Astérisque

JOSEPH LE POTIER

Systèmes cohérents et structures de niveau

Astérisque, tome 214 (1993)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__214__1_0>

214 ASTÉRISQUE

1993

SYSTÈMES COHÉRENTS ET STRUCTURES DE NIVEAU

Joseph LE POTIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 14D20 • 14F05

Table des matières

1. Introduction

Cet article est motivé par l'étude de deux espaces de modules de faisceaux semi-stables, l'un sur le plan projectif, l'autre sur l'espace projectif. Ces espaces de modules n'ont pas à priori de relation évidente entre eux, si ce n'est que les méthodes d'étude que nous employons sont très similaires, et aboutissent étrangement à des résultats assez parallèles, bien que plus compliqués sur l'espace projectif. Le premier est l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P_2}}(2;0,4)$; c'est la variété des classes de S$-$équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif. On sait que c'est une variété projective irréductible et normale de dimension 13. Un des objectifs de cet article est de donner une description géométrique de cet espace de modules, permettant par exemple de répondre à la question que nous nous étions posée en premier lieu, à savoir : est-il vrai que le morphisme de Barth

$$\gamma : \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4) \to \mathbf{P}_{14}$$

où $\mathbf{P}_{14}$ est l'espace projectif des quartiques de l'espace projectif dual, qui à un faisceau semi-stable E associe la quartique de ses droites de saut est de degré 1 sur son image ? La description que nous donnons permet effectivement de répondre par l'affirmative à cette question ; ceci conduit d'ailleurs aussi au calcul du degré de l'hypersurface image de ce morphisme, qu'on appelle hypersurface des quartiques de Lüroth. Ce degré est 54 ; c'est en fait, comme l'a observé Tjurin [34] la valeur de l'invariant de Donaldson pour l'espace de modules en question, et notre travail permet donc le calcul de cet invariant ([1]). Ceci fait l'objet d'un

([1]) Pour l'espace de module $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,c_2)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2 et classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 \geq 5$ sur $\mathbf{P}_2$ la question de autre travail déjà exposé [17], mais dont la rédaction n'est pas terminée.

Sur l'espace projectif, nous nous sommes intéressés à l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(2;0,2,0)$ des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = 0$ sur l'espace projectif $\mathbf{P_3}$. G. Trautman a prouvé récemment [33] que cette variété projective a trois composantes irréductibles de dimensions respectives 13, 17, 21 ; la composante de dimension 13 est l'adhérence de l'ouvert correspondant aux fibrés stables de rang 2 de classes de Chern (0,2), étudié par Hartshorne [12] , Douady [5] ; cette composante a été étudiée, plus récemment, par Narasimhan et Trautman [26] . Notre étude donne une autre façon de comprendre les trois composantes de Trautmann ; elle fournit en fait des renseignements beaucoup plus complets concernant les singularités, la rationalité de ces composantes, et le problème de l'existence d'un faisceau universel. Toutefois, nous ne savons pas pour l'instant si cet espace de modules est réduit, mais c'est vraisemblable. Résoudre ce problème demanderait sans doute une étude plus poussée du cône de l'espace de modules aux points d'intersection de ces composantes.

On sait que C. Simpson a construit [31] pour les faisceaux semi-stables de torsion de polynôme de Hilbert fixé P sur une variété projective X polarisée un espace de modules grossier $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$. Dans cet article, nous donnons une description l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m)$ des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$. Il s'agit ici de faisceaux semi-stables dont le support est une quadrique de $\mathbf{P}_3$. Ces faisceaux jouent un rôle intermédiaire mais fondamental dans l'étude du module de Trautmann ci-dessus. Il n'a que deux composantes irréductibles de dimension respectives 9 et 13, dont les points génériques correspondent sur une quadrique lisse C aux faisceaux qui s'écrivent $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}(-1,2)$ et aux faisceaux de sections du fibré $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}(1,0)$ qui s'annulent en deux points, un isomorphisme $\mathrm{C} \simeq \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ étant convenablement choisi.

savoir si le morphisme γ (qui associe à un faisceau semi-stable la courbe, de degré c_2, des droites de saut dans le plan projectif dual) est de degré 1 sur son image reste, à ma connaissance, une question ouverte. Il est de même du calcul du degré de l'image. Ce calcul est lié au calcul de l'invariant de Donaldson $(c_1(\mathscr{D}))^{4c_2-3}$, où $\mathscr{D}$ est le fibré déterminant (*cf.* [18]).

1.1. Systèmes cohérents sur le plan projectif.

L'introduction de cette notion est justifiée par l'étude de l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4)$, étude qui est abordée au chapitre 6 (*cf.* théorème 6.5 et corollaire 6.8). On a déjà dit que l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif $\mathbf{P}_2$ est une variété projective irréductible, normale de dimension 13 ; son lieu singulier est de dimension 8. La description de cette variété repose sur l'idée suivante : il est facile [16] de construire une équivalence birationnelle entre $\mathbf{M}$ et la variété des systèmes linéaires de dimension 1, de degré 5 sur les coniques lisses de $\mathbf{P}_2$. En effet, pour tout faisceau stable E de rang 2, de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif l'espace vectoriel des sections de E(1) est de dimension 2 en dehors d'une sous-variété lisse de codimension 3 de $\mathbf{M}$; pour E suffisamment général, le schéma des zéros du déterminant du morphisme d'évaluation $ev : \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathrm{E}(1)$ est une conique lisse C et le conoyau $\mathrm{F} = \operatorname{coker}\ ev$ est alors un module localement libre de rang un de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathrm{F}) = 0$ sur la conique C. La suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \xrightarrow{ev} \mathrm{E}(1) \to \mathrm{F} \to 0$$

fournit par dualité un sous-espace vectoriel Γ^* de dimension 2 dans l'espace vectoriel des extensions $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$. Cet espace vectoriel s'identifie à l'espace vectoriel des sections du faisceau $\mathrm{F}^* := \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2})$ "dual" de F. Ce faisceau F^* s'identifie à un faisceau inversible sur la conique C, de degré 5 . Ainsi, on associe au faisceau E la paire (Γ^*, F) : c'est un système linéaire de dimension projective 1, de degré 5 sur la conique C. Ces paires (Γ^*, F) décrivent un ouvert d'un fibré en grassmanniennes au-dessus de l'ouvert des coniques lisses dans l'espace projectif $\mathbf{P}_5$ des coniques du plan projectif. Notre problème est donc de construire une compactification de la variété des systèmes linéaires de dimension 2 et de degré 5, qui permette d'étendre la correspondance birationnelle ci-dessus.

De manière plus précise, il s'agit de construire un diagramme de variétés projectives

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S} & \xrightarrow{q} & \mathbf{P}_5 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbf{M} & & \end{array}$$

où p est un morphisme birationnel, et où $\mathbf{P}_5$ est la variété des coniques du plan projectif $\mathbf{P}_2$. La variété $\mathbf{S}$ sera constituée de classes d'équivalence de paires $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ où E est un faisceau sans torsion de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2$, et Γ un sous-espace de dimension 2 de $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1))$, ces paires étant soumises à une condition de semi-stabilité qui sera décrite au chapitre 4. Un telle paire sera un cas particulier de ce que nous appellerons structure de niveau, car ceci nous rappelle une construction qu'avait donnée Seshadri sur les courbes ; il s'agit en fait de la généralisation qui convient en dimension supérieure. Le morphisme p qui associe au point défini par la structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ le point de $\mathbf{M}$ défini par E sera en fait l'éclatement d'une sous-variété lisse de codimension 3, correspondant aux classes de faisceaux semi-stables E tels que $h^0(\mathrm{E}(1)) = 3$, sous-variété des points dits spéciaux, qui évite les singularités de $\mathbf{M}$.

Une telle structure de niveau s'interprète aussi comme classe d'équivalence de paires (Γ^*, F) où cette fois F est un faisceau algébrique cohérent de polynôme de Hilbert $2m + 6$, dont le support est une conique, et Γ^* un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F})$. Cette conique peut être singulière, voire non réduite : il apparaît donc nécessaire d'introduire de telles paires (Γ^*, F) où F est un faisceau cohérent de dimension d et de définir une notion de semi-stabilité pour de telles paires. De telles paires, qui généralisent les systèmes de niveau, seront appelées systèmes cohérents sur le plan projectif. Réciproquement, la donnée d'un tel système cohérent semi-stable équivaut à celle d'une structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$. Bien entendu de telles notions peuvent être introduites sur n'importe quelle variété projective lisse, et la correspondance qu'on vient d'expliquer dans le cas particulier du plan projectif peut être généralisée sur les surfaces projectives. Sur les variétés de dimension ≥ 3, il est en revanche nécessaire pour obtenir une telle correspondance d'introduire une notion en quelque sorte duale, que nous appelons cosystèmes cohérents.

La description donnée ci-dessus est très utile pour l'étude du morphisme γ qui associe à un faisceau semi-stable sa courbe des droites de saut. Un système cohérent semi-stable (Γ^*, F) pour lequel le faisceau F a pour support une conique dégénérée en deux droites distinctes fournit une quartique de Lüroth singulière, et en général, il est possible de reconstruire le système cohérent (Γ^*, F), et donc le faisceau semi-stable E à partir des éléments géométriques visibles sur la quartique singulière. C'est ce qui nous permet de démontrer que le morphisme γ est de degré 1 sur son image ; les détails de la construction font l'objet d'un autre article. Reconstruire le faisceau E à partir d'une quartique de Lüroth est un problème qui a été aussi envisagé par d'autres auteurs pour les quartiques de Lüroth lisses, mais à ma connaissance ce projet n'a pas abouti.

1.2. Le module de Trautmann

L'étude de l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(2;0,2,0)$ des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ sur l'espace projectif $\mathbf{P_3}$ fait l'objet du chapitre 7 (*cf.* théorèmes 7.12, 7.20, 7.23). La description des composantes irréductibles de Trautmann est liée au nombre de points de profondeur 1 que peuvent présenter ces faisceaux. En fait, tout faisceau cohérent sans torsion sur une variété algébrique lisse de dimension 3 a au plus un nombre fini i de points de profondeur 1. Dans le cas des faisceaux semi-stables de rang 2 de classes de Chern $(0,2,0)$ sur l'espace projectif, on a $i \leq 2$; ceci peut s'obtenir comme l'a remarqué Trautmann [33] en étudiant le bidual d'un tel faisceau : c'est un faisceau réflexif de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $0 \leq c_2 \leq 2$ auquel on peut appliquer les résultats de Hartshorne sur la majoration de la classe de Chern c_3 en fonction de c_1 et c_2. Cette analyse repose sur la théorie du spectre introduite d'abord par Barth et Elencwajg [3] pour les fibrés vectoriels de rang 2 sur l'espace projectif et généralisée aux faisceaux réflexifs par Hartshorne [12]. La méthode présentée ici est radicalement différente. Elle se ramène essentiellement à l'application des inégalités

$$c_2 - \frac{c_1^2}{4} \geq 0$$

pour les fibrés semi-stables sur une surface projective, attribuées par habitude à Bogomolov, mais qui dans le cas qui nous intéresse (sur le plan projectif) sont dues à Schwarzenberger. On doit en fait passer par l'intermédiaire de faisceaux cohérents sur l'espace projectif, portés par des quadriques.

Notre méthode permet en outre d'obtenir des résultats bien plus précis sur ces composantes. On introduit pour ceci les sous-variétés déterminantielles $\mathbf{M}_i$ de

$\mathbf{M}$ définies par les points représentants les faisceaux E satisfaisant aux conditions $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) \geq i$: les points de ces sous-variétés correspondent aux faisceaux semi-stables E qui ont au moins i points (avec multiplicité) de profondeur 1. Le résultat essentiel (*cf.* théorème 7.12) est que les variétés localement fermées $\mathbf{M} - \mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ sont lisses et irréductibles de dimensions respectives 13, 17, et que $\mathbf{M}_2$ est sous-variété fermée irréductible et normale de dimension 21 ; cette dernière n'a que des singularités rationnelles qui apparaissent en codimension 5. Les trois composantes de $\mathbf{M}$ sont les adhérences de ces sous-variétés. Nous avons également pu vérifier que ces trois composantes étaient rationnelles. Enfin, nous avons résolu le problème de l'existence d'un faisceau universel : assez curieusement, alors que l'impression populaire voulait que dès que les coefficients $< \mathrm{F}, h^i >$ qui figurent dans le polynôme de Hilbert (*cf.* chapitre 2) ne sont pas premiers entre eux il n'existe pas de faisceau universel, nous avons eu la surprise de constater qu'il existe un faisceau universel paramétré par la sous-variété $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$. Pour les deux autres composantes, il n'y a pas de faisceau universel paramétré par un ouvert non vide.

L'idée de la démonstration consiste encore à introduire certaines variétés de systèmes cohérents, et la construction est tout à fait similaire à celle que nous avons décrite sur le plan projectif. Il est facile de vérifier que sur un ouvert partout dense de $\mathbf{M}$ un point se représente par un faisceau semi-stable E tel que $\mathrm{E}(1)$ ait au moins deux sections. En fait, on peut démontrer (c'est une des conséquences de la construction) que l'espace vectoriel des sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1))$ est de dimension 2 sauf pour les points représentant des faisceaux semi-stables dits spéciaux, qui définissent une sous-variété fermée Σ contenue dans la réunion des composantes de dimension 17 et 21, et de codimension 3 dans chacune de ces composantes : la dimension $h^0(\mathrm{E}(1))$ est alors 3.

On est amené à considérer la variété $\mathbf{S}$ des classes d'équivalence de paires $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$, où E est un faisceau de rang 2, de classes de Chern (0,2,0) et Γ un sous-espace de dimension 2 de $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1))$, ces paires étant soumises à une condition de semi-stabilité précisée au chapitre 3. Une telle paire est encore une structure de niveau. La variété $\mathbf{S}$ est l'éclatement de $\mathbf{M}$ le long de Σ. Pour une telle paire, le morphisme d'évaluation $ev : \Gamma \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{E}(1)$ pour le faisceau $\mathrm{E}(1)$ est encore génériquement de rang 2 ; on peut ainsi associer à une telle structure de niveau une nouvelle paire (Γ^*, F) : le faisceau cohérent F est le conoyau du morphisme d'évaluation ; c'est un faisceau pur de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$ porté par une quadrique de $\mathbf{P}_3$; l'espace vectoriel Γ^* est un sous-espace de dimension 2 de l'espace vectoriel des extensions $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$. Contrairement à ce qui se passait sur le plan projectif, le polynôme de Hilbert du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}))$ ne reste pas constant lorsque $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ varie, ce qui rend délicate l'utilisation du système cohérent $(\Gamma^*, \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}))$ et nous impose d'introduire une nouvelle notion, en quelque sorte duale de la précédente. Il s'agit des cosystèmes cohérents, pour lesquels nous définirons au chapitre 6 une notion de semi-stabilité. La donnée d'une structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ semi-stable, et celle d'un cosystème cohérent semi-stable (Γ^*, F) sont équivalentes. Bien entendu, nous avons une version de cet énoncé valable en toute généralité sur n'importe quelle variété projective lisse (chapitre 6).

La méthode expliquée dans ce travail fournit donc un diagramme de variétés projectives

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S} & \xrightarrow{q} & \mathbf{P}_9 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbf{M} & & \end{array}$$

où $\mathbf{P}_9$ est l'espace projectif des quadriques de $\mathbf{P}_3$, et où p est un morphisme surjectif et birationnel. Ce diagramme donne un moyen de comprendre la structure de $\mathbf{M}$. La variété $\mathbf{S}$, construite au chapitre 4, définie comme variété de modules des classes d'équivalences de systèmes de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ (pour une relation d'équivalence qui sera précisée) s'identifie à la variété des classes d'équivalence de cosystèmes semi-stables (Γ^*, F), où F faisceau de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$ et $\dim \Gamma^* = 2$. Ceci fournit les morphismes p et q qui figurent dans le diagramme. La correspondance entre structures de niveau et cosystèmes cohérents est décrite au chapitre 6.

On est ramené à comprendre quels sont les cosystèmes semi-stables (Γ^*, F). On est bien sûr tenté de voir si le faisceau F sous-jacent est lui-même semi-stable : malheureusement on n'obtient pas en général la semi-stabilité, mais seulement la μ -semi-stabilité, ce qui complique un peu les choses. Toutefois, il est utile d'étudier l'espace de modules de Simpson $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m)$, dont la structure est bien plus facile à comprendre que celle de $\mathbf{S}$.

1.3. L'espace de modules $\mathbf{N} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m)$

Cette étude est l'objet du chapitre 3 (*cf.* théorème 3.2). Ici encore, les points singuliers jouent un rôle important dans la description des composantes. Pour un faisceau pur de dimension 2, il n'y a qu'un nombre fini de points de profondeur 1. Ailleurs, le faisceau est de Cohen-Macaulay, ou ce qui revient au même en dimension 2, réflexif (au sens de l'appendice, chapitre 8). Le premier problème qui se pose pour de tels faisceaux est de majorer le nombre de ces points de profondeur 1. Ceci s'obtient facilement, au moins pour les faisceaux de dimension 2 et multiplicité 2 sur $\mathbf{P}_3$ par projection sur un plan : on est ramené à appliquer essentiellement l'inégalité de Bogomolov à l'image directe d'un tel faisceau, dont on vérifie qu'il est encore, sauf dans un cas particulier, semi-stable. On obtient ainsi qu'un tel faisceau a au plus deux points de profondeur 2. On considère alors les sous-variétés déterminantielles $\mathbf{N}_i$ définies par les conditions $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) \geq i$. On a alors $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2$: c'est une variété irréductible de dimension 13, normale, dont on montre que les singularités, qui apparaissent en codimension 3, sont rationnelles. L'ouvert $\mathrm{U} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_2$ est lisse irréductible de dimension 9. Il en résulte que la variété $\mathbf{N}$ a deux composantes irréductibles de dimensions respectives 9 et 13. On vérifie facilement que ces composantes sont rationnelles.

Il est vraisemblable que la variété $\mathbf{N}$ est réduite. Nous n'avons pas abordé cette question ici car elle nous semble délicate. Signalons toutefois qu'il suffirait de se placer au voisinage d'un point représenté par le faisceau $\mathrm{F} = \mathrm{J} \oplus \mathrm{J}$, où J est l'idéal d'un point dans un plan P. Le cône de $\mathbf{N}$ en un tel point se plonge dans le quotient de Mumford $\mathrm{C}/\mathrm{Aut}(\mathrm{F})$ de la sous-variété C de $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{F})$ définie par l'équation $\alpha^2 = 0$, où $\alpha \mapsto \alpha^2$ est le cup-carré dans $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F})$, par l'action naturelle du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathrm{F}) = \mathrm{G}l(2)$; cette action est induite par la conjugaison sur $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{F})$. Il est facile de calculer cette équation à partir de la structure d'algèbre de $\mathrm{Ext}(\mathrm{J},\mathrm{J}) = \oplus_i \mathrm{Ext}^i(\mathrm{J},\mathrm{J})$ (une étude analogue est conduite au chapitre 3 pour la sous-variété $\mathbf{N}_2$). On obtient que $\mathrm{C}/\mathrm{Aut}(\mathrm{F})$ est une variété réduite de dimension 14, qui a deux composantes irréductibles de dimensions respectives 13 et 14. Ceci montre que contrairement à ce qui se passe pour les fibrés de Higgs de classes de Chern $c_i = 0$ (*cf.* [31]), la forme quadratique donnée par le cup-carré ne donne pas le cône de l'espace de modules, et il faudrait pour conclure faire intervenir des équations de degré supérieur.

1.4. La construction des espaces de modules.

Au chapitre 2, nous rappelons les définitions fondamentales ([2]) concernant les faisceaux algébriques cohérents de dimension d sur une variété projective X de dimension n et le principe de la construction de l'espace de modules de Simpson ; nous avons en particulier mis en évidence un critère de semi-stabilité, implicite dans le travail de Simpson, traduisant les notions de semi-stabilité en termes d'espaces vectoriels de sections. Pour les fibrés vectoriels sur les courbes, ce critère figurait déjà dans l'exposé de J. Oesterlé [28] , mais il nécessite plus de soins en dimension supérieure. Le chapitre 4 est consacré essentiellement à la construction de l'espace de modules des systèmes cohérents, et la démonstration du théorème 4.12. La construction s'inspire de celle de Simpson, et fait appel bien entendu à la géométrie invariante de Mumford. Ici encore, il nous a fallu expliciter un critère de semi-stabilité pour les systèmes cohérents. La variété obtenue est une variété projective, obtenue comme quotient de l'ouvert des points semi-stables d'une variété projective par l'action d'un groupe réductif : suivant la polarisation choisie on pourrait obtenir un quotient différent, et notre choix est adapté aux applications que nous avions en vue. Ainsi, nous ne retrouvons pas les espaces de modules introduits récemment par S. Bertram, S. Bradlow , O. Garcia-Prada, M. Thaddeus (*cf.* par exemple [32]), puisque, avec notre définition, pour les systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) de dimension n sur une variété projective lisse X de dimension n, on a obligatoirement $\mathrm{rg}(\mathrm{F}) \leq \dim \Gamma$, sauf dans le cas particulier $\Gamma = 0$, où l'on retrouve l'espace de modules de Simpson. Bien sûr, il faudrait vraisemblablement choisir une autre polarisation pour retrouver leurs espaces de modules. Les cosystèmes cohérents semi-stables (Γ, F) sont introduits au chapitre 6. Curieusement, si nous avons bien montré que lorsque l'on fixe le polynôme de Hilbert de F les cosystèmes cohérents semi-stables forment une famille limitée (*cf.* théorème 5.5), nous n'avons obtenu l'existence d'un espace de modules que pour les cosystèmes cohérents de dimension maximum n, ou de dimension 1 ou $n-1$: ces deux derniers cas se ramènent en fait au théorème d'existence des espaces

([2]) Notre terminologie diffère un peu de celle de Simpson : nous appelons multiplicité ce qu'il appelle rang.

de modules de systèmes cohérents (*cf.* théorème 5.6). Ces constructions suffisent cependant pour répondre aux objectifs que nous avions en vue.

Enfin le chapitre 8 est consacré à deux appendices. Le premier contient les sorites utiles sur les faisceaux purs et les faisceaux réflexifs de dimension d sur une variété de dimension n ; il propose aussi une autre démonstration d'un résultat très utile de Simpson (*cf.* théorème 8.1) sur les faisceaux qui peuvent se déformer en faisceaux purs de dimension d sur une variété projective lisse ; cette démonstration évite un argument non standard de cohérence auquel Simpson a fait appel. Le deuxième appendice est une mise au point concernant les théorèmes de dualité relative utilisés au cours de ce travail.

Notations

Variétés algébriques

Par variété algébrique, on entend schéma de type fini séparé sur un corps algébriquement clos ; par habitude, nous travaillons sur $\mathbb{C}$, mais tout ce qui suit reste vrai sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les points considérés seront en règle générale les points fermés, sauf peut-être dans quelques énoncés où il était commode de faire usage du critère de Serre. Ces variétés ne sont pas obligatoirement réduites, ni irréductibles.

Grassmannienne et schéma de Hilbert

Etant donné un faisceau algébrique cohérent F sur une variété algébrique X on note $\mathbf{Grass}(\mathrm{F})$ la grassmanienne relative de Grothendieck, représentant le foncteur qui associe à une variété algébrique $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ au-dessus de X l'ensemble des fibrés vectoriels quotients de l'image réciproque $f^*(\mathrm{F})$ de F sur Y : les points fermés de $\mathbf{Grass}(\mathrm{F})$ sont donc les paires (x, V) formées d'un point $x \in \mathrm{X}$ et d'un espace vectoriel quotient de la fibre $\mathrm{F}(x)$ au point x. La composante formée des espaces vectoriels quotients de rang r sera notée $\mathbf{Grass}(\mathrm{F}, r)$. Si F est localement libre, la grassmannienne $\mathbf{Grass}(\mathrm{F}^*, r)$ est notée $\mathbf{Grass}(r, \mathrm{F})$: ses points fermés correspondent aux couples (x, W), où x est un point de X et W un sous-espace vectoriel de dimension r de la fibre $\mathrm{F}(x)$. Si X une variété algébrique projective munie d'un fibré très ample $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)$, et E un faisceau algébrique cohérent sur X, on désigne par $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ le schéma de Hilbert dont les points fermés sont les faisceaux cohérents quotients de E et de polynôme de Hilbert P. Cette variété algébrique est construite par Grothendieck dans [10].

Foncteurs dérivés

Soient X une variété algébrique et E et F deux faisceaux algébriques sur X. Les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{E},\mathrm{F})$ sont les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathrm{F} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Le faisceau des homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$−modules de E dans F est noté $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E},\mathrm{F})$; les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathrm{E},\mathrm{F})$ sont les foncteurs dérivés à droite du foncteur $\mathrm{F} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés algébriques ; si E et F sont des faisceaux algébriques sur X, les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^i_f(\mathrm{E},\mathrm{F})$ sont les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathrm{F} \mapsto f_*(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E},\mathrm{F}))$.

2. Le module de Simpson

2.1. Semi-stabilité

On rappelle ici les notions de stabilité et semi-stabilité [31] pour les faisceaux algébriques cohérents. Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(1))$ une variété projective lisse de dimension n polarisée. Selon l'usage, on désigne par $\mathrm{K(X)}$ l'algèbre de Grothendieck des classes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules cohérents ; elle est équipée de la forme quadratique entière $u \mapsto \chi(u^2)$, dont la forme polaire associée est notée $< \, , \, >$. Si F est un faisceau algébrique cohérent sur X, on désigne par $\mathrm{P_F}$ le polynôme de Hilbert de F. Si Y est une section hyperplane , on désigne par h la classe dans $\mathrm{K(X)}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$, de sorte que $< \mathrm{F}, h^i >$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la restriction de F à une intersection complète générale de i sections hyperplanes. Le polynôme de Hilbert de X est donné par la formule

$$\mathrm{P_F}(m) = < \mathrm{F}, (1-h)^{-m} > = \sum_{d \geq i \geq 0} \mathrm{C}^i_{m+i-1} < \mathrm{F}, h^i >$$

Définition 2.1. — *On appelle multiplicité de* F *le nombre entier* r, *qu'on notera aussi* $\mathrm{mult(F)}$, *défini par*

$$r = \mathrm{mult(F)} = < \mathrm{F}, h^d >$$

Exemples :

1) Si le faisceau F est sans torsion on désigne par $\mathrm{rg\,(F)}$ le rang de F. On a alors $r = \mathrm{rg\,(F)} \times$ degré (X).

2) Si le faisceau F est de dimension $n-1$, la multiplicité r est aussi le degré de la variété de Fitting de F.

3) La sous-variété définie par l'annulateur de F est de degré $\leq r^2$.

Définition 2.2. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de dimension* d, *de polynôme de Hilbert* P *et de multiplicité* r *sur* X. *On appelle pente de* F *le nombre rationnel*

$$\mu := \frac{< \mathrm{F}, h^{d-1} >}{r}$$

et polynôme de Hilbert réduit de F *le polynôme*

$$p_{\mathrm{F}} := \frac{\mathrm{P}}{r}$$

Le polynôme de Hilbert réduit de F s'écrit donc

$$p_{\mathrm{F}}(m) = \mathrm{C}^{d}_{m+d-1} + \mu\ \mathrm{C}^{d-1}_{m+d-2} + \text{polynôme de degré } \leq d-2$$

Définition 2.3. — *(Pureté)*

Un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-module cohérent* F *de dimension* d *est dit pur de dimension* d *s'il n'a pas de sous-module cohérent non nul de dimension* $< d$.

Remarque 2.4. — Cette condition signifie que tous les points associés à F sont de dimension d ; elle équivaut à la condition suivante : pour tout point $x \in$ Supp F de hauteur $> n-d$, on a prof $\mathrm{F}_x \geq 1$. Comme dim $\mathrm{F}_x = \mathrm{ht}\,(x) - (n-d)$ on voit que si F est pur de dimension d, le localisé F_x est de Cohen-Macauley en tout point x de hauteur $n-d+1$, et que le fermé des point $x \in \mathrm{X}$ où F_x n'est pas de Cohen-Macaulay est de dimension $\leq d-2$.

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels ; on écrit $\mathrm{P} \leq \mathrm{Q}$ si $\mathrm{P}(m) \leq \mathrm{Q}(m)$ pour m assez grand (par valeurs positives). Autrement dit, les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique, en commençant par les termes de plus haut degré.

Définition 2.5. — *(Semi-stabilité)*

Soit F *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-module cohérent de dimension* d, *de multiplicité* r *et polynôme de Hilbert réduit* p. *On dit que* F *est semi-stable si*

(i) *il est pur de dimension* d

(ii) *pour tout sous-module cohérent non nul* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ *de polynôme de Hilbert réduit* p' *on a* $p' \leq p$.

On définit de même la *stabilité* , en demandant l'inégalité stricte lorsque F' est de multiplicité $r' < r$, et les notions de *μ-stabilité* et *μ-semi-stabilité* en remplaçant le polynôme de Hilbert par la pente. Comme dans le cas des faisceaux sans torsion, on a évidemment les implications suivantes

$$\begin{array}{ccc} \mu-\text{stable} & \Rightarrow & \text{stable} \\ & & \Downarrow \\ \mu-\text{semi}-\text{stable} & \Leftarrow & \text{semi}-\text{stable} \end{array}$$

Un faisceau *polystable* est une somme directe de faisceaux stables de même polynôme de Hilbert réduit.

2.2. Filtrations de Harder-Narasimhan

Rappelons d'abord un résultat, dû à Grothendieck [10], permettant de décider que certaines familles de quotients d'un faisceau donné sont limitées.

Lemme 2.6. —*(Grothendieck) Soit* F *un* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent pur de dimension d. Alors*

(i) *la pente des sous-modules cohérents non nuls* $F' \subset F$ *est majorée.*

(ii) *la famille des sous-modules* $F' \subset F$, *de pente fixée, et dont le quotient* F/F' *est pur de dimension d est limitée.*

Proposition 2.7. — *Soit* F *un* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent, pur de dimension d. Alors* F *a une filtration croissante par des sous-modules cohérent* $(F_i)_{i=1,\dots,l}$ *dont le gradué* $gr_i = F_i/F_{i-1}$ *satisfait aux conditions suivantes*

(i) *le gradué* gr_i *est semi-stable ;*

(ii) $p_{gr_i} > p_{gr_{i+1}}$ *pour* $i = 1, \dots, l$.

Cette filtration est unique.

Comme dans le cas classique des faisceaux sans torsion, cet énoncé est une conséquence facile du lemme de Grothendieck. La filtration ainsi obtenue s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de F, et le gradué associé le gradué de Harder-Narasimhan. Pour un module cohérent pur de dimension d on peut en particulier parler de p_{max} et p_{min} : il s'agit du polynôme de Hilbert réduit du premier et dernier terme respectivement du gradué de Harder-Narasimhan. De même, on peut pour un tel faisceau définir μ_{max} et μ_{min}.

Théorème 2.8. — *Soit* P *un polynôme de degré* d. *La famille des faisceaux* μ *-semi-stables de dimension* d, *de polynôme de Hilbert* $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$ *est limitée.*

En fait nous aurons besoin d'une version un peu plus générale de cet énoncé.

Théorème 2.9. — *Soit* P *un polynôme de degré* d, *et* C *une constante. La famille des* $\mathscr{O}_\mathrm{X}-$*cohérents purs de dimension* d, *de polynôme de Hilbert* $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$, *et tels que* $\mu_{max}(\mathrm{F}) \leq \mathrm{C}$, *est limitée.*

Cet énoncé est dû à C. Simpson [31]. Nous en donnons cependant une démonstration, car elle sera utile dans la suite ; elle suit d'assez près celle qui est proposée par C. Simpson. Dans le cas où $d = n$, c'est un résultat de Maruyama [24] , auquel nous allons nous ramener.

Démonstration. On peut évidemment supposer que la variété X est l'espace projectif $\mathbf{P}_n$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents F purs de dimension d, de polynôme de Hilbert P et satisfaisant à la condition de l'énoncé :

$$\mu_{max}(\mathrm{F}) \leq \mathrm{C} \tag{$*$}$$

Il suffit de montrer que la famille $\mathscr{F}_\mathrm{Y} \subset \mathscr{F}$ des faisceaux cohérents de $\mathscr{F}$ dont le support ne rencontre pas un sous-espace linéaire $\mathrm{Y} = \mathbf{P}_{n-d-1}$ fixé est limitée. En effet, le groupe projectif opère sur $\mathscr{F}$ et toute orbite rencontre $\mathscr{F}_\mathrm{Y}$. On peut alors considérer la projection $\pi : \mathbf{P}_n - \mathrm{Y} \to \mathbf{P}_d$ de centre Y sur un sous-espace linéaire $\mathbf{P}_d$ qui ne rencontre pas Y. Puisque F est à support propre dans $\mathbf{P}_n - \mathrm{Y}$, le faisceau cohérent $\mathrm{G} = \pi_*(\mathrm{F})$ est un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace projectif $\mathbf{P}_d$ et son polynôme de Hilbert est encore P. On va montrer que ce module satisfait encore à la condition $(*)$, quitte à changer éventuellement la constante C. D'après Maruyama [24] , ceci suffira pour vérifier que la famille de faisceaux G est limitée.

Lemme 2.10. — *Il existe une constante* C' *telle que pour tout faisceau* F *de* $\mathscr{F}$ *on ait*

$$\mu_{max}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{C}'$$

Désignons par S la sous-variété de $\mathbf{P}_n$ définie par l'annulateur de F. La projection sur $\mathbf{P}_d$ notée encore $\pi : \mathrm{S} \to \mathbf{P}_d$ est un morphisme fini, et l'on a $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_d}(1)) = \mathcal{O}_{\mathrm{S}}(1)$. En général ce morphisme n'est pas plat : c'est ici la principale difficulté de la démonstration. Cependant on a le lemme suivant :

Lemme 2.11. — *La sous-variété* S *définie par l'annulateur de* F *est pure de dimension d.*

Démonstration. Ceci signifie que le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$ est pur de dimension d. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$ est isomorphe à un sous-faisceau du faisceau des homomorphismes $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F},\mathrm{F})$. Il suffit donc de vérifier que ce dernier est pur de dimension d. Si on choisit un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(-i)^{\mathrm{N}} \to \mathrm{F}$ on obtient que le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F},\mathrm{F})$ s'identifie à un sous-module de $\mathrm{F}(i)^{\mathrm{N}}$; donc il est pur de dimension d. □

D'après la remarque 2.4 ceci a pour conséquence que la variété S est de Cohen-Macaulay en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2 dans S. En particulier, d'après par exemple Fulton [8], lemma A.7.1, la projection $\pi : \mathrm{S} \to \mathbf{P}_d$ est un morphisme plat en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2 dans S. Par suite, on peut trouver un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbf{P}_d$ dont le complémentaire est de codimension ≥ 2, et au-dessus duquel la projection π est plate.

Considérons l'algèbre $\mathcal{A} = \pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{S}})$. C'est un module cohérent sans torsion sur $\mathbf{P}_d$. On peut donc introduire les nombres rationnels $\mu_{min}(\mathcal{A})$ et $\mu_{max}(\mathcal{A})$. D'autre part, il y a correspondance bijective entre l'ensemble des sous-modules cohérents de F et l'ensemble des sous-$\mathcal{A}$−modules cohérents de G; cette correspondance est obtenue par image directe et donc conserve le polynôme de Hilbert.

Démonstration du lemme 2.10.

Soit G_1 le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de G ; par définition c'est un sous-module semi-stable de G tel que $\mu(\mathrm{G}_1) = \mu_{max}(\mathrm{G})$. Alors l'image G_1' du morphisme canonique $\mathrm{G}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_d}} \mathcal{A} \to \mathrm{G}$ est un sous-$\mathcal{A}$-module de G qui est donc l'image directe par π d'un sous-module F_1 de F. Le module F_1 a même pente que G_1', et l'hypothèse du lemme entraîne que $\mu(\mathrm{G}_1') \leq \mathrm{C}$. Considérons le faisceau cohérent sans torsion défini par

$$\mathrm{G}_1 \overline{\otimes} \mathcal{A} := \mathrm{G}_1 \otimes \mathcal{A}/\mathrm{Torsion}$$

quotient du produit tensoriel $G_1 \otimes \mathscr{A}$ sur l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_d}$ par son sous-module de torsion. Puisque G_1' est un quotient de $G_1 \overline{\otimes} \mathscr{A}$ on a les majorations $\mu_{min}(G_1 \overline{\otimes} \mathscr{A}) \leq \mu(G_1') \leq C$. Maintenant le faisceau G_1 étant semi-stable, on a d'après Maruyama [23]

$$\mu_{min}(G_1 \overline{\otimes} \mathscr{A}) = \mu(G_1) + \mu_{min}(\mathscr{A}) - 1.$$

On obtient donc $\mu(G_1) \leq C - \mu_{min}(\mathscr{A}) + 1$. On est ramené à montrer le lemme suivant :

Lemme 2.12. — *Le nombre $\mu_{min}(\mathscr{A})$ est minoré par une constante ne dépendant que de la multiplicité r de F et de n et d.*

Démonstration. Soit $B := Bl_Y(\mathbf{P}_n)$ l'éclaté de $\mathbf{P}_n$ le long du sous-espace $Y = \mathbf{P}_{n-d-1}$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbf{P}_n \\ \downarrow & & \\ \mathbf{P}_d & & \end{array}$$

dans lequel le morphisme vertical est un fibré localement trivial de fibre $\mathbf{P}_{n-d}$. La variété B sera équipée du fibré inversible relativement ample noté $\mathscr{O}_B(1)$ image réciproque de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$ par la projection $B \to \mathbf{P}_n$. Considérons le schéma de Hilbert relatif $\mathbf{H}^k := \mathbf{Hilb}^k(B/\mathbf{P}_d) \to \mathbf{P}_d$ dont les fibres sont les schémas de Hilbert qui paramètrent les sous-schémas de dimension 0 et de longueur k de $\mathbf{P}_{n-d}$, et posons

$$\mathbf{H} = \coprod_{k \leq r^2} \mathbf{H}^k.$$

Désignons par $Z \subset \mathbf{H} \times_{\mathbf{P}_d} B$ le sous-schéma universel, et considérons le diagramme standard

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} \times_{\mathbf{P}d} \mathbf{P}_{n-d} & \xrightarrow{p} & B \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H} & \rightarrow & \mathbf{P}_d \end{array}$$

Pour tout entier m, le faisceau $q_*(\mathscr{O}_Z(m))$ est cohérent, et le morphisme $q|_Z$ étant fini et plat, l'image directe commute aux changements de base. On peut alors, d'après le théorème B relatif appliqué au faisceau $\mathbf{H}$-plat $\mathscr{I}_Z(m)$, où $\mathscr{I}_Z$

est l'idéal de Z, trouver un entier m tel que que le morphisme canonique obtenu par image directe

$$q_*(\mathcal{O}_{\mathbf{H}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{B}}(m)) \to q_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}}(m))$$

soit surjectif : il suffit de le choisir assez grand. Le plus petit des entiers m possibles ne dépend évidemment que de n, d, r. Le théorème du changement de base montre en outre que le premier membre est l'image réciproque d'un faisceau localement libre sur $\mathbf{P}_d$, qui ne dépend que de (n, d, r).

Revenons au morphisme fini $\pi : \mathrm{S} \to \mathbf{P}_d$. Sur l'ouvert U de $\mathbf{P}_d$ au-dessus duquel π est plat, le schéma S s'obtient à partir de Z par un changement de base $f : \mathrm{U} \to \mathbf{H}$ d'après la propriété universelle de $\mathbf{H}$. Le théorème de changement de base montre que $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{S}}(m))|_{\mathrm{U}} = f^*(q_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}}(m)))$. Compte-tenu de la formule de projection, on a l'identification $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{S}}(m)) = \mathscr{A}(m)$ et par conséquent, le faisceau $\mathscr{A}(m)|_{\mathrm{U}}$ est le quotient d'un faisceau localement libre provenant de $\mathbf{P}_d$, indépendant de S. Puisque le complémentaire de U est de codimension 2, ceci suffit pour voir qu'il existe une constante $\mathrm{A} > 0$ telle que

$$\mu_{min}(\mathscr{A}(m)) \geq \mathrm{A}.$$

Ainsi $\mu_{min}(\mathscr{A}) \geq \mathrm{A} - m$. □

Dans cette démonstration, le polynôme de Hilbert de S n'intervient pas. Ainsi, la démonstration montre aussi l'énoncé suivant, qui sera utilisé au chapitre 4 :

Corollaire 2.13. — *Soit* S *une sous-variété pure de dimension d et de degré k de* X. *Alors $\mu_{min}(\mathcal{O}_{\mathrm{S}})$ est minoré par une constante qui ne dépend que de d, k et* X.

Fin de la démonstration du théorème 2.9.

On vient de démontrer que la famille des faisceaux G ainsi construite est limitée. Il reste à montrer que la famille des faisceaux F est limitée. La difficulté qui reste à surmonter est qu'on ne sait toujours pas que la famille de faisceaux $\mathscr{A}$ est limitée. Notons que l'ouvert $\mathbf{P}_n - \mathrm{Y}$ est isomorphe à l'espace total du fibré normal N de $\mathbf{P}_d$ dans $\mathbf{P}_n$ et que dans cette identification, la projection $\pi : \mathbf{P}_n - \mathrm{Y} \to \mathbf{P}_d$ devient la projection canonique $\mathrm{N} \to \mathbf{P}_d$, qu'on notera encore π. L'algèbre $\mathscr{A}$ est évidemment une algèbre quotient de l'algèbre $\mathscr{B} = \pi_*(\mathscr{O}_\mathrm{N}) = \oplus_i \mathrm{Sym}^i(\mathrm{N}^*)$. La donnée de F dans la famille $\mathscr{F}_\mathrm{Y}$ équivaut à celle d'un faisceau cohérent sur N à support propre sur $\mathbf{P}_d$. Une telle donnée est équivalente à la donnée du faisceau cohérent image directe $\mathrm{G} = \pi_*(\mathrm{F})$ et d'un morphisme d'algèbres $\mathscr{B} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ (*cf.* [11] , exercice 5.17). Un tel morphisme d'algèbres est déterminé par un morphisme $\mathrm{N}^* \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbf{P}_d$ satisfaisant à certaines conditions évidentes de commutation ; ces conditions de commutation définissent une sous-variété de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Hom}(\mathrm{N}^*, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G}))$, comme image réciproque de 0 par le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{N}^*, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G})) \to \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathrm{N}^*, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G}))$$

défini de la manière suivante : on associe au morphisme $f : \mathrm{N}^* \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ le morphisme $\wedge^2\mathrm{N}^* \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G}))$ défini par $u \wedge v \mapsto [f(u), f(v)]$, où u et v sont des sections locales de N^*. Par suite, la famille $\mathscr{F}_\mathrm{Y}$ est limitée. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 2.14. — L'algèbre $\mathscr{A}$ s'obtient comme image du morphisme d'algèbres $\mathscr{B} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G},\mathrm{G})$. Pour la famille de faisceaux cohérents $\mathscr{A}$ on a donc seulement un nombre fini de polynômes de Hilbert possibles, et il en est de même pour la famille des sous-variétés S considérée. Il résulte du lemme 2.12 que la famille $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ est une famille de faisceaux purs de dimension d qui satisfait aux conditions du théorème 2.8 : ainsi la famille des sous-variétés S est limitée. C'est ce que j'ai affirmé dans [19] , mais l'argument invoqué n'est pas suffisant : j'ignore si le théorème de Chow reste vrai pour une famille de sous-variétés pures de dimension d de degré $\leq r$ dans $\mathbf{P}_n$ qui ne sont pas forcément réduites.

2.3. L'espace de modules $\mathrm{M}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$

Fixons un polynôme p de degré d, et considérons la catégorie $\mathscr{C}(p)$ des faisceaux semi-stables F de polynôme de Hilbert réduit p. Il est facile de vérifier qu'on obtient ainsi une catégorie abélienne ; en plus elle est évidemment noethérienne et artinienne, ce qui permet de définir dans cette catégorie la notion de filtration de Jordan-Hölder : on entend par là une filtration

$$\{0\} \subset \mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2 \subset \cdots \subset \mathrm{F}_k = \mathrm{F}$$

telle que le gradué $gr_i(\mathrm{F}) = \mathrm{F}_i/\mathrm{F}_{i-1}$ soit stable ; le gradué $gr(\mathrm{F}) = \oplus gr_i(\mathrm{F})$ est alors bien défini à isomorphisme près. Deux faisceaux semi-stables F et G de $\mathscr{C}(p)$ sont dit S−équivalent si les gradués de Jordan-Hölder $gr(\mathrm{F})$ et $gr(\mathrm{G})$ sont isomorphes.

Soit P un polynôme de degré d. Une famille de faisceaux semi-stables sur X paramétrée par une variété algébrique S est un faisceau algébrique cohérent F sur $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$, plat sur S tel que pour tout point fermé $s \in \mathrm{S}$ le faisceau $\mathrm{F}(s)$ soit semi-stable. Pour une telle famille, le polynôme de Hilbert $\mathrm{P}_{\mathrm{F}(s)}$ est localement constant. On considère le foncteur $\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble $\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux semi-stables sur X, paramétrées par S, et de polynôme de Hilbert P.

Théorème 2.15. — *Il existe pour le foncteur* $\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ *un espace de modules grossier* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$. *Cet espace de modules a les propriétés suivantes :*

(i) *La variété algébrique* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ *est projective.*

(ii) *Les points fermés de* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ *sont les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* P.

(iii) *L'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux stables s'identifie à un ouvert de la variété* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$.

La propriété de module grossier de $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}))$ satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique $\mathbf{M}'$, et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}')$ il existe un morphisme et un seul $\varphi : \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) \to \mathbf{M}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}') \end{tikzcd}$$

Evidemment, cette propriété caractérise la variété $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$. Cet énoncé est démontré avec cette généralité par C. Simpson [31] ; il étend les énoncés bien connus de Gieseker [9] et Maruyama [22].

Support schématique

Supposons que X soit une surface projective lisse et polarisée, et que P soit de degré 1. Désignons par r la multiplicité et par χ la caractéristique d'Euler-Poincaré. On a donc $\mathrm{P}(m) = rm + \chi$. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}_{\mathrm{X}}(r)$ des courbes de degré r tracées sur la surface X. On a alors un morphisme

$$\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) \to \mathbf{Hilb}_{\mathrm{X}}(r)$$

qui associe à la classe de S—équivalence du faisceau F la courbe de degré r définie par par l'idéal de Fitting de F. Au-dessus d'un point correspondant à une courbe intègre $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, la fibre de ce morphisme s'identifie à la variété des $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-modules cohérents L sans torsion, de rang un et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ. En particulier, au-dessus d'un point représentant une courbe lisse Y, on obtient comme fibre la composante $\mathrm{Pic}_{\chi}(\mathrm{Y})$ du groupe de Picard des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles de caractéristique d'Euler-Poincaré χ.

Dans le cas où la variété X est de dimension n, le support schématique d'un faisceau de Cohen-Macaulay de dimension $n-1$ et de multiplicité r est l'hypersurface de degré r définie par l'idéal de Fitting de F. Si un faisceau de dimension $n-1$ est pur, il est de Cohen-Macaulay en dehors d'un fermé de codimension 3 dans X : on peut alors définir le support schématique de F par l'hypersurface de degré r de X qui prolonge l'hypersurface définie par l'idéal de Fitting sur l'ouvert où le faisceau F est de Cohen-Macaulay. Le support schématique définit encore un morphisme

$$\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) \to \mathbf{Hilb}_{\mathrm{X}}(r)$$

dans le schéma de Hilbert des hypersurfaces de degré r de X. La fibre de ce morphisme au-dessus d'un point représentant une hypersurface Y est l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{P})$ des $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-modules semi-stables de polynôme de Hilbert P.

2.4. Critère de semi-stabilité

Dans la suite, nous allons nous inspirer de la démonstration de Simpson du théorème 2.15 ; rappelons-en les grandes lignes. Elle repose d'abord sur un critère permettant de décrire la semi-stabilité en termes de sections, et sur un énoncé qui permet de reconnaître pour un faisceau semi-stable donné les sous-faisceaux cohérents de même polynôme de Hilbert réduit ; ces énoncés sont implicites dans la construction de Simpson. Soit P un polynôme de degré d, de terme dominant $r\frac{m^d}{d!}$. Pour tout entier m, on considère l'ensemble $\mathrm{S}_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux F purs de polynôme de Hilbert P et qui satisfont aux conditions suivantes

(i) $\mathrm{P}(m) \leq h^0(\mathrm{F}(m))$

(ii) Pour tout sous-module cohérent non nul $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ de multiplicité r', on a

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}$$

Considérons d'autre part l'ensemble $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux purs F de polynôme de Hilbert P qui satisfont à la propriété en quelque sorte duale :

(ii)* Pour tout module cohérent quotient $\mathrm{F} \to \mathrm{F}''$ pur de dimension d et de multiplicité r'', on a

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{r} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}''(m))}{r''}.$$

Il est clair que pour tout m, on a $\mathrm{S}_m(\mathrm{P}) \subset \mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$. Pour m assez grand, on peut dire beaucoup plus :

Proposition 2.16. — *(Critère de semi-stabilité)*
Le polynôme P *étant fixé, il existe un nombre a tel que pour tout $m \geq a$ les ensembles* $\mathrm{S}_m(\mathrm{P})$ *et* $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$ *coïncident avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* P.

Remarque 2.17. — On peut se demander s'il ne serait pas plus naturel d'introduire simplement l'ensemble $\mathrm{S}'_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents purs de polynôme de Hilbert P qui satisfont seulement à la condition (ii). Si $d = 1$, la condition (i) est effectivement automatique et on a alors

$S'_m \subset S^*_m$. Par contre, en dimension supérieure cette condition n'entraîne pas la semi-stabilité, même en choisissant m très grand.

Considérons par exemple l'idéal I_m défini par m^4 points en position générale dans le plan projectif $X = \mathbf{P}_2$. Le faisceau sans torsion $F_m = I_m(m^2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-m^2)$ est de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = c_2 = 0$, donc de polynôme de Hilbert fixé P. Il satisfait à la propriété 2 dès que $m \geq 4$; en effet, on a alors $h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(m^2+m)) \leq m^4$. Puisque les points sont choisis en position générale, ceci entraîne

$$h^0(I_m(m^2+m)) = 0,$$

et par suite $h^0(F_m(m)) = 0$. Ainsi, la condition (ii) est trivialement satisfaite bien que le faisceau F_m soit instable. Bien sûr, la condition (ii)* n'est pas satisfaite pour F_m puisque $P(m) = m^2 + 3m + 2$.

Venons-en à la description des filtrations de Jordan-Hölder. Etant donné un faisceau semi-stable F de dimension d et de multiplicité r et un entier m, désignons par $\mathrm{Max}_m(F)$ l'ensemble des sous-faisceaux cohérents $F' \subset F$ non nuls de multiplicité r' satisfaisant à la condition suivante :

$$\frac{h^0(F'(m))}{r'} = \frac{h^0(F(m))}{r}$$

Proposition 2.18. — *Soit* P *un polynôme de degré d. Il existe un nombre a tel que pour tout m* $\geq$ *a et tout faisceau semi-stable* F *de polynôme de Hilbert* P *l'ensemble* $\mathrm{Max}_m(F)$ *coïncide avec l'ensemble* $\mathrm{Max}(F)$ *des sous-faisceaux cohérents non nuls* $F' \subset F$ *ayant même polynôme de Hilbert réduit que* F.

La démonstration de ces deux énoncés fait intervenir bien sûr de façon essentielle le théorème B de Serre, une fois acquis le fait que certaines familles de faisceaux et de sous-faisceaux sont limitées. C'est le cas par exemple de la famille $\cup_{m \geq a} S^*_m(P)$ pour a assez grand. Pour obtenir cette information on utilise le théorème 2.9 et l'estimation suivante :

Lemme 2.19. —*(C. Simpson) Soit* F *un faisceau* μ*−semi-stable de dimension d, de multiplicité r et de pente* μ*. Il existe une constante* C *ne dépendant que* *de* r, d, *et des invariants numériques attachés à* X, *telle que*

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \begin{cases} \frac{1}{d!}(\mu + \mathrm{C})^d \text{ si } \mu + \mathrm{C} \geq 0 \\ 0 \text{ si } \mu + \mathrm{C} < 0 \end{cases}$$

2.5. Le schéma de Hilbert

Soit E un faisceau polystable ; si on écrit $\mathrm{E} = \oplus_i \mathrm{E}_i^{k_i}$, avec E_i stable de multiplicité r_i, le groupe Aut(E) des automorphismes est isomorphe au produit des groupes linéaires $Gl(k_i)$; on aura à considérer le sous-groupe $Sl(\mathrm{E})$ correspondant au sous-groupe des $(f_i) \in \prod_i Gl(k_i)$ tels que $\prod_i (\det f_i)^{r_i} = 1$. L'ensemble Max(E) des sous-faisceaux $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$ de polynôme de Hilbert réduit p_E est alors un produit de grassmanniennes.

Soit P un polynôme. Fixons un faisceau polystable E et considérons le schéma de Hilbert **Hilb**(E, P) des modules cohérents quotients du faisceau E, et de polynôme de Hilbert P. C'est une variété projective qui pour ℓ assez grand se trouve plongée dans la grassmannienne $\mathbf{Grass}(\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell)), \mathrm{P}(\ell))$ des espaces vectoriels quotients de $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell))$ de dimension $\mathrm{P}(\ell)$: Grothendieck la construit en effet comme sous-schéma fermé d'une telle grassmannienne [10] . Le groupe des automorphismes de E opère sur ce schéma de Hilbert et sur cette grassmannienne ; le plongement

$$\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P}) \hookrightarrow \mathbf{Grass}(\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell)), \mathrm{P}(\ell))$$

est équivariant. De plus, cette action s'étend en une action sur le fibré quotient canonique sur la grassmannienne, et par suite sur le déterminant du ce fibré : c'est le fibré inversible très ample qui fournit le plongement de Plücker. La variété **Hilb**(E, P) étant ainsi polarisée, on peut considérer l'ouvert $\mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ des points semi-stables pour l'action du groupe $Sl(\mathrm{E})$. Il est remarquable que cet ouvert ne dépend pas de ℓ, pourvu que ℓ soit choisi assez grand :

Proposition 2.20. — *Soit* r *la multiplicité de* E. *Si* ℓ *est assez grand, les points semi-stables pour l'action de* Sl(E) *sur* **Hilb**(E, P) *correspondent aux faisceaux quotients* $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *satisfaisant à la condition suivante : pour tout* $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max(E)}$, *de multiplicité* r', *on a,* F′ *désignant l'image de* E′ *dans* F

$$\frac{\mathrm{P_F}}{r} \leq \frac{\mathrm{P_{F'}}}{r'}$$

On pourra donc parler des points semi-stables du schéma de Hilbert, sans préciser quelle polarisation on a choisi. Nous n'avons pas de référence pour cette proposition, mais on peut trouver dans la littérature des énoncés voisins qui s'adaptent sans difficulté (*cf.* [25] , proposition 4.3, ou [20] , lemme 7.2). Dans la section 4, nous démontrerons d'ailleurs une généralisation de cet énoncé.

Pour démontrer le théorème 2.15, on choisit m assez grand pour que les propriétés suivantes soient vraies :

a) pour tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P, le faisceau $\mathrm{F}(m)$ est engendré par ses sections, et $\mathrm{H}^q(\mathrm{F}(m)) = 0$, pour $q > 0$, et la même chose pour tout sous-faisceau $\mathrm{F}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{F})$.
b) les conclusions des énoncés 2.16 et 2.18 sont vraies.

On se fixe un espace vectoriel H de dimension $\mathrm{P}(m)$ et on prend pour E le faisceau localement libre $\mathrm{E} = \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$, dont le groupe des automorphismes s'identifie à $\mathrm{G}l(\mathrm{H})$. Tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert P définit un point du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ tel que le morphisme induit $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ soit un isomorphisme. La proposition ci-dessus permet de montrer sans difficulté qu'un tel point est semi-stable sous l'action du groupe $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$. La réciproque est plus délicate, car il n'est pas évident qu'un point de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ semi-stable pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$ définisse un faisceau quotient semi-stable, ni même pur. L'idée remarquable de Simpson est de se placer dans l'adhérence schématique $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ de l'ouvert $\mathbf{Hilb}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ des modules quotients qui sont purs : dans ce fermé, il prouve en utilisant le théorème 8.1 qu'un point $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$−semi-stable définit un faisceau F quotient de E qui est semi-stable et tel que le morphisme induit $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ soit un isomorphisme. Les points semi-stables de cette adhérence définissent un sous-schéma localement fermé noté $\overline{\mathbf{Hilb}}^{ss}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$. Bien sûr, l'espace de modules est le quotient de Mumford

$$\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) = \overline{\mathbf{Hilb}}^{ss}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})/\mathrm{S}l(\mathrm{H})$$

et par construction, c'est une variété projective.

3. L'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m)$

Dans toute cette section, les faisceaux algébriques cohérents que l'on étudie sont de dimension 2 sur l'espace projectif $\mathbf{P}_3$. Soit F un faisceau cohérent de dimension 2, de multiplicité r, et caractérique d'Euler-Poincaré χ sur $\mathbf{P}_3$. Son polynôme de Hilbert est de la forme $\mathrm{P_F}(m) = \frac{r}{2}m^2 + \alpha_1 m + \alpha_2$ où les nombres rationnels α_i sont donnés par

$$\begin{aligned} \alpha_1 =& \frac{r}{2} + c \\ \alpha_2 =& \chi \end{aligned}$$

où $c =< \mathrm{F}, h >$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la restriction de F à une section hyperplane générale. On considère le cas où F est de multiplicité $r = 2$.

Lemme 3.1. — *(Inégalité de Bogomolov) Soit* F *un faisceau* $\mu-$*semi-stable de dimension* 2, *de multiplicité* 2, *et caractérique d'Euler-Poincaré* χ *sur* $\mathbf{P}_3$ *; on pose* $c =< \mathrm{F}, h >$. *Alors*

$$\chi \le \frac{1}{4}[c(c+2)+1]$$

Démonstration. On considère une projection de centre $a \in \mathbf{P}_3$ n'appartenant pas au support de F sur un plan $\mathbf{P}_2$. A un tel faisceau correspond une paire (E, φ) formé d'un faisceau E sans torsion de rang 2 sur $\mathbf{P}_2$ et d'un morphisme $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}(1)$ et comme pour les faisceaux de Higgs, cette paire est semi-stable au sens suivant : pour tout sous-faisceau cohérent non nul $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$ tel que $\varphi(\mathrm{E}') \subset \mathrm{E}'(1)$ on a $\mu(\mathrm{E}') \le \mu(\mathrm{E})$. Cette condition impose que E est $\mu-$semi-stable, ou qu'il existe une extension

$$0 \to \mathrm{E}' \to \mathrm{E} \to \mathrm{E}'' \to 0$$

où E′ et E″ sont des faisceaux de rang 1 sans torsion de classes de Chern μ' et μ'' telles que $\mu' - \mu'' = 1$. Dans le cas où E est semi-stable, on sait que ses classes de Chern c_1 et c_2 sont liées par l'inégalité $c_2 - \frac{1}{4}c_1^2 \geq 0$, et de la formule de Riemann-Roch, il résulte l'inégalité $\chi \leq \mu(\mu+1)$. Compte-tenu du fait que $2\mu = c$ ceci conduit à l'inégalité $\chi \leq \frac{1}{4}c(c+2)$. Dans le second cas, on a seulement l'inégalité $c_2 - \frac{1}{4}c_1^2 \geq -\frac{1}{4}$, comme on le voit en se ramenant au cas $\mu' = 0$; par suite $\chi \leq \mu(\mu+1) + \frac{1}{4}$, ce qui fournit la majoration de l'énoncé. □

Théorème 3.2. — *Soit* $\mathbf{N}_2$ *le sous-schéma fermé de la variété de modules* $\mathbf{N} := \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m)$, *défini par les points représentant des faisceaux semi-stables* F *satisfaisant à la condition déterminantielle*

$$\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) \geq 2.$$

(i) *La variété* $\mathbf{N}_2$ *est une variété projective irréductible et normale, de dimension 13, dont les singularités sont rationnelles. C'est une variété rationnelle.*

(ii) *Le complémentaire* U *de* $\mathbf{N}_2$ *est un ouvert irréductible et lisse de dimension 9 dont les points représentent des faisceaux de Cohen-Macaulay stables. C'est une variété rationnelle.*

Corollaire 3.3. — *La variété* $\mathbf{N} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m)$ *a deux composantes irréductibles* $\mathbf{N}_2$ *de dimension 13 et* $\mathbf{N}_0 = \overline{\mathrm{U}}$ *de dimension 9 ; chacune de ces composantes est rationnelle.*

On pourra en outre constater que ces deux composantes se coupent en dimension 8. Le support d'un faisceau F représentant un point de l'intersection, défini en dehors d'un nombre fini de points par la quadrique associée à l'idéal de Fitting est une quadrique singulière. Il est vraisemblable que la variété de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m)$ est réduite. La démonstration du théorème repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3.4. — *Soit* F *un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* m^2+3m. *Alors*

$$\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) = h^0(\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}))$$

et ce nombre est ≤ 2.

Ce nombre est donc le nombre de points, comptés avec multiplicités, où le faisceau F n'est pas de Cohen-Macaulay.

Lemme 3.5. — *Tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* $m^2 + 3m$ *qui n'est pas de Cohen-Macaulay, est* S$-$*équivalent à un faisceau semi-stable* F *tel que* $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) = 2$.

Ainsi, les faisceaux semi-stables qui représentent des points de U sont obligatoirement de Cohen-Macaulay. Réciproquement, il résultera de la proposition 3.18 que tout faisceau semi-stable de Cohen-Macaulay est en fait stable (et même $\mu-$stable) ; un tel faisceau définit donc un point de U. Par passage au bidual, la démonstration de ces lemmes se ramène à l'étude des faisceaux $\mu-$semi-stables de Cohen-Macaulay de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + \ell$, avec $\ell \geq 0$.

3.1. Nombres de Hodge

La description des faisceaux $\mu-$semi-stables de Cohen-Macaaulay fait appel à la suite spectrale de Beilinson : on doit d'abord déterminer quels sont les nombres de Hodge de ces faisceaux.

Faisceaux semi-stables
de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 2$

Proposition 3.6. — *Tout faisceau* $\mu-$*semi-stable* F *de polynôme de Hilbert* $m^2 + 3m + 2$ *est semi-stable ; c'est le conoyau d'un morphisme de Kronecker semi-stable*

$$\mathscr{O}(-1)^2 \to \mathscr{O}^2$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'en vertu du lemme 3.1 un tel faisceau est obligatoirement de Cohen-Macaulay, et son support schématique, défini par son idéal de Fitting, est une quadrique C. Si F n'était pas semi-stable, il aurait un sous-faisceau de multiplicité 1 et de polynôme de Hilbert $\frac{1}{2}(m^2+3m)+k$, avec $k \geq 2$. C'est absurde. Pour voir que F est le conoyau d'un tel morphisme de Kronecker, on calcule les nombres de Hodge $h^q(\mathrm{F}(j))$ pour $-3 \leq j \leq 0$ et on applique la suite spectrale de Beilinson.

Remarquons d'abord que le faisceau structural d'une quadrique est stable. On a alors $h^0(\mathrm{F}(-1)) = 0$, sinon il existerait des morphismes non nuls $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}(1) \to \mathrm{F}$, ce qui est absurde, car le polynôme de Hilbert de $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}(1)$ est $(m+2)^2$. Il en résulte que $h^0(\mathrm{F}(-i)) = 0$ pour $i \geq 1$. Du théorème de dualité de Serre, il résulte $\mathrm{H}^2(\mathrm{F}(-i))^* \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(-2+i))$ et par suite $h^2(\mathrm{F}(-i)) = 0$ pour $i \leq 2$. On obtient alors d'après la définition du polynôme de Hilbert $h^1(\mathrm{F}(-1)) = h^1(\mathrm{F}(-2)) = 0$. Si on considère un plan général P, la restriction $\mathrm{F}|_{\mathrm{P}}$ est encore de Cohen-Macaulay, et obtient la suite exacte la suite exacte

$$0 \to \mathrm{F}(-1) \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}|_{\mathrm{P}} \to 0.$$

Après tensorisation par $\mathcal{O}(-1)$, on obtient $h^1(\mathrm{F}(-1)|_{\mathrm{P}}) = 0$: ceci entraîne que cette restriction est semi-stable, et donc $h^1(\mathrm{F}|_{\mathrm{P}}) = 0$. Mais alors la même suite exacte fournit $h^1(\mathrm{F}) = 0$. Du fait que F est de caractéristique d'Euler-Poincaré 2, on tire $h^0(\mathrm{F}) = 2$. Maintenant, le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(1))$ satisfait aux mêmes conditions que F : on a donc $\dim \mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(1)) = 2$, et en utilisant le théorème de dualité de Serre, on obtient $h^2(\mathrm{F}(-3)) = 2$. Ainsi, on obtient pour les nombres de Hodge $h^q(\mathrm{F}(j))$, pour $-3 \leq j \leq -1$ le tableau suivant :

2	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	2

Il résulte maintenant de la suite spectrale de Beilinson que le faisceau F est le conoyau d'un morphisme $\mathcal{O}(-1)^2 \to \mathcal{O}^2$ génériquement injectif : ceci implique évidemment que c'est un module de Kronecker semi-stable. □

Corollaire 3.7. — *L'espace de modules* $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m+2)$ *est isomorphe au quotient de Mumford*

$$\mathbf{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))^2)^{ss}/\mathrm{G}l(2, \mathbb{C})$$

Remarque 3.8. — Cette variété est irréductible, et normale de dimension 9, lisse en dehors des points stables, c'est-à-dire en dehors du fermé de dimension

6, des points qui représentent les faisceaux du type $\mathcal{O}_{P'} \oplus \mathcal{O}_{P''}$, où P′ et P″ sont des plans de $\mathbf{P}_3$. De plus, d'après le théorème de Boutot [4] ses singularités sont rationnelles. Par ailleurs, le morphisme canonique

$$\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m+2) \to \mathbf{P}_9 := |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(2)|$$

qui associe à la classe d'un faisceau F la quadrique définie par son support schématique est un revêtement de degré 2, ramifié au-dessus de l'hypersurface des quadriques singulières. Au-dessus d'un point correspondant à une quadrique lisse C, la fibre est constituée des deux faisceaux inversibles $\mathcal{O}_C(1,0)$ et $\mathcal{O}_C(0,1)$. Au-dessus d'un point correspondant à un cône, on trouve un seul point, correspondant au faisceau $F = I(1)$, où I est l'idéal d'une génératrice du cône. Au-dessus d'un quadrique décomposée en deux plans P′ et P″, on trouve la somme directe $\mathcal{O}_{P'} \oplus \mathcal{O}_{P''}$.

Remarque 3.9. — Il est bien connu que la variété ci-dessus est rationnelle ; on peut le voir en projetant à partir d'un centre de projection a sur $\mathbf{P}_2$ l'ouvert U_a correspondant aux faisceaux stables dont le support ne contient pas a : alors le quotient s'interprète comme variété de modules des paires (E, φ) stables, où E est le fibré trivial sur $\mathbf{P}_2$ et $\varphi : E \to E(1)$ un morphisme de fibrés : ainsi, la variété $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m+2)$ est birationnelle au quotient de Mumford

$$\mathrm{Hom}(E, E(1))^{ss}/\mathrm{Aut}(E)$$

où le groupe $\mathrm{Aut}(E) \simeq \mathrm{G}l(2, \mathbb{C})$ agit sur $\mathrm{Hom}(E, E(1))$ par conjugaison. Une fois choisie une base de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)))$, se donner un élément de $\mathrm{Hom}(E, E(1))$ revient à se donner 3 matrices 2×2, et le quotient ci-dessus est bien rationnel.

Faisceaux de Cohen-Macaulay μ–semi-stables de polynôme de Hilbert m^2+3m+1

Lemme 3.10. — *Soit $Q := Q_{\mathbf{P}_3}$ le fibré quotient canonique de rang 3 sur l'espace projectif $\mathbf{P}_3$. Alors on a un isomorphisme canonique* $H^0(Q) \simeq \mathrm{Hom}(Q, \wedge^2 Q)$.

Démonstration. Le produit extérieur définit un morphisme injectif de fibrés $\mathrm{Q} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Q}, \wedge^2\mathrm{Q})$; il en résulte une inclusion $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \wedge^2\mathrm{Q})$. Par ailleurs, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Q}(-1) \to \wedge^2\mathscr{O}^4 \to \wedge^2\mathrm{Q} \to 0$$

d'où l'on tire un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \wedge^2\mathrm{Q}) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}(-1))$ Comme le fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Q}, \mathrm{Q})$ est $\mu-$semi-stable de classes de Chern $c_1 = 0$, on tire de la formule de Riemann-Roch

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}(-1)) &= -\,\chi(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}(-1)) \\ &= (2rc_2 - (r-1)c_1^2)(\mathrm{Q}) = 4\end{aligned}$$

Par suite, l'inclusion ci-dessus est un isomorphisme. □

Proposition 3.11. — *Soit* F *un faisceau de Cohen-Macaulay $\mu-$semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 1$. Alors il existe des plans* P' *et* P'', *un point* $a \in \mathrm{P}' \cap \mathrm{P}''$ *et une suite exacte*

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{P}'} \to \mathrm{F} \to \mathrm{I}'' \to 0$$

où I'' *est l'idéal de* $\mathscr{O}_{\mathrm{P}''}$ *défini par le point* a.

Démonstration. On a encore comme dans la démonstration de la proposition 3.6 ci-dessus $h^0(\mathrm{F}(-i)) = 0$ pour $i > 0$ et par dualité de Serre, $h^2(\mathrm{F}(-i)) = 0$ pour $i \leq 2$. Par projection sur le plan $\mathbf{P}_2$ à partir d'un centre de projection c n'appartenant pas au support de F, on obtient une paire μ-semi-stable (E, φ), où E est un fibré vectoriel de rang 2, de classes de Chern $(0, 1)$. Mais, comme on l'a vu dans la démonstration de l'inégalité de Bogomolov, ceci impose que le fibré E est lui-même $\mu-$semi-stable : on a alors une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathrm{E} \to \mathrm{I} \to 0$$

où I est l'idéal d'un point de $\mathbf{P}_2$. Il en résulte que pour le faisceau F lui-même, on a $h^0(\mathrm{F}) = 1$; cette assertion vaut aussi pour le faisceau $\mathrm{F}^* = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-1))$ lui-même $\mu-$semi-stable et de même polynôme de Hilbert. Par dualité de Serre, on obtient $h^2(\mathrm{F}(-3)) = 1$. Finalement, compte-tenu du polynôme de Hilbert, on obtient pour les nombres de Hodge $h^q(\mathrm{F}(j))$ les valeurs suivantes pour $-3 \leq j \leq 0$ et $0 \leq q \leq 2$

1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	0	1

La suite spectrale de Beilinson, dont l'aboutissement est F en degré 0, et 0 en degré non nul, fournit un morphisme

$$d_1^{-2,1} : \mathrm{H}^1(\mathrm{F}(-2)) \otimes \wedge^2\mathrm{Q}^* \to \mathrm{H}^1(\mathrm{F}(-1)) \otimes \mathrm{Q}^*.$$

Compte-tenu des nombres de Hodge, ce morphisme est conjugué au morphisme $\wedge^2\mathrm{Q}^* \to \mathrm{Q}^*$ donné par le produit intérieur par une section $v \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$. Cette section v est forcément non nulle, sinon F aurait un faisceau quotient de dimension 3. Alors $\mathrm{E}_2^{-2,1} = \ker d_1^{-2,1} \simeq \mathcal{O}(-1)$ et $\mathrm{E}_2^{-1,1} = \operatorname{coker} d_1^{-1,1} \simeq \mathrm{I}_a$ où a est le point de $\mathbf{P}_3$ où la section v s'annule, et où I_a est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$ défini par le point a. On a alors des morphismes d_2,

$$\begin{aligned} d_2^{-3,2} &: \mathcal{O}(-1) \to \mathrm{I}_a \\ d_2^{-2,1} &: \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \end{aligned}$$

génériquement injectifs, dont les conoyaux sont les faisceaux I'' et $\mathcal{O}_{\mathrm{P}'}$ de l'énoncé. Ceci fournit la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{P}'} \to \mathrm{F} \to \mathrm{I}'' \to 0$$

que nous avions annoncée. Remarquons que le faisceau F étant supposé de Cohen-Macaulay, le point a doit forcément appartenir à l'intersection $\mathrm{P}' \cap \mathrm{P}''$. ◻

Corollaire 3.12. — *Il n'existe pas de faisceau de Cohen-Macaulay semi-stable de polynôme de Hilbert* $m^2 + 3m + 1$.

Proposition 3.13. — *Considérons deux plans distincts* P' *et* P'', *a un point de* $\mathrm{P}' \cap \mathrm{P}''$ *et les extensions*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{P}'} \to \mathrm{F} \to \mathrm{I}'' \to 0$$

où I'' est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}''}$ défini par le point a. Une telle extension, si elle est suffisamment générale définit un faisceau F de Cohen-Macaulay et μ–semi-stable.

Démonstration. Désignons par ℓ la droite intersection de P' et P''. Soient z' et z'' les équations de P' et P'' et z une forme linéaire indépendante de z' et z'' et s'annulant en a. On a alors une résolution

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{P}''}(-2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}} \mathcal{O}_{\mathrm{P}''}(-1)^2 \to \mathrm{I}'' \to 0$$

qui conduit à la suite exacte

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'}) \to \mathcal{O}_\ell(2)^2 \xrightarrow{(z\ 0)} \mathcal{O}_\ell(3) \to \underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'}) \to 0$$

Il en résulte que $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(2))$ et par suite $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'}) = 3$. Donc il existe des extensions non triviales. Soit donc une telle extension, donnée par un élément $w \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(2))$. Pour voir si F est de Cohen-Macaulay, il suffit de vérifier que $\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}) = 0$. Mais on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}_{\mathrm{P}'}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{I}'', \mathcal{O}) & \to & \underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}) \to 0 \\ \| & & \| & & \\ \mathcal{O}_{\mathrm{P}'}(1) & & \mathbb{C}_a & & \end{array}$$

dans laquelle la flèche de liaison δ est l'accouplement de Yoneda par la classe $w \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'})$; cette flèche s'identifie à la multiplication par la section w de $\mathcal{O}_\ell(2)$, correspondant à la structure de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}'}$-module de $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'})$, suivie de l'évaluation au point a. Ainsi, le faisceau F sera de Cohen-Macaulay si la section w ne s'annule pas en a. □

Nous allons décrire un paramétrage pour ces faisceaux μ–semi-stables, par une variété lisse et irréductible. Ce paramétrage ne sera pas utilisé dans l'immédiat, mais nous sera utile au chapitre 7. On peut songer bien sûr à utiliser les extensions ci-dessus, mais la difficulté qui se présente par cette méthode est que la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}'', \mathcal{O}_{\mathrm{P}'})$ ne reste pas constante quand P' et I'' varient.

Proposition 3.14. — *Tout faisceau μ−semi-stable* G *de Cohen-Macaulay de polynôme de Hilbert m^2+3m+1 est le conoyau d'un morphisme génériquement injectif*

$$u : \wedge^2 \mathrm{Q}^* \oplus \wedge^3 \mathrm{Q}^* \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*$$

Démonstration. Dans la suite spectrale de la proposition 3.11 les morphismes d_2 se relèvent au niveau E_1; d'autre part le morphisme canonique $\mathrm{E}_1^{-1,1} = \mathrm{Q}^* \to \mathrm{E}_3^{-1,1}$ se relève en un morphisme $\mathrm{Q}^* \to \mathrm{G}$. L'énoncé en résulte : cet énoncé est d'ailleurs, comme nous l'a signalé Trautmann, un cas particulier d'une version sophistiquée d'un résultat de Beilinson. □

Il résulte de cet énoncé que l'on a un paramétrage pour les faisceaux μ−semi-stables de polynômes de Hilbert $m^2 + 3m + 1$ par une variété lisse et irréductible de dimension 20 : toutefois, cette variété ne possède pas de propriété universelle simple, et nous préférerons un ouvert d'un schéma de Hilbert pour paramétrer ces faisceaux.

Corollaire 3.15. — *Soit* K *un espace vectoriel de dimension 5 ; considérons le fibré vectoriel* $\mathrm{E} = \mathrm{K} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1)$. *Dans le schéma de Hilbert* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, m^2+3m+1)$ *les points représentant les quotients* $\mathrm{E} \to \mathrm{G}$ *satisfaisant aux conditions suivantes*
(i) *le faisceau* G *est μ−semi-stable et de Cohen-Macaulay ;*
(ii) *le morphisme d'évaluation* $\mathrm{K} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{G}(1))$ *est un isomorphisme*
constituent un ouvert **V** *non vide, irréductible et lisse de dimension* 33.

Démonstration. La condition (i) définit bien sûr un ouvert. Pour tout point de cet ouvert représentant un quotient G, le faisceau G(1) satisfait à la condition $h^q(\mathrm{G}(n)) = 0$ si $q \geq 1$ et $n \geq 0$. Il en résulte que les conditions (i) et (ii) définissent un ouvert. Considérons dans l'espace vectoriel (de dimension 20) $\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathrm{Q}^* \oplus \wedge^3\mathrm{Q}^*, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*)$ l'ouvert **W** des morphismes génériquement injectifs u pour lesquels le conoyau G_u est μ−semi-stable. Alors $\mathrm{G}_u(1)$ est engendré par ses sections et $h^0(\mathrm{G}_u(1)) = 5$. La variété **R** des couples (u, φ) où $u \in \mathbf{W}$ et où φ est un isomorphisme $\mathrm{K} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_u(1))$ est un fibré principal de groupe structural $\mathrm{G}l(5)$. Par la propriété universelle du schéma de Hilbert, on obtient un morphisme surjectif $p_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{V}$, et qui a des clairement des sections locales : il suffit de refaire la construction de la proposition 3.14 avec paramètres. Le groupe de dimension 12,

$$\mathrm{Aut}(\wedge^2 Q^* \oplus \wedge^3 Q^*) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus Q^*)$$

opère par conjugaison sur $\mathbf{W}$ et par suite sur $\mathbf{R}$. Cette action est libre ; le morphisme $p_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{V}$ est un quotient géométrique de $\mathbf{R}$ par cette action. On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbf{W} & & \end{array}$$

dans lequel les morphismes p_1 et p_2 sont des fibrés principaux localement triviaux. La variété $\mathbf{R}$ est irréductible et lisse de dimension $20+25 = 45$; par suite, la variété $\mathbf{V}$ est lisse et irréductible de dimension 33. □

Corollaire 3.16. — *L'ouvert* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{Hilb}(E, m^2+3m+1)$ *décrit ci-dessus paramètre les faisceaux* μ*−semi-stables de polynôme de Hilbert* m^2+3m+1.

Démonstration. Il suffit de constater que pour tout faisceau μ−semi-stable G de polynôme de Hilbert m^2+3m+1, le faisceau G(1) est engendré par ses sections, et que $h^0(\mathrm{G}(1)) = 5$. C'est évident, par exemple d'après la description 3.14.

Faisceaux semi-stables de Cohen-Macaulay
de polynôme de Hilbert m^2+3m

Lemme 3.17. — *Soit* F *un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* m^2+3m. *Si* $h^0(\mathrm{F}) \neq 0$, *le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ *est de longueur 2. En particulier,* F *n'est pas de Cohen-Macaulay.*

Démonstration. Soit C la quadrique définie, en dehors d'un nombre fini de points, par l'idéal de Fitting de F. Si $h^0(\mathrm{F}) \neq 0$, il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{O}_{\mathrm{C}} \to \mathrm{F}$ non nul. Si l'image de φ était de multiplicité 1, il existerait un plan $\mathrm{P} \subset \mathrm{C}$ et un morphisme non nul $\mathcal{O}_{\mathrm{P}} \to \mathrm{F}$: mais ceci est contradictoire avec la semi-stabilité. Par suite, le morphisme φ est injectif. Désignons par G son conoyau : on a donc la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{C}} \to \mathrm{F} \to \mathrm{G} \to 0$$

et G est un faisceau cohérent de polynôme de Hilbert $m-1$, donc de dimension 1 ; il résulte du lemme 3.1 que le quotient G est obligatoirement un faisceau pur. Son idéal de Fitting définit une droite ℓ, et G est donc isomorphe à $\mathcal{O}_\ell(-2)$. Par dualité, et compte-tenu du fait que $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$ est de Cohen-Macaulay, on obtient la suite exacte

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(2) \to \mathcal{O}_\ell(4) \to \underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \to 0$$

ce qui implique le résultat. □

Proposition 3.18. — *Tout faisceau* F *de Cohen-Macaulay semi-stable de polynôme de Hilbert m^2+3m est μ-stable, et c'est le conoyau d'un morphisme stable $f : \mathcal{O}^2 \otimes \wedge^2\mathrm{Q}^* \to \mathcal{O}^2 \otimes \mathrm{Q}^*$*

Par morphisme stable, on entend qu'il est donné par un morphisme de Kronecker $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$ stable.

Démonstration. Le fait que le faisceau F soit μ-stable évident : sinon il serait extension

$$0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$$

avec F′ et F″ purs de polynômes de Hilbert $\frac{1}{2}(m^2+3m)-k$ et $\frac{1}{2}(m^2+3m)+k$, respectivement avec $k \geq 0$. Mais ceci implique que F n'est pas de Cohen-Macaulay. Reste à donner la description d'un tel faisceau. Ici encore, on va utiliser la suite spectrale de Beilinson : il faut donc encore calculer les nombres de Hodge.

D'après le lemme ci-dessus, on a $h^0(\mathrm{F}(-i)) = 0$ pour $i \geq 0$; par dualité de Serre, C désignant la quadrique définie par le support schématique de F, on a

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{F}(-i))^* = \mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(i-2)).$$

La stabilité de F entraîne $h^2(\mathrm{F}(-i)) = 0$ pour $i \leq 2$. Montrons que l'on a aussi $h^2(\mathrm{F}(-3)) = 0$, ou ce qui revient au même par dualité de Serre qu'il n'existe pas de morphisme non nul $\mathrm{F} \to \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(1)$. Supposons qu'il existe un tel morphisme, d'image I. Si I est de multiplicité 1, son polynôme de Hilbert est de la forme $\frac{1}{2}(m^2+3m)+k$, avec $k=0$ ou 1. Ceci contredit la μ-stabilité de F. Par suite, φ est injectif, et on a alors une suite exacte

$$0 \to \mathrm{F} \to \mathcal{O}_{\mathrm{C}}(1) \to \mathrm{G} \to 0$$

où G est un faisceau de dimension 1 de polynôme de Hilbert $m+4$. Puisque F est de Cohen-Macaulay, le quotient G est obligatoirement pur de dimension 1, et donc de la forme $\mathcal{O}_\ell(3)$, où ℓ est une droite de C. Mais alors on aurait un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{\mathrm{C}} \to \mathcal{O}_\ell(2)$ ce qui est absurde. De l'expression du polynôme de Hilbert, on obtient que les nombres de Hodge $h^q(\mathrm{F}(-i))$ sont donnés par le tableau suivant, pour $-3 \leq j \leq 0$ et $0 \leq q \leq 2$:

0	0	0	0
0	2	2	0
0	0	0	0

Soient A et B deux espaces vectoriels de dimension 2. La suite spectrale de Beilinson fournit, à conjugaison près par $\mathrm{G}l(\mathrm{A}) \times \mathrm{G}l(\mathrm{B})$ un morphisme f : $\mathrm{A} \otimes \wedge^2 \mathrm{Q}^* \to \mathrm{B} \otimes \mathrm{Q}^*$ génériquement injectif, et de conoyau isomorphe à F. Ce morphisme est évidemment stable, sinon le morphisme f ne serait pas génériquement injectif. □

Démonstration du lemme 3.4

Soit F un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert m^2+3m. D'après la suite spectrale reliant les Ext globaux et les <u>Ext</u> locaux, il s'agit de vérifier que $h^q(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})) = 0$ pour $i = 1$ et 2. Considérons le dual $\mathrm{F}^* = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1))$. Puisque F est pur, il existe une suite exacte

$$0 \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}^{**} \to \mathrm{T} \to 0$$

avec T de longueur finie. Le faisceau F^{**} est un faisceau de Cohen-Macaulay, μ-semi-stable, de polynôme de Hilbert $m^2+3m+\ell$, où ℓ est la longueur de T, et il en est de même de F^*. D'après le lemme 3.1 on a $\ell \leq 2$. Si $\ell > 0$ il résulte des deux premiers tableaux de nombres de Hodge, appliqués au faisceau F^*, que $h^q(\mathrm{F}^*(1)) = 0$ pour $q = 1$ et 2. Si $\ell = 0$, le faisceau F est de Cohen-Macaulay, et μ-stable, et il en est de même de F^*. Du dernier tableau de nombres de Hodge ci-dessus, il résulte encore que $h^q(\mathrm{F}^*(1)) = 0$ pour $q = 1$ et 2. D'où l'énoncé.

Démonstration du lemme 3.5

Il s'agit de voir que tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert m^2+3m, tel que $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 1$ est S-équivalent à un faisceau semi-stable G tel que $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{G}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 2$. D'après la démonstration ci-dessus, le faisceau F^{**} est μ−semi-stable de polynôme de Hilbert m^2+3m+1, et le faisceau $\mathrm{T} = \mathrm{F}^{**}/\mathrm{F}$ est alors isomorphe au faisceau structural d'un point a' ; considérons la suite exacte, appliquée à F^{**}, de la proposition 3.11

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{P}'} \to \mathrm{F}^{**} \to \mathrm{I}'' \to 0$$

Le morphisme composé $\mathcal{O}_{\mathrm{P}'} \to \mathrm{T}$ n'est certainement pas nul, sinon $\mathcal{O}_{\mathrm{P}'}$ serait un sous-faisceau de F, ce qui contredit la semi-stabilité de F. Autrement dit, le point a' appartient à P'. Soit I' l'idéal de a' dans $\mathcal{O}_{\mathrm{P}'}$. On a alors une suite exacte $0 \to \mathrm{I}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{I}'' \to 0$, ce qui prouve que F est S−équivalent à $\mathrm{I}' \oplus \mathrm{I}''$. Ceci démontre le lemme. □

3.2. L'ouvert U

Rappelons que $\mathbf{N}_2$ désigne le fermé de $\mathbf{N}$ des points dont au moins un représentant F a deux points singuliers (comptés avec multiplicités), c'est-à-dire où F n'est pas de Cohen-Macaulay. L'ouvert U est le complémentaire de $\mathbf{N}_2$.

Corollaire 3.19. — *Tout faisceau* F *représentant un point de l'ouvert* U *est de Cohen-Macaulay. Inversement, tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert m^2+3m et de Cohen-Macaulay est μ−stable et définit un point de* U.

Corollaire 3.20. — *L'ouvert* U *est isomorphe à un ouvert du quotient de Mumford*

$$\mathbf{Grass}^{ss}(2, \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})^2)/\mathrm{G}l(2, \mathbb{C}).$$

En particulier U *est lisse, irréductible et rationnel de dimension* 9.

Ce quotient de Mumford est le même celui du corollaire 3.7. L'énoncé en résulte. □

En fait, l'ouvert U est exactement l'ouvert $\mathbf{Grass}^s(2, \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})^2/\mathrm{G}l(2, \mathbb{C}))$, comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 3.21. — *Soient* A *et* B *deux espaces vectoriels de dimension 2, et* $\mathrm{A} \in \mathbf{Grass}^s(2, \mathrm{H}^0(\mathrm{Q}) \otimes \mathrm{B})$ *définissant un morphisme stable*

$$u : \mathrm{A} \otimes \wedge^2 \mathrm{Q}^* \to \mathrm{B} \otimes \mathrm{Q}^*.$$

Alors le morphisme u *est génériquement injectif, et son conoyau* F *est un faisceau* μ*−stable de dimension 2, de Cohen-Macaulay, de polynôme de Hilbert* $m^2 + 3m$.

Plus précisément :

– ou le support de F *est une quadrique lisse* C *et* F *est l'un des deux faisceaux* $\mathcal{O}_\mathrm{C}(-1,2), \mathcal{O}_\mathrm{C}(2,-1)$;

– ou le support schématique de F *est un plan double* P^2*, et le faisceau* F *est un fibré vectoriel sur* P*, stable, de rang 2 et de classes de Chern* $c_1 = 0, c_2 = 2$.

Démonstration. La seule chose qui demande un calcul est de vérifier que $\det u$ n'est pas identiquement nul. Alors le conoyau F de u sera bien sûr de Cohen-Macaulay de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$. Pour voir qu'il est stable il suffit de remarquer que $h^0(\mathrm{F}) = 0$: ceci entraîne qu'il ne peut contenir de faisceau de Cohen-Macaulay de multiplicité 1 avec $c \geq \frac{3}{2}$, car s'il contenait un tel faisceau, par réflexivité, il devrait contenir aussi un faisceau isomorphe à $\mathcal{O}_\mathrm{P}$, où P est un plan. Alors $h^0(\mathrm{F}) \neq 0$.

Le morphisme u définit une application linéaire $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$. Le fait que le module de Kronecker u soit stable signifie que cette application linéaire est de rang ≥ 3, et que, au cas où elle est de rang 3, son noyau est engendré par un tenseur de rang 2. Soit $\mathrm{W} \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$ l'image de cette application linéaire. On a donc puisque u est stable $\dim \mathrm{W} \geq 3$.

Supposons d'abord $\mathrm{W} = \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$. Les sections de $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$ ainsi obtenues constituent une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q}) = \mathbb{C}^4$. Si on choisit une base de A et B, le morphisme u s'écrit

$$u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$; ainsi, (a, b, c, d) est une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$. On désigne par V l'ouvert de $\mathbf{P}_3$ des points de coordonnées $[1 : y : z : t]$ dans cette base ; un tel point est défini par le zéro de la section $a + yb + zc + tc$ de Q. On choisira sur l'ouvert V le repère de Q défini par les sections (b, c, d) et pour $\wedge^2 \mathrm{Q}$ le repère dual

$c \wedge d, -b \wedge d, b \wedge c)$ de sorte que la matrice transposée de u est la matrice

$$ {}^t u = \begin{pmatrix} 0 & t & -z & 0 & 0 & 0 \\ -t & 0 & y & 0 & 0 & -1 \\ z & -y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

On obtient $\det u = t - yz$ sur l'ouvert V. Ceci prouve que le morphisme u est génériquement injectif, et que la quadrique C définie par le support schématique du conoyau de F est lisse. Alors le faisceau F est un fibré inversible sur C de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$. Les seuls fibrés possibles sont $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}(-1,2)$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}(-1,2)$. Cette quadrique, qui a pour équation homogène $\mathrm{XT} - \mathrm{YZ} = 0$, est la quadrique duale de la quadrique C^* de $\mathbf{P}_3^*$ définie par la forme quadratique $ad - bc$, quand on interprète les éléments a, b, c, d comme éléments de $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3^*}(1)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Q}_{\mathbf{P}_3})$. La quadrique C^* peut s'interpréter comme quadrique des plans de saut de F, *i.e.* des plans P pour lesquels le faisceau de dimension 1 $\mathrm{F}|_{\mathrm{P}}$ n'est pas semi-stable.

Supposons maintenant que $\dim \mathrm{W} = 3$. Le groupe $\mathrm{G}l(\mathrm{A})$ opère transitivement sur les tenseurs de rang 2 de $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}^*$. On peut donc supposer que u est donnée par une matrice symétrique

$$ u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} $$

où (a, b, c) est une base de W. On rajoute une section $d \notin \mathrm{W}$ de façon à obtenir une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$; avec les notations ci-dessus, on a cette fois sur l'ouvert V

$$ {}^t u = \begin{pmatrix} 0 & t & -z & 0 & 0 & 0 \\ -t & 0 & y & 0 & 0 & -1 \\ z & -y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Le calcul donne $\det u = t^2$. Ainsi, le support schématique est le plan double de support $\mathrm{P} = \mathbf{P}(\mathrm{W})$; c'est aussi le sommet du cône quadratique de $\mathbf{P}_3^*$ d'équation $ac - b^2 = 0$. Le morphisme défini par $t : \mathrm{F} \to \mathrm{F}(1)$ est alors nul, à cause de la μ-stabilité de F. Ainsi, F est un faisceau localement libre de rang 2 sur P, stable et de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2$. ◻

Remarque 3.22. — Le morphisme $U \to \mathbf{P}_9 = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(2)|$ qui associe à un faisceau F la quadrique définie par son support schématique n'est pas quasi-fini. Son image est la réunion de l'ouvert des quadriques lisses, et du fermé des plans doubles. Au-dessus de l'ouvert des quadriques lisses, c'est un revêtement non ramifié de degré 2 ; au-dessus d'un point représentant un plan double P^2, la fibre s'identifie à l'ouvert de $\mathbf{P}_5 := |\mathcal{O}_P(2)|$ des coniques non singulières de P.

Remarque 3.23. — Si $A \in \mathbf{Grass}^{ss}(2, H^0(Q) \otimes B)$ est un point non stable, le morphisme u est de déterminant nul.

3.3. La composante N_2

Soit B un espace vectoriel de dimension 2. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{H} := \mathbf{Hilb}(B \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ des quotients $B \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to T$ de longueur 2 et la variété projective

$$\mathbf{P} = \mathbf{Grass}(2, B \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))) \times \mathbf{Hilb}(B \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2).$$

Sur ce schéma projectif, on a une action naturelle du groupe $Sl(B)$. Chacun de ces facteurs est naturellement polarisé, et sur le produit, on choisit la polarisation donnée par $\mathcal{O}(k, 1)$ avec $k >> 1$. Il est clair que les points semi-stables (A, T) (resp. stables) sont les couples qui satisfont à la condition suivante : pour toute droite $B' \subset B$ on a $\dim A \cap B' \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1)) \leq 1$, et en cas d'égalité, le sous-faisceau de T engendré par B' n'est pas nul (resp. est égal à T). On considère le sous-schéma fermé $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}$ de $\mathbf{D}$ des paires (A, T) telles que le morphisme composé

$$A \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1) \to B \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to T$$

soit nul, et on désigne par $\mathbf{D}^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables de $\mathbf{D}$. On peut considérer le quotient de Mumford $\mathbf{D}^{ss}/Sl(B)$.

Lemme 3.24. — *On a un isomorphisme*

$$\mathbf{D}^{ss}/Sl(B) \simeq \mathbf{N}_2$$

Démonstration. Si (A, T) est un couple semi-stable de $\mathbf{D}$, A est évidemment un point de $\mathbf{Grass}^{ss}(2, B \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1)))$ le morphisme $u : A(-1) \to B \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$ est alors génériquement injectif, et son conoyau définit un faisceau semi-stable G de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 2$. On a ainsi une monade

$$0 \to \mathrm{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1) \to \mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{T} \to 0$$

dont le faisceau de cohomologie F est le noyau de l'épimorphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{T}$: c'est un faisceau semi-stable car si l'on avait un sous-faisceau cohérent F' de multiplicité 1 de F tel que $p_{\mathrm{F}'} > p_{\mathrm{F}}$, obligatoirement $\mathrm{F}' \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{P}}$, où P est un plan. Alors ce sous-faisceau de G provient d'une droite $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$ et alors le morphisme $\mathrm{F}' \to \mathrm{T}$ ne pourrait être nul, ce qui est absurde. Ainsi, le faisceau F définit un point de $\mathbf{N}_2$. Sur $\mathbf{D}^{ss} \times \mathbf{P}_3$ on obtient évidemment une famille plate universelle $\mathcal{F}$ paramétrée par $\mathbf{D}^{ss}$ de faisceaux de polynôme de Hilbert m^2+3m, et, p désignant la projection sur $\mathbf{D}^{ss}$, un fibré vectoriel $\underline{\mathrm{Ext}}^2_p(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ de rang 2. Compte-tenu de la propriété universelle des variétés déterminantielles, cette famille fournit un morphisme $\mathbf{D}^{ss} \to \mathbf{N}_2$ qui passe au quotient par $\mathrm{S}l(\mathrm{B})$. Ainsi, on a obtenu un morphisme

$$\varphi : \mathbf{D}^{ss}/\mathrm{S}l(\mathrm{B}) \to \mathbf{N}_2.$$

Réciproquement, soit F un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$, et tel que l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ soit de dimension 2. Soit, avec les notations du lemme 3.5, $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{**}$ et $\mathrm{T} = \mathrm{F}^{**}/\mathrm{F}$. Alors G est semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 2$, et d'après la proposition 3.6 on a $h^0(\mathrm{G}) = 2$. Le choix d'un isomorphisme $\tau : \mathrm{B} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{G})$ fournit un élément $\mathrm{A} \in \mathbf{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1)) \otimes \mathrm{B})$ et une suite exacte

$$0 \to \mathrm{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1) \to \mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{G} \to 0$$

de sorte que A est un point semi-stable de la grassmannienne. Plus précisément, la paire (A, T) est un point de l'ouvert $\mathbf{D}^{ss}$: c'est une traduction du fait que si $\mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$ est un sous-faisceau de polynôme de Hilbert $\frac{1}{2}(m^2 + 3m) + 1$ alors le morphisme induit $\mathrm{G}' \to \mathrm{T}$ est obligatoirement non nul. Quand on change d'isomorphisme τ la classe de (A, T) dans $\mathbf{D}^{ss}/\mathrm{S}l(\mathrm{B})$ reste inchangée. Cette construction passe aux familles plates $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur $\mathrm{S} \times \mathbf{P}_3$, paramétrées par une variété S, de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$ et telles que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^2_q(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ soit localement libre de rang 2 sur S : cette hypothèse assure que la famille des faisceaux T et G obtenus sont encore plates. Ces familles définissent un foncteur Φ sur la catégorie des variétés algébriques et l'on a des morphismes fonctoriels

$$\begin{tikzcd} \Phi(\mathrm{S}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{D}^{ss}/Sl(\mathrm{B})) \arrow[d] \\ & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{N}_2) \end{tikzcd}$$

tels que le diagramme ci-dessus soit commutatif. Les morphismes α et β font des variétés $\mathbf{D}^{ss}/Sl(\mathrm{B})$ et $\mathbf{N}_2$ des espaces de modules grossiers pour le foncteur Φ ; la flèche verticale, induite par le morphisme φ est alors un isomorphisme. □

Proposition 3.25. — *La projection* $\mathbf{D} \to \mathbf{H} = \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ *est un fibré en grassmanniennes localement trivial dans la topologie de Zariski.*

Lemme 3.26. — *Pour tout point de* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ *correspondant à un quotient* $\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{T}$, *le morphisme* $\mathrm{B} \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T}(1))$ *est surjectif.*

Démonstration. C'est évident si le morphisme canonique $\mathrm{B} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ est un isomorphisme. Sinon, cette application linéaire est de rang 1, et alors T est un quotient de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$, donc isomorphe au faisceau structural d'un sous-schéma fini de longueur 2 de $\mathbf{P}_3$. Ce sous-schéma est forcément porté par une droite $\ell \subset \mathbf{P}_3$ et la factorisation

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1)) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1)) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(1)) \arrow[d] \\ & & \mathrm{H}^0(\mathrm{T}(1)) \end{tikzcd}$$

montre que la flèche de l'énoncé est surjective.

Démonstration de la proposition 3.25

Soit $\mathcal{T}$ la famille universelle quotient sur $\mathbf{H} \times \mathbf{P}_3$; alors, p désignant la projection sur le facteur $\mathbf{H}$, l'image directe $p_*(\mathcal{T}(1))$ est un faisceau localement libre de rang 2, quotient du fibré trivial de fibre $\mathrm{B} \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))$ par un sous-fibré $\mathcal{V}$. Alors, on a par définition $\mathbf{D} = \mathbf{Grass}(2, \mathcal{V})$. □

Cet énoncé ramène l'étude de $\mathbf{D}^{ss}$ à celle de $\mathbf{H}$. Rappelons qu'une variété normale dont les singularités sont rationnelles est de Cohen-Macaulay.

Proposition 3.27. —

(i) *Le schéma de Hilbert* $\mathbf{H} = \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ *est une variété irréductible, normale de dimension 8, singulière en codimension 5 .*

(ii) *Ses singularités sont rationnelles.*

On verra que les points singuliers correspondent aux faisceaux quotients de la forme $\mathrm{T} = \mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}/\mathfrak{m}_x$, où $\mathfrak{m}_x$ est le faisceau d'idéaux du point x.

Corollaire 3.28. — *La variété* $\mathbf{D}$ *est irréductible, normale, de dimension 16, singulière en codimension 5 et à singularités rationnelles.*

Corollaire 3.29. —

(i) *La variété* $\mathbf{N}_2$ *est irréductible, normale, de dimension 13 ; ses singularités sont rationnelles.*

(ii) *C'est une variété rationnelle, dont l'ensemble singulier a deux composantes irréductibles de dimension 10 et 8 respectivement.*

Démonstration. Compte-tenu du corollaire précédent, la première partie de l'énoncé résulte du théorème de Boutot [4] . L'ensemble singulier $\mathrm{Sing}(\mathbf{N}_2)$ a deux composantes irréductibles, l'une $\mathrm{Sing}_1(\mathbf{N}_2)$, de dimension 10 provenant des points semi-stables non stables ; si Y désigne la variété d'incidence, lisse de dimension 5, des paires (point, plan) de $\mathbf{P}_3$, cette composante est isomorphe à la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Y})$ de la variété Y. La deuxième composante est de dimension 8, et correspond aux faisceaux F obtenus comme noyau du morphisme surjectif $\mathrm{G} \to \mathrm{G}(x)$, avec G semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 2$, pourvu que $\dim \mathrm{G}(x) = 2$. Ceci impose que le support schématique de G est une quadrique singulière en x. On a vu que le faisceau G est déterminé par cette quadrique C. La deuxième composante $\mathrm{Sing}_2(\mathbf{N}_2)$ est donc isomorphe à la variété (lisse de dimension 8) des couples (C, x) où C est une quadrique de $\mathbf{P}_3$ et C un point singulier de C. Bien sûr ce fermé $\mathrm{Sing}_2(\mathbf{N}_2)$ contient des points stables, et n'est donc pas contenu dans $\mathrm{Sing}_1(\mathbf{N}_2)$.

Il reste à démontrer la rationalité de $\mathbf{N}_2$: considérons pour ceci l'ouvert $\mathscr{C} \subset \mathbf{P}_9 \times \mathbf{Grass}(2, \mathbb{C}^4)$ des couples (C, ℓ) formés d'une quadrique C et d'une droite ℓ non contenue dans C et ne rencontrant pas l'ensemble singulier de C. A un tel couple, on associe le faisceau structural T de l'intersection $\mathrm{C} \cap \ell$; si G est l'un des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert m^2+3m+2, de support schématique C, le faisceau T peut être vu comme un quotient de G. Le produit fibré $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m+2)\times_{\mathbf{P}_9}\mathscr{C}$, suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{C} \\ & & \downarrow \\ \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m+2) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}_9 \end{array}$$

où π est le revêtement décrit dans la remarque 3.8, associant à un faisceau son support schématique, s'identifie alors à un ouvert de $\mathbf{N}_2$. Puisque $\mathscr{C}$ est un ouvert d'un produit de $\mathbf{P}_9$ par une variété rationnelle, et que $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m+2)$ est rationnelle, il en est de même de $\mathbf{N}_2$. □

Etude de $\mathbf{H}=\mathbf{Hilb}(\mathrm{B}\otimes\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3},2)$

Lemme 3.30. — *Un point de* $\mathbf{H}$ *correspondant à un faisceau quotient* $\mathrm{B}\otimes\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}\to\mathrm{T}$ *est semi-stable sous l'action du groupe* $\mathrm{S}l(\mathrm{B})$ *si et seulement si l'application* $\mathrm{B}\to\mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de relire la démonstration du §2.5. □

Soit $\mathbf{H}^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables ; le quotient de Mumford $\mathbf{H}^{ss}/\mathrm{S}l(\mathrm{B})$ s'identifie à la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}_3)$.

Définition 3.31. — *Un faisceau cohérent* T *de longueur 2 sur* $\mathbf{P}_3$ *est dit épineux s'il est isomorphe à* $\mathbb{C}_x^2$, *où* $\mathbb{C}_x$ *est le faisceau structural du point* x. *Un point de* $\mathbf{H}$ *correspondant à un quotient* $\mathrm{B}\otimes\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}\to\mathrm{T}$ *est dit épineux si le faisceau* T *est épineux.*

Les points épineux de $\mathbf{H}$ sont obligatoirement semi-stables et invariant par le groupe $\mathrm{S}l(\mathrm{B})$; ils forment un fermé de dimension 3, isomorphe à $\mathbf{P}_3$.

Lemme 3.32. — *Le schéma* $\mathbf{H}$ *est irréductible de dimension 8, lisse en dehors des points épineux.*

Démonstration. L'ouvert des points non épineux est dense dans $\mathbf{H}$; nous allons montrer que cet ouvert est irréductible. On remarque pour ceci qu'un point non épineux fournit un faisceau T isomorphe au faisceau structural d'un sous-schéma de longueur 2 de $\mathbf{P}_3$. Désignons par $\mathbf{S} = \mathbf{Hilb}(\mathbf{P}_3, 2)$ le schéma de Hilbert des sous-schémas de longueur 2 ; c'est une variété lisse irréductible de dimension 6. Soit $\mathscr{T}$ le faisceau universel sur $\mathbf{S} \times \mathbf{P}_3$; alors l'image directe $\mathscr{W} = p_*(\mathscr{T})$ par la première projection est un faisceau localement libre de rang 2 sur $\mathbf{S}$. L'espace total R du fibré vectoriel $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{S}}, \mathscr{W})$ est une variété lisse irréductible de dimension 10 ; soit $\pi : \mathrm{R} \to \mathbf{S}$ la projection canonique. On a alors un morphisme

$$\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{R} \times \mathbf{P}_3} \to (\pi \times id_{\mathbf{P}_3})^*(\mathscr{T})$$

Sur l'ouvert $\mathrm{R}^0 \subset \mathrm{R}$ des points au-dessus desquels ce morphisme est surjectif on obtient par la propriété universelle du schéma de Hilbert un morphisme $\mathrm{R}^0 \to \mathbf{H}$ dont l'image est l'ouvert des points non épineux. Par suite, cet ouvert est irréductible, et donc $\mathbf{H}$ est irréductible.

Pour calculer la dimension, on considère la projection

$$\mathbf{H}^{ss} \to \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}_3)$$

dont les fibres sont en correspondance bijective avec les points d'orbite fermée dans $\mathbf{H}^{ss}$ pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{B})$. Plus précisément, étant donné une orbite fermée O dans $\mathbf{H}^{ss}$, la fibre qui contient O est constituée des points de $\mathbf{H}^{ss}$ dont la fermeture de l'orbite contient O. En particulier, les orbites fermées de dimension maximum sont des fibres. Le stabilisateur d'un point semi-stable correspondant à un quotient $\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{T}$ s'identifie au groupe des automorphismes de T. Au-dessus du complémentaire de la diagonale, les orbites sont fermées et de dimension maximum 2 : ce sont des fibres. Par suite, $\dim \mathbf{H} = 8$.

Pour montrer que les points non épineux sont lisses, il suffit de calculer la dimension de l'espace tangent de Zariski. Si on écrit $\mathrm{T} = \mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}/\mathrm{J}$ l'espace tangent au point correspondant est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathrm{J}, \mathrm{T})$. On a alors la suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{T}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, \mathrm{T}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{J}, \mathrm{T}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{T}, \mathrm{T}) \to 0.$$

En un point non épineux, T est isomorphe au faisceau structural d'un sous-schéma de longueur 2 de $\mathbf{P}_3$, et par suite $\dim \mathrm{Hom}(\mathrm{T},\mathrm{T}) = 2$, et l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{T},\mathrm{T})$, qui est isomorphe à l'espace tangent de Zariski au point T à $\mathbf{S}$, est de dimension 6. Ainsi, l'espace tangent de Zariski en un tel point est de dimension 8, et ce point est donc lisse. □

Proposition 3.33. — *Le schéma de Hilbert* $\mathbf{H}$ *est de Cohen-Macaulay en un point épineux.*

Corollaire 3.34. — *Le schéma* $\mathbf{H}$ *est irréductible et normal.*

Démonstration. L'ensemble singulier est de codimension ≥ 2; il suffit donc d'utiliser le critère de Serre. □

Démonstration de la proposition 3.33.

On se place au point $\mathrm{T} = \mathrm{B} \otimes \mathbb{C}_x$ et on considère une section non nulle s de Q qui s'annule en x. Cette section fournit un complexe de Koszul K , donné par

$$\mathrm{K}_i = \mathrm{B} \otimes \wedge^i \mathrm{Q}^*$$

où la flèche $d : \mathrm{K}_i \to \mathrm{K}_{i-1}$ est le produit intérieur par s. Considérons l'algèbre différentielle $\mathbf{Z}$-graduée $\mathbf{Hom}(\mathrm{K},\mathrm{K})$ définie par $\mathbf{Hom}(\mathrm{K},\mathrm{K}) = \oplus \mathrm{Hom}^q(\mathrm{K},\mathrm{K})$ où $\mathrm{Hom}^q(\mathrm{K},\mathrm{K}) = \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_{i-q})$, équipé de la différentielle définie pour $\alpha \in \mathrm{Hom}^q(\mathrm{K},\mathrm{K})$ par $d\alpha = d \circ \alpha - (-1)^q \alpha \circ d$. La cohomologie $\mathrm{Ext}(\mathrm{K},\mathrm{K}) = \oplus_q \mathrm{Ext}^q(\mathrm{K},\mathrm{K})$, qui s'identifie aussi à $\mathrm{Ext}(\mathrm{T},\mathrm{T})$ a alors une structure d'algèbre, isomorphe à $\mathrm{End}(\mathrm{B}) \otimes \wedge(\mathrm{T}_x)$, où T_x est l'espace vectoriel tangent en x à $\mathbf{P}_3$.

Lemme 3.35. — *Le cône de* $\mathbf{H}$ *au point* τ *défini par* T, *s'identifie au sous-schéma* C *de* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{T},\mathrm{T})$ *défini par l'idéal engendré par les composantes du morphisme quadratique* $\alpha \mapsto \alpha^2$ *à valeurs dans* $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{T},\mathrm{T})$.

Démonstration. Soit $\Sigma \subset \mathrm{Hom}^1(\mathrm{K},\mathrm{K})$ le sous-schéma localement fermé défini par les conditions suivantes :

(1) $\Phi(d+\omega) := d\omega + \omega^2 = 0$.

Cette équation (1) signifie les opérateurs $d+\omega$ sont des différentielles, c'est-à-dire que $(d+\omega)^2 = 0$; la structure de schéma est celle qui est associée à l'idéal engendré par les composantes de Φ.

(2) les faisceaux de cohomologie $\mathrm{H}_i(\mathrm{K}, d+\omega)$ du complexe $(\mathrm{K}, d+\omega)$ sont nuls en degré $i > 0$.

Le groupe réductif $\mathrm{G} = \prod_{i \geq 1} \mathrm{G}l(\mathrm{K}_i) \subset \mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}, \mathrm{K})$ opère sur $\mathrm{Hom}^1(\mathrm{K}, \mathrm{K})$ par l'opération

$$\begin{aligned}(\varphi, d+\omega) \mapsto & \varphi(d+\omega)\varphi^{-1} \\ & = d + \varphi\omega\varphi^{-1} - d\varphi\,\varphi^{-1}\end{aligned}$$

et cette opération laisse le sous-schéma Σ invariant. L'action de G sur Σ est propre et libre, et l'on a un morphisme $\pi : \Sigma \to \mathbf{H}$ qui associe à $d+\omega$ le conoyau de la flèche $d+\omega : \mathrm{K}_1 \to \mathrm{K}_0 = \mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$. Ce morphisme, qui envoie d sur T, est un quotient géométrique : on a donc un isomorphisme

$$\Sigma/\mathrm{G} \simeq \mathbf{H} = \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$$

Soit S un sous-espace affine de $\mathrm{Hom}^1(\mathrm{K}, \mathrm{K})$ passant par d et transverse à l'orbite de d, de codimension $\dim \mathrm{G}$. Alors le morphisme

$$\pi|_{\mathrm{S}\cap\Sigma} : \mathrm{S} \cap \Sigma \to \mathbf{H} = \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$$

est étale au point d. Soit Z^1 l'espace vectoriel des 1-cocyles dans le complexe Hom (K, K) muni de la différentielle d; on pose $\mathrm{H} = \mathrm{S} \cap \mathrm{Z}^1$. La projection canonique induit alors une application affine $\mathrm{H} \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{K}, \mathrm{K})$ surjective, car le premier espace s'identifie à l'espace tangent de Zariski à $\mathbf{H}$ en T, et le second à $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{T}, \mathrm{T})$; la flèche est alors le morphisme de liaison. En fait, dans notre cas, c'est même un isomorphisme. Considérons des projections linéaires

$$p : \mathrm{S} \to \mathrm{H} \quad ; \quad q : \mathrm{Hom}^2(\mathrm{K}, \mathrm{K}) \to \mathrm{Im}\ d.$$

Alors le sous-schéma des zéros Σ_1 de $\Phi_1 = q\Phi|_{\mathrm{S}}$ est une sous-variété algébrique de S, qui contient $\mathrm{S} \cap \Sigma$, lisse au point d et qui a H pour espace affine tangent en d. La projection $p|_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \to \mathrm{H}$ est alors étale. Considérons le morphisme composé $\mathrm{S} \cap \Sigma \to \mathrm{H} \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{K}, \mathrm{K})$ où la première flèche est induite par p et la seconde par la projection canonique. Ce morphisme induit un plongement du cône de $\mathbf{H}$ dans le sous-schéma fermé C de $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{K}, \mathrm{K})$ défini par les zéros du morphisme

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{K}, \mathrm{K}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathrm{K}, \mathrm{K})$$

défini par $\alpha \mapsto \alpha^2$.

Lemme 3.36. — *Le sous-schéma fermé* C *de* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{T},\mathrm{T})$ *défini par les zéros du morphisme quadratique* $\alpha \mapsto \alpha^2$ *est irréductible, de Cohen-Macaulay de dimension 8 ; son ensemble singulier est de dimension 3.*

Ce lemme sera démontré plus bas. Terminons d'abord la démonstration du lemme 3.35 et de la proposition 3.33. D'après le critère de Serre, cet énoncé entraîne que C est intègre, et même normal. Mais alors, pour une question de dimension, le cône de **H** en T s'identifie à C, ce qui implique l'énoncé 3.35. Ce cône étant de Cohen-Macaulay et il résulte du lemme 3.39 ci-dessous que le schéma **H** est aussi de Cohen-Macaulay au point T. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.33.

Démonstration du lemme 3.36.

On écrit

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathrm{T}_x$ de sorte que α^2 calculé dans l'algèbre $\mathrm{End}(\mathrm{B}) \otimes \wedge \mathrm{T}_x$ est donné par

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} c \wedge b & (a-d) \wedge c \\ b \wedge (a-d) & b \wedge c \end{pmatrix}$$

Par suite, on a un isomorphisme $\mathrm{C} \simeq \mathrm{T}_x \times \mathrm{D}$ où D est la variété déterminantielle des matrices 3×3 de rang ≤ 1. Puisque D de Cohen-Macaulay ([1] ;[7]) ceci conduit au résultat. □

Proposition 3.37. — *Les singularités de* **H** *sont rationnelles.*

Démonstration. On sait déjà que la variété **H** est normale. Pour vérifier que les singularités sont rationnelles on va construire une résolution des singularités de **H**. Désignons par **Gr** la grassmannienne $\mathbf{Grass}(2, \mathbb{C}^4)$ des droites projectives de $\mathbf{P}_3$. Soit $\hat{\mathbf{H}}$ le sous-schéma de $\mathbf{Gr} \times \mathbf{H}$ des paires (ℓ, T) avec $\mathrm{T} \in \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_\ell, 2)$. On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{H}} & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{H} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbf{Gr} & & \end{array}$$

dans lequel le morphisme p_1 est lisse de dimension relative 4 et où p_2 est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert des points non épineux. Au-dessus de $\mathbf{Gr}$ le schéma $\hat{\mathbf{H}}$ est en fait un fibré localement trivial. Considérons sur $\mathbf{Gr}$ le fibré vectoriel de rang 2 tautologique $\mathrm{Q}_{\mathbf{Gr}}$, dont la fibre au-dessus du point ℓ est donné par $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(1))$: on a alors un morphisme au-dessus de $\mathbf{Gr}$

$$\hat{\mathbf{H}} \to \mathbf{Grass}(\mathrm{B} \otimes \mathrm{Q}_{\mathbf{Gr}}, 2)$$

à valeurs dans la grassmannienne relative des espaces vectoriels quotients de rang 2 qui associe au faisceau quotient T l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}(1))$ quotient de $\mathrm{B}\otimes\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(1))$. Ce morphisme est l'éclatement du sous-schéma (lisse, de dimension relative 1) des points instables pour l'action du groupe $Sl(\mathrm{B})$. Il est clair que les points épineux fournissent des points semi-stables. Considérons la fibre de p_2 au-dessus d'un point, donné par un quotient épineux T, de support x. Cette fibre est isomorphe au plan projectif $\mathbf{P}_2$ des droites passant par x.

Lemme 3.38. — *Le fibré normal* $\mathrm{N}_{\mathbf{P}_2/\hat{\mathbf{H}}}$ *de la fibre* $\mathbf{P}_2$ *au-dessus du point donné par un quotient épineux* T *de support* x *est isomorphe à* $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1)^3$

On a alors $\mathrm{H}^q(\mathbf{P}_2, \mathrm{S}^k\mathrm{N}^*_{\mathbf{P}_2/\hat{\mathbf{H}}}) = 0$ pour $k \geq 0$ et $q > 0$. On déduit alors du théorème des fonctions formelles [11] que l'on a pour $q > 0$

$$\mathrm{R}^q p_{2*}(\mathcal{O}_{\hat{\mathbf{H}}}) = 0.$$

C'est exactement la définition des singularités rationnelles. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Démonstration du lemme 3.38

Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to \mathrm{T}(\hat{\mathbf{H}}/\mathbf{Gr})\big|_{\mathbf{P}_2} \to \mathrm{N}_{\mathbf{P}_2/\hat{\mathbf{H}}} \to \mathrm{N}_{\mathbf{P}_2/\mathbf{Gr}} \to 0,$$

dans laquelle le premier terme désigne le fibré tangent vertical le long de la section canonique de p_1 au-dessus de $\mathbf{P}_2$, et les autres les fibrés normaux dans $\hat{\mathbf{H}}$ et $\mathbf{Gr}$ respectivement. Au-dessus de cette fibre $\mathbf{P}_2 \subset \mathbf{Gr}$, la restriction du fibré tautologique quotient Q_{Gr} est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$. La section canonique correspond au faisceau quotient $B \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}$ de $B \otimes Q_{Gr}\restriction_{\mathbf{P}_2}$. Il en résulte que $T(\hat{\mathbf{H}}/\mathbf{Gr})|_{\mathbf{P}_2} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^2)$. Le fibré normal $N_{\mathbf{P}_2/\mathbf{Gr}}$ est isomorphe au fibré tautologique quotient de rang 2 noté classiquement $Q_{\mathbf{P}_2}$. On va montrer que la suite exacte ci-dessus n'est pas scindée. Considérons pour ceci la variété d'incidence $I \subset \mathbf{P}_3 \times \mathbf{Gr}$ des paires (x, ℓ), avec $x \in \ell$. On a des inclusions $\mathbf{P}_2 \hookrightarrow I \hookrightarrow \hat{\mathbf{H}}$ d'où il résulte une inclusion

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3 \simeq N_{\mathbf{P}_2/I} \hookrightarrow N_{\mathbf{P}_2/\hat{\mathbf{H}}}$$

On voit donc que la suite exacte ci-dessus n'est pas scindable. La seule extension non triviale $0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1) \to F \to Q_{\mathbf{P}_2} \to 0$ correspondant au fibré trivial de rang 3, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3(-1) \to N_{\mathbf{P}_2/\hat{\mathbf{H}}} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}^3 \to 0$$

obligatoirement scindée. D'où un isomorphisme $N_{\mathbf{P}_2/\hat{\mathbf{H}}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3(-1)$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.38. □

Pour achever la démonstration de la proposition 3.27, et du théorème 3.2, il nous reste à vérifier le lemme général suivant :

Lemme 3.39. —*Soit* X *une variété algébrique,* Y *le cône de* X *en un point* x. *Alors si* Y *est de Cohen-Macaulay, il en est de même de* X *au point* x.

Démonstration. On va démontrer la version correspondante en algèbre locale : soit A est une algèbre locale noethérienne d'idéal maximal $\mathfrak{m}$; si l'algèbre graduée

$$B = \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) := \oplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$$

est de Cohen-Macaulay, il en est de même de A. On raisonne par récurrence sur la dimension ; il n'y a rien à démontrer en dimension 0. Si B est de Cohen-Macaulay de dimension ≥ 1 on peut trouver par définition un élément de l'idéal maximal de B qui n'est pas diviseur de zéro. On peut en fait choisir cet élément homogène. Considérons en effet les idéaux premiers associés $\mathfrak{p}_i$ de B : alors l'idéal maximal de B n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}_i$. Par suite, pour tout i, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}_i$. Mais alors la démonstration du lemme d'évitement [2] montre que l'on peut construire un élément homogène $\overline{z}$ de degré $r > 0$ qui n'appartient pas à $\cup_i \mathfrak{p}_i$, c'est-à-dire qui n'est pas diviseur de zéro dans B. Considérons un élément $z \in \mathfrak{m}^r$ dont la classe dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A})$ est $\overline{z}$. Evidemment, z n'est pas diviseur de zéro dans A. Considérons le morphisme canonique

$$\mathrm{B}/\overline{z}\mathrm{B} \to \mathrm{gr}(\mathrm{A}/z\mathrm{A})$$

où le second membre est l'algèbre graduée relative à l'idéal maximal, induit par la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/z\mathrm{A}$. Ce morphisme est évidemment surjectif ; il est injectif, car si un élément $u \in \mathrm{A}$ non nul de multiplicité n a son image nulle dans le second membre, ceci signifie que l'on peut écrire $u = v + zw$ avec $w \in \mathrm{A}$ et $v \in \mathfrak{m}^{n+1}$. On a $w \neq 0$; soit k la multiplicité de w. Alors la classe $\overline{w}$ de w dans $\mathrm{gr}^k(\mathrm{A})$ est non nulle, et alors, puisque $\overline{z}$ n'est pas diviseur de zéro dans B, on a $\overline{z}\,\overline{w} \neq 0$ dans B. Obligatoirement $k + r = n$, et dans $\mathrm{gr}^n(\mathrm{A})$ on a $\overline{u} = \overline{z}\,\overline{w}$. Donc la classe de $\overline{u}$ est nulle dans le premier membre $\mathrm{B}/\overline{z}\mathrm{B}$. Maintenant, on applique l'hypothèse de récurrence à l'algèbre $\mathrm{A}/z\mathrm{A}$ dont la dimension est, d'après le théorème de Krull, $\dim \mathrm{A} - 1$. $\square$

3.4. L'intersection $\mathbf{N}_{0,2} = \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_2$

La projection canonique $\mathbf{N} \to \mathbf{P}_9$ induit un morphisme surjectif

$$\mathbf{N}_0 := \overline{\mathrm{U}} \to \mathbf{P}_9$$

puisque son image contient l'ouvert des quadriques lisses. D'après la proposition 3.21 une quadrique singulière qui n'est pas un plan double est obligatoirement l'image d'un point de $\mathbf{N}_{0,2} := \mathbf{N}_0 \cap \mathbf{N}_2$. Par suite, on a $\dim \mathbf{N}_{0,2} = 8$. L'image de $\mathbf{N}_{0,2}$ dans $\mathbf{P}_9$ contient l'hypersurface des quadriques singulières. C'est en fait exactement cette hypersurface : ceci résulte de la propreté du morphisme $\mathrm{U} \to \mathbf{P}_9$ au-dessus de l'ouvert des quadriques lisses (*cf.* remarque 3.22), ce qui n'est pas évident, ou de l'étude suivante, qui devrait également permettre de déterminer quels sont exactement les points de l'intersection $\mathbf{N}_{0,2}$.

Proposition 3.40. — *Soit* F *un faisceau stable de polynôme de Hilbert* $m^2 + 3m$ *tel que* $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}) = 2$ *; posons* $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{**}$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{F}^{**}/\mathrm{F}$. *On suppose que* T *n'est pas épineux. Alors* $\mathbf{N}$ *est lisse au point* a *correspondant à* F, *si et seulement si* T *définit un point lisse du schéma de Hilbert* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G}, 2)$ *des quotients de longueur 2.*

On verra (*cf.* proposition 3.42) que si le support schématique de G est une quadrique lisse, le schéma $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G}, 2)$ est lisse. Ceci implique donc que les deux composantes de $\mathbf{N}$ ne se coupent pas au-dessus de l'ouvert des quadriques lisses. On verra également qu'au-dessus d'un cône on ne trouve qu'un seul point de $\mathbf{N}_{0,2}$, donné par le faisceau obtenu lorsque T est épineux.

Démonstration. Soit $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{**}$ et $\mathrm{T} = \mathrm{F}^{**}/\mathrm{F}$. Considérons un isomorphisme $\mathrm{B} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{G})$ et désignons par J le noyau de l'épimorphisme $\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \xrightarrow{v} \mathrm{T}$, et $\mathrm{A} \in \mathbf{Grass}^{ss}(2, \mathrm{B} \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))$ le point associé. Considérons les complexes K' et K''

$$\begin{array}{llll} 0 \to & \mathrm{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1) & \to & \mathrm{J} \to 0 \\ 0 \to & \mathrm{G} & \to & \mathrm{T} \to 0 \end{array}$$

qui ont tous deux F comme seul faisceau de cohomologie, en degré 1 et 0 respectivement. On peut identifier $\mathrm{Ext}^q(\mathrm{F}, \mathrm{F})$ à $\mathrm{Ext}^{q-1}(\mathrm{K}', \mathrm{K}'')$; l'espace des cocycles de degré 0 du complexe Hom $(\mathrm{K}', \mathrm{K}'')$ s'identifie à l'espace tangent de Zariski à $\mathbf{D}$ au point $\tau = (\mathrm{A}, \mathrm{T})$. L'application linéaire canonique $\mathrm{End}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{J}, \mathrm{G})$ induite par l'inclusion $\mathrm{J} \hookrightarrow \mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$ et la projection $\mathrm{B} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{G}$ est un isomorphisme, et la flèche naturelle $\mathrm{Hom}(\mathrm{J}, \mathrm{G}) \to \mathrm{T}_\tau \mathbf{D}$ est l'application linéaire tangente à l'action de $\mathrm{G}l(\mathrm{B})$ au point τ de sorte que l'espace vectoriel des cobords de degré 0 de ce complexe s'identifie à l'espace tangent à l'orbite. Si N_τ désigne l'espace vectoriel normal à l'orbite de τ, on a alors une suite exacte

$$0 \to \mathrm{N}_\tau \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{J}, \mathrm{G}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{J}, \mathrm{T})$$

où la dernière flèche est induite par la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{T}$. Puisque F est supposé stable, N_τ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski $\mathrm{T}_a\mathbf{N}_2$ de la composante $\mathbf{N}_2$ au point a, et l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathrm{F})$ s'identifie à l'espace tangent de Zariski de $\mathbf{N}$ au point a . La dimension de $\mathbf{N}$ au point a est 13. Pour vérifier que $\mathbf{N}$ est lisse au point a, on doit prouver qu'avec l'hypothèse de la proposition l'application linéaire canonique $N_\tau \to \mathrm{Ext}^1(F,F)$ est un isomorphisme. Donnons d'abord une version équivalente de cette assertion :

Lemme 3.41. — *Soit* $\tau = (A,T)$ *un point de* $\mathbf{D}$, *avec* T *non épineux. Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'application linéaire canonique* $N_\tau \to \mathrm{Ext}^1(F,F)$ *est un isomorphisme.*

(2) *L'application linéaire*

$$\mathrm{Ext}^1(J,G) \to \mathrm{Ext}^1(J,T)$$

induite par la projection $G \to T$ *est injective .*

(3) *Le morphisme canonique*

$$\mathbf{D} \to \mathbf{Grass}(2, B \otimes H^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(1)))$$

est lisse au point τ.

Soit $\mathbf{Hilb}(G,2)$ le schéma de Hilbert des quotients de G de longueur 2 : c'est donc la fibre du morphisme ci-dessus au-dessus du point A. La condition (3) de l'énoncé signifie donc aussi que le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(G,2)$ est lisse de dimension 4 au point τ représentant le quotient $G \to T$.

Démonstration. On vient de voir l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2). Montrons l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3). De la suite exacte $0 \to J \to B \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \to T \to 0$ il résulte que l'application linéaire $\mathrm{Ext}^1(J,G) \to \mathrm{Ext}^1(J,T)$ est conjuguée à l'application linéaire $\mathrm{Ext}^2(T,G) \to \mathrm{Ext}^2(T,T)$ induite par la projection $G \to T$. Par dualité de Serre, on voit que cette application linéaire est la transposée de l'application linéaire $\mathrm{Ext}^1(T,T) \to \mathrm{Ext}^1(G,T)$. Considérons le morphisme de suites de suite exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & A \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-1) & \xrightarrow{u} & B \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} & \to & G & \to 0 \\
 & \downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & J & \to & B \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} & \xrightarrow{v} & T & \to 0
\end{array}$$

où les flèches verticales sont respectivement l'inclusion canonique, l'identité et la projection canonique. Ce morphisme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
L(B, H^0(T)) & \to & \mathrm{Hom}(J,T) & \to & \mathrm{Ext}^1(T,T) \to 0 \\
{\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow \\
L(B, H^0(T)) & \to & \mathrm{Hom}(A \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-1), T) & \to & \mathrm{Ext}^1(G,T) \to 0
\end{array}$$

D'après le lemme des cinq, il revient au même de constater que la flèche $\beta : \mathrm{Ext}^1(\mathrm{T},\mathrm{T}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{G},\mathrm{T})$ est surjective, ou que l'application linéaire α : $\mathrm{Hom}(\mathrm{J},\mathrm{T}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{A}\otimes\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-1),\mathrm{T})$ est surjective. L'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{J},\mathrm{T})$ est l'espace vectoriel tangent au schéma de Hilbert $\mathbf{H}$ au point défini par T. Considérons la famille quotient universelle $\mathscr{T}$ sur $\mathbf{H}\times\mathbf{P}_3$ et désignons par p la projection canonique sur $\mathbf{H}$. Considérons d'autre part la section canonique σ du fibré vectoriel $\mathscr{V}$ de rang 4 sur $\mathbf{H}$ défini par

$$\mathscr{V} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A}, p_*(\mathscr{T}(1)))$$

obtenue en composant la projection canonique par l'inclusion u, et dont le schéma des zéros est exactement la fibre de $\mathbf{D}$ au-dessus de $\mathbf{Grass}(2,\mathrm{B}\otimes\mathrm{H}^0(\mathscr{O}(1))$. Alors l'application linéaire α n'est autre que la différentielle $d_\tau\sigma$ de σ au point τ défini par le quotient T. Puisque T n'est pas épineux, on sait que $\mathbf{H}$ est lisse de dimension 8 au point défini par T ; par suite la surjectivité de cette différentielle signifie exactement que la fibre du morphisme $\mathbf{D}\to\mathbf{Grass}(2,\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(1)))$ est lisse de dimension 4. □

Considérons comme ci-dessus la grassmannienne $\mathbf{Gr} = \mathbf{Grass}(2,\mathbb{C}^4)$ des droites projectives de $\mathbf{P}_3$, le sous-schéma $\hat{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{Gr}\times\mathbf{H}$ des paires (ℓ,T) avec $\mathrm{T}\in\mathbf{Hilb}(\mathrm{B}\otimes\mathscr{O}_\ell,2)$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\hat{\mathbf{H}} & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{H}\\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbf{Gr} & & \end{array}$$

On a vu que le morphisme p_1 est lisse de dimension relative 4 ; le morphisme p_2 est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert des points non épineux. Désignons par $\hat{\mathbf{H}}(\mathrm{G},2)$ l'image réciproque de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G},2)$ par la projection p_2.

Proposition 3.42. — *Soit* G *un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* m^2+3m+2, C *la quadrique associée. Si* $\tau = (\ell,\mathrm{T})$ *est un point de* $\hat{\mathbf{H}}$ *représentant un quotient* T *satisfaisant à l'une des conditions suivantes :*

(a) *Le support de* T *ne rencontre pas l'ensemble singulier de* C.

(b) *La droite* ℓ *n'est pas contenue dans* C.

Alors $\hat{\mathbf{H}}(\mathrm{G},2)$ *est lisse de dimension 4 au point* τ. *En particulier, si* T *est non épineux et satisfait à l'une des conditions* (a) *ou* (b), *c'est un point lisse de* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G},2)$.

Démonstration. Dans le cas (a), le faisceau G est non singulier au voisinage du support de T, et T est non épineux. Le schéma $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G},2)$ est alors localement isomorphe au voisinage du point τ au schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{C},2)$ des sous-schémas de C de longueur 2. Puisque le support de T ne rencontre pas l'ensemble singulier de C , ceci donne le résultat. Dans le cas (b), le faisceau $\mathrm{G}|_\ell$ est un faisceau de longueur 2, et le schéma $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G}|_\ell,2)$ des quotients de $\mathrm{G}|_\ell$ est réduit à un point lisse. Par suite, le morphisme $p : \hat{\mathbf{H}}(\mathrm{G},2) \to \mathbf{Gr}$ est un isomorphisme au voisinage du point τ. □

Si la droite ℓ est sur C la question est plus délicate. Cependant, il est facile de répondre au-dessus des cônes :

Proposition 3.43. — *Au-dessus d'un cône* C*, l'intersection* $\mathbf{N}_{0,2}$ *est réduite à un seul point, représenté par le faisceau* F *associé au quotient épineux du faisceau* G *de Cohen-Macaulay (unique à isomorphisme près) de polynôme de Hilbert* m^2+3m+2*, de support* C.

Démonstration. Au-dessus d'un cône C, un faisceau pur est forcément stable. Ainsi, d'après la proposition 3.40 les points de l'intersection correspondent aux points singuliers du schéma $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G},2)$, ou éventuellement au point correspondant au quotient épineux. Désignons par $\mathbf{Hilb}^0(\mathrm{G},2)$ l'ouvert correspondant aux quotients non épineux. Considérons l'action du sous-groupe des automorphismes de $\mathbf{P}_3$ qui laissent invariant C : ce groupe agit sur la grassmannienne et laisse invariante la conique C* des droites de C. Le faisceau G est muni d'une action de ce groupe, de sorte qu'il agit aussi sur $\mathbf{Hilb}(\mathrm{G},2)$ en laissant invariant l'ouvert $\mathbf{Hilb}^0(\mathrm{G},2)$. On a alors un morphisme équivariant

$$\mathbf{Hilb}^0(\mathrm{G},2) \to \mathbf{Gr}$$

S'il existait dans $\mathbf{Hilb}^0(\mathrm{G},2)$ un point singulier, ce point serait d'après la proposition 3.42 au-dessus de C* ; puisque l'action est transitive sur C*, on aurait $\dim \mathrm{Sing}\, \mathbf{Hilb}^0(\mathrm{G},2) \geq 1$. Mais alors l'intersection $\mathbf{N}_{0,2}$ serait au moins de dimension 9, ce qui est absurde. Donc $\mathbf{Hilb}^0(\mathrm{G},2)$ est lisse. On a vu qu'au-dessus de C il y au moins un point dans l'intersection : il correspond obligatoirement au faisceau épineux.

Remarque 3.44. — Au-dessus des quadriques réductibles, on peut trouver d'autres points dans cette intersection : par exemple, au-dessus d'un plan double P, on trouve les points correspondant aux faisceaux $\mathrm{I}' \oplus \mathrm{I}''$ où I' et I'' sont les idéaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{P}}$ définis par des points $x' \in \mathrm{P}$ et $x'' \in \mathrm{P}$.

4. Systèmes cohérents

La notion de système cohérent généralise celle de système linéaire.

4.1. Généralités

On se place comme au chapitre 2 sur une variété algébrique projective lisse X de dimension n, polarisée, et on désigne par $\mathrm{P_X}$ le polynôme de Hilbert de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$.

Définition 4.1. — *On appelle système cohérent de dimension d sur la variété* X *une paire* (Γ, F) *, où* F *est un faisceau algébrique cohérent de dimension d sur* X, *et* Γ *un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{F})$.

Un morphisme de systèmes cohérents $(\Gamma, \mathrm{F}) \to (\Gamma', \mathrm{F}')$ *est un morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules cohérents* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ *tel que* $f(\Gamma) \subset \Gamma'$. *Si* F' *est un sous-faisceau cohérent de* F, *on dira que* (Γ', F') *est un sous-système cohérent de* (Γ, F).

Un système cohérent (Γ, F) *de dimension n est appelé structure de niveau si l'espace vectoriel* Γ *a pour dimension le rang de* F.

Les systèmes cohérents de dimension d forment évidemment une catégorie additive, dans laquelle on peut définir la notion de noyau et conoyau d'un morphisme : le noyau d'un morphisme $f : (\Gamma, \mathrm{F}) \to (\Gamma', \mathrm{F}')$ donné par un morphisme de modules $f : \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ est le sous-système cohérent $(\Gamma \cap \mathrm{H}^0(\ker f), \ker f)$ et le conoyau est le système cohérent $(\Gamma'', \operatorname{coker} f)$ où Γ'' est l'image de Γ' dans $\mathrm{H}^0(\operatorname{coker} f)$. En particulier, la notion de quotient d'un système cohérent par un sous-système a un sens. Un tel morphisme f est dit strict si $f(\Gamma) = \Gamma' \cap \mathrm{H}^0(\operatorname{Im} f)$, ce qui permet de définir sans ambiguïté la notion d'image, et l'on a alors un isomorphisme de systèmes cohérents

$$(\Gamma, \mathrm{F}) / \ker f \simeq \operatorname{Im} f$$

Ainsi, si on se limite aux morphismes stricts, on obtient une catégorie abélienne.

Etant donné un système cohérent (Γ, F) de dimension d sur la variété X, la multiplicité r de (Γ, F) est celle de F et le polynôme de Hilbert réduit de (Γ, F) est défini par

$$p_{(\Gamma,\mathrm{F})} = \frac{\dim \Gamma}{r} \mathrm{P}_\mathrm{X} + p_\mathrm{F}.$$

Définition 4.2. — *Semi-stabilité.*

Un système cohérent (Γ, F) *de dimension d est dit semi-stable si*

a) *le faisceau* F *est pur de dimension d ;*

b) *pour tout sous-module cohérent non nul* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$, *et tout sous-espace vectoriel* $\Gamma' \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F}') \cap \Gamma$, *on a*

$$p_{(\Gamma',\mathrm{F}')} \leq p_{(\Gamma,\mathrm{F})}$$

Un système cohérent (Γ, F) *est dit polystable s'il est somme directe de systèmes cohérents stables de même polynôme de Hilbert réduit.*

L'inégalité de l'assertion b) signifie que l'on a

$$\frac{\dim \Gamma'}{r'} \leq \frac{\dim \Gamma}{r} \quad \text{et, en cas d'égalité,} \quad p_{\mathrm{F}'} \leq p_\mathrm{F}$$

où r et r' sont les multiplicités respectives de F et F'.

Exemple. Si F est un faisceau algébrique cohérent sur X, le système cohérent $(\{0\}, \mathrm{F})$ est semi-stable si et seulement si le faisceau F est semi-stable. En général, si un système cohérent (Γ, F) est semi-stable, ceci n'implique pas que F est un faisceau semi-stable.

Nous écrirons la définition de la semi-stabilité sous une forme légèrement différente :

Lemme 4.3. — *Soit* (Γ, F) *un système cohérent, avec* F *pur de dimension d et multiplicité r , c un nombre* $>$ dim Γ. *Alors* (Γ, F) *est semi-stable si et seulement si pour tout sous-système cohérent* (Γ', F') *de multiplicité* r' *on a*

$$\frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}}{cr' - \dim \Gamma'} \leq \frac{\mathrm{P}_\mathrm{F}}{cr - \dim \Gamma} \tag{4.1}$$

Démonstration. Il suffit de réduire au même dénominateur. □

Bien sûr, le choix du nombre c n'a pas d'importance. On peut aussi donner une version de cet énoncé en termes de systèmes cohérents quotients et cette version sera elle aussi utile dans la suite.

Proposition 4.4. — *Soit* (Γ, F) *un système cohérent semi-stable de dimension* d*, avec* $\Gamma \neq \{0\}$*. Alors le morphisme d'évaluation*

$$\Gamma \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \xrightarrow{ev} \mathrm{F}$$

a son conoyau de dimension $< d$*.*

Démonstration. Soit r la multiplicité de F. On applique la définition au sous-module cohérent F' engendré par le morphisme d'évaluation ev : ce sous-module est de multiplicité r' et on prend $\Gamma' = \Gamma$. Alors $r' \geq r$, et par suite le quotient F/F' est obligatoirement de dimension $< d$. □

Corollaire 4.5. — *Soit* (Γ, F) *un système cohérent semi-stable de dimension* n*, tel que* $\Gamma \neq \{0\}$*. Le faisceau* F *est alors un faisceau sans torsion, dont le rang* $\mathrm{rg}(\mathrm{F})$*, satisfait à l'inégalité*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{F}) \leq \dim \Gamma$$

4.2. Filtrations de Harder-Narasimhan

Proposition 4.6. — *Soit* F *un module cohérent pur de dimension* d*, et* (Γ, F) *un système cohérent. Il existe une filtration finie croissante par des sous-systèmes cohérents*

$$\{0\} \subset (\Gamma_1, \mathrm{F}_1) \subset \ldots \subset (\Gamma_k, \mathrm{F}_k) = (\Gamma, \mathrm{F})$$

dont le gradué $gr_i = (\Gamma_i, \mathrm{F}_i)/(\Gamma_{i-1}, \mathrm{F}_{i-1})$ *satisfait aux conditions suivantes :*

(i) *le système cohérent* gr_i *est semi-stable ;*

(ii) *La suite des polynômes de Hilbert réduits* p_{gr_i} *est strictement décroissante. Cette filtration est unique.*

Cette filtration est appelée filtration de Harder-Narasimhan.

Démonstration. On peut trouver un sous-système cohérent

$$(\Gamma', F') \subset (\Gamma, F)$$

tel que le polynôme $p_{(\Gamma',F')}$ soit maximal, et maximal parmi ceux-ci ; alors $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(F')$, et on peut considérer le système cohérent quotient (Γ'', F'') défini par $F'' = F/F'$, et par l'image Γ'' de Γ dans $H^0(F'')$. Par maximalité, le faisceau quotient F'' est pur et on peut réitérer la construction : on obtient une filtration (Γ_i, F_i) dont chaque gradué gr_i est semi-stable, et telle que p_{gr_i} soit strictement décroissante. L'unicité est évidente, compte-tenu du fait suivant :

Lemme 4.7. — *Soient* (Γ, F) *et* (Γ', F') *deux systèmes cohérents semi-stables tels que* $p_{(\Gamma,F)} > p_{(\Gamma',F')}$. *Alors* $\mathrm{Hom}((\Gamma, F), (\Gamma', F')) = 0$.

4.3. Familles de systèmes cohérents.

Soit S une variété algébrique. On considère les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} S \times X & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

On désigne par ω_X est le faisceau canonique sur X, et par $\omega_{S\times X/S} = p^*(\omega_X)$ le faisceau canonique relatif pour la projection q. Si F un faisceau algébrique cohérent S-plat sur $S \times X$ l'image directe $q_*(F)$ se comporte mal par image réciproque, sauf si les images directes supérieures sont nulles. Ceci introduit quelques difficultés dans la définition des familles de systèmes cohérents. Il se trouve que cette image directe est le dual d'un faisceau algébrique cohérent pour lequel les choses marchent beaucoup mieux (*cf.* appendice, corollaire 8.19). Pour cette raison, nous assimilerons un système cohérent sur X à la donnée d'une paire (Γ, F) formée d'un faisceau algébrique cohérent F sur X et d'un espace vectoriel quotient de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^n(F, \omega_X)$. En vertu du théorème de dualité de Serre-Grothendieck, les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^n(F, \omega_X)$ et $H^0(F)$ sont duaux, et cela revient donc au même. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 4.8. — *On appelle famille de systèmes cohérents sur* X *paramétrée par la variété algébrique* S *la donnée d'une paire* (F, V) *où* F *est un faisceau algébrique cohérent* S*-plat sur* S × X *et* V *un faisceau localement libre sur* S *quotient du faisceau cohérent* $\underline{\mathrm{Ext}}_q^n(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}})$.

Les classes d'isomorphisme de familles de systèmes cohérents paramétrées par S constituent un foncteur contravariant $\mathrm{S} \mapsto \underline{\mathrm{Syst}}(\mathrm{S})$: ceci résulte du bon comportement du foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}_q^n(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ par changement de base. Examinons par exemple la fibre au-dessus d'un point fermé $s \in \mathrm{S}$:

Lemme 4.9. — *Soient* F *est un faisceau algébrique cohérent* S*-plat sur* S × X. *Alors pour tout point fermé* $s \in \mathrm{S}$, *on a un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Ext}}_q^n(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}})(s) \simeq \mathrm{Ext}^n(\mathrm{F}(s), \omega_{\mathrm{X}})$$

Démonstration. On peut trouver une résolution gauche finie $\mathrm{L}. \to \mathrm{F}$ par un complexe de chaînes de faisceaux localement libres L_i sur S × X satisfaisant à la propriété suivante

$$\underline{\mathrm{Ext}}_q^j(\mathrm{L}_i, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}}) = 0$$

pour tout $j > 0$. Il résulte du théorème de de Rham formel que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}_q^i(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ se calcule comme i-ième faisceau de cohomologie du complexe de faisceaux localement libres $\underline{\mathrm{Hom}}_q(\mathrm{L}., \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}}))$. On applique à ce complexe fini le foncteur, sur la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules, $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_s \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathbb{C}$ où $\mathcal{O}_s$ est l'anneau local de S au point s et G_s le modules des germes de sections de G au point $s \in \mathrm{S}$. On obtient alors une suite spectrale de terme E_2 donné par

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{Tor}_{-i}^{\mathcal{O}_s}(\underline{\mathrm{Ext}}_q^j(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}})_s, \mathbb{C})$$

et d'aboutissement $\mathrm{Ext}^m(\mathrm{F}(s), \omega_{\mathrm{X}})$ en degré $i + j = m$. En degré n on obtient alors l'isomorphisme annoncé. □

Ainsi, la donnée d'une famille de systèmes cohérents (F, V) définit en chaque point $s \in \mathrm{S}$ un espace vectoriel quotient $\mathrm{V}(s)$ de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{X}}^n(\mathrm{F}(s), \omega_{\mathrm{X}})$ et donc un sous-espace vectoriel $\mathrm{V}^*(s)$ de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(s))$, c'est donc un système cohérent $(\mathrm{V}^*(s), \mathrm{F}(s))$. Bien entendu, il n'y a aucune difficulté pour étendre ceci à n'importe quel changement de base.

Définition 4.10. — *Soit* **S** *un ensemble de classes d'isomorphisme de systèmes cohérents. On dit que* **S** *est limité s'il existe une famille* $(\mathscr{F}, \mathrm{V})$ *de systèmes cohérents paramétrée par une variété algébrique* S *telle que tout point de* **S** *soit la classe d'isomorphisme d'un système cohérent* $(\mathrm{V}^*(s), \mathscr{F}(s))$.

Pour obtenir de telles familles limitées, il suffit en fait de fixer le polynôme de Hilbert de F :

Théorème 4.11. — *Soit* P *un polynôme de degré d. L'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents* (Γ, F) *semi-stables de dimension d et tels que* $\mathrm{P}_\mathrm{F} = \mathrm{P}$ *est limité.*

Démonstration. La difficulté tient au fait que pour un tel système cohérent (Γ, F) le faisceau cohérent F n'est pas forcément semi-stable. Montrons d'abord que les classes d'isomorphisme des faisceaux F sous-jacents aux systèmes cohérents (Γ, F), semi-stables de dimension d et tels que $\mathrm{P}_\mathrm{F} = \mathrm{P}$ constituent un ensemble limité. En vertu du théorème 2.8 on peut supposer $\Gamma \neq 0$, et le théorème 2.9 montre qu'il suffit de vérifier que $\mu_{max}(\mathrm{F})$ est majoré. Soit Y la sous-variété de X définie par l'annulateur de F. Comme dans le lemme 2.10 la sous-variété Y est pure de dimension d et de degré $\leq r^2$, où r désigne la multiplicité de F. Le corollaire 2.13 montre alors que le nombre rationnel $\mu_{min}(\mathscr{O}_\mathrm{Y})$ est minoré par une quantité qui ne dépend que de r, d, et X. Considérons le dernier terme $gr_\ell(\mathrm{F})$ du gradué de Harder-Narasimhan de F : d'après la proposition 4.4 le morphisme canonique $\Gamma \otimes \mathscr{O}_\mathrm{Y} \to gr_\ell(\mathrm{F})$ est génériquement surjectif, donc non nul. Il en résulte les inégalités

$$\mu_{min}(\mathscr{O}_\mathrm{Y}) \leq \mu(gr_\ell(\mathrm{F})) := \mu_{min}(\mathrm{F})$$

et $\mu_{min}(\mathrm{F})$ est donc minoré. Puisque la pente de F est fixée, ceci entraîne bien sûr que $\mu_{max}(\mathrm{F})$ est majoré.

On peut donc trouver une variété algébrique S et un faisceau algébrique cohérent $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$, plat sur S, tel que tout faisceau F de la famille ci-dessus soit isomorphe à l'un des faisceaux $\mathscr{F}(s)$. Considérons le faisceau algébrique cohérent $\mathscr{E}$ sur S défini, avec les notations du début du paragraphe par $\mathscr{E} := \underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{F}, \omega_{\mathrm{S}\times\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, dont le fibre $\mathscr{E}(s)$ au-dessus du point fermé s est isomorphe au dual de $H^0(\mathscr{F}(s))$, et la grassmannienne relative de Grothendieck

$$\mathbf{G} := \mathbf{Grass}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\pi} S$$

représentant les faisceaux localement libres quotients, muni du faisceau universel quotient $\pi^*(\mathscr{E}) \to V$. Posons $\mathscr{F}' = (\pi \times id_X)^*\mathscr{F}$. Par changement de base, on a un isomorphisme

$$\pi^*(\mathscr{E}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}_q^n(\mathscr{F}', \omega_{\mathbf{G}\times X/\mathbf{G}})$$

et la paire $(\mathscr{F}', V)$ définit une famille de systèmes cohérents. Si $t \in \mathbf{G}$ est un point fermé de $\mathbf{G}$ au-dessus du point $s \in S$, il définit un espace vectoriel quotient $V(t)$ du dual de $H^0(\mathscr{F}(s))$; le système cohérent associé est la paire $(V(t)^*, \mathscr{F}(s))$. Tout système cohérent semi-stable (Γ, F) tel que $P_F = P$ est évidemment isomorphe à un tel système cohérent, ce qui achève la démonstration.

4.4. L'espace de modules $\mathbf{Syst}_X(P)$

Soit p un polynôme de degré d. On considère la catégorie additive $S(p)$ des systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) tels que $p_{(\Gamma,F)} = p$. Dans cette catégorie les morphismes sont obligatoirement stricts, et on obtient encore une catégorie abélienne, artinienne et noethérienne. Les objets simples de cette catégorie s'appellent *systèmes cohérents stables.* Chaque système cohérent semi-stable a donc une filtration finie, dont le gradué est une somme directe de systèmes cohérents stables : une telle filtration est dite de Jordan-Hölder, et les gradués associés à deux telles filtrations sont isomorphes. On dira que deux systèmes cohérents semi-stables sont S—équivalents s'ils ont des gradués de Jordan-Hölder isomorphes.

L'énoncé suivant est le résultat principal de ce chapitre. Soit P un polynôme de degré d. On considère le foncteur contravariant $\underline{\mathbf{Syst}}_X(P)$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble des classes d'isomorphisme $\underline{\mathbf{Syst}}_X(P)(S)$ de familles, paramétrées par S, de systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) tels que $P_F = P$.

Théorème 4.12. — *Il existe pour le foncteur* $\underline{\mathbf{Syst}}_X(P)$ *un espace de modules grossier* $\mathbf{Syst}_X(P)$. *Cet espace de modules a les propriétés suivantes :*

(i) *La variété algébrique* $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ *est projective.*
(ii) *Les points fermés de* $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ *sont les classes de S-équivalence de systèmes cohérents semi-stables* (Γ, F) *tels que* $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}$.
(iii) *L'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents stables* (Γ, F) *tels que* $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}$ *s'identifie à un ouvert de la variété* $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$.

Naturellement, on a une décomposition en composantes disjointes

$$\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) = \coprod_i \mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}, i)$$

où $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}, i)$ est la composante correspondant aux systèmes cohérents (Γ, F) tels que $\dim \Gamma = i$. La composante $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}, 0)$ s'identifie à l'espace de modules de Simpson $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$. La construction s'inspire naturellement de la construction de Simpson, et s'appuie sur des énoncés qui généralisent les propositions 2.16, 2.18 et 2.20.

4.5. Le critère de semi-stabilité.

On se fixe dans la suite un polynôme P de degré d de terme dominant $r\frac{m^d}{d!}$. On peut d'après le théorème 4.11 trouver un nombre c satisfaisant à la propriété suivante : pour tout système cohérent semi-stable (Γ, F), où F est de polynôme de Hilbert $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}$, on a $\dim \Gamma < c$. Un tel nombre c sera fixé dans toute la suite. On considère pour tout entier m l'ensemble $\mathrm{Syst}_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents (Γ, F) tels que F soit pur de polynôme de Hilbert P, et satisfaisant aux conditions suivantes

(i) $\mathrm{P}(m) \leq h^0(\mathrm{F}(m))$
(ii) $\dim \Gamma < c$
(iii) Pour tout sous-faisceau cohérent non nul $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ de multiplicité r' et tout sous-espace vectoriel $\Gamma' \subset \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F})$ l'inégalité

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{cr' - \dim \Gamma'} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{cr - \dim \Gamma}$$

On considère d'autre part l'ensemble $\mathrm{Syst}^*_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents (Γ, F), tels que F soit un faisceau cohérent pur de polynôme de Hilbert P et satisfaisant à la condition (ii) et à la condition suivante :

(iii)* Pour tout système cohérent quotient $(\Gamma, \mathrm{F}) \longrightarrow (\Gamma'', \mathrm{F}'')$ semi-stable de dimension d et de multiplicité r'' on a

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{cr - \dim \Gamma} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}''(m))}{cr'' - \dim \Gamma''}$$

Il est clair que pour tout entier m on a une inclusion $\mathrm{Syst}_m(\mathrm{P}) \subset \mathrm{Syst}_m^*(\mathrm{P})$. Le critère de semi-stabilité qui suit est une généralisation de la proposition 2.16. La démonstration est calquée sur celle de Simpson.

Proposition 4.13. — *Il existe un nombre a tel que pour tout entier* $m \geq a$ *les ensembles* $\mathrm{Syst}_m(\mathrm{P})$ *et* $\mathrm{Syst}_m^*(\mathrm{P})$ *coïncident avec l'ensemble* $\mathrm{Syst}(\mathrm{P})$ *des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents semi-stables* (Γ, F) *tels que* $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$.

Démonstration. Soient (Γ, F) un système cohérent semi-stable tel que $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$, F' un sous-faisceau cohérent non nul de multiplicité r'. On sait que la famille des faisceaux cohérents F sous-jacente est limitée ; on peut donc trouver un majorant μ pour tout les nombres $\mu_{max}(\mathrm{F})$. Considérons la filtration de Harder-Narasimhan de F', et désignons par r'_i et μ'_i la multiplicité et la pente du i-ème gradué ; on a $\mu'_i \leq \mu$, et en appliquant le lemme 2.19, on obtient qu'il existe une constante $\mathrm{B} > 0$ ne dépendant que de r, d et des invariants numériques attachés à X telle que (*)

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} \leq \frac{1}{r'd!} \sum r'_i([\mu'_i + m + \mathrm{B}]_+)^d)$$

$$\leq \frac{1}{d!}\Big((1 - \frac{1}{r})([\mu + m + \mathrm{B}]_+)^d + \frac{1}{r}([\nu + m + \mathrm{B}]_+)^d\Big)$$

où $\nu = \mu_{min}(\mathrm{F}')$. La famille des faisceaux F sous-jacente étant limitée, il existe un entier m_0 et une constante $\mathrm{A} > 0$, ne dépendant que de X et de P, tels que pour $m \geq m_0$ on ait

$$h^0(\mathrm{F}(m)) = \mathrm{P_F}(m) \geq r\frac{(m - \mathrm{A})^d}{d!},$$

(*) On note pour tout x réel $[x]_+ = \sup(x, 0)$.

Soit ν_0 un entier tel que $\mathrm{B}+\mu(1-\frac{1}{r})+\frac{\nu_0}{r} < -\mathrm{A}$. Quitte à changer éventuellement l'entier m_0 ci-dessus, on peut supposer que pour $m \geq m_0$, on a

$$\frac{1}{d!}\Big((1-\frac{1}{r})([\mu+m+\mathrm{B})_+]^d + \frac{1}{r}([\nu_0+m+\mathrm{B}]_+)^d\Big) < \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(m)}{r}$$

La fonction $x \mapsto [x]_+$ étant croissante, on obtient pour $m \geq m_0$ et $\nu \leq \nu_0$ l'inégalité

$$\frac{1}{d!}\Big((1-\frac{1}{r})([\mu+m+\mathrm{B}]_+)^d + \frac{1}{r}([\nu+m+\mathrm{B}]_+)^d\Big) < \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(m)}{r}.$$

Par suite, pour $m \geq m_0$ et $\mu_{min}(\mathrm{F}') \leq \nu_0$ on obtient

$$h^0(\mathrm{F}'(m)) < \frac{r'}{r} h^0(\mathrm{F}(m)).$$

Mais on a

$$\frac{cr'-\dim\Gamma'}{cr-\dim\Gamma} - \frac{r'}{r} = \frac{r'\dim\Gamma - r\dim\Gamma'}{r(cr-\dim\Gamma)}$$

et par conséquent cette quantité est ≥ 0. Il en résulte que pour $m \geq m_0$ on a la majoration

$$h^0(\mathrm{F}'(m)) < \frac{cr'-\dim\Gamma'}{cr-\dim\Gamma} h^0(\mathrm{F}(m))$$

Il reste à examiner les sous-faisceaux cohérents F' pour lesquels on a $\nu = \mu_{min}(\mathrm{F}') > \nu_0$. On peut supposer que les quotients F/F' sont purs. On obtient alors, quand F varie, une famille limitée $\mathscr{L}'$ de sous-faisceaux F' d'après le lemme 2.6 de Grothendieck. On peut alors supposer d'après le théorème B de Serre que pour $m \geq m_0$ on a $\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(m)) = h^0(\mathrm{F}'(m))$. On est ramené à vérifier que l'on a

$$\frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(m)}{cr'-\dim\Gamma'} \leq \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(m)}{cr-\dim\Gamma}.$$

Mais ceci résulte du lemme 4.3 et du fait les polynômes de Hilbert qui apparaissent sont en nombre fini, à condition de prendre m_0 assez grand.

Réciproque

Montrons d'abord que, pour a assez grand, la famille de systèmes cohérents $\cup_{m\geq a}\mathrm{Syst}^*_m(\mathrm{P})$ est une famille limitée. Il suffit comme dans la preuve du théorème 4.11 de vérifier que la famille des faisceaux F sous-jacents est limitée, et pour ceci on applique le théorème 2.9. Le faisceau F étant supposé pur, il a une filtration de Harder-Narasimhan ; soit F'' le dernier quotient dans le gradué de Harder-Narasimhan ; par définition sa pente est $\mu'' = \mu_{min}(\mathrm{F})$; soit r'' sa multiplicité. D'après le lemme 2.19 on a

$$\frac{h^0(\mathrm{F}''(m))}{r''} \leq \frac{1}{d!}([\mu'' + m + \mathrm{C}]_+)^d$$

Soit Γ'' l'image de Γ dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}'')$. Par hypothèse, on a

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{cr - \dim \Gamma} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}''(m))}{cr'' - \dim \Gamma''} \tag{4.2}$$

Si $\Gamma'' = 0$, on obtient

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{r} \leq \frac{1}{d!}([\mu'' + m + \mathrm{C}]_+)^d$$

Or, il existe une constante $\mathrm{A} > 0$ et un entier $m_0 > \mathrm{A}$ tels que pour $m \geq m_0$

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{r} \geq \frac{(m - \mathrm{A})^d}{d!}$$

Si $m > m_0$, ceci entraîne $m - \mathrm{A} \leq \mu'' + m + \mathrm{C}$; ainsi, $\mu'' \geq -\mathrm{A} - \mathrm{C}$ et donc $\mu_{min}(\mathrm{F})$ est alors minoré. Si $\Gamma'' \neq 0$, si S est la sous-variété de X définie par l'annulateur de F on a un morphisme non nul $\mathcal{O}_\mathrm{S} \to \mathrm{F}''$ et par conséquent, on a certainement $\mu_{min}(\mathcal{O}_\mathrm{S}) \leq \mu''$. Mais, comme on l'a vu dans le lemme 2.13, les nombres $\mu_{min}(\mathcal{O}_\mathrm{S})$ sont minorés par une constante qui ne dépend que de d et r, (et bien entendu X). Par suite, la famille de faisceaux F est limitée.

Or, on a lemme suivant

Lemme 4.14. — *Soit $\mathscr{F}$ une famille limitée de faisceaux algébriques cohérents purs de dimension d. Pour tout sous-espace vectoriel $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F})$ les faisceaux G_i sous-jacents au gradué de Jordan-Holder $gr_i(\Gamma, \mathrm{F}) = (\Gamma_i, \mathrm{G}_i)$ du système cohérent (Γ, F) forment une famille limitée.*

C'est le cas en particulier du dernier gradué (Γ'', G'') et on peut trouver un entier m_1 tel que pour $m \geq m_1$ on ait $h^0(\mathrm{G}''(m)) = \mathrm{P}_{\mathrm{G}''}(m)$. Si F définit un point de $\mathrm{Syst}^*_m(\mathrm{P})$ on peut donc écrire l'inégalité (4.2) pour le quotient (Γ'', F'') ce qui donne, en désignant encore par r'' la multiplicité de G''

$$\frac{\mathrm{P}(m))}{cr - \dim \Gamma} \leq \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{G}''}(m))}{cr'' - \dim \Gamma''}$$

Cette inégalité entraîne

$$\frac{\dim \Gamma''}{r''} \geq \frac{\dim \Gamma}{r} \quad \text{et, en cas d'égalité,} \quad p_{G''} \geq p_F$$

ce qui démontre la semi-stabilité du système cohérent (Γ, F). □

Démonstration du lemme 4.14.

Soient r_i et μ_i la multiplicité et la pente de G_i. On sait que la suite $i \mapsto \frac{\dim \Gamma_i}{r_i}$ est décroissante. On peut donc trouver un entier s tel que pour $1 \leq i \leq s$ on ait $\Gamma_i \neq 0$ et $\Gamma_i = 0$ pour $i > s$. Si S est la sous-variété de X définie par l'annulateur de F on a encore pour $1 \leq i \leq s$ les inégalités $\mu_{min}(\mathscr{O}_S) \leq \mu_i$ et par conséquent les μ_i sont minorés d'après le corollaire 2.13. D'autre part,

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} r_i \mu_i}{\sum_{i=1}^{s} r_i}$$

est la pente d'un sous-module cohérent F' de F, donc cette pente est majorée (*cf.* lemme 2.6). Il en résulte que les μ_i sont bornés et le quotient $F'' = F/F'$ étant pur, par le même lemme de Grothendieck le faisceau F' appartient à une famille limitée. Le quotient F'' appartient aussi à une famille limitée, et la somme directe $\oplus_{i>s} G_i$ n'est autre que le gradué de Harder-Narasimhan de F''. Par suite tous les G_i appartiennent à une famille limitée. D'où le lemme. □

4.6. Sous-systèmes cohérents maximaux

Soit P un polynôme de degré d, de terme dominant $r\frac{m^d}{d!}$ et c un nombre choisi comme au § 4.5 précédent. Etant donné un système semi-stable (Γ, F), où F est un faisceau cohérent de dimension d, de polynôme de Hilbert P et de multiplicité r, désignons par $\mathrm{Max}(\Gamma, F)$ l'ensemble des sous-systèmes cohérents $(\Gamma', F') \subset (\Gamma, F)$ tels que $p_{(\Gamma', F')} = p_{(\Gamma, F)}$ ou ce qui revient au même à

$$\frac{P_{F'}}{r'c - \dim \Gamma'} = \frac{P_F}{cr - \dim \Gamma}. \tag{4.3}$$

De même, désignons pour tout entier m par $\mathrm{Max}_m(\Gamma, F)$ l'ensemble des sous-systèmes cohérents $(\Gamma', F') \subset (\Gamma, F)$ non nuls de multiplicité r' satisfaisant à la condition suivante :

$$\frac{h^0(F'(m))}{r'c - \dim \Gamma'} = \frac{h^0(F(m))}{cr - \dim \Gamma} \tag{4.4}$$

Proposition 4.15. — *Soit* P *un polynôme de degré d. Il existe un nombre b tel que pour tout $m \geq b$ et tout système cohérent semi-stable* (Γ, F), *tel que* F *soit de polynôme de Hilbert* P *l'ensemble* $\mathrm{Max}_m(\Gamma, \mathrm{F})$ *coïncide avec* $\mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$.

Démonstration. Les sytèmes cohérents (Γ', F') qui appartiennent à l'ensemble $\mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$ sont évidemment semi-stables, et la réunion des familles $\mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$ lorsque (Γ, F) parcourt l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes semi-stables tels que $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$ est alors limitée d'après le théorème 4.11. On peut appliquer de manière uniforme le théorème B de Serre : il existe un entier m_0 tel que pour $m \geq m_0$, on ait l'égalité (4.4) pour tout système (Γ, F) semi-stable avec $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$; ceci signifie que $\mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F}) \subset \mathrm{Max}_m(\Gamma, \mathrm{F})$.

Dans l'autre sens, considérons $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}_m(\Gamma, \mathrm{F})$ et supposons dans un premier temps que le quotient $\mathrm{F}'' = \mathrm{F}/\mathrm{F}'$ soit pur. On verra plus bas que si m est assez grand c'est toujours le cas. La première partie de la démonstration de la proposition 4.13 ci-dessus montre que si m a été choisi assez grand, $\mu_{min}(\mathrm{F}')$ est minoré, sinon on obtiendrait une inégalité stricte. Alors la famille des F' ainsi obtenue est limitée quand (Γ, F) varie d'après le lemme de Grothendieck, ce qui permet l'usage du théorème B de Serre : on obtient l'existence d'un entier m_1 tel que si $m \geq m_1$ on ait pour tout F' de cette famille $h^0(\mathrm{F}'(m)) = \mathrm{P_{F'}}(m)$. Si (Γ', F') appartient à $\mathrm{Max}_m(\Gamma, \mathrm{F})$ on a alors d'après (4.4)

$$\frac{\mathrm{P_{F'}}(m)}{r'c - \dim \Gamma'} = \frac{\mathrm{P_F}(m)}{cr - \dim \Gamma}.$$

Lorsque (Γ', F') parcourt cette famille, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes du type

$$\frac{\mathrm{P_{F'}}}{r'c - \dim \Gamma'}.$$

Ceci implique si que m a été choisi assez grand on a l'égalité (4.3) ce qui signifie que (Γ', F') appartient à $\mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$.

Supposons m maintenant assez grand pour que la conclusion de l'énoncé 4.13 soit vraie, et pour que $\mathrm{F}'(m)$ soit engendré par ses sections chaque fois que $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$. Considérons un sous-système quelconque $(\Gamma', \mathrm{G}') \in \mathrm{Max}_m(\Gamma, \mathrm{F})$, G' étant supposé de multiplicité r'. Soit F' l'image réciproque du plus grand sous-module cohérent de dimension $\leq d - 1$ de F/G'. Alors

$(\Gamma', G') \subset (\Gamma', F')$ et F' et G' ont même multiplicité r' ; on a alors les majorations

$$\frac{h^0(G'(m))}{cr' - \dim\Gamma'} \leq \frac{h^0(F'(m))}{cr' - \dim\Gamma'} \leq \frac{h^0(F(m))}{cr - \dim\Gamma}$$

la seconde inégalité résultant du choix de m. Puisque (Γ, F) définit un point de $\mathrm{Syst}_m(P)$ on a en fait des égalités, ce qui entraîne que $(\Gamma', F') \in \mathrm{Max}_m(\Gamma, F)$ et $h^0(G'(m)) = h^0(F'(m))$. Comme le quotient F/F' est pur de dimension d on a déjà vérifié que (Γ', F') appartient à $\mathrm{Max}(\Gamma, F)$. Par le choix de m, $F'(m)$ est engendré par ses sections, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(G'(m)) \otimes \mathscr{O}_X & \simeq & H^0(F'(m)) \otimes \mathscr{O}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G'(m) & \hookrightarrow & F'(m) \end{array}$$

montre que $G' = F'$ et par suite (Γ', G') appartient à $\mathrm{Max}(\Gamma, F)$. □

4.7. Un calcul de semi-stabilité

On se fixe un faisceau polystable E de multiplicité r et un entier $c > 0$. On considère le schéma de Hilbert des faisceaux cohérents quotients de E de polynôme de Hilbert P et le diagramme standard

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hilb}(E, P) \times X & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ \mathbf{Hilb}(E, P) & & \end{array}$$

où p et q sont les projections canoniques. On notera ω_q le faisceau canonique relatif pour la projection q ; on désigne par $\mathscr{F}$ le faisceau quotient universel de $p^*(E)$ sur le produit $\mathbf{Hilb}(E, P) \times X$. On peut alors former le faisceau algébrique cohérent $\mathscr{E} = \underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{F}, \omega_q)$ sur $\mathbf{Hilb}(E, P)$, et la grassmannienne relative de Grothendieck $\mathbf{G} = \mathbf{Grass}(\mathscr{E}) \to \mathbf{Hilb}(E, P)$; c'est une variété projective dont les points fermés définissent des systèmes cohérents. Le groupe $Sl(E)$ (*cf.* § 2.5) opère sur $\mathbf{G}$; on se propose de trouver un fibré inversible sur $\mathbf{G}$ sur lequel le groupe $Sl(E)$ agit linéairement, qui permette de retrouver comme points semi-stables, les points correspondant à notre définition des systèmes cohérents semi-stables. Le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(E, P)$ est polarisé par le plongement de Grothendieck

$$\mathbf{Hilb}(E, P) \hookrightarrow \mathbf{Grass}(H^0(E(\ell)), P(\ell)))$$

défini pour ℓ assez grand, qui associe au faisceau quotient F l'espace vectoriel quotient $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell))$ comme on l'a expliqué au § 2.5. On considère sur la grassmannienne relative $\mathbf{G}$ le fibré quotient universel $\mathscr{V}$, et le fibré inversible $\mathscr{L}$ défini par

$$\mathscr{L} = (\det \mathscr{V})^{\otimes \ell^d} \otimes q^*(\mathscr{O}(cd!)).$$

L'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$ se relève en une action linéaire sur ce fibré inversible. Nous allons déterminer les points semi-stables de $\mathbf{G} = \mathbf{Grass}(\mathscr{E})$ relatifs à l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$ et à ce fibré inversible. Etant donné un point $\xi \in \mathbf{G}$ définissant un système cohérent (Γ, F), avec F quotient de E, de polynôme de Hilbert P, et un sous-faisceau $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$, on considère l'image F' de E' dans F, et l'intersection $\Gamma' := \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}')$.

Proposition 4.16. — *La grassmanienne relative* $\mathbf{G}$ *étant munie du fibré inversible* $\mathscr{L}$ *ci-dessus, et l'entier* ℓ *étant choisi assez grand, les points semi-stables (resp. stables) de* $\mathbf{G}$ *correspondent aux systèmes cohérents* (Γ, F) *qui satisfont à condition suivante : pour tout sous-faisceau cohérent* $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$ *non nul et distinct de* E, *de multiplicité* r', *on a*

$$\frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(x) - x^d \dim \Gamma}{r} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(x) - x^d \dim \Gamma'}{r'} \quad (\textit{resp.} <) \tag{4.5}$$

On doit comprendre cette inégalité comme une inégalité entre polynômes de degré d en la variable x. Elle entraîne que l'ensemble $\mathbf{G}^{ss}$ des points semi-stables est indépendant du choix de ℓ, à partir du moment où il a été pris assez grand.

Le fibré inversible $\mathscr{L}$ n'ayant aucune raison d'être ample, précisons d'abord ce que nous entendons ici par semi-stabilité ou stabilité. Soient G un groupe réductif, V un G-module de dimension finie, et $\lambda : \mathbf{C}^* \to \mathrm{G}$ un sous-groupe à un paramètre. Soit, pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$,

$$\mathrm{V}_i = \bigcap_t \mathrm{Ker}(\lambda(t) - t^i id_{\mathrm{V}}).$$

Alors $\oplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathrm{V}_i = \mathrm{V}$. Tout vecteur $v \in \mathrm{V}$, s'écrit $v = \sum_{i \in \mathbf{Z}} v_i$; on pose $\mu(\lambda, v) = -\min\{i, v_i \neq 0\}$. Soient $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ l'espace projectif des hyperplans de V et y un point de $\mathbf{P}(\mathrm{V})$. On pose $\mu(\lambda, y) = \mu(\lambda, \eta)$, où η est une forme linéaire non nulle de V^* se projetant sur y. Ce nombre est évidemment indépendant du choix du représentant η de y.

Plus généralement, si Y est une variété projective munie d'une action de G, et d'un fibré inversible L sur lequel le groupe G agit linéairement, pour tout point fixe z pour l'action de G la représentation induite par λ sur la fibre de L en z est une homothétie de rapport t^{μ} où μ est un entier ; on pose $\mu_{\mathrm{L}}(\lambda, z) = \mu$. Pour tout point $y \in \mathrm{Y}$, on pose $\mu_{\mathrm{L}}(\lambda, y) = \mu(\lambda, y_0)$, où y_0 est la spécialisation $y_0 = \lim_{t\to 0} \lambda(t)y$.

Définition 4.17. — *Soient* Y *une variété projective, munie d'une action de* G, *et d'un fibré inversible* L *sur lequel le groupe* G *agit linéairement. Un point* $y \in \mathrm{Y}$ *est dit semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre* λ *de* G *on a* $\mu_{\mathrm{L}}(\lambda, y) \geq 0$ *(resp.* $\mu_{\mathrm{L}}(\lambda, y) > 0$*).*

Dans le cas où le fibré inversible L est ample, il s'agit des notions de semi-stabilité et stabilité habituelles : c'est le critère de Hilbert-Mumford [25] Les points semi-stables constituent alors un ouvert invariant qui admet un bon quotient, et ce bon quotient est une variété projective. Revenons à notre situation. Etant donné un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \to Sl(\mathrm{E})$ on considère pour tout entier i le sous-faisceau W_i de E défini par

$$\mathrm{W}_i = \bigcap_t \mathrm{Ker}\,(\lambda(t) - t^i id_{\mathrm{E}})$$

et la suite décroissante de sous-faisceaux E_i définie par $\mathrm{E}_i = \oplus_{j\geq i}\mathrm{W}_j$. Pour tout point $\xi = (\Gamma, \mathrm{F}) \in \mathbf{G}$, cette suite définit une suite décroissante de systèmes cohérents (Γ_i, F_i), dont on désigne le gradué par $(gr_i(\Gamma), gr_i(\mathrm{F}))$.

Lemme 4.18. — *La grassmannienne relative* **G** *étant munie du fibré inversible* $\mathscr{L}$ *défini ci-dessus, pour* ℓ *est assez grand, on a*

$$\mu_{\mathscr{L}}(\lambda, \xi) = \sum_i i(cd!\mathrm{P}_{gr_i(\mathrm{F})}(\ell)) - \ell^d \dim gr_i(\Gamma)) \tag{4.6}$$

Démonstration. On pose $\mathrm{A}_i = \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(i))$. Considérons la suite décroissante de sous-espaces vectoriels Γ_i et choisissons une base de $gr(\Gamma) := \oplus gr_i(\Gamma)$, qu'on relève à Γ pour obtenir une base $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Le vecteur $u \in \Lambda^k\Gamma$ défini par $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ est évidemment non nul et engendre $\wedge^k\Gamma$. On pose

$$\alpha = \sum_i i \dim gr_i(\Gamma).$$

Pour calculer $\lambda(t)u$ on commence par choisir ℓ assez grand pour que les applications linéaires $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}_i(\ell)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}_i(\ell))$ soient surjectives, ce qui est possible d'après le théorème B de Serre uniforme, et on considère le plongement canonique $\mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{F}(\ell) \otimes \mathrm{A}_\ell^*$. Ce plongement est compatible avec l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$. Alors l'image de u dans $\wedge^k(\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell)\otimes \mathrm{A}_\ell^*)$ se relève dans $\wedge^k(\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell)\otimes \mathrm{A}_\ell^*)$ en un élément w tel que

$$\lambda(t).w = t^\alpha w + \text{ termes de degré supérieur.}$$

Par spécialisation, pour le fibré $\mathscr{L}' = \det \mathscr{V}$ on obtient $\mu_{\mathscr{L}'}(\lambda, \xi) = -\alpha$.

Pour le fibré inversible $\mathscr{L}'' = q^*(\mathscr{O}(1))$, c'est plus facile : c'est en fait le même calcul que sur le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ pour le fibré $\mathscr{O}(1)$. Toutes les familles de faisceaux introduites sont limitées, et le théorème B de Serre uniforme entraîne pour ℓ assez grand, et ceci indépendamment de ξ et λ, on a $gr_i(\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell)) = \mathrm{H}^0(gr_i(\mathrm{F})(\ell))$ et $h^0(gr_i(\mathrm{F}))(\ell) = \mathrm{P}_{gr_i(\mathrm{F})}(\ell)$. Posons $\mathrm{N} = \mathrm{P}(\ell)$. On peut construire une base $(v_1, ..., v_\mathrm{N})$ de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell))$ qui relève une base de $gr_i(\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell)))$; alors l'élément $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_\mathrm{N}$ provient d'un élément $w \in \wedge^\mathrm{N}\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell))$ qui permet le calcul de $\lambda(t)w$: on a alors

$$\lambda(t)z = t^\beta z + \text{termes de degré supérieur}$$

où β est défini par

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_i i h^0(gr_i(\mathrm{F})(\ell)) \\ &= \sum_i i\mathrm{P}_{gr_i(\mathrm{F})}(\ell).\end{aligned}$$

Si on considère le fibré inversible $\mathscr{L}'' = q^*(\mathscr{O}(1))$ sur $\mathscr{G}$ on obtient donc $\mu_{\mathscr{L}''}(\lambda, \xi) = \beta$. Il en résulte que pour le fibré inversible $\mathscr{L}$ on a

$$\mu_{\mathscr{L}}(\lambda, \xi) = -\ell^d\alpha + cd!\beta.$$

ce qui démontre le lemme. □

Démonstration de la proposition 4.16

Le résultat est une conséquence des faits suivants :

a) les familles de faisceaux F et F′ introduits dans l'énoncé sont limitées. Les polynômes de Hilbert de ces faisceaux sont en nombre fini.

b) étant donnée une famille finie $\mathscr{P}$ de polynômes P, à coefficients rationnels, on peut trouver un entier ℓ_0 tel que pour $\ell \geq \ell_0$ l'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\ell) : \mathscr{P} \to \mathbf{Q}$ soit strictement croissante.

Dès lors, l'inégalité entre polynômes (4.5) est équivalente à

$$\frac{cd!h^0(\mathrm{F}'(\ell)) - \ell^d \dim \Gamma'}{r'} \geq \frac{cd!h^0(\mathrm{F}(\ell)) - \ell^d \dim \Gamma}{r} \tag{4.7}$$

pour un choix convenable de ℓ, ce choix ne dépendant ni de ξ, ni de E′.

Posons $m_i = cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}_i}(\ell) - \ell^d \dim \Gamma_i$, et désignons par r_i la multiplicité de $gr_i(\mathrm{E})$. Les faisceaux $gr_i(\mathrm{E})$ sont nuls sauf pour $a \leq i \leq b$. Il découle du lemme 4.18 que (transformation d'Abel)

$$\mu_{\mathscr{L}}(\lambda, \xi) = am_a + \sum_{i>a} m_i.$$

Supposons que la condition (4.5) de la proposition soit satisfaite. Puisque les faisceaux E_i appartiennent à Max(E) on a pour tout i,

$$m_i \geq \frac{m_a}{r}(\sum_{j \geq i} r_j).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mu_{\mathscr{L}}(\lambda, \xi) &\geq \frac{m_a}{r}(ra + \sum_{\substack{i>a \\ j\geq i}} r_j) \\ &\geq m_a \sum_i ir_i\end{aligned}$$

La dernière somme est nulle car λ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$. Ainsi, $\mu_{\mathscr{L}}(\lambda, \xi) \geq 0$: ceci montre que ξ est un point semi-stable.

Réciproquement, supposons que ξ soit un point semi-stable pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$. Pour $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$, de multiplicité r', désignons par (Γ', F') le système cohérent associé, et posons $m' = cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(\ell) - \ell^d \dim \Gamma'$, et $m = cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\ell) - \ell^d \dim \Gamma$.

On peut alors trouver un facteur direct E″ de E′ dans E, et un sous-groupe à un paramètre λ dans $Sl(\mathrm{E})$ s'écrivant dans la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{E}' \oplus \mathrm{E}''$

$$\begin{pmatrix} t^{r-r'} id_{\mathrm{E}'} & 0 \\ 0 & t^{-r'} id_{\mathrm{E}''} \end{pmatrix}$$

La formule (4.6) montre que pour ce sous-groupe à un paramètre on a $\mu_{\mathscr{L}}(\lambda, \xi) = rm' - r'm$. Puisque ξ est semi-stable, on obtient

$$\frac{m'}{r'} \geq \frac{m}{r}$$

ce qui est l'inégalité attendue. Le raisonnement est le même pour la stabilité. □

4.8. La construction de $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème 4.12. On se fixe un polynôme P de degré d et de terme dominant $r\frac{m^d}{d!}$. Le nombre c sera choisi comme au § 4.5. On choisit un entier m assez grand pour que les propriétés suivantes soient vraies :

a) pour tout système cohérent semi-stable (Γ, F), le faisceau $\mathrm{F}(m)$ est engendré par ses sections, et $\mathrm{H}^q(\mathrm{F}(m)) = 0$ pour $q > 0$; et la même chose pour tout les sous-systèmes $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$.
b) les conclusions des énoncés 4.13 et 4.15 sont vraies.

On pose $\mathrm{A}_m = \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(m))$. Pour tout faisceau cohérent F, le morphisme naturel

$$\mathrm{F} \to \mathrm{F}(m) \otimes \mathrm{A}_m^*$$

est injectif. Ceci permet de voir pour tout système cohérent (Γ, F) l'espace vectoriel Γ comme un sous-espace de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m)) \otimes \mathrm{A}_m^*$.

Soit H un espace vectoriel de dimension $\mathrm{P}(m)$, et $\mathrm{E} = \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$; on pose $\mathrm{E} = \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$, et on considère comme au paragraphe précédent la grassmannienne relative $\mathbf{G}$ au-dessus du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$. On considère en outre, comme au § 2.5 le sous-schéma $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, fermeture schématique dans $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ de l'ouvert représentant les quotients purs de dimension d.

Lemme 4.19. — *Soit ξ un point de* $\mathbf{G}$, *définissant un système cohérent* (Γ, F) *tel que* $\dim \Gamma < c$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application linéaire* $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ *induite par la projection* $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est inversible, et le système cohérent* (Γ, F) *est semi-stable.*

(ii) *Le point ξ semi-stable relativement à $\mathscr{L}$ et à l'action de* $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$; *le faisceau* F *définit un point de* $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, *et le sous-espace* $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m)) \otimes \mathrm{A}_m^*$ *est contenu dans l'image de de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \otimes \mathrm{A}_m^*$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : La seule assertion qui mérite une explication est la propriété de semi-stabilité. Soit $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$ un sous-espace vectoriel non nul, auquel correspond un sous-fibré $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$. Soit F' le sous-faisceau de F engendré par E' et $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F})$. D'après le choix de m et la proposition 4.13 on peut écrire les inégalités

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{cr' - \dim \Gamma'} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{cr - \dim \Gamma}$$

l'égalité signifiant d'après la proposition 4.15 que (Γ', F') appartient à $\mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$. Ceci entraîne, en raison du choix de c

$$\frac{cd!\mathrm{P}_\mathrm{F}(x) - x^d \dim \Gamma}{h^0(\mathrm{F}(m))} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(x) - x^d \dim \Gamma'}{h^0(\mathrm{F}'(m))}.$$

Remarquons maintenant que l'hypothèse (i) implique $\dim \mathrm{H} = h^0(\mathrm{F}(m))$ et que l'application linéaire induite $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^0(\mathrm{E}'(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$ est injective ; il en résulte l'inégalité

$$\frac{cd!\mathrm{P}_\mathrm{F}(x) - x^d \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(x) - x^d \dim \Gamma'}{\dim \mathrm{H}'}.$$

D'après la proposition 4.16, on obtient la semi-stabilité du point ξ relativement à $\mathscr{L}$ et à l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Considérons un point $(\Gamma, \mathrm{F}) \in \mathbf{G}$ satisfaisant aux conditions (ii). Constatons d'abord que la flèche $\mathrm{H} = \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ est injective. Si son noyau H' était non nul, le faisceau F' engendré par $\mathrm{E}' := \mathrm{H}' \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X}(-m)$ serait nul, et avec les notations de la proposition 4.16 on aurait l'inégalité

$$\frac{cd!\mathrm{P}_\mathrm{F}(x) - x^d \dim \Gamma}{h^0(\mathrm{F}(m))} \leq 0$$

ce qui est absurde car le coefficient du terme dominant du polynôme $cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(x) - x^d \dim \Gamma$ est $cr - \dim \Gamma$ donc > 0. Puisque le point défini par F appartient à $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ on peut trouver d'après le théorème 8.1 un faisceau cohérent pur G de même polynôme de Hilbert que F et un morphisme $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ dont le noyau et le conoyau sont de dimension $< d$; l'image de Γ dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{G})$ définit un système cohérent (W, G). On va montrer que ce système cohérent est semi-stable. Pour ceci, on vérifie la condition $\mathrm{Syst}^*_m(\mathrm{P})$.

Soit $(\mathrm{W}'', \mathrm{G}'')$ un système cohérent de dimension d, semi-stable, quotient de (W, G); alors W'' est l'image de W, et donc en fait celle de Γ par le morphisme composé $\mathrm{F} \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$. Soient F'' l'image de F dans G'', et H'' l'image de H dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}''(m))$. Evidemment, le faisceau F'' a même dimension d et même multiplicité r'' que G''. De plus, $\mathrm{W}'' \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'')$. Le critère 4.16 transcrit en termes de quotients fournit alors l'inégalité

$$\frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}''}(x) - x^d \dim \mathrm{W}''}{\dim \mathrm{H}''} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(x) - x^d \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}} \tag{4.8}$$

En effet, soient F' le noyau de la projection $\mathrm{F} \to \mathrm{F}''$. On pose $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$ et $\mathrm{W}' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}')$. On a $\mathrm{H}' \neq \mathrm{H}$, et on peut supposer $\mathrm{H}' \neq 0$, car si $\mathrm{H}' = 0$, la projection $\mathrm{H} \to \mathrm{H}''$ serait un isomorphisme, et par suite, comme Γ est un sous-espace de $\mathrm{H} \otimes \mathrm{A}^*_m$, on aurait aussi $\Gamma \simeq \mathrm{W}''$. L'inégalité à prouver serait alors triviale. Le sous-module F'_1 de F' engendré par $\mathrm{E}' = \mathrm{H}' \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(-m)$ contient l'image de $\mathrm{W}' \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$. Ainsi, on a une inclusion $\mathrm{W}' \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'_1) \cap \Gamma$ et on obtient par le critère 4.16 l'inégalité

$$\frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(x) - x^d \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'_1}(x) - x^d \dim \mathrm{W}'}{\dim \mathrm{H}'}.$$

Compte-tenu de l'inégalité $\mathrm{P}_{\mathrm{F}'_1} \leq \mathrm{P}_{\mathrm{F}'}$ on peut remplacer F'_1 par F' dans cette inégalité, et l'inégalité (4.8) attendue s'obtient alors par un argument de barycentre.

On a alors en considérant le terme de plus haut degré

$$\frac{cr'' - \dim \mathrm{W}''}{\dim \mathrm{H}''} \leq \frac{cr - \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}}$$

Compte-tenu de l'hypothèse $\dim \Gamma < c$, les deux membres sont positifs, et on obtient

$$\frac{\dim \mathrm{H}}{cr - \dim \Gamma} \leq \frac{\dim \mathrm{H}''}{cr'' - \dim \mathrm{W}''}$$

Les inégalités $\dim \mathrm{W} \leq \dim \Gamma$ et $\dim \mathrm{H}'' \leq h^0(\mathrm{G}''(m))$ fournissent la majoration

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{cr - \dim \mathrm{W}} \leq \frac{h^0(\mathrm{G}''(m))}{cr'' - \dim \mathrm{W}''} \tag{4.9}$$

ce qui signifie, G étant pur, que le système cohérent (W, G) définit un point de $\mathrm{Syst}^*_m(\mathrm{P})$. Par le choix de m et la proposition 4.13 ce système cohérent est semi-stable. A nouveau le choix de m impose $h^0(\mathrm{G}(m)) = \mathrm{P}(m)$ et $\mathrm{G}(m)$ est engendré par ses sections. Pour $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}$, on obtient dans (4.9) une égalité ce qui impose $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{H}'' = h^0(\mathrm{G}(m))$. L'application linéaire $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{G}(m)$, qui a pour rang $\dim \mathrm{H}''$, est alors un isomorphisme. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}} & \rightarrow & \mathrm{F}(m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^0(\mathrm{G}(m)) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}} & \rightarrow & \mathrm{G}(m) \end{array}$$

il découle que la flèche $\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est surjective, et puisque $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}_{\mathrm{G}}$ c'est un isomorphisme. On a donc obtenu que (Γ, F) est un système cohérent semi-stable, ce qui démontre (i). □

Soit $\mathbf{G}^{ss}$ l'ensemble des points $\xi \in \mathbf{G}$ satisfaisant à la condition (i) du lemme 4.19 ci-dessus, c'est-à-dire définissant un système cohérent (Γ, F) semi-stable et tel que l'application linéaire $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ associée à la projection $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ soit bijective.

Lemme 4.20. — *L'ensemble* $\mathbf{G}^{ss}$ *est un ouvert* $Sl(\mathrm{E})$*−invariant de* $\mathbf{G}$ *qui a un bon quotient ; ce quotient est une variété projective.*

Démonstration. Considérons l'ouvert $\mathfrak{H}$ de $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ des faisceaux quotients F tels que l'application linéaire $\mathrm{H} = \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ associée à la projection $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ soit injective ; c'est bien un ouvert car c'est le complémentaire du support du faisceau cohérent défini par le conoyau de la flèche naturelle sur $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{F}(m), \omega_q) \to \mathrm{H}^* \otimes \mathscr{O}.$$

Soit d'autre part $\mathbf{Grass}(\mathrm{H}^* \otimes \mathrm{A}_m)$ la grassmannienne des quotients de dimension $< c$ de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^* \otimes \mathrm{A}_m$. Au-dessus de $\mathfrak{H}$, on a deux morphismes surjectifs de faisceaux cohérents

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{F}(m), \omega_q) \otimes \mathrm{A}_m|_{\mathfrak{H}} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{F}, \omega_q)|_{\mathfrak{H}} \\ \downarrow & & \\ \mathrm{H}^* \otimes \mathrm{A}_m \otimes \mathscr{O}_{\mathfrak{h}} & & \end{array}$$

et par conséquent pour les grassmanniennes relatives au-dessus de $\mathfrak{H}$ correspondantes on a des plongements fermés

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{G}|_{\mathfrak{H}} \\ & & \downarrow \\ \mathfrak{H} \times \mathbf{Grass}(\mathrm{H}^* \otimes \mathrm{A}_m) & \longrightarrow & \mathbf{Grass}(\underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{F}(m), \omega_q)|_{\mathfrak{H}} \end{array}$$

Soit $\mathfrak{G}$ l'intersection de ces grassmanniennes relatives. Il y a donc deux façons naturelles de plonger cette intersection dans une variété projective. Cette intersection se plonge d'une part dans $\mathbf{G}$, et pour le fibré inversible $\mathscr{L}$ défini au § 4.7, les points semi-stables de $\mathfrak{G}$ pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$ sont exactement les points de $\mathbf{G}^{ss}$ d'après le lemme ci-dessus. On peut aussi plonger $\mathfrak{G}$ dans le produit

$$\mathfrak{P} = \overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P}) \times \mathbf{Grass}(\mathrm{H}^* \otimes \mathrm{A}_m).$$

Ce produit sera muni de la polarisation $\mathscr{O}(cd!, \ell^d)$: l'avantage est que maintenant ce fibré est très ample, et nous allons pouvoir utiliser la théorie de Mumford. On note $\mathfrak{P}^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables et $\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{P}$ le plongement ainsi défini. Nous allons montrer que

$$\mathbf{G}^{ss} = \psi^{-1}(\mathfrak{P}^{ss}) \tag{4.10}$$

Remarquons d'abord que le critère de Hilbert-Mumford permet de décrire l'ouvert $\mathfrak{P}^{ss}$ des points semi-stables de $\mathfrak{P}$ pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$: le calcul du lemme 4.18 s'étend aux points de $\mathfrak{P}$ et on obtient comme dans la proposition 4.16 une caractérisation des points semi-stables : un point $\xi = (\mathrm{F}, \Gamma^*) \in \mathfrak{P}$ est semi-stable si pour tout sous-espace non nul $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$, on a, en désignant par F' le sous-faisceau de F engendré par $\mathrm{E}' = \mathrm{H}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$ et en posant $\Gamma' = \Gamma \cap (\mathrm{H} \otimes \mathrm{A}_m^*)$

$$\frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(x) - x^d \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(x) - x^d \dim \Gamma'}{\dim \mathrm{H}'} \tag{4.11}$$

On voit comme dans le lemme 4.19, si un tel point (F, Γ^*) est semi-stable, l'application linéaire induite $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ est injective, et donc l'ouvert $\mathfrak{P}^{ss}$ se projette dans $\mathfrak{H}$.

Montrons d'abord que $\psi(\mathbf{G}^{ss}) \subset \mathfrak{P}^{ss}$. Soit (Γ, F) un point de $\mathbf{G}^{ss}$. Soit H' un sous-espace de H, non nul, F' le sous-faisceau de F engendré par $\mathrm{E}' = \mathrm{H}' \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X}(-m)$, et $\Gamma' = \mathrm{H}' \otimes \mathrm{A}_m^* \cap \Gamma$. On a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0(\mathrm{F}') & \to & \mathrm{H}^0(\mathrm{F}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m)) \otimes \mathrm{A}_m^* & \to & \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m)) \otimes \mathrm{A}_m^*
\end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont des inclusions, et $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$. Par suite, $\Gamma' \subset \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}')$. Le fait que (Γ, F) soit un point de $\mathbf{G}^{ss}$ entraîne que l'inégalité (4.11) est vraie pour la paire $(\Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'), \mathrm{F}')$. A plus forte raison, elle est vraie pour la paire (Γ', F').

Réciproquement, considérons un point $\xi = (\Gamma, \mathrm{F})$ de l'intersection $\mathfrak{G}$, qui est semi-stable comme point de $\mathfrak{P}$. Soit H' un sous-espace vectoriel non nul de H, et F' le sous-faisceau de F engendré par $\mathrm{E}' = \mathrm{H}' \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X}$. Enfin, soit $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F})$. Le sous-faisceau F' est aussi engendré par le sous-fibré correspondant à $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$, sous-espace qui contient H', et on a $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m)) \otimes \mathrm{A}_m^*$. Puisque $\Gamma \subset \mathrm{H} \otimes \mathrm{A}_m^*$, la propriété de semi-stabilité (4.11), comme point de $\mathfrak{P}$, s'écrit pour le sous-espace $\mathrm{H} \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$

$$\frac{cd!\mathrm{P}_\mathrm{F}(x) - x^d \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}} \leq \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(x) - x^d \dim \Gamma'}{\dim(\mathrm{H} \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m)))}.$$

Puisque $\dim \mathrm{H}' \leq \dim(\mathrm{H} \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$ on déduit l'inégalité (4.5).

L'inclusion (4.10) montre que $\mathbf{G}^{ss}$ est un ouvert de $\mathfrak{G}$, qui s'obtient à partir de $\mathfrak{P}^{ss}$ par interection par le schéma fermé $\mathbf{G}$. Ainsi, $\mathbf{G}^{ss}$ est un sous-schéma fermé, $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$−invariant de $\mathfrak{P}^{ss}$. Donc il a un bon quotient $\mathbf{G}^{ss}/\mathrm{S}l(\mathrm{H})$ qui est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{P}^{ss}/\mathrm{S}l(\mathrm{H})$: c'est donc une variété projective. □

Propriété de module grossier

L'espace de modules $\mathbf{Syst}_X(P)$ est bien sûr la variété projective $\mathbf{G}^{ss}/Sl(H)$. Vérifions en effet la propriété de module grossier. Avec les notations du § 3.3 si S est une variété algébrique et $(\mathscr{G}, \mathscr{W})$ une famille de systèmes cohérents de $\underline{\mathbf{Syst}}_X(P)(S)$, le faisceau $\mathscr{H} := q_*(\mathscr{G}(m))$ est localement libre de rang $P(m)$. Si $R = \underline{\mathrm{Isom}}(H \otimes \mathscr{O}_S, \mathscr{H})$ est le $Gl(H)$−fibré principal des repères de $\mathscr{H}$, on obtient pour l'image réciproque $\mathscr{H}_R$ sur R un isomorphisme $H \otimes \mathscr{O}_R \simeq \mathscr{H}_R$. La famille $(\mathscr{G}, \mathscr{W})$ définit alors un morphisme $R \to \mathbf{G}^{ss}$ qui est clairement $Gl(H)$−équivariant. Ceci fournit par passage au quotient un morphisme $f : S \to \mathbf{Syst}_X(P)$. On a ainsi obtenu une application

$$\underline{\mathbf{Syst}}_X(P)(S) \to \mathrm{Mor}(S, \mathbf{Syst}_X(P))$$

évidemment fonctorielle en S. Si $\underline{\mathbf{Syst}}_X(P)(S) \to \mathrm{Mor}(S, \mathbf{N})$ est un autre morphisme fonctoriel, la famille universelle $(\mathscr{F}, \mathscr{V})$ paramétrée par $\mathbf{G}^{ss}$ fournit un morphisme $\mathfrak{G}^{ss} \to \mathbf{N}$ invariant par l'action de $Sl(H)$, et donc qui se factorise de manière unique à travers un morphisme $\varphi : \mathbf{Syst}_X(P) \to \mathbf{N}$; il est clair que ce morphisme est le seul qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{Syst}}_X(P)(S) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Mor}(S, \mathbf{Syst}_X(P)) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathrm{Mor}(S, \mathbf{N}) \end{tikzcd}$$

Ceci démontre l'assertion (i) du théorème 4.12. La démonstration de l'assertion (ii) résulte de l'étude des extensions de systèmes cohérents d'une part, et de l'étude de l'orbite des points définissant un système cohérent semi-stable d'autre part.

Extensions de systèmes cohérents

Lemme 4.21. — *Soient deux systèmes cohérents* (Γ', F') *et* (Γ'', F''), *et* G *le groupe algébrique* $\mathrm{Aut}(\Gamma', F') \times \mathrm{Aut}(\Gamma'', F'')$.

a) *Les extensions strictes*

$$0 \to (\Gamma', F') \xrightarrow{i} (\Gamma, F) \xrightarrow{j} (\Gamma'', F'') \to 0 \tag{e}$$

sont classées par une variété algébrique $\mathbf{E}$ *munie d'une action naturelle du groupe* G.

b) *La classe d'isomorphisme de* (Γ, F) *reste constante le long des orbites de* G.

c) *L'adhérence de chaque orbite contient le point représentant la somme directe des deux systèmes cohérents.*

Démonstration. Considérons en effet le sous-espace vectoriel Σ des classes $\lambda \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}'', \mathrm{F}')$ telles que l'application linéaire $\Gamma'' \to \mathrm{H}^1(\mathrm{F}')$ associée par cup-produit soit nulle. On peut construire une extension universelle $\mathbf{F}$ paramétrée par Σ; au-dessus de chaque point $\lambda \in \Sigma$ on obtient une extension

$$0 \to \mathrm{F}' \xrightarrow{i_\lambda} \mathbf{F}(\lambda) \xrightarrow{j_\lambda} \mathrm{F}'' \to 0.$$

Le choix de λ entraîne que l'application linéaire induite par j_λ

$$j_\lambda^{-1}(\Gamma'')/i_\lambda(\Gamma') \to \Gamma''$$

est surjective, et la donnée de $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F})$ tel que la suite (e) ci-dessus soit exacte stricte équivaut à celle d'une section σ de cette application linéaire. Ainsi, l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions strictes est un fibré en espaces affines au-dessus de Σ, modelé sur le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathrm{L}(\Gamma'', \mathrm{H}^0(\mathrm{F}')/\Gamma')$ au-dessus de Σ. L'action du groupe $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\Gamma', \mathrm{F}') \times \mathrm{Aut}(\Gamma'', \mathrm{F}'')$ est celle qui associe à l'élément $(\alpha, \beta) \in \mathrm{G}$ et la classe d'isomorphisme $[e]$ de l'extension ci-dessus la classe $(\alpha, \beta)[e]$ de l'extension définie par

$$0 \to (\Gamma', \mathrm{F}') \xrightarrow{i\alpha^{-1}} (\Gamma, \mathrm{F}) \xrightarrow{\beta j} (\Gamma'', \mathrm{F}'') \to 0$$

L'image de l'élément $\lambda \in \Sigma$ associé est alors $\alpha\lambda\beta^{-1}$ et l'image de la section σ est alors la section $\sigma\beta^{-1}$. L'espace Σ étant un espace vectoriel, on peut trouver une section $\lambda \mapsto \sigma_\lambda$ du fibré en espaces affines ci-dessus, telle que σ_0 corresponde à la somme directe $\Gamma' \oplus \Gamma''$. De plus, on peut supposer que cette section est invariante sous l'action du tore $\mathrm{T} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset \mathrm{G}$. Le fibré en espaces affines $\mathbf{E} \to \Sigma$ ci-dessus s'identifie alors, comme variété munie d'une action de T, au fibré vectoriel sur Σ muni de l'action de T déduite de la représentation naturelle de G dans $\mathrm{L}(\Gamma'', \mathrm{H}^0(\mathrm{F}')/\Gamma')$. Il en résulte en particulier que dans $\mathbf{E}$ l'adhérence de chaque orbite sous G contient la classe du système cohérent $(\Gamma', \mathrm{F}') \oplus (\Gamma'', \mathrm{F}'')$. □

Soit (Γ, F) un système cohérent semi-stable, tel que $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$, et $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$; soit (Γ'', F'') le système cohérent quotient. L'extension universelle paramétrée par la variété $\mathbf{E}$ ci-dessus fournit un morphisme $\mathbf{E} \to \mathbf{Syst}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ constant sur les orbites de G, donc constant : il est donné par le point correspondant à la somme directe. Il en résulte que dans l'espace de modules, les points définis par (Γ, F) et le gradué de Jordan-Hölder $gr(\Gamma, \mathrm{F})$ sont les mêmes.

Orbite des systèmes cohérents polystables

Lemme 4.22. — *Soit a un point de $\mathbf{G}^{ss}$ définissant un système cohérent polystable* (Γ, F). *Alors l'orbite de a est fermée dans $\mathbf{G}^{ss}$.*

Démonstration. On écrit $(\Gamma, \mathrm{F}) = \oplus_{i=1}^{s} k_i(\Gamma_i, \mathrm{F}_i)$ où les classes d'isomorphisme des systèmes cohérents (Γ_i, F_i) sont distinctes, et les k_i des entiers > 0. Soit a_∞ est un point de l'adhérence de l'orbite et $(\Gamma_\infty, \mathrm{F}_\infty)$ le système cohérent associé. Par semi-continuité, on obtient que l'espace vectoriel $\mathrm{H}_i := \mathrm{Hom}((\Gamma_i, \mathrm{F}_i), (\Gamma_\infty, \mathrm{F}_\infty))$ est de dimension $k_i' \geq k_i$. Considérons le morphisme canonique

$$\oplus_{i=1}^{s}(\Gamma_i, \mathrm{F}_i) \otimes \mathrm{H}_i \xrightarrow{\alpha} (\Gamma_\infty, \mathrm{F}_\infty).$$

Le noyau $\ker\alpha$ est bien sûr un système cohérent polystable de la forme $\oplus_i(\Gamma_i, \mathrm{F}_i) \otimes \mathrm{H}_i'$ où H_i' est un sous-espace vectoriel de H_i, et l'on a évidemment

$$\mathrm{Hom}((\Gamma_i, \mathrm{F}_i), \ker\alpha) = 0.$$

Par suite, α est injectif. Il en résulte que $k_i' = k_i$ et donc α est un isomorphisme. Mais ceci entraîne que a_∞ est dans l'orbite du point a. □

L'ouvert des systèmes cohérents stables

La démonstration du lemme 4.20 montre aussi que l'ensemble des points stables de $\mathbf{G}^{ss}$ sous l'action de $Sl(\mathrm{H})$ est l'intersection avec $\mathbf{G}$ de l'ouvert des points stables de $\mathfrak{P}$; il provient donc d'un ouvert $\mathbf{Syst}^s_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ de $\mathbf{Syst}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$. Pour achever la démonstration du théorème 4.12, il reste à vérifier que cet ouvert correspond aux points $\xi \in \mathbf{G}^{ss}$ qui définissent un système cohérent stable. Ceci résulte de la proposition 4.16 et du lemme suivant qui précise le lemme 4.19 :

Lemme 4.23. — *Soit ξ un point de $\mathbf{G}^{ss}$ définissant un système cohérent semi-stable* (Γ, F). *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Le système cohérent* (Γ, F) *est stable.*

(ii) *Le point ξ est stable sous l'action de* $\mathrm{S}l(\mathrm{H})$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que si ξ est un point de $\mathbf{G}^{ss}$ définissant un système cohérent semi-stable (Γ, F), les systèmes cohérents non nuls $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$ sont ceux qui sont obtenus dans 4.16 à partir des sous-espaces $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$ non nuls satisfaisant à la condition

$$\frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(x) - x^d \dim \Gamma}{\dim \mathrm{H}} = \frac{cd!\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(x) - x^d \dim \Gamma'}{\dim \mathrm{H}'} \tag{4.12}$$

Soit $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$ de multiplicité r'. Considérons le sous-espace $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$ de H. Alors par le choix de m, le faisceau $\mathrm{E}' = \mathrm{H}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$ engendre F', et le fait que le système cohérent (Γ', F') soit maximal montre que $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{F}')$. Ceci prouve que le sous-système cohérent (Γ', F') est celui qui est associé à H' dans la construction de la proposition 4.16. De plus, le choix de m et la proposition 4.15 entraînent que

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'c - \dim \Gamma'} = \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{cr - \dim \Gamma}. \tag{4.4}$$

Du fait que le système cohérent (Γ', F') est maximal, ceci entraîne les égalités

$$\frac{\dim \Gamma'}{r'} = \frac{\dim \Gamma}{r} \; ; \; \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}}{r'} = \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}}{r}$$

et par suite l'égalité (4.12).

Réciproquement, soit H' est un sous-espace vectoriel pour lequel le système cohérent associé (Γ', F') satisfait à (4.12). En regardant les termes dominants, on obtient

$$\frac{\dim \mathrm{H}'}{r'c - \dim \Gamma'} = \frac{\dim \mathrm{H}}{cr - \dim \Gamma}$$

et comme $\dim \mathrm{H}' \leq h^0(\mathrm{F}'(m))$ ceci fournit l'inégalité

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'c - \dim \Gamma'} \geq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{cr - \dim \Gamma}$$

et en fait l'égalité à cause du choix de m et de l'énoncé 4.13. L'énoncé 4.15 entraîne alors que $(\Gamma', \mathrm{F}') \in \mathrm{Max}(\Gamma, \mathrm{F})$. En outre, on a obligatoirement $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$, ce qui montre qu'un tel système maximal provient d'un unique sous-espace H'. $\square$

5. Cosystèmes cohérents

Etant donnée une structure de niveau semi-stable (Γ, E) sur une variété projective X de dimension n, le conoyau du morphisme d'évaluation

$$ev : \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \mathrm{E}$$

est un faisceau cohérent F de codimension 1 et, si E n'est trivial, le dual Γ^* peut être considéré comme sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ (*cf.* théorème 5.11). On obtient ainsi un nouvelle paire (Γ^*, F) qu'on appelle cosystème cohérent de codimension 1. On introduit en fait dans cette section les cosystèmes cohérents en toute dimension et on définit pour de telles paires une notion naturelle de semi-stabilité. L'étude des cosystèmes cohérents se ramène dans certains cas, les seuls qui seront utiles pour la suite, à celle de systèmes cohérents.

Soient d et c deux entiers ≥ 0 tels que $d + c = n$.

5.1. Généralités

Définition 5.1. — *On appelle cosystème cohérent de dimension $d = n - c$ sur* X *la donnée d'une paire* (Γ, F) *formée d'un faisceau algébrique cohérent de dimension d sur* X *et d'un sous-espace vectoriel* $\Gamma \subset \mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

Un morphisme de cosystèmes cohérents $(\Gamma, \mathrm{F}) \to (\Gamma', \mathrm{F}')$ *de dimension d est la donnée d'un morphisme de faisceaux algébriques $f : \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ induisant un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \to & \mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \\ \downarrow & & \downarrow f^* \\ \Gamma & \to & \mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \end{array}$$

Les cosystèmes cohérents constituent ici encore une catégorie additive : si on veut une catégorie abélienne, on devra bien sûr se limiter aux morphismes stricts, *i.e.* tels que $f^*(\Gamma') = \Gamma \cap \operatorname{Im} f^*$. Par dualité de Serre-Grothendieck, l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est le dual de $\mathrm{H}^d(\mathrm{F} \otimes \omega_\mathrm{X})$, de sorte que l'on pourra voir aussi un cosystème cohérent comme la donnée d'un espace vectoriel quotient du dual $\mathrm{H}^d(\mathrm{F} \otimes \omega_\mathrm{X})$. Sous cette forme, cette notion s'étend aux familles. Cependant, dans les applications, les cosystèmes cohérents apparaîtront comme on l'a présenté dans la définition 5.1.

Etant donné un cosystème cohérent (Γ, F) la multiplicité de (Γ, F) est celle de F ; on pose

$$p_{(\Gamma,\mathrm{F})} = \frac{\dim \Gamma}{r} \mathrm{P}_\mathrm{X} - p_\mathrm{F}.$$

Un module cohérent quotient $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$ définit un cosystème cohérent (Γ', F'), dit quotient de (Γ, F), en considérant l'intersection $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$; ceci a un sens en raison de l'inclusion $\mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$.

Définition 5.2. — *Un cosystème cohérent* (Γ, F) *de dimension* d *est dit semi-stable si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *le faisceau* F *est pur de dimension* d *;*

(ii) *pour tout module cohérent quotient* $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$*, pur de dimension* d*, on a, avec les notations ci-dessus,*

$$p_{(\Gamma',\mathrm{F}')} \leq p_{(\Gamma,\mathrm{F})}$$

La dernière condition signifie que

$$\frac{\dim \Gamma'}{r'} \leq \frac{\dim \Gamma}{r} \quad \text{et en cas d'égalité, } p_{\mathrm{F}'} \geq p_\mathrm{F}.$$

Exemple. Soit F un faisceau algébrique cohérent de codimension c. Le cosystème cohérent $(\{0\}, \mathrm{F})$ est semi-stable si et seulement si le faisceau F est semi-stable.

On peut ici encore définir les notions de filtrations de Harder-Narasimhan, pour les cosystèmes cohérents (Γ, F) pour lesquels le faisceau F sous-jacent est pur et les filtrations de Jordan-Hölder pour les cosystèmes cohérents semi-stables. Ceci fournit encore la notion de gradué de Jordan-Hölder et de S−équivalence pour les cosystèmes cohérents semi-stables.

Si F est de codimension c, on a $\mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) \simeq \mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}))$. Il en résulte qu'un cosystème cohérent (Γ, F) de codimension c définit un système cohérent $(\Gamma, \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}))$. En général, même si le cosystème cohérent (Γ, F) est semi-stable, il n'y a aucune raison pour que le système cohérent associé $(\Gamma, \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}))$ le soit. Ceci arrive cependant si $c = n$, ou si $c = n - 1$, pourvu dans ce dernier cas que le fibré $\mathscr{O}_\mathrm{X}(1)$ et ω_X soient numériquement liés (*cf.* lemme 5.8).

Proposition 5.3. — *Soit* (Γ, F) *un cosystème cohérent semi-stable de codimension* c*. Alors si* $\Gamma \neq \{0\}$*, le morphisme canonique*

$$\epsilon : \Gamma \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X} \to \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$$

a son conoyau de codimension $> c$.

Démonstration. Cet énoncé résulte du fait que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ a même multiplicité que F, et du fait que le morphisme canonique $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\check{}\check{}}$ est un isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension $> c$, ce qui se voit en localisant aux points de hauteur c, ou en utilisant la suite spectrale du § 8.1. Considérons en effet l'image G de ϵ. Par dualité, on a un morphisme $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{G}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ dont le conoyau est de codimension $> c$. Soit F' son image ; ce faisceau est pur, et de même multiplicité que G. On a alors une factorisation

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}', \mathscr{O}_\mathrm{X}) \\ & & & \nearrow & \downarrow \\ \Gamma \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X} & \to & \mathrm{G} & \to & \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale est injective. Par construction, le faisceau F' est un quotient pur de F; la propriété de semi-stabilité montre que F' et F sont alors de même multiplicité, et par suite G et $\mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ sont de même multiplicité. Alors le quotient $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})/\mathrm{G}$ est de codimension $> c$. □

Définition 5.4. — *Soient* S *une variété algébrique,* $q : \mathrm{S} \times \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *la première projection. On appelle famille de cosystèmes cohérents paramétrée par* S *la donnée d'un faisceau algébrique cohérent sur* $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$*, plat sur* S*, de dimension relative* $d = n - c$*, et d'un faisceau localement libre* V *sur* S*, quotient de* $\mathrm{R}^d q_*(\mathrm{F} \otimes \omega_\mathrm{X})$.

Etant donné une telle famille, au-dessus de chaque point $s \in \mathrm{S}$ on obtient un cosystème cohérent $\mathrm{V}(s)^* \subset \mathrm{Ext}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$. Un ensemble **S** de classes d'isomorphisme de cosystèmes cohérents est dit limité s'il existe une famille de cosystèmes cohérents paramétrée par une variété algébrique S qui contient tous les cosystèmes de **S**.

Théorème 5.5. — *L'ensemble des classes d'isomorphisme de cosystèmes cohérents* (Γ, F) *de dimension d, semi-stables et tels que le polynôme de Hilbert* $\mathrm{P_F}$ *soit fixé est limité.*

Démonstration. Comme dans le théorème 4.11 il suffit de montrer que la famille des faisceaux cohérents F sous-jacents est limitée. Les faisceaux F étant purs, et le polynôme de Hilbert de F étant fixé, il suffit pour ceci de vérifier que $\mu_{max}(\mathrm{F})$ est majoré. Mais si F' est le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan, le morphisme obtenu par transposition $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est surjectif en dehors d'un fermé de codimension $> c$; il découle de la proposition 5.3 que le morphisme composé $\Gamma \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} \to \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est surjectif en dehors d'un fermé de codimension $> c$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est évidemment μ–semi-stable ; comme dans le théorème 4.11 la pente de $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est minorée, et alors la pente de F' est majorée. □

5.2. Le module $\mathbf{Cosyst}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$

En général, la notion de semi-stabilité pour les faisceaux cohérents n'est pas invariante par produit tensoriel par un fibré L de rang 1. Cependant, si le fibré L et le fibré $\mathcal{O}_\mathrm{X}(1)$ sont numériquement liés, la notion de semi-stabilité des faisceaux reste invariante par produit tensoriel par L.

Soit P un polynôme de degré d. On peut considérer, sur la catégorie des variétés algébriques, le foncteur qui associe à la variété S l'ensemble $\underline{\mathbf{Cosyst}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphismes de familles de cosystèmes cohérents (Γ, F) de dimension d et de polynôme de Hilbert $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$.

Théorème 5.6. — *On se place sous l'une des hypothèses suivantes :*
– *le polynôme* P *est de degré* 0, $n-1$, *ou* n;

– *le polynôme* P *est de degré* 1, *et les fibrés inversibles* ω_X *et* $\mathcal{O}_X(1)$ *sont numériquement liés.*

Alors il existe pour le foncteur $\underline{\mathbf{Cosyst}}_X(\mathrm{P})$ *un espace de modules grossier* $\mathbf{Cosyst}_X(\mathrm{P})$. *Cette variété a les propriétés suivantes :*

(i) *C'est une variété projective.*

(ii) *Les points fermés sont les classes de* S*–équivalence de cosystèmes cohérents* (Γ, F) *tels que* $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$.

Bien sûr, on a encore une décomposition en composantes disjointes

$$\mathbf{Cosyst}_X(\mathrm{P}) = \coprod_i \mathbf{Cosyst}_X(\mathrm{P}, i)$$

où $\mathbf{Cosyst}_X(\mathrm{P}, i)$ est la composante représentant les cosystèmes cohérents (Γ, F) tels que $\dim \Gamma = i$. L'étude se ramène à celle des systèmes cohérents si P est de degré 0, 1 ou $n-1$. Dans le cas où P est de degré n, la démonstration est analogue à celle du théorème 4.12.

Cas où le degré de P *est* 1

On suppose que ω_X et $\mathcal{O}_X(1)$ sont numériquement liés, et on pose dans $\mathrm{Num}(X) \otimes \mathbf{Q}$

$$c_1(\omega_X) = \alpha c_1(h).$$

Théorème 5.7. — *Soient* $\mathrm{P}(m) = rm + \chi$ *un polynôme de degré 1,* $\mathrm{P}^{\check{}}$ *le polynôme défini par* $\mathrm{P}^{\check{}}(m) = rm - \chi - \alpha r$. *Les foncteurs* $\underline{\mathbf{Syst}}_X(\mathrm{P})$ *et* $\underline{\mathbf{Cosyst}}_X(\mathrm{P}^{\check{}})$ *sont isomorphes.*

Commençons par vérifier que les ensembles sous-jacents sont les mêmes :

Lemme 5.8. — *Un cosystème cohérent* (Γ, F) *de dimension 1 est semi-stable si et seulement si le système cohérent* $(\Gamma, \underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_X))$ *est semi-stable. De plus, si cette propriété est satisfaite, les filtrations de Jordan-Holder se correspondent.*

Démonstration. Si un module cohérent F de codimension c est de Cohen-Macaulay, son dual $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est encore de Cohen-Macaulay, et $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) = 0$ si $i > c$. Du théorème de dualité de Serre on tire alors, pour les polynômes de Hilbert, en posant $d = n - c$

$$\mathrm{P}_{\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F},\mathcal{O}_\mathrm{X})}(m) = (-1)^d \mathrm{P}_{\mathrm{F}\otimes\omega_\mathrm{X}}(-m) \tag{5.1}$$

En outre, sur la catégorie des $\mathcal{O}_\mathrm{X}$−modules de Cohen-Macaulay de codimension c, le foncteur $\mathrm{F} \mapsto \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est exact et involutif. Il en résulte que les sous-modules de $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ dont le quotient est de Cohen-Macaulay de codimension c sont ceux qui sont de la forme $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$, où F′ est un faisceau quotient de Cohen-Macaulay de codimension c.

Soit F un faisceau cohérent pur de dimension 1, de multiplicité r. Alors F est de Cohen-Macaulay, et les remarques précédentes s'appliquent. Pour le polynôme de Hilbert, il découle de la formule (5.1) que l'on a

$$\mathrm{P}_{\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F},\mathcal{O}_\mathrm{X})}(m) = r(m - \mu(\mathrm{F}\otimes\omega_\mathrm{X})) \tag{5.2}$$

Le fait que les fibrés inversibles $\mathcal{O}_\mathrm{X}(1)$ et ω_X soient numériquement liés entraîne que $\chi(\mathrm{F}\otimes\omega_\mathrm{X}) - \chi(\mathrm{F}) = \alpha r$. La condition de semi-stabilité du cosystème cohérent (Γ, F) signifie que pour tout module cohérent quotient $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$, pur de dimension 1, on a pour le cosystème cohérent induit (Γ', F') l'inégalité $p_{(\Gamma',\mathrm{F}')} \leq p_{(\Gamma,\mathrm{F})}$. En vertu de la formule (5.2) appliquée à F et F′, ceci signifie que pour les systèmes cohérents $(\Gamma', \underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X}))$ et $(\Gamma, \underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X}))$ on a

$$p_{(\Gamma',\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}',\mathcal{O}_\mathrm{X}))} \leq p_{(\Gamma,\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F},\mathcal{O}_\mathrm{X}))}$$

C'est exactement la condition demandée pour la semi-stabilité du système cohérent $(\Gamma, \underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X}))$: on peut en effet se limiter à écrire la condition de semi-stabilité pour les sous-modules cohérents de $\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ pour lesquels le quotient est pur de dimension 1 ; on a vu que ces sous-modules cohérents sont de la forme $\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X})$ avec F′ quotient de F. D'où la proposition. □

Il reste maintenant à étendre cet énoncé aux familles. Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme 5.9. — *Soient $q : \Xi \to \mathrm{S}$ un morphisme propre et lisse de variétés algébriques, ω_q le faisceau dualisant relatif ; soit $\mathscr{F}$ un module cohérent sur Ξ plat au-dessus de* S, *et tel que pour tout point fermé $s \in \mathrm{S}$, le module $\mathscr{F}(s)$ soit de Cohen-Macaulay de codimension c dans la fibre $\Xi(s)$. Alors :*

(i) *Le module $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi)$ est nul si $q \neq c$; le module $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi)$ est* S*−plat, et l'on a*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi)(s) = \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}(s), \mathscr{O}_{\Xi(s)}).$$

(ii) *On a des isomorphismes canoniques de modules cohérents sur* S :

$$\mathrm{R}^i q_*(\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}, \omega_q)) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}_q^{i+c}(\mathscr{F}, \omega_q)$$
$$\underline{\mathrm{Ext}}_q^i(\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi), \omega_q) \simeq \mathrm{R}^{i-c} q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_q)$$

Démonstration. Par platitude, l'hypothèse que $\mathscr{F}(s)$ est de Cohen-Macaulay entraîne que le faisceau $\mathscr{F}$ a une résolution gauche localement libre $\mathscr{L}. \to \mathscr{F}$ de longueur c. Considérons le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{L}., \mathscr{O}_\Xi)$ dont les faisceaux de cohomologie sont par définition $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi)$. Au-dessus du point s, on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{L}., \mathscr{O}_\Xi)(s) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{L}.(s), \mathscr{O}_{\Xi(s)})$; ξ étant un point de $\Xi(s)$ on a alors une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{Tor}_{-p}^{\mathscr{O}_s}(\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi)_\xi, \mathbf{C})$$

et d'aboutissement $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}(s), \mathscr{O}_\mathrm{X})_\xi$ en degré c et 0 en degré différent de c. Ceci conduit à l'assertion (i).

Puisque le faisceau $\mathscr{F}(s)$ est de Cohen-Macaulay, et donc réflexif au sens de la section 8.1 (*cf.* lemme 8.9) ceci entraîne que le morphisme canonique

$$\mathscr{F} \to \underline{\mathrm{Ext}}^c(\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi), \mathscr{O}_\Xi)$$

est un isomorphisme. Les deux formules de l'assertion (ii) sont donc équivalentes. On obtient la première en écrivant la suite spectrale du foncteur composé $\underline{\mathrm{Hom}}_q(-, \omega_q) = q_* \circ \underline{\mathrm{Hom}}(-, \omega_q)$; cette suite spectrale s'obtient en prenant une résolution gauche localement libre par des sommes directes $\mathscr{L}_i$ de fibrés $\mathscr{O}_\Xi(-a)$ avec a entier très grand par valeurs positives.

Démonstration du théorème 5.7.

Soit S une variété algébrique. On prend $\Xi = \mathrm{S} \times \mathrm{X}$ et on désigne par $q : \mathrm{S} \times \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ la première projection. Dans le cas particulier où $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_\Xi$−module cohérent plat de dimension relative 1 on obtient

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi), \omega_q) \simeq \mathrm{R}^1 q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_q)$$

Compte-tenu du lemme 5.8, on voit donc que la donnée d'une famille de cosystèmes cohérents $(\mathscr{F}, \mathrm{V})$ semi-stables de polynôme de Hilbert P et paramétrée par S fournit une famille de systèmes cohérents semi-stables $(\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_\Xi), \mathrm{V})$ de polynôme de Hilbert $\mathrm{P}^\vee$. Réciproquement, l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n(\mathscr{F}, \omega_q) \simeq \mathrm{R}^1 q_*(\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}(\mathscr{F}, \omega_q))$$

permet d'associer à une famille de systèmes cohérents $(\mathscr{F}, \mathrm{V})$ semi-stables de polynôme de Hilbert P une famille de cosystèmes cohérents semi-stables de polynôme de Hilbert $\mathrm{P}^\vee$.

Cas où le degré de P *est* 0.

Un faisceau F de dimension 0 est de Cohen-Macaulay, et son polynôme polynôme de Hilbert P est constant et donné par la multiplicité r de F. Le faisceau $\mathcal{E}xt^n(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ est encore de dimension 0 et de multiplicité r. Dès lors, la démonstration donnée dans le cas des cosystèmes cohérents de dimension 1 s'étend au cas des cosystèmes cohérents de dimension 0 ; elle est en fait beaucoup plus facile, et il n'est plus nécessaire de supposer que ω_X et $\mathscr{O}_\mathrm{X}(1)$ sont numériquement liés. On obtient :

Théorème 5.10. — *Soit r un entier > 0. Les foncteurs $\underline{\mathbf{Syst}}_\mathrm{X}(r)$ et $\underline{\mathbf{Cosyst}}_\mathrm{X}(r)$ sont isomorphes.*

Cas où P *est de degré $n-1$.*

Théorème 5.11. — *Soit* P *un polynôme de degré $n-1$, et i un entier > 0. Alors les foncteurs $\underline{\mathbf{Cosyst}}_\mathrm{X}(\mathrm{P}, i)$ et $\underline{\mathbf{Syst}}_\mathrm{X}(i\mathrm{P}_\mathrm{X} + \mathrm{P}, i)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit (Γ, E) une structure de niveau semi-stable, de polynôme de Hilbert $\mathrm{P_E} = i\mathrm{P_X} + \mathrm{P}$; par définition $\dim \Gamma = i$. On considère le morphisme d'évaluation $ev : \Gamma \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X} \to \mathrm{E}$. Le faisceau E est alors sans torsion, de rang i. Il résulte de la proposition 4.4 que le morphisme d'évaluation ev est génériquement un isomorphisme. Le polynôme de Hilbert du conoyau F de ev est le polynôme P ; de la suite exacte $0 \to \Gamma \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F} \to 0$ on tire en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) \to \Gamma^* \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$$

Montrons que $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) = 0$: s'il existait un morphisme non nul $\mathrm{E} \to \mathscr{O}_\mathrm{X}$, le système cohérent (Γ, E) aurait un système cohérent quotient de la forme $(\mathbb{C}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$, ce qui montre que $\mathrm{P_E} \leq i\mathrm{P_X}$. C'est absurde puisque P est non nul. On obtient donc un sous-espace vectoriel $\Gamma^* \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ qui définit un cosystème cohérent (Γ^*, F) de dimension $n-1$ et de polynôme de Hilbert $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$. Pour vérifier que ce cosystème cohérent est semi-stable, on doit d'abord constater que le module F est pur de dimension $n-1$: de la suite exacte qui définit F il découle qu'en tout point x appartenant au support de F on a $\mathrm{prof}(\mathrm{F}_x) \geq 1$ puisque c'est le cas pour E_x. Il résulte du critère de Serre (*cf.* chapitre 8) que le faisceau F est pur de codimension 1.

Montrons que le cosystème cohérent (Γ^*, F) est semi-stable : si $\mathrm{F} \to \mathrm{F}''$ est un quotient de F pur de codimension 1, l'intersection $\Gamma^* \cap \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}'', \mathscr{O}_\mathrm{X})$ est le dual d'un espace vectoriel Γ'' et on a alors un élément canonique $\omega'' \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}'', \mathscr{O}_\mathrm{X}) \otimes \Gamma''$, ce qui fournit une extension F''. Une manière de lire la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma''^* & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}'', \mathscr{O}_\mathrm{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^* & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) \end{array}$$

est de dire que les images des éléments $\omega \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) \otimes \Gamma$ et $\omega'' \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}'', \mathscr{O}_\mathrm{X}) \otimes \Gamma''$ correspondant aux extensions ci-dessus ont même image dans $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) \otimes \Gamma''$. Ceci signifie que l'on a un morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \Gamma \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X} & \to & \mathrm{E} & \to & \mathrm{F} & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \Gamma'' \otimes \mathscr{O}_\mathrm{X} & \to & \mathrm{E}'' & \to & \mathrm{F}'' & \to 0 \end{array}$$

Par construction, le faisceau E'' est de rang $i'' = \dim \Gamma''$. Par définition de la semi-stabilité du système cohérent (Γ, E), on a alors $P_{E''} \geq \frac{i''}{i} P_E$ ce qui entraîne

$$P_{F''} \geq \frac{i''}{i} P \tag{5.3}$$

Ceci implique pour les multiplicités r et r'' de F et F'' l'inégalité $\frac{r''}{r} \geq \frac{i''}{i}$. De plus, en cas d'égalité, (5.3) s'écrit $P_{F''} \geq \frac{r''}{r} P$. Ceci démontre la semi-stabilité du cosystème (Γ^*, F).

La construction s'étend aux familles de systèmes cohérents semi-stables paramétrées par une variété algébrique S : car si $(\mathscr{E}, V)$ est une telle famille, et si $q : S \times X \to S$ désigne la première projection, on a une inclusion $V^* \hookrightarrow q_*(\mathscr{E})$ qui induit un morphisme $j : q^*(V^*) \to \mathscr{E}$. Au-dessus de chaque point fermé $s \in S$ le morphisme j induit une inclusion $V^*(s) \boxtimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{E}(s)$. Le faisceau $\mathscr{E}$ étant supposé S−plat, ceci entraîne que j est lui-même injectif et que le conoyau $\mathscr{F}$ de j est aussi S−plat. De plus, la suite exacte dérivée de la suite exacte

$$0 \to q^*(V^*) \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0 \tag{5.4}$$

fournit sur S un morphisme $R^{n-1} q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_q) \to V^*$ qui est surjectif au-dessus de chaque point de S, et par suite surjectif. Ainsi, on a construit un morphisme fonctoriel

$$\Phi : \underline{\mathbf{Syst}}_X(iP_X + P) \to \underline{\mathbf{Cosyst}}_X(P)$$

La construction inverse

Soit (V, F) un cosystème cohérent semi-stable, avec F de polynôme de Hilbert P, et $\dim \Gamma = i$. On lui associe l'extension

$$0 \to V^* \otimes \mathscr{O}_X \to E \to F \to 0$$

définie par l'élément canonique de $\operatorname{Ext}^1(F, \mathscr{O}_X) \otimes V^*$. Le faisceau E ainsi construit est de rang i : ainsi, le système cohérent (V^*, E) est une structure de niveau, et le faisceau cohérent F a pour polynôme de Hilbert $iP_X + P$.

Montrons que le faisceau E est sans torsion : il s'agit de vérifier que si x est un point de hauteur ≥ 1, on a $\operatorname{prof}(E_x) \geq 1$. C'est évident si $\operatorname{ht} x \geq 2$, ou si x

n'appartient pas au support de F. Supposons que x soit un point de hauteur 1 appartenant au support de F : on doit vérifier que E_x est un module libre sur l'algèbre locale $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$. Mais on a la suite exacte

$$\mathrm{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X},x} \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}_x, \mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{E}_x, \mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \to 0$$

de sorte que l'on est ramené à prouver que la flèche naturelle $\mathrm{V} \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est surjective en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2. Ceci résulte de la proposition 5.3. Considérons maintenant le premier terme (Γ', E') de la filtration de Harder-Narasimhan de $(\mathrm{V}^*, \mathrm{E})$, et le système cohérent quotient (Γ'', E''). On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} & \xrightarrow{j'} & \mathrm{E}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{V}^* \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} & \xrightarrow{j} & \mathrm{E} \end{array}$$

Le morphisme j est injectif, et par conséquent E' est de rang $i' \geq \dim \Gamma'$; en vertu du corollaire 4.5 on obtient $i' = \dim \Gamma' = \mathrm{rg}\,(\mathrm{E}')$ et donc j' est un isomorphisme au dessus d'un ouvert partout dense. Il en est de même du morphisme $\Gamma'' \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} \to \mathrm{F}''$; il en résulte que le conoyau F' de j' se plonge dans F. Le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \Gamma' \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} & \xrightarrow{j'} & \mathrm{E}' & \to & \mathrm{F}' & \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to \mathrm{V}^* \otimes \mathcal{O}_\mathrm{X} & \xrightarrow{j} & \mathrm{E} & \to & \mathrm{F} & \to 0 \end{array}$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma'^* & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}', \mathcal{O}_\mathrm{X}) \end{array}$$

où la flèche $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ est l'inclusion qui définit le cosystème cohérent (V, F). La condition de semi-stabilité de ce cosystème montre que les multiplicités r et r' de F et F' vérifient l'inégalité

$$\frac{r'}{r} \leq \frac{i'}{i},$$

l'égalité imposant en outre $P_{F'} \leq \frac{r'}{r} P_F$. Des relations $P_{E'} = i' P_X + P_{F'}$ et $P_E = i P_X + P_F$ on déduit dans ce cas l'inégalité $p_{E'} \leq p_E$. Ceci démontre que le système cohérent (V^*, E) est semi-stable.

Vérifions que la construction s'étend aux familles. Une telle famille $(\mathscr{F}, W)$ de cosystèmes cohérents, paramétrée par la variété algébrique S, définit un morphisme $W^* \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_q(\mathscr{F}, \mathscr{O}_{S\times X})$ et donc un élément $e \in \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathscr{F}, q^*(W))$ qui définit une extension

$$0 \to q^*(W) \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0 \tag{5.5}$$

Puisque le faisceau $\mathscr{F}$ est par hypothèse S−plat, il en est de même de $\mathscr{E}$. Par ailleurs, la suite exacte dérivée du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_q(-, \omega_q)$ fournit un morphisme surjectif $\underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{E}, \omega_q) \to W^*$: on a ainsi obtenu un système cohérent $(\mathscr{E}, W^*)$ et par suite un morphisme fonctoriel

$$\Psi : \underline{\mathbf{Cosyst}}_X(P) \to \underline{\mathbf{Syst}}_X(iP_X + P)$$

Aller et retour

Vérifions que $\Psi \circ \Phi = id$. Si $(\mathscr{E}, V)$ est une famille de systèmes de $\mathbf{Syst}_X(iP_X + P)$, à laquelle est associée la suite exacte (5.4) , la famille de cosystèmes cohérents $(\mathscr{F}, V^*)$ est définie par le morphisme

$$R^{n-1} q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_q) \to V^*$$

associé à (5.4) : ce morphisme est l'accouplement par l'élément canonique $e \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}, q^*(V^*))$ associé à l'extension. Il en résulte que par Ψ on retrouve l'extension (5.4) et par suite la famille $(\mathscr{E}, V)$.

Dans l'autre sens, si on part de la famille de cosystèmes cohérents $(\mathscr{F}, W) \in \mathbf{Cosyst}_X(P)$, la famille de systèmes cohérents $(\mathscr{E}, W^*) = \Psi(\mathscr{F}, W)$ associée se calcule à partir de l'extension (5.5) : si on transpose le morphisme $\underline{\mathrm{Ext}}^n_q(\mathscr{E}, \omega_q) \to W^*$ associé à ce système cohérent, on obtient le morphisme $W \to q_*(\mathscr{E})$ obtenu en appliquant à la suite exacte (4.5) le foncteur q_*. Il résulte de la construction de Φ que le cosystème $\Phi \circ \Psi(\mathscr{F}, W)$ est donné par le faisceau quotient $R^{n-1} q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_q) \to W$ associé la suite exacte (5.5). Par suite $\Phi \circ \Psi = id$. Ainsi, Φ et Ψ sont deux foncteurs inverses l'un de l'autre.

En combinant les énoncés 5.7 et 5.11, on obtient :

Corollaire 5.12. — *Soient* X *une surface algébrique projective lisse ; on suppose que* ω_X *et* $\mathcal{O}_X(1)$ *sont numériquement liés et on pose*

$$c_1(\omega_X) = \alpha c_1(h).$$

Soient $P(m) = rm + \chi$ *un polynôme de degré* 1, *et* $P^{\check{}}$ *le polynôme défini par* $P^{\check{}}(m) = rm - \chi - \alpha r$. *Pour tout entier* $i > 0$, *on a un isomorphisme de variétés algébriques*

$$\mathbf{Syst}_X(iP_X + P, i) \simeq \mathbf{Syst}_X(P^{\check{}}, i)$$

Cas où P *est de degré* n

Ce cas ne sera pas utilisé dans la suite, aussi nous ne donnons qu'une esquisse de démonstration.

Si P est de degré n, la démonstration est analogue à celle du théorème 4.12, mais un peu plus facile. Comme au § 4.7, on considère le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(E, P)$ des quotients d'un faisceau polystable E de polynôme de Hilbert P, et sur $\mathbf{Hilb}(E, P) \times X$ le faisceau quotient universel $\mathcal{F}$; soit E le faisceau l'image directe $R^n q_*(\mathcal{F} \otimes \omega_q)$, la grassmannienne relative $\mathbf{G} = \mathbf{Grass}(\mathcal{E})$ dont les points sont des cosystèmes cohérents ; cette grassmanienne relative est munie d'un fibré quotient universel $\mathcal{V}$ engendré par ses sections, ce qui fournit un fibré inversible $\mathcal{L} = (\det \mathcal{V})^{\otimes \ell^d} \otimes q^*(\mathcal{O}(d!))$ qui cette fois a l'avantage d'être très ample.

Il s'agit encore de calculer les points semi-stables de cette grassmannienne relative pour l'action du groupe $Sl(E)$, et le calcul est tout à fait semblable à celui qui a été mené dans le lemme 4.18. Du fait que $\mathcal{L}$ est très ample, les points semi-stables constituent un ouvert qui a un bon quotient : ce bon quotient est d'après la théorie de Mumford une variété projective. Pour identifier les points semi-stables avec les cosystèmes cohérents semi-stables, on doit encore démontrer la version correspondante du lemme 4.19, ce qui impose de se placer au-dessus de l'adhérence $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(E, P)$ de l'ouvert des faisceaux quotients sans torsion. De plus, on doit encore démontrer des critères de semi-stabilité et stabilité analogues aux critères 4.13 et 4.15.

6. Structures de niveau sur $\mathbf{P}_2$

6.1. Un exemple

Si (Γ, F) est une structure de niveau semi-stable sur X, le faisceau F n'est pas obligatoirement stable.

Exemple

Considérons sur la droite projective $\mathbf{P}_1$ les faisceaux de rang 2, de degré 3, et donc de polynôme de Hilbert $\mathrm{P}(m) = 2m + 5$. Etant donné une telle structure de niveau (Γ, F) semi-stable et telle que $\mathrm{P}_\mathrm{F} = \mathrm{P}$, le faisceau F est localement libre et on a obligatoirement $\mathrm{F} \simeq \mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(2) \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(1)$; le sous-espace vectoriel Γ de dimension 2 de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}) = \mathbb{C}^5$ satisfait aux conditions $\Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(2)) = \{0\}$ et $\Gamma \neq \mathrm{H}^0(\mathrm{Im}\, j)$ pour tout plongement $j : \mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(1) \hookrightarrow \mathrm{F}$. Réciproquement, un sous-espace vectoriel $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{F})$ qui satisfait à ces conditions définit une structure de niveau stable : il existe donc de telles structures de niveau stables. Evidemment, le faisceau F correspondant n'est pas semi-stable. Remarquons que la donnée d'une telle structure de niveau, à isomorphisme près, équivaut à celle d'une application linéaire $u : \mathbb{C}^2 = \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(1)) \to \mathbb{C}^3 = \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(2))$, qui n'est pas la multiplication par un élément de $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(1))$, modulo l'action du groupe des automorphismes de F. On voit alors sans difficulté que la variété $\mathbf{Syst}_{\mathbf{P}_1}(\mathrm{P}, 2)$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}_3 = \mathrm{P}(\mathrm{W})$ associé à l'espace vectoriel quotient

$$\mathrm{W} = \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(1)), \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(2)))/\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(1)).$$

6.2. L'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2; 0, 4)$

Dans tout ce paragraphe, X désigne l'espace projectif $\mathbf{P}_2$. On considère l'espace de modules $\mathbf{M}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, et de classes de Chern $(2,5)$, donc de polynôme de Hilbert $P(m) = (m+2)(m+3)-4$. Cet espace de modules est bien sûr isomorphe à l'espace de modules $\mathbf{M}_X(2;0,4)$ de l'introduction : c'est une variété projective irréductible de dimension 13 singulière aux points qui correspondent aux sommes directes de faisceaux sans torsion de rang 1 et de classes de Chern $(1,2)$.

Pour tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P, on a $h^0(F) \geq 2$. Dans $\mathbf{M}_X(P)$ les points qui représentent les faisceaux tels que $h^0(F) = 2$, ou ce qui revient au même $h^1(F) = 0$ constituent un ouvert partout dense. On se propose de décrire l'espace de modules des structures de niveau $\mathbf{S} := \mathbf{Syst}_X(P,2)$.

Lemme 6.1. — *Soit* F *un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* P. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $h^1(F) \geq 1$

(ii) *Le faisceau* F *a une droite de saut d'ordre 3.*

(iii) *Le faisceau* F *est extension*

$$0 \to Q \to F \to \mathcal{O}_\ell(-2) \to 0$$

où Q *est le fibré quotient universel de rang 2 sur le plan projectif, et* ℓ *une droite de* X. *Si ces conditions sont satisfaites, on a* $h^1(F) = 1$ *et la droite de saut d'ordre 3 est unique.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 1.2 de [14].

(i)⇒ (ii) : On sait que $h^1(F(-1)) = 2$. En raison du lemme 1.1 de [14] on a $h^1(F) \leq 1$, et par suite $h^1(F) = 1$. Considérons le morphisme canonique sur le plan projectif dual

$$H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \to H^1(F) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}$$

Ce morphisme s'annule obligatoirement en un point ℓ, ce qui donne l'existence d'une droite ℓ telle que $h^1(F|_\ell) = 1$.

(ii)⇒ (iii) : On a un morphisme $j : F \to \mathcal{O}_\ell(-2)$, et du fait que $h^1(F(1)) = 0$, ceci entraîne $h^1(F(1)|_\ell) = 0$. Il en résulte que ce morphisme est surjectif. Le noyau $K = \ker j$ est un faisceau sans torsion de classes de Chern $(c_1 = 1, c_2 = 1)$. Ce noyau est stable : sinon il existerait un morphisme non nul $f : K \to \mathcal{O}$ et le noyau de f serait un sous-faisceau K' de rang 1 et de classes de Chern $(1, c_2')$, avec $c_2' \leq 1$. Mais ceci contredit la semi-stabilité de F. Mais alors $\mathrm{K} = \mathrm{Q}$, ce qui démontre (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) : La suite exacte de l'assertion (iii) entraîne $h^1(\mathrm{F}) = 1$. L'unicité découle du fait que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \mathcal{O}_\ell(-2)) = 0$. □

Définition 6.2. — *Un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* P *est dit spécial si* $h^0(\mathrm{F}) = 3$, *ou, ce qui revient au même,* $h^1(\mathrm{F}) = 1$.

Lemme 6.3. — *Si un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* P *est spécial, il est stable.*

Démonstration. Un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert P, s'il n'est pas stable est extension $0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$ où F' et F'' sont de rang 1 et de classes de Chern $(1,2)$. Alors $h^0(\mathrm{F}') = h^0(\mathrm{F}'') = 1$ et $h^1(\mathrm{F}') = 0$ et par suite $h^0(\mathrm{F}) = 2$. □

Proposition 6.4. — *Les points de* $\mathbf{M}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ *qui représentent des faisceaux spéciaux constituent une sous-variété lisse* Σ *de codimension 3 qui ne rencontre pas le lieu singulier ; en un point* F *de* Σ *l'espace normal est isomorphe à l'espace vectoriel* $\mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{F}), \mathrm{H}^1(\mathrm{F}))$ *des applications linéaires de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{F})$ *dans* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F})$.

Démonstration. On sait que l'espace tangent à $\mathbf{M}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ en un point représentant un faisceau F stable est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathrm{F})$. Il s'agit de voir que si F est un faisceau spécial, le morphisme de Petri

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathrm{F}) \to \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{F}), \mathrm{H}^1(\mathrm{F}))$$

est surjectif. Mais ce morphisme est l'accouplement naturel de Yoneda. Compte-tenu de la suite exacte $0 \to \mathrm{Q} \to \mathrm{F} \to \mathcal{O}_\ell(-2) \to 0$ il se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathrm{F}) & \to & \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{F}), \mathrm{H}^1(\mathrm{F})) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \mathrm{H}^1(\ell, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Q}, \mathcal{O}_\ell(-2))) & \to & \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{Q}), \mathrm{H}^1(\mathcal{O}_\ell(-2))) \end{array}$$

Dans ce diagramme, la flèche verticale a est évidemment surjective, et l'application linéaire b est un isomorphisme. Par dualité de Serre sur la droite ℓ la deuxième flèche horizontale est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme de Petri est surjectif. □

Théorème 6.5. — *L'espace de modules* $\mathbf{S} := \mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}, 2)$ *est isomorphe à l'éclaté* $\mathrm{B}l_{\Sigma}(\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}))$ *de* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ *le long de* Σ.

Lemme 6.6. — *Soit* (Γ, F) *une structure de niveau sur* $\mathrm{X} = \mathbf{P}_2$, *avec* F *de polynôme de Hilbert* P. *Alors* (Γ, F) *est semi-stable si et seulement si* F *est semi-stable.*

Démonstration. Supposons F semi-stable. Il s'agit de vérifier que le morphisme d'évaluation $\Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$ est de rang 2. Soit G son image ; on a $h^0(\mathrm{G}) \geq 2$. Supposons que G soit de rang 1 ; on aurait alors $0 \leq c_1(\mathrm{G}) \leq 1$. Si $c_1(\mathrm{G}) = 0$, G serait un sous-module de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, donc $h^0(\mathrm{G}) \leq 1$. C'est absurde. Si $c_1(\mathrm{G}) = 1, \chi(\mathrm{G}) \leq 1$, et $\mathrm{G} \subset \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)$. D'autre part, $\chi(\mathrm{G}) = 3 - c_2(\mathrm{G})$, par conséquent $c_2(\mathrm{G}) \geq 2$. On aurait encore $h^0(\mathrm{G}) \leq 1$ ce qui est absurde.

Réciproque

Soit (Γ, F) une structure de niveau semi-stable, avec $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}$. D'après la proposition 4.4 le morphisme d'évaluation $ev : \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert partout dense. Si F'' est un quotient sans torsion de rang 1 de F, on a $h^0(\mathrm{F}'') \neq 0$. Si $h^0(\mathrm{F}'') = 1$, d'après la condition de semi-stabilité du système cohérent (Γ, F) écrite en termes de quotients, on a $\mathrm{P}_{\mathrm{F}''} \geq \frac{1}{2}\mathrm{P}$. Si $h^0(\mathrm{F}'') > 1$, obligatoirement $c_1(\mathrm{F}'') \geq 1$, et en cas d'égalité $c_2(\mathrm{F}'') \leq 1$. On a encore $\mathrm{P}_{\mathrm{F}''} \geq \frac{1}{2}\mathrm{P}$. Par suite, le faisceau F est semi-stable. □

Démonstration du théorème 4.1.

Du point de vue ensembliste, le résultat est clair : une structure de niveau semi-stable (Γ, F) telle que $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}$ est déterminée par la classe de S−équivalence du faisceau F si F n'est pas spécial, et, lorsque F est spécial, par un sous-espace de $\mathrm{H}^0(\mathrm{F})$ de dimension 2 ; en vertu de la proposition 6.4 il revient au même de se donner une droite dans l'espace vectoriel normal à la sous-variété Σ au point de $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ déterminé par F.

Pour $\ell \geq 2$, les faisceaux $\mathrm{F}(\ell)$ sont engendrés par leurs sections. Soient H un espace vectoriel de dimension $\mathrm{P}(2) = 16$, et E le faisceau localement libre

$E = H \otimes \mathscr{O}_X(-2)$. Considérons l'ouvert S du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(E, P)$ des points définissant un faisceau semi-stable F et tels que le morphisme induit $H \to H^0(F(2))$ soit un isomorphisme. La variété S est lisse et irréductible (de dimension 268) et l'espace de modules $\mathbf{M}_X(P)$ est le quotient de S par l'action naturelle de $PGl(H)$, action qui est libre au-dessus d'un voisinage de l'image réciproque de Σ. Considérons comme au paragraphe 4.7 le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S \times X & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

et le faisceau universel $\mathscr{F}$ quotient de $p^*(E)$ au-dessus de $S \times X$.

Lemme 6.7. — *Soit $\omega_q := \omega_{S\times X/S}$ le faisceau dualisant relatif. On a*

(1) $\underline{\mathrm{Ext}}^i_q(\mathscr{F}, \omega_q) = 0$ *pour* $i = 0$ *et* $i = 1$.

(2) *Le faisceau* $\mathscr{E} = \underline{\mathrm{Ext}}^2_q(\mathscr{F}, \omega_q)$ *est de dimension homologique* 1.

Démonstration. Il est plus facile de calculer les images directes $R^i q_*(\mathscr{F})$: le lemme s'en déduira par dualité relative, grâce à l'énoncé 8.11. Soit $s \in S$, $F = \mathscr{F}(s)$ le faisceau correspondant. On sait que $H^2(F) = 0$ et que $H^1(F) = 0$ sauf si le faisceau F est spécial, auquel cas $h^1(F) = 1$. Puisque $\mathscr{F}$ est S-plat, ceci entraîne que l' image directe $R^2 q_*(\mathscr{F})$ est nulle, et que le faisceau $R^1 q_*(\mathscr{F})$ a son support dans l'image réciproque de Σ. Par suite $\underline{\mathrm{Hom}}(R^1 q_*(\mathscr{F}), \mathscr{O}_S) = 0$. L'assertion (1) découle alors immédiatement de la suite spectrale 8.11. Pour l'assertion (2), on utilise la suite spectrale introduite dans la démonstration du lemme 4.9 : elle fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_{-i}^{\mathscr{O}_{S,s}}(\underline{\mathrm{Ext}}^2_q(\mathscr{F}, \omega_q), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ext}^{2+i}(\mathscr{F}(s), \omega_X)$$

Le terme de droite est nul pour $i = -2$, par dualité de Serre ce qui donne le résultat. □

Considérons la grassmannienne relative $\mathbf{G} = \mathbf{Grass}(\mathscr{E}, 2)$ qui paramètre les quotients de rang 2 ; d'après le lemme 6.6 tout point de $\mathbf{G}$ définit un système cohérent semi-stable : le schéma $\mathbf{Syst}_X(P, 2)$ est le quotient de $\mathbf{G}$ par l'action naturelle de $PGl(H)$. La propriété universelle de l'espace de modules $\mathbf{M}_X(P)$ et le même lemme 6.6 fournissent un morphisme $\mathbf{G} \to \mathbf{M}_X(P)$

équivariant pour l'action de $\mathrm{PG}l(\mathrm{H})$; ce morphisme se factorise en un morphisme $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P},2) \to \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$ surjectif ; ce morphisme est évidemment un isomorphisme au-dessus du complémentaire de Σ. Pour voir que ce morphisme s'identifie à l'éclaté $\mathrm{B}l_{\Sigma}(\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}))$ il suffit de l'étudier au-dessus d'un voisinage d'un point $s \in \Sigma$. Considérons la projection $\pi : \mathrm{S} \to \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})$, et désignons par Σ' l'image réciproque de Σ : c'est encore une sous-variété lisse de codimension 3. Soit $s \in \Sigma'$; on a $\dim \mathscr{E}(s) = 3$; il résulte du lemme 6.7 que le faisceau $\mathscr{E}$ a sur un voisinage ouvert V de s une présentation

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}^3 \to \mathscr{E} \to 0$$

Cette présentation est donnée par un morphisme $\eta : \mathrm{V} \to \mathbb{C}^3$ et dans l'ouvert la sous-variété Σ' est le schéma des zeros de η. Puisque Σ' est lisse, η est une submersion sur un voisinage ouvert, noté encore V, de s. Au-dessus de V, la grassmannienne relative est alors l'image réciproque par η de l'éclaté $\mathrm{B}l_{\{0\}}(\mathbb{C}^3) \subset \mathbf{P}_2 \times \mathbb{C}^3$ de $\{0\}$ dans $\mathbb{C}^3$. Il en résulte que le schéma image réciproque de Σ' dans $\mathbf{G}$ est une hypersurface lisse ; la propriété universelle de l'éclatement [11] fournit alors un isomorphisme $\mathbf{G} \simeq \mathrm{B}l_{\Sigma'}(\mathrm{S})$. Pour l'action naturelle de $\mathrm{PG}l(\mathrm{H})$, ce morphisme est équivariant ; par passage au quotient, on obtient l'isomorphisme attendu $\mathbf{Syst}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P},2) \simeq \mathrm{B}l_{\Sigma}(\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}))$. □

Corollaire 6.8. — *Soit $\mathbf{P}_5 = |\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(2)|$ l'espace projectif des coniques du plan projectif $\mathrm{X} = \mathbf{P}_2$. On a un morphisme surjectif*

$$\mathbf{S} = \mathrm{B}l_{\Sigma}(\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})) \to \mathbf{P}_5$$

dont la fibre au-dessus du point représentant la conique C *est isomorphe au schéma $\mathbf{Syst}_{\mathrm{C}}(\mathrm{P}^{\check{}},2)$ des classes de systèmes cohérents semi-stables (Γ,F) où* F *est un $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}$-module de Cohen-Macaulay de polynôme de Hilbert $\mathrm{P}^{\check{}}(m) = 2m+6$.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire 5.11 et du théorème 6.5 ci-dessus. La fibre au-dessus d'une conique lisse est bien sûr isomorphe à la grassmannienne $\mathbf{Grass}(2,\mathbb{C}^6)$ des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{C}^6$. Au-dessus d'une conique dégénérée en deux droites, la situation est plus compliquée : l'espace de module $\mathbf{Syst}_{\mathrm{C}}(\mathrm{P}^{\check{}},2)$ a quatre composantes irréductibles de dimension 8 deux à deux échangées par une symétrie échangeant les deux composantes de la conique C.

Cette description est utilisée ailleurs pour démontrer que le morphisme

$$\gamma : \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2;0,4) \to |\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2^*}(4)| = \mathbf{P}_{14}$$

qui associe à la classe d'un faisceau semi-stable F la quartique, dans le plan projectif dual $\mathbf{P}_2^*$, des droites de saut de F est un morphisme de degré 1 sur son image. C'est un des points essentiels pour montrer que l'image de ce morphisme est une hypersurface de degré 54 [17] ; c'est l'hypersurface des quartiques de Lüroth.

7. Le module de Trautmann

On considère des faisceaux cohérents sans torsion rang 2, et de classes de Chern $(0, 2, 0)$ sur $\mathbf{P}_3$: ceci signifie que leur polynôme de Hilbert P est

$$\mathrm{P}(m) = 2\mathrm{P}_{\mathbf{P}_3}(m) - (2m + 4).$$

Le but de cette section est d'étudier la variété de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P})$. On va commencer par montrer comment cette étude se ramène à celle de la variété de modules $\mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m, 2)$.

7.1. Le module $\mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m, 2)$

Lemme 7.1. — *Soit* E *un faisceau μ−semi-stable sur* $\mathbf{P}_3$ *de polynôme de Hilbert* P. *Alors* $h^3(\mathrm{E}(i)) = 0$ *pour* $i \geq -3$, *et* $h^2(\mathrm{E}(i)) = 0$ *pour* $i \geq 0$.

Démonstration. La première assertion résulte du théorème de dualité de Serre, et de la définition de la μ-semi-stabilité. Pour la seconde, on utilise le théorème de Grauert-Mülich qui affirme qu'il existe une droite ℓ de $\mathbf{P}_3$ sur laquelle le faisceau E est trivial ; ceci entraîne évidemment que si P est un plan général, $\mathrm{E}|_\mathrm{P}$ est un faisceau μ−semi-stable de rang 2 et classes de Chern $(0, 2)$. On a alors $h^2(\mathrm{E}(i)|_\mathrm{P}) = 0$ pour $i \geq -2$ et $h^1(\mathrm{E}(i)|_\mathrm{P}) = 0$ pour $i \geq 1$; de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{E}(i-1) \to \mathrm{E}(i) \to \mathrm{E}(i)|_\mathrm{P} \to 0$$

on tire que la suite $i \mapsto h^2(\mathrm{E}(i))$ est constante à partir de $i = 0$. Il résulte alors du théorème B de Serre que $h^2(\mathrm{E}(i)) = 0$ pour $i \geq 0$. □

Compte-tenu de la formule donnant le polynôme de Hilbert P, on obtient la conséquence suivante :

Corollaire 7.2. — *Sous les mêmes hypothèses, on a* $h^0(\mathrm{E}(1)) \geq 2$.

Proposition 7.3. — *Soit* E *un faisceau sans torsion sur* $\mathbf{P}_3$ *de polynôme de Hilbert* P, *et* $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1))$ *un sous-espace vectoriel de dimension 2. Alors la structure de niveau* $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ *est semi-stable (resp. stable) si et seulement si* E *est un faisceau semi-stable (resp. stable)* .

Démonstration. Supposons d'abord que E soit semi-stable. Pour voir que la structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ est semi-stable, il suffit de vérifier que le morphisme d'évaluation $\Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{E}(1)$ est génériquement de rang 2. S'il était de rang 1, il se factoriserait à travers un sous-faisceau E′ de rang 1, et tel que le quotient E/E′ soit pur. On a alors $h^0(\mathrm{E}') = 2$ et $0 \leq c_1(\mathrm{E}') \leq 1$. On ne peut en fait avoir $c_1(\mathrm{E}') = 0$, car alors E′ serait un faisceau d'idéaux, et ceci contredit le fait que $h^0(\mathrm{E}') = 2$. Par suite, $c_1(\mathrm{E}') = 1$, et on peut écrire $\mathrm{E}' = \mathrm{I}(1)$ où I est l'idéal d'un sous-schéma Y de codimension 2 dont le polynôme de Hilbert P_Y satisfait, d'après l'hypothèse de semi-stabilité, à l'inégalité

$$\mathrm{P}_\mathrm{Y}(m) \geq m + 2.$$

Du fait que $h^0(\mathrm{I}(1)) = 2$ ce sous-schéma est contenu dans une droite, et donc en fait une droite. Ainsi, $\mathrm{P}_\mathrm{Y}(m) = m + 1$, ce qui contredit l'inégalité qu'on vient d'obtenir. Par suite, la structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ est semi-stable. Evidemment, si E est stable, il en est de même de la structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$.

Réciproquement, supposons que la structure de niveau $(\Gamma, \mathrm{E}(1))$ soit semi-stable ; montrons que E est semi-stable. D'après la proposition 4.4 le morphisme d'évaluation est génériquement de rang 2. Soit E′ un sous-module de E de rang 1, tel que le quotient $\mathrm{E}'' = \mathrm{E}/\mathrm{E}'$ soit sans torsion. On a alors $\dim \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{E}'(1)) \leq 1$; en cas d'égalité on a en outre $\mathrm{P}_{\mathrm{E}'} \leq \frac{1}{2}\mathrm{P}$. Examinons le cas où $\Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathrm{E}'(1)) = 0$. On a alors un plongement $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{E}''(1))$ ce qui implique que $c_1(\mathrm{E}'') \geq 0$. En cas d'égalité, E″ serait le l'idéal d'un sous-schéma de $\mathbf{P}_3$ contenu dans une droite ℓ; si I_ℓ est l'idéal de cette droite, on a alors

$$\mathrm{P}_{\mathrm{E}''} \geq \mathrm{P}_{\mathrm{I}_\ell} = \mathrm{P}_{\mathbf{P}_3} - (m+1) > \frac{1}{2}\mathrm{P}$$

Dans tous les cas on a obtenu $P_{E''} \geq \frac{1}{2}P$, ce qui prouve la semi-stabilité de E. De plus, si $(\Gamma, E(1))$ est stable, on obtient dans tous les cas une inégalité stricte, c'est-à-dire que E est stable. □

Soit P_1 le polynôme $m \mapsto P(m+1)$. Le théorème 5.11 nous permet alors d'obtenir un morphisme surjectif

$$\mathbf{Syst}_{\mathbf{P}_3}(P_1, 2) \simeq \mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m, 2) \to \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(P)$$

Ce morphisme est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert des points représentant les faisceaux stables E tels que $h^0(E(1)) = 2$. Pour obtenir des renseignements sur cet espace de modules, on est ramené à étudier les cosystèmes cohérents semi-stables (Γ, F) où F est un faisceau de polynôme de Hilbert m^2+3m. Commençons par une proposition analogue à la proposition ci-dessus :

Proposition 7.4. — *Soit* F *un faisceau cohérent sur* $\mathbf{P}_3$ *de polynôme de Hilbert* $m^2 + 3m$*, et* $\Gamma \subset \mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ *un sous-espace vectoriel de dimension 2, définissant un cosystème cohérent* (Γ, F) *semi-stable. Alors le faisceau* F *est* μ*-semi-stable. De plus, le faisceau* F *satisfait aux conditions suivantes*

$$\dim \mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) - \dim \mathrm{Ext}^2(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 4;$$

$$\dim \mathrm{Ext}^2(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \leq 2.$$

Enfin, si $\mathrm{Ext}^2(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 0$*, le faisceau* F *est semi-stable.*

Démonstration. Soit F' un sous-module cohérent de multiplicité 1, tel que $F'' = F/F'$ soit pur. Alors $\dim \Gamma \cap \mathrm{Ext}^2(F'', \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \leq 1$; en cas d'égalité, on obtient en outre $P_{F''} \geq \frac{1}{2}(m^2 + 3m)$. Si l'intersection $\Gamma \cap \mathrm{Ext}^2(F'', \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ est réduite à $\{0\}$, l'espace vectoriel Γ se plonge dans $\mathrm{Ext}^1(F', \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$, et on a obligatoirement $\dim \mathrm{Ext}^1(F', \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \geq 2$. Le faisceau F' a pour support un plan P, et est de la forme $I(k)$, où I est l'idéal dans $\mathcal{O}_P$ d'un sous-schéma de codimension 2 de P. Ainsi, $\mathrm{Ext}^1(F', \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \simeq H^0(\mathcal{O}_P(-k+1))$, et par conséquent $k \leq 0$. Si $k = 0$, on a $P_{F'} \leq \frac{1}{2}(m^2 + 3m)$ sauf si $I = \mathcal{O}_P$. Ceci montre que F est μ-semi-stable ; si $F' = \mathcal{O}_P$, la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \to \mathrm{Ext}^2(F'', \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \to \mathrm{Ext}^2(F, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$$

et le fait que l'image de Γ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathrm{P}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ est de dimension 2, montrent que la deuxième flèche n'est pas surjective, et par suite, ceci ne peut arriver que si $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \neq 0$. Autrement dit, si $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 0$, le faisceau F est obligatoirement semi-stable.

La propriété de μ−semi-stabilité entraîne $h^0(\mathrm{F}(-i)) = 0$, pour $i \geq 1$, et par suite, par dualité de Serre, $\mathrm{Ext}^3(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 0$. De la formule de Riemann-Roch, et du théorème de dualité de Serre, il découle alors $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) - \dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = -\chi(\mathrm{F}(-4)) = 4$. Quant à la majoration $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \leq 2$, elle découle de l'inégalité de Bogomolov 3.1 appliquée au faisceau μ-semi-stable $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{**}$. □

Lemme 7.5. — *Soit* F *est un faisceau cohérent μ−semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$. On a*

$$\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = h^0(\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}))$$

et ce nombre est ≤ 2.

Démonstration. Cet énoncé généralise le lemme 3.4. En fait, il n'y a rien à changer à la démonstration, sauf si F est de Cohen-Macaulay, mais non μ-stable ; il en est alors de même de $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1))$ et on a une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{P}} \to \mathrm{G} \to \mathrm{I}'' \to 0$, où P est un plan de $\mathbf{P}_3$. On a encore $h^q(\mathrm{G}(1)) = 0$ pour $q = 1$ et 2, d'où découle la formule de l'énoncé, en utilisant la suite spectrale reliant les Ext globaux et les $\underline{\mathrm{Ext}}$ locaux. □

Théorème 7.6. — *Soit $\mathbf{C}_i$ la sous-variété déterminantielle de la variété de modules $\mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m, 2)$ définie par les classes de S−équivalence de cosystèmes cohérents satisfaisant à la condition*

$$\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) \geq i.$$

(i) *La sous-variété $\mathbf{C}_2$ est irréductible, normale, de dimension 21, lisse en dehors d'un fermé de dimension 16 ; elle n'a que des singularités rationnelles.*

(ii) *La sous-variété $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$ est une variété irréductible et lisse de dimension 17.*

(iii) *Le complémentaire de $\mathbf{C}_1$ est un ouvert lisse irréductible de dimension 13.*

Corollaire 7.7. — *Le schéma* $\mathbf{C} = \mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m)$ *a trois composantes irréductibles de dimensions respectives 13, 17, 21.*

Démonstration. On choisit un entier n assez grand, comme au chapitre 4. Soit H un espace vectoriel de dimension $\mathrm{N} = n^2 + 3n$. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{H} = \mathbf{Hilb}(\mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-n), m^2 + 3m)$, le faisceau universel quotient $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{H} \times \mathbf{P}_3$ et les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} \times \mathbf{P}_3 & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}_3 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ \mathbf{H} & & \end{array}$$

La grassmannienne relative $\mathfrak{G} = \mathbf{Grass}(\mathrm{R}^2 q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_{\mathbf{P}_3}), 2)$ au-dessus de $\mathbf{H}$ paramètre les cosystèmes cohérents (Γ, F).

Considérons pour $i = 0, 1, 2$ les sous-schémas fermés $\mathbf{H}_i$ de $\mathbf{H}$ définis par les conditions déterminantielles $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) \geq i$, et désignons par $\mathfrak{G}_i$ le sous-schéma image réciproque de $\mathbf{H}_i$. La projection $\mathfrak{G}_i \to \mathbf{H}_i$ est un fibré localement trivial en grassmanniennes de dimension $4 + 2i$ au-dessus de l'ouvert $\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_{i-1}$. Le schéma $\mathbf{C} = \mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m, 2)$ est le quotient par l'action de $\mathrm{PG}l(\mathrm{H})$ de l'ouvert $\mathfrak{G}^{ss}$ des points (Γ, F) de $\mathfrak{G}$ tels le morphisme canonique $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(n))$ soit un isomorphisme et que le cosystème (Γ, F) soit semi-stable. Cette action est propre et libre sur l'ouvert des points stables. Remarquons que les cosystèmes semi-stables et non stables définissent obligatoirement des points du sous-schéma $\mathbf{C}_2$. Par suite, les points de $\mathbf{C} - \mathbf{C}_2$ proviennent de cosystèmes cohérents stables. Les classes des points semi-stables non stables définissent un fermé de dimension 14. On est ramené à prouver les assertions suivantes :

(1) Le schéma $\mathbf{H}_2$ est irréductible, normal, de dimension $\dim \mathrm{PG}l(\mathrm{H}) + 13$, lisse en dehors d'un fermé de codimension 5 ; il n'a que des singularités rationnelles.

(2) L'ouvert de $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ correspondant aux quotients $\mu-$ semi-stables est irréductible et lisse de dimension $\dim \mathrm{PG}l(\mathrm{H}) + 11$.

(3) L'ouvert de $\mathbf{H} - \mathbf{H}_1$ correspondant aux quotients stables est irréductible et lisse de dimension $\dim \mathrm{PG}l(\mathrm{H}) + 9$.

L'ouvert $\mathbf{C} - \mathbf{C}_1$

Commençons par le cas (3). Le morphisme canonique

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_1 \to \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m)$$

est plat, à fibres lisses et irréductibles de dimension $\dim \mathrm{PG}l(\mathrm{H})$; il a pour image l'ouvert de $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m)$ des points qui se représentent par des faisceaux de Cohen-Macaulay : on sait que cet ouvert est irréductible et lisse de dimension 9. Il en résulte l'assertion (3), et par suite $\mathbf{C} - \mathbf{C}_1$ est lisse irréductible de dimension 13.

Le sous-schéma $\mathbf{C}_2$

Soit B un espace vectoriel de dimension 2. On considère ici la variété $\mathbf{D}$ introduite au chapitre 3, qui représente les triplets $(\varphi, (\mathrm{G}, \mathrm{T}))$ où G est un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 2$, T un quotient de G de longueur 2, et φ un isomorphisme $\mathrm{B} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{G})$. Considérons le schéma $\mathbf{R}$ des couples formés d'un point de $\mathbf{H}_2$ représentant un quotient F, et d'un isomorphisme $\mathrm{B} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{F}^{**})$. On a alors des projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R} & \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta} \\ \mathbf{H}_2 & & \mathbf{D} \end{array}$$

et ces projections sont des fibrés principaux localement triviaux de groupe structural $\mathrm{G}l(\mathrm{B})$ et $\mathrm{G}l(\mathrm{H})$ respectivement. Les propriétés d'irréductibilité, de normalité, se transportent via ces projections. Il résulte du corollaire 3.28 que $\mathbf{H}_2$ est irréductible, normale de dimension $12 + \mathrm{N}^2$. De plus son ensemble singulier est de codimension 5, et les singularités sont rationnelles. Il en résulte que $\mathbf{C}_2$ est irréductible, normale, de dimension 21, et qu'elle n'a que des singularités rationnelles.

Remarque 7.8. — Les points singuliers de $\mathbf{C}_2$ correspondent aux cosystèmes (Γ, F) tels que $\mathrm{T} = \mathrm{F}^{**}/\mathrm{F}$ soit épineux, ou aux cosystèmes polystables non stables. Ainsi cet ensemble singulier a deux composantes irréductibles, de dimensions respectives 16 et 14.

Le sous-schéma $\mathbf{C_1} - \mathbf{C_2}$

Commençons par donner un paramétrage par une variété lisse et irréductible des faisceaux μ–semi-stables F de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m$ satisfaisant à la condition $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = 1$. Soit K un espace vectoriel de dimension 5. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{D}_1$ des drapeaux

$$\mathrm{K} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1) \to \mathrm{G} \to \mathrm{T},$$

où G est un faisceau quotient de $\mathrm{K} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1)$ μ–semi-stable de polynôme de Hilbert $m^2 + 3m + 1$, et T un faisceau quotient de G de longueur 1.

Lemme 7.9. — *La variété* $\mathbf{D}_1$ *est lisse et irréductible de dimension 35.*

Démonstration. Soit $\mathbf{Hilb}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*, 1)$ le schéma de Hilbert des faisceaux quotients de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*$ de longueur 1. C'est évidemment une variété projective lisse et irréductible de dimension 6. Considérons la sous-variété

$$\mathbf{W} \subset \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathrm{Q}^* \oplus \wedge^3\mathrm{Q}^*, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*) \times \mathbf{Hilb}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*, 1)$$

des paires (u, T) satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) le morphisme u est génériquement injectif, et son conoyau G_u est μ–semi-stable.

(2) le morphisme composé

$$\wedge^2\mathrm{Q}^* \oplus \wedge^3\mathrm{Q}^* \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^* \to \mathrm{T}$$

est nul. Du fait que le fibré vectoriel $\underline{\mathrm{Hom}}(\wedge^2\mathrm{Q}^* \oplus \wedge^3\mathrm{Q}^*, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*)$ est engendré par ses sections, il découle que $\mathbf{W}$ est un ouvert d'un fibré vectoriel de rang 16 au-dessus $\mathbf{Hilb}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*, 1)$. Par suite $\mathbf{W}$ est une variété lisse et irréductible de dimension 22. Considérons maintenant la variété $\mathbf{R}$ des paires $((u, \mathrm{T}), \varphi)$, où $(u, \mathrm{T}) \in \mathbf{W}$ et où $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{G}_u(1))$ est un isomorphisme. Comme dans la proposition 3.15, on a encore un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{D}_1 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbf{W} & & \end{array}$$

où p_1 est un fibré principal localement trivial de groupe structural $Gl(5)$, et p_2 est un fibré principal localement trivial dont le groupe structural est le groupe (de dimension 12) $\mathrm{Aut}(\wedge^2 Q^* \oplus \wedge^3 Q^*) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus Q^*)$. Alors $\mathbf{R}$ est lisse irréductible de dimension 22+25=47. Par suite, la variété $\mathbf{D_1}$ est lisse et irréductible de dimension 35. □

Considérons maintenant la variété $\mathbf{R}_1$ des paires $(p, \varphi) \in \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ où p est un point de $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ représentant un quotient F de $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}$, et $\varphi : \mathrm{K} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}^{**}(1))$ un isomorphisme. On a encore un morphisme canonique $q_2 : \mathbf{R}_1 \to \mathbf{D}_1$ qui associe à la paire (p, φ) la paire $((\mathrm{F}^{**}, \mathrm{T}), \varphi)$ où $\mathrm{T} = \mathrm{F}^{**}/\mathrm{F}$. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_1 & \xrightarrow{q_2} & \mathbf{D}_1 \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \\ \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 & & \end{array}$$

où q_1 est un fibré localement trivial de groupe structural $Gl(5)$, et où q_2 est un fibré localement trivial de groupe structural $Gl(\mathrm{N})$. Il résulte du lemme ci-dessus que $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ est lisse et irréductible de dimension $10 + \mathrm{N}^2$, ce qui démontre l'assertion (2) annoncée. Par suite, $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$ est lisse et irréductible de dimension 17. □

7.2. Les trois composantes de Trautmann.

Lemme 7.10. — *Soit* E *un faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert* P *sur* $\mathbf{P}_3$. *Alors*

$$\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}) = h^0(\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{E}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}))$$

et ce nombre est ≤ 2.

Démonstration. D'après le lemme 7.3 un sous-espace vectoriel $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1))$ définit un système cohérent semi-stable, et par suite un cosystème cohérent semi-stable (Γ^*, F). De la suite exacte

$$0 \to \Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{E}(1) \to \mathrm{F} \to 0$$

on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(1)) & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) \\ {\scriptstyle (1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (2)} \\ \mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(1))) & \to & \mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3})) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes. De plus, la flèche verticale (1) est un isomorphisme : la démonstration est identique à celle de la proposition 7.4. Par suite, la flèche (2) est un isomorphisme. La même proposition montre que $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \leq 2$. □

Remarque 7.11. — Le nombre $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ est le nombre de points, comptés avec multiplicités, de profondeur 1 de E. Cette majoration peut aussi s'obtenir en utilisant les inégalités de Hartshorne sur les classes de Chern des faisceaux réflexifs de rang 2 : en fait ces inégalités reposent sur la théorie du spectre des faisceaux réflexifs. Ici, nous l'avons remplacé par l'inégalité de Bogomolov.

Théorème 7.12. — *Soit* $\mathbf{M}_i$ *la sous-variété déterminantielle de* $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P})$ *définie par les classes de* S*−équivalence de faisceaux semi-stables satisfaisant aux conditions*

$$\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \geq i.$$

(i) *La sous-variété* $\mathbf{M}_2$ *est irréductible de dimension 21, normale, et lisse en dehors d'un fermé de dimension 16 ; elle n'a que des singularités rationnelles.*
(ii) *La sous-variété* $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ *est irréductible et lisse de dimension 17.*
(iii) *L'ouvert complémentaire de* $\mathbf{M}_1$ *est irréductible et lisse de dimension 13.*

Corollaire 7.13. — *(Trautmann) La variété* $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P})$ *a trois composantes irréductibles de dimensions respectives 13,17 et 21.*

Démonstration. Considérons le morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Syst}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P}_1, 2) & \simeq & \mathbf{Cosyst}_{\mathbf{P}_3}(m^2+3m, 2) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ \mathbf{M} & & \end{array}$$

Le sous-schéma $\mathbf{C}_i$ est l'image réciproque de $\mathbf{M}_i$ par le morphisme π. Du théorème 7.6, il résulte que chacun des sous-schémas $\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2$ est irréductible. Il reste à étudier les singularités de ces sous-schémas.

Lemme 7.14. — *Dans* $\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i+1}$ *l'hypersurface* Ξ_i *définie par les classes de* S*−équivalence de cosystèmes semi-stables* (Γ, F) *satisfaisant à la condition déterminantielle*

$$h^1(\mathrm{F}) = 1$$

est vide si $i = 0$*, et lisse dans les cas* $i = 1$ *et* $i = 2$.

Démonstration. Pour $i = 0$, on sait que le faisceau F est semi-stable, et de Cohen-Macaulay ; par conséquent, d'après la proposition 3.18 il n'a pas de section, et $h^1(\mathrm{F}) = 0$.

Pour $i = 1$, il s'agit de montrer, avec les notations utilisées dans la démonstration du théorème 7.6 que la sous-variété de $\mathbf{D}_1$ des drapeaux $\mathrm{K}\otimes\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{G} \to \mathrm{T}$ pour lesquels le morphisme associé $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ est nul est une hypersurface lisse. La démonstration de ce théorème nous ramène à vérifier que l'hypersurface de $\mathbf{W}$ définie par les paires

$$(u, \mathrm{T}) \in \mathbf{W} \subset \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathrm{Q}^* \oplus \wedge^3\mathrm{Q}^*, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*) \times \mathbf{Hilb}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*, 1)$$

telles que le morphisme $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ soit nul est une hypersurface lisse. Mais on sait que la projection canonique $\mathbf{W} \to \mathbf{Hilb}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*, 1)$ est lisse, et cette hypersurface est l'image réciproque du fibré en plans projectifs $\mathbf{P}(\mathrm{Q}^*) \subset \mathbf{Hilb}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \oplus \mathrm{Q}^*, 1)$ par cette projection. Par suite elle est lisse.

Pour $i = 2$, il suffit de montrer que l'hypersurface de $\mathbf{H}_2$ définie par les couples (G, T) tels que le morphisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ soit de déterminant nul est non singulière. Avec les notations du chapitre 3, cette hypersurface est l'image réciproque de la sous-variété des points instables de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ par la submersion $\mathbf{H}_2 \to \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ (*cf.* proposition 3.25). Pour voir que Ξ_2 est une hypersurface lisse, on est donc ramené à vérifier le lemme suivant :

Lemme 7.15. — *Pour tout point* $u \in \mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ *représentant un quotient* $\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3} \to \mathrm{T}$*, désignons par* $p_u : \mathrm{B} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ *l'application linéaire* *associée. La sous-variété déterminantielle* $\mathbf{Y}$ *de* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$*, des points* u *satisfaisant à la condition*

$$\operatorname{rang} p_u \leq 1$$

est une hypersurface lisse.

Démonstration. Les points de $\mathbf{Y}$ sont évidemment les points instables de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$. En un point instable, l'application linéaire $p_u : \mathrm{B} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T})$ est de rang 1 ; plus précisément, si $\mathscr{T}$ est le quotient universel sur $\mathbf{Y} \times \mathbf{P}_3$ et p la projection $\mathbf{Y} \times \mathbf{P}_3 \to \mathbf{Y}$, le conoyau et le conoyau du morphisme canonique $\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{Y}} \to p_*(\mathscr{T})$ sont des fibrés inversibles sur $\mathbf{Y}$; le noyau définit alors un morphisme

$$\mathbf{Y} \to \mathbf{P}(\mathrm{B})$$

qui est localement trivial, et dont la fibre est isomorphe au schéma de Hilbert $\mathbf{S}$ des sous-schémas de longueur 2 dans $\mathbf{P}_3$. Par suite, le sous-schéma $\mathbf{Y}$ est lisse de dimension 7. □

Remarque 7.16. — Un point instable de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ n'est jamais épineux. Par suite, le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}, 2)$ est lisse en un point instable.

Fin de la démonstration du théorème 7.12

La démonstration ci-dessus montre que si E est un faisceau semi-stable de rang 2 et classes de Chern $(0,2,0)$ sur $\mathbf{P}_3$, on a $h^1(\mathrm{E}(1)) \leq 1$.

Définition 7.17. — *Soit* E *un faisceau semi-stable de rang 2, de classes de Chern (0,2,0). On dit que* E *est spécial si* $h^1(\mathrm{E}(1)) = 1$.

En dehors de $\mathbf{M}_1$, il n'y a pas de points spéciaux. Désignons pour $i = 1$ et 2 par Σ_i la sous-variété déterminantielle de $\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$ définie par la condition $h^1(\mathrm{E}(1)) = 1$. Les points de ces variétés sont donc les points spéciaux. La projection π induit un morphisme $\Xi_i \to \Sigma_i$ qui est un fibré localement trivial en plans projectifs ; il résulte du lemme 7.14 que Σ_i est lisse de dimension $10+4i$. Au-dessus du complémentaire Σ_i le morphisme $\pi_i : \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i+1} \to \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$

induit par π est un isomorphisme. Il en résulte que le schéma $\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$ est de dimension $13 + 4i$. Pour $a \in \Sigma_i$ la différentielle de Petri

$$\mathrm{T}_a\mathbf{M}_i \to \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)), \mathrm{H}^1(\mathrm{E}(1)))$$

a pour noyau est l'espace tangent de Zariski à Σ_i en a. On a alors $\dim \mathrm{T}_a\mathbf{M}_i \leq 13 + 4i$. Ceci prouve que l'on a en fait l'égalité, et donc que a est un point lisse de $\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$. Du théorème 7.6 il découle que $\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$ est lisse pour $i = 0$ et $i = 1$. Pour $i = 2$, le morphisme π_2 est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert qui contient les singularités de $\mathbf{M}_2$. Par suite, exactement comme $\mathbf{C}_2$, la variété $\mathbf{M}_2$ est normale, et non singulière en dehors d'un fermé de dimension 16 ; de plus, elle n'a que des singularités rationnelles.

Remarque 7.18. — Pour $i = 1$ et 2 le morphisme

$$\pi_i : \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i+1} \to \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{i+1}$$

est l'éclatement le long de la sous-variété lisse Σ_i des points spéciaux. La démonstration est identique à celle qu'on a donnée au chapitre 6 pour l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2; 0, 4)$.

Remarque 7.19. — L'ensemble singulier de $\mathbf{M}_2$ a deux composantes irréductibles : l'une de dimension 16, correspond aux classes de faisceaux semi-stables E tel que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathrm{E}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3})$ soit de longueur 2 et épineux ; l'autre, de dimension 14, correspond aux classes de faisceaux polystables $\mathrm{E} = \mathrm{J}' \oplus \mathrm{J}''$, où J' et J'' sont les idéaux de sous-schémas de polynôme de Hilbert $m + 2$. Un tel sous-schéma est donné par une droite et un point (le point étant éventuellement immergé dans la droite).

7.3. La rationalité

L'ouvert complémentaire de $\mathbf{M}_1$ dans $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P})$ contient les points définis par les fibrés stables de rang 2, de classe de Chern (0,2). Il est bien connu que cet ouvert est une variété rationnelle. C'est encore vrai pour les deux autres composantes :

Théorème 7.20. — *Les trois composantes irréductibles de $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P})$ sont des variétés rationnelles.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i+1}$ est une variété rationnelle. Commençons par le cas $i = 2$. Désignons par $\mathbf{C}_2^{ss}$ et $\mathbf{C}_2^{s}$ les ouverts de $\mathbf{C}_2$ correspondant aux cosystèmes (Γ, F) tel que F soit semi-stable ou stable respectivement. On a alors un morphisme

$$\mathbf{C}_2^s \to \mathbf{N} := \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(m^2 + 3m)$$

qui prend ses valeurs dans la composante $\mathbf{N}_2$ de dimension 13, dont la fibre au-dessus d'un point stable est une grassmannienne de dimension 8. En vertu du corollaire 3.29 cette composante $\mathbf{N}_2$ est rationnelle. Il suffit donc de vérifier qu'au-dessus d'un ouvert de cette composante, la projection ci-dessus est localement triviale. La principale difficulté est qu'il n'existe pas de faisceau universel paramétré par un ouvert de $\mathbf{N}$. La démonstration ci-dessous est calquée sur [21] . Considérons le fibré universel $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{H} \times \mathbf{P}_3$. Désignons par q la projection sur $\mathbf{H}$, et par $\mathscr{E}$ le faisceau $\mathrm{R}^2 q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_{\mathbf{P}_3})$. C'est un faisceau localement libre de rang 6 au-dessus du sous-schéma fermé $\mathbf{H}_2$, muni d'une action de $\mathrm{G}l(\mathrm{H})$. Au-dessus de l'ouvert des points stables, le schéma $\mathbf{C}_2$ s'identifie alors au quotient de Mumford de la grassmannienne relative $\mathbf{Grass}(\mathscr{E}, 2)$. Considérons par ailleurs, au-dessus de $\mathbf{H}_2$, le fibré inversible $\mathrm{A} = \det q_*(\mathscr{F})$; il est lui aussi muni d'une action de $\mathrm{G}l(\mathrm{H})$.

Lemme 7.21. — *Soit $k \in \mathbf{Z}$ un entier. Au-dessus de l'ouvert $\mathbf{N}_2^s$ des points stables de $\mathbf{N}_2$, le fibré vectoriel $\mathscr{E}_k := \wedge^{2k}\mathscr{E} \otimes \mathrm{A}^{\otimes -k}$ se quotiente en un fibré vectoriel $\mathscr{F}_k$. De plus, la multiplication extérieure induit un morphisme*

$$\lambda_k : \mathrm{S}^2\mathscr{F}_k \to \mathscr{F}_{2k}.$$

Ce lemme résulte du fait que le stabilisateur d'un point stable est réduit aux homothéties ; l'action du stabilisateur sur le fibré $\mathscr{E}_k$ est alors triviale, et donc ce fibré se quotiente à $\mathbf{N}_2^s$. La multiplication extérieure définit un morphisme $\mathrm{G}l(\mathrm{H})$−équivariant $\mathrm{S}^2\mathscr{E}_k \to \mathscr{E}_{2k}$ qui passe au quotient, ce qui définit le morphisme $\lambda_k : \mathrm{S}^2\mathscr{F}_k \to \mathscr{F}_{2k}$.

Le morphisme de fibrés vectoriels λ_k est évidemment de rang constant. Soit $\mathbf{P}(\mathscr{F}_1)$ le fibré en espaces projectifs de dimension 15 (au sens de Grothendieck) associé au fibré vectoriel $\mathscr{F}_1$; considérons, sur $\mathbf{P}(\mathscr{F}_1)$, la section canonique σ du fibré $\mathscr{F}_{-2}(2)$ associée à λ_{-1} : le schéma des zéros $\mathscr{X}$ de σ définit une variété projective relative localement triviale au-dessus de $\mathbf{N}_2^s$. Le morphisme canonique donné au-dessus de chaque point par le plongement de Plücker de la grassmannienne induit un isomorphisme

$$\mathbf{C}_2^s \simeq \mathscr{X}$$

au-dessus de $\mathbf{N}_2^s$. Par suite, le schéma en grassmanniennes $\mathbf{C}_2^s \to \mathbf{N}_2^s$ est aussi localement trivial dans la topologie de Zariski.

Dans le cas $i = 1$, la démonstration est en fait plus facile. Considérons en effet les extensions

$$0 \to \mathrm{I}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{I}'' \to 0$$

où I' est l'idéal dans un plan P' d'un point a', I'' l'idéal dans un plan P'' d'un point a'', telles que $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}) = 1$. Ces conditions imposent, comme on l'a vu au chapitre 3 que $a'' \in \mathrm{P}' \cap \mathrm{P}''$. On suppose que $a' \notin \mathrm{P}''$ et $\mathrm{P}' \neq \mathrm{P}''$. Ces conditions étant imposées, lorsque I' et I'' varient, l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}'', \mathrm{I}')$ reste de dimension 3 de sorte que ces extensions sont paramétrées par une variété rationnelle lisse $\mathbf{S}$ de dimension 11 ; de plus, il existe une extension universelle $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{S} \times \mathbf{P}_3$. Soit $q : \mathbf{S} \times \mathbf{P}_3 \to \mathbf{S}$ la première projection, et $\mathscr{E}$ le faisceau localement libre de rang 5 sur S défini par $\mathscr{E} = \mathrm{R}^2 q_*(\mathscr{F} \otimes \omega_{\mathbf{P}_3})$. Considérons, dans la grassmannienne relative $\mathbf{Grass}(\mathscr{E}, 2)$ au-dessus de $\mathbf{S}$ l'ouvert $\mathbf{Grass}^s(\mathscr{E}, 2)$ correspondant aux cosystèmes cohérents stables ; cet ouvert n'est pas vide : en effet, tout point de $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$ suffisamment général provient d'un tel cosystème cohérent, et ceci de manière unique. Alors le morphisme canonique

$$\mathbf{Grass}^s(\mathscr{E}, 2) \to \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$$

est birationnel. La variété $\mathbf{Grass}(\mathscr{E}, 2)$ est évidemment localement triviale au-dessus de $\mathbf{S}$. Puisque $\mathbf{S}$ est une variété rationnelle, il en est de même de $\mathbf{Grass}(\mathscr{E}, 2)$, et par suite de $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$. □

Remarque 7.22. — On peut calquer la démonstration donnée dans le cas $i = 2$ pour obtenir que l'ouvert complémentaire de $\mathbf{M}_1$ est une variété rationnelle.

7.4. Le faisceau universel

On sait que l'espace de modules des faisceaux stables E sur une variété projective peut être muni d'un faisceau universel dès que les nombres $< \mathrm{E}, h^i >$ qui apparaîssent dans le polynôme de Hilbert sont premiers entre eux [22] . Cette condition n'est pas indispensable pour trouver une famille universelle : il peut arriver que sur certains ouverts on puisse trouver un tel faisceau universel, même si ces nombres ne sont pas premiers entre eux.

Théorème 7.23. —
(i) *Il existe un faisceau universel paramétré par le sous-schéma* $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$.
(ii) *Soit* U *un ouvert de Zariski non vide de* $\mathbf{M} - \mathbf{M}_1$ *ou de* $\mathbf{M}_2$. *Il n'existe pas de faisceau universel paramétré par* U.

Démonstration. Soit n un entier assez grand, et K un espace vectoriel de dimension $\mathrm{P}(n)$. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{K} = \mathbf{Hilb}(\mathrm{K} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-n), \mathrm{P})$ des faisceaux quotients de polynôme de Hilbert P. Soit $\mathbf{K}^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{K})$; cet ouvert est invariant par l'action de $\mathrm{G}l(\mathrm{K})$ et par construction, l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(\mathrm{P})$ est un bon quotient de $\mathbf{K}^{ss}$ par l'action de $\mathrm{G}l(\mathrm{K})$. Sur $\mathbf{K} \times \mathbf{P}_3$ il existe un faisceau quotient universel $\mathbf{E}$ sur lesquel le centre $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{G}l(\mathrm{K})$ agit par les homothéties.

Désignons par $\mathbf{K}_i$ l'image réciproque de $\mathbf{M}_i$ par la projection canonique $\mathbf{K} \to \mathbf{M}$. Les points de l'ouvert $\mathbf{K}^{ss} - \mathbf{K}_2$ sont stables, et par conséquent le stabilisateur d'un tel point est réduit aux homothéties : autrement dit, le groupe $\mathrm{PG}l(\mathrm{K})$ opère librement sur cet ouvert. Pour obtenir un faisceau universel sur le sous-schéma $\mathrm{U}_1 = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$, il suffit de montrer qu'il existe un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathrm{V}_1 = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2$, muni d'une action de $\mathrm{S}l(\mathrm{K})$, et tel que l'action du centre de $\mathrm{G}l(\mathrm{K})$ sur $\mathscr{L}$ soit donnée par $\alpha \mapsto \alpha id_{\mathscr{L}}$: car si l'on désigne par p la première projection $\mathrm{V}_1 \times \mathbf{P}_3 \to \mathrm{V}_1$ le faisceau $\mathbf{E}' = \mathbf{E} \otimes p^*(\mathscr{L}^{-1})$ est muni d'une action de $\mathrm{PG}l(\mathrm{K})$ et se quotiente à U_1. En effet, il résulte de la suite spectrale de Beilinson relative que le faisceau $\mathbf{E}$ a une résolution gauche par un complexe $\mathscr{K}$ donné en degré i par

$$\mathscr{K}_i = p_*(\mathbf{E}(n-i)) \boxtimes \wedge^i \mathrm{Q}^*$$

et le groupe $\mathrm{G}l(\mathrm{K})$ agit de manière naturelle sur ce complexe. Le complexe $\mathscr{K} \otimes p^*(\mathscr{L}^{-1})$ est alors muni d'une action de $\mathrm{PG}l(\mathrm{K})$ et par suite il provient d'un complexe $\mathscr{K}'$ sur U_1. La projection $V_1 \to U_1$ étant fidèlement plate, ce complexe est acyclique en degré $i > 0$. Le faisceau de cohomologie obtenu en degré 0 est le faisceau $\mathbf{E}'$ que l'on cherche.

Or, sur l'ouvert V_1 le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^2_p(\mathbf{E}, \mathscr{O})$ est inversible, et muni d'une action naturelle de $Gl(\mathrm{K})$. Le dual de ce fibré inversible convient. Ceci démontre l'assertion (i).

Démontrons maintenant l'assertion (ii). Si U est un ouvert non vide de $\mathbf{M}$ qui ne rencontre pas $\mathbf{M}_1$, cet ouvert rencontre l'ouvert correspondant aux fibrés stables de rang 2, de classes de Chern (0,2) ; il est bien connu ([13] , [27] qu'il n'existe pas de fibré universel paramétré par cet ouvert. Considérons maintenant un ouvert non vide U de $\mathbf{M}_2$. On va s'inspirer de la démonstration de Drezet et Narasimhan [6] , et de celle de [21] . Pour vérifier qu'il n'existe pas de faisceau universel paramétré par U, il suffit de vérifier qu'il n'existe pas, sur son image réciproque V dans $\mathbf{K}_2$, de fibré inversible $\mathscr{L}$, muni d'une action de $Gl(\mathrm{K})$, tel que l'action du centre $\mathbb{C}^* \subset Gl(\mathrm{K})$ soit donnée par

$$\alpha \mapsto \alpha id_{\mathscr{L}}.$$

Mais d'après le lemme suivant, démontré dans [21] (lemme 3.20), ce fibré inversible devrait s'étendre, comme $Gl(\mathrm{K})$−fibré vectoriel, à l'ouvert des points lisses de $\mathbf{K}_2$:

Lemme 7.24. — *Soit* X *une variété affine lisse et irréductible, sur laquelle opère un groupe réductif et connexe* G, $f \in \mathscr{O}(\mathrm{X})$ *un élément non nul invariant par l'action de* G. *Soit* U *l'ouvert défini par* $f \neq 0$. *Soit* L *un fibré inversible sur* X. *Toute action linéaire de* G *sur le fibré* $\mathrm{L}|_{\mathrm{U}}$ *s'étend à* X.

Il ressort de l'étude des singularités de $\mathbf{M}_2$ que les points singuliers de $\mathbf{K}_2$ correspondent aux faisceaux quotients E tels que le faisceau de longueur 2 associé $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{E}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3})$ soit épineux.

Soit L un espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}\mathrm{P}(n)$; choisissons une fois pour toutes un isomorphime $\mathrm{K} \simeq \mathrm{L} \oplus \mathrm{L}$. Soit J l'idéal d'un sous-schéma de polynôme de Hilbert $m+2$; le faisceau $\mathrm{J}(n)$ est engendré par ses sections, et $h^0(\mathrm{J}(n)) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(n)$. Un tel faisceau J a un point de profondeur 1. Considérons l'ouvert $\mathbf{L}$ du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}^0(\mathrm{L} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_3}(-n), \frac{1}{2}\mathrm{P})$ des quotients sans torsion de polynôme de Hilbert $\frac{1}{2}\mathrm{P}$, et tels que l'application linéaire $\mathrm{L} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{J}(n))$ soit un isomorphisme.

Cet ouvert représente les classes d'isomorphisme de couples (J, φ), où J est l'idéal dans $\mathbf{P}_3$ d'un sous-schéma de polynôme de Hilbert $m+2$, et $\varphi : \mathrm{L} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{J}(n))$ un isomorphisme. On a un morphisme

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{K}_2$$

qui associe à la paire $a = (a', a'')$ avec $a' = (\mathrm{J}', \varphi')$ et $a'' = (\mathrm{J}'', \varphi''))$, le point défini par $(\mathrm{E} = \mathrm{J}' \oplus \mathrm{J}'', \varphi = \varphi' \oplus \varphi'')$. On choisit J' et J'' de sorte que les points de profondeur 1 associés soient distincts : le schéma de Hilbert $\mathbf{K}_2$ est alors lisse en un tel point (E, φ), et le prolongement $\mathscr{L}$ ci-dessus a un sens le long de l'orbite d'un tel point. Le stabilisateur en un point de l'image s'identifie au groupe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ des matrices de $\mathrm{G}l(\mathrm{K})$ de la forme

$$u = \begin{pmatrix} \alpha\, id_{\mathrm{L}} & 0 \\ 0 & \beta\, id_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}.$$

Au prolongement $\mathscr{L}$ ci-dessus est alors associé en chaque point $a = (a', a'') \in \mathbf{L} \times \mathbf{L}$ un caractère $(\alpha, \beta) \mapsto \chi_a(\alpha, \beta) = \alpha^k \beta^\ell$, avec $(k, \ell) \in \mathbf{Z}^2$. Ce caractère ne dépend pas en fait de a puisque $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ est irréductible, et donc aussi l'ouvert de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ correspondant aux couples se projetant sur le complémentaire de la diagonale de $\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_3$.

Pour tout point $a \in \mathbf{K}_2$ et $u \in \mathrm{G}l(\mathrm{K})$ appartenant au stabilisateur de a on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_a & \to & \mathscr{L}_{ga} \\ \chi_a(u) \downarrow & & \downarrow \chi_{ga}(gug^{-1}) \\ \mathscr{L}_a & \to & \mathscr{L}_{ga} \end{array}$$

En particulier, si on prend pour a l'image du point (a', a'') ci-dessus, on a vu que $\chi_{ga} = \chi_a$: on obtient en particulier que le caractère induit sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ rester invariant par la symétrie $\sigma : \mathrm{L} \oplus \mathrm{L} \to \mathrm{L} \oplus \mathrm{L}$ définie par $\sigma(x, y) = (y, x)$. La matrice $\sigma u \sigma^{-1}$ est évidemment

$$\begin{pmatrix} \beta\, id_{\mathrm{L}} & 0 \\ 0 & \alpha\, id_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

et par suite et par suite $\chi(u) = \beta^k \alpha^\ell$. Ainsi $k = \ell$. Au centre $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset \mathrm{G}l(\mathrm{K})$ correspond le caractère $\alpha \mapsto \alpha^{2k}$. On ne peut donc jamais trouver l'identité. □

8. Appendices

8.1. Déformations et pureté.

Dans toute cette section, la variété X sera supposée lisse de dimension n ; on désigne par ω_X le faisceau canonique. Cet appendice est consacré à la démonstration du résultat suivant qui a été utilisé dans la construction des espaces de modules :

Théorème 8.1. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension c, sur une variété algébrique projective lisse* X, *pouvant se déformer en un faisceau pur de codimension c. Alors il existe un faisceau algébrique cohérent* G *pur de codimension c et un morphisme* $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) *Le noyau de* φ *est le plus grand sous-module cohérent de* F *de codimension* $> c$.

(ii) *Le faisceau* G *a même polynôme de Hilbert que* F.

Cet énoncé est dû à Simpson [31] ; on peut aussi trouver un énoncé voisin pour les faisceaux de dimension n chez Gieseker ([9] , lemme 4.2). La démonstration que nous proposons ici évite l'argument de cohérence de certaines images directes invoqué par Simpson. Elle nous semble plus simple, modulo quelques sorites obligés sur les relations entre dualité et pureté. Ces sorites ont d'ailleurs été utiles tout au long du texte.

Lemme 8.2. — *Soit* X *une variété lisse de dimension n et* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension c. Alors* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_X) = 0$ *pour* $q < c$, *et le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \omega_X)$ *est de codimension c. Pour* $q > c$, *les faisceaux* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_X)$ *sont de codimension* $\geq q$.

Démonstration. La deuxième assertion s'obtient évidemment en localisant aux points de hauteur $< q$. De même, en localisant aux points de hauteur $\leq c$ on obtient que $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X})$ est de codimension exactement c. Pour la première assertion, on choisit une résolution gauche finie par des faisceaux localement libre $\mathrm{L}. \to \mathrm{F}$, à laquelle on applique le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \omega_\mathrm{X})$. On obtient un complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{L}., \omega_\mathrm{X})$ dont les faisceaux de cohomologie sont portés par le support de F. Un lemme bien connu attribué à Peskine et Szpiro [29] ou Kempf et Laksov [15] montre qu'alors ces faisceaux sont nuls jusqu'en degré $c-1$. □

Rappelons que F est pur de codimension c si et seulement si tous les points associés à F sont de hauteur c ; en termes de profondeur ceci signifie que pour tout point x appartenant au support de F et tel que $\mathrm{ht}\, x > c$ on a $\mathrm{prof}\,(\mathrm{F}_x) \geq 1$, c'est-à-dire, en termes de dimension homologique, $\mathrm{dh}(\mathrm{F}_x) < \mathrm{ht}\, x$. On a alors la version suivante du critère de Serre :

Lemme 8.3. — *Un faisceau cohérent de codimension c sur* X *est pur si et seulement si pour tout $q > c$ le support du faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X})$ *est de codimension* $\geq q+1$.

Définition 8.4. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur la variété* X. *On appelle dual de* F *le faisceau* $\mathrm{F}^{\check{}} = \underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X})$.

Si on considère le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{L}., \omega_\mathrm{X})$ introduit dans la démonstration du lemme 8.2, en appliquant à nouveau le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \omega_\mathrm{X})$ on obtient une suite spectrale donnée par

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{\mathrm{Ext}}^{-q}(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X}), \omega_\mathrm{X})$$

et qui a pour aboutissement F en degré 0 et 0 en degré non nul. Cette suite spectrale est en fait indépendante du choix de la résolution, et fournit un morphisme canonique $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\check{}\check{}}$.

Définition 8.5. — *Un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur* X *est dit réflexif si le morphisme canonique* $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\check{}\check{}}$ *est un isomorphisme.*

Pour $c = 0$ on retrouve donc la notion habituelle de faisceau réflexif.

Proposition 8.6. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur la variété lisse* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Le faisceau* F *est réflexif.*

(ii) *Le faisceau* F *est le dual d'un faisceau algébrique cohérent de codimension c.*

(iii) *Pour $q > c$, le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X})$ *est de codimension* $\geq q+2$.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est bien sûr évidente. Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iii) : on montre que si F est de codimension c, le dual $\mathrm{F}^\check{}$ satisfait à la condition 3. D'après la suite spectrale ci-dessus, pour $p > c$, le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathrm{F}^\check{}, \omega_\mathrm{X})$ s'identifie à $\mathrm{E}_2^{p,-c}$ et pour $k \geq 2$ le faisceau $\mathrm{E}_{k+1}^{p,-c}$ est le noyau de la différentielle

$$d_k^{p,-c} : \mathrm{E}_k^{p,-c} \to \mathrm{E}_k^{p+k,-c-k+1}$$

L'image de cette différentielle se plonge dans un quotient de

$$\mathrm{E}_2^{p+k,-c-k+1} = \underline{\mathrm{Ext}}^{p+k}(\underline{\mathrm{Ext}}^{c+k-1}(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X}), \omega_\mathrm{X}))$$

et compte-tenu du lemme 8.2 appliqué au faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^{c+k-1}(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X})$ cette image est de codimension $\geq p+2$. D'autre part, pour k assez grand, $\mathrm{E}_k^{p,-c}$ est nul ; on voit donc par récurrence descendante sur k que tous les termes $\mathrm{E}_k^{p,-c}$ sont de codimension $\geq p+2$, et donc en particulier $\underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathrm{F}^\check{}, \omega_\mathrm{X})$ est de codimension $\geq p+2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : On utilise une nouvelle fois la suite spectrale ci-dessus ; il suffit de vérifier que l'on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X}), \omega_\mathrm{X}) = 0$$

si $q > c$ et $p = q$ ou $p = q+1$. Il suffit d'appliquer le lemme 8.2 au faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_\mathrm{X})$ qui est par hypothèse de codimension $\geq q+2$. □

Corollaire 8.7. — *Le dual* $\mathrm{F}^\check{}$ *d'un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur la variété* X *est un faisceau pur de codimension c.*

Corollaire 8.8. — *Un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur la variété* X *est pur si et seulement si le morphisme canonique* $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\check{}\check{}}$ *est injectif.*

On peut évidemment transcrire le notion de réflexivité en termes de dimension homologique, ou ce qui revient au même, de profondeur :

Lemme 8.9. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur* X. *Alors* F *est réflexif si et seulement si pour tout point appartenant au support de* F *et de hauteur $q > c$, le module F_x est de Cohen-Macaulay si $q = c + 1$, et de profondeur ≥ 2 si $q > c + 1$.*

Lemme 8.10. — *Soit* $Y \subset X$ *une hypersurface, et* F *un faisceau algébrique cohérent de dimension d sur* X, *dont les points associés n'appartiennent pas à* Y. *Alors* $F|_Y$ *est de dimension $d - 1$, et on a les assertions suivantes :*

(i) *Si le faisceau* $F|_Y$ *est pur, il en est de même du faisceau* F *au voisinage de* Y.

(ii) *Si le faisceau* F *est réflexif au voisinage de* Y, *sa restriction* $F|_Y$ *est pure.*

Démonstration. La question est locale au voisinage de Y. On peut donc supposer que Y est donné par une équation $f = 0$ et que toutes les sous-variétés fermées définies par les points associés de F rencontrent Y. L'hypothèse signifie que f n'est pas diviseur de 0 dans F, c'est-à-dire que l'on a une suite exacte

$$0 \to F \to F \to F/fF \to 0.$$

Le quotient F/fF s'identifie bien sûr à $F|_Y$ et d'après le lemme de Krull il est de dimension $d - 1$.

Démontrons l'assertion (i) : soit $F' \to F$ un sous-module cohérent non nul de F, pur. On a alors une suite exacte de faisceaux cohérents sur X

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(F', F) \xrightarrow{f} \underline{\mathrm{Hom}}(F', F) \to \underline{\mathrm{Hom}}(F', F/fF).$$

D'après le lemme de Nakayama, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(F', F/fF)$ est non nul en un point x où le support de F' rencontre l'hypersurface Y. Ainsi,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F'/fF', F/fF) \neq 0.$$

Le choix d'une section locale non nulle de ce faisceau montre que puisque F/fF est pur par hypothèse, $\dim F'/fF' \geq d - 1$. Puisque f n'est pas diviseur de zéro dans F', le lemme de Krull entraîne que $\dim F' \geq d$. Ceci démontre que F est pur et prouve l'assertion (i).

Voyons maintenant l'assertion (ii) : soit $c = n - d$; si x est un point de Y appartenant au support de F et de hauteur $\geq c+1$ dans Y, il est de hauteur $\geq c+2$ dans X et la formule

$$\operatorname{prof}(\mathrm{F}_x) = \operatorname{prof}(\mathrm{F}_x / f\mathrm{F}_x) + 1$$

montre que si F est réflexif au voisinage de Y, on a $\operatorname{prof}(\mathrm{F}_x/f\mathrm{F}_x) \geq 1$. Ainsi, la restriction $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ est pure au voisinage de Y, ce qui démontre l'assertion (ii). □

Démonstration du théorème 8.1

On désigne par T le plus grand sous-module cohérent de codimension $\geq c+1$ contenu dans F. L'hypothèse signifie qu'il existe un germe de courbe lisse (C, s) et un faisceau algébrique cohérent $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{C} \times \mathrm{X}$, plat sur C tel que $\mathscr{F}(s)$ soit isomorphe à F et tel que pour tout point fermé $t \in \mathrm{C}$ distinct de s le faisceau $\mathscr{F}(t)$ soit pur. L'hypothèse de platitude sur C implique que si z est une coordonnée locale sur C s'annulant au point t, le morphisme $z : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est injectif, ce qui signifie qu'aucun des points associé à $\mathscr{F}$ n'appartient à une fibre de la projection $\mathrm{C} \times \mathrm{X} \to \mathrm{C}$. D'après le lemme 8.10 ci-dessus, le faisceau $\mathscr{F}$ est pur en dehors du support de T. Ainsi le morphisme canonique $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\vee\vee}$ est injectif sur cet ouvert.

Posons $\mathscr{K} = \operatorname{coker} \varphi$, et considérons le sous-faisceau $\mathscr{R}$ de $\mathscr{K}$ défini par le noyau de

$$\mathscr{K} \xrightarrow{z^m} \mathscr{K}$$

pour m assez grand, où z est une coordonnée sur C au point s : c'est aussi le plus grand sous-module cohérent de $\mathscr{K}$ dont le support est contenu dans la fibre spéciale au-dessus du point s. La multiplication par z dans le quotient $\mathscr{K}/\mathscr{R}$ est alors injective. Par suite, ce quotient est plat sur C.

Considérons l'image réciproque $\mathscr{G}$ de $\mathscr{R}$ par la projection $\mathscr{F}^{\vee\vee} \to \mathscr{K}$. Le morphisme canonique $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\vee\vee}$ se factorise à travers $\mathscr{G}$. Au-dessus de l'ouvert $\mathrm{C}' = \mathrm{C} - \{s\}$, le morphisme canonique $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un isomorphisme, car le conoyau est $\mathscr{R}$. Les points associés de $\mathscr{G}$ font partie de ceux de $\mathscr{F}^{\vee\vee}$, et donc de ceux de $\mathscr{F}$. Puisque $\mathscr{F}$ est C−plat, aucun d'entre eux n'appartient à une fibre. Ceci implique que $\mathscr{G}$ est C−plat. Par suite le polynôme de Hilbert de $\mathscr{G}(t)$ reste constant et égal à celui de F.

On prend $G = \mathscr{G}(s)$, et on note encore $\varphi : F \to G$ le morphisme induit. De la suite exacte $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{F}^{\vee\vee} \to \mathscr{K}/\mathscr{R} \to 0$ et de la platitude de $\mathscr{K}/\mathscr{R}$ on déduit que G est un sous-module de $\mathscr{F}^{\vee\vee}(s)$. Ce faisceau est pur d'après le lemme 8.10 ci-dessus et donc G est lui-même pur. Le noyau du morphisme induit $\varphi : F \to G$ contient T ; ce noyau est de codimension $\geq c+1$ donc aussi contenu dans T. C'est donc exactement T; ceci achève la démonstration. □

8.2. Dualité relative

Si $f : X \to S$ est un morphisme projectif lisse de dimension relative n; on désigne par $\omega_{X/S}$ le faisceau dualisant relatif. Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X. Les foncteurs dérivés droits du foncteur $G \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_f(F, G) := f_*(\underline{\mathrm{Hom}}(F, G))$ sur la catégorie des faisceaux algébriques sont classiquement notés $\underline{\mathrm{Ext}}^q_f(F, G)$. On se propose de décrire les relations entre ces foncteurs et les foncteurs images directes liées à la dualité de Grothendieck.

Proposition 8.11. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n, et F un $\mathscr{O}_X$−module cohérent. Il existe une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par*

$$E_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(R^{n-q} f_*(F), \mathscr{O}_S)$$

et d'aboutissement $\underline{\mathrm{Ext}}^m_f(F, \omega_{X/S})$ en degré $p + q = m$.

La démonstration fait appel à plusieurs lemmes.

Lemme 8.12. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n, et F un $\mathscr{O}_X$−module cohérent. Alors $R^q f_*(F) = 0$ pour $q > n$.*

Démonstration. Si F est un $\mathscr{O}_X$−module cohérent, l'image directe $R^q f_*(F)$ est évidemment nulle si $q >> 0$. L'énoncé s'obtient alors par récurrence descendante sur q, en écrivant la suite exacte dérivée de la suite exacte $0 \to F' \to L \to F \to 0$, où L est somme directe de faisceaux inversibles négatifs. □

Lemme 8.13. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n, et F un $\mathscr{O}_X$−module cohérent. Soit $\omega_{X/S}$ le faisceau dualisant relatif.*

Le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_f(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X/S}}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}^n f_*(\mathrm{F}), \mathscr{O}_\mathrm{S})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il en résulte du lemme précédent que le foncteur $\mathrm{F} \mapsto \mathrm{R}^n f_*(\mathrm{F})$ est exact à droite sur la catégorie des $\mathscr{O}_\mathrm{X}-$modules cohérents. Le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Hom}}_f(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X/S}}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}^n f_*(\mathrm{F}), \mathscr{O}_\mathrm{S})$ est un morphisme de foncteurs additifs contravariants en F, exacts à gauche. On considère une présentation gauche $\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_1 \to \mathrm{F} \to 0$ de F par des faisceaux localement libres L_i somme directe de faisceaux inversibles du type $\mathscr{O}_\mathrm{X}(-a)$ avec a très grand par valeur positive. Sur un tel faisceau inversible, le morphisme ci-dessus est évidemment un isomorphisme ; et ceci reste évidemment vrai pour les faisceaux localement libres L_i. Par exactitude à gauche, on voit en appliquant le lemme des cinq que c'est un isomorphisme pour tout faisceau cohérent F. □

Démonstration de la proposition 8.11.

Compte-tenu du lemme 8.13, la suite spectrale de l'énoncé n'est autre que la suite spectrale d'un foncteur composé : on l'obtient en choisissant une résolution gauche $\mathrm{L}_. \to \mathrm{F}$ de F par des faisceaux somme directes de faisceaux inversibles $\mathscr{O}_\mathrm{X}(-a)$ avec a très grand par valeurs positives. Le complexe $\mathrm{R}^n f_*(\mathrm{L}.)$ est un complexe de faisceaux localement libres dont le $q-$ième faisceau de cohomologie s'obtient comme foncteur dérivé à gauche de $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{R}^n f_*(\mathrm{G})$: c'est $\mathrm{R}^{n-q} f_*(\mathrm{F})$. On considère maintenant la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ à valeurs dans le complexe $\mathrm{R}^n f_*(\mathrm{L}.)$. Le terme E_2 est donné par

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathrm{R}^{n-q} f_*(\mathrm{F}), \mathscr{O}_\mathrm{S})$$

et l'aboutissement est, en degré m, le m-ième groupe de cohomologie du complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}^n f_*(\mathrm{L}.), \mathscr{O}_\mathrm{S})$, complexe isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_f(\mathrm{L}., \omega_{\mathrm{X/S}})$ d'après le lemme ci-dessus ; donc l'aboutissement est $\underline{\mathrm{Ext}}_f^m(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X/S}})$. □

Remarquons qu'il n'y a pas d'hypothèse de S$-$platitude sur le faisceau cohérent F. On peut généraliser la proposition 8.11 à deux faisceaux algébriques cohérents. Nous aurons cependant besoin d'une hypothèse de platitude sur l'un des faisceaux.

Proposition 8.14. — *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n, F et G deux $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$−modules cohérents ; on suppose que le faisceau G est S−plat. Alors il existe une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par*

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{\mathrm{Ext}}_f^{n-q}(\mathrm{G},\mathrm{F}), \mathcal{O}_{\mathrm{S}})$$

et d'aboutissement $\underline{\mathrm{Ext}}_f^m(\mathrm{F}, \mathrm{G} \otimes \omega_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ en degré $p+q=m$.

On retrouve bien sûr l'énoncé précédent en prenant $\mathrm{G} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$. La démonstration nécessite plusieurs lemmes.

Lemme 8.15. — *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n, et G un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$−module cohérent S−plat tel que $\mathrm{R}^i f_*(\mathrm{G}) = 0$ si $i > 0$. Alors*

1. *Le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}_f^m(\mathrm{G}, \omega_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ est nul pour tout $m \neq n$*
2. *Le faisceau $f_*(\mathrm{G})$ est localement libre et le $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$−module $\underline{\mathrm{Ext}}_f^n(\mathrm{G}, \omega_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ est le dual de $f_*(\mathrm{G})$.*

Démonstration. Les hypothèses entraînent que l'image directe $f_*(\mathrm{G})$ est un faisceau localement libre d'après le théorème de changement de base [11] . La suite spectrale de la proposition 8.11 entraîne $\underline{\mathrm{Ext}}_f^p(\mathrm{G}, \omega_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}) = 0$ si $p < n$ et fournit un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Ext}}_f^{n+p}(\mathrm{G}, \omega_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^p(f_*(\mathrm{G}), \mathcal{O}_{\mathrm{S}}).$$

Par suite, ce terme est nul si $p > 0$. D'où l'énoncé. □

Lemme 8.16. — *Sous les hypothèses de la proposition 8.14 on a*

$$\underline{\mathrm{Ext}}_f^q(\mathrm{G}, \mathrm{F}) = 0$$

pour $q > n$.

Démonstration. Commençons par vérifier que $\underline{\mathrm{Ext}}_f^q(\mathrm{G}, \mathrm{F}) = 0$ pour $q >> 0$. Cet énoncé est évidemment vrai si G est localement libre, car il se ramène au lemme 8.12. Puisque le faisceau G est supposé S−plat, ceci entraîne qu'il a une résolution gauche finie par des faisceaux localement libres. Ceci entraîne le résultat. Maintenant, G étant fixé, le lemme est vrai si $F = \mathcal{O}_X(-a)$, avec a très grand par valeurs positives d'après le lemme 8.15. Il suffit donc d'écrire la suite exacte longue dérivée de la suite exacte $0 \to F' \to L \to F \to 0$, où L est somme directe de fibrés inversibles très négatifs, et de raisonner par récurrence descendante sur q pour obtenir le résultat attendu. □

Lemme 8.17. — *Sous les hypothèses de la proposition 8.14, le morphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_f(F, G \otimes \omega_{X/S}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Ext}}^n_f(G, F), \mathcal{O}_S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On fixe le faisceau G. Ce morphisme est un morphisme de foncteurs contravariants en F, exacts à gauche d'après le lemme 8.16. Si $F = \mathcal{O}_X(-a)$ avec a très négatif, le résultat est une conséquence du lemme 8.15. Il suffit donc de choisir une présentation gauche de F

$$L_2 \to L_1 \to F \to 0$$

où les L_i sont des sommes directes de fibrés inversibles très négatifs pour obtenir l'énoncé. □

Démonstration de la proposition 8.14.

Compte-tenu du lemme 8.17 précédent, c'est encore la suite spectrale d'un foncteur composé. Pour l'obtenir, on choisit une résolution gauche de $L_. \to F$ par un complexe de faisceaux localement libres L_i somme directe de faisceaux inversibles très négatifs. Le complexe $\underline{\mathrm{Ext}}^n_f(G, L_.)$ a alors pour faisceau cohomologie $\underline{\mathrm{Ext}}^{n-q}_f(G, F)$ en degré q et la suite spectrale de l'énoncé est la suite spectrale hyperdérivée du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathcal{O}_S)$ à valeurs dans ce complexe. □

Corollaire 8.18. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n, F un $\mathcal{O}_X$−module cohérent S−plat. Alors il existe une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par*

$$E_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{\mathrm{Ext}}^{n-q}_f(F, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_S)$$

et d'aboutissement $R^m f_*(F \otimes \omega_{X/S})$ en degré $p + q = m$.

Corollaire 8.19. — *Sous les mêmes hypothèses, l'image directe* $f_*(\mathrm{F})$ *est le dual de* $\underline{\mathrm{Ext}}_f^n(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X/S}})$.

9. Bibliographie

[1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS ET J. HARRIS, *Geometry of algebraic curves,* Springer-Verlag, (1985).

[2] M. F. ATIYAH ET I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra,* Addison-Wesley Publishing Company, (1969).

[3] W. BARTH ET G. ELENCWAJG, *Concernant la cohomologie des fibrés algébriques stables sur $\mathbf{P}_n$, Variétés analytiques complexes,* Lecture Notes **683** (1978) p. 1-24.

[4] J. F. BOUTOT, *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs,* Invent. math. **88.1** (1987) p. 65-68.

[5] A. DOUADY ET J. L. VERDIER, *Les équations de Yang et Mills, Séminaire de l'E.N.S.,* Astérisque **71-72** (1980).

[6] J. M. DREZET ET M. S. NARASIMHAN, *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques,* Invent. math. **97** (1989) p. 53-94.

[7] J. A. EAGON ET M. HOCHSTER, *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci,* Amer. J. Math. **93** (1971) p. 1020-1058.

[8] W. FULTON, *Intersection Theory,* Springer-Verlag (1984).

[9] D. GIESEKER, *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface,* Ann. of maths **106** (1977) p. 45-60.

[10] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : les schémas de Hilbert,* Sém. Bourbaki **221** (1960).

[11] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry,* GTM, Springer Verlag, New-York (1977)

[12] R. HARTSHORNE, *Stables vector bundles of rank 2 on* $\mathbf{P}_3$, Math. Annalen **238** (1978) p. 229-280.

[13] A. HIRSCHOWITZ ET M. S. NARASIMHAN, *Fibrés de t'Hooft spéciaux et applications,* Enumerative geometry and classical algebraic geometry, Progress in Math, Birkhaüser **24** (1982).

[14] K. HULEK ET J. LE POTIER, *Sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern (0,3) sur* $\mathbf{P}_2$, Annales de l'Institut Fourier **39** (1989) p. 251-292.

[15] G. KEMPF ET D. LAKSOV, *The determinantal formula of Schubert calculus,* Acta. Math. **132** (1974) p. 153-162.

[16] J. LE POTIER, *Stabilité et amplitude sur* $\mathbf{P}_2$, in Vector Bundles and Differential Equations, Nice 1979 (Ed. A. Hirschowitz), Progress in Maths, Birkhaüser **7**, p. 145-182.

[17] J. LE POTIER. *Fibrés stables sur le plan projectif et quartiques de Lüroth,* Exposé donné à Jussieu (1989).

[18] J. LE POTIER, *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques,* Complex projective Geometry (Bergen 1989, Ed. G. Ellingsrud, C. Peskine, G. Sacchiero, and S.A. Strømme) London mathematical Society, (1992) p. 213-240.

[19] J. LE POTIER, *Fibrés de Higgs et systèmes locaux,* Sém. Bourbaki, exposé **737** (1991)

[20] J. LE POTIER, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques,* Cours de DEA, Université Paris 7 (1991).

[21] J. LE POTIER, *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif,* Preprint (1992).

[22] M. MARUYAMA, *Moduli of stable sheaves, II,* J. Math. Kyoto University **18** (1978) p. 557-614.

[23] M. MARUYAMA, *The theorem of Grauert-Mülich-Spindler,* Math. Annalen **255** (1981) p. 317-533.

[24] M. MARUYAMA, *On boundness of families of torsion free sheaves,* J. Math. Kyoto University **21-4** (1981) p. 673-701.

[25] D. MUMFORD ET J. FOGARTY, *Geometric Invariant Theory,* Springer Verlag (1982).

[26] M. S. NARASIMHAN ET G. TRAUTMANN, *Compactification of* $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(0,2)$ *and*

Poncelet Pairs of Conics, Pacific Journal of Mathematics **145, 2** (1990) p. 265-365.

[27] P. NEWSTEAD, *On the cohomology and the Picard group of a moduli space of bundles on* $\mathbf{P}_3$*,* The quarterly Journal of Mathematics Oxford **33** (1982) p. 349-355.

[28] J. OESTERLÉ, *Construction de la variété de modules des fibrés vectoriels stables sur une courbe algébrique,* Birkhaüser **54** (1985) p. 29-48.

[29] C. PESKINE, *Introduction algébrique à la géométrie projective,* Cours de DEA (1990), Université Pierre et Marie Curie.

[30] C.T. SIMPSON. *Higgs bundles and local systems,* Preprint, Princeton University (1990).

[31] C.T. SIMPSON, *Moduli of Representations of the Fundamental Group of a Smooth Variety,* Preprint, Princeton University (1990)

[32] M. THADDEUS, *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula,* Preprint (1992).

[33] G. TRAUTMANN, *Components of* $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_3}(2;0,2,0)$, Preprint, Kaiserslautern (1992)

[34] A. N. TYURIN, *The moduli spaces of vector bundles on threefolds, surfaces and curves,* Preprint Erlangen (1990).

J. Le Potier
UFR de Mathématiques et URA 212
Université Paris 7
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05