

# *Astérisque*

AST

**Sur la cohomologie équivariante des variétés  
différentiables - Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 215 (1993), p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1993\\_\\_215\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__1_0)

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**215**

**ASTÉRIQUE**

**1993**

**SUR LA COHOMOLOGIE  
ÉQUIVARIANTE  
DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES**

**Michel DUFLO, Shrawan KUMAR, Michèle VERGNE**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**A.M.S. Subjects Classification : 19L47 • 22E45 • 57R91**

# Table des matières.

<b>Introduction</b> .....	3
<b>I. M. Duflo et M. Vergne. Cohomologie équivariante et descente</b>	
<b>Introduction</b> .....	5
<b>1 Cohomologie équivariante</b> .....	10
1.1 Cohomologie équivariante: définition	
1.2 Cohomologie équivariante d'un espace homogène	
1.3 $G$ -algèbres différentielles	
1.4 Connexions	
1.5 Classes caractéristiques	
1.6 Algèbre de Weil et cohomologie équivariante	
1.7 Action libre	
1.8 Actions principales et espaces homogènes	
<b>2 Méthode de descente</b> .....	35
2.1 Groupes presque algébriques	
2.2 Bottes de fonctions invariantes	
2.3 Fonctions généralisées et descente	
2.4 Actions régulières	
<b>3 Bottes de classes de cohomologie</b> .....	48
3.1 Germes de formes différentielles équivariantes	
3.2 Bottes et bouquets de formes différentielles équivariantes	
3.3 Images réciproques de bottes	
3.4 Espaces homogènes	
3.5 Théorie de Chern-Weil	
<b>4 Groupe métalinéaire et orientations</b> .....	63
4.1 Transformations infinitésimalement elliptiques	
4.2 Groupe $\text{Pin}(V)$	
4.3 Groupe $\text{ML}(V)$	
4.4 Fibrés $G$ -équivariants et points fixes	
4.5 Fibrés métalinéaires orientés	

<b>5</b>	<b>Bottes de cohomologie équivariante tordue</b> .....	<b>79</b>
5.1	Cohomologie équivariante tordue	
5.2	Bottes et bouquets de formes équivariantes tordues	
5.3	Bottes tordues pour le point	
5.4	Bottes tordues des espaces homogènes	
<b>6</b>	<b>Images directes</b> .....	<b>95</b>
6.1	Fibrés euclidiens	
6.2	Intégration	
6.3	Fibrés de Clifford	
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>107</b>

## **II. S. Kumar and M. Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients**

	<b>Introduction</b> .....	<b>109</b>
<b>1</b>	<b>Notation</b> .....	<b>114</b>
<b>2</b>	<b>G-equivariant cohomology with generalized coefficients</b> .....	<b>115</b>
<b>3</b>	<b>Koszul complexes</b> .....	<b>126</b>
<b>4</b>	<b>Induction of equivariant differential complexes</b> .....	<b>135</b>
<b>5</b>	<b>Equivariant cohomology of homogeneous spaces</b> .....	<b>143</b>
<b>6</b>	<b>Künneth formula and applications</b> .....	<b>155</b>
<b>7</b>	<b>Equivariant cohomology and subgroups</b> .....	<b>159</b>
<b>8</b>	<b>Reduction to the maximal torus</b> .....	<b>162</b>
<b>9</b>	<b>The case of a free action</b> .....	<b>165</b>
<b>10</b>	<b>A spectral sequence for <math>T</math>-equivariant cohomology</b> .....	<b>184</b>
<b>11</b>	<b>Localization formula</b> .....	<b>191</b>
<b>12</b>	<b>Appendix – A splitting for <math>d_{\mathfrak{g}}</math></b> .....	<b>195</b>
	<b>References</b> .....	<b>203</b>
	<b>Summary</b> .....	<b>205</b>

## Introduction

Soit  $G$  un groupe de Lie réel opérant dans une variété  $M$ . Le complexe de de Rham équivariant et sa cohomologie  $H_G^*(M)$  ont été introduits par H. Cartan. Si l'action de  $G$  sur  $M$  est libre,  $H_G^*(M)$  est la cohomologie  $H^*(G \backslash M)$  de l'espace des orbites et si  $M$  est le point  $\bullet$ ,  $H_G^*(\bullet)$  est l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . A chaque fibré  $G$ -équivariant sur  $M$  muni d'une connexion  $G$ -invariante sont associées des classes de Chern équivariantes. Il s'est avéré indispensable de considérer des objets cohomologiques plus généraux tels que l'algèbre  $H_G^\infty(M)$  de cohomologie équivariante à coefficients  $C^\infty$  qui est une algèbre sur  $H_G^\infty(\bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$ , et l'espace  $H_G^{-\infty}(M)$  de cohomologie équivariante à coefficients  $C^{-\infty}$  qui est un module pour  $H_G^\infty(M)$ , et pour laquelle  $H_G^{-\infty}(\bullet)$  est l'espace des fonctions généralisées invariantes  $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ .

Le premier des deux articles réunis ici, *Cohomologie équivariante et descente*, par Michel Duflou et Michèle Vergne, étudie une généralisation, notée  $\mathcal{K}_G(M)$ , de la cohomologie  $H_G^\infty(M)$ . C'est une algèbre sur  $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$ . On peut la considérer comme un analogue global de  $H_G^\infty(M)$  et comme une version à la de Rham de la  $K$ -théorie équivariante de  $M$ . La construction de  $\mathcal{K}_G(M)$  est basée sur la considération des points fixes dans  $M$  des éléments de  $G$  contenus dans un sous-groupe compact. Tout au moins lorsque  $G$  lui-même est compact, et sous certaines conditions d'orientation, "l'intégrale" sur  $M$  d'un élément de  $\mathcal{K}_G(M)$  est une fonction  $G$ -invariante sur  $G$ .

Le deuxième article, *Equivariant cohomology with generalized coefficients*, par Shrawan Kumar et Michèle Vergne, entreprend une étude systématique des espaces  $H_G^{-\infty}(M)$ . On découvre des classes remarquables qui n'ont pas d'équivalent dans la théorie  $C^\infty$ . En particulier lorsque l'action de  $G$  sur  $M$  est libre, l'intégrale sur  $M$  d'un élément de  $H_G^{-\infty}(M)$  est une fonction généralisée sur  $\mathfrak{g}$  de support 0. Lorsque  $G$  est compact, une suite spectrale permet de comparer  $H_G^{-\infty}(M)$  et la cohomologie équivariante  $H_G^*(M)$ .

Les deux articles, bien qu'ayant des motivations communes, peuvent être lus indépendamment.