Soit (G, j, V) un groupe presque algébrique. En général, les notions qui suivent dépendent assez peu du choix de la représentation linéaire localement fidèle j de G , de sorte que nous parlerons quelques fois du groupe presque algébrique G , sans citer explicitement j et V .

On notera \mathbf{G} l'adhérence de Zariski de $j(G)$ dans $\mathrm{GL}(V)$. On identifie grâce à j l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G et celle de \mathbf{G} . C'est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(V)$. Un élément $X \in \mathfrak{gl}(V)$ est dit nilpotent si c'est un endomorphisme nilpotent de V . Il est dit hyperbolique s'il existe une base de V formée de vecteurs propres de X . Il est dit elliptique s'il existe une base de $V \otimes \mathbb{C}$ formée de vecteurs propres de X avec valeurs propres imaginaires pures. Comme \mathfrak{g} est contenue dans $\mathfrak{gl}(V)$, ces définitions s'appliquent en particulier aux éléments

X de \mathfrak{g} . Tout élément X de $\mathfrak{gl}(V)$ s'écrit de manière unique sous la forme $X = S + H + N$, où S est elliptique, H hyperbolique et N nilpotent, et où les éléments S , H et N commutent deux à deux. On posera $S = S(X)$, $H = H(X)$ et $N = N(X)$. Comme \mathfrak{g} est algébrique, si $X \in \mathfrak{g}$, on a $S(X) \in \mathfrak{g}$, $H(X) \in \mathfrak{g}$ et $N(X) \in \mathfrak{g}$.

On notera \mathfrak{g}_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de \mathfrak{g} .

Les définitions correspondantes pour le groupe $GL(V)$ sont les suivantes. Soit $g \in GL(V)$. Alors g est unipotent si $g - 1$ est nilpotent, positivement hyperbolique s'il admet une base de vecteurs propres dans V avec des valeurs propres > 0 , elliptique s'il admet une base de vecteurs propres dans $V \otimes \mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1. Un élément $g \in GL(V)$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = shu$, où s est elliptique, h positivement hyperbolique et u unipotent, et où les éléments s , h et u commutent deux à deux. On pose $s = s(g)$, $h = h(g)$ et $u = u(g)$. Notons la propriété suivante:

Lemme 26 *Si s est une transformation elliptique de V , alors $\det_V(1 - s)$ est un nombre réel positif ou nul.*

Démonstration. En effet, les valeurs propres différentes de 1 possibles de s sont soit -1 et l'on a $1 - (-1) = 2 > 0$, soit des paires conjuguées μ et $\bar{\mu}$, et l'on a $(1 - \mu)(1 - \bar{\mu}) > 0$. ■

Soit a un nombre réel > 0 . On note $\mathfrak{gl}(V)_a$ l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que la partie imaginaire $\text{Im}(\lambda)$ de toute valeur propre λ de X dans V vérifie $|\text{Im}(\lambda)| < a$. Pour toute sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de $\mathfrak{gl}(V)$ on pose $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{gl}(V)_a \cap \mathfrak{h}$. Si H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , on pose $H_a = \exp(\mathfrak{h}_a)$.

Lemme 27 *Soient b et c deux nombres réels tels que l'on ait $0 < b < c$. Il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ qui est égale à 1 dans \mathfrak{g}_b et à 0 en dehors de \mathfrak{g}_c .*

Démonstration. Il suffit d'établir cette assertion lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Nous employons la méthode décrite p.60 de [28]. Pour $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $s(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathfrak{g}$ la matrice

$$s(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-1}u_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-2}u_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -u_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u_1 \end{pmatrix}$$

et \mathfrak{s} l'espace $s(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $r > 0$ on pose $\mathfrak{s}_r = \mathfrak{g}_r \cap \mathfrak{s}$. On choisit une fonction $\gamma \in C^\infty(\mathfrak{s})$ qui vaut 1 dans \mathfrak{s}_b et qui est nulle en dehors de \mathfrak{s}_c . Notons p_i les coefficients du polynôme caractéristique, de sorte que l'on a $\det(z - X) =$

$\sum_i (-1)^i p_i(X) z^{n-i}$. On a $p_i(s(u_1, u_2, \dots, u_n)) = u_i$ pour tout i . On définit une fonction différentiable sur \mathfrak{g} , invariante par conjugaison, en posant $\theta(X) = \gamma(s(p_1(X), p_2(X), \dots, p_n(X)))$, et θ prolonge γ . Soit $r > 0$ et soit $X \in \mathfrak{g}$. Les matrices X et $s(p_1(X), p_2(X), \dots, p_n(X))$ ont même polynôme caractéristique et on a $X \in \mathfrak{g}_r$ si et seulement si $s(p_1(X), p_2(X), \dots, p_n(X)) \in \mathfrak{s}_r$. La fonction θ convient donc. ■

Remarque 28 *On peut déduire aussi le lemme 27 du corollaire 2.3.2 de Bouaziz [13].*

Supposons $a \in]0, \pi]$. On sait que l'application exponentielle de \mathfrak{h} dans H est régulière dans \mathfrak{h}_a . Donc H_a est ouvert dans H . S'il existe un homomorphisme de H dans $\text{GL}(V)$ dont la différentielle en 1 est l'injection de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{gl}(V)$, c'est un difféomorphisme de \mathfrak{h}_a sur H_a . En particulier, l'application exponentielle est un difféomorphisme de \mathfrak{g}_a sur l'ouvert G_a de G , et sur l'ouvert $j(G)_a$ de $j(G)$. Il en résulte que j induit un difféomorphisme de G_a sur $j(G)_a$.

Remarque 29 *Même si H est un sous-groupe algébrique connexe de $\text{GL}(V)$, on n'a pas nécessairement $H_a = H \cap \text{GL}(V)_a$. Donnons un exemple. Soit $a \in]0, \pi]$. Soit n un entier tel que $a > \frac{2\pi}{n}$. Soit H le sous-groupe de $\text{GL}(\mathbb{C}^2) \subseteq \text{GL}(\mathbb{R}^4)$ formé des matrices diagonales (u, v) où u et v sont des nombres complexes de modules 1 vérifiant l'équation $u^n = v$. Le groupe H_a est formé des (e^{it}, e^{int}) avec $-a < nt < a$. Le groupe $H \cap \text{GL}(\mathbb{R}^4)_a$ contient l'élément $(e^{2i\pi/n}, 1)$, mais celui-ci n'appartient pas à H_a .*

Soit $a > 0$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Alors X appartient à \mathfrak{g}_a si et seulement s'il en est de même de $S(X)$. Donc \mathfrak{g}_a contient l'ensemble des éléments nilpotents et hyperboliques de \mathfrak{g} .

Nous poserons $\mathfrak{g}_{ell,a} = \mathfrak{g}_{ell} \cap \mathfrak{g}_a$.

Lemme 30 *Soit $a \in]0, \pi]$.*

Soit $g \in j(G)$. On a $s(g) \in j(G)$, $h(g) \in j(G)$ et $u(g) \in j(G)$.

L'ensemble $j(G)_a$ est égal à l'ensemble des $g \in j(G)$ tels que l'on ait $s(g) = e^S$ où $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$.

Soit $X \in \mathfrak{g}_a$ et soit $g = e^X$. On a $s(g) = e^{S(X)}$, $h(g) = e^{H(X)}$ et $u(g) = e^{N(X)}$.

L'ensemble $j(G)_a$ contient l'ensemble des éléments unipotents et positivement hyperboliques de $j(G)$.

L'exponentielle est une bijection de l'ensemble des éléments nilpotents (resp. hyperboliques) de \mathfrak{g} sur l'ensemble des éléments unipotents (resp. positivement hyperboliques) de $j(G)$.

Démonstration. Comme \mathbf{G} est algébrique, on a $s(g) \in \mathbf{G}$, $h(g) \in \mathbf{G}$ et $u(g) \in \mathbf{G}$. D'après ce qu'on vient de rappeler, les éléments $h(g)$ et $u(g)$ sont dans $\exp(\mathfrak{g})$, et donc dans $j(G)$. Le lemme en résulte. ■

On considère maintenant le groupe G . Un élément $g \in G$ est dit unipotent s'il est de la forme $g = e^N$ avec N nilpotent dans \mathfrak{g} , positivement hyperbolique s'il est de la forme $g = e^H$ avec H hyperbolique dans \mathfrak{g} et elliptique si $j(g)$ est un élément elliptique de $\mathrm{GL}(V)$. On notera qu'un élément de $g \in G$ est elliptique si et seulement si $j(g)$ est contenu dans un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$. On notera G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G .

Lemme 31 *Soit $g \in G$. Alors g s'écrit de manière unique sous la forme $g = shu$, où s est elliptique, h positivement hyperbolique et u unipotent, et où les éléments s , h et u commutent deux à deux.*

Démonstration. On écrit $j(g) = s'e^He^N$ où H est un élément hyperbolique de \mathfrak{g} , N est un élément nilpotent de \mathfrak{g} , et s' un élément elliptique de $j(G)$ (c'est possible d'après le lemme qui précède). On définit un élément s dans G par la formule $g = se^He^N$. Comme $j(s) = s'$, s est elliptique. Par définition d'un groupe presque algébrique, le noyau de j est central dans G et opère donc trivialement dans \mathfrak{g} . On a donc $\mathrm{Ad}(s)H = \mathrm{Ad}(s')H$. On a $se^Hs^{-1} = e^{\mathrm{Ad}(s)H} = e^{\mathrm{Ad}(s')H} = e^H$. De même, on a $se^Ns^{-1} = e^N$. ■

Si g appartient à G , on écrira $g = s(g)h(g)u(g)$ la décomposition du lemme précédent.

Nous résumons ce qui précède dans un lemme.

Lemme 32 *Soit $a \in]0, \pi]$. Alors G_a est ouvert dans G . L'application exponentielle est un difféomorphisme de \mathfrak{g}_a sur G_a . L'ensemble G_a est égal à l'ensemble des $g \in G$ tels que l'on ait $s(g) = e^S$ où $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$.*

Soit $X \in \mathfrak{g}_a$. Soit $g = e^X$. On a $s(g) = e^{S(X)}$, $h(g) = e^{H(X)}$ et $u(g) = e^{N(X)}$.

Définition 33 *Soit H un sous-groupe fermé de G . On dit que c'est un sous-groupe presque algébrique si $j(H)$ est ouvert (pour la topologie ordinaire) dans son adhérence de Zariski dans $\mathrm{GL}(V)$.*

Le triplet $(H, j|_H, V)$ est alors un groupe presque algébrique. L'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H est une sous-algèbre algébrique de \mathfrak{g} . Si $g \in H$, on a $s(g) \in H$, $h(g) \in H$ et $u(g) \in H$.

Pour $g \in G$, on note $G(g)$ le centralisateur de g dans G et $\mathfrak{g}(g)$ l'algèbre de Lie de $G(g)$. De même, pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $G(X)$ le centralisateur de X dans G et $\mathfrak{g}(X)$ l'algèbre de Lie de $G(X)$.

Pour tout $g \in G$, le sous-groupe $G(g)$ de G est un sous-groupe presque algébrique de G . En effet, le sous-groupe $\mathbf{G}(j(g))$ de \mathbf{G} est algébrique. Les groupes $G(g)$ et $\mathbf{G}(j(g))$ ont la même algèbre de Lie $\mathfrak{g}(g)$, égale au noyau de $\mathrm{Ad}(g) - 1$ dans \mathfrak{g} . Donc $j(G(g))$ est ouvert dans $\mathbf{G}(j(g))$.

De même, si $X \in \mathfrak{g}$, le sous-groupe $G(X)$ de G est presque algébrique.

Définition 34 Soit (G', j', V') un autre groupe presque algébrique. Un homomorphisme $\phi : G' \rightarrow G$ est presque algébrique s'il existe un homomorphisme de groupes algébriques $\bar{\phi}$ de l'adhérence de Zariski de $j(G')$ dans l'adhérence de Zariski de $j(G)$ tel que $j\phi = \bar{\phi}j'$.

2.2 Bottes de fonctions invariantes.

Dans ce paragraphe on fixe un groupe presque algébrique G .

Définition 35 Un ouvert \mathcal{W} de G est dit G -elliptique (ou simplement elliptique s'il n'y a pas de risque de confusion) s'il est invariant par l'action adjointe de G , et si, pour tout $g \in G$, on a $g \in \mathcal{W}$ si et seulement si $s(g) \in \mathcal{W}$.

Un ouvert \mathcal{V} de \mathfrak{g} est dit G -elliptique (ou simplement elliptique s'il n'y a pas de risque de confusion) s'il est invariant par l'action adjointe de G , et si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si $S(X) \in \mathcal{V}$.

Les ouverts elliptiques forment une topologie sur G (resp. sur \mathfrak{g}), dite topologie elliptique. Si G est compact, alors $G_{ell} = G$ (resp. $\mathfrak{g}_{ell} = \mathfrak{g}$) et un ouvert elliptique de G (resp. de \mathfrak{g}) est simplement un ouvert de G (resp. de \mathfrak{g}) pour la topologie ordinaire qui de plus est G -invariant. Par contre, si G est un sous-groupe unipotent (ou plus généralement résoluble déployé) de $GL(V)$, les seuls ouverts elliptiques sont l'ensemble vide et l'espace total.

Nous allons décrire une base de la topologie elliptique. Introduisons quelques notations. Soit $s \in G_{ell}$. L'action adjointe de s dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est semi-simple. On a la décomposition $G(s)$ -invariante

$$(29) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{q}(s),$$

avec

$$\mathfrak{g}(s) = \{X \in \mathfrak{g}, sX = X\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}(s) = (1 - s)\mathfrak{g}.$$

De même, si $S \in \mathfrak{g}$ est elliptique on a

$$(30) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S) \oplus \mathfrak{q}(S),$$

avec

$$\mathfrak{g}(S) = \{X \in \mathfrak{g}, [S, X] = 0\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}(S) = [S, \mathfrak{g}].$$

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\text{Arg}(z)$ la détermination de son argument comprise dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$. On notera

$$\epsilon'(s) = \inf(|\text{Arg}(\mu_i)|, \pi)$$

où μ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres de $Ad(s)_{\mathfrak{q}(s)}$. Comme $Ad(s)$ est elliptique, tous les μ_i sont des nombres complexes de module 1, $\mu_i \neq 1$. Donc $\epsilon'(s) \in]0, \pi]$.

Lemme 36 Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a \in]0, \epsilon'(s)]$. On a $\det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - Ad(sh)) > 0$ pour tout $h \in G(s)_a$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathfrak{q}(s)$ est non nul. Le nombre $\det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - Ad(s))$ est non nul, donc strictement positif d'après le lemme 26. Comme h et s commutent, et comme $h \in G(s)_a$, on voit que les valeurs propres de $Ad(sh)$ dans $\mathfrak{q}(s)$ sont toutes différentes de 1. Comme $G(s)_a$ est connexe, on a $\det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - Ad(sh)) > 0$ pour tout $h \in G(s)_a$. ■

Nous posons

$$\epsilon(s) = \frac{1}{2}(\inf_{i \neq j} |\text{Arg}(\lambda_i \lambda_j^{-1})|, \pi)$$

où λ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres (distinctes) de $j(s)$ dans l'espace vectoriel V . Comme s est elliptique les $\lambda_i \lambda_j^{-1}$ sont des nombres complexes de module 1, différents de 1. On a donc $\epsilon(s) \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Notons l'inégalité

$$\epsilon(s) \leq \frac{1}{2}\epsilon'(s).$$

C'est clair si $\mathfrak{q}(s)$ est nul. Sinon, cela résulte de ce que les valeurs propres de $Ad(s)_{\mathfrak{q}(s)}$ sont certains des nombres $\lambda_i \lambda_j^{-1}$.

Lemme 37 Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a \in]0, \epsilon(s)]$. Soient $g \in G$, $h \in G(s)_a$ et $h' \in G(s)_a$ tels que l'on ait $sh' = gshg^{-1}$. Alors on a $g \in G(s)$.

Soit $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. On a $G(se^Y) = G(s) \cap G(Y)$.

Démonstration. Considérons les valeurs propres λ_i de $j(s)$, et les sous-espaces propres V_{λ_i} correspondants. Chacun de ces sous-espaces est stable sous l'action de $j(h)$ et de $j(h')$. Les valeurs propres $\lambda_{i,l}$ de $j(sh)$ dans V_{λ_i} vérifient $|\text{Arg}(\lambda_i^{-1} \lambda_{i,l})| < a$. De même, les valeurs propres $\lambda'_{i,k}$ de $j(sh')$ dans V_{λ_i} vérifient $|\text{Arg}(\lambda_i^{-1} \lambda'_{i,k})| < a$. Soit $v \in V_{\lambda_i}$ un vecteur propre de $j(sh)$ pour la valeur propre $\lambda_{i,l}$. Comme $j(sh')$ est conjugué de $j(sh)$, $\lambda_{i,l}$ est égal à l'un des $\lambda'_{i',k'}$. Comme on a $a \leq \epsilon(s)$, ceci implique l'égalité $i = i'$. Donc $j(g)v$ appartient à V_{λ_i} . Puisque $j(s)$ est semi-simple, $j(g)$ commute à $j(s)$. On a donc $j(h') = j(ghg^{-1})$. Puisque $a \leq \pi$, on a $h' = ghg^{-1}$. On trouve $sh' = sghg^{-1} = gshg^{-1}$, et $sg = gs$.

Soit $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. Il résulte de ce qui précède que $G(se^Y)$ est contenu dans $G(s)$. Quitte à remplacer $G(s)$ par G , on est donc ramené à prouver que $G(e^X) = G(X)$ si $X \in \mathfrak{g}_a$. C'est vrai car l'exponentielle est injective dans \mathfrak{g}_a . ■

Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a \in]0, \pi]$. L'ouvert $G(s)_a$ de $G(s)$ est invariant par l'action adjointe de $G(s)$. On peut donc considérer l'espace fibré $G \times_{G(s)} G(s)_a$ de base $G/G(s)$. On notera $[g, h]$ la classe dans $G \times_{G(s)} G(s)_a$ d'un élément (g, h) de $G \times G(s)_a$. On définit une application différentiable

$$(31) \quad \gamma : G \times_{G(s)} G(s)_a \rightarrow G$$

en posant $\gamma([g, h]) = gshg^{-1}$. L'image de γ est donc l'ensemble

$$(32) \quad \mathcal{W}(s, a) = \{gshg^{-1}, g \in G, h \in G(s)_a\}.$$

C'est un sous-ensemble G -invariant de G contenant la classe de conjugaison de s .

Lemme 38 *Soit $s \in G_{ell}$ et soit $a \in]0, \pi]$. Si $a \leq \epsilon'(s)$, γ est un revêtement de $\mathcal{W}(s, a)$, et $\mathcal{W}(s, a)$ est un voisinage ouvert G -invariant de la classe de conjugaison de s dans G . Si $a \leq \epsilon(s)$, γ est un difféomorphisme de $G \times_{G(s)} G(s)_a$ sur $\mathcal{W}(s, a)$.*

Démonstration. Prouvons 1. Comme $a \leq \pi$, l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}(s)_a$ sur l'ouvert $G(s)_a$ de $G(s)$. Calculons la différentielle D de γ au point $[g, h]$. L'espace tangent T en $[g, h]$ à $G \times_{G(s)} G(s)_a$ s'identifie à $\mathfrak{q}(s) \times \mathfrak{g}(s)$ grâce à la différentielle de l'application $(X, Y) \mapsto [ge^X, he^Y]$. De même, l'espace tangent T' à G en un point g' de G s'identifie à \mathfrak{g} , par translation à gauche par g' . Avec ces conventions D est égale à

$$(33) \quad D(X, Y) = Ad(g)(Y + (Ad(sh)^{-1} - 1)X).$$

D'après le lemme 36, D est bijective. L'application γ est donc un revêtement de $\mathcal{W}(s, a)$.

La seconde assertion résulte de la première et du lemme 37. ■

Lemme 39 *Soit $s \in G_{ell}$ et soit $a \in]0, \epsilon(s)]$. Alors l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$ est elliptique. Plus précisément, soit $x \in \mathcal{W}(s, a)$. Alors il existe des éléments S elliptique, H hyperbolique, et N nilpotent dans $\mathfrak{g}(s)_a$, commutant deux à deux, et un élément $g \in G$ tels que $x = gse^S e^H e^N g^{-1}$, et l'on a $s(x) = gse^S g^{-1}$.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du lemme 38. ■

Lemme 40 *Soit \mathcal{W} un ouvert elliptique de G . Soit $x \in \mathcal{W}$. Pour tout $a \in]0, \pi]$, l'ouvert $\mathcal{W}(s(x), a)$ contient x . De plus, si a est suffisamment petit, $\mathcal{W}(s(x), a)$ est contenu dans \mathcal{W} .*

Démonstration. C'est clair. ■

En d'autres termes, la topologie elliptique de \mathcal{W} a une base formée d'ouverts de la forme $\mathcal{W}(s, a)$, où $s \in \mathcal{W}_{ell}$, et $a > 0$ est suffisamment petit.

Exemple 41 *Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)]$. Soit t un élément elliptique de $\mathcal{W}(s, a)$. Nous allons déterminer $b > 0$ tel que le voisinage $\mathcal{W}(t, b)$ soit contenu dans $\mathcal{W}(s, a)$. D'après le lemme 39, t est conjugué d'un élément de la forme se^S avec $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell, a}$. D'après le lemme 37, on a $G(se^S) = G(s)(S)$ et $\mathfrak{g}(se^S) = \mathfrak{g}(s)(S)$. Soit $a' = \sup |\lambda_i|$, où λ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres de S dans V . On a donc $a' < a$. Soit $b = a - a'$. On en déduit les inclusions $S + \mathfrak{g}(se^S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_a$ et $e^S G(se^S)_b \subseteq G(s)_a$. On a donc $\mathcal{W}(t, b) = \mathcal{W}(se^S, b) \subseteq \mathcal{W}(s, a)$.*

Soit θ une fonction C^∞ et G -invariante définie dans l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$. Une telle fonction est donc déterminée par sa restriction à la sous-variété fermée $sG(s)_a$. Nous noterons $R_s\theta$ la fonction C^∞ dans $\mathfrak{g}(s)_a$ obtenue en composant $\theta|_{sG(s)_a}$ avec le difféomorphisme $Y \mapsto se^Y$:

$$(34) \quad (R_s\theta)(Y) = \theta(se^Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. La fonction $R_s\theta$ détermine la restriction de θ à l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$. Si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ et $Y \in \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S)$, on a évidemment:

$$\theta(se^S e^Y) = \theta(se^{S+Y}).$$

Pour tout $s \in G_{ell}$ soit $a(s) \in]0, \epsilon(s)]$, choisi de telle sorte que la fonction $s \mapsto a(s)$ soit invariante. Les conditions suivantes sont donc vérifiées:

1. $a(gsg^{-1}) = a(s)$ et $(R_{gsg^{-1}})(gYg^{-1}) = (R_s\theta)(Y)$ pour tout $g \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$,
2. pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell, a(s)}$, il existe $b \in]0, a(se^S)]$ tel que

$$S + \mathfrak{g}(s \exp S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_{a(s)} \quad \text{et} \quad (R_{s \exp S}\theta)(Y) = (R_s\theta)(S + Y)$$

pour tout $Y \in G(se^S)_b$.

Définition 42 *Considérons une famille $(a(s), \theta_s)_{s \in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, $a(s) \in]0, \epsilon(s)]$ et $\theta_s \in C^\infty(\mathfrak{g}(s)_{a(s)})^{G(s)}$, vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Invariance: $a(gsg^{-1}) = a(s)$ et $\theta_{gsg^{-1}}(gYg^{-1}) = \theta_s(Y)$ pour tout $g \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.*

2. *Recollement: pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell, a(s)}$, il existe $b \in]0, a(se^S)]$ tel que*

$$S + \mathfrak{g}(s \exp S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_{a(s)} \quad \text{et} \quad \theta_{s \exp S}(Y) = \theta_s(S + Y)$$

pour tout $Y \in G(se^S)_b$.

Deux familles $(a(s), \theta_s)$ et $(b(s), \phi_s)$ sont équivalentes s'il existe une fonction $c(s) \in]0, \inf(a(s), b(s))]$ telle que $c(gsg^{-1}) = c(s)$ et telle que θ_s et ϕ_s coïncident sur $\mathfrak{g}(s)_{c(s)}$.

Une classe d'équivalence de telles familles de fonctions sera appelée une botte de fonctions C^∞ dans G .

Autrement dit, une botte θ est une fonction qui à $s \in G_{ell}$ associe un germe (pour la topologie elliptique) θ_s en 0 de fonction C^∞ sur $\mathfrak{g}(s)$ vérifiant les conditions d'invariance et de recollement énoncée ci-dessus.

Lemme 43 *Soit θ une botte de fonctions C^∞ dans G représentée par une famille $(a(s), \theta_s)_{s \in G_{ell}}$. Il existe un unique élément $\Theta \in C^\infty(G)^G$ tel que, pour tout $s \in G_{ell}$, on ait $R_s\Theta = \theta_s$ dans $\mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.*

Démonstration. Pour tout $s \in G_{ell}$ notons $\psi^{(s)}$ l'unique fonction G -invariante dans $\mathcal{W}(s, a(s))$ telle que l'on ait $\psi^{(s)}(se^Y) = \theta_s(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$ (lemme 45). Montrons que pour tout s et s' dans G_{ell} les fonctions $\psi^{(s)}$ et $\psi^{(s')}$ coïncident dans l'intersection $\mathcal{W}(s, a(s)) \cap \mathcal{W}(s', a(s'))$. D'après le lemme 40, il suffit de voir que pour tout élément elliptique $s'' \in \mathcal{W}(s, a(s)) \cap \mathcal{W}(s', a(s'))$, il existe un nombre $a'' > 0$ tel que $\psi^{(s)}$ et $\psi^{(s')}$ coïncident dans $\mathcal{W}(s'', a'')$. On écrit $s'' = gse^S g^{-1} = g's'e^{S'}g'^{-1}$ avec $g \in G$, $g' \in G$, $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell, a(s)}$ et $S' \in \mathfrak{g}(s')_{ell, a(s')}$ (exemple 41 appliqué à s et s'). D'après la seconde propriété d'une botte admissible, on voit que les restrictions de $\psi^{(s)}$ et $\psi^{(s')}$ à $\mathcal{W}(s'', a'') = \mathcal{W}(se^S, a'')$ sont toutes deux égales à $\psi^{(s'')}$. ■

Nous dirons que Θ est la fonction définie par la botte de fonctions $\theta = (\theta_s)_{s \in G_{ell}}$. Dans cet article, nous construirons des bottes de fonctions C^∞ sur G en intégrant des formes différentielles équivariantes.

2.3 Fonctions généralisées et descente.

Nous définissons dans ce paragraphe la notion de bottes de fonctions généralisées. Nous n'utiliserons pas ce paragraphe dans cet article. Cependant nous en aurons besoin dans un article ultérieur. Rappelons que c'est l'étude et la construction par Harish-Chandra [22] [23] de fonctions généralisées G -invariantes sur un groupe semi-simple réel G qui est à l'origine de la méthode de descente.

Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)[$. Considérons une fonction généralisée G -invariante dans l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$. Une telle fonction est déterminée par sa restriction à la sous-variété fermée $sG(s)_a$. Précisons ce point. Soit dg une mesure de Haar à gauche sur G . Notons dX la mesure de Lebesgue tangente sur \mathfrak{g} , et choisissons des mesures de Lebesgue dY sur $\mathfrak{g}(s)$ et dQ sur $\mathfrak{q}(s)$ telles que $dX = dY dQ$. On note dq la "mesure" G -invariante tangente à dQ sur l'espace des fonctions ϕ sur G qui vérifient

$$\phi(gy) = |\det_{\mathfrak{q}(s)}(Ad(y))| \phi(g)$$

pour tout $g \in G$ et tout $y \in G(s)$. On note dy la mesure de Haar sur $G(s)$ à gauche tangente à dY .

Lemme 44 *Pour toute fonction α continue à support compact contenu dans l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$ on a*

$$\int_{\mathcal{W}(s, a)} \alpha(g) dg = \int_{G/G(s)} |\det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{sG(s)_a} \alpha(gyg^{-1}) \det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - y) dy \right) dq.$$

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du lemme 36, du lemme 38 et de la formule (33). ■

Donc, si θ est une fonction continue G -invariante dans $\mathcal{W}(s, a)$, on a

$$\int_{\mathcal{W}(s,a)} \theta(g)\alpha(g)dg = \int_{G/G(s)} |\det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{sG(s)_a} \theta(y)\alpha(gyg^{-1}) \det_{\mathfrak{q}(s)}(1-y)dy \right) dq.$$

Cette formule permet de définir une bijection entre l'espace des fonctions généralisées G -invariantes dans $\mathcal{W}(s, a)$ et l'espace des fonctions généralisées $G(s)$ -invariantes dans $sG(s)_a$. C'est ce qu'exprime le lemme ci-dessous, dû à Harish-Chandra (voir par exemple [21]).

Lemme 45 *Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)[$. Soit θ une fonction généralisée G -invariante dans $\mathcal{W}(s, a)$. Il existe une unique fonction généralisée $G(s)$ -invariante ψ dans $sG(s)_a$ telle que, pour toute fonction α différentiable à support compact dans $\mathcal{W}(s, a)$, on ait*

$$\int_{\mathcal{W}(s,a)} \theta(g)\alpha(g)dg = \int_{G/G(s)} |\det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{sG(s)_a} \psi(y)\alpha(gyg^{-1}) \det_{\mathfrak{q}(s)}(1-y)dy \right) dq.$$

Réciproquement, si ψ est une fonction généralisée $G(s)$ -invariante dans $sG(s)_a$, la formule ci-dessus définit une fonction généralisée θ G -invariante dans $\mathcal{W}(s, a)$.

La fonction généralisée θ est différentiable (resp. continue, localement intégrable) si et seulement s'il en est de même de ψ .

Nous poserons $\psi = \theta|_{sG(s)_a}$. C'est la restriction de θ à la sous-variété $sG(s)_a$. On peut aussi définir $\theta|_{sG(s)_a}$ en remarquant que $sG(s)_a$ est une sous-variété de $\mathcal{W}(s, a)$ transverse au front d'onde $\text{WF}(\theta)$ de θ (cf. [18]).

Soit $\theta \in C^{-\infty}(G)^G$. Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)[$. Nous noterons $R_s\theta$ la fonction généralisée dans $\mathfrak{g}(s)_a$ obtenue en composant $\theta|_{sG(s)_a}$ avec le difféomorphisme $Y \mapsto se^Y$. Informellement, $R_s\theta$ est l'élément de l'espace $C^{-\infty}(\mathfrak{g}(s)_a)^{G(s)}$ défini par la formule

$$(35) \quad (R_s\theta)(Y) = \theta(se^Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. La fonction généralisée $R_s\theta$ détermine la restriction de θ à l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$. Ecrivons la formule intégrale correspondante.

Introduisons d'abord une notation. Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Pour tout $Y \in \mathfrak{h}$ on pose

$$(36) \quad j_{\mathfrak{h}}(Y) = \det\left(\frac{1 - e^{-ad(Y)}}{ad(Y)}\right).$$

On identifie l'espace tangent en un point h de H à \mathfrak{h} au moyen de la translation à gauche par h . La fonction $j_{\mathfrak{h}}$ est donc le jacobien de l'exponentielle. On notera que si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$, et si $a \in]0, \pi[$, on a $j_{\mathfrak{h}}(Y) > 0$ pour $Y \in \mathfrak{h}_a$.

Soient donc θ , s , et a comme ci-dessus. Pour toute fonction α différentiable à support compact dans $\mathcal{W}(s, a)$, on a

$$\int_{\mathcal{W}(s, a)} \theta(g) \alpha(g) dg = \int_{G/G(s)} |det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{\mathfrak{g}(s)_a} (R_s \theta)(Y) \alpha(g s e^Y g^{-1}) \det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - s e^Y) j_{\mathfrak{g}(s)}(Y) dY \right) dq.$$

Définition 46 *Considérons une famille $(a(s), \theta_s)_{s \in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, $a(s) \in]0, \epsilon(s)]$ et $\theta_s \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}(s)_{a(s)})^{G(s)}$, vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Invariance: $a(gsg^{-1}) = a(s)$ et $\theta_{gsg^{-1}}(gYg^{-1}) = \theta_s(Y)$ pour tout $g \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.*

2. *Recollement: pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell, a(s)}$, il existe $b \in]0, a(se^S)]$ tel que*

$$S + \mathfrak{g}(s \exp S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_{a(s)} \quad \text{et} \quad \theta_{s \exp S}(Y) = \theta_s(S + Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(se^S)_b$.

Deux familles $(a(s), \theta_s)$ et $(b(s), \phi_s)$ sont équivalentes s'il existe une fonction $c(s) \in]0, \inf(a(s), b(s))]$ telle que $c(gsg^{-1}) = c(s)$ et telle que θ_s et ϕ_s coïncident sur $\mathfrak{g}(s)_{c(s)}$.

Une classe d'équivalence de telles familles de fonctions sera appelée une botte de fonctions $C^{-\infty}$ dans G

Dans la condition 2 ci-dessus, $\theta_s(S + Y)$ désigne la restriction de θ_s à la sous-variété $S + \mathfrak{g}(se^S)_b$ qui existe d'après l'invariance de θ_s .

La même démonstration que celle du lemme 43 donne le théorème suivant.

Théorème 47 *Soit θ une botte de fonctions $C^{-\infty}$ représentée par une famille $(a(s), \theta_s)_{s \in G_{ell}}$ vérifiant les conditions ci-dessus. Alors il existe un unique élément $\Theta \in C^{-\infty}(G)^G$ tel que, pour tout $s \in G_{ell}$, on ait $R_s \Theta = \theta_s$ dans $\mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.*

La fonction généralisée Θ est différentiable (resp. continue, localement intégrable) si et seulement s'il en est de même des θ_s pour tout $s \in G_{ell}$.

Nous dirons que Θ est la fonction généralisée définie par la botte de fonctions généralisées $\theta = (\theta_s)_{s \in G_{ell}}$. Dans [31], nous construisons des bottes de fonctions généralisées en intégrant des familles de formes différentielles équivariantes.

2.4 Actions régulières.

Nous supposons que G est un groupe presque algébrique comme dans le paragraphe 2.1 dont nous employons les notations. Soit M une variété sur laquelle G opère.

Si $X \in \mathfrak{g}$, on note $M(X)$ l'ensemble des zéros du champ de vecteurs X_M . Si g est un élément de G on note $M(g)$ l'ensemble des points fixes de g dans M .

Remarque 48 *Faisons opérer G sur lui-même par l'action adjointe. Alors $G(s)$ est le centralisateur de s dans G , de sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la notation.*

Définition 49 *Une action d'un groupe presque algébrique G sur une variété M est dite presque algébrique s'il existe une variété algébrique \mathbf{M} munie d'une action rationnelle de \mathbf{G} et une application de revêtement $j : M \rightarrow \mathbf{M}$ sur un ouvert de \mathbf{M} commutant à l'action de G .*

Exemple 50 *Soit H un sous-groupe presque algébrique de G . Alors l'action de G sur G/H est presque algébrique. De même, l'action adjointe de G sur G est presque algébrique.*

Définition 51 *Soit G un groupe presque algébrique opérant sur une variété M . Nous dirons que G opère régulièrement dans M si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout $s \in G_{ell}$.*

Condition 1: $M(s)$ est une sous-variété de M et il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$.

Condition 2: l'action de s dans l'espace tangent $T_m(M)$ en tout point $m \in M(s)$ est elliptique et l'espace tangent $T_m(M(s))$ en un point $m \in M(s)$ est égal à l'espace des points fixes de s dans $T_m(M)$.

Les deux classes de variétés que nous avons en vue sont les suivantes:

1. une action d'un groupe de Lie compact dans une variété ayant un nombre fini de types d'orbites (par exemple compacte),
2. une action presque algébrique.

Il découle en effet des deux lemmes ci-dessous que ces actions sont régulières.

Lemme 52 *On suppose que $\ker j$ contient un sous-groupe Z' d'indice fini opérant trivialement dans M . Soit K' un sous-groupe compact maximal de $G' = G/Z'$. On suppose que l'action de K' dans M a un nombre fini de types d'orbites dans M . Alors G opère régulièrement dans M .*

Démonstration. Soient $G' = G/Z'$ et j' l'application naturelle de G sur G' . Le groupe G' a un nombre fini de composantes connexes et possède donc des sous-groupes compacts maximaux. Soit $s \in G_{ell}$. Alors $j'(s)$ est contenu dans un sous-groupe compact de G' . Des théorèmes bien connus sur les actions de groupes compacts (cf. [14], ch. VI) on déduit que $M(s)$ est une sous-variété de M et que la condition 2 de la définition 51 est vérifiée.

Vérifions la condition 1. Soit $s \in G_{ell}$. Montrons qu'il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(se^S) \subseteq M(s)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Soit T un tore maximal dans $G(s)$. Le sous-groupe U de G engendré par s et T est compact. On peut donc supposer que c'est un sous-groupe de K . Pour chaque espace homogène K/H de K il y a un nombre fini de types d'orbites de U dans K/H (voir [14]), et donc un nombre fini de types d'orbites de U dans M . Comme U est abélien,

ceci signifie que l'ensemble des sous-groupes $\{U(m), m \in M\}$ est fini. Notons le $\{U_1, \dots, U_n\}$. Soit M_i l'ensemble des $m \in M$ tels que $U(m) = U_i$. Supposons la numérotation telle que l'on ait $s \notin U_i$ exactement pour $i \geq p$. Les M_i forment une partition de M et $M(s)$ est la réunion des M_i pour $i < p$.

Les ensembles \mathfrak{t}_a avec $a > 0$ forment une base de voisinages de 0 dans \mathfrak{t} car \mathfrak{t} est un sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie d'un tore maximal de $GL(V)$. Il existe donc $a > 0$ tel que $s \exp(\mathfrak{t}_a)$ ne rencontre pas U_i pour $i \geq p$. Donc $s \exp(\mathfrak{t}_a) \cap U_i$ est vide si et seulement si $s \notin U_i$. Choisissons un tel a . Soit $S \in \mathfrak{t}_a$. Soit $m \in M(se^S)$. Soit i tel que $m \in M_i$. On a $se^S \in U_i$, $s \in U_i$ et $m \in M(s)$. Donc $M(se^S) \subseteq M(s)$.

Supposons enfin que S soit un élément de $\mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Il est conjugué par $G(s)$ d'un élément de \mathfrak{t}_a , et l'on a encore $M(se^S) \subseteq M(s)$.

Soit $s \in G_{ell}$. Montrons qu'il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Compte-tenu de ce qui précède, en remplaçant $G(s)$ par G et $M(s)$ par M , on voit que l'on est ramené à démontrer l'assertion suivante. Il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(e^S) = M(S)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. On suppose comme plus haut que l'on a $G = G'$, on note T un tore maximal de G , \mathfrak{t} son algèbre de Lie, T_1, \dots, T_n des sous-groupes fermés deux à deux distincts de T tel que, pour tout $m \in M$, $T(m)$ soit égal à l'un des T_i . On note \mathfrak{t}_i l'algèbre de Lie de T_i . On choisit $a > 0$ tel que l'on ait $T_i \cap \exp(\mathfrak{t}_a) = \exp(\mathfrak{t}_{i,a})$ pour $i = 1, \dots, n$. Il est clair que a convient. ■

Lemme 53 *Soient M et M' des variétés dans lesquelles G opère et $\tau : M \rightarrow M'$ un revêtement équivariant. Si l'action de G dans M' est régulière, il en est de même de l'action de G dans M .*

Démonstration. Soit $s \in G_{ell}$. Soit $m_0 \in M(s)$. Soit V un voisinage ouvert de m_0 dans M homéomorphe par τ à son image dans M' . Soit $W \subseteq V$ tel que $s^{-1}(W) \subseteq V$ (c'est possible car s est continue). Soit $m \in W$ tel que $s^{-1}(\tau(m)) = \tau(m)$. On a $s^{-1}(m) = m$. On voit donc que $\tau|_W$ induit un difféomorphisme de $W \cap M(s)$ sur $\tau(W) \cap M'(s)$.

Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Alors $M(S)$ est l'image réciproque de $M'(S)$. Supposons que l'on ait $M'(se^S) = M'(s) \cap M'(S)$. Soit $m \in M(se^S)$. Alors $\tau(m)$ appartient à $M'(se^S)$, donc à $M'(S)$. Donc m appartient à $M(S)$. Donc m appartient à $M(s)$. ■

Remarque 54 *Par contre, dans les conditions du lemme 53, il se peut que l'action de G dans M soit régulière mais pas l'action de G dans M' . On peut fabriquer un tel exemple en considérant $G = SL(2, \mathbb{R})$, Γ un sous-groupe discret ayant des éléments elliptiques d'ordre arbitrairement élevé, $M = G$ avec l'action à gauche, et $M' = M/\Gamma$.*

3 Bottes de classes de cohomologie.

3.1 Germes de formes différentielles équivariantes.

Soit G un groupe presque algébrique. Nous supposons donc donnée une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie V et, pour tout $a > 0$, nous notons \mathfrak{g}_a l'ouvert image réciproque de $\mathfrak{gl}(V)_a$ dans \mathfrak{g} . Soit M une variété dans laquelle G opère. Considérons l'algèbre différentielle $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ des formes équivariantes sur M définies sur l'ouvert elliptique \mathfrak{g}_a et son algèbre de cohomologie $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$. Si $a < b$, il y a des morphismes naturels de restriction $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_b, M) \rightarrow \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ et $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_b, M) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$.

Définition 55 *On note*

$$\mathcal{A}_{[G]}(M) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$$

l'espace des germes en 0 (pour la topologie elliptique) de formes équivariantes et

$$\mathcal{H}_{[G]}(M) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$$

l'espace des germes en 0 des classes de cohomologie équivariante.

Soit H un sous-groupe presque algébrique de G et N une sous-variété H -invariante de M . Si $g \in G$ et $\alpha \in \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, N)$, alors $(g \cdot \alpha)(X) = g \cdot \alpha(g^{-1} \cdot X)$ est un élément de $\mathcal{A}_{gHg^{-1}}^\infty(g \cdot \mathfrak{h}, gN)$. Comme H agit trivialement sur $\mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, N)$, cette transformation ne dépend que de gH . C'est un morphisme d'algèbres différentielles. On note encore g la transformation induite $g : \mathcal{H}_{[H]}(N) \rightarrow \mathcal{H}_{[gHg^{-1}]}(gN)$, etc...

Lemme 56 1. *L'application $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \mathcal{H}_{[G]}(M)$ est surjective.*

2. *Un élément $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ est d'image nulle dans $\mathcal{H}_{[G]}(M)$ si et seulement s'il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ identiquement égale à 1 dans un voisinage elliptique \mathfrak{g}_a de 0 telle que $\theta\alpha = 0$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ un élément annulé par $d_{\mathfrak{g}}$. Soient b et c tels que l'on ait $0 < b < c < a$. D'après le lemme 27, il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ qui est égale à 1 dans \mathfrak{g}_b et à 0 en dehors de \mathfrak{g}_c . On définit $\alpha' \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ en posant $\alpha'(X) = \theta(X)\alpha(X)$ si $X \in \mathfrak{g}_a$, et $\alpha'(X) = 0$ si $X \in \mathfrak{g}$, $X \notin \mathfrak{g}_a$. Alors la classe de α' dans $\mathcal{H}_{[G]}(M)$ coïncide avec la classe de α puisque α et $\theta\alpha$ ont même restriction à \mathfrak{g}_b . Ceci prouve le point 1.

Prouvons 2. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ une forme équivariante fermée d'image nulle dans $\mathcal{H}_{[G]}(M)$. Il existe donc un nombre réel a et un élément $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ tel que $\alpha = d_{\mathfrak{g}}\beta$ sur \mathfrak{g}_a . En choisissant θ comme précédemment, on a $\theta\alpha = d_{\mathfrak{g}}(\theta\beta)$ sur \mathfrak{g}_a et $\theta\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$. L'égalité précédente prolongée par 0 est valable sur \mathfrak{g} . Donc $\theta\alpha = 0$ dans $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$. ■

Nous énonçons maintenant une généralisation du théorème 24. Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On pose $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{h}$. Soit M une H -variété. L'application de restriction définit un morphisme

$$E : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, G \times_H M) \rightarrow \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}_a, M)$$

et donc une application notée encore

$$E : \mathcal{H}_{[G]}(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{H}_{[H]}(M).$$

Proposition 57 *On suppose que l'espace homogène $G \rightarrow G/H$ est réductif. Soit M une H -variété. Alors l'application $E : \mathcal{H}_{[G]}(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{H}_{[H]}(M)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme l'application $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M) \rightarrow \mathcal{H}_{[H]}(M)$ est surjective, le théorème 24 et le lemme 56 impliquent que l'application E est surjective. Montrons qu'elle est injective. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$ une forme équivariante fermée telle que $E(\alpha) = 0$ dans $\mathcal{H}_{[H]}(M)$. Il existe donc $a > 0$ et $\beta \in \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}_a, M)$ tel que $E(\alpha) = d_{\mathfrak{h}}\beta$ sur \mathfrak{h}_a . Soient b et c tels que l'on ait $0 < b < c < a$ et, comme dans le lemme précédent, soit $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ une fonction invariante égale à 1 dans \mathfrak{g}_b et à 0 en dehors de \mathfrak{g}_c . On a alors $E(\theta\alpha) = (\theta|\mathfrak{h})d_{\mathfrak{h}}\beta = d_{\mathfrak{h}}((\theta|\mathfrak{h})\beta)$ et cette égalité sur \mathfrak{h}_a se prolonge par 0 en une égalité sur tout \mathfrak{h} . Donc la classe de $E(\theta\alpha)$ est nulle dans $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$. D'après le théorème 24, la classe de $\theta\alpha$ est nulle dans $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$. D'après le lemme 56, la classe de α est nulle dans $\mathcal{H}_{[G]}(G \times_H M)$. ■

Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G et soit L un groupe de Lie opérant à gauche sur P . Supposons que P admette une connection L -invariante. Nous avons démontré dans la section 1.8 que l'application $q^* : \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B) \rightarrow \mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, P)$ est un isomorphisme. Elle induit une application surjective de $\mathcal{H}_{[L]}(B)$ sur $\mathcal{H}_{[L \times G]}(P)$. Nous ne savons pas si cette application est injective. Citons cependant un exemple où q^* est un isomorphisme.

Proposition 58 *Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G sur une variété compacte B . Soit L un groupe compact opérant à gauche sur P . Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{H}_{[L]}(B) \rightarrow \mathcal{H}_{[L \times G]}(P)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Puisque L est compact, la fibration $P \rightarrow B$ admet une connection invariante. Il reste à prouver que q^* est injective. Soit $\beta \in \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ telle que $\alpha = q^*\beta$ soit nulle dans $\mathcal{H}_{[G \times L]}(P)$. Soit $\theta \in C^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g})^{L \times G}$ une fonction identiquement égale à 1 sur un voisinage $\mathfrak{l}_a \times \mathfrak{g}_a$ de 0 dans $\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}$ telle que $\theta\alpha = 0$. Considérons l'application inverse W_ω de l'application q^* . On a donc

$$W_\omega(\theta)\beta = 0.$$

Pour montrer que $\beta = 0$ dans $\mathcal{H}_{[L]}(B)$, il suffit donc de montrer que W_ω envoie une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g})^{L \times G}$ identiquement égale à 1 sur un voisinage $\mathfrak{l}_a \times \mathfrak{g}_a$ sur une classe de cohomologie de $\mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ identiquement égale à 1 sur un voisinage \mathfrak{l}_b de 0 dans \mathfrak{l} . Soit $\mu(Y) = -\omega(Y_P) \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ le moment de $Y \in \mathfrak{l}$, Ω la courbure de ω et soit $\Omega(Y) = \mu(Y) + \Omega$ la courbure équivariante de ω . On a $(W_\omega \theta)(Y) = \theta(Y, \Omega(Y))$. On a $\mu(Y)(pg) = g^{-1} \cdot \mu(Y)(p)$. La classe de conjugaison de $\mu(Y)(p) \in \mathfrak{g}$ ne dépend donc que de la projection de p sur B . Puisque L est compact, un voisinage elliptique de 0 dans \mathfrak{l} est un voisinage aussi petit qu'on veut pour la topologie ordinaire. Comme B est compacte, on voit donc qu'on peut choisir $b \leq a$ tel que si $Y \in \mathfrak{l}_b$ alors $\mu(Y) \in \mathfrak{g}_a$. La forme $\theta(Y, \Omega(Y)) = \theta(Y, \mu(Y) + \Omega)$ est calculée à partir de sa série de Taylor (par rapport aux variables de \mathfrak{g})

$$\theta(Y, \Omega(Y)) = \theta(Y, \mu(Y)) + \sum_I \frac{\Omega^I}{I!} (\partial_I \theta)(Y, \mu(Y)).$$

On voit que $W_\omega \theta$ est identiquement égale à 1 dans le voisinage \mathfrak{l}_b . L'équation $W_\omega(\theta)\beta = 0$ implique $\beta = 0$ dans $\mathcal{H}_{[L]}(B)$. ■

3.2 Bottes et bouquets de formes différentielles équivariantes.

Soit G un groupe presque algébrique opérant régulièrement dans M .

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. La sous-variété $M(S)$ de M est $G(S)$ -invariante de M . On considère l'application de translation

$$(37) \quad T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \mathcal{A}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))$$

donnée par

$$(T_S \alpha)(Y) = \alpha(S + Y)|_{M(S)}.$$

Comme S_M s'annule sur $M(S)$, cette application commute aux différentielles. On en déduit une application en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S)).$$

Soit $a > 0$ et soit $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, il existe $b > 0$ tel que $S + \mathfrak{g}(S)_b \subset \mathfrak{g}_a$. Pour tout $S \in \mathfrak{g}_a$, on peut donc définir une application encore notée

$$T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M) \rightarrow \mathcal{A}_{[G(S)]}(M(S))$$

par $(T_S \alpha)(Y) = \alpha(S + Y)$, puisque si Y varie dans un voisinage elliptique suffisamment petit de 0 dans $\mathfrak{g}(S)$, alors $S + Y \in \mathfrak{g}_a$. Si $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on obtient aussi une application de translation en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M) \rightarrow \mathcal{H}_{[G(S)]}(M(S)).$$

Soient $s \in G_{ell}$ et $a > 0$. En appliquant les définitions ci-dessus au groupe $G(s)$ opérant dans la variété $M(s)$, on obtient des opérateurs de translation

$$(38) \quad \begin{aligned} T_{s,S} &: \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s)) \rightarrow \mathcal{A}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s)) \rightarrow \mathcal{H}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S)) \end{aligned}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ et

$$(39) \quad \begin{aligned} T_{s,S} &: \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \rightarrow \mathcal{A}_{[G(s) \cap G(S)]}(M(s) \cap M(S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \rightarrow \mathcal{H}_{[G(s) \cap G(S)]}(M(s) \cap M(S)) \end{aligned}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$.

Si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ est assez petit on a

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S) \quad \text{et} \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S).$$

et l'opérateur $T_{s,S}$ fournit des applications

$$(40) \quad \begin{aligned} T_{s,S} &: \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s)) \rightarrow \mathcal{A}_{G(se^S)}^\infty(\mathfrak{g}(se^S), M(se^S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \rightarrow \mathcal{A}_{[G(se^S)]}(M(se^S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \rightarrow \mathcal{H}_{[G(se^S)]}(M(se^S)). \end{aligned}$$

En général, si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ on a des inclusions $G(s) \cap G(S) \subset \mathfrak{g}(se^S)$ et $M(s) \cap M(S) \subset M(se^S)$ et nous aurons à utiliser l'application de restriction

$$(41) \quad r_{s,S} : \mathcal{A}_{G(se^S)}^\infty(\mathfrak{g}(se^S), M(se^S)) \rightarrow \mathcal{A}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S)).$$

Définition 59 Nous dirons qu'une famille $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, α_s est un élément de $\mathcal{A}_{[G(s)]}(M(s))$, est une botte de formes équivariantes si elle vérifie les conditions suivantes.

1. Invariance: $\alpha_{ygy^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in G_{ell}$.
2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a} \in \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ de α_s tels que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S)$$

et

$$T_{s,S} \alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{A}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{B}_G(M)$ l'espace des bottes de formes différentielles équivariantes. Cet espace est muni d'une différentielle $d_G = (d_{\mathfrak{g}(s)})_{s \in G_{ell}}$.

Il est clair que si la condition de recollement est vérifiée pour un représentant $\alpha_{s,a}$ de α_s , alors si $\alpha_{s,b} \in \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_b, M(s))$ est un autre représentant de α_s , il existe $c \leq b$ tel que pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{\text{ell},c}$ on ait $T_{s,S}\alpha_{s,b} \cong \alpha_{se^S}$ dans $\mathcal{A}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

Nous verrons que dans de nombreux cas on peut représenter des cycles de $\mathcal{B}_G(M)$ au moyen de familles de formes fermées partout définies pour lesquelles les conditions de recollement sont globales. Ces familles spécialement agréables seront appelées des *bouquets*.

Définition 60 *Un bouquet de formes équivariantes est une famille $(\alpha_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$ où, pour tout $s \in G_{\text{ell}}$, α_s est un élément de $\mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$, vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in G_{\text{ell}}$.*
2. *Recollement: pour tout $s \in G_{\text{ell}}$ et pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{\text{ell}}$ on a*

$$T_{s,S}\alpha_s = r_{s,S}\alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{A}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S))$.

3. *Fermeture: pour tout $s \in G_{\text{ell}}$ on a $d_{\mathfrak{g}(s)}(\alpha_s) = 0$.*

On note $\mathcal{Z}_G(M)$ l'espace des bouquets de formes équivariantes.

On introduit une définition similaire au niveau des classes de cohomologie équivariante.

Définition 61 *Une botte de classes de cohomologie équivariante est une famille $(\alpha_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$ où, pour tout $s \in G_{\text{ell}}$, α_s est un élément de $\mathcal{H}_{[G(s)]}(M(s))$, vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in G_{\text{ell}}$.*
2. *Recollement: pour tout $s \in G_{\text{ell}}$, il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a} \in \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ de α_s tels que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{\text{ell},a}$, on ait*

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S)$$

et

$$T_{s,S}\alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{H}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{K}_G(M)$ l'espace des bottes de classes de cohomologie équivariante.

La structure d'algèbre des $\mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ induit une structure d'algèbre dans $\mathcal{K}_G(M)$.

On définit de manière analogue les espaces $\mathcal{B}_{\text{cpt},G}(M)$ de bottes de formes équivariante à support compact sur M , $\mathcal{Z}_{\text{cpt},G}(M)$ et $\mathcal{K}_{\text{cpt},G}(M)$.

J. Block et E. Getzler [10] ont considéré pour un groupe G compact l'algèbre de cohomologie $\mathcal{K}'_G(M)$ de l'algèbre différentielle $(\mathcal{B}_G(M), d_G)$ obtenue en considérant l'espace des bottes de formes différentielles équivariantes. Nous pensons

plus naturel de considérer l'algèbre $\mathcal{K}_G(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante. Il est cependant probable en vue de la remarque 70 ci-dessous que pour un groupe compact agissant sur une variété compacte l'homomorphisme naturel $\mathcal{K}'_G(M) \rightarrow \mathcal{K}_G(M)$ est un isomorphisme.

Exemple 62 Si $N = \bullet$ est un point, l'algèbre $\mathcal{K}_G(\bullet)$ est canoniquement isomorphe à $C^\infty(G)^G$.

Démonstration. Soit $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ un élément de $\mathcal{K}_G(\bullet)$. Alors α_s est juste une fonction différentiable $G(s)$ -invariante définie sur un voisinage elliptique $\mathfrak{g}(s)_{a(s)}$ de 0. La famille $(a(s), \alpha_s)$ est donc une botte de fonctions C^∞ sur G , au sens de la définition 42. La fonction $\Theta \in C^\infty(G)^G$ correspondante (lemme 43) vérifie $\Theta(se^Y) = \alpha_s(Y)$ pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$, pour $a(s)$ petit. ■

3.3 Images réciproques de bottes.

Soit N une autre variété dans laquelle G opère régulièrement. Soit ϕ un morphisme G -équivariant de M dans N . Pour tout $s \in G_{ell}$, ϕ induit un morphisme de $M(s)$ dans $N(s)$. On peut donc considérer l'image réciproque sur $M(s)$ d'une forme différentielle sur $N(s)$. Cette opération induit un morphisme d'algèbres ϕ^* de $\mathcal{K}_G(N)$ dans $\mathcal{K}_G(M)$ de sorte que $\mathcal{K}_G(M)$ est une algèbre sur $\mathcal{K}_G(N)$.

En particulier, $\mathcal{K}_G(M)$ est une algèbre sur $C^\infty(G)^G$. Explicitons cette structure. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ une botte de classes de cohomologie équivariante sur M . Soit $\Theta \in C^\infty(G)^G$. Alors $\Theta\alpha$ est la botte définie par la formule $(\Theta\alpha)_s(Y) = \Theta(se^Y)\alpha_s(Y)$ pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$, où $a > 0$ est suffisamment petit.

Soit $\phi : H \rightarrow G$ un morphisme de groupes presque algébriques. Alors l'image réciproque $\phi^{-1}(\mathfrak{g}_a)$ est un ouvert elliptique dans \mathfrak{h} . Il contient donc un ouvert \mathfrak{h}_b . Considérons l'action de H sur M déduite de celle de G . On peut donc définir une application $\phi^* : \mathcal{K}_G(M) \rightarrow \mathcal{K}_H(M)$ par $(\phi^*\beta)_s(H) = \beta_{\phi(s)}(\phi(H))$ pour H variant dans un voisinage elliptique \mathfrak{h}_b assez petit. On obtient ainsi une botte de classes de cohomologie H -équivariante et donc un morphisme d'algèbres $\phi^* : \mathcal{K}_G(M) \rightarrow \mathcal{K}_H(M)$.

3.4 Espaces homogènes.

Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe fermé presque algébrique de G (définition 33). On note \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H , et on considère l'action de G dans $B = G/H$. (D'après l'exemple 50, c'est une action régulière).

Soit $s \in G_{ell}$. Nous étudions la variété $B(s)$ des points fixes de s . Soit \mathcal{O}_s la classe de conjugaison de s dans G . Soit $N_s = \{g \in G; g^{-1}sg \in H\}$. Le sous-ensemble N_s est fermé dans G , et invariant par l'action à gauche de $G(s)$ et de H à droite. L'ensemble $B(s)$ est isomorphe à N_s/H par l'application

$g \mapsto gH$. Notons $\{g_i\}_{i \in I(s)}$ un système de représentants dans N_s des doubles classes modulo $G(s) \times H$. Posons $s_i = g_i^{-1}sg_i$. Les $\{s_i\}_{i \in I(s)}$ forment un système de représentants des classes de conjugaison de H dans le sous-ensemble $\mathcal{O}_s \cap H$. Les $g_iH \in B(s)$ forment un système de représentants des orbites de $G(s)$ dans $B(s)$. L'application $y \mapsto yg_iH$ induit un isomorphisme de $G(s)/(G(s) \cap g_iHg_i^{-1})$ sur $G(s)g_iH/H$.

Lemme 63 1. *La classe de conjugaison \mathcal{O}_s de s dans G est fermée. C'est un revêtement d'ordre fini de la classe de conjugaison $\mathcal{O}_{j(s)}$ de $j(s)$ dans $j(G)$.*

2. *L'ensemble $I(s)$ est fini. Donc $\mathcal{O}_s \cap H$ est réunion disjointe finie des classes de conjugaison sous H des éléments s_i , $i \in I(s)$.*

3. *L'ensemble N_s est une sous-variété fermée de G , réunion disjointe finie des doubles classes $G(s)g_iH$, $i \in I(s)$.*

4. *L'ensemble $B(s)$ est une sous-variété de B , réunion disjointe finie des orbites $G(s)g_iH/H$, $i \in I(s)$.*

Démonstration. Prouvons 1. Comme $j(s)$ est un élément semi-simple de $GL(V)$, la classe de conjugaison \mathcal{O}' de $j(s)$ dans $GL(V)$ est fermée. Il résulte du lemme 66 ci-dessous que $\mathcal{O}_{j(s)}$ est fermée.

Comme j est un revêtement, les groupes $G(s')$ et $G(j(s))$ ont la même algèbre de Lie $\mathfrak{g}(s)$ pour tout $s' \in j^{-1}(j(s))$. L'image réciproque $j^{-1}(\mathcal{O}_{j(s)})$ est réunion disjointe de classes de conjugaison par G , qui sont toutes ouvertes, et donc toutes fermées, dans $j^{-1}(\mathcal{O}_{j(s)})$. En particulier, la classe de conjugaison \mathcal{O}_s de s est fermée.

On a les inclusions $(\ker j)G(s)_0 \subseteq G(s) \subseteq G(j(s))$, où $G(s)_0$ est la composante neutre de $G(s)$. On en déduit que le cardinal de $G(j(s))/G(s)$ est fini, et donc \mathcal{O}_s est un revêtement fini de $\mathcal{O}_{j(s)}$.

Prouvons 2. Il résulte de 1 et du lemme 66 que $\mathcal{O}_s \cap H$ est réunion localement finie de classes de conjugaison de H . Pour montrer que celles-ci sont en nombre fini, il suffit à cause de 1 de démontrer l'assertion analogue dans le groupe $j(G)$. Ceci résulte de ce que $\mathcal{O}_{j(s)} \cap j(H)$ a un nombre fini de composantes connexes, à cause des hypothèses d'algébricité.

Prouvons 3. L'application $g \mapsto g^{-1}sg$ de G dans \mathcal{O}_s est une submersion. L'ensemble N_s est l'image réciproque de la sous-variété $\mathcal{O}_s \cap H$. C'est donc une sous-variété fermée de G .

Prouvons 4. Il résulte de 3 que $B(s) = N_s/H$ est réunion finie d'orbites de $G(s)$. ■

Soit M une variété où H opère régulièrement. Considérons l'espace induit $\mathcal{M} = G \times_H M$. Il est fibré sur $B = G/H$. Soit $s \in G_{ell}$. Etudions la variété $\mathcal{M}(s)$. Un point de $\mathcal{M}(s)$ se projette sur un point de $B(s)$. Par conséquent, si la classe de conjugaison de s ne rencontre pas H , la variété $\mathcal{M}(s)$ est vide. Si la classe de conjugaison de s rencontre H , notons comme plus haut $\{g_i\}_{i \in I(s)}$ un système de représentants des doubles classes $G(s)g_iH$ de N_s , et posons $s_i = g_i^{-1}sg_i$. On a $s_i \in H_{ell}$. Comme $G(s)$ -espace, $\mathcal{M}(s)$ est réunion disjointe

des espaces $G(s)[g_i, M(s_i)]$ (certains de ces espaces peuvent être vides si $M(s_i)$ est vide). L'action de g_i induit un isomorphisme de $\mathcal{M}_i = G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i)$ sur $G(s)[g_i, M(s_i)]$. L'action de G dans \mathcal{M} est donc régulière.

Considérons la sous-variété $[e, M]$ de \mathcal{M} . C'est une sous-variété stable par H . On obtient donc un morphisme

$$E : \mathcal{K}_G(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{K}_H(M)$$

par composition des morphismes de restriction successive $\mathcal{K}_G(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{K}_H(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{K}_H(M)$.

Théorème 64 *Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique tel que l'espace homogène $G \rightarrow G/H$ soit réductif. Soit M une variété sur laquelle H opère régulièrement. Alors G opère régulièrement sur $G \times_H M$ et l'application de restriction*

$$E : \mathcal{K}_G(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{K}_H(M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Nous aurons à utiliser le lemme suivant.

Lemme 65 *Soit H un sous-groupe presque algébrique de G tel que G/H soit réductif. Soit $s \in G_{ell} \cap H$. L'espace homogène $G(s)/H(s)$ est réductif.*

Démonstration. Ecrivons $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ où \mathfrak{r} est un supplémentaire H -invariant de \mathfrak{h} . Comme s est dans H , $Ad(s)$ laisse stable cette décomposition. Posons $\mathfrak{r}(s) = \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{r}$. Comme $Ad(s)$ est semi-simple, on a $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{h}(s) \oplus \mathfrak{r}(s)$. ■

Nous démontrons maintenant le théorème. Commençons par l'injectivité.

Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{ell}} \in \mathcal{K}_G(\mathcal{M})$ tel que $E(\alpha) = 0$. Nous devons montrer que $\alpha_s = 0$. Soit $s \in H_{ell}$. On note α'_s l'élément de $\mathcal{H}_{[G(s)]}(G(s) \times_{H(s)} M(s))$ obtenu en restreignant α_s à $G(s) \times_{H(s)} M(s) \subset \mathcal{M}(s)$. D'après le lemme 65 l'espace homogène $G(s)/H(s)$ est réductif. D'après l'hypothèse $E(\alpha) = 0$, l'élément $E(\alpha'_s) \in \mathcal{H}_{[H(s)]}(M(s))$ est nul. D'après la proposition 57, on en déduit que $\alpha'_s = 0$.

Soit $s \in G_{ell}$. Si la classe de conjugaison de s ne rencontre pas H la variété $\mathcal{M}(s)$ est vide et on a $\alpha_s = 0$. Si la classe de conjugaison de s rencontre H , soient $s_i \in H$ un système de représentants des classes de H -conjugaison dans $\mathcal{O}_s \cap H$. Soit $\mathcal{M}_i = G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i) \subset \mathcal{M}(s_i)$. D'après le lemme 63, la variété $\mathcal{M}(s)$ est réunion disjointe des sous-variétés fermées $g_i \mathcal{M}_i$, où $\mathcal{M}_i = G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i)$. Par G -invariance, la restriction de α_s à chaque $g_i \mathcal{M}_i$ est égale à $g_i \alpha'_s$, et donc est nulle. Comme $I(s)$ est fini, $\alpha_s = 0$.

Démontrons la surjectivité. Soit $\beta = (\beta_s)_{s \in H_{ell}} \in \mathcal{K}_H(M)$ et construisons $\alpha \in \mathcal{K}_G(\mathcal{M})$ tel que $E(\alpha) = \beta$. Si $s \in H_{ell}$, on note $\alpha'_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}(G(s) \times_{H(s)} M(s))$ l'unique élément tel que $E(\alpha'_s) = \beta_s$. Soit $s \in G_{ell}$. Si la classe de conjugaison de

s ne rencontre pas H , on pose $\alpha_s = 0$. Supposons que la classe de conjugaison de s rencontre H . Nous employons les mêmes notations que ci-dessus dans la démonstration de l'injectivité. Ecrivons $\mathcal{M}(s) = \cup_i g_i \cdot (G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i))$, l'union étant disjointe. On définit α_s comme étant égal à l'élément $g_i \cdot \alpha'_{s_i}$ sur $g_i \cdot (G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i))$. On vérifie grâce à la condition de H -invariance sur la botte β que α_s ne dépend pas du choix du système de représentants g_i . On obtient ainsi une collection de classes de cohomologie équivariante $\alpha_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}(M(s))$ qui vérifie la condition d'invariance requise.

Vérifions maintenant la condition de recollement. Soit donc $s \in G_{ell}$. Nous devons montrer qu'il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a}$ de α_s tels que sur $\mathcal{M}(s)$, $T_{s,S}(\alpha_{s,a}) = \alpha_{se^S}$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Il suffit de le faire pour $s = e$ en remplaçant $\mathcal{M}(s)$ par une des variétés \mathcal{M}_i , $i \in I(s)$, G par $G(s_i)$, H par $H(s_i)$ et M par $M(s_i)$.

Soit $\beta_e \in \mathcal{H}_{[H]}(M)$ et choisissons un représentant de $\beta_e \in \mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ que nous notons $\tilde{\beta}$. Alors on choisit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{M})$ tel que $E(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}$. C'est un représentant de α_e . Soit $S \in \mathfrak{h}_{ell}$. Comme β est une botte, il existe donc $b > 0$ tel que l'on ait $M(e^S) = M(S)$, $H(e^S) = H(S)$ et l'égalité $T_S \tilde{\beta} = \beta_{e^S}$ dans $\mathcal{H}_{[H(S)]}(M(S))$ pour tout $S \in \mathfrak{h}_{ell,b}$. Soit $a < b$ et tel que $G(e^S) = G(S)$ pour $S \in \mathfrak{h}_{ell,a}$. La sous-variété $G(S) \times_{H(S)} M(S)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}(e^S)$. La restriction de $T_S \tilde{\alpha}$ à $G(S) \times_{H(S)} M(S) \subset \mathcal{M}(S)$ détermine une classe dans $\mathcal{H}_{[G(S)]}(G(S) \times_{H(S)} M(S))$ qui coïncide avec la restriction de $\alpha_{e^S} \in \mathcal{H}_{[G(e^S)]}(\mathcal{M}(e^S))$ à $G(S) \times_{H(S)} M(S) \subset \mathcal{M}(e^S)$ puisque ces classes se restreignent respectivement sur $\mathfrak{h}(S) \times M(S)$ en $T_S \tilde{\beta}$ et en β_{e^S} .

Soit maintenant $S \in \mathfrak{g}_{ell,b}$. Etudions les zéros de S sur $B = G/H$ et sur $\mathcal{M} = G \times_H M$. On voit que $B(S)$ est vide lorsque l'orbite de S ne rencontre pas \mathfrak{h} . L'ensemble des $G(S)$ -orbites dans $B(S)$ est fini et paramétré par les représentants g_i des doubles classes de l'ensemble $N_S = \{g \in G, g^{-1} \cdot S \in \mathfrak{h}\}$ sous l'action de $G(S) \times H$. On note $S_i = g_i^{-1} S \in \mathfrak{h}$ et $\mathcal{M}_i = G(S_i) \times_{H(S_i)} M(S_i)$. On a alors $\mathcal{M}(S) = \cup_i g_i \mathcal{M}_i$. Par G -invariance, pour montrer que $T_S \tilde{\alpha} = \alpha_{e^S}$ sur $\mathcal{M}(S) = \cup_i g_i \mathcal{M}_i$, il suffit de montrer que pour chaque i , $T_{S_i} \tilde{\alpha}|_{\mathcal{M}_i} = \alpha(e^{S_i})|_{\mathcal{M}_i}$, lorsque $S_i \in \mathfrak{h}_b$, ce qui a été prouvé ci-dessus. ■

Si M est un point \bullet , on obtient ainsi un isomorphisme $\mathcal{K}_G(G/H) \cong \mathcal{K}_H(\bullet) = C^\infty(H)^H$. Décrivons cet isomorphisme plus directement. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ une famille de formes équivariantes représentant un élément de $\mathcal{K}_G(M)$. La fonction $E(\alpha) \in C^\infty(H)^H$ est l'unique fonction H -invariante telle que l'on ait $E(\alpha)(se^Y) = (\alpha_s(Y))_{[0]}(e)$ pour tout $s \in H_{ell}$ et pour tout $Y \in \mathfrak{h}(s)_a$, où a est suffisamment petit.

Appendice.

Cet appendice contient pour la commodité du lecteur un résultat technique utilisé plus haut.

Lemme 66 Soit G un groupe de Lie réel séparable. Soit $s \in G$ un élément tel que $Ad(s)$ soit un endomorphisme semi-simple de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . On suppose que la classe de conjugaison \mathcal{O}_s de s est fermée. Soit H un sous-groupe fermé de G . Alors les classes de conjugaison de H contenues dans $\mathcal{O}_s \cap H$ sont fermées et $\mathcal{O}_s \cap H$ est une réunion localement finie de classes de conjugaisons de H .

Identifions l'espace tangent à $t \in G$ au translaté à gauche par t de \mathfrak{g} . L'espace tangent en un point $t \in \mathcal{O}_s \cap H$ est égal à $(Ad(t^{-1}) - 1)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap (Ad(t^{-1}) - 1)\mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{O}_s \cap H$. Comme G est séparable et \mathcal{O}_s fermée, \mathcal{O}_s est homéomorphe à $G/G(t)$ par l'application naturelle. L'endomorphisme $Ad(t)$ est semi-simple car il est conjugué de $Ad(s)$. Écrivons une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{r}(t) \oplus \mathfrak{q}'(t) \oplus \mathfrak{q}''(t)$$

de \mathfrak{g} en sous-espaces $Ad(t)$ -stables de sorte que l'on ait $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{q}'(t)$ et $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{r}(t)$.

Il existe des voisinages U' de 0 dans $\mathfrak{q}'(t)$, U'' de 0 dans $\mathfrak{q}''(t)$, V' de 0 dans $\mathfrak{h}(t)$ et V'' de 0 dans $\mathfrak{r}(t)$ tels que

1. l'application $(Q', Q'', Y', Y'') \mapsto e^{Q''} e^{Q'} (te^{Y'} e^{Y''}) e^{-Q'} e^{-Q''}$ soit un difféomorphisme de $U' \times U'' \times V' \times V''$ sur un ouvert W de G ,
2. $e^{Q''} e^{Q'} (te^{Y'} e^{Y''}) e^{-Q'} e^{-Q''}$ appartienne à \mathcal{O}_s si et seulement si $Y' = Y'' = 0$,
3. $e^{Q''} e^{Q'} (te^{Y'} e^{Y''}) e^{-Q'} e^{-Q''}$ appartienne à H si et seulement si $Q'' = Y'' = 0$.

Donc $W \cap H \cap \mathcal{O}_s$ est défini par les équations $Q'' = Y'' = Y' = 0$. C'est l'intersection avec $W \cap H$ d'une classe de conjugaison de H , et c'est un ensemble fermé dans $W \cap H$. Le lemme en résulte facilement. ■

3.5 Théorie de Chern-Weil.

Nous reprenons l'exemple de la section 1.4. Soit G un groupe de Lie presque algébrique. Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G . Soit L un groupe de Lie presque algébrique agissant à gauche sur P et commutant à l'action de G .

Soit $s \in L_{ell}$ et soit $B(s)$ la variété des points fixes de l'action de s sur B . Si $x \in B(s)$ et si y est un point de P au dessus de x , il existe un unique élément $r(s, y) \in G$ (r est employé pour "right") tel que $sy = yr(s, y)$. On a $r(s, yg) = g^{-1}r(s, y)g$.

Définition 67 . On dira que l'action de L sur le fibré principal P est principalement régulière si l'action de $L \times G$ sur P vérifie les conditions suivantes.

1. L'action de $L \times G$ sur P est régulière.
2. Pour tout $s \in L_{ell}$ et tout $y \in P$ au dessus de $B(s)$ l'élément $r(s, y) \in G$ est elliptique.

(Nous dirons en général régulière au lieu de principalement régulière en espérant que le contexte évitera les confusions). Cette seconde condition est en général

vérifiée. C'est clair si G est compact. Il en est de même, d'après le lemme 63, si G est un sous-groupe presque algébrique de L , pour la fibration principale $L \rightarrow L/G$.

Soient $s \in L_{ell}$ et $s' \in G_{ell}$. Soit $P(s, s') = \{y \in P; sy = ys'\}$ l'espace des points fixes de (s, s') . Comme $(s, s') \in L \times G$ est elliptique et comme l'action de $L \times G$ dans P est régulière on voit, en regardant l'application tangente à la projection $P \rightarrow B$, que l'application $P(s, s') \rightarrow B(s)$ est une submersion. Notons $B(s)^{s'}$ l'ouvert de $B(s)$ image de $P(s, s')$. Alors $P(s, s')$ est un fibré principal de groupe $G(s')$ muni d'une action à gauche de $L(s)$. Soient $s', s'' \in G_{ell}$, alors $B(s)^{s'} \cap B(s)^{s''}$ n'est pas vide si et seulement si s' et s'' sont conjugués dans G et dans ce cas $B(s)^{s'} = B(s)^{s''}$. Comme l'action de L est principalement régulière, $B(s)$ est réunion disjointe des sous-variétés ouvertes $B(s)^{s'}$, paramétrée par les classes de conjugaison d'éléments $s' \in G_{ell}$ pour lesquels $P(s, s')$ est non vide.

Le même argument montre que l'action de L dans B est régulière.

Supposons qu'il existe une connection ω pour la fibration $P \rightarrow B$ invariante par l'action de L . Nous allons associer à toute fonction $\phi \in C^\infty(G)^G$ un bouquet $W(\phi) \in \mathcal{Z}_L(B)$ de formes différentielles équivariantes. La connection ω définit une connection $L(s)$ -invariante pour chacune des fibrations principales $P(s, s') \rightarrow B(s)^{s'}$. En effet, $\omega|_{P(s, s')} \in \mathcal{A}^1(P(s, s')) \otimes \mathfrak{g}(s')$ comme on le voit par G -invariance et $\omega|_{P(s, s')}$ est une 1-forme de connection $L(s)$ -invariante. Soit $\phi_{s'} \in C^\infty(\mathfrak{g}(s'))^{G(s')}$ la fonction définie par $\phi_{s'}(Y) = \phi(s'e^Y)$, pour $Y \in \mathfrak{g}(s')$. L'homomorphisme de Chern-Weil (proposition 8) associe à $\phi_{s'}$ une forme équivariante fermée $W_\omega \phi_{s'} \in \mathcal{A}_{L(s)}^\infty(\mathfrak{l}(s), B(s)^{s'})$. Explicitons $W_\omega \phi_{s'}$ en fonction de la connection. Soit $Y \in \mathfrak{l}$ et soit $\Omega(Y) = \mu(Y) + \Omega \in \mathcal{A}(P) \otimes \mathfrak{g}$ la courbure équivariante de ω . Si $Y \in \mathfrak{l}(s)$, la restriction $\Omega(Y)|_{P(s, s')}$ de la forme $\Omega(Y)$ à $P(s, s')$ est dans $\mathcal{A}(P(s, s')) \otimes \mathfrak{g}(s')$ et $\phi(s'e^{\Omega(Y)|_{P(s, s')}})$ est une forme $G(s')$ -basique. On pose

$$W_\omega \phi_{s'}(Y) = \phi(s'e^{\Omega(Y)|_{P(s, s')}}).$$

Comme ϕ est une fonction G -invariante sur G , il est facile de voir que $W_\omega(\phi_{s'})$ ne dépend que de la classe de conjugaison de s' . Ecrivons $B(s) = \cup_{s' \in (G_{ell}/G)} B(s)^{s'}$ et définissons $W_s \phi \in \mathcal{A}_{L(s)}^\infty(\mathfrak{l}(s), B(s))$ comme étant égale à $W_{s'}(\phi_{s'})$ sur $B(s)^{s'}$.

Soit $s \in L_{ell}$ et soit $S \in \mathfrak{l}(s)_{ell}$. Alors $L(s) \cap L(S) \subset L(se^S)$ et $B(s) \cap B(S) \subset B(se^S)$.

Lemme 68 *Soit $S \in \mathfrak{l}(s)_{ell}$. Alors, si $Y \in L(S) \cap L(s)$, on a*

$$(W_s \phi)(S + Y)|_{B(s) \cap B(S)} = (W_{se^S} \phi)(Y)|_{B(s) \cap B(S)}$$

dans $\mathcal{A}_{L(s) \cap L(S)}^\infty(\mathfrak{l}(s) \cap \mathfrak{l}(S), B(s) \cap B(S))$.

Démonstration. Il suffit de démontrer cette relation pour $s = e$. Soit $S \in \mathfrak{l}_{ell}$. Considérons le groupe à un paramètre $\exp(tS)$. Au dessus de $B(S)$, il produit un groupe à un paramètre de transformations verticales : si $y \in P$ est au dessus

de $x \in B(S)$, $\exp(tS)y = y \exp(\text{tr}(S, y))$ où $r(S, y)$ est un élément de \mathfrak{g}_{ell} . La classe de conjugaison de $r(S, y)$ ne dépend que de la projection $x \in B(S)$ de y et est localement constante. On écrit $B(S) = \cup_{S' \in (\mathfrak{g}_{ell}/G)} B(S)^{S'}$ où $B(S)^{S'}$ désigne la sous-variété ouverte et fermée de $B(S)$ sur laquelle l'élément $r(S, y) \in \mathfrak{g}_{ell}$ produit par l'action verticale de S est dans la classe de conjugaison de S' . Soit $Y \in \mathfrak{l}(S)$. L'espace $P(S, S')$ des zéros de (S, S') sur P est un fibré principal sur $B(S)^{S'}$. On a donc

$$(W_e \phi)(S + Y)|B(S)^{S'} = \phi(e^{\Omega(S+Y)}|P(S, S')).$$

On a

$$\mu(S)|P(S, S') = -\omega(S_P)|P(S, S') = \omega(P, S')|P(S, S') = S'.$$

Donc $\Omega(S + Y) = \mu(S + Y) + \Omega = S' + \Omega(Y)$ et $\Omega(Y)|P(S, S') \in \mathcal{A}(P(S, S')) \otimes \mathfrak{g}(S')$. Donc $e^{\Omega(S+Y)}|P(S, S') = e^{S'} e^{\Omega(Y)}|P(S, S')$. Mais on a $B(S)^{S'} \subset B(e^S)^{e^{S'}}$ et $P(S, S') \subset P(e^S, e^{S'})$. Donc, si $Y \in \mathfrak{l}(S)$, on a

$$(W_{e^S} \phi)(Y)|B(S)^{S'} = \phi(e^{S'} e^{\Omega(Y)}|P(S, S'))$$

et on obtient l'égalité cherchée. ■

Nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 69 *Soient G et L deux groupes presque algébriques. Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal sous l'action de G , muni d'une action à gauche de L principalement régulière. Supposons qu'il existe une connexion ω L -invariante. Alors si $\phi \in C^\infty(G)^G$, la famille $W_\omega \phi = (W_s \phi)_{s \in L_{ell}}$ d'éléments de $\mathcal{A}_{L(s)}^\infty(\mathfrak{l}(s), B(s))$ est un bouquet de formes différentielles équivariantes. La botte de classes de cohomologie définie par $W_\omega(\phi)$ est indépendante du choix de ω . On la note $W\phi \in \mathcal{K}_L(B)$*

On peut donc munir $\mathcal{K}_L(P/G)$ d'une structure de $C^\infty(G)^G$ module en posant pour $\phi \in C^\infty(G)^G$ et $\alpha \in \mathcal{K}_L(B)$

$$\phi \cdot \alpha = W(\phi)\alpha.$$

Remarque 70 *Considérons une espace homogène réductif $G \rightarrow G/H$ comme dans le théorème 64. On a vu que l'application de restriction $E : \mathcal{K}_G(G/H) \rightarrow C^\infty(H)^H$ est un isomorphisme. Choisissons une connexion G -invariante ω . Alors $W_\omega \phi$ est un bouquet représentant de $E^{-1}\phi$. En particulier, ce représentant se recolle non seulement au niveau cohomologique, mais au niveau formes différentielles.*

Remarque 71 *On peut généraliser la proposition ci-dessus au cas considéré dans le paragraphe 1.8: soit P une variété munie d'une action régulière d'un groupe G pour laquelle un sous-groupe distingué N opère librement. Lorsque la condition analogue à la condition 67 est vérifiée, on peut associer à une fonction $\phi \in C^\infty(G)^G$ un bouquet $W_\omega(\phi) \in \mathcal{B}_{G/N}(P/N)$ de formes différentielles équivariantes. La botte de classes de cohomologie équivariante déterminée par $W_\omega(\phi)$ est indépendante de la connexion.*

Soit M une variété sur laquelle le groupe L opère. Soit $\mathcal{E} \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel (ou complexe) L -équivariant. On explicite les constructions précédentes appliquées au fibré principal P de groupe $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ (ou $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$) des repères de \mathcal{E} . Soit $s \in L_{ell}$. Au dessus de $M(s)$, l'action de s sur \mathcal{E} produit un automorphisme $s^\mathcal{E}$ du fibré \mathcal{E} .

Définition 72 *On dira que l'action de L sur le fibré \mathcal{E} est principalement régulière si*

1. *l'action de L sur \mathcal{E} est régulière,*
2. *pour tout $s \in L_{ell}$ et pour tout $m \in M(s)$ l'automorphisme $s^\mathcal{E}$ de \mathcal{E}_m est elliptique.*

Comme pour la définition 67, nous dirons en général régulier plutôt que principalement régulier.

On dira que le fibré $\mathcal{E} \rightarrow M$ est connecté si \mathcal{E} est muni d'une connection L -invariante ∇ . Pour $X \in \mathfrak{l}$, soit $F(X) \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(\mathcal{E}))$ sa courbure équivariante (définie dans la section 1.5).

Soit $s \in L_{ell}$. La restriction de ∇ à $M(s)$ fournit une connection $L(s)$ -équivariante sur $\mathcal{E}|M(s)$ dont la courbure équivariante est obtenue pour $X \in \mathfrak{l}(s)$ par restriction de $F(X)$ à $M(s)$.

Appliquons la construction précédente à la fonction $\phi(g) = \mathrm{Tr}(g)$. On définit pour $X \in \mathfrak{l}(s)$

$$\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla)(X) = \mathrm{Tr}(s^\mathcal{E} e^{F(X)|M(s)}).$$

La forme $\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla)$ est une forme différentielle $L(s)$ -équivariante fermée sur $M(s)$.

Lemme 73 *Pour tout $S \in \mathfrak{l}(s)_{ell}$ on a l'égalité*

$$T_{s,S} \mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla) = r_{s,S} \mathrm{ch}_{s^\mathcal{E}}(\mathcal{E}, \nabla)$$

dans $\mathcal{A}_{L(s) \cap L(S)}^\infty(\mathfrak{l}(s) \cap \mathfrak{l}(S), M(s) \cap M(S))$.

Démonstration. Nous explicitons les étapes de la démonstration précédente. Comme S_M s'annule sur $M(s) \cap M(S)$, le moment de S est égal à l'action $S^\mathcal{E}$ verticale produite par S sur $\mathcal{E}|M(s) \cap M(S)$. Donc $F(S + Y) = S^\mathcal{E} + F(Y)$. Pour $Y \in \mathfrak{l}(s) \cap \mathfrak{l}(S)$,

$$T_{s,S} \mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla)(Y) = \mathrm{Tr}(s^\mathcal{E} \exp(S^\mathcal{E} + (F(Y)|M(s) \cap M(S)))).$$

Sur $M(s) \cap M(S)$, les matrices $S^\mathcal{E}$ et $F(Y)$ commutent. Donc

$$\mathrm{Tr}(s^\mathcal{E} \exp(S^\mathcal{E} + F(Y)|M(s) \cap M(S))) = \mathrm{Tr}(s^\mathcal{E} \exp S^\mathcal{E} \exp F(Y)|M(s) \cap M(S)).$$

■

La proposition suivante est donc claire.

Proposition 74 *Soit \mathcal{E} un fibré L -équivariant connecté. La famille*

$$(\text{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla))_{s \in L_{eU}}$$

est un bouquet de formes équivariantes. La botte de classes de cohomologie correspondante $\text{ch}(\mathcal{E}) \in \mathcal{K}_L(M)$ est indépendante de la connection L -équivariante choisie.

On dira que $\text{ch}(\mathcal{E})$ est le *caractère de Chern équivariant* du fibré (connecté) \mathcal{E} .

L'application $\mathcal{E} \rightarrow \text{ch}(\mathcal{E})$ est un caractère: si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont deux fibrés connectés, alors $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ sont des fibrés connectés et

$$\begin{aligned} \text{ch}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}) &= \text{ch}(\mathcal{E}) + \text{ch}(\mathcal{F}) \\ \text{ch}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) &= \text{ch}(\mathcal{E}) \text{ch}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

(Ces égalités sont déjà vraies dans $\mathcal{Z}_L(M)$).

Si $M = L/H$ est un espace homogène réductif, un fibré vectoriel L -équivariant est un fibré $\mathcal{E}_\tau = L \times_H E$ associé à une représentation $\tau : H \rightarrow \text{GL}(E)$ de dimension finie de H . La connection L -invariante sur le fibré principal $L \rightarrow L/H$ fournit une connection L -invariante sur \mathcal{E}_τ . Considérons l'isomorphisme de restriction $E : \mathcal{K}_L(L/H) \rightarrow C^\infty(H)^H$. Soit $\text{Tr } \tau$ la fonction trace de la représentation τ . On a

$$E(\text{ch}(\mathcal{E}_\tau)) = \text{Tr } \tau.$$

Soit G un groupe de Lie et soit N un sous-groupe distingué de G . Soit P une variété munie d'une action à droite de G . Supposons que l'action du sous-groupe N soit principale. Considérons la fibration $q : P \rightarrow P/N$. L'image réciproque q^* induit une application de $\mathcal{K}_{G/N}(P/N)$ dans $\mathcal{K}_G(P)$. Il serait tentant de généraliser le théorème 22 au groupe $\mathcal{K}_G(P)$. Toutefois nous ne pouvons le faire sans hypothèses supplémentaires. Nous supposons que le groupe G/N et la variété P/N sont compacts. Il existe alors une connection G -invariante pour la fibration $q : P \rightarrow P/N$, puisqu'une connection N -invariante existe (car l'action de N est principale) et qu'il suffit alors de la moyenner sur G/N .

Théorème 75 *Soit G un groupe de Lie et soit $N \subset G$ un sous-groupe fermé distingué de G . Soit P une variété munie d'une action à droite de G telle que l'action du sous-groupe N soit principale. Supposons que le groupe G/N et la variété P/N soient compacts. Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{K}_{G/N}(P/N) \rightarrow \mathcal{K}_G(P)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons tout d'abord la situation produit. Soit $P \rightarrow B$ un fibré principal de groupe G . Soit L un groupe de Lie opérant sur P à gauche. Nous supposons que L est compact, donc l'action de L sur P vérifie la condition

67. Nous employons les notations de la démonstration de 69. Supposons de plus B compacte. Montrons tout d'abord que l'application q^* est injective. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in L}$ un élément de $\mathcal{K}_L(B)$ tel que $q^*\alpha = 0$. Notons $\alpha_{s,s'} = \alpha_s|B(s)^{s'}$. L'espace $P(s, s')$ est un fibré principal sur la variété compacte $B(s)^{s'}$. Notons $q_{s,s'} : P(s, s') \rightarrow B(s)^{s'}$ la fibration correspondante. Donc pour tout $(s, s') \in L \times G_{ell}$, l'élément $q_{s,s'}^*\alpha_{s,s'} \in \mathcal{H}_{[L(s) \times G(s')]}(P(s, s'))$ est nul. Le groupe $L(s)$ est compact. D'après la proposition 58, l'application $q_{s,s'}^* : \mathcal{H}_{[L(s)]}(B(s)^{s'}) \rightarrow \mathcal{H}_{[L(s) \times G(s')]}(P(s, s'))$ est injective. On en déduit que $\alpha_s|B(s)^{s'}$ est nulle. La variété $B(s)$ est union disjointe finie de variétés $B(s)^{s'}$. Donc $\alpha_s = 0$.

Montrons que l'application q^* est surjective. Soit $\beta = (\beta_{s,s'})_{s \in L, s' \in G_{ell}}$ un élément de $\mathcal{K}_{L \times G}(P)$. Construisons un élément $\alpha \in \mathcal{K}_L(B)$ tel que $\beta = q^*\alpha$. On définit $\alpha_{s,s'}|B(s)^{s'}$ comme l'unique élément de $\mathcal{H}_{[L(s)]}(B(s)^{s'})$ tel que $q_{s,s'}^*\alpha_{s,s'} = \beta_{s,s'}$. La condition de G -invariance sur la botte β implique que $\alpha_{s,s'}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de s' . On définit α_s comme étant égal à $\alpha_{s,s'}$ sur $B(s)^{s'}$. On obtient ainsi une collection $\alpha = (\alpha_s)_{s \in L}$ de classes $\alpha_s \in \mathcal{H}_{[L(s)]}(B(s))$. L'invariance sous L de β implique que α vérifie la condition d'invariance voulue. Vérifions la condition de recollement. En changeant de notations ($L = L(s)$, $P = q^{-1}(B(s))$, etc...) il suffit de le vérifier pour $s = e$. Choisissons un représentant $\tilde{\beta} \in \mathcal{H}_{L \times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, P)$ de β_e . On choisit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ tel que $q^*\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$. L'élément $\tilde{\alpha}$ est un représentant de α_e . Il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $S \in \mathfrak{l}_a$ et tout $S' \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on ait $L(e^S) = L(S)$, $G(e^{S'}) = G(S')$, $P(e^S, e^{S'}) = P(S, S')$ et $T_{S,S'}\tilde{\beta} = \beta_{e^S, e^{S'}}$ dans $\mathcal{H}_{[L(e^S) \times G(e^{S'})]}(P(e^S, e^{S'}))$. Soit $B(S) = \cup_{S' \in (\mathfrak{g}_{ell}/G)} B(S)^{S'}$. Puisque L est compact, un voisinage elliptique \mathfrak{l}_a de 0 dans \mathfrak{l} est un voisinage aussi petit que l'on veut pour la topologie ordinaire. Comme $B(S)$ est compacte, la classe de conjugaison de $r(S, y) \in \mathfrak{g}_{ell}$ (qui ne dépend que de $x \in B(S)$) produite par l'action verticale de S au dessus de $B(S)$ reste dans un voisinage invariant de 0 pour la topologie ordinaire, donc à fortiori pour la topologie elliptique. On choisit $b \leq a$ tel que si $S \in \mathfrak{l}_b$ alors $B(S) = B(e^S)$ et $B(S) = \cup_{S' \in ((\mathfrak{g}_{ell} \cap \mathfrak{g}_b)/G)} B(S)^{S'}$. Notons $s = e^S$, $s' = e^{S'}$. On a $B(S)^{S'} = B(s)^{s'}$, $P(S, S') = P(s, s')$. Comme $p_{S'}$ est vertical, on voit que

$$T_{S,S'}q^*\tilde{\alpha} = q_{s,s'}^*(T_S\tilde{\alpha}|B(S)^{S'}).$$

D'autre part,

$$T_{S,S'}q^*\tilde{\alpha} = T_{S,S'}\tilde{\beta} = \beta_{s,s'}.$$

On en déduit l'égalité $\beta_{s,s'} = q_{s,s'}^*(T_S\tilde{\alpha}|B(s)^{s'})$ dans $\mathcal{H}_{[L(s) \times G(s')]}(P(s, s'))$. Mais par définition $\beta_{s,s'} = q_{s,s'}^*\alpha_{s,s'}$. D'après la proposition 58, l'application $q_{s,s'}^*$ est injective. Donc $\alpha_{s,s'} = \alpha_s|B(s)^{s'} = T_S\tilde{\alpha}|B(s)^{s'}$. Ceci étant vrai pour le recouvrement fini de $B(s)$ par les variétés non vides $B(s)^{e^{S'}}$, $S' \in \mathfrak{g}_b$, on obtient $T_S\tilde{\alpha} = \alpha_s$ et la famille α_s vérifie la condition de recollement voulue.

Retournons à la situation du théorème 75. On raisonne comme dans la démonstration de 22. On note L le groupe G/N et on considère la variété $L \times P$.

Le groupe L est compact ainsi que la variété $(L \times P)/G \cong P/N$. L'application

$$q_G^* : \mathcal{K}_L(P/N) \rightarrow \mathcal{K}_{L \times G}(L \times P)$$

est donc un isomorphisme, d'après le cas produit.

Considérons l'action de $L \times G$ sur $L \times P$. Soit $\Delta(G)$ le sous-groupe $\{(\bar{g}, g)\}$ de $L \times G$. Alors le $(L \times G)$ -espace $L \times P$ est isomorphe à l'espace induit $(L \times G) \times_{\Delta(G)} P$ par l'application $[(l, g), x] \rightarrow (lg^{-1}, xg^{-1})$ pour $l \in L, g \in G, x \in P$. L'espace homogène $(L \times G)/\Delta(G)$ est réductif, puisque l'algèbre de Lie de L est un supplémentaire invariant sous l'action adjointe de $\Delta(G)$ de l'algèbre de Lie (\bar{X}, X) de $\Delta(G)$. L'application $E : \mathcal{K}_{L \times G}(L \times P) \rightarrow \mathcal{K}_G(P)$ est donc un isomorphisme d'après le théorème 67. Le composé $E q_G^*$ coïncide avec q^* et notre théorème est démontré. ■

4 Groupe métalinéaire et orientations.

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats sur l'orientation des variétés de points fixes de transformations elliptiques nécessaires à l'intégration des bottes.

4.1 Transformations infinitésimalement elliptiques.

Rappelons que si U est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , une orientation de U est un choix d'une des deux demi-droites de $\Lambda^{\max}(U)$. Si $U = 0$, on note ξ_0 l'orientation contenant le point 1. Si ξ et ξ' sont des orientations de U et U' , l'orientation $\xi \wedge \xi'$ de $U \oplus U'$ est bien définie. Si o est une orientation de $U \oplus U'$ et ξ une orientation de U , on note o/ξ l'orientation de U' telle que $(o/\xi) \wedge \xi = o$. On définit de même l'orientation $\xi \setminus o$. Si l'un des deux espaces U ou U' est de dimension paire (ce qui sera souvent le cas ci-dessous), les deux orientations $\xi \setminus o$ et o/ξ sont égales.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n . Soit $S \in \text{End}(V)_{ell}$ une transformation infinitésimalement elliptique de V . Alors il existe des entiers positifs ℓ, r tels que $n = 2\ell + r$, une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2\ell-1}, e_{2\ell}, f_1, \dots, f_r\}$ de V et des nombres réels non nuls $\lambda_i, 1 \leq i \leq \ell$ tels que

$$\begin{aligned} S e_{2i-1} &= \lambda_i e_{2i}, \\ S e_{2i} &= -\lambda_i e_{2i-1}, & \text{pour } 1 \leq i \leq \ell \\ S f_j &= 0, & \text{pour } 1 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

Supposons S inversible. Alors $r = 0$ et la dimension de V est paire: $n = 2\ell$. On a alors $\det S = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_\ell^2$. Choisissons une orientation o de V . Supposons la base précédente $e_1, e_2, \dots, e_{2\ell-1}, e_{2\ell}$ orientée. Ces choix déterminent une racine carrée de $\det S$ en posant

$$(42) \quad \det_o^{1/2} S = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\ell.$$

Cette racine carrée ne dépend que de l'orientation de V . Si S n'est pas inversible, on pose $\det_o^{1/2} S = 0$. On obtient ainsi une fonction $\det_o^{1/2}$ sur $\text{End}(V)_{ell}$ dépendant de l'orientation o de V .

Réciproquement, si on suppose S inversible, S détermine une orientation $\zeta(S)$ de V par la convention

$$(43) \quad \det_{\zeta(S)}^{1/2} S > 0.$$

Remarque 76 *On peut définir $\zeta(S)$ sans choisir de base: soit $\tau^{-1}(S)$ l'élément de $\Lambda^2(V)$ défini ci-dessous (formule 59). Alors $\zeta(S)$ est l'orientation qui contient la composante de degré $\dim(V)$ de l'élément $\exp(\tau^{-1}(S))$ de $\Lambda(V)$.*

Plus généralement, si U est un sous-espace de V stable par S tel que la restriction $S|_U$ soit inversible, nous posons

$$(44) \quad \zeta(U, S) = \zeta(S|_U).$$

Nous disons que $\zeta(U, S)$ est l'orientation de U définie par S .

Enfin, pour $S \in \text{End}(V)_{ell}$ rappelons la décomposition $V = V(S) \oplus \mathfrak{q}(S)$, où $V(S) = \ker(S)$ et $\mathfrak{q}(S) = S(V)$. Nous notons

$$(45) \quad \zeta(S) = \zeta(\mathfrak{q}(S), S).$$

Ceci a un sens car la restriction de S à $\mathfrak{q}(S)$ est inversible, et, si S est inversible, ceci ne diffère pas de la définition précédente.

Le but de cette section est de décrire les notions équivalentes à $\zeta(S)$ et $\det_o^{1/2} S$ pour des transformations elliptiques. Nous allons voir qu'elles ne sont pas définies pour les éléments elliptiques de $\text{GL}(V)$ mais pour ceux d'un certain recouvrement $\text{ML}(V)$ d'ordre 2 de $\text{GL}(V)$.

4.2 Groupe $\text{Pin}(V)$.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique Q définie positive. On note $B(v, w)$ la forme bilinéaire symétrique telle que $B(v, v) = Q(v)$. On considère l'algèbre de Clifford $C(V, Q)$ dans laquelle les relations sont $v^2 = -Q(v)$.

L'algèbre $C(V, Q)$ est graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $C^+(V, Q)$ la partie paire et $C^-(V, Q)$ la partie impaire de $C(V, Q)$. On note $a \mapsto a^*$ l'antiautomorphisme tel que $v^* = -v$. Donc $(ab)^* = b^* a^*$.

Pour une algèbre A graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on note A^\times le groupe des éléments homogènes et inversibles de A et $p(a)$ est la parité d'un élément homogène $a \in A$. Pour $a \in A^\times$, on note $\iota(a)$ l'automorphisme intérieur défini par a :

$$\iota(a)(b) = (-1)^{p(a)p(b)} a b a^{-1}.$$

L'application ι est un homomorphisme de A^\times dans le groupe $\text{Aut}(A)$ des automorphismes de A préservant la graduation. Son noyau est Z^\times si Z est la sous-algèbre de A formée des éléments qui commutent (au sens gradué) aux éléments de A .

Dans le cas de $C(V, Q)$, on a $Z = \mathbb{R}$, et ι est surjective (par le théorème de Skolem-Noether gradué).

On définit le groupe de Clifford $\Gamma(V, Q)$ comme le sous-groupe de $C(V, Q)^\times$ formé des éléments a tels que $\iota(a)(V) = V$. Pour $a \in \Gamma(V, Q)$, on note $j(a) \in \text{GL}(V)$ la restriction de $\iota(a)$ à V . L'application j est un homomorphisme surjectif de $\Gamma(V, Q)$ sur le groupe orthogonal $\text{O}(V, Q)$, de noyau \mathbb{R}^\times . Si $a \in \Gamma(V, Q)$, l'élément aa^* est un scalaire > 0 noté $N(a)$. La fonction N vérifie $N(a) = N(a^*)$ et $N(ab) = N(a)N(b)$. On pose $\Gamma^+(V, Q) = \Gamma(V, Q) \cap C(V, Q)^+$ et $\Gamma^-(V, Q) = \Gamma(V, Q) \cap C(V, Q)^-$.

Par exemple, soit $v \in V$. On a $v \in C(V, Q)^\times$ si et seulement si $Q(v) \neq 0$, et alors $v^{-1} = -v/Q(v)$. Dans ce cas, v appartient à $\Gamma(V, Q)$, on a $N(v) = Q(v)$ et $j(v)$ est la symétrie de vecteur v et de noyau l'hyperplan orthogonal à v .

Le groupe $\text{Pin}(V, Q)$ est le sous-groupe des éléments de $a \in \Gamma(V, Q)$ tels que $N(a) = 1$. Soit $v \in V$. Alors $v \in \text{Pin}(V, Q)$ si et seulement si $Q(v) = 1$. L'application j induit une surjection de $\text{Pin}(V, Q)$ sur $\text{O}(V, Q)$. Le noyau est le sous-groupe $\{1, -1\}$ de \mathbb{R}^\times . Pour éviter des confusions, nous noterons aussi ϵ l'élément -1 de $\ker j$.

On note $\text{Spin}(V, Q)$ le groupe $\Gamma^+(V, Q) \cap \text{Pin}(V, Q)$. L'application j induit un morphisme de $\text{Spin}(V, Q)$ sur $\text{SO}(V, Q)$ de noyau $\{1, \epsilon\}$. Nous poserons $\text{Pin}^-(V) = \Gamma^-(V, Q) \cap \text{Pin}(V, Q)$.

Dans la suite nous enlevons en général Q de la notation.

Soit U un sous-espace de V . Soit U' l'orthogonal de U . La sous-algèbre de $C(V)$ engendrée par U est canoniquement isomorphe à $C(U)$. Les groupes $\Gamma(U)$, $\text{Pin}(U)$ et $\text{Spin}(U)$ sont les sous-groupes des groupes $\Gamma(V)$, $\text{Pin}(V)$ et $\text{Spin}(V)$ respectivement formés des éléments a tels que $j(a)$ laisse fixe l'orthogonal U' de U dans V . Tout élément $a \in \Gamma(V)$ tel que $j(a)$ laisse stable U s'écrit $a = bb'$ avec $b \in \Gamma(U)$ et $b' \in \Gamma(U')$. Si $a = cc'$ est une autre décomposition avec $c \in \Gamma(U)$ et $c' \in \Gamma(U')$, il existe $k \in \{1, \epsilon\}$ tel que $b = kc$ et $b' = k^{-1}c'$.

Voici une propriété fonctorielle supplémentaire permettant de ramener l'étude du groupe Pin à celle du groupe Spin . On pose $\tilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\tilde{e}$. On munit \tilde{V} de la forme quadratique prolongeant Q pour laquelle cette décomposition est orthogonale et \tilde{e} de norme 1. On vérifie que l'on définit un isomorphisme κ de $C(V)$ (dans lequel on oublie la graduation) sur $C^+(\tilde{V})$ en posant

$$(46) \quad \begin{cases} \kappa(a) = a & \text{pour } p(a) = 1, \\ \kappa(a) = a\tilde{e} & \text{pour } p(a) = -1. \end{cases}$$

L'application κ induit un isomorphisme de $\Gamma(V)$ sur le sous-groupe de $\Gamma^+(\tilde{V})$ formé des \tilde{a} tels que $j(\tilde{a})(\tilde{e}) = \pm\tilde{e}$.

On munit $C(V)$ de la forme quadratique telle que, si f_1, \dots, f_n est une base orthonormée de V , les $f_{j_1} \cdots f_{j_i}$ avec $j_1 < \dots < j_i$ et $0 \leq i \leq n$ forment

une base orthonormée de $C(V)$. On remarque que la restriction de cette forme quadratique à $\Gamma(V, Q)$ est la fonction N . De même $\Lambda(V)$ est muni du produit scalaire tel que les $f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_i}$ forment une base orthonormée de $\Lambda(V)$.

On filtre $C(V)$ par les sous-espaces $C_i(V)$ engendrés par les produits de longueur $\leq i$ d'éléments de V . L'espace $C_i(V)/C_{i-1}(V)$ est canoniquement isomorphe à $\Lambda^i(V)$. On note σ_i le symbole $\sigma_i : C_i(V) \rightarrow \Lambda^i(V)$. L'orthogonal $C^i(V)$ de $C_{i-1}(V)$ dans $C_i(V)$ est un supplémentaire. Si f_1, \dots, f_n est une base orthonormée de V , les $f_{j_1} \cdots f_{j_i}$ avec $j_1 < \cdots < j_i$ forment une base orthonormée de $C^i(V)$.

On note T la forme linéaire sur $C(V)$ telle que

$$(47) \quad a - T(a) \in \bigoplus_{i>0} C^i(V)$$

pour tout $a \in C(V)$.

Proposition 77 *Soit $a \in \Gamma(V)$. On a*

$$T(a)^2 = 2^{-n} N(a) \det(1 + j(a)).$$

Démonstration. Lorsque a appartient à $\text{Pin}^-(V)$ les deux côtés de l'égalité sont nuls. Par homogénéité, il nous reste à considérer le cas où $a \in \text{Spin}(V)$. On se ramène immédiatement au cas où $\dim(V) = 2$. Soit e, f une base orthonormée de V . On peut écrire $a = \cos \theta e + \sin \theta f$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $j(a)$ est la rotation d'angle 2θ et la relation ci-dessus revient à la formule $\cos^2 \theta = (1 + e^{2i\theta})(1 + e^{-2i\theta})/4$. ■

Le groupe $\text{Spin}(V)$ est l'ensemble des points réels du groupe algébrique connexe $\text{Spin}(V \otimes \mathbb{C})$. La restriction de T à $\text{Spin}(V \otimes \mathbb{C})$ est une fonction polynomiale. On a obtenu le corollaire suivant.

Corollaire 78 *Sur $\text{Spin}(V \otimes \mathbb{C})$ la fonction $\det(1 + j(a))$ a une racine carrée polynomiale.*

Nous noterons

$$(48) \quad \det_V^{1/2}(1 + a)$$

la racine carrée polynomiale de $\det(1 + j(a))$ qui est positive pour $a = 1$.

Considérons maintenant l'espace $C(V)/C_{n-1}(V)$. Il est canoniquement isomorphe à $\Lambda^{\max}(V) = \Lambda^n(V)$. On pose $\sigma_V = \sigma_n$.

Soit o une base orthonormée de $\Lambda^{\max}(V)$. Le choix de o est équivalent au choix d'une orientation de V . On note γ_o l'image réciproque de o dans $C^n(V)$. Si f_i est une base de V orthonormée orientée de V on a $o = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ et

$$(49) \quad \gamma_o = f_1 \cdots f_n.$$

Notons que γ_o appartient au groupe $\text{Pin}(V)$ et que $j(\gamma_o) = -1 \in \text{O}(V)$. Le choix d'une orientation de V est donc équivalent au choix d'une image réciproque de

$-1 \in O(V)$ dans $\text{Pin}(V)$. Notons $D(V) \subset C(V)$ le commutant de la partie paire de $C(V)$. Les éléments 1 et γ_o forment une base de $D(V)$ et on a

$$(50) \quad (\gamma_o)^2 = (-1)^{n(n+1)/2}.$$

Pour $a \in C(V)$, on note $T^o(a)$ le scalaire tel que l'on ait

$$(51) \quad \sigma_V(a) = T^o(a)o,$$

ou encore, $a - T^o(a)\gamma_o \in C_{n-1}(V)$. Par analogie avec l'intégrale de Berezin dans $\Lambda(V)$ (voir ci-dessous) on peut appeler T^o l'intégrale de Berezin.

On vérifie facilement la formule suivante.

$$(52) \quad T^o(a) = (-1)^{n(n+1)/2} T(a\gamma_o).$$

Le carré de la forme linéaire T^o ne dépend pas de o . Il résulte de la proposition 77 que l'on a:

Proposition 79 ([6] lemme 3.22) *Soit $a \in \Gamma(V)$. On a*

$$T^o(a)^2 = 2^{-n} N(a) \det(1 - j(a)).$$

Le choix de o détermine une racine carrée polynomiale de la fonction $\det(1 - j(a))$ sur $\text{Pin}(V)$: pour $a \in \text{Pin}(V)$ on pose

$$(53) \quad \det_{V,o}^{1/2}(1 - a) = (-1)^{n(n+1)/2} \det_V^{1/2}(1 + a\gamma_o) = 2^{n/2} T^o(a).$$

C'est la racine carrée qui est positive en γ_o . Cette définition est analogue à celle de la formule (42).

Notons que $\det_{V,o}^{1/2}(1 - a^{-1})$ est la racine carrée positive en γ_o^{-1} et donc on a aussi

$$(54) \quad \det_{V,o}^{1/2}(1 - a^{-1}) = \det_V^{1/2}(1 + a\gamma_o) = 2^{n/2} T(a\gamma_o).$$

Corollaire 80 *Soit $a \in \Gamma(V)$. Alors $1 - j(a)$ est inversible si et seulement si $\sigma_V(a)$ est non nul.*

Soit $a \in \Gamma(V)$. Posons $V(a) = \ker(1 - j(a))$ et $\mathfrak{q}(a) = (1 - j(a))V$. On a la décomposition

$$(55) \quad V = V(a) \oplus \mathfrak{q}(a).$$

L'espace $\mathfrak{q}(a)$ est l'orthogonal de $V(a)$ dans V . Donc a appartient au sous-groupe $\Gamma(\mathfrak{q}(a))$ de $\Gamma(V)$.

Corollaire 81 *Soit $a \in \Gamma(V)$. Soit o une base orthonormée de $\Lambda^{\max}(\mathfrak{q}(a))$ et T^o l'intégrale de Berezin correspondante dans $C(\mathfrak{q}(a))$. On a*

$$T^o(a)^2 = 2^{-\dim \mathfrak{q}(a)} N(a) \det(1 - j(a)|_{\mathfrak{q}(a)}).$$

En particulier, $\sigma_{\mathfrak{q}(a)}(a)$ est un élément non nul de $\Lambda^{\max}(\mathfrak{q}(a))$.

Le corollaire 81 permet de poser les définitions suivantes.

Définition 82 Soit $a \in \Gamma(V)$ et o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On note $\xi(a)$ l'orientation de $\mathfrak{q}(a)$ qui contient $\sigma_{\mathfrak{q}(a)}(a)$. On note $F(a, o)$ le nombre (égal à ± 1) tel que $\xi(a) = F(a, o)o$.

C'est l'analogie de la définition de $\zeta(S)$ (formule 45). Si U est un sous-espace de V stable par $j(a)$, on ne peut pas définir l'équivalent de $\zeta(U, S)$ (formule 44) car a n'a pas d'image bien déterminée dans $\Gamma(U)$.

Donc, par définition, on a

$$F(a, o) = \text{sign } T^o(a) = \text{sign } \det_{\mathfrak{q}(a), o}^{1/2}(1 - a).$$

En d'autres termes, $\xi(a)$ est l'orientation de $\mathfrak{q}(a)$ telle que

$$(56) \quad \det_{\mathfrak{q}(a), \xi(a)}^{1/2}(1 - a) > 0.$$

La proposition suivante rassemble quelques propriétés immédiates de $\xi(\cdot)$ et $F(\cdot, \cdot)$.

Proposition 83 1. L'orientation $\xi(1)$ est l'orientation ξ_0 de l'espace $\mathfrak{q}(1) = \{0\}$.

1'. On a $F(1, \xi_0) = 1$.

2. Soit $a \in \Gamma(V)$. On a $\xi(\epsilon a) = -\xi(a)$.

2'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On a

$$F(a, o) = -F(\epsilon a, o) = -F(a, -o)..$$

3. Soit $v \in V$, $v \neq 0$. Notons $\tilde{\xi}(v)$ l'orientation de l'espace $\mathbb{R}v$ définie par v . On a $\mathfrak{q}(v) = \mathbb{R}v$ et $\xi(v) = \tilde{\xi}(v)$.

3'. On a $F(v, \tilde{\xi}(v)) = 1$.

4. Supposons donnés une décomposition orthogonale $V = U \oplus U'$, $b \in \Gamma(U)$, $b' \in \Gamma(U')$. Alors on a $\mathfrak{q}(bb') = \mathfrak{q}(b) \oplus \mathfrak{q}(b')$ et $\xi(bb') = \xi(b) \wedge \xi(b')$.

4'. Soient de plus o et o' des orientations de $\mathfrak{q}(b)$ et $\mathfrak{q}(b')$ respectivement. On a $F(bb', o \wedge o') = F(b, o)F(b', o')$.

5. Soit $a \in \Gamma(V)$ et soit $\kappa(a) \in \Gamma^+(\tilde{V})$ l'élément défini par la formule (46). Si $a \in \Gamma^+(V)$, on a $\mathfrak{q}(\kappa(a)) = \mathfrak{q}(a)$ et $\xi(\kappa(a)) = \xi(a)$. Si $a \in \Gamma^-(V)$, on a $\mathfrak{q}(\kappa(a)) = \mathfrak{q}(a) \oplus \tilde{e}$ et $\xi(\kappa(a)) = \xi(a) \wedge \tilde{e}$.

5'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. Si $a \in \Gamma^+(V)$, on a $F(\kappa(a), o) = F(a, o)$. Si $a \in \Gamma^-(V)$, on a $F(\kappa(a), o \wedge \tilde{e}) = F(a, o)$.

6. Soient $a \in \Gamma(V)$ et $b \in \Gamma(V)$. L'application $j(b)$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{q}(a)$ sur $\mathfrak{q}(bab^{-1})$, et donc une application $j(b)_*$ de l'ensemble des orientations de $\mathfrak{q}(a)$ sur l'ensemble des orientations de $\mathfrak{q}(bab^{-1})$. On a $j(b)_*(\xi(a)) = \xi(\iota(b)(a))$.

6'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On a $F(\iota(b)(a), j(b)_*(o)) = F(a, o)$.

Voici une application. Pour deux nombres réels non nuls x et y on pose $\gamma(x, y) = -1$ si $x < 0$ et $y < 0$, et $\gamma(x, y) = 1$ sinon. Pour $s \in \text{GL}(V)_{\text{ell}}$, rappelons que l'on pose $\mathfrak{q}(s) = (1 - s)V$. Comme s est elliptique, on a

$$(57) \quad \det(s|_{\mathfrak{q}(s)}) = (-1)^{\dim(\mathfrak{q}(s))}.$$

Corollaire 84 *Soient s et t des éléments de $\text{O}(n)$ qui commutent. Soient \hat{s} et \hat{t} des représentants de s et t dans le groupe $\text{Pin}(V)$. On a*

$$\hat{s}\hat{t}^{-1}\hat{t}^{-1} = \gamma(\det(s), \det(t))(-1)^{\dim(\mathfrak{q}(s) \cap \mathfrak{q}(t))}.$$

Démonstration. En appliquant la formule (57) à la restriction de s à $\mathfrak{q}(t)$, cette formule est équivalente à $\iota(\hat{s})(\hat{t}) = \det(s|_{\mathfrak{q}(t)})\hat{t}$. Celle-ci résulte du numéro 6 de la proposition 83. ■

Nous considérons maintenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{spin}(V)$ du groupe $\text{Spin}(V)$. Comme $\text{Spin}(V)$ est un sous-groupe fermé du groupe des éléments inversibles de $C^+(V)$, son algèbre de Lie $\mathfrak{spin}(V)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $C^+(V)$. C'est le sous-espace $C^2(V)$ de $C_2(V)$. Nous poserons donc

$$(58) \quad \mathfrak{spin}(V) = C^2(V).$$

L'action adjointe de $a \in \text{Pin}(V)$ sur un élément $A \in \mathfrak{spin}(V)$ est $Ad(a)(A) = aAa^{-1} = \iota(a)(A)$ (rappelons que A est pair). L'action adjointe $j(A)(v) = Av - vA$ est la différentielle de la représentation $j : \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$. C'est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{spin}(V) = C^2(V)$ sur $\mathfrak{so}(V) \subset \text{End}(V)$. Le symbole

$$\sigma_2 : C^2(V) \rightarrow C_2(V)/C_1(V) \cong \Lambda^2(V)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Exemple 85. *Soient $e \in V$ et $f \in V$ des vecteurs orthogonaux de norme 1 et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \theta ef$. On a $A \in \mathfrak{spin}(V)$, $j(\theta ef)e = 2\theta f$, $j(\theta ef)f = -2\theta e$, et $\sigma_2(\theta ef) = \theta e \wedge f$.*

On note τ l'isomorphisme $j \circ (\sigma_2)^{-1}$ de $\Lambda^2(V)$ sur $\mathfrak{so}(V)$. Soit f_j une base orthonormale de V . Soit $S \in \mathfrak{so}(V)$. On a

$$(59) \quad \tau^{-1}(S) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} B(Sf_i, f_j) f_i \wedge f_j \in \Lambda^2 V.$$

Soit o une base orthonormée de $\Lambda^{\max}(V)$. On note encore T^o l'intégrale de Berezin, c'est-à-dire la coordonnée sur $\Lambda(V)$ correspondant à o . Soit $A \in \mathfrak{spin}(V)$. Calculons le nombre $T^o(\exp(\sigma_2(A)))$. On a $T^o(\exp(\sigma_2(A))) = 0$ si n est impair, et $T^o(\exp(\sigma_2(A)))o = (\sigma_2(A))^n/p!$ si $n = 2p$. De manière analogue à la proposition 79 on trouve

$$T^o(\exp(\sigma_2(A)))^2 = 2^{-n} \det_V(j(A)).$$

Rappelons que $j(A)$ est un élément elliptique de $\text{End}(V)$ et que o est une orientation de V . Nous avons défini (formule 42) le nombre $\det_o^{1/2}(j(A))$. On a

$$2^p T^o(\exp(\sigma_2(A))) = \det_o^{1/2}(j(A)).$$

Cette formule montre que la restriction de $\det_o^{1/2}$ au sous-espace $\mathfrak{so}(V, Q)$ est polynomiale (c'est le pfaffien). Elle ressemble à la formule de la définition 53. Un rapport plus précis est donné par la formule (60) ci-dessous. Soit $A \in \mathfrak{spin}(V)$. On a défini (définition 10) la fonction J sur $\text{End}(V)$. Sa restriction à $\mathfrak{so}(V)$ admet une racine carrée analytique, en fait entière sur $\mathfrak{so}(V \otimes \mathbb{C})$ (voir par exemple [6], corollary 3.15).

Définition 86 On note $J^{1/2}$ la fonction entière sur $\mathfrak{so}(V \otimes \mathbb{C})$ dont le carré est J et telle que $J^{1/2}(0) = 1$.

On a alors ([6], proposition 3.16)

$$(60) \quad \det_{V,o}^{1/2}(1 - \exp(A)) = J^{1/2}(j(A)) \det_o^{1/2}(j(A)).$$

Soit $S \in \mathfrak{so}(V)$. Posons $\hat{s} = \exp(j^{-1}(S)) \in \text{Spin}(V)$ et $s = \exp(S) \in \text{SO}(V)$. Si l'on identifie $\mathfrak{spin}(V)$ et $\mathfrak{so}(V)$ grâce à j , on peut aussi noter $\hat{s} = \exp_{\text{Spin}(V)}(S)$. On a $j(\hat{s}) = s$. Soit o une orientation de $\mathfrak{q}(\hat{s}) = \mathfrak{q}(s)$.

Nous choisissons (ce qui est possible) une base de V formée des vecteurs de norme 1 deux à deux orthogonaux $e_1, e_2, \dots, e_{2p-1}, e_{2p}, f_1, f_2, \dots, f_{2q-1}, f_{2q}$ et des nombres réels $\alpha_i \notin 2\pi\mathbb{Z}, \lambda_j \in 2\pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{aligned} S e_{2i-1} &= \lambda_i e_{2i} \\ S e_{2i} &= -\lambda_i e_{2i-1} \\ S f_{2j-1} &= \alpha_j f_{2j} \\ S f_{2j} &= -\alpha_j f_{2j-1} \end{aligned}$$

L'espace $\mathfrak{q}(s)$ est engendré par les f_j . Supposons de plus que o soit l'orientation de $\mathfrak{q}(s)$ définie par la base f_j .

Proposition 87 On a

$$F(\exp_{\text{Spin}(V)}(S), o) = \prod_{i=1}^p \cos(\lambda_i/2) \text{sign} \left(\prod_{j=1}^q \sin(\alpha_j/2) \right).$$

Démonstration. Il résulte de la proposition 83, numéro 4, qu'il suffit de démontrer l'assertion lorsque $\dim(V) = 2$. Soient e et f deux vecteurs orthogonaux de longueur 1 de V . Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Se = 2\theta f, Sf = -2\theta e$. On a vu (exemple 85) que l'on a $j^{-1}(S) = \theta ef$ et donc $\hat{s} = \cos \theta + \sin \theta ef$. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on

a $\hat{s} = \cos \theta$ et donc $F(\hat{s}, \xi_0) = \cos \theta$. Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\xi(\hat{s})$ est l'orientation de V qui contient $\sin \theta e \wedge f$, et donc $F(\hat{s}, e \wedge f) = \text{sign}(\sin \theta)$. ■

Nous verrons qu'un des intérêts de cette formule est de ne pas faire intervenir explicitement la forme quadratique Q .

Nous notons, pour tout réel $x > 0$, $\mathfrak{spin}(V)_x$ l'ensemble des $A \in \mathfrak{spin}(V)$ tels que les valeurs propres de $j(A)$ soient de module $\leq x$. Soit $a \in \text{Pin}(V)$. Soit $\mathfrak{spin}(V)(a)$ le centralisateur de a dans $\mathfrak{spin}(V)$. Soit $x > 0$. Si x est assez petit, on a $V(ae^A) = V(a) \cap V(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{spin}(V)(a)_x$. On raffine la décomposition (55) de V en

$$(61) \quad V = V(ae^A) \oplus \mathfrak{q}(a, A) \oplus \mathfrak{q}(a),$$

où $\mathfrak{q}(a, A) = j(A)(V(a))$. On a donc

$$(62) \quad \mathfrak{q}(ae^A) = \mathfrak{q}(a, A) \oplus \mathfrak{q}(a)$$

Comme $j(A)$ est une transformation elliptique inversible de $\mathfrak{q}(a, A)$, elle détermine une orientation $\zeta(\mathfrak{q}(a, A), A)$ de $\mathfrak{q}(a, A)$.

Voici un supplément à la proposition 83. C'est une sorte de propriété de continuité des fonctions ξ et F .

Proposition 88 *(La numérotation continue celle de la proposition 83).*

7. Soit $a \in \text{Pin}(V)$. Il existe $x > 0$ tel que pour tout élément A de $\mathfrak{spin}(V)(a)_x$ on ait la décomposition 61 et la formule

$$\xi(ae^A) = \xi(a) \wedge \zeta(\mathfrak{q}(a, A), A) = \zeta(\mathfrak{q}(a, A), A) \wedge \xi(a).$$

7'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On a $F(ae^A, o \wedge \zeta(\mathfrak{q}(a, A), A)) = F(a, o)$.

Démonstration. En appliquant la proposition 83 on se ramène aux deux situations suivantes.

1. On suppose V de dimension 2 et $a = 1$. On munit V d'une base orthonormée e, f et on a $A = \theta ef$. On a $j(A)e = 2\theta f$ et $j(A)f = -2\theta e$. Si $\theta = 0$, l'assertion est claire. Supposons $\theta \neq 0$. Soit $x = 2\pi$. Si $A \in \mathfrak{spin}(V)_x$, on a $0 < |\theta| < \pi$, les nombres θ et $\sin \theta$ ont le même signe et donc $\xi(e^A) = \xi(a)$. (Si l'on préfère, on peut aussi utiliser la formule (60)).

2. On suppose $1 - j(a)$ inversible. Si x est assez petit, $1 - j(ae^A)$ est inversible pour tout $A \in \mathfrak{spin}(V)(a)_x$. Comme l'application σ_V est continue et comme $\mathfrak{spin}(V)(a)_x$ est connexe, on voit que les orientations $\xi(s)$ et $\xi(ae^A)$ sont égales. ■

Corollaire 89 *On suppose $\dim(V) \geq 2$.*

1. La fonction ξ qui à $a \in \text{Spin}(V)$ associe une orientation de $\mathfrak{q}(a)$ est l'unique fonction vérifiant les propriétés 1, 6 (de la proposition 83) et 7 (de la proposition 88).

2. La fonction ξ qui à $a \in \text{Pin}^-(V)$ associe une orientation de $\mathfrak{q}(a)$ est l'unique fonction vérifiant les propriétés 3, 6 (de la proposition 83) et 7 (de la proposition 88).

Démonstration. Cela résulte facilement de ce que $\text{Spin}(V)$ et $\text{Pin}^-(V)$ sont connexes pour $\dim(V) > 2$. ■

En particulier, la propriété 2 est une conséquence des autres, ce qui montre la nécessité d'introduire le groupe $\text{Pin}(V)$ dans ces questions d'orientation.

Nous expliquons maintenant le rapport des fonctions introduites ci-dessus avec la représentation spinorielle.

Supposons n pair. On pose $n = 2p$ et $m = 2^{p-1}$. Soit $M(m, m, \mathbb{C})$ la super algèbre des matrices représentant les endomorphismes de l'espace vectoriel gradué $\mathbb{C}^{m|m}$. Soit ψ un isomorphisme

$$\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \rightarrow M(m, m, \mathbb{C}).$$

(On sait qu'un tel isomorphisme existe). On a facilement

$$\text{tr}(\psi(a)) = 2^p T(a).$$

Si o est une orientation de V , on a donc

$$\text{tr}(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^p 2^p T^o(a).$$

En comparant cette formule avec les propositions 77 et 79 on trouve les relations (voir [6], proposition 3.23)

$$(63) \quad \text{tr}(\psi(a)) = \det_o^{1/2}(1 + a) \quad \text{pour } a \in \text{Pin}(V)$$

et

$$(64) \quad \text{tr}(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^p \det_{V,o}^{1/2}(1 - a) = \det_{V,o}^{1/2}(1 - a^{-1}) \quad \text{pour } a \in \text{Pin}(V).$$

Ecrivons ces relations en terme de super trace. Rappelons que si $u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec A, B, C et D dans $M(m, \mathbb{C})$, est un élément de $M(m, m, \mathbb{C})$ on pose

$$\text{str}(u) = \text{tr}(A) - \text{tr}(D) = \text{tr}\left(u \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right).$$

Il existe deux classes de conjugaison (sous l'action du groupe $\text{GL}(m, m, \mathbb{C})$) des éléments inversibles *pairs* de $M(m, m, \mathbb{C})$ d'isomorphismes

$$\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \rightarrow M(m, m, \mathbb{C}).$$

Fixons une racine carrée i de -1 et une orientation o de V . Il résulte de (50) que l'on a

$$\psi(i^p \gamma_o) = \pm \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

où I est la matrice de l'application identique de \mathbb{C}^m . On détermine une classe ψ^o en demandant que l'on ait $\psi^o(i^p \gamma_o) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, ou, ce qui revient au même, $i^p \text{str}(\psi^o(\gamma_o)) = 2^p$. On a alors

$$(65) \quad i^p \text{str}(\psi^o(a)) = 2^p T^o(a) \quad \text{pour } a \in \mathbb{C}(V).$$

On suppose maintenant n impair. On pose $n = 2p + 1$ et $m = 2^p$. Soit $Q(m, \mathbb{C})$ la sous-algèbre de $M(m, m, \mathbb{C})$ formée des matrices commutant (au sens gradué) à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ où I est la matrice de l'application identique dans \mathbb{C}^m . C'est l'algèbre des matrices

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

avec A et B dans $M(m, \mathbb{C})$. L'algèbre $Q(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $M(m, \mathbb{C} + e\mathbb{C})$, où e est un élément impair tel que $e^2 = -1$, par l'isomorphisme qui à $A + Be$ associe $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Soit ψ un isomorphisme

$$\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \rightarrow Q(m, \mathbb{C}).$$

(On sait qu'un tel isomorphisme existe). On a facilement

$$\text{tr}(\psi(a)) = 2^{p+1} T(a).$$

Si o est une orientation de V , on a donc

$$\text{tr}(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^{p+1} 2^{p+1} T^o(a).$$

En comparant cette formule avec les propositions 77 et 79 on trouve, pour $a \in \text{Pin}(V)$ les relations

$$(66) \quad \text{tr}(\psi(a)) = \sqrt{2} \det_o^{1/2}(1 + a)$$

et

$$(67) \quad \text{tr}(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^{p+1} \sqrt{2} \det_{V,o}^{1/2}(1 - a) = \sqrt{2} \det_{V,o}^{1/2}(1 - a^{-1}).$$

Ecrivons ces relations en terme de "super trace impaire". Notons J l'élément

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

de $Q(m, \mathbb{C})$. Rappelons que l'on définit une forme linéaire impaire ostr sur $Q(m, \mathbb{C})$ par la relation

$$\text{ostr}(A + Be) = 2 \text{tr}(B) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} J\right).$$

Il existe deux classes de conjugaison (sous l'action du groupe $GQ(m, \mathbb{C})$ des éléments inversibles *pairs* de $Q(m, \mathbb{C})$) d'isomorphismes $\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \rightarrow Q(m, \mathbb{C})$. Fixons une racine carrée i de -1 et une orientation o de V . La relation (50) implique que l'on a $\psi(i^p \gamma_o) = \pm J$. On détermine une classe ψ^o en demandant que l'on ait $\psi^o(i^p \gamma_o) = J$, ou bien encore $\text{ostr}(\psi^o(i^p \gamma_o)) = -2^{p+1}$. On a alors

$$(68) \quad = -i^p \text{ostr}(\psi^o(a)) = 2^{p+1} T^o(a) \quad \text{pour } a \in C(V).$$

4.3 Groupe $ML(V)$.

Soit V une espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 90 Si $\dim(V) \geq 2$, on note $j : DL(V) \rightarrow SL(V)$ le revêtement connexe d'ordre 2 de $SL(V)$. On note $\{1, \epsilon\}$ le noyau de j .

Si $\dim(V) \leq 1$, on note $DL(V)$ le groupe à deux éléments $\{1, \epsilon\}$ et j l'unique application $j : DL(V) \rightarrow SL(V)$.

(La notation DL est employée pour "double").

On peut motiver cette définition de la manière suivante. Lorsque $\dim V \geq 3$, $DL(V)$ est le revêtement simplement connexe de $SL(V)$. Supposons que V soit la somme directe de deux sous-espaces U et U' . Notons encore $SL(U)$ (par abus de notation car U' devrait figurer dans celle-ci) le sous-groupe de $SL(V)$ formé des éléments g fixant U' et laissant stable U . Notons $DL'(U)$ l'image réciproque de $SL(U)$ dans $DL(V)$. Le revêtement $DL'(U) \rightarrow SL(U)$ est canoniquement isomorphe au revêtement $DL(U) \rightarrow SL(U)$. On identifiera donc $DL(U)$ au sous-groupe $DL'(U)$ de $DL(V)$. En prenant V de dimension ≥ 3 et U de dimension ≤ 2 , ceci justifie notre définition de $DL(U)$.

Nous définissons maintenant un revêtement de $GL(V)$. On introduit comme dans la section 4.2 un espace $\tilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\tilde{e}$ et on considère le revêtement $\tilde{j} : DL(\tilde{V}) \rightarrow SL(\tilde{V})$. On note $ML(V)$ le sous-groupe de $DL(\tilde{V})$ formé des $a \in DL(\tilde{V})$ tels que $\tilde{j}(a)$ laisse stable V et $\mathbb{R}\tilde{e}$. On note $j(a) \in GL(V)$ la restriction de $\tilde{j}(a)$ à V . On a donc $\tilde{j}(a)(\tilde{e}) = \det(j(a))^{-1}\tilde{e}$. L'application $j : ML(V) \rightarrow GL(V)$ est un revêtement d'ordre 2 et sa restriction à l'image réciproque de $SL(V)$ est canoniquement isomorphe au revêtement $j : DL(V) \rightarrow SL(V)$ définie ci-dessus.

Définition 91 Le revêtement $j : ML(V) \rightarrow GL(V)$ s'appelle le revêtement métalinéaire de $GL(V)$ et $ML(V)$ le groupe métalinéaire.

Nous définissons le sous-groupe $GL^+(V)$ de $GL(V)$ formé des éléments de déterminant > 0 , le sous-ensemble $GL^-(V)$ de $GL(V)$ formé des éléments de déterminant < 0 , $ML^+(V)$ et $ML^-(V)$ les images réciproques de $GL^+(V)$ et $GL^-(V)$ respectivement dans $ML(V)$. On note aussi $SL^\pm(V)$ le sous-groupe de $GL(V)$ formé des éléments de déterminant ± 1 , $SL^-(V)$ le sous-ensemble de

$GL(V)$ formé des éléments de déterminant -1 , $DL^\pm(V)$ et $DL^-(V)$ les images réciproques de $SL^\pm(V)$ et $SL^-(V)$ respectivement dans $ML(V)$.

Supposons que V soit la somme directe de deux sous-espaces U et U' . Notons encore $GL(U)$ le sous-groupe de $GL(V)$ formé des éléments g fixant U' et laissant stable U . Notons $ML'(U)$ l'image réciproque de $GL(U)$ dans $ML(V)$. Le revêtement $ML'(U) \rightarrow GL(U)$ est canoniquement isomorphe au revêtement $ML(U) \rightarrow GL(U)$. On identifiera donc $ML(U)$ au sous-groupe $ML'(U)$ de $ML(V)$.

Avec ces notations, tout élément $a \in ML(V)$ tel que $j(a)$ laisse stable U et U' s'écrit $a = bb'$ avec $b \in ML(U)$ et $b' \in ML(U')$. Si $a = cc'$ est une autre décomposition avec $c \in ML(U)$ et $c' \in ML(U')$, il existe $k \in \{1, \epsilon\}$ tel que $b = kc$ et $b' = k^{-1}c'$.

Rappelons la notation $\tilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\bar{e}$. Par définition, $ML(V)$ est un sous-groupe de $DL(\tilde{V})$. On note κ l'injection

$$(69) \quad \kappa : ML(V) \rightarrow DL(\tilde{V}).$$

Soit Q une forme quadratique définie positive sur V . Le groupe $SO(V, Q)$ est un sous-groupe compact maximal de $SL(V)$. Soit $Spin'(V, Q)$ l'image réciproque de $SO(V, Q)$ dans $DL(V)$. Il existe un unique isomorphisme $\phi_Q : Spin(V, Q) \rightarrow Spin'(V, Q)$ qui induise un isomorphisme de revêtements de $j : Spin(V, Q) \rightarrow SO(V, Q)$ sur $j : Spin'(V, Q) \rightarrow SO(V, Q)$.

De même, on note $Pin'(V, Q)$ l'image réciproque de $O(V, Q)$ dans $ML(V)$. C'est un sous-groupe compact maximal de $ML(V)$. Il existe un unique isomorphisme $\phi_Q : Pin(V, Q) \rightarrow Pin'(V, Q)$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Pin(V, Q) & \xrightarrow{\kappa} & Spin(\tilde{V}, \tilde{Q}) \\ \downarrow \phi_Q & & \downarrow \phi_{\tilde{Q}} \\ Pin'(V, Q) & \xrightarrow{\kappa} & Spin'(\tilde{V}, \tilde{Q}) \end{array}$$

où \tilde{Q} est la forme quadratique sur \tilde{V} qui prolonge Q et pour laquelle \bar{e} est orthogonal à V et de longueur 1, la première flèche κ est définie par la formule (46) et la seconde par la formule (69).

Remarquons que nous faisons un peu attention car il n'est pas vrai qu'il existe un unique isomorphisme du revêtement de $Pin(V, Q)$ de $O(V, Q)$ sur le revêtement $Pin'(V, Q)$. En fait il y en a deux. Considérons l'automorphisme η de $C(V, Q)$ tel que, pour tout élément homogène $a \in C(V, Q)$, on ait

$$\eta(a) = (-1)^{p(a)} a.$$

Si γ_o est l'élément de $C^n(V, Q)$ associé ci-dessus à une orientation o de V , on a $\eta = \iota(\gamma_o)$. Comme η induit un automorphisme non trivial du revêtement $j : Pin(V, Q) \rightarrow O(V, Q)$, on voit que $\phi_Q \circ \eta$ est un second isomorphisme de

revêtements de $j : \text{Pin}(V, Q) \rightarrow \text{O}(V, Q)$ sur $j : \text{Pin}'(V, Q) \rightarrow \text{O}(V, Q)$. Néanmoins, le choix de ϕ_Q est canonique.

Soit $b \in \text{ML}(V)_{\text{ell}}$. Soit $\mathfrak{q}(b) = (1 - j(b))V$. Par définition de la notion d'élément elliptique, il existe une forme quadratique définie positive Q sur V stable par $j(b)$. Donc b appartient à $\text{Pin}'(V, Q)$, $\phi_Q^{-1}(b)$ appartient à $\text{Pin}(V, Q)$ et on a défini (définition 82) l'orientation $\xi(\phi_Q^{-1}(b))$ de $\mathfrak{q}(b)$.

Lemme 92 *L'orientation $\xi(\phi_Q^{-1}(b))$ de $\mathfrak{q}(b)$ ne dépend pas du choix de la forme Q stable par $j(b)$.*

Démonstration. On le démontre d'abord pour $b \in \text{DL}(V)_{\text{ell}}$. On peut supposer $\dim(V) \geq 2$. On écrit $b = \exp_D(S)$ où $S \in (V)_{\text{ell}}$ et où $\exp_D(\cdot)$ désigne l'exponentielle dans $\text{DL}(V)$. La proposition 87 donne une formule pour $\xi(\phi_Q^{-1}(b)) = \xi(\exp_{\text{Spin}(V, Q)}(S))$ qui ne dépend que de la décomposition spectrale de S .

On se ramène au cas précédent en considérant l'injection κ de $\text{ML}(V)$ dans $\text{DL}(\tilde{V})$. ■

Le lemme permet de poser la définition suivante.

Définition 93 *Nous noterons $\xi(b)$ l'orientation $\xi(\phi_Q^{-1}(b))$ de $\mathfrak{q}(b)$.*

Introduisons encore quelques notations. Pour $a \in \text{ML}(V)$, on note $\iota(a)$ l'automorphisme de $\text{ML}(V)$ défini pour $b \in \text{ML}(V)$ par

$$(70) \quad \begin{cases} \iota(a)(b) = \epsilon aba^{-1} & \text{pour } a \in \text{ML}^-(V) \text{ et } b \in \text{ML}^-(V), \\ \iota(a)(b) = aba^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $b \in \text{ML}(V)_{\text{ell}}$ et si o est une orientation de $\mathfrak{q}(b)$, on note encore $F(b, o) \in \{1, -1\}$ le nombre tel que $\xi(b) = F(b, o)o$.

Avec ces définitions, les propriétés des fonctions $\xi(\cdot)$ et $F(\cdot, \cdot)$ énoncées dans les propositions 83 et 88 pour le groupe $\text{Pin}(V, Q)$ s'étendent sans changement au sous-ensemble $\text{ML}(V)_{\text{ell}}$ de $\text{ML}(V)$ et nous ne les répétons pas.

4.4 Fibrés G -équivariants et points fixes.

Soit G un groupe de Lie presque algébrique et soit M une variété sur laquelle G opère. Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel G -équivariant sur la variété M sur lequel G opère régulièrement (définition 72). En particulier G opère régulièrement sur M .

Soit $S \in \mathfrak{g}_{\text{ell}}$. D'après la condition 51, l'espace des zéros de S_M est une sous-variété de M . Considérons le fibré vectoriel $\mathcal{V}|M(S)$. Comme S_M s'annule sur $M(S)$, on obtient un morphisme encore noté $S : \mathcal{V}|M(S) \rightarrow \mathcal{V}|M(S)$ de fibrés vectoriels au dessus de $M(S)$. D'après la condition 72, en chaque point $m \in M(S)$, S induit une transformation elliptique de \mathcal{V}_m . On a donc la décomposition $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(S) \oplus \mathcal{Q}_m(S)$ avec $\mathcal{V}_m(S) = \{v \in \mathcal{V}_m; S \cdot v = 0\}$ et

$\mathcal{Q}_m(S) = S(\mathcal{V}_m)$. Comme la transformation S_M est localement constante, la dimension de $\mathcal{V}_m(S)$ est localement constante lorsque m varie dans $M(S)$. On voit donc que l'espace des zéros $\mathcal{V}(S)$ de $S_{\mathcal{V}}$ est un fibré sur $M(S)$ dont la fibre au dessus de $m \in M(S)$ est $\mathcal{V}_m(S)$. De même on peut définir le fibré vectoriel $\mathcal{Q}(S) \rightarrow M(S)$ de fibre $\mathcal{Q}_m(S)$ au dessus de $m \in M(S)$. On a donc la décomposition

$$(71) \quad \mathcal{V}|M(S) = \mathcal{V}(S) \oplus \mathcal{Q}(S).$$

La transformation S induit une transformation inversible du fibré vectoriel $\mathcal{Q}(S) \rightarrow M(S)$ infinitésimalement elliptique non dégénérée sur chaque fibre. Le groupe $G(S)$ opère sur la variété $M(S)$ et les fibrés $\mathcal{V}(S)$ et $\mathcal{Q}(S)$ sont des fibrés $G(S)$ -équivariants sur $M(S)$.

Définition 94 Nous noterons $\zeta(S)$ l'orientation du fibré $\mathcal{Q}(S) \rightarrow M(S)$ qui dans chaque fibre est induite par l'action de S (formule 45).

De même, si \mathcal{U} est un sous-fibré S stable de $\mathcal{Q}(S)$, nous notons $\zeta(\mathcal{U}, S)$ l'orientation définie par S dans \mathcal{U} (voir la formule 44).

Exemple 95 Si \mathcal{V} est le fibré tangent, $\zeta(S)$ est une orientation du fibré normal à $M(S)$, invariante par $G(S)$.

Soit s un élément elliptique de G . Etudions l'espace $\mathcal{V}(s)$ des points fixes de la transformation s sur \mathcal{V} . Au dessus de $M(s)$, la transformation s induit un isomorphisme encore noté $s : \mathcal{V}|M(s) \rightarrow \mathcal{V}|M(s)$ du fibré vectoriel \mathcal{V} restreint à $M(s)$. Il est clair que l'on a

$$\mathcal{V}(s) = \{(m, v); m \in M(s), s \cdot v = v\}.$$

D'après la condition 72, la transformation s induit une transformation elliptique sur chaque fibre \mathcal{V}_m localement constante lorsque m varie dans $M(s)$. Au dessus de chaque point $m \in M(s)$ on a la décomposition $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(s) \oplus \mathcal{Q}_m(s)$ avec $\mathcal{V}_m(s) = \{v \in \mathcal{V}_m; s \cdot v = v\}$ et $\mathcal{Q}_m(s) = (1 - s)\mathcal{V}_m$. Comme la transformation s est localement constante, il s'ensuit que la dimension de l'espace $\mathcal{V}_m(s)$ est localement constante lorsque m varie dans $M(s)$. Donc l'espace $\mathcal{V}(s)$ est le fibré vectoriel sur $M(s)$ de fibre $\mathcal{V}_m(s)$. On note $\mathcal{Q}(s)$ le fibré sur $M(s)$ de fibre $\mathcal{Q}_m(s)$. On a donc la décomposition

$$(72) \quad \mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

La transformation $(1 - s)$ induit un automorphisme du fibré $\mathcal{Q}(s) \rightarrow M(s)$.

Même si \mathcal{V} est orienté et si G préserve l'orientation de \mathcal{V} , le fibré $\mathcal{Q}(s)$ n'est en général pas orientable.

4.5 Fibrés métalinéaires orientés.

Soit G un groupe presque algébrique opérant régulièrement sur une variété M . Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel sur lequel G opère régulièrement.

Rappelons quelques définitions. On dira que \mathcal{V} est un *fibré métalinéaire G -équivariant* si l'on s'est donné un espace vectoriel réel V , un fibré principal $P \rightarrow M$ de groupe $\mathrm{ML}(V)$ avec une action à gauche de G sur P commutant à celle de $\mathrm{ML}(V)$, et un isomorphisme G -équivariant de \mathcal{V} sur $P \times_{\mathrm{ML}(V)} V$ où $\mathrm{ML}(V)$ agit dans V par j .

On dira que \mathcal{V} est un *fibré métalinéaire orientable G -équivariant* si l'on s'est donné un espace vectoriel réel V , un fibré principal $P \rightarrow M$ de groupe $\mathrm{ML}^+(V)$ avec une action à gauche de G sur P commutant à celle de $\mathrm{ML}^+(V)$, et un isomorphisme G -équivariant de \mathcal{V} sur $P \times_{\mathrm{ML}^+(V)} V$ où $\mathrm{ML}^+(V)$ agit dans V par j .

On dira que \mathcal{V} est un *fibré métalinéaire orienté G -équivariant* si c'est un fibré métalinéaire orientable G -équivariant, et si on s'est donné de plus une orientation o_V de V . On en déduit une orientation G -invariante o_V de \mathcal{V} .

Soit donc \mathcal{V} un fibré métalinéaire orientable G -équivariant. Soit $s \in G_{ell}$. Nous allons définir une orientation $\xi(s)$ du fibré $\mathcal{Q}(s) \rightarrow M(s)$ (formule 72). Soit $m \in M(s)$. Soit $p \in P$ au-dessus du point m . On a $sp = pr(s, p)$ avec $r(s, p) \in \mathrm{ML}^+(V)_{ell}$. Le point p nous fournit une identification $v \mapsto [p, v]$ de V avec \mathcal{V}_m et de $\mathfrak{q}(r(s, p))$ avec $\mathcal{Q}(s)_m$. On munit $\mathfrak{q}(r(s, p))$ de l'orientation $\xi(r(s, p))$ (définition 82). En transportant cette orientation par l'identification déduite de p , on obtient une orientation notée $\xi(s, p)$ de $\mathcal{Q}(s)_m$. La proposition 83 implique que $\xi(hr(s, p)h^{-1}) = \xi(r(s, ph^{-1}))$ pour tout $h \in \mathrm{ML}^+(V)$, et donc $\xi(s, p)$ ne dépend pas du choix de p au-dessus de m . On note $\xi_m(s)$ l'orientation de $\mathcal{Q}(s)_m$ ainsi obtenue.

La classe de conjugaison de $r(s, p)$ est localement constante sur $M(s)$ puisque l'action de G sur \mathcal{V} est régulière. On obtient donc une orientation $\xi(s)$ du fibré $\mathcal{Q}(s) \rightarrow M(s)$. Elle est invariante sous l'action de $G(s)$.

Définition 96 *On dit que $\xi(s)$ est l'orientation du fibré $\mathcal{Q}(s) \rightarrow M(s)$ associée à s .*

Soient $s \in G_{ell}$ et $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Décomposons le fibré $\mathcal{V}(s)$ au-dessus de $M(s)(S)$ en $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s, S)$ où

$$\mathcal{V}(s)(S) = \mathcal{V}(s) \cap \mathcal{V}(S), \quad \mathcal{Q}(s, S) = S(\mathcal{V}(s)).$$

On a donc

$$(73) \quad \mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s, S) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

Si $a > 0$ est assez petit et si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell, a}$, on a $G(se^S) = G(s) \cap G(S)$, $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$, $\mathcal{V}(se^S) = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}(se^S) = \mathcal{Q}(s, S) \oplus \mathcal{Q}(s)$.

Rappelons la définition 94 de l'orientation $\zeta(Q(s, S), S)$ du fibré $Q(s, S)$. On déduit de la proposition 88 la formule suivante

$$(74) \quad \xi(se^S) = \zeta(Q(s, S), S) \wedge \xi(s).$$

Choisissons de plus une orientation o_V de V , et soit o_V l'orientation correspondante de \mathcal{V} . Pour chaque $s \in G_{ell}$, $o_V/\xi(s)$ est une orientation $G(s)$ -invariante du fibré $\mathcal{V}(s) \rightarrow M(s)$. Le fait que $\mathcal{V}(s)$ soit orientable est dû à Bott et Taubes [11].

5 Bottes de cohomologie équivariante tordue.

5.1 Cohomologie équivariante tordue.

Soit M une variété et soit \mathcal{E} un fibré vectoriel réel sur M . Nous introduisons maintenant la notion de formes différentielles \mathcal{E} -tordues. Lorsque \mathcal{E} est le fibré tangent à M , la notion de formes tordues a été définie dans l'introduction.

Considérons la variété $M_{\mathcal{E}}$ dont les éléments sont des couples (m, o) , où m est dans M et où o est une orientation de \mathcal{E}_m . C'est un revêtement d'ordre 2 de M . Par définition même, l'image réciproque du fibré \mathcal{E} sur $M_{\mathcal{E}}$ est un fibré orienté.

Soit $(m, o) \in M_{\mathcal{E}}$. Si $\xi \in T_m M$ est un vecteur tangent en $m \in M$, le vecteur ξ se remonte canoniquement en un vecteur tangent en (m, o) . Soit $T_m^* M$ l'espace cotangent en m . Si $\alpha \in \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})$, on peut considérer $\alpha_{(m,o)}$ comme un élément de $\Lambda T_m^* M$.

Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{+1, -1\}$ opère dans $M_{\mathcal{E}}$ de sorte que $M_{\mathcal{E}}$ est un fibré principal de base M . Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel réel orientable, le choix d'une orientation définit un isomorphisme entre $M_{\mathcal{E}}$ et $M \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cependant il est souvent souhaitable, même lorsque \mathcal{E} est orientable, de ne pas préférer une orientation particulière.

Notons ϵ l'action de -1 dans $M_{\mathcal{E}}$. On note encore ϵ l'action induite dans les formes différentielles sur $M_{\mathcal{E}}$. On a donc

$$\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}}) = \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^+ \oplus \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^-,$$

où $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^{\pm}$ sont les sous-espaces propres de valeur propre ± 1 pour l'action de ϵ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^+ &= \{\alpha \in \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = \alpha\} \\ \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^- &= \{\alpha \in \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}. \end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^+$ s'identifie à $\mathcal{A}(M)$.

Définition 97 On note $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^-$ par $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$. Un élément de $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ sera appelé une forme différentielle \mathcal{E} -tordue.

L'espace $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ est un module sur $\mathcal{A}(M)$, stable par la différentielle de de Rham de $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$. On définit de même l'espace $\mathcal{A}_{cpt}(M)_{\mathcal{E}}$ des formes différentielles \mathcal{E} -tordues à support compact.

Si o est un choix local d'orientation de \mathcal{E} et $\alpha \in \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ une forme \mathcal{E} -tordue, on notera α_o la forme différentielle que l'on en déduit naturellement sur l'ouvert de M dans lequel est définie o .

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ et si o_i ($i = 1, 2$) sont des orientations locales de \mathcal{E}_i , $o_1 \wedge o_2$ est une orientation locale de $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ déduite de o_1 et o_2 . On définit une application de $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_1} \otimes \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_2} \rightarrow \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ par

$$(\alpha \wedge \beta)_{o_1 \wedge o_2} = \alpha_{o_1} \wedge \beta_{o_2},$$

si $\alpha \in \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_1}$ et $\beta \in \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_2}$.

Si M est une variété de dimension n et si \mathcal{E} est le fibré tangent, on note $\mathcal{A}(M)_t$ l'espace des formes différentielles TM -tordues. Un élément de $\mathcal{A}(M)_t$ sera appelé une forme différentielle M -tordue. Un élément homogène de degré extérieur n de $\mathcal{A}(M)_t$ est une densité sur M . On note $\int_M \alpha = \int_M \alpha_{[\dim M]}$ l'intégrale d'une forme différentielle M -tordue à support compact.

Plus généralement, soit $p : M \rightarrow B$ une fibration et soit \mathcal{V} le fibré tangent vertical. On peut alors intégrer sur la fibre de p une forme différentielle \mathcal{V} -tordue à support compact. On note p_* ou $\int_{M/B}$ l'opération d'intégration sur la fibre. On suit les conventions de [6], chapitre 1, pour l'intégration sur la fibre: en particulier si $\alpha \in \mathcal{A}_{cpt}(M)_{\mathcal{V}}$ et $\beta \in \mathcal{A}(B)$, alors $p_*(\alpha \wedge p^*\beta) = p_*\alpha \wedge \beta$.

De même, si \mathcal{E} est un fibré réel sur B et si $p^*\mathcal{E}$ est le fibré image réciproque de \mathcal{E} par p , l'application d'intégration p_* sur les fibres est une application de l'espace $\mathcal{A}_{cpt}(M)_{\mathcal{V} \oplus p^*\mathcal{E}}$ des formes différentielles sur M tordues pour le fibré $\mathcal{V} \oplus p^*\mathcal{E}$ dans l'espace $\mathcal{A}_{cpt}(B)_{\mathcal{E}}$ des formes différentielles sur B tordues pour \mathcal{E} . En particulier, si \mathcal{E} est le fibré tangent à B , l'intégration sur la fibre est une application p_* de l'espace des formes M -tordues à support compact dans l'espace des formes B -tordues à support compact.

Soient G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Supposons que G opère sur M et que \mathcal{E} soit un fibré vectoriel G -équivariant. Le groupe G opère naturellement sur le revêtement $M_{\mathcal{E}}$ de M et son action commute à l'action de ϵ . En reprenant les notations de la section 1.3, on considère l'algèbre différentielle $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M_{\mathcal{E}}), d_{\mathfrak{g}})$ et, si U est un ouvert G -invariant de \mathfrak{g} , l'algèbre différentielle $(\mathcal{A}_G^{\infty}(U, M_{\mathcal{E}}), d_{\mathfrak{g}})$. On note encore ϵ l'action de -1 sur ces espaces. L'opérateur ϵ commute à $d_{\mathfrak{g}}$.

L'espace

$$\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}} = \{\alpha \in \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}$$

est appelé l'espace des formes différentielles G -équivariantes \mathcal{E} -tordues à coefficients polynomiaux. La différentielle $d_{\mathfrak{g}}$ induit une différentielle sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}}$. L'espace $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}})$ est un module différentiel \mathbb{Z} -gradués sur l'algèbre différentielle \mathbb{Z} -graduée $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M), d_{\mathfrak{g}})$.

L'espace

$$\mathcal{A}_G^{\infty}(U, M)_{\mathcal{E}} = \{\alpha \in \mathcal{A}_G^{\infty}(U, M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}$$

est appelé l'espace des formes différentielles G -équivariantes \mathcal{E} -tordues définies sur U . La différentielle $d_{\mathfrak{g}}$ laisse stable $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_\mathcal{E}$. L'espace $(\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_\mathcal{E}, d_{\mathfrak{g}})$ est un module différentiel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué sur l'algèbre différentielle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué $(\mathcal{A}_G^\infty(U, M), d_{\mathfrak{g}})$.

On considère aussi le sous-espace $(\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U, M)_\mathcal{E}, d_{\mathfrak{g}})$ des formes équivariantes tordues à support compact sur M .

Définition 98 On note $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E}$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E}$ pour la différentielle $d_{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_\mathcal{E}$ celui de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U, M)_\mathcal{E}$ celui de $\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U, M)_\mathcal{E}$.

L'espace $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E}$ est un module \mathbb{Z} -gradué sur $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)$, $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_\mathcal{E}$ un module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué sur $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ et $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U, M)_\mathcal{E}$ un module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué sur $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U, M)$.

Exemple 99 Si M est un point \bullet , le fibré \mathcal{E} est une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie E . Soit $or(E)$ l'ensemble des deux orientations de E . Un élément de $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, \bullet)_\mathcal{E}$ est une fonction $\phi(X, o)$ différentiable sur $\mathfrak{g} \times or(E)$, vérifiant $\phi(gXg^{-1}, \det_E(g)o) = \phi(X, o) = -\phi(X, -o)$. Le choix d'une orientation o détermine (par restriction à $\mathfrak{g} \times \{o\}$) un isomorphisme de $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E}$ sur l'espace $C^\infty(\mathfrak{g})^{G,E}$ formé des fonctions semi-invariantes de poids $\text{sign det}_E(\cdot)$.

Exemple 100 Soit par exemple E une espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique définie positive, et soit $G = O(E)$. Si $\dim E$ est paire, la fonction $\det^{1/2}(S)$ ($S \in \mathfrak{so}(E)$ et o orientation de E) définie en 42 est une base de $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, \bullet)_\mathcal{E}$ comme module sur $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, \bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$.

Nous laissons au lecteur d'énoncer les résultats analogues à ceux de la section 1, et en particulier le théorème 24.

Soit G un groupe presque algébrique et soit \mathfrak{g}_a , $a > 0$, son système fondamental de voisinages elliptiques de 0.

Définition 101 On note $\mathcal{A}_{[G]}^\mathcal{E}(M) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_\mathcal{E}$ l'espace des germes (pour la topologie elliptique) en 0 de formes G -équivariantes \mathcal{E} -tordues. On note $\mathcal{H}_{[G]}^\mathcal{E}(M) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_\mathcal{E}$ l'espace des germes (pour la topologie elliptique) en 0 de classes de cohomologie G -équivariante tordue.

Soit B une G -variété. Soit $p : M \rightarrow B$ une fibration de G -variétés. Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ le fibré tangent vertical. Les formes équivariantes \mathcal{V} -tordues à support compact (sur les fibres) peuvent s'intégrer sur la fibre de p . Plus généralement, soit \mathcal{E} un fibré réel G -équivariant sur B . Alors l'intégration sur la fibre définit un morphisme

$$p_* : (\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U, M)_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}}) \rightarrow (\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U, B)_\mathcal{E}, d_{\mathfrak{g}}).$$

On note $\mathcal{A}_{v\text{cpt}}(M)$ l'espace des formes différentielles α sur M telles que p soit propre sur le support de α (l'indice v est pour vertical). On note $\mathcal{A}_{v\text{cpt},G}^\infty(U, M) = (C^\infty(U) \hat{\otimes} \mathcal{A}_{v\text{cpt}}(M))^G$, etc... On étend p_* à l'espace $\mathcal{A}_{v\text{cpt},G}^\infty(U, M)_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}$ et on note encore p_* l'application induite par p_* en cohomologie

$$(75) \quad p_* : \mathcal{H}_{v\text{cpt},G}^\infty(U, M)_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(U, B)_\mathcal{E}$$

ainsi que sur les germes

$$p_* : \mathcal{A}_{v\text{cpt},[G]}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(M) \rightarrow \mathcal{H}_{[G]}^\mathcal{E}(B).$$

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. La sous-variété $M_\mathcal{E}(S)$ des zéros de S dans le revêtement $M_\mathcal{E}$ de M est naturellement isomorphe à $M(S)_{\mathcal{E}|M(S)}$. Nous notons encore \mathcal{E} la restriction de \mathcal{E} à toute sous-variété de M . On note encore T_S l'opérateur

$$T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_\mathcal{E}$$

obtenu par restriction de l'opérateur $T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M_\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M_\mathcal{E}(S))$ de la formule (37) au sous-espace de valeur propre -1 pour l'action de ϵ . Si o est un choix local d'orientation de \mathcal{E} défini au voisinage d'un point $m \in M(S)$, on a donc au voisinage de ce point, pour $Y \in \mathfrak{g}(S)$

$$(76) \quad T_S \alpha_o(Y) = \alpha_o(S + Y)|_{M(S)}.$$

On en déduit une application en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_\mathcal{E}.$$

Soit $a > 0$ et soit $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on peut définir une application encore notée

$$T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_{[G(S)]}^\mathcal{E}(M(S))$$

par la même formule que (76), pour Y variant dans un voisinage elliptique assez petit. On obtient aussi une application de translation en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{[G(S)]}^\mathcal{E}(M(S)).$$

Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a > 0$. Comme en (38) on définit des opérateurs de translation

$$(77) \quad \begin{aligned} T_{s,S} & : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S))_\mathcal{E} \\ T_{s,S} & : \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S))_\mathcal{E} \end{aligned}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ et

$$(78) \quad \begin{aligned} T_{s,S} & : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_{[G(s) \cap G(S)]}^\mathcal{E}(M(s) \cap M(S)) \\ T_{s,S} & : \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{[G(s) \cap G(S)]}^\mathcal{E}(M(s) \cap M(S)) \end{aligned}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$.

Des exemples naturels de formes équivariantes tordues sont donnés par la forme de Thom équivariante et la forme d'Euler équivariante (voir [27] ou [6], chapitre 7). En effet, ces formes dépendent de choix d'orientations. Nous rappelons leur construction.

Soit $p : \mathcal{V} \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel G -équivariant. Supposons \mathcal{V} muni d'une structure euclidienne G -invariante et d'une connection euclidienne ∇ G -invariante. On dira alors que \mathcal{V} est un *fibré euclidien G -équivariant connecté*.

Notons $\mathcal{A}_{rap}(\mathcal{V})$ l'espace des formes différentielles sur \mathcal{V} rapidement décroissantes le long des fibres. Notons $\mathcal{A}_{rap,G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}} = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}_{rap}(\mathcal{V})_{\mathcal{V}})^G$. Le fibré tangent vertical $T(p)$ pour la fibration p est isomorphe à $p^*\mathcal{V}$. On le note encore \mathcal{V} . Rappelons que le choix d'une connection euclidienne G -invariante détermine une forme de Thom $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{A}_{rap,G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}}$. C'est une forme de degré total n (où n est égal au rang du fibré $\mathcal{V} \rightarrow B$ au dessus d'une composante connexe de B), fermée et telle que

$$p_*(u(\mathcal{V})) = 1.$$

Décrivons $u(\mathcal{V})$. Choisissons une orientation locale o de \mathcal{V} et un repère local orthonormal orienté de \mathcal{V} défini sur un ouvert U de B . On obtient une trivialisatoin de $\mathcal{V}|U$ en $U \times V$, où $V = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $\omega \in \mathcal{A}^1(U) \otimes \mathfrak{so}(V)$ la 1-forme de connection déterminée par ∇ (c.a.d. $\nabla|U$ est l'opérateur différentiel $d + \omega$). Soit $X \in \mathfrak{g}$. On note $F(X)$ la courbure équivariante de (\mathcal{V}, ∇) . Soit e_i une base orthonormée orientée de V . Alors $(F(X)e_i, e_j) \in \mathcal{A}(U)$. Soit $x = \sum x^i e_i \in V$. On pose $Dx^i = dx^i + (e_i, \omega x) \in \mathcal{A}^1(U \times V)$. Notons

$$f(X) = -\|x\|^2 + \sum_i Dx^i e_i + \frac{1}{2} \sum_{i < j} (F(X)e_i, e_j) e_i \wedge e_j.$$

C'est un élément pair de l'algèbre $\mathcal{A}(U \times V) \otimes \Lambda V$. On peut donc calculer $\exp f(X) \in \mathcal{A}(U \times V) \otimes \Lambda V$. On étend $T_o : \Lambda V \rightarrow \mathbb{R}$ en une application encore notée

$$T_o : \mathcal{A}(U \times V) \otimes \Lambda V \rightarrow \mathcal{A}(U \times V)$$

par $T_o(\alpha \otimes \xi) = \alpha T_o(\xi)$. La forme de Thom est alors donnée en coordonnées locales par

$$(79) \quad u(\mathcal{V})(X) = (-1)^{n(n-1)/2} \pi^{-n/2} T_o(\exp f(X)).$$

C'est une forme G -équivariante fermée. La classe de $u(\mathcal{V})$ est indépendante de la structure euclidienne et de la connection euclidienne choisie.

Remarque 102 *En remplaçant dans la formule 79 la fonction \exp par une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ bien choisie (voir [19], prop. 13), ou bien en appliquant un difféomorphisme convenable du fibré en disque unité de \mathcal{V} sur \mathcal{V} , on trouve une forme G -équivariante fermée $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{A}_{vcpt,G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}}$, à support compact le long des fibres et telle que $p_*(u(\mathcal{V})) = 1$.*

On note encore $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_{\text{vect},G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}}$ la classe de $u(\mathcal{V})$.

On note $Eul(\mathcal{V}) \in \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, B)_{\mathcal{V}}$ la restriction de la forme de Thom $u(\mathcal{V})$ à la section nulle. C'est la forme d'Euler équivariante du fibré G -équivariant connecté $\mathcal{V} \rightarrow B$. On note $rg(\mathcal{V})$ la fonction localement constante sur B égale au rang de \mathcal{V} . La forme d'Euler est nulle si le rang de \mathcal{V} est impair. Rappelons la définition (42) de la fonction $SO(V)$ -invariante $\det_o^{1/2}(\cdot)$ sur $\mathfrak{so}(V)$. On pourra comparer le lemme suivant et l'exemple 100.

Lemme 103 *Soit $\mathcal{V} \rightarrow B$ un fibré euclidien G -équivariant muni d'une connexion G -invariante euclidienne ∇ . Soit $F(X)$ la courbure équivariante de ∇ . Soit o une orientation locale de \mathcal{V} , alors pour $X \in \mathfrak{g}$*

$$Eul(\mathcal{V})_o(X) = (-2\pi)^{-rg(\mathcal{V})/2} \det_o^{1/2} F(X).$$

On note encore $Eul(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, B)_{\mathcal{V}}$ la classe de cohomologie de $Eul(\mathcal{V})$. Elle est indépendante de la structure euclidienne et de la connexion euclidienne choisie.

Enonçons l'isomorphisme de Thom. La multiplication à gauche par la classe de Thom équivariante $u = u(\mathcal{V})$ induit une application $m(\alpha) = u \wedge p^* \alpha$ de $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, B)_{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{H}_{\text{vect},G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}$. L'isomorphisme de Thom en cohomologie équivariante [1] [27] [30] s'énonce:

Proposition 104 *Soit G un groupe de Lie opérant sur une variété B . Soit $\mathcal{V} \rightarrow B$ un fibré G -équivariant euclidien connecté. Soit $u \in \mathcal{H}_{\text{vect},G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}}$ la classe de Thom équivariante. Soit \mathcal{E} un fibré réel G -équivariant sur B . Alors les applications*

$$m : \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, B)_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{vect},G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}$$

et

$$p_* : \mathcal{H}_{\text{vect},G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, B)_{\mathcal{E}}$$

sont inverses l'une de l'autre.

L'isomorphisme de Thom est aussi valide pour les divers groupes de cohomologie introduits: par exemple, l'application m induit des isomorphismes:

$$\mathcal{H}_G^{\infty}(U, B)_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{vect},G}^{\infty}(U, \mathcal{V})_{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}},$$

$$\mathcal{H}_{[G]}^{\mathcal{E}}(B) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{vect},[G]}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(\mathcal{V}).$$

Soit G un groupe de Lie compact opérant dans une variété compacte M . Soit $S \in \mathfrak{g}$ un élément invariant par G . En particulier, S est dans le centre de \mathfrak{g} . Soit $M(S)$ la variété des zéros de S_M . C'est une sous-variété fermée G -stable de M . Soit \mathcal{N} le fibré normal à $M(S)$ dans M . Notons $p : \mathcal{N} \rightarrow M(S)$ la projection. Le fibré \mathcal{N} est un fibré réel G -équivariant sur $M(S)$. L'orientation $\zeta(S)$ de \mathcal{N} (définition 94) est G -invariante Elle définit une classe de Thom u_S et un isomorphisme $m_S : \mathcal{H}_G^{\infty}(\mathfrak{g}, M(S)) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{cpt},G}^{\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{N})$ défini par $m_S(\alpha) =$

$u_S \wedge p^* \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M(S))$. Si U est un ouvert G -invariant dans \mathfrak{g} , l'application m_S est aussi un isomorphisme $m_S : \mathcal{H}_G^\infty(U, M(S)) \rightarrow \mathcal{H}_{cpt, G}^\infty(U, \mathcal{N})$. Choissant un voisinage tubulaire $p : N \rightarrow M(S)$ de $M(S)$ dans M et une classe u_S G -équivariante fermée à support compact dans N comme ci-dessus (en particulier elle vérifie $p_* u_S = 1$), il existe donc une application encore notée $m_S : \mathcal{H}_G^\infty(U, M(S)) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ définie par $m_S(\alpha) = u_S \wedge p^* \alpha$.

Proposition 105 *Soit G un groupe de Lie compact opérant sur une variété compacte M . Soit $S \in \mathfrak{g}$ un élément G -fixe de \mathfrak{g} . Soient $M(S)$ la variété des zéros de S_M . Il existe un voisinage G -invariant U de S dans \mathfrak{g} tel que m_S induise un isomorphisme*

$$m_S : \mathcal{H}_G^\infty(U, M(S)) \rightarrow \mathcal{H}_G^\infty(U, M).$$

Démonstration. On peut démontrer ceci comme dans [1] ou dans [19]. Reprenons ici la démonstration de [19]. Soit a un nombre réel strictement positif. Soit ϕ une fonction différentiable sur \mathbb{R} , telle que $\phi = 0$ si $|t| > a$ et $\phi(0) = 1$. On a donc $1 - \phi(t) = t\psi(t)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit (\cdot, \cdot) une métrique G -invariante sur M . Soit $\theta(\xi) = (S_M, \xi)$ la 1-forme sur M définie comme le gradient du champ de vecteurs S_M . C'est une 1-forme G -invariante. Si a est assez petit, on peut trouver un voisinage U de S dans \mathfrak{g} et un voisinage tubulaire N de $M(S)$ dans M tel que $|(S_M, Y_M)_m| > a$, si $Y \in U$ et $m \in M - N$. Considérons $\phi(d_{\mathfrak{g}}\theta)$ que l'on calcule par série de Taylor. La composante de degré extérieur 0 de $(d_{\mathfrak{g}}\theta)(Y)$ est égale à la fonction $-(S_M, Y_M)(m)$. Si $Y \in U$, la forme $\phi(d_{\mathfrak{g}}\theta)(Y)$ est donc à support compact dans N . On a

$$1 - \phi(d_{\mathfrak{g}}\theta) = d_{\mathfrak{g}}\theta \wedge \psi(d_{\mathfrak{g}}\theta) = d_{\mathfrak{g}}(\theta\psi(d_{\mathfrak{g}}\theta)).$$

Si α est une forme équivariante fermée sur M , on voit donc que

$$\alpha - \phi(d_{\mathfrak{g}}\theta)\alpha = d_{\mathfrak{g}}(\theta\psi(d_{\mathfrak{g}}\theta))$$

est un bord. De plus $\phi(d_{\mathfrak{g}}\theta)$ est à support compact dans N . D'après l'isomorphisme de Thom, on voit que m_S est surjective sur $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$. On démontre de même l'injectivité. ■

Énonçons maintenant la formule de localisation de Bismut [9] le long des fibres. Soit G un groupe de Lie compact. Soit $p : M \rightarrow B$ une fibration de G -variétés compactes. Soit \mathcal{V} le fibré tangent vertical. Soient $S \in \mathfrak{g}$, $M(S)$ la variété des zéros de S_M et $B(S)$ la variété des zéros de S_B . L'application p se restreint en une fibration $p^S : M(S) \rightarrow B(S)$ et le fibré tangent vertical pour la fibration p^S est $\mathcal{V}(S)$. On note \mathcal{N} le fibré normal à la sous-variété $M(S)$ dans $p^{-1}(B(S))$. C'est un fibré $G(S)$ -équivariant sur $M(S)$. Soit $Eul(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S), M(S))_{\mathcal{N}}$ la classe d'Euler équivariante du fibré $\mathcal{N} \rightarrow M(S)$. On note $Eul_S(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S), M(S))_{\mathcal{N}}$ la classe d'Euler tradatée $Eul_S(\mathcal{N})(Y) = Eul(\mathcal{N})(S + Y)$ pour $Y \in \mathfrak{g}(S)$. Il existe un voisinage $G(S)$ -invariant U de 0 dans $\mathfrak{g}(S)$ tel que $Eul_S(\mathcal{N})$ définisse par restriction à U un élément inversible de $\mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, M(S))_{\mathcal{N}}$.

Si $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{V}$ est une classe de cohomologie équivariante tordue pour le fibré vertical pour p , nous avons défini les éléments $\int_{M/B} \alpha = p_* \alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, B)$ (formule (75)) et $T_S \alpha \in \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_\mathcal{V}$ (formules (76)). Puisque p^S est une fibration, on a :

$$\mathcal{V}|M(S) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{V}(S).$$

La forme $Eul_S(\mathcal{N})^{-1} T_S \alpha$ est tordue pour $\mathcal{V}(S)$ et on peut l'intégrer sur la fibre de p^S ce qui donne un élément de $\mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, B(S))$.

Proposition 106 [9] *Soit G un groupe de Lie compact. Soit $p : M \rightarrow B$ une fibration G -équivariante de variétés compactes. Soit $S \in \mathfrak{g}$. Soit $M(S)$ (resp. $B(S)$) la variété des zéros de S_M (resp S_B). Soit \mathcal{N} le fibré normal à $M(S)$ dans $p^{-1}(B(S))$. Soit $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{V}$ une classe de cohomologie G -équivariante sur M , tordue pour le fibré vertical \mathcal{V} . Il existe un voisinage $G(S)$ -invariant U de 0 dans $\mathfrak{g}(S)$ tel que sur U la classe $Eul_S(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, M(S))_\mathcal{V}$ soit inversible et que l'égalité suivante soit vérifiée dans $\mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, B(S))$:*

$$T_S \left(\int_{M/B} \alpha \right) = \int_{M(S)/B(S)} Eul_S(\mathcal{N})^{-1} T_S \alpha.$$

Démonstration. Nous donnons une démonstration cohomologique de cette égalité en procédant comme dans [1] ou [19], prop. 25, qui correspond au cas où B est un point. En restreignant d'abord α à $p^{-1}(B(S))$ on peut supposer que S s'annule sur B , que $G = G(S)$ et que $M = p^{-1}(B(S))$. L'élément $S \in \mathfrak{g}$ appartient au centre de \mathfrak{g} et le champ S_M est vertical pour la fibration $M \rightarrow B$. Soit $q : N \rightarrow M(S)$ un voisinage tubulaire de $M(S)$ dans M . Comme $\mathcal{V}|M(S) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{V}(S)$, on peut supposer que $p|N = p^S q$. Soit $u \in \mathcal{H}_{cpt, G}^\infty(\mathfrak{g}, N)_\mathcal{N}$ la classe de Thom de N . On a donc $q_* u = 1$ et $u|M(S) = Eul(\mathcal{N})$. D'après le lemme précédent, on peut supposer que sur un voisinage W de S dans \mathfrak{g} on a $\alpha = u \wedge q^* \beta$ avec $\beta \in \mathcal{H}_G^\infty(W, M(S))_{\mathcal{V}(S)}$. On a donc $p_* \alpha = (p^S)_* q_* \alpha = (p^S)_* \beta$. L'égalité $\alpha = u \wedge q^* \beta$ dans $\mathcal{H}_{cpt, G}^\infty(W, N)$ entraîne par restriction à $M(S)$ l'égalité $Eul(\mathcal{N}) \beta = \alpha|M(S)$. Comme $Eul(\mathcal{N})$ est inversible dans $\mathcal{H}_G^\infty(W, M(S))_\mathcal{N}$ on obtient $\beta = Eul(\mathcal{N})^{-1} \alpha|M(S)$ sur le voisinage W de S dans \mathfrak{g} . En translatant W par S , on obtient l'égalité voulue sur le voisinage $U = W - S$. ■

5.2 Bottes et bouquets de formes équivariantes tordues.

Soit G un groupe presque algébrique opérant régulièrement sur une variété M . Soit $\mathcal{E} \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel sur lequel G opère régulièrement.

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. Nous définissons un opérateur de translation $T_S^\mathcal{E}$ tordu par \mathcal{E} . Considérons l'espace $M(S)_{\mathcal{E}(S)}$. Un élément de $M(S)_{\mathcal{E}(S)}$ est un couple (m, o) où $m \in M(S)$ et où o est une orientation de $\mathcal{E}(S)$. Considérons la décomposition $\mathcal{E}|M(S) = \mathcal{E}(S) \oplus \mathcal{Q}(S)$ et l'orientation $\zeta(-S)$ du fibré $\mathcal{Q}(S)$ (définition 94).

De manière analogue à (37) on note

$$T_S^\mathcal{E} : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_{\mathcal{E}(S)}$$

l'opérateur défini par

$$(80) \quad (T_S^\mathcal{E} \alpha)_o(Y) = \alpha_{o \wedge \zeta(-S)}(S + Y) | M(S)$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(S)$ et o une orientation locale de $\mathcal{E}(S)$. On appelle $T_S^\mathcal{E}$ l'opérateur de translation tordu par \mathcal{E} . On déduit de $T_S^\mathcal{E}$ une application en cohomologie

$$T_S^\mathcal{E} : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_{\mathcal{E}(S)}.$$

Soit $a > 0$. Pour tout $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on définit de même des applications

$$T_S^\mathcal{E} : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}_{[G(S)]}^{\mathcal{E}(S)}(M(S))$$

$$T_S^\mathcal{E} : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}_{[G(S)]}^{\mathcal{E}(S)}(M(S)).$$

Soient $s \in G_{ell}$ et $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Décomposons le fibré $\mathcal{E}(s)$ au dessus de $M(s)(S)$ en $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s, S)$ où

$$\mathcal{E}(s)(S) = \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S), \quad \mathcal{Q}(s, S) = S(\mathcal{E}(s)).$$

On a donc

$$\mathcal{E} | M(s)(S) = \mathcal{E}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s, S) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

En utilisant l'orientation $\zeta(\mathcal{Q}(s, S), -S)$ du fibré $\mathcal{Q}(s, S)$ (définition 94), on définit comme ci-dessus l'opérateur

$$T_{s,S}^\mathcal{E} : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))_{\mathcal{E}(s)} \rightarrow \mathcal{A}_{G(s) \cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S))_{\mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)}$$

donné par

$$(81) \quad (T_{s,S}^\mathcal{E} \alpha)_o(Y) = \alpha_{o \wedge \zeta(\mathcal{Q}(s,S), -S)}(S + Y)$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S)$ et o orientation locale de $\mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)$. De même, si $a > 0$, on obtient des applications

$$T_{s,S}^\mathcal{E} : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \rightarrow \mathcal{A}_{[G(s) \cap G(S)]}^{\mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)}(M(s) \cap M(S)),$$

$$T_{s,S}^\mathcal{E} : \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \rightarrow \mathcal{H}_{[G(s) \cap G(S)]}^{\mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)}(M(s) \cap M(S)).$$

Si $a > 0$ est assez petit et si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on a $G(se^S) = G(s) \cap G(S)$, $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$ et $\mathcal{E}(se^S) = \mathcal{E}(s)(S)$, et on a des applications

$$T_{s,S}^\mathcal{E} : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \rightarrow \mathcal{A}_{[G(se^S)]}^{\mathcal{E}(se^S)}(M(se^S)),$$

$$T_{s,S}^\mathcal{E} : \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \rightarrow \mathcal{H}_{[G(se^S)]}^{\mathcal{E}(se^S)}(M(se^S)).$$

Définition 107 Nous dirons qu'une famille $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, α_s est un élément de $\mathcal{A}_{[G(s)]}^{\mathcal{E}(s)}(M(s))$, est une botte de formes équivariantes tordues si elle vérifie les conditions suivantes.

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in G_{ell}$.
2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a} \in \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)}$ de α_s tels que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S), \quad \mathcal{E}(se^S) = \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)$$

et

$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} \alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{A}_{[G(se^S)]}^{\mathcal{E}(se^S)}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{B}_G^{\mathcal{E}}(M)$ l'espace des bottes de formes équivariantes tordues.

La condition de recollement est motivée par la formule de localisation (proposition 106) et le signe $-$ qui apparaît dans la formule (81) provient du signe $-$ dans la formule donnée pour la classe d'Euler (lemme 103).

On introduit une définition similaire au niveau des classes de cohomologie équivariante tordue:

Définition 108 Une botte de classes de cohomologie équivariante tordue est une famille $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, α_s est un élément de $\mathcal{H}_{[G(s)]}^{\mathcal{E}(s)}(M(s))$, vérifiant les conditions suivantes.

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in G_{ell}$.
2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a} \in \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)}$ de α_s tels que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S), \quad \mathcal{E}(se^S) = \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)$$

et

$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} \alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{H}_{[G(se^S)]}^{\mathcal{E}(se^S)}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$ l'espace des bottes de classes de cohomologie équivariante tordue.

De manière analogue à la définition 60 nous pourrions considérer des bouquets $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ de formes équivariantes tordues fermées. Cependant les conditions de recollement sont plus lourdes à énoncer car elles font intervenir les orientations $\xi(e^S)$ associées à un élément elliptique S , et nous nous en tenons là.

On définit de manière évidente l'espace $\mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{E}}(M)$ des bottes équivariantes à support compact sur M et, pour une fibration $p : M \rightarrow B$, l'espace $\mathcal{K}_{vcpt,G}^{\mathcal{E}}(M)$.

La structure de $\mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ -module sur $\mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)}$ induit une structure de $\mathcal{K}_G(M)$ -module sur $\mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$. Plus généralement, si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux fibrés analogues à \mathcal{E} , et si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, il y a une application bilinéaire naturelle de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{E}_1}(M) \times \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}_2}(M)$ dans $\mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$.

Si $\phi : H \rightarrow G$ est un morphisme de groupes algébriques, il est clair qu'on obtient une application naturelle

$$\phi^* : \mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{K}_H^\mathcal{E}(M).$$

Si $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ est un morphisme de G -variétés, l'image réciproque des formes différentielles induit une application

$$\phi^* : \mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M_2) \rightarrow \mathcal{K}_G^{\phi^*\mathcal{E}}(M_1).$$

La proposition suivante résulte immédiatement des définitions.

Proposition 109 *On suppose donnée, pour chaque $s \in G_{ell}$, une orientation $G(s)$ -équivariante $o(s)$ du fibré $\mathcal{E}(s) \rightarrow M(s)$ telle que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ assez petit, on ait*

$$(82) \quad o(s) = o(se^S) \wedge \zeta(\mathcal{Q}(s, S), -S).$$

Alors les espaces $\mathcal{B}_G(M)$ et $\mathcal{B}_G^\mathcal{E}(M)$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ est un élément de $\mathcal{B}_G^\mathcal{E}(M)$. Pour $s \in G_{ell}$ posons $\alpha'_s = \alpha_{s, o(s)}$. Il est clair que $(\alpha'_s)_{s \in G_{ell}}$ est un élément de $\mathcal{B}_G(M)$. ■

La même proposition est évidemment valable pour les espaces \mathcal{K}_G , \mathcal{Z}_G , $\mathcal{K}_{cpt, G}$, etc...

Exemple 110 *Soit $\mathcal{E}_1 \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel sur M . Supposons que G opère régulièrement sur \mathcal{E}_1 . Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_1$. Pour $s \in G_{ell}$, on définit une orientation de $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}_1(s) \oplus \mathcal{E}_1(s)$ par $o(s) = o'(s) \wedge o'(s)$, où $o'(s)$ est une orientation locale de $\mathcal{E}_1(s)$. La condition (82) est vérifiée et $\mathcal{B}_G^\mathcal{E}(M)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{B}_G(M)$.*

On en déduit une application bilinéaire de $\mathcal{B}_G^\mathcal{E}(M) \times \mathcal{B}_G^\mathcal{E}(M)$ dans $\mathcal{B}_G(M)$, et une structure d'algèbre sur $\mathcal{B}_G(M) \oplus \mathcal{B}_G^\mathcal{E}(M)$ et sur $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$. Evidemment c'est la structure induite par la structure d'algèbre que l'on a pour chaque $s \in G_{ell}$ sur $\mathcal{A}(M(s)_{\mathcal{E}(s)}) \simeq \mathcal{A}(M(s)) \oplus \mathcal{A}(M(s))_{\mathcal{E}(s)}$.

En général, (comme $\mathcal{K}_G(M)$ -module) l'espace $\mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$ peut ne pas être isomorphe à $\mathcal{K}_G(M)$. Il s'agit de savoir si $\mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{K}_G(M)$ et dans ce cas d'en décrire une base. Par exemple, supposons donnée une classe de bottes tordues $f^\mathcal{E} \in \mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$ qui soit inversible dans $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$. Alors $f^\mathcal{E}$ est une base de $\mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$ sur $\mathcal{K}_G(M)$.

Les deux exemples qui suivent sont classiques en K -théorie.

Considérons un fibré métalinéaire orienté $\mathcal{E} \rightarrow M$ comme dans la section 4.5, et soit $o_{\mathcal{E}}$ son orientation. Nous employons les notations de cette section. Soit $s \in G_{ell}$ et soit o une orientation locale du fibré $\mathcal{E}(s) \rightarrow M(s)$. Rappelons l'orientation $\xi(s^{-1})$ du fibré $\mathcal{Q}(s)$ (définition 96). Donc $o \wedge \xi(s^{-1})$ est une orientation locale de \mathcal{E} au-dessus de $M(s)$. On la compare avec l'orientation $o_{\mathcal{E}}$. On note $f_s^{\mathcal{E}}$ la fonction à valeurs dans $\{\pm 1\}$ sur $M(s)_{\mathcal{E}(s)}$ déterminée par $o \wedge \xi(s^{-1}) = f_{s,o}^{\mathcal{E}} o_{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire, si $m \in M(s)$, si $p \in P$ est un point au dessus de m , et si $r(s,p)$ est l'élément correspondant de $ML^+(E)_{ell}$,

$$(83) \quad f_{s,o}^{\mathcal{E}}(m) = F(r(s,p)^{-1}, o \setminus o_{\mathcal{E}}(m))$$

où F est la fonction définie à la fin de la section 4.3. Il résulte des propositions 83 et 88 que la famille $f^{\mathcal{E}} = (f_s^{\mathcal{E}})_{s \in G_{ell}}$ appartient à $\mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$. Comme on a $f^{\mathcal{E}} f^{\mathcal{E}} = 1$, $f^{\mathcal{E}}$ est inversible. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 111 *Soit \mathcal{E} un fibré orienté métalinéaire G -équivariant. Alors $\mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$ est un $\mathcal{K}_G(M)$ -module libre de base $f^{\mathcal{E}}$.*

Remarquons que l'algèbre $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$ est isomorphe à $\mathcal{K}_G(M) \otimes \mathbb{C}[t]/(t^2 - 1)$.

On considère maintenant un fibré G -équivariant complexe $\mathcal{V} \rightarrow M$ de dimension N . On suppose que \mathcal{V} admet une connection G -invariante ∇ . Pour $X \in \mathfrak{g}$, soit $F(X) \in \mathcal{A}_G(M, \text{End}(\mathcal{V}))$ sa courbure équivariante. Notons V un espace vectoriel complexe de dimension N . On considère \mathcal{V} comme un fibré $P \times_{GL(V)} V$, où P est un fibré principal G -équivariant de groupe $GL(V)$.

On note E l'espace vectoriel réel sous-jacent à V . On peut donc considérer le revêtement $GL(V)_E$ de $GL(V)$ associé à l'injection $GL(V) \rightarrow GL(E)$. On sait que, si $\dim(V) > 0$, le groupe $GL(V)_E$ est connexe, et qu'il existe un unique caractère $\det_V^{1/2}$ de $GL(V)_E$ dans \mathbb{C}^{\times} de carré \det_V . De plus $\det_V^{1/2}(\epsilon) = -1$, ce que l'on choisit comme définition de $\det_V^{1/2}$ quand $V = \{0\}$.

On choisit une racine i de -1 . Si $E = \mathbb{C}$, on munit E de l'orientation donnée par la base $1, i$. On identifie E à \mathbb{C}^n et on munit E de l'orientation produit, que l'on notera o_E .

On considère le fibré réel \mathcal{E} sous-jacent à \mathcal{V} . Il a donc une orientation canonique $o_{\mathcal{E}}$. Soit $s \in G_{ell}$. Soit $m \in M(s)$. Soit $p \in P$ un point au dessus de m , et soit $r(s,p) \in GL(V)$ la transformation verticale correspondante de sorte que $sp = pr(s,p)$. Soit $\hat{r}(s,p)$ un représentant de $r(s,p)$ dans $GL(V)_E$. On peut considérer la fonction localement constante sur $M(s)_{\mathcal{E}(s)}$ telle que

$$a_s^{\mathcal{V}}(m, o) = \det_V^{1/2}(\hat{r}(s,p)) F(\hat{r}(s,p)^{-1}, o \setminus o_{\mathcal{E}}).$$

Cette définition ne dépend pas du choix du représentant $\hat{r}(s,p)$. La famille $a^{\mathcal{V}} = (a_s^{\mathcal{V}})$ est une famille de formes tordues fermées vérifiant la relation d'invariance des bottes, mais pas la relation de recollement.

Pour corriger ce défaut, on considère la forme équivariante $\nu \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ telle que, pour $X \in \mathfrak{g}$, on ait

$$\nu(X) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} F(X)\right).$$

C'est la racine carrée normalisée du caractère de Chern équivariant du fibré en droite complexe $\Lambda^N(\mathcal{V})$. Pour $s \in G_{\text{ell}}$ on note ν_s la restriction de ν en un élément de $\mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$, et on pose

$$f_s^\nu = a_s^\nu \nu_s.$$

C'est un élément fermé de $\mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$. On vérifie que la famille $f^\nu = (f_s^\nu)_{s \in G_{\text{ell}}}$ est une botte tordue inversible. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 112 *Soit \mathcal{V} un fibré complexe G -équivariant dans lequel G opère régulièrement et muni d'une connexion invariante. Soit \mathcal{E} le fibré réel sous-jacent. Alors $\mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$ est un $\mathcal{K}_G(M)$ -module libre de base f^ν .*

Remarquons que $f^\nu f^\nu$ est le caractère de Chern $\operatorname{ch}(\Lambda^N \mathcal{V}) \in \mathcal{K}_G(M)$ du fibré $\Lambda^N \mathcal{V}$. Si $\operatorname{ch}(\Lambda^N \mathcal{V})$ admet une racine carrée dans $\mathcal{K}_G(M)$, on voit que l'algèbre $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^\mathcal{E}(M)$ est isomorphe à $\mathcal{K}_G(M) \otimes \mathbb{C}[t]/(t^2 - 1)$ comme dans le cas des fibrés métalinéaires orienté, mais ce n'est pas toujours le cas.

La proposition 112 se généralise aux fibrés réels munis d'une $\operatorname{Spin}_\mathbb{C}$ -structure.

5.3 Bottes tordues pour le point.

Dans cette section, nous donnons une description de l'espace $\mathcal{K}_G^\mathcal{V}(M)$ lorsque M est un point \bullet . La donnée d'un fibré G -équivariant $\mathcal{V} \rightarrow M$ est la donnée d'une représentation $\lambda : G \rightarrow \operatorname{GL}(V)$ de G dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. Nous introduisons un revêtement d'ordre 2 de G .

Définition 113 *Soit $\lambda : G \rightarrow \operatorname{GL}(V)$ une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie. On définit le revêtement $G_V \rightarrow G$ où*

$$G_V = \{(g, h); g \in G, h \in \operatorname{ML}(V), \lambda(g) = j(h)\}$$

image réciproque du revêtement $j : \operatorname{ML}(V) \rightarrow \operatorname{GL}(V)$ par l'application $\lambda : G \rightarrow \operatorname{GL}(V)$.

On note encore $j : G_V \rightarrow G$ l'application de revêtement $j(g, h) = g$ et $\lambda : G_V \rightarrow \operatorname{ML}(V)$ l'application $\lambda(g, h) = h$. On note encore ϵ l'élément $(1, \epsilon)$ de G_V . On a donc le diagramme

$$(84) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \{1, \epsilon\} & \longrightarrow & G_V & \xrightarrow{j} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda & & \\ 1 & \longrightarrow & \{1, \epsilon\} & \longrightarrow & \operatorname{ML}(V) & \xrightarrow{j} & \operatorname{GL}(V) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

On note G_V^+ l'image réciproque de $ML^+(V)$. Le sous-groupe G_V^+ est formé des $a \in G_V$ tels que $\det(j(a)) > 0$. On définit de même G_V^- . On définit pour $a \in G_V$ l'automorphisme intérieur tordu $\iota(a)$ par la formule suivante. Pour $b \in G_V$, on a

$$(85) \quad \iota(b)(a) = \begin{cases} \epsilon aba^{-1} & \text{pour } a \in G_V^- \text{ et } b \in G_V^-, \\ aba^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 114 On dit qu'une fonction ϕ sur G_V est impaire si $\phi(\epsilon b) = -\phi(b)$ pour tout $b \in G_V$.

Le groupe G_V est un exemple de groupe gradué: on dit qu'un groupe H est gradué si l'on s'est donné un morphisme de groupe (noté p pour parité) dans le groupe $\{0, 1\}$. L'image réciproque de 0 est notée H^+ , celle de 1 est notée H^- .

Définition 115 Une fonction ϕ sur un groupe gradué H sera dite anti-invariante si l'on a

$$\phi(aba^{-1}) = (-1)^{p(a)(p(b)+1)} \phi(b) \quad \text{pour } a \in H \text{ et } b \in H.$$

Donc la restriction de ϕ à H^- est invariante, et la restriction à H^+ est semi-invariante de poids $(-1)^{p(\cdot)}$. Si $H = H^+$, une fonction anti-invariante est juste une fonction invariante. Donnons quelques exemples de fonctions anti-invariantes sur H .

Une représentation graduée de type I de dimension $p|q$ de H est par définition un homomorphisme λ de H dans le groupe des éléments inversibles homogènes de la super algèbre $M(p, q, \mathbb{C})$, préservant la parité. Remarquons que si H^- est non vide, on a $p = q$. La fonction sur H définie par

$$\phi(h) = \text{str}(\lambda(g)) = \text{tr}(\lambda(g) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix})$$

est anti-invariante, nulle sur H^- .

Une représentation graduée de type II de dimension p de H est par définition un homomorphisme λ de H dans le groupe des éléments inversibles homogènes de la super algèbre $Q(p, \mathbb{C})$, préservant la parité. La fonction sur H définie par

$$\phi(h) = \text{ostr}(\lambda(g)) = \text{tr}(\lambda(g) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix})$$

est anti-invariante, nulle sur H^+ .

Dans le cas du groupe G_V , une fonction impaire ϕ est anti-invariante si et seulement si elle vérifie la relation d'allure peut-être plus naturelle

$$(86) \quad \phi(\iota(a)b) = (-1)^{p(a)} \phi(b).$$

Définition 116 On note $C^\infty(G_V)^{G,V}$ l'espace des fonctions C^∞ sur G_V qui sont impaires et anti-invariantes. On note $C^\infty(G_V^+)^{G,V}$ le sous-espace des fonctions à support dans G_V^+ et on définit de même $C^\infty(G_V^-)^{G,V}$.

L'espace $C^\infty(G_V^\pm)^{G,V}$ est un module sur l'algèbre $C^\infty(G^\pm)^G$ où G^\pm est l'ouvert des $g \in G$ tels que $\det \lambda(g) = \pm 1$.

Nous introduisons une définition voisine de la définition 99. Soit $or(V)$ l'ensemble des deux orientations de V .

Définition 117 On note $\kappa_G^\infty(V)$ l'espace des fonctions $\psi \in C^\infty(G_V \times or(V))$ qui vérifient les relations $\psi(\iota(a)(b), ao) = -\psi(-eb, o) = -\psi(b, -o) = \psi(b, o)$ pour tout $a \in G_V$, $b \in G_V$ et $o \in or(V)$. Si $\dim(V)$ est pair, on note $\kappa_{G,+}^\infty(V)$ le sous-espace des fonctions $\psi \in \kappa_G^\infty(V)$ à support dans $G_V^+ \times or(V)$. Si $\dim(V)$ est impair, on note $\kappa_{G,+}^\infty(V)$ le sous-espace des fonctions $\psi \in \kappa_G^\infty(V)$ à support dans $G_V^- \times or(V)$. On définit de même $\kappa_{G,-}^\infty(V)$.

Par restriction à $G_V \times \{o\}$, le choix d'une orientation o de V détermine un isomorphisme de $\kappa_{G,\pm}^\infty(V)$ sur $C^\infty(G_V^\pm)^{G,V}$ si $\dim(V)$ est pair, et sur $C^\infty(G_V^\mp)^{G,V}$ si $\dim(V)$ est impair.

Exemple 118 Munissons V d'une forme quadratique définie positive. On considère le cas où λ est la représentation du groupe $G = O(V)$ dans V . Donc G_V est le groupe $\text{Pin}(V)$. L'espace $\kappa_{G,-}^\infty(V)$ est nul. La fonction $\det_{V,o}^{1/2}(1-a)$ ($a \in \text{Pin}(V)$, $o \in or(V)$) définie en 53 est un élément de $\kappa_{G,+}^\infty(V)$.

On peut montrer que si $\dim V$ est pair, $\kappa_{G,+}^\infty(V) \simeq C^\infty(G_V^+)^{G,V}$ est libre de rang 1 sur $C^\infty(G^+)^G$ et la fonction $\det_{V,o}^{1/2}(1-a)$ est une base.

De même, si $\dim V$ est impair, $\kappa_{G,+}^\infty(V) \simeq C^\infty(G_V^-)^{G,V}$ est libre de rang 1 sur $C^\infty(G^-)^G$ avec pour base la fonction $\det_{V,o}^{1/2}(1-a)$.

Exemple 119 Supposons que W soit un espace vectoriel complexe muni d'une représentation de G . Soit V l'espace réel sous-jacent. Sur le groupe $\text{GL}(W)_V$ on dispose de la fonction impaire invariante $\det_W^{1/2}$. On note encore $\det_W^{1/2}$ la fonction impaire (anti)-invariante que l'on en déduit sur $G_V = G_V^+$. On voit que $\det_W^{1/2}$ est une base de $C^\infty(G_V)^{G,V}$ sur $C^\infty(G_V)^G$.

On pourra comparer cet exemple avec la proposition 112.

Exemple 120 Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit λ un homomorphisme de G dans $\text{ML}^+(V)$. On considère la représentation de G dans V obtenue en composant avec la projection $\text{ML}^+(V) \rightarrow \text{GL}(V)$. On a $G_V = G_V^+$. La formule $s(g) = (g, \lambda(g))$ définit un homomorphisme de G dans G_V . La fonction impaire f sur G_V telle $f(s(g)) = 1$ pour tout $g \in G$ est une base de $C^\infty(G_V)^{G,V}$ sur $C^\infty(G_V)^G$.

On pourra comparer cet exemple avec la proposition 111.

Un élément $\hat{g} \in G_V$ est elliptique si et seulement si $j(\hat{g}) \in G$ est elliptique, ou encore si et seulement si $\lambda(\hat{g}) \in \text{ML}(V)$ est elliptique. On a $\mathfrak{q}(\hat{g}) = \mathfrak{q}(\lambda(\hat{g})) =$

$\mathfrak{q}(j(\hat{g}))$. Dans ce cas on posera $\xi(\hat{g}) = \xi(\lambda(\hat{g}))$, où $\xi(\lambda(\hat{g}))$ est l'orientation de $\mathfrak{q}(\hat{g})$ de la définition 93. On voit que si g appartient à G_{ell} , un choix d'un élément \hat{g} de G_V au dessus de g est équivalent à un choix d'une orientation de $\mathfrak{q}(g)$.

Venons en à la détermination de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$. Par définition, un élément θ de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est une famille $(\theta_s)_{s \in G_{ell}}$ où chaque θ_s est un germe (pour la topologie elliptique) de fonctions sur $\mathfrak{g}(s) \times or(V(s))$. Soit o une orientation de $V(s)$. On note $\theta(s, o)$ la restriction de θ_s à $\mathfrak{g}(s) \times \{o\}$. Alors $\theta(s, o)$ est représenté par une fonction sur $G(s)$ -semi-invariante de poids $\text{sign det}_{V(s)}(\cdot)$ définie dans un voisinage elliptique de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$. Elle vérifie $\theta(s, -o) = -\theta(s, o)$. Cette famille est G -invariante et vérifie la condition de recollement : si $s' = s \exp S$ avec $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ suffisamment petit, alors, pour tout X dans un voisinage elliptique de $\mathfrak{g}(s')$, on a

$$\theta(s', o')(S + X) = \text{sign}(\det_{o/o'}^{1/2}(-S))\theta(s, o)(X).$$

Soit $\psi \in \kappa_G^\infty(V)$. Soit $s \in G_{ell}$. Soit $\hat{s} \in G_{V, ell}$ au dessus de s . Soit o une orientation de $V(s)$. Considérons l'orientation $\xi(\hat{s}^{-1})$ de $\mathfrak{q}(s)$. Donc $o \wedge \xi(\hat{s}^{-1})$ est une orientation de V . Notons θ_s le germe de fonction sur $\mathfrak{g}(s) \times or(V(s))$ représenté par la fonction $\theta(s, o)(X)$ définie pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ par la formule

$$(87) \quad \theta(s, o)(X) = \psi(\hat{s}e^X, o \wedge \xi(\hat{s}^{-1})).$$

Cette définition ne dépend pas du choix du représentant \hat{s} de s . Si o_V est une orientation de V , et si $\phi \in C^\infty(G_V)^{G, V}$ est la restriction de ψ à $G_V \times \{o_V\}$, on peut aussi écrire

$$(88) \quad \theta(s, o)(X) = F(\hat{s}^{-1}, o \setminus o_V)\phi(\hat{s}e^X)$$

où $F(\cdot, \cdot)$ est la fonction à valeurs dans ± 1 définie en 82.

Il résulte de la proposition 83 que la famille $(\theta_s)_{s \in G_{ell}}$ est un élément de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$.

Une variante évidente du lemme 43 montre que l'application $\psi \mapsto \theta$ de $\kappa_G^\infty(V)$ dans $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est un isomorphisme. On a démontré le théorème suivant.

Théorème 121 *Soit $\lambda : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de G dans un espace vectoriel V réel de dimension finie. La formule (87) définit un isomorphisme de $\kappa_G^\infty(V)$ sur $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$.*

Soit o_V une orientation de V . La formule (88) définit un isomorphisme de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ sur l'espace $C^\infty(G_V)^{G, V}$ des fonctions impaires anti-invariantes sur le revêtement à deux feuilletés G_V de G .

5.4 Bottes tordues des espaces homogènes.

Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G . Soit M une variété sur laquelle H opère régulièrement. Soit V un fibré vectoriel réel H -équivariant sur M sur lequel H opère régulièrement. On

peut donc considérer le fibré vectoriel réel G -équivariant $\mathcal{V} = G \times_H V$ sur $\mathcal{M} = G \times_H M$. Le groupe G opère régulièrement sur \mathcal{V} .

On a une application de restriction $E : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{K}_H^{\mathcal{V}}(M)$. On démontre de manière similaire au théorème 64 le théorème suivant.

Théorème 122 *Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique tel que l'espace homogène $G \rightarrow G/H$ soit réductif. Soit M une variété sur laquelle H opère régulièrement. Soit $V \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel sur M sur lequel H opère régulièrement. Alors G opère régulièrement sur $G \times_H M$ et sur $\mathcal{V} = G \times_H V$. L'application de restriction*

$$E : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(G \times_H M) \rightarrow \mathcal{K}_H^{\mathcal{V}}(M)$$

est un isomorphisme.

En considérant le cas où $M = \bullet$, et en combinant le théorème 122 et le théorème 121, on obtient:

Théorème 123 *Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G tel que G/H soit un espace homogène réductif. Considérons une représentation de H dans un espace vectoriel réel de dimension finie V . Soit \mathcal{V} le fibré $G \times_H V$. Alors $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(G/H)$ est isomorphe à l'espace des fonctions anti-invariantes et impaires sur le revêtement à deux feuillettes $H_{\mathcal{V}}$ de H défini en 113. L'isomorphisme dépend du choix d'une orientation de V .*

On obtient aussi, par une démonstration similaire à celle du théorème 75, le théorème suivant.

Théorème 124 *Soit G un groupe de Lie et soit $N \subset G$ un sous-groupe fermé distingué de G . Soit P une variété munie d'une action à droite de G telle que l'action du sous-groupe N soit principale. Supposons que le groupe G/N et la variété P/N soient compacts. Soit \mathcal{V} un fibré G/N -équivariant sur P/N . Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{K}_{G/N}^{\mathcal{V}}(P/N) \rightarrow \mathcal{K}_G^{q^*\mathcal{V}}(P)$$

est un isomorphisme.

6 Images directes.

6.1 Fibrés euclidiens.

Soit G un groupe algébrique opérant régulièrement sur une variété M . Dans tout ce paragraphe, on considère un fibré $\mathcal{V} \rightarrow M$ réel euclidien G -équivariant sur lequel G opère régulièrement. On suppose que \mathcal{V} possède une connexion euclidienne G -invariante ∇ . Rappelons que nous notons encore \mathcal{V} le fibré sur \mathcal{V} image réciproque de \mathcal{V} .

De même que la classe de Thom $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_{\text{vect}, G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}}$ est une classe de cohomologie équivariante tordue naturelle, nous allons construire un élément naturel $b(\mathcal{V}) \in \mathcal{K}_{\text{vect}, G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ que nous appellerons *classe de Bott*. La restriction $e(\mathcal{V}) \in \mathcal{K}_{\text{vect}, G}^{\mathcal{V}}(M)$ de $b(\mathcal{V})$ à M sera encore appelée la classe d'Euler du fibré \mathcal{V} .

Pour définir $b(\mathcal{V})$ nous avons besoin d'introduire d'autres classes caractéristiques.

Soit V un espace vectoriel euclidien muni d'une forme quadratique Q définie positive. Nous avons défini en 86 la fonction entière $J^{1/2}$ sur $\mathfrak{so}(Q, \mathbb{C})$.

Soit $s \in \text{O}(V)$ un automorphisme tel que $(1 - s)$ soit inversible. On dira que s est un *automorphisme elliptique non dégénéré*. On note D_s la restriction à $\mathfrak{so}(Q)(s)$ de la fonction $Y \mapsto \det_V(1 - se^Y)$. D'après la formule (53), D_s a une racine carrée entière $D_s^{1/2}$. Comme $\det(1 - s)$ est un nombre réel strictement positif (lemme 26), on la normalise par $D_s^{1/2}(0) > 0$. La fonction $D_s^{1/2}$ est une fonction $\text{O}(Q)(s)$ -invariante sur $\mathfrak{so}(Q)(s)$. Choisissons un élément \hat{s} de $\text{Pin}(V)$ au dessus de s . D'après la formule (56) on a, pour $X \in \mathfrak{so}(Q)(s)$

$$D_s^{1/2}(X) = \det_{V, \xi(\hat{s})}^{1/2}(1 - \hat{s} \exp X).$$

De manière analogue, soit $S \in \mathfrak{so}(V)$ un élément tel que S soit inversible. On note d_S la restriction de $X \mapsto (2\pi)^{-\dim(V)} \det_V(S + X)$ à $\mathfrak{so}(V)(S)$. On a $d_S(0) = \det_V(S) > 0$ et on note $d_S^{1/2}$ la racine carrée polynomiale telle que $d_S^{1/2}(0) > 0$.

Revenons au fibré $\mathcal{V} \rightarrow M$. Soit $X \mapsto F(X)$ la courbure équivariante de la connection ∇ . Dans un repère orthonormal, $F(X)$ est une matrice antisymétrique (à coefficients formes sur la base). On peut donc définir pour tout $X \in \mathfrak{g}$ la forme $J^{1/2}(F(X)) \in \mathcal{A}(M)$.

Définition 125 On définit la forme G -équivariante $J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla) \in \mathcal{A}_G^{\infty}(\mathfrak{g}, M)$ par

$$J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)(X) = J^{1/2}(F(X))$$

pour $X \in \mathfrak{g}$.

La forme équivariante $J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)$ est une racine carrée de la forme $J(\mathcal{V}, \nabla)$ précédemment introduite en 11, vérifiant $J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)_{[0]}(0) = 1$. Elle est fermée. Sa classe de cohomologie $J^{1/2}(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_G^{\infty}(\mathfrak{g}, M)$ est indépendante des choix de structure euclidienne et de connection faits.

Soit $s \in G_{\text{ell}}$ un élément central. Supposons que s agisse trivialement sur M et que $s^{\mathcal{V}}$ soit un automorphisme elliptique non dégénéré. La fonction $\det_V(1 - s)$ est strictement positive et localement constante sur M . Soit $X \in \mathfrak{g}$. Dans un repère orthonormal, la courbure équivariante $F(X)$ de la connection ∇ est une matrice antisymétrique commutant à $s^{\mathcal{V}}$. On peut donc définir la forme $D_s^{1/2}(F(X))$.

Définition 126 Soit $s \in G_{\text{ell}}$ un élément central. Supposons que s agisse trivialement sur M et que $s^{\mathcal{V}}$ soit un automorphisme elliptique non dégénéré. On définit la forme G -équivariante $D_s(\mathcal{V}, \nabla)$ sur M par

$$D_s(\mathcal{V}, \nabla)(X) = D_s(F(X))$$

pour $X \in \mathfrak{g}$ et sa racine carrée

$$D_s^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)(X) = D_s^{1/2}(F(X))$$

pour $X \in \mathfrak{g}$, normalisée par la condition $D_s^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)_{[0]}(0) > 0$.

La forme équivariante $D_s^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)$ est fermée. On note $D_s^{1/2}(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ sa classe de cohomologie. Elle est indépendante des choix de structure euclidienne et de connection faits.

Soit $S \in \mathfrak{g}_{\text{ell}}$ un élément G -invariant. Supposons que $S_M = 0$ et que l'action $S^{\mathcal{V}}$ de S dans \mathcal{V} soit inversible. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Dans un repère orthonormal, la courbure équivariante $F(X)$ de la connection ∇ est une matrice antisymétrique commutant à $S^{\mathcal{V}}$. On peut donc définir la forme $d_S^{1/2}(F(X))$.

Définition 127 Soit $S \in \mathfrak{g}_{\text{ell}}$ un élément G -invariant. Supposons que $S_M = 0$ et que l'action $S^{\mathcal{V}}$ de S dans \mathcal{V} soit inversible. On définit la forme G -équivariante $Eul_S^+(\mathcal{V}, \nabla) \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ par $Eul_S^+(\mathcal{V}, \nabla)(X) = d_S^{1/2}(F(X))$ pour $X \in \mathfrak{g}$.

Rappelons que comme S est inversible dans \mathcal{V} , on a défini (formule 43) une orientation $\zeta(\mathcal{V}, -S)$ de \mathcal{V} . Il résulte du lemme 103 que l'on a

$$(89) \quad Eul_S^+(\mathcal{V}, \nabla)(X) = Eul(\mathcal{V})_{\zeta(\mathcal{V}, -S)}(S + X).$$

Si α est une forme sur la base B , on notera encore α la forme $p^*\alpha$ sur \mathcal{V} . Soit $s \in G_{\text{ell}}$. D'après (72) on a

$$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

La connection G -invariante ∇ détermine par restriction des connections $G(s)$ -équivariantes sur les fibrés $\mathcal{V}(s)$ et $\mathcal{Q}(s)$. Comme ∇ est fixée, nous ne mentionnerons plus les choix de connections dans les notations qui suivent. Le rang de $\mathcal{V}(s)$ est une fonction localement constante sur $M(s)$ notée $\text{rg}(\mathcal{V}(s))$.

Définition 128 On pose $n(\mathcal{V})_s = (2\pi)^{\text{rg}(\mathcal{V}(s))/2} J^{1/2}(\mathcal{V}(s)) D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s))$. C'est un élément fermé de $\mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ qui dépend du choix de ∇ , et nous notons encore $n(\mathcal{V})_s$ sa classe dans $\mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ qui ne dépend pas du choix de ∇ .

La famille $(n(\mathcal{V})_s)_{s \in G_{ell}}$ n'est pas une botte car les conditions de recollement ne sont pas vérifiées. Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Posons $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}_0 = S(\mathcal{V}(s))$. Raffinons comme en (73) la décomposition $\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s)$ au dessus de $M(s)(S)$ en

$$(90) \quad \mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{Q}(s).$$

L'élément S induit une transformation infinitésimalement elliptique inversible de \mathcal{Q}_0 .

Lemme 129 *Soit $s \in G_{ell}$. Il existe $a > 0$ tel que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait*

$$G(s)(S) = G(se^S), \quad M(se^S) = M(s)(S), \quad \mathcal{V}(s)(S) = \mathcal{V}(se^S)$$

et l'égalité

$$n(\mathcal{V})_{se^S} = Eul_S^+(\mathcal{Q}_0)T_{s,S}n(\mathcal{V})_s$$

dans $\mathcal{A}_{G(se^S)}^\infty(\mathfrak{g}(se^S), M(se^S))$.

Démonstration. Soit $a > 0$ tel que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait

$$G(s)(S) = G(se^S), \quad M(se^S) = M(s)(S), \quad \mathcal{V}(s)(S) = \mathcal{V}(se^S).$$

Un tel a existe par définition des actions régulières. Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Soit $F(X), X \in \mathfrak{g}$, la courbure équivariante de la connection ∇ . Soit $Y \in \mathfrak{g}(s)(S)$. Notons $A(Y) \in \mathcal{A}(M(se^S), \text{End}(\mathcal{V}))$ la matrice antisymétrique à coefficients formes sur $M(se^S)$ définie par $A(Y) = F(Y)|M(se^S)$.

Dans la décomposition

$$\mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{Q}$$

on voit que A se décompose en

$$A(Y) = A_0(Y) \oplus B(Y) \oplus C(Y)$$

où A_0 est la courbure équivariante de $\mathcal{V}(se^S)$, B la courbure équivariante de \mathcal{Q}_0 et C la courbure équivariante de $\mathcal{Q}(s)$. On note encore s (resp. S) l'endomorphisme vertical produit par s (resp. S). Comme s agit trivialement sur \mathcal{Q}_0 , on a

$$n_{se^S}(Y) = (2\pi)^{\text{rg } \mathcal{V}(se^S)/2} J^{1/2}(A_0(Y)) \det^{1/2}(1 - e^S e^{B(Y)}) \det^{1/2}(1 - se^S e^{C(Y)}).$$

(On a normalisé les racines carrées de sorte que pour $Y = 0$ elles soient > 0).

Comme S s'annule sur $\mathcal{V}(s)(S)$, on a $A_0(S+Y) = A_0(Y)$ et

$$n_s(S+Y)|M(se^S) = (2\pi)^{\text{rg } \mathcal{V}(s)/2} J^{1/2}(A_0(Y)) J^{1/2}(B(S+Y)) \det^{1/2}(1 - se^{C(S+Y)}).$$

(Ici, on a normalisé les racines carrées de sorte que pour $Y = -S$ elles soient > 0).

On a $B(S + Y) = S + B(Y)$, $C(S + Y) = S + C(Y)$. Comme la connexion ∇ est G -invariante, $B(Y)$ et $C(Y)$ commutent à S .

On a

$$(-2\pi)^{\text{rg } \mathcal{Q}_0/2} \text{Eul}(\mathcal{Q}_0)_S^+(Y) = \det^{1/2}(S + B(Y)).$$

(On a normalisé la racine carrée de sorte que pour $Y = 0$ elles soient > 0).

L'égalité des formes

$$n_{se^S}(Y) = \text{Eul}(\mathcal{Q}_0)^+(Y)n_s(S + Y)|M(se^S)$$

résultera des égalités

$$(91) \quad \det^{1/2}(1 - e^S e^{B(Y)}) = \det^{1/2}(S + B(Y))J^{1/2}(S + B(Y)),$$

$$(92) \quad \det^{1/2}(1 - se^S e^{C(Y)}) = \det^{1/2}(1 - se^{S+C(Y)}).$$

Démontrons ces égalités. Remarquons que les choix des déterminations de racines carrées montrent que, pour $Y = 0$ et $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, les termes de degré extérieur 0 de tous les termes sont des fonctions positives localement constantes sur $M(se^S)$. Il suffira donc de vérifier l'égalité des carrés. L'égalité (92) est immédiate puisque $C(Y)$ commute à S . Pour l'égalité (91), il s'agit de montrer que

$$\det_{\mathcal{Q}_0}(1 - e^{S+B(Y)}) = \det_{\mathcal{Q}_0}(e^{(S+B(Y))/2} - e^{-(S+B(Y))/2}).$$

Comme la dimension de \mathcal{Q}_0 est paire et comme les matrices S et $B(Y)$ sont de trace nulle (car infinitésimalement orthogonales), l'égalité précédente est vérifiée. ■

Soit $s \in G_{ell}$. On note $u_s \in \mathcal{A}_{rap,G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$ la forme de Thom (formule 79) du fibré $\mathcal{V}(s) \rightarrow M(s)$ déterminée par la connexion $\nabla|M(s)$. La famille $(u_s)_{s \in G_{ell}}$ n'est pas une botte de formes tordues, car les conditions de recollement ne sont pas vérifiées.

Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Posons comme ci-dessus $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}_0 = S(\mathcal{V}(s))$. Soit

$$\text{Eul}(\mathcal{Q}_0) \in \mathcal{A}_{G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), M(s)(S))_{\mathcal{Q}_0}$$

la forme d'Euler du fibré \mathcal{Q}_0 au dessus de $M(s)(S)$ et $\text{Eul}_S(\mathcal{Q}_0)$ la forme d'Euler translatée

$$\text{Eul}_S(\mathcal{Q}_0)(Y) = \text{Eul}(\mathcal{Q}_0)(S + Y).$$

Soit $u_{s,S}$ la forme de Thom du fibré $\mathcal{V}_0 \rightarrow M(s)(S)$.

Comme $\mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)|M(s)(S)$, on a

$$\text{Eul}_S(\mathcal{Q}_0)u_{s,S} \in \mathcal{A}_{rap,G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), \mathcal{V}_0)_{\mathcal{V}(s)}.$$

Lemme 130 *Si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$, on a l'égalité*

$$T_{S,s}u_s = \text{Eul}_S(\mathcal{Q}_0)u_{s,S}$$

dans $\mathcal{A}_{rap,G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), \mathcal{V}_0)_{\mathcal{V}(s)}$.

Démonstration. Comme $\mathcal{V}(s)|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0$, il est facile de voir qu'on a l'égalité des formes différentielles $G(s)(S)$ -équivariantes $u_s(Y) = u_{s,S}(Y) \wedge u(\mathcal{Q}_0)(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)(S)$. Comme S agit trivialement sur \mathcal{V}_0 , on obtient

$$(93) \quad u_s(S + Y) = u_{s,S}(Y) \wedge u(\mathcal{Q}_0)(S + Y)$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(s)(S)$. En prenant la restriction à \mathcal{V}_0 de cette égalité, on obtient l'égalité cherchée. ■

Remarque 131 *De manière analogue à la remarque 102, on voit qu'il existe des familles de formes de Thom à support compact $u_s \in \mathcal{A}_{\text{vcpt},G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$, $s \in G_{\text{ell}}$, vérifiant encore l'égalité du lemme 130. Par contre l'égalité (93) n'est en général pas possible.*

Nous choisissons une telle famille.

Compte tenu de la définition de la translation tordue $T_{s,S}^{\mathcal{V}}$ et de la formule 89, on peut écrire la formule du lemme 130 sous la forme

$$(94) \quad T_{s,S}^{\mathcal{V}} u_s = \text{Eul}_S^+(\mathcal{Q}_0) u_{s,S}$$

dans $\mathcal{A}_{\text{vcpt},G(s)}(\mathfrak{g}(s)(S), \mathcal{V}_0)_{\mathcal{V}(s)(S)}$.

Nous construisons maintenant la botte de Bott $b(\mathcal{V}) \in \mathcal{B}_{\text{vcpt},G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$. Soit $s \in G_{\text{ell}}$. On pose

$$b_s = u_s n(\mathcal{V})_s \in \mathcal{A}_{\text{vcpt},G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}.$$

Théorème 132 *Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré euclidien vectoriel G -équivariant muni d'une connexion euclidienne G -invariante. Soit $s \in G_{\text{ell}}$ et soit*

$$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

Soit $u_s \in \mathcal{A}_{\text{vcpt},G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$ la forme de Thom équivariante du fibré $\mathcal{V}(s) \rightarrow M(s)$. Soit $b_s \in \mathcal{A}_{\text{vcpt},G(s)}^{\infty}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$ la forme définie par

$$b_s = (2\pi)^{\text{rg } \mathcal{V}(s)/2} J^{1/2}(\mathcal{V}(s)) D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s)) u_s.$$

Alors la famille $b(\mathcal{V}) = (b_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$ définit une botte $b(\mathcal{V}) \in \mathcal{B}_{\text{vcpt},G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ de formes équivariantes tordues fermées sur \mathcal{V} .

On note encore $b(\mathcal{V})$ la classe de cette botte dans $\mathcal{K}_{\text{vcpt},G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$. Elle ne dépend pas des choix faits de connexion et de structure euclidienne.

Démonstration. Soit $s \in G_{\text{ell}}$ et soit $a > 0$ tel que le lemme 129 soit valable. Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{\text{ell},a}$. Montrons que si $S \in \mathfrak{g}(s)_{\text{ell},a}$ on a $T_{s,S}^{\mathcal{V}} b_s = b_{s \epsilon S}$. En employant successivement la formule (104) et le lemme 129, on obtient

$$\begin{aligned} T_{s,S}^{\mathcal{V}} b_s &= T_{s,S}^{\mathcal{V}} u_s T_{s,S} n(\mathcal{V})_s \\ &= u_{s \epsilon S} \text{Eul}_S^+(\mathcal{Q}_0) T_{s,S} n(\mathcal{V})_s \\ &= u_{s \epsilon S} n(\mathcal{V})_{s \epsilon S} \\ &= b_{s \epsilon S}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. ■

La restriction de la classe $b(\mathcal{V})$ à M est un élément de $\mathcal{B}_G^{\mathcal{V}}(M)$ (ou de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ si l'on considère la classe) encore appelé classe d'Euler du fibré \mathcal{V} , et notée $e(\mathcal{V})$.

Exemple 133 Soit V une espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $G = \mathrm{O}(V)$. On considère V comme un fibré équivariant sur $M = \bullet$. La classe d'Euler $e(V)$ est un élément de $\mathcal{K}_G^V(\bullet) \simeq \kappa_G^\infty(V)$. On vérifie immédiatement que c'est la fonction

$$e(V)(a, o) = \det_o^{1/2}(1 - a^{-1}) = (-1)^{n(n+1)/2} \det_o^{1/2}(1 - a)$$

sur $\mathrm{Pin}(V) \times \mathrm{or}(V)$.

Il résulte de l'exemple 118 que $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est engendré par $e(V)$ comme module sur $\mathcal{K}_G(\bullet)$.

6.2 Intégration.

Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M . Soit $p : M \rightarrow B$ une fibration G -équivariante. Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ le fibré tangent vertical à la fibration $M \rightarrow B$. Nous définissons maintenant une application

$$p_* : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M) \rightarrow \mathcal{K}_G(B).$$

La définition de l'application p_* imite la définition d'Atiyah-Hirzebruch [2] de l'application p_* en K -théorie.

Soit $s \in G$. Considérons la classe $n(\mathcal{V})_s \in \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ (définition 128). La forme $n(\mathcal{V})_s(0) \in \mathcal{A}(M(s))$ a un terme de degré 0 qui est une fonction > 0 sur $M(s)$. Comme G est compact, un voisinage elliptique de 0 est un voisinage aussi petit qu'on veut pour la topologie ordinaire. Donc $n(\mathcal{V})_s(X) \in \mathcal{A}(M(s))$ a un terme de degré 0 qui est une fonction > 0 sur $M(s)$ pour tout X dans \mathfrak{g}_a dès que $a > 0$ est assez petit. La forme $n(\mathcal{V})_s(X)$ est donc inversible pour $X \in \mathfrak{g}_a$, et l'on obtient un élément $n(\mathcal{V})_s^{-1} \in \mathcal{H}_{[G(s)]}(M(s))$.

Soit $\alpha \in \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. C'est donc une famille de classes $\alpha_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}^{\mathcal{V}(s)}(M(s))$ indexés par les éléments s de G , vérifiant les conditions d'invariance et de recollement de la définition 108.

Considérons la fibration $p : M \rightarrow B$. On sait qu'elle se restreint en une fibration $p^s : M(s) \rightarrow B(s)$ pour laquelle le fibré tangent vertical est $\mathcal{V}(s)$. Considérons le germe de classes de cohomologie tordue

$$\alpha_s/n(\mathcal{V})_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}^{\mathcal{V}(s)}(M(s)).$$

Il s'intègre sur la fibre de la fibration $M(s) \rightarrow B(s)$.

Théorème 134 Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M . Soit $p : M \rightarrow B$ une fibration G -équivariante. Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ le fibré tangent

vertical à la fibration $M \rightarrow B$. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$ un élément de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. La famille $\beta = (\beta_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$ où

$$\beta_s = \int_{M(s)/B(s)} \alpha_s / n(\mathcal{V})_s$$

est un élément de $\mathcal{K}_G(B)$. Nous dirons que β est l'intégrale de α sur les fibres et nous noterons $\beta = p_* \alpha$.

Démonstration. Soit $s \in G$ et soit $S \in \mathfrak{g}(s)$. On reprend les notations du paragraphe 6.1 pour le fibré vertical $\mathcal{V} \rightarrow M$. En particulier, on écrit

$$\mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{Q}(s)$$

où $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}_0 = S(\mathcal{V}(s))$. Soit $I_s = \alpha_s n_s^{-1}$. Considérons la fibration $p^s : M(s) \rightarrow B(s)$. On a $\beta_s = p_*^s I_s$. Il est facile de voir que β_s vérifie la condition d'invariance voulue. Vérifions la condition de recollement. Soit $\tilde{\alpha}_s$ un représentant de α_s . En restreignant au besoin le voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ sur lequel $\tilde{\alpha}_s$ est défini pour que n_s soit inversible sur ce voisinage, ceci nous donne un représentant \tilde{I}_s de I_s . Soit $\tilde{\beta}_s = p_*^s \tilde{I}_s$ l'intégrale de \tilde{I}_s sur les fibres de p^s . Alors $\tilde{\beta}_s \in \mathcal{H}_{G(s)}^{\infty}(U, M(s))$. D'après la formule de localisation 106, appliquée à la fibration $G(s)$ -équivariante p^s , on a sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(s)(S)$ l'égalité:

$$T_{s,S} \tilde{\beta}_s = p_*^{s \circ S} (Eul_S(\mathcal{Q}_0)^{-1} T_{s,S} \tilde{I}_s).$$

On a

$$Eul_S(\mathcal{Q}_0)^{-1} T_{s,S} \tilde{\beta}_s = Eul_S^+(\mathcal{Q}_0)^{-1} T_{s,S}^{\mathcal{V}} \tilde{I}_s = T_{s,S}^{\mathcal{V}}(\tilde{\alpha}_s) / (Eul_S^+(\mathcal{Q}_0) T_{s,S}(n(\mathcal{V})_s))$$

La définition des bottes dit que $T_{s,S}^{\mathcal{V}}(\tilde{\alpha}_s)$ est un représentant $\alpha_{s \circ S}$ de $\alpha_{s \circ S}$. Il résulte du lemme 129 que l'on a

$$Eul_S(\mathcal{Q}_0)^{-1} T_{s,S} \tilde{\beta}_s = \alpha_{s \circ S} / n(\mathcal{V})_{s \circ S}$$

et donc $T_{s,S} \tilde{\beta}_s = \beta_{s \circ S}$, ce qui termine la démonstration du théorème. ■

De même, si $p : M \rightarrow B$ est une fibration G -équivariante de fibré vertical \mathcal{V} et si \mathcal{E} est un fibré réel sur la base B , on peut définir une application

$$p_* : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(M) \rightarrow \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(B).$$

Si M n'est pas compacte, on peut définir p_* dans l'espace $\mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(M)$.

Soit $p : \mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré réel G -équivariant sur une variété compacte M . Le fibré vertical pour la fibration p est isomorphe à $p^* \mathcal{V}$. Comme G est compact, ce fibré peut être muni d'une structure euclidienne et d'une connexion euclidienne

G -invariante. Soit $b = b(\mathcal{V})$ la classe de Bott de \mathcal{V} . Soit \mathcal{E} un fibré réel G -équivariant sur la base M . On peut donc définir une application

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M).$$

D'autre part, on peut définir l'application

$$m(\alpha) = b \wedge \alpha : \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M) \rightarrow \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(\mathcal{V}).$$

La définition de $b = (b_s) \in \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ implique que $p_* b = 1$. Par ailleurs, il résulte de la proposition 104 que p_* est injective. On a donc l'isomorphisme de Thom

Théorème 135 *Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M . Soit \mathcal{V} un fibré réel G -équivariant sur M . Les applications*

$$m : \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M) \rightarrow \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(\mathcal{V})$$

et

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V} \oplus p^* \mathcal{E}}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Considérons le cas particulier où $\mathcal{E} = \mathcal{V}$. D'après l'exemple 110, $\mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}}(\mathcal{V})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$. Comme cas particulier du théorème précédent, nous avons

Théorème 136 *Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M . Soit \mathcal{V} un fibré réel G -équivariant sur M . Les applications*

$$m : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M) \rightarrow \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$$

et

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Ce théorème fournit donc pour l'action d'un groupe compact sur une variété compacte une interprétation du groupe $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$.

Rappelons que l'espace des bottes tordues pour le fibré tangent à M se note $\mathcal{K}_G(M)_t$. Considérons l'application $p : M \rightarrow \bullet$ de M sur un point. Explicitons l'application $p_* : \mathcal{K}_G(M)_t \rightarrow \mathcal{K}_G(\bullet)$ dans ce cas particulièrement important.

Soit $s \in G$, soit $M(s)$ la variété des points fixes de l'action de s sur M . Soit $\dim M(s)$ la fonction localement constante dimension sur $M(s)$. Soit $TM(s)$ le fibré tangent à $M(s)$ et \mathcal{N} le fibré normal à $M(s)$ dans M . Soit $J^{1/2}(M(s))$ la classe $J^{1/2}(TM(s))$ du fibré tangent à $M(s)$ et $D_s^{1/2}(\mathcal{N})$ la classe du fibré normal. En explicitant le théorème 134 on obtient le théorème suivant.

Théorème 137 *Soit G un groupe de Lie compact agissant sur une variété compacte M . Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$ un élément de $\mathcal{K}_G(M)_t$. Il existe une unique fonction C^∞ G -invariante Θ sur G telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit on ait*

$$\Theta(se^X) = \int_{M(s)} \frac{(2\pi)^{-\dim M(s)/2} \alpha_s(X)}{J^{1/2}(M(s))(X) D_s^{1/2}(\mathcal{N})(X)}.$$

Dans [31] nous montrons que la théorie de l'intégration des formes différentielles M -tordues fournit un cadre naturel pour la théorie des caractères d'un groupe de Lie G non nécessairement compact. Si M est une orbite fermée de l'action coadjointe de G , on peut en effet définir $\Theta_{f,\tau} = p_*(\alpha_{f,\tau})$ pour certains éléments canoniques $\alpha_{f,\tau}$ de l'espace $\mathcal{K}_G(M)_t$ et on obtient ainsi des fonctions généralisées $\Theta_{f,\tau}$ invariantes canoniquement associées aux orbites coadjointes fermées.

6.3 Fibrés de Clifford.

Nous avons vu que la cohomologie équivariante tordue d'un fibré euclidien est intimement liée au groupe spinoriel. Dans cette section, nous donnons un peu plus d'explications sur cette relation. Nous traiterons dans un article ultérieur la relation entre la cohomologie tordue d'un espace symplectique et le groupe métaplectique. Cette relation est importante dans la théorie des caractères des groupes de Lie.

Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré euclidien G -équivariant. Il lui est associé un fibré $C(\mathcal{V}) \rightarrow M$ d'algèbres de Clifford. On dira que \mathcal{V} est un *fibré spinoriel G -équivariant* si l'on s'est donné un fibré principal $P \rightarrow M$ de groupe $\text{Spin}(V)$ muni d'une action à gauche de G (commutant à l'action à droite de $\text{Spin}(V)$) tel que \mathcal{V} soit le fibré associé

$$\mathcal{V} = P \times_{\text{Spin}(V)} V$$

où $\text{Spin}(V)$ agit dans V par la représentation $\tau : \text{Spin}(V) \rightarrow \text{SO}(V)$. On dit qu'il est orienté si l'on s'est donné une orientation σ_V de V . Elle détermine une orientation G -invariante $\sigma_{\mathcal{V}}$ sur \mathcal{V} . Un fibré spinoriel G -équivariant est en particulier un fibré métalinéaire orienté G -équivariant. Nous avons construit (formule 83) un élément particulier $f^{\mathcal{V}} \in \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ de carré un dans $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. Comme cas particulier de la proposition 111 on obtient:

Proposition 138 *Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré spinoriel orienté G -équivariant. Alors $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ est un $\mathcal{K}_G(M)$ -module libre de base $f^{\mathcal{V}}$.*

Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré euclidien G -équivariant muni d'une connection euclidienne G -invariante ∇ . Nous supposons le fibré $\mathcal{V} \rightarrow M$ muni d'une orientation G -invariante, mais nous ne supposons plus l'existence d'une structure spinorielle sur \mathcal{V} . Nous allons montrer que le caractère de Chern relatif d'un module

de Clifford G -équivariant gradué (essentiellement défini dans [6]) fournit naturellement un élément de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$.

Soit $\mathcal{L} \rightarrow M$ un fibré complexe G -équivariant sur M . Nous supposons que \mathcal{L} est munie d'une action de l'algèbre de Clifford $C(\mathcal{V})$ construite sur \mathcal{V} . L'action d'une section v du fibré \mathcal{V} sur \mathcal{L} sera notée $c(v)$. Nous supposons que les actions de G et de $C(\mathcal{V})$ sur \mathcal{L} vérifient la condition suivante de compatibilité:

$$gc(v)g^{-1} = c(g \cdot v).$$

Supposons de plus que \mathcal{V} soit muni d'une connexion G -invariante ∇ et que \mathcal{L} soit muni d'une connexion de Clifford G -invariante $\nabla^{\mathcal{L}}$ compatible: si $v \in \Gamma(M, \mathcal{V})$,

$$[\nabla^{\mathcal{L}}, c(v)] = c(\nabla v).$$

(Si G est compact, un tel choix de connexions est toujours possible). On dira alors que \mathcal{L} est un $(G, C(\mathcal{V}))$ -module connecté.

Soit F la courbure équivariante de $\nabla^{\mathcal{L}}$. Soit $s \in G$. Soit comme d'habitude

$$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

La connexion ∇ induit une connexion sur les fibrés vectoriels $\mathcal{V}(s)$ et $\mathcal{Q}(s)$ au-dessus de $M(s)$. Soit R^0 (resp R^1) les courbures $G(s)$ -équivariantes de $\mathcal{V}(s)$ (resp. $\mathcal{Q}(s)$).

On peut donc définir comme en 126 la forme $D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s)) \in \mathcal{A}_{G(s)}^{\infty}(\mathfrak{g}(s), M(s))$. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$

$$D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s))(X) = \det^{1/2}(1 - s \exp R^1(X)).$$

Au dessus de $M(s)$, l'action de s produit un automorphisme $s^{\mathcal{L}}$ du fibré \mathcal{L} et $s^{\mathcal{V}}$ de \mathcal{V} . On choisit un représentant local \hat{s} de $s^{\mathcal{V}}$ dans l'algèbre de Clifford de \mathcal{V} . On note \mathcal{L}^s les points fixes de l'action de Clifford de \hat{s} dans \mathcal{L} et $\mathcal{L}^{q,s}$ le complémentaire \hat{s} -invariant. Le fibré $\mathcal{L}^{q,s}$ est muni d'une structure de $(G(s), C(\mathcal{Q}(s)))$ -module. Notez que la dimension de $\mathcal{Q}(s)$ est paire à cause des hypothèses d'orientabilité.

Soit o une orientation locale de $\mathcal{V}(s)$. On note $o_{\mathcal{V}/o}$ l'orientation de $\mathcal{Q}(s)$ qui s'en déduit et $\gamma_{o_{\mathcal{V}/o}}$ l'élément de l'algèbre de Clifford $C(\mathcal{Q}(s))$ défini en 49. Donc $\gamma_{o_{\mathcal{V}/o}}$ est une section du fibré en algèbres de Clifford sur le fibré $\mathcal{Q}(s)$, définie dans l'ouvert de $M(s)$ où o est définie.

Considérons pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ la forme différentielle tordue sur le revêtement $(M(s))_{\mathcal{V}(s)}$ de $M(s)$ définie pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ par:

$$V_s(X)_o = \text{Tr}_{\mathcal{L}^{q,s}}(\gamma_{o_{\mathcal{V}/o}} s^{\mathcal{L}} e^{F(X)|M(s)}).$$

Il est facile de voir que $V_s \in \mathcal{A}_{G(s)}^{\infty}(\mathfrak{g}(s), M(s))_{\mathcal{V}(s)}$ est une forme équivariante tordue fermée.

On définit $\text{ch}_t(\mathcal{L})_s$ par

$$\text{ch}_t(\mathcal{L})_s = V_s/D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s)).$$

En explicitant, on a pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ petit

$$\text{ch}_t(\mathcal{L})_s(X)_o = \text{Tr}_{\mathcal{L}^{s,\cdot}}(\gamma_{o_{\mathcal{V}}/o} s^{\mathcal{L}} e^{F(X)|M(s)}) / \det^{1/2}(1 - s \exp R^1(X)).$$

On note $\text{ch}_t(\mathcal{L})$ la famille de formes équivariantes fermées $(\text{ch}_t(\mathcal{L})_s)_{s \in G_{\text{ell}}}$. L'élément $\text{ch}_t(\mathcal{L})$ dépend du choix des connections compatibles $\nabla^{\mathcal{L}}$ et ∇ .

Cette définition curieuse appelle une explication donnée dans le corollaire qui suit. Ce corollaire montre de plus que $\text{ch}_t(\mathcal{L})_s$ défini pour X petit est en fait une fonction analytique de X .

Supposons, pour un moment, que le fibré \mathcal{V} soit spinoriel et notons \mathcal{E} le fibré des spineurs associé. Puisque \mathcal{E} est un fibré associé à une représentation de $\text{Spin}(V)$, il est muni d'une structure de G -fibré équivariant, et on voit facilement que c'est un $(G, C(\mathcal{V}))$ -fibré.

Lemme 139 *On a $\text{ch}_t(\mathcal{E}) = f^{\mathcal{V}}$, où $f^{\mathcal{V}}$ est l'élément de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ défini par la formule (83).*

Démonstration. Ceci résulte de la définition de la forme $D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s))$, de la formule 64 et de la définition de $f^{\mathcal{V}}$. ■

Soit \mathcal{W} un fibré complexe G -équivariant connecté. On peut donc associer à \mathcal{W} (muni de sa connection $\nabla^{\mathcal{W}}$) son caractère de Chern (proposition 74)

$$\text{ch}(\mathcal{W}) = (\text{ch}_s(\mathcal{W}, \nabla^{\mathcal{W}}))_{s \in G_{\text{ell}}} \in \mathcal{B}_G(M).$$

Considérons le $(G, C(\mathcal{V}))$ -module connecté $\mathcal{L} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{W}$.

On déduit du lemme ci-dessus le corollaire suivant.

Corollaire 140 *On a $\text{ch}_t(\mathcal{L}) = \text{ch}(\mathcal{W})f^{\mathcal{V}}$.*

Sans supposer l'existence de structure spinorielle, on montre par une démonstration similaire à celle de la proposition 132 la proposition suivante.

Proposition 141 *Soit $\mathcal{V} \rightarrow M$ un fibré euclidien orienté G -équivariant muni d'une connection euclidienne G -invariante. Soit \mathcal{L} un $(G, C(\mathcal{V}))$ -module gradué connecté. Alors la famille $\text{ch}_t(\mathcal{L})$ est une botte de formes équivariantes fermées tordues. L'élément correspondant $\text{ch}_t(\mathcal{L}) \in \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ est indépendant des choix faits de connections compatibles.*

Lorsque G et M sont compacts, et \mathcal{V} un fibré euclidien orienté de rang pair G -équivariant, notons $K_G^{\mathcal{V}}(M)$ le groupe de K -théorie défini par Karoubi (voir [25]). Les éléments en sont des classes de $(G, C(\mathcal{V}))$ -modules. Le caractère de Chern relatif ch_t fournit un homomorphisme

$$\text{ch}_t : C^\infty(G)^G \otimes_{R(G)} K_G^{\mathcal{V}}(M) \rightarrow \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M),$$

ce qui donne une justification supplémentaire de notre définition de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. Il reste à traiter les autres cas de fibrés \mathcal{V} ...

Bibliographie

- [1] M. F. ATIYAH ET R. BOTT. The moment map and equivariant cohomology. *Topology*, **23** (1984), 1–28.
- [2] M. F. ATIYAH ET F. HIRZEBRUCH. Vector bundles and homogeneous spaces. *Amer. Math. Symp.*, **III** (1961), 7–38.
- [3] M. F. ATIYAH ET G. B. SEGAL. The index of elliptic operators II. *Ann. Math.*, **87** (1968), 531–545.
- [4] M. F. ATIYAH ET I. M. SINGER. The index of elliptic operators. I. *Ann. Math.*, **87** (1968), 484–530.
- [5] M. F. ATIYAH ET I. M. SINGER. The index of elliptic operators. III. *Ann. Math.*, **87** (1968), 546–604.
- [6] N. BERLINE, E. GETZLER ET M. VERGNE. Heat kernels and Dirac operators. *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1991.
- [7] N. BERLINE ET M. VERGNE. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. *Duke Math. Journal*, **1983** (50), 539–549.
- [8] N. BERLINE ET M. VERGNE. The equivariant index and Kirillov character formula. *Amer. J. of Math*, **107** (1985), 1159–1190.
- [9] J.-M. BISMUT. Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families. *Comm. Math. Phys.*, **103** (1986), 127–166.
- [10] J. BLOCK ET E. GETZLER. Equivariant cyclic homology and equivariant differential forms. A paraître aux *Annales de l'Ec. Norm. Sup.*
- [11] R. BOTT ET C. TAUBES. On the rigidity theorems of Witten. *J. of the Amer. Math. Soc.*, **2** (1989), 137–186.
- [12] A. BOUAZIZ. Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes. *J. of Functional Analysis*, **70** (1987), 1–79.
- [13] A. BOUAZIZ. Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives. *A paraître à Inventiones Math.*
- [14] G. E. BREDON. Introduction to compact transformation groups. *Academic Press*, 1972.
- [15] H. CARTAN. Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie. In “Colloque de Topologie”. *C. B. R. M., Bruxelles*, (1950), 15–27.

- [16] H. CARTAN. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles*, (1950), 57-71.
- [17] M. DUFLO. Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. In "Harmonic analysis and group representations" C.I.M.E 1980. *Liguori, Napoli*, 1982.
- [18] M. DUFLO, G. HECKMAN ET M. VERGNE. Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner. *Mem. Soc. Math. Fr.*, **15** (1984), 65-128.
- [19] M. DUFLO ET M. VERGNE. Orbites coadjointes et cohomologie équivariante. In *The orbit method in representation theory*. *Birkhäuser, Progress in math.*, **82** (1990), 11-60.
- [20] W. GREUB, S. HALPERIN ET R. VANSTONE. Connections, curvature, and cohomology, vol. III. *Academic Press*, 1976.
- [21] HARISH-CHANDRA. Invariant Eigendistributions on a Semisimple Lie Group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119** (1965), 457-508.
- [22] HARISH-CHANDRA. Discrete series for semi-simple Lie groups I. *Acta Math.*, **113** (1965), 241-318.
- [23] HARISH-CHANDRA. Discrete series for semi-simple Lie groups II. *Acta Math.*, **116** (1966), 1-111.
- [24] J. KALKMAN. BRST model for equivariant cohomology and representatives for the equivariant Thom class. *Preprint, Utrecht 1992*.
- [25] M. KAROUBI. Algèbres de Clifford et K-théorie. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **1** (1968), 161-270.
- [26] A. A. KIRILLOV. Elements of the theory of representations. *Grundlehren der mathematische Wissenschaften 220*, *Springer Verlag*, 1976.
- [27] V. MATHAI ET D. QUILLEN . Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. *Topology*, **25** (1986), 85-110.
- [28] M. RAIS. Distributions homogènes sur des espaces de matrices. *Bulletin de la Soc. Math. Fr., Mémoire*, **30** (1972), 1-109.
- [29] F. TREVES. Topological vector spaces, distributions and kernels. *Academic Press*, 1967.
- [30] E. VASSEROT. Classes de Segre et multiplicité équivariante. *Bulletin de la Soc. Math. Fr.*, **119** (1991), 463-477.
- [31] M. VERGNE. Geometric quantization and equivariant cohomology. *A paraître dans les proceedings du Congrès Européen*.