

Astérisque

MICHEL BROUÉ

GUNTER MALLE

Zyklotomische Heckealgebren

Astérisque, tome 212 (1993), p. 119-189

http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__212__119_0

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ZYKLOTOMISCHE HECKEALGEBREN

MICHEL BROUÉ UND GUNTER MALLE

Ecole Normale Supérieure und Universität Heidelberg

0. EINLEITUNG

Sei \mathbf{G} eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über dem algebraischen Abschluß eines endlichen Körpers \mathbb{F}_q . Sei $F: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ ein Frobeniusendomorphismus, der eine zerfallende rationale Struktur über \mathbb{F}_q definiert, und bezeichne \mathbf{G}^F die Gruppe der F -rationalen Punkte von \mathbf{G} . Sei \mathbf{B} eine rationale Boreluntergruppe von \mathbf{G} und \mathbf{T} ein darin enthaltener zerfallender maximaler Torus. Wir bezeichnen den $\mathbb{Q}\mathbf{G}^F$ -Permutationsmodul über der endlichen Menge $\mathbf{G}^F/\mathbf{B}^F$ mit $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)$. Es ist wohlbekannt, daß die Endomorphismenalgebra dieses $\mathbb{Q}\mathbf{G}^F$ -Moduls als Deformation $\mathcal{H}(W, q)$ der Gruppenalgebra $\mathbb{Q}W$ der Weylgruppe W von \mathbf{G} aufgefaßt werden kann. Genauer existiert eine zerfallende halbeinfache Algebra $\mathcal{H}(W, x)$ über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{x})$ (wobei x transzendent über \mathbb{Q} sei), welche unter $x \mapsto 1$ zur Gruppenalgebra $\mathbb{Q}W$ und unter $x \mapsto q$ zu $\mathcal{H}(W, q)$ spezialisiert. Aus den Arbeiten von Howlett–Lehrer und Lusztig wissen wir, daß ein ähnliches Phänomen auch in einer allgemeineren Situation auftritt. Ist nämlich \mathbf{L} das Levikomplement einer rationalen parabolischen Untergruppe von \mathbf{G} und λ ein kuspider unipotenter Charakter von \mathbf{L}^F , so bildet $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ eine Weylgruppe, und die kommutierende Algebra des $\mathbb{Q}\mathbf{G}^F$ -Moduls mit Charakter $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ ist eine Deformation der Gruppenalgebra von $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Diese Tatsache zieht natürlich präzise und grundlegende Konsequenzen über die Struktur des Moduls $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ nach sich.

Ersetzt man die Klasse der Levikomplemente rationaler parabolischer Untergruppen durch die Klasse der “ d -zerfallenden Leviuntergruppen” \mathbf{L} von \mathbf{G} (wobei die Levikomplemente rationaler parabolischer Untergruppen nun den Spezialfall der “1-zerfallenden Leviuntergruppen” bilden), sowie die kuspidalen unipotenten Charaktere durch die d -kuspidalen unipotenten Charaktere

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20, 20G.

Der zweite Autor dankt der deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung

S. M. F.

Astérisque 212* (1993)

λ von \mathbf{L}^F , und versieht man jeden unipotenten Charakter von \mathbf{G}^F mit einem geeigneten Vorzeichen, so scheint eine Verallgemeinerung der Howlett–Lehrer–Lusztig–Theorie auf diese umfassende Situation möglich. In [8] haben wir etwa gezeigt, daß die Zerlegung des virtuellen Deligne–Lusztig Charakters $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ genau durch die Zerlegung eines induzierten Charakters in der entsprechenden Weylgruppe beschrieben wird. Dabei zeigt es sich (siehe [8]), daß für ein solches d -kuspidales Paar (\mathbf{L}, λ) die Gruppe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ zwar im Allgemeinen keine Coxetergruppe, aber jedenfalls noch eine komplexe Spiegelungsgruppe ist.

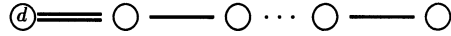
Der Deligne–Lusztig Charakter $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ ist als der Charakter des Lefschetz-schen virtuellen Moduls $\sum_n (-1)^n H_c^n(X, \mathcal{F}; \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ für eine ℓ -adische Garbe \mathcal{F} auf einer “Deligne–Lusztig Varietät” X definiert. Die Tatsache, daß für eine geeignete Wahl von X und \mathcal{F} die Endomorphismenalgebra des graduierten $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F$ -Moduls $H_c^*(X, \mathcal{F}; \bar{\mathbb{Q}}_\ell) := \bigoplus_n H_c^n(X, \mathcal{F}; \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ so etwas wie eine Heckealgebra für $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ sein sollte, ist Teil allgemeiner Vermutungen (siehe [6]). Im Paragraphen 1 geben wir eine detaillierte und erweiterte Darstellung dieser Vermutungen in dem Spezialfall endlicher reduktiver Gruppen.

Die Paragraphen 2 bis 6 dieser Arbeit können als Untermauerung der vorgestellten Vermutungen angesehen werden. So geben wir für jede Gruppe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ (für d -kuspidaale Paare (\mathbf{L}, λ)) eine Präsentation durch Erzeugende und Relationen, welche durch Dynkindiagramm-ähnliche Bilder beschrieben werden können und somit Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Dynkindiagramme darstellen. Wir zeigen in fast allen Fällen (bis auf wenige exzeptionelle Diagramme, für die bisher kein Beweis gefunden wurde), daß aus diesen Diagrammen verallgemeinerte generische Heckealgebren für die Gruppen $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ konstruiert werden können. Wie erwartet erhält man diese als “ d -Deformationen” der Gruppenalgebra von $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$: die Parameter müssen durch d -te Einheitswurzeln ersetzt werden (und nicht mehr durch 1 wie im gewöhnlichen Fall), um die Gruppenalgebra zurückzugewinnen. Dies erklärt auch den Namenszusatz “zyklotomisch” für diese neuen Algebren.

Die Einführung der gewöhnlichen Heckealgebra $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n, x)$ erfolgt üblicherweise mit Hilfe des maximal zerfallenden Torus \mathbf{T} von $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Als einfachstes Beispiel unserer Konstruktion sei hier die natürliche Verallgemeinerung dieser klassischen Heckealgebra vorgestellt. In der Sprechweise von [7] und [8] kann der maximal zerfallende Torus \mathbf{T} als minimale 1-zerfallende Untergruppe von $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ aufgefaßt werden, und es gilt $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}, 1) = \mathfrak{S}_n$. Ist d ein Teiler von n , also etwa $n = dm$, und $w_d \in \mathfrak{S}_n$ ein Produkt von m disjunkten Zykeln der Länge d , so ist ein maximaler Torus \mathbf{S} vom Typ w_d eine minimale d -zerfallende Untergruppe von \mathbf{G} , und es gilt $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{S}, 1) \simeq C_{\mathfrak{S}_n}(w_d) \simeq Z_d \wr \mathfrak{S}_m$. Wir konstruieren eine Heckealgebra $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n, d, x)$ als d -Deformation der Grup-

penalgebra von $Z_d \wr \mathfrak{S}_m$ wie folgt.

Das Kranzprodukt $Z_d \wr \mathfrak{S}_m$ hat eine Präsentation durch Erzeugende und Relationen, welche durch das folgende "zyklotomische Diagramm"



dargestellt werden kann, dessen Knoten mit $s, t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ bezeichnet seien. Dies bedeutet, daß $Z_d \wr \mathfrak{S}_m$ durch Elemente $s, t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ erzeugt wird, welche den üblichen durch das Diagramm implizierten Zopfrelationen gehorchen sowie $s^d = 1$ und $t_i^2 = 1$ für $i = 1, 2, \dots, m - 1$ erfüllen.

Die Algebra $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n, d, x)$ sei nun die durch Elemente $S, T_1, T_2, \dots, T_{m-1}$ erzeugte $\mathbb{Z}[x]$ -Algebra mit denselben Zopfrelationen zwischen den Erzeugern sowie

$$\begin{cases} (S - 1)(S - x)(S - x^2) \cdots (S - x^{d-1}) = 0, \\ (T_i - 1)(T_i + x^d) = 0 \end{cases} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Offensichtlich gilt dann $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n, d, e^{2i\pi/d}) = \mathbb{Z}[e^{2i\pi/d}][Z_d \wr \mathfrak{S}_m]$, und für $d = 1$ erhalten wir durch Ersetzen von T_i durch $-T_i$ die übliche Heckealgebra zurück.

Es bleibt zu zeigen, daß geeignete Spezialisierungen dieser Algebra die Endomorphismenalgebra einer Kohomologie $H_c^*(X, \mathcal{F}; \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ für geeignete (X, \mathcal{F}) wie oben ergeben. Ist dies der Fall, so können wie im klassischen Fall die generischen Grade der unipotenten Charaktere von \mathbf{G}^F durch eine explizite Formel aus den generischen Graden der zyklotomischen Heckealgebra berechnet werden. Dies ermöglicht umgekehrt die Bestimmung der Spezialisierungsparameter unserer Algebren durch Vergleich mit den tatsächlichen Graden unipotenter Charaktere.

In Paragraph 2 ermitteln wir auf diese Art und Weise die Werte der Parameter in allen Fällen, in denen die relative Weylgruppe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda})$ zyklisch ist. Es stellt sich heraus, daß diese sämtlich Produkte einer ganzzahlige Potenzen von \sqrt{q} mit einer Einheitswurzel sind. Die Parameter im allgemeinen nicht-zyklischen Fall sollten durch Zusammensetzen der zyklischen Fälle erhalten werden. Dies können wir für einige exzeptionelle Diagramme prüfen, indem wir die errechneten generischen Grade mit den Graden unipotenter Charaktere vergleichen. Die Anwendung der Formeln verlangt die Kenntnis der irreduziblen Matrixdarstellungen der zyklotomischen Algebren. Da wir diese für den Existenzbeweis für einige der exzeptionellen Algebren sowieso bestimmen müssen (siehe Paragraph 5), können wir auch die Formel für die generischen Grade auswerten, und damit zumindest in diesen Fällen die obige Aussage über die Grade verifizieren. Diese Übereinstimmung können wir nicht für reinen Zufall halten. Es sei angemerkt, daß unsere Parametersätze zumindest

vermutungsweise das vollständige Spektrum der Operation der Frobeniusabbildung F auf $H_c^*(X, \mathcal{F}; \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ angeben (siehe Bemerkungen 2.10–2.19 und die Tabelle 8.1).

Eine weitere wichtige Invariante der zyklotomischen Algebren ist der minimale Zerfällungskörper. Im Paragraphen 6 bestimmen wir für alle irreduziblen Charaktere der zyklotomischen Algebren den genauen Charakterkörper. Während dieser im klassischen Fall der Heckealgebren höchstens quadratisch über dem Parameterkörper ist, kann er in unserem Fall beliebig großen Grad haben.

Lusztig hatte schon vor langer Zeit bemerkt, daß sich die endlichen nicht-kristallographischen Coxetergruppen bei richtiger Interpretation wie Weylgruppen mysteriöser unbekannter Objekte verhalten, die "Verallgemeinerungen" der reduktiven Gruppen sein sollten (siehe etwa [2]). Im Anhang gibt Lusztig (eine ihm schon seit 1982 bekannte) Definition der Menge unipotenter Charaktere dieser Objekte für jede endliche nicht-kristallographische Coxetergruppe.¹ Im siebten Paragraphen zeigen wir, daß diese Coxetergruppen ebenfalls Ursprung von zyklotomischen Untergruppen, Diagrammen (siehe 3D) und Heckealgebren sind und weisen nach, daß die Mengen unipotenter Charaktere wie im Fall der Weylgruppen eine Φ -Harish-Chandra Theorie für jeden irreduziblen Teiler Φ des Ordnungspolynoms erfüllen.

Die Tatsache, daß unsere neuen Algebren Spezialisierungen zu den Endomorphismenalgebren einer Kohomologie $H_c^*(X, \mathcal{F}; \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ besitzen, ist zur Zeit nur in einigen wenigen Fällen von Lusztig bewiesen worden. Der bekannteste solche Fall ist der der zu den Coxeter-elementen der Weylgruppe W assoziierten Varietäten (siehe [17]), und dieser war ein wesentlicher Anstoß für unsere Arbeit.

1. VERMUTUNGEN ÜBER BLÖCKE ENDLICHER GRUPPEN

Der Ursprung der folgenden Vermutungen ist eine allgemeine Vermutung über Blöcke abstrakter endlicher Gruppen (siehe [6]), die Aussagen über die Struktur (bis auf Äquivalenz) der derivierten beschränkten Kategorie der ℓ -adischen Algebra des Blocks einer beliebigen endlichen Gruppe mit abelscher Defektgruppe macht. Diese abstrakte Vermutung führte zu genaueren Vorstellungen in dem speziellen Fall endlicher reduktiver Gruppen, die zuerst im letzten Abschnitt von [6] formuliert wurden. Diese Vermutungen wurden zum Teil auch auf der Konferenz zu Ehren von Charles Curtis an der Universität Oregon im September 1991 vorgestellt.

¹Bei der Erstellung der vorliegenden Arbeit fanden wir unabhängig davon dieselben Mengen unipotenter Charaktere.

Wir führen zunächst die benötigten Bezeichnungen ein. Sei \mathbf{G} eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe über $\overline{\mathbb{F}}_q$, versehen mit einem Frobeniusendomorphismus F , welcher eine rationale Struktur über \mathbb{F}_q erklärt. Wir schließen im Folgenden die Suzuki- und die Reegruppen aus, um die Darstellung zu vereinfachen. Zur korrekten Formulierung der Vermutungen für die letzteren Gruppen muß statt über \mathbb{Z} über dem Grundring $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ mit $p = 2$ oder $p = 3$ gearbeitet werden (siehe hierzu [7]). Die Zahl der Wurzeln von \mathbf{G} sei mit $2N$ bezeichnet.

Weiter sei \mathbf{P} eine parabolische Untergruppe von \mathbf{G} mit unipotentem Radikal \mathbf{U} und mit einem F -stabilen Levikomplement \mathbf{L} . Mit

$$Y(\mathbf{U}) := \{g(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})) \in \mathbf{G}/(\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})); g^{-1}F(g) \in F(\mathbf{U})\}$$

sei die zugehörige Deligne–Lusztig Varietät bezeichnet (siehe etwa [20]). Wir erinnern daran, daß \mathbf{G}^F durch Linksmultiplikation und \mathbf{L}^F durch Rechtsmultiplikation auf $Y(\mathbf{U})$ operieren. Man weiß (loc. cit.), daß $Y(\mathbf{U})$ ein \mathbf{L}^F -Torseur auf einer Varietät $X(\mathbf{U})$ ist, welche glatt von der reinen Dimension $\dim(\mathbf{U}/\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U}))$ und zumindest für genügend großes q affin ist. Insbesondere operiert \mathbf{G}^F auf $X(\mathbf{U})$ von links. Für einen kommutativen Ring \mathcal{O} ist das Bild der konstanten Garbe \mathcal{O} auf $Y(\mathbf{U})$ unter dem endlichen Morphismus $\pi: Y(\mathbf{U}) \rightarrow X(\mathbf{U})$ eine lokal konstante Garbe $\pi_*(\mathcal{O})$ auf $X(\mathbf{U})$, welche wir mit $\mathcal{F}_{\mathcal{O}\mathbf{L}^F}$ bezeichnen wollen.

Wählt man speziell als \mathbf{P} eine Boreluntergruppe $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{T}$, für die \mathbf{B} und $F(\mathbf{B})$ sich in relativer Lage w für ein $w \in W$ befinden (siehe [13], 1.2), so setzen wir $X_w := X(\mathbf{U})$.

Sei nun ℓ eine Primzahl, welche q nicht teilt, und \mathcal{O} der Ring der ganzen Zahlen einer endlichen Erweiterung des Körpers \mathbb{Q}_ℓ der ℓ -adischen Zahlen. Für jede \mathbf{G}^F -äquivariante torsionsfreie \mathcal{O} -Garbe \mathcal{F} auf $X(\mathbf{U})$ bezeichne $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F})$ die Algebra der Endomorphismen des ℓ -adischen Kohomologiekomplexes $\mathrm{R}\Gamma_c(X(\mathbf{U}), \mathcal{F})$, aufgefaßt als Element der derivierten beschränkten Kategorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}\mathbf{G}^F)$ der Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ -Moduln. Zur Abkürzung setzen wir $\mathrm{R}\Gamma_c(Y(\mathbf{U})) := \mathrm{R}\Gamma_c(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_{\mathcal{O}\mathbf{L}^F})$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U})) := \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_{\mathcal{O}\mathbf{L}^F})$. Wir bemerken, daß die Algebra $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))$ die Gruppenalgebra $\mathcal{O}\mathbf{L}^F$ als Teilalgebra enthält. Für eine Erweiterung \mathbf{K} von \mathcal{O} sei $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}) := \mathbf{K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F})$.

Schließlich werde für einen Komplex $\Gamma = (\dots \rightarrow \Gamma^{n-1} \rightarrow \Gamma^n \rightarrow \Gamma^{n+1} \rightarrow \dots)$ von \mathcal{O} -Moduln das gewöhnliche \mathcal{O} -Dual von Γ mit Γ^* bezeichnet: es ist $\Gamma^{*m} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Gamma^{-m}, \mathcal{O})$, und die Differentiale werden durch \mathcal{O} -Transposition definiert.

1A. Vermutungen über ℓ -Blöcke.

Die Ausgangsdaten.

- (H1) Sei ℓ eine von p verschiedene Primzahl, welche weder $|Z(\mathbf{G})/Z^o(\mathbf{G})|$ noch $|Z(\mathbf{G}^*)/Z^o(\mathbf{G}^*)|$ teilt, und die zudem gut für \mathbf{G} ist.
- (H2) Sei \mathcal{O} der Ring der ganzen Zahlen einer endlichen unverzweigten Erweiterung K des Körpers der ℓ -adischen Zahlen \mathbb{Q}_ℓ mit Restklassenkörper k , so daß die endliche Gruppenalgebra $k\mathbf{G}^F$ zerfällt.
- (H3) Sei e ein primitives zentrales Idempotent von $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ (ein ℓ -Block von \mathbf{G}^F) mit abelscher Defektgruppe D . Sei $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(D)$ und f ein Block von \mathbf{L}^F , so daß (D, f) ein e -Subpaar von \mathbf{G}^F ist.

Die Voraussetzung (H1) erzwingt insbesondere, daß \mathbf{L} eine rationale Leviuntergruppe von \mathbf{G} ist.

Weiter gilt $N_{\mathbf{G}^F}(D, f) = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, f)$, und wir bezeichnen die zugehörige relative Weylgruppe mit $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, f) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, f)/\mathbf{L}^F$. Aufgrund bekannter Eigenschaften maximaler Subpaare (siehe etwa [1]) ist D eine ℓ -Sylowuntergruppe von $Z(\mathbf{L})^F$, und ℓ teilt $|W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, f)|$ nicht.

ℓ -Vermutungen.

Es existieren eine parabolische Untergruppe von \mathbf{G} mit unipotentem Radikal \mathbf{U} und Levikomplement \mathbf{L} und ein endlicher Komplex

$$\Upsilon = (\dots \rightarrow \Upsilon^{n-1} \rightarrow \Upsilon^n \rightarrow \Upsilon^{n+1} \rightarrow \dots)$$

von $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F, \mathcal{O}\mathbf{L}^F)$ -Bimoduln, welche endlich erzeugt und projektiv sowohl als $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ - wie auch als $\mathcal{O}\mathbf{L}^F$ -Moduln sind, mit den folgenden Eigenschaften:

- (ℓ -V1) Aufgefaßt als Objekt der derivierten beschränkten Kategorie der Kategorie der $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F, \mathcal{O}\mathbf{L}^F)$ -Bimoduln ist Υ isomorph zu $R\Gamma_c(Y(\mathbf{U}))$. Insbesondere ist für jedes n die n -te Homologiegruppe von Υ als $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F, \mathcal{O}\mathbf{L}^F)$ -Bimodul isomorph zu $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H_c^n(Y(\mathbf{U}), \mathbb{Z}_\ell)$.
- (ℓ -V2) Das Idempotent e operiert als die Identität auf dem Komplex $\Upsilon.f$.
- (ℓ -V3) Bezeichne $\Delta(D)$ die diagonale Einbettung von D in $\mathbf{G}^F \times \mathbf{L}^F$. Für jedes n ist der $\mathcal{O}[\mathbf{G}^F \times \mathbf{L}^F]$ -Modul $\Upsilon^n.f$ relativ $\Delta(D)$ -projektiv, und seine Einschränkung auf $\mathcal{O}\Delta(D)$ bildet einen Permutationsmodul für $\Delta(D)$.
- (ℓ -V4) • Die Struktur als Komplex von $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F e, \mathcal{O}\mathbf{L}^F f)$ -Bimoduln von $\Upsilon.f$ setzt sich zu einer Struktur als Komplex von $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F e, f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U})))f$ -Bimoduln fort, die sämtlich projektiv als rechte $f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f$ -Moduln sind.
 - Die Komplexe $(\Upsilon.f \otimes_{f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f} f.\Upsilon^*)$ und $\mathcal{O}\mathbf{G}^F e$ sind homotopieäquivalent als Komplexe von $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F e, \mathcal{O}\mathbf{G}^F e)$ -Bimoduln.
 - Die Komplexe $(f.\Upsilon^* \otimes_{\mathcal{O}\mathbf{G}^F e} \Upsilon.f)$ und $f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f$ sind homotopieäquivalent als Komplexe von $(f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f, f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f)$ -Bimoduln.

(ℓ -V5) Die Algebra $f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f$ ist zu der Blockalgebra $\mathcal{O}N_{\mathbf{G}^F}(D, f)f$ isomorph.

Wir machen hierzu einige Bemerkungen und geben Konsequenzen der vorgestellten Vermutungen an.

1. Unter Benutzung des Resultats [22] von Jeremy Rickard kann gezeigt werden, daß ein Komplex \mathbf{Y} von $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F, \mathcal{O}\mathbf{L}^F)$ -Bimoduln existiert, der (ℓ -V1) erfüllt, so daß zudem für jede ganze Zahl n der $\mathcal{O}[\mathbf{G}^F \times \mathbf{L}^F]$ -Modul \mathbf{Y}^n relativ $\Delta(S)$ -projektiv ist und seine Einschränkung auf $\mathcal{O}\Delta(S)$ ein Permutationsmodul für $\Delta(S)$ wird, wobei $\Delta(S)$ die diagonale Einbettung einer ℓ -Sylowuntergruppe S von \mathbf{L}^F in $\mathbf{G}^F \times \mathbf{L}^F$ bezeichnet. (ℓ -V3) folgt dann aus (ℓ -V2).

2. Aus (ℓ -V4) folgt, daß die derivierten beschränkten Kategorien $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}\mathbf{G}^F e)$ und $\mathcal{D}^b(f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f)$ äquivalent sind, also nach (ℓ -V5):

(ℓ -V6) $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}\mathbf{G}^F e)$ und $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}N_{\mathbf{G}^F}(D, f)f)$ sind äquivalent.

Diese letzte Äquivalenz ist ein besonderer Fall der in [6] vorgestellten allgemeinen Vermutung über abstrakte endliche Gruppen.

3. Für jeden Kettenabbildungsendomorphismus α von \mathbf{Y} sei

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{Y}}(\alpha) := \sum_n (-1)^n \mathrm{tr}_{\mathbf{Y}^n}(\alpha),$$

wobei $\mathrm{tr}_{\mathbf{Y}^n}(\alpha)$ die Spur von α als Endomorphismus des freien \mathcal{O} -Moduls \mathbf{Y}^n bezeichnet. Da $f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f$ und $\mathrm{End}_{\mathcal{O}\mathbf{G}^F e}(\mathbf{Y})$ übereinstimmen, sieht man dann leicht:

(ℓ -V7) Die Linearform $\mathrm{tr}_{\mathbf{Y}}$ versieht $f\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(Y(\mathbf{U}))f$ mit der Struktur einer symmetrischen \mathcal{O} -Algebra.

4. Sei $H_c^n(Y(\mathbf{U}), K) := K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H_c^n(Y(\mathbf{U}), \mathbb{Z}_\ell)$. Wir haben

$$\mathrm{R}\Gamma_c(Y(\mathbf{U}), K) = \bigoplus_n H_c^n(Y(\mathbf{U}), K)[-n],$$

und aus (ℓ -V4) folgt:

(ℓ -V8) Die Algebra $f\mathcal{H}_K(Y(\mathbf{U}))f$ ist halbeinfach. Weiter sind die $\mathbf{K}\mathbf{G}^F e$ -Moduln $H_c^n(Y(\mathbf{U}), K)$ paarweise disjunkt und $f\mathcal{H}_K(Y(\mathbf{U}))f$ ist die Endomorphismenalgebra des endlichen graduierten $\mathbf{K}\mathbf{G}^F e$ -Moduls $\mathrm{R}\Gamma_c(Y(\mathbf{U}), K)$.

5. Sei S eine ℓ -Untergruppe von D mit $\mathbf{G}_S := C_{\mathbf{G}}(S)$ und $\mathbf{U}_S := \mathbf{U} \cap \mathbf{G}_S$. Sei weiter e_S der Block von $\mathbf{G}_S^F = C_{\mathbf{G}^F}(S)$ mit $(S, e_S) \subseteq (D, f)$. Dann

stehen $(\mathbf{G}_S, e_S, \mathbf{L}^F, f, \mathbf{U}_S)$ in derselben Beziehung wie $(\mathbf{G}, e, \mathbf{L}^F, f, \mathbf{U})$, und es existiert ein Komplex Υ_S mit den Eigenschaften $(\ell\text{-Vi})$ ($i = 1, \dots, 5$) (bei geeigneten Ersetzungen).

Es scheint wahrscheinlich, daß $k \otimes_{\mathcal{O}} \Upsilon_S$ das Bild von Υ (aufgefaßt als Komplex von $\mathcal{O}[\mathbf{G}^F \times \mathbf{L}^F]$ -Moduln) unter dem Brauermorphismus Br_S ist.

Die vorangegangenen Überlegungen bilden vermutlich den Ausgangspunkt einer Erklärung für die als Isotypie bezeichnete Korrespondenz zwischen e und f (siehe [6] und [8]).

1B. Vermutungen über unipotente Charaktere und zyklotomische Heckealgebren.

Wir setzen nun voraus, daß ℓ "groß" ist, genauer, daß ℓ nicht das Produkt aus der Ordnung der Weylgruppe W von \mathbf{G} mit der Ordnung des durch F induzierten äußeren Automorphismus von W teilt.

Wir bezeichnen weiterhin mit \mathcal{O} den Ring der ganzen Zahlen einer endlichen unverzweigten Erweiterung K des Körpers der ℓ -adischen Zahlen \mathbb{Q}_ℓ , mit Restklassenkörper k über dem die Gruppenalgebra $k\mathbf{G}^F$ zerfällt.

Mit $e_\ell^{\mathbf{G}^F}$ sei das zu der Teilmenge $\mathcal{E}_\ell(\mathbf{G}^F, 1)$ der Menge der irreduziblen Charaktere von \mathbf{G}^F assoziierte zentrale Idempotent von $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ bezeichnet (siehe [9]). Wir nennen die primitiven zentralen Idempotent e mit $ee_\ell^{\mathbf{G}^F} \neq 0$ *unipotente Blöcke von $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$* .

Dann gilt das folgende:

- (siehe [7], 3.13) Es existiert eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl d , für die das d -te zyklotomische Polynom Φ_d die polynomiale Ordnung von \mathbf{G}^F teilt sowie $\Phi_d(q)$ von ℓ geteilt wird. Die ℓ -Untergruppen von \mathbf{G}^F liegen, bis auf \mathbf{G}^F -Konjugation, sämtlich in einer Φ_d -Sylowuntergruppe von \mathbf{G} .

- (siehe [8]) Ist e ein unipotenter Block mit maximalem Subpaar (D, f) (wobei D eine Defektgruppe von e und f eine Block von $\mathcal{O}C_{\mathbf{G}^F}(D)$ ist), so bildet $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(D)$ eine d -zerfallende Leviuntergruppe von \mathbf{G} (also $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(\mathbf{L})_d)$), D ist eine ℓ -Untergruppe von $Z(\mathbf{L}^F)$, und der kanonische Charakter von f ist ein d -kuspider unipotenter Charakter λ von \mathbf{L}^F . Weiter stimmt die Menge der irreduziblen Charaktere von $\mathcal{O}\mathbf{G}^F e$ mit der Menge der irreduziblen Konstituenten von $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\theta\lambda)$ überein, wobei θ die Menge der Charaktere von $\mathbf{L}^F/[\mathbf{L}, \mathbf{L}]^F$ von ℓ -Potenzordnung durchläuft.

Sei d eine natürliche Zahl, für die Φ_d die polynomiale Ordnung von \mathbf{G}^F teilt (siehe [7]), und ℓ ein Teiler von $\Phi_d(q)$.

Sei (\mathbf{L}, λ) ein d -kuspidales Paar von \mathbf{G}^F (siehe [8]). Der Charakter λ ist ein Charakter vom ℓ -Defekt Null von $\mathbf{L}^F/Z(\mathbf{L}^F)$. Daher existiert ein eindeutig bestimmter \mathcal{O} -freier $\mathcal{O}\mathbf{L}^F$ -Modul M_λ mit Charakter λ (M_λ ist ein projektiver $\mathcal{O}[\mathbf{L}^F/Z(\mathbf{L}^F)]$ -Modul). Der natürliche Morphismus $\mathcal{O}\mathbf{L}^F \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}}(M_\lambda)$ ist

surjektiv und definiert eine torsionsfreie \mathcal{O} -Garbe auf $X(\mathbf{U})$, welche wir mit \mathcal{F}_λ bezeichnen.

Sei $\text{Uch}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L}, \lambda))$ die Menge aller (unipotenten) irreduziblen Charaktere γ von \mathbf{G}^F mit $(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda), \gamma)_{\mathbf{G}^F} \neq 0$. Für jedes $\gamma \in \text{Uch}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L}, \lambda))$ bezeichne $e_\gamma^{\mathbf{G}^F}$ das zu γ gehörige primitive zentrale Idempotent von $\mathbf{K}\mathbf{G}^F$. Sei weiter

$$e_{(\mathbf{L}, \lambda)}^{\mathbf{G}^F} := \sum_{\gamma \in \text{Uch}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L}, \lambda))} e_\gamma^{\mathbf{G}^F}.$$

Beschränkt man sich auf die unipotenten Charaktere, so ziehen die “ ℓ -Vermutungen” die folgenden Konsequenzen nach sich.

d -Vermutungen.

Es existieren eine parabolische Untergruppe von \mathbf{G} mit unipotentem Radikal \mathbf{U} und Levikomplement \mathbf{L} sowie ein endlicher Komplex

$$\Xi = (\dots \rightarrow \Xi^{n-1} \rightarrow \Xi^n \rightarrow \Xi^{n+1} \rightarrow \dots)$$

endlich erzeugter projektiver $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ -Moduln mit den folgenden Eigenschaften:

- (d -V1) Aufgefaßt als Objekt der derivierten beschränkten Kategorie der Kategorie der $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ -Moduln ist Ξ isomorph zu $\text{R}\Gamma_c(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$. Insbesondere ist für jedes n die n -te Homologiegruppe von Ξ als $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ -Modul isomorph zu $\text{H}_c^n(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$.
- (d -V2) • Die Struktur als Komplex von $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ -Moduln von $\Xi.f$ setzt sich zu einer Struktur als Komplex von $(\mathcal{O}\mathbf{G}^F, \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda))$ -Bimoduln fort, welche sämtlich projektiv als rechte $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$ -Moduln sind.
• Die Komplexe $(\Xi^* \otimes_{\mathcal{O}\mathbf{G}^F} \Xi)$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$ sind homotopieäquivalent als Komplexe von $(\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda), \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda))$ -Bimoduln.
- (d -V3) Die Algebra $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$ ist zu der Gruppenalgebra $\mathbf{K}W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$ isomorph (hierbei sei an $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) := N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ erinnert).

Die folgenden Eigenschaften sind Konsequenzen der obigen Vermutungen:

- (d -V4) Es gilt

$$\text{R}\Gamma_c(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda; \mathbf{K}) = \bigoplus_n \text{H}_c^n(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda; \mathbf{K})[-n].$$

Die Kohomologiegruppen $\text{H}_c^n(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda; \mathbf{K})$ sind als $\mathbf{K}\mathbf{G}^F$ -Moduln paarweise disjunkt, und die Algebra $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda) := \mathbf{K} \otimes_{\mathcal{O}}$

$\mathcal{H}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$ stimmt mit der \mathbf{G}^F -Endomorphismenalgebra des graduierten Moduls $R\Gamma_c(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda; \mathbf{K})$ überein.

(d-V5) Obige graduierte Moduln induzieren eine Äquivalenz von Kategorien graduierter Moduln über den Algebren $\mathbf{K}\mathbf{G}^F e_{(\mathbf{L}, \lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ bzw. $\mathbf{K}W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Insbesondere (siehe [8], Fundamental Theorem) existiert eine Isometrie

$$(1.1) \quad I_{(\mathbf{L}, \lambda)}^{\mathbf{G}^F} : \mathbb{Z}\text{Irr}(W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Uch}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L}, \lambda)),$$

so daß

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda) = I_{(\mathbf{L}, \lambda)}^{\mathbf{G}^F} \cdot \text{Ind}_{\{1\}}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)}(1)$$

gilt.

1C. Vermutungen über generische zyklotomische Heckealgebren.

Ermutigt durch die verschiedenen Resultate in [8] (so etwa das Fundamental Theorem und die Kongruenzen modulo Φ_d , welche von der Isometrie $I_{(\mathbf{L}, \lambda)}^{\mathbf{G}^F}$ erhalten werden), durch die bekannten Resultate für $d = 1$ (siehe hierzu etwa [19]) und die Überzeugung, daß sie auch im Allgemeinen gelten, sowie schließlich durch die Berechnung einiger Beispiele durch G. Lusztig (siehe [17]), verfeinern wir die vorangegangenen Vermutungen weiter.

Vorbereitung: Einige elementare Tatsachen über halbeinfache Algebren.

Wir erinnern zunächst an einige Bezeichnungen und stellen ohne Beweise ein paar einfache und grundlegende Tatsachen über halbeinfache Algebren zusammen, die wir zur Formulierung unserer Vermutungen benötigen. Die entsprechenden Aussagen sind in [12], §9, enthalten, bzw. können leicht daraus hergeleitet werden.

Sei R ein kommutativer Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und \mathcal{H} eine R -freie R -Algebra. Wir nehmen an, daß $\mathcal{H}_K := K \otimes_R \mathcal{H}$ eine zerfallende halbeinfache Algebra sei. Als solche ist sie sogar symmetrisch, und die symmetrisierenden Formen sind durch alle K -Linearkombinationen $\sum_{\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K)} \delta_\chi \chi$ irreduzibler Charaktere von \mathcal{H}_K mit $\delta_\chi \neq 0$ für alle $\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K)$ gegeben.

Sei t eine zentrale Linearform auf \mathcal{H} , also eine Form $t: \mathcal{H} \rightarrow R$ mit $t(hh') = t(h'h)$ für alle $h, h' \in \mathcal{H}$. Dann gilt $t = \sum_{\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K)} \delta_\chi(t) \chi$ mit gewissen $\delta_\chi(t) \in K$, und wir nennen $\delta_\chi(t)$ den *relativen Grad* von χ bezüglich t . Man beachte, daß $\delta_\chi(t)$ linear von t abhängt, und insbesondere bis auf einen Skalar nur von $\ker(t)$. Nach Multiplikation von t mit einem geeigneten Element aus R liegen also die relativen Grade schon in R .

Sei $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine R -Basis von \mathcal{H} . Wir nennen $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ *quasisymmetrisch*, wenn

- (1) $T_1 = 1$ ist und
- (2) die Formen $t: \mathcal{H} \rightarrow R$ mit $t(T_i) = 0$ für $i \neq 1$ zentral sind (mit anderen Worten: es gilt $hh' - h'h \in \sum_{i \neq 1} RT_i$).

Ist $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ quasisymmetrisch, so heißen die relativen Grade bezüglich der durch $t(T_1) = 1$ und $t(T_i) = 0$ falls $i \neq 1$ definierten Form t die *relativen Grade* von $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$. Aus den vorangegangenen Definitionen folgt:

1.2. Lemma. *Der Vektor $(\delta_\chi(t))_\chi$ der relativen Grade von $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung in K des linearen Gleichungssystems*

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K)} \delta_\chi(t) \chi(T_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1, \\ 0 & \text{falls } i \neq 1. \end{cases}$$

Sei weiterhin $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ quasisymmetrisch. Wir nehmen zudem an, daß die zugehörige zentrale Form t (mit $t(T_1) = 1$ und $t(T_i) = 0$ falls $i \neq 1$) symmetrisch ist (d.h. alle ihre relativen Grade verschwinden nicht). Die *duale Basis* von $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ ist dann die durch die Bedingungen

$$t(T_i T'_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

definierte Basis $(T'_i)_{1 \leq i \leq k}$ von \mathcal{H}_K . Die relativen Grade von $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ werden dann offensichtlich explizit durch die Gleichungen

$$(1.3) \quad \delta_\chi(t) = \frac{\chi(1)}{\sum_i \chi(T_i) \chi(T'_i)}$$

gegeben.

Ein Spezialfall: Endomorphismenalgebren.

Sei A eine zerfallende halbeinfache K -Algebra. Mit ${}_A \mathbf{mod}^{(\mathbb{Z})}$ bezeichnen wir die Kategorie der endlich erzeugten graduierten A -Moduln.

Von nun an sei $H = \bigoplus_n H^n$ ein Objekt aus ${}_A \mathbf{mod}^{(\mathbb{Z})}$, dessen homogene Komponenten disjunkt sind, also $\text{Hom}_A(H^n, H^m) = \{0\}$ für $n \neq m$ erfüllen (oder, mit anderen Worten, für die $\text{Hom}_{{}_A \mathbf{mod}^{(\mathbb{Z})}}(H, H[i]) = \{0\}$ für $i \neq 0$ gilt). Wir bezeichnen das Bild von A in $\text{End}_K(H)$ mit A_H .

Sei nun \mathcal{H}_K die Algebra der von rechts operierenden A -Endomorphismen von H (man beachte, daß aufgrund unserer Annahme über H die graduierten

A -Endomorphismen mit den gewöhnlichen A -Endomorphismen übereinstimmen). Wir bezeichnen mit $\text{Irr}(\mathcal{H}_K; \mathbb{H}^n)$ die Menge der irreduziblen (rechten) \mathcal{H}_K -Moduln, die in \mathbb{H}^n vorkommen.

Sei $t_{\mathbb{H}}: \mathcal{H}_K \rightarrow K$ die durch

$$t_{\mathbb{H}}(h) := \text{tr}(h; \mathbb{H}) := \sum_n (-1)^n \text{tr}(h; \mathbb{H}^n)$$

definierte Linearform auf \mathcal{H}_K . Das folgende Ergebnis verallgemeinert unmittelbar den bekannten Spezialfall, in dem \mathbb{H} in einem Grad konzentriert ist.

1.4. Proposition. (1) Der Funktor $\mathbb{H} \otimes_{\mathcal{H}_K} \cdot$ ist eine Äquivalenz von Kategorien zwischen ${}_{A_{\mathbb{H}}} \mathbf{mod}^{(\mathbb{Z})}$ und ${}_{\mathcal{H}_K} \mathbf{mod}^{(\mathbb{Z})}$. Mit anderen Worten, für alle n gibt es Injektionen $\text{Irr}(\mathcal{H}_K; \mathbb{H}^n) \rightarrow \text{Irr}(A_{\mathbb{H}})$, bezeichnet als $\chi \mapsto \gamma_{\chi}$, so daß als (A, \mathcal{H}_K) -Bimoduln

$$\mathbb{H}^n = \bigoplus_{\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K; \mathbb{H}^n)} \gamma_{\chi} \otimes \chi$$

ist und $\text{Irr}(A_{\mathbb{H}})$ die disjunkte Vereinigung der γ_{χ} für $\{\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K; \mathbb{H}^n)\}_n$ ist. Weiter ist $t_{\mathbb{H}}$ eine symmetrisierende Form für \mathcal{H}_K .

(2) Ist zudem $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine R -Basis von \mathcal{H} mit $T_1 = 1$ und $t_{\mathbb{H}}(T_i) = 0$ für $i \neq 1$, und bezeichnet $(\delta_{\chi})_{\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K)}$ die Menge der zu $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ gehörigen relativen Grade, so gilt $(-1)^n \dim(\gamma_{\chi}) = \delta_{\chi} t_{\mathbb{H}}(1)$ für alle $\chi \in \text{Irr}(\mathcal{H}_K; \mathbb{H}^n)$.

d -Heckealgebra Vermutungen.

Für Bezeichnungen und Sprechweisen im Zusammenhang mit "generischen endlichen reductiven Gruppen" sei der Leser auf [7] und [8] verwiesen.

Sei \mathbb{G} eine generische endliche reductive Gruppe. Sei d eine natürliche Zahl und $(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ ein d -kuspidales Paar von \mathbb{G} . Sei weiter x eine Unbestimmte. Wir setzen $\zeta_d := e^{2i\pi/d}$ und

$$\mathbb{Z}(d, x) := \begin{cases} \mathbb{Z}[\zeta_d, \sqrt{x}, \sqrt{x}^{-1}] & \text{für ungerades } d, \\ \mathbb{Z}[\zeta_d, \sqrt{-x}, \sqrt{-x}^{-1}] & \text{für gerades } d. \end{cases}$$

Dann existiert eine Algebra $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ über dem Ring $\mathbb{Z}(d, x)$ sowie eine Linearform

$$t_x: \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x) \rightarrow \mathbb{Z}(d, x)$$

mit $t_x(1) = 1$, bezüglich der $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ die Struktur einer symmetrischen $\mathbb{Z}(d, x)$ -Algebra erlangt, mit den folgenden Eigenschaften:

(d -HV1) Die Algebra $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ ist frei über $\mathbb{Z}(d, x)$ vom Rang $|W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})|$.

Für ein geeignetes Element ξ bezeichne im Folgenden $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda); \xi)$ die durch die Spezialisierung $x \mapsto \xi$ definierte $\mathbb{Z}[\zeta_d][\sqrt{\pm\xi^{\pm 1}}]$ -Algebra.

(d-HV2) Es existiert ein Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda); \zeta_d) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\zeta_d][W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda)],$$

so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda); x) & \xrightarrow{(x \mapsto \zeta_d)} & \mathbb{Z}[\zeta_d][W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda)] \\ \downarrow t_x & & \downarrow t \\ \mathbb{Z}(d, x) & \xrightarrow{(x \mapsto \zeta_d)} & \mathbb{Z}[\zeta_d] \end{array}$$

Hierbei bezeichnet t die Form auf $\mathbb{Z}[\zeta_d][W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda)]$, welche $\sum_w a(w)w$ auf $a(1)$ abbildet.

(d-HV3) Sei $(\mathbb{G}, \mathbf{T}, F)$ ein zu \mathbb{G} assoziiertes (q, ϕ) -Tripel (siehe [8], §1.A). Sei ℓ eine Primzahl, welche groß für \mathbb{G} ist (siehe [8], 5.1) und $\Phi_d(q)$ teilt. Bezeichne \mathcal{O} den Ring der ganzen Zahlen einer geeigneten endlichen Erweiterung K von \mathbb{Q}_ℓ , welche $\mathbb{Z}[\zeta_d, \sqrt{q}]$ für ungerades d bzw. $\mathbb{Z}[\zeta_d, \sqrt{-q}]$ für gerades d umfaßt. Für eine geeignete Wahl einer zu \mathbb{L} assoziierten rationalen Leviuntergruppe \mathbf{L} von \mathbb{G} , für eine geeignete Wahl einer parabolischen Untergruppe von \mathbb{G} mit unipotentem Radikal \mathbf{U} und Levikomplement \mathbf{L} (siehe die obigen ℓ -Vermutungen) induziert der durch $x \mapsto q$ definierte Morphismus $\mathbb{Z}(d, x) \rightarrow \mathcal{O}$ einen \mathcal{O} -Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{O} \otimes \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda); x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda),$$

so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda); x) & \xrightarrow{(x \mapsto q)} & \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda) \\ \downarrow t_x & & \downarrow t_q \\ \mathbb{Z}(d, x) & \xrightarrow{(x \mapsto q)} & \mathcal{O} \end{array}$$

Hierin ist $t_q(h)$ für $h \in \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)$ durch

$$\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda))(q) t_q(h) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(h; H_c^n(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda; K)),$$

definiert, wobei $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda))$ den generischen Grad von $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda)$ bezeichnet (siehe [8]).

Wie oben bezeichnen wir den relativen Grad bezüglich t_x eines irreduziblen Charakters χ von $\mathbb{Q}(d, x) \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ mit $\delta_\chi(t_x)$.

(*d*-HV4) Es gilt $x^N \text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda})) \delta_\chi(t_x) \in \mathbb{Q}[x]$.

(*d*-HV5) Die Algebra $\mathbb{Q}(d, x) \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ ist zerfallend halbeinfach.

Aus (*d*-HV1), (*d*-HV2), (*d*-HV3) und (*d*-HV5) folgt die Existenz von Bijektionen

$$\text{Irr}(\mathbb{Q}(d, x) \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)) \simeq \text{Irr}(\mathcal{H}_K(X(\mathbf{U}), \mathcal{F}_\lambda)) \simeq \text{Irr}(KW_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})),$$

für welche wir

$$\chi \mapsto \chi_q \mapsto \chi_{\zeta_d}$$

schreiben.

Sei $\varepsilon_\chi \gamma_\chi$ das Bild von χ unter den obigen Bijektionen und der Isometrie $I_{(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})}^{\mathbb{G}}$ (siehe 1.1). Dann gilt $\varepsilon_\chi = \pm 1$ und γ_χ ist ein unipotenter Konstituent von $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda})$.

(*d*-HV6) Es gilt $\varepsilon_\chi \text{Deg}(\gamma_\chi) = \text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda})) \delta_\chi(t_x)$.

Anmerkung. Aus den *d*-Vermutungen und (*d*-HV3) folgt

$$I_{(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})}^{\mathbb{G}^F}(\chi_{\zeta_d})(1) = R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda})(1) \delta_\chi(t_q) \quad \text{für alle } \chi.$$

Weiter vermuten wir:

(*d*-HV7) Der Charakter $\boldsymbol{\lambda}$ besitzt eine Fortsetzung zum Normalisator $N_{\mathbb{G}^F}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$.

Ein spezieller Fall.

Im weiteren sei (\mathbb{G}, F) als zerfallend angenommen.

Die Zahl d sei regulär für W im Sinne von [24], §5, es existiere also ein reguläres Element der Ordnung d in W . Insbesondere teilt d dann $2N$ (siehe [24], 4.10), und es existiert ein reguläres Element w von W der Länge $2N/d$.

Nach [7] ist $d \neq 1$ regulär genau dann, wenn die Zentralisatoren der Φ_d -SyLOWuntergruppen von \mathbb{G} Tori sind. Bezeichnet \mathbf{T} einen solchen, so ist $(\mathbf{T}, 1)$ ein d -kuspidales Paar.

In diesem Fall spezialisieren sich unsere Vermutungen (*d*-HV*i*) wie folgt:

Vermutungen über reguläre Elemente.

Sei W eine Weylgruppe und d eine reguläre Zahl für W . Seien weiter x eine Unbestimmte, $\zeta_d := e^{2i\pi/d}$, und $\mathbb{Z}(d, x)$ wie oben definiert.

Dann existiert ein reguläres Element $w \in W$ der Ordnung d und der Länge $2N/d$, sowie eine Algebra $\mathcal{H}(W, w; x)$ über dem Ring $\mathbb{Z}(d, x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (reg-1) Die Algebra $\mathcal{H}(W, w; x)$ hat eine durch die Elemente $v \in C_W(w)$ indizierte Basis (T_v) mit $T_1 = 1$. Dabei liegt das Element T_w zentral in $\mathcal{H}(W, w; x)$.
- (reg-2) Die durch $t_x(T_1) := 1$ und $t_x(T_v) := 0$ für $v \neq 1$ definierte Linearform $t_x: \mathcal{H}(W, w; x) \rightarrow \mathbb{Z}(d, x)$ versieht $\mathcal{H}(W, w; x)$ mit der Struktur einer symmetrischen $\mathbb{Z}(d, x)$ -Algebra.
- (reg-3) Die Abbildung $T_v \mapsto v$ (für $v \in C_W(w)$) besitzt eine lineare Fortsetzung zu einem Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{H}(W, w; \zeta_d) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\zeta_d][C_W(w)].$$

Sei \mathbf{G} eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit Weylgruppe W , versehen mit einer zerfallenden Frobeniusabbildung F über \mathbb{F}_q .

Sei ℓ ein Primteiler von $\Phi_d(q)$, welcher $|W|$ nicht teilt. Seien weiter $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_\ell[\zeta_d, \sqrt{q}, \sqrt{q}^{-1}]$ für ungerades d bzw. $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_\ell[\zeta_d, \sqrt{-q}, \sqrt{-q}^{-1}]$ für gerades d , und K der Quotientenkörper von \mathcal{O} . Wir setzen

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X_w) := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \text{End}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{Z}_\ell \mathbf{G}^F)}(\text{R}\Gamma_c(X_w, \mathbb{Z}_\ell)).$$

- (reg-4) Der durch $x \mapsto q$ definierte Morphismus $\mathbb{Z}(d, x) \rightarrow \mathcal{O}$ induziert einen Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{H}(W, w; q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X_w)$$

derart, daß folgendes gilt:

- (a) Ist t_q die durch t_x auf $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(X_w)$ definierte Linearform, so gilt

$$\text{deg}(R_{\mathbb{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)) t_q = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\cdot; H_c^n(X_w, \mathbb{Q}_\ell)),$$

und insbesondere ist $\sum_n (-1)^n \text{tr}(T_v; H_c^n(X_w, \mathbb{Q}_\ell)) = 0$ für $v \neq 1$.

- (b) T_w wird auf F abgebildet.

Bezeichne $(T'_v)_{v \in C_W(w)}$ die zu $(T_v)_{v \in C_W(w)}$ duale Basis. Für einen irreduziblen Charakter χ von $\mathbb{Q}(d, x) \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(W, w; x)$ sei $\delta_\chi(t_x)$ sein relativer Grad.

- (reg-5) Es gilt $x^N \text{Deg}(R_{\mathbb{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)) \delta_\chi(t_x) \in \mathbb{Q}[x]$.

(reg-6) Es existieren Bijektionen

$$\text{Irr}(\mathbb{Q}(d, x) \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(W, w; x)) \simeq \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(X_w)) \simeq \text{Irr}(KC_W(w)),$$

für welche wir $\chi \mapsto \chi_q \mapsto \chi_{\zeta_d}$ schreiben.

(reg-7) Es gibt eine Bijektion $\chi \mapsto \gamma_\chi$ zwischen $\text{Irr}(\mathbb{Q}(d, x) \otimes_{\mathbb{Z}(d, x)} \mathcal{H}(W, w; x))$ und der Menge $\text{Uch}(\mathbf{G}^F, w)$ der irreduziblen Konstituenten von $R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)$, sowie eine Abbildung $\chi \mapsto \varepsilon_\chi$ ($\varepsilon_\chi = \pm 1$), so daß

(a) $R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1) = \sum_{\chi} \varepsilon_\chi \chi(1) \gamma_\chi$, und

(b) der generische Grad γ_χ durch $\varepsilon_\chi \text{Deg}(\gamma_\chi) = \text{Deg}(R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(1)) \delta_\chi(t_q)$ gegeben wird.

Im Folgenden konstruieren wir für jede endliche generische reduktive Gruppe \mathbb{G} , für jede natürliche Zahl d mit $\Phi_d(x) \parallel |\mathbb{G}|$ und jedes d -kuspidales Paar (\mathbb{L}, λ) eine Algebra $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda); x)$, welche die Bedingungen $(d\text{-HV1})$, $(d\text{-HV2})$, $(d\text{-HV4})$ und $(d\text{-HV5})$ erfüllt. Dies sollte insbesondere als Evidenz für die Richtigkeit von $(d\text{-HV3})$ angesehen werden. Ebenso finden wir im zyklischen Fall Parameter, mit denen $(d\text{-HV6})$ gilt.

2. DER ZYKLISCHE FALL

Im Vorgriff auf die in den nächsten beiden Abschnitten einzuführenden zyklotomischen Diagramme und Heckealgebren zu zyklotomischen Weylgruppen behandeln wir hier den relativ einfachen zyklischen Fall, in dem die meisten Vermutungen schon mit elementaren Methoden bewiesen werden können. Zudem sollten, falls die vorgestellten Vermutungen zutreffen, die Spezialisierungsparameter im allgemeinen Fall aus denen im zyklischen Fall zusammensetzbar sein. Wir bestimmen hier die Parameter für alle zyklischen Fälle.

2A. Die Heckealgebra für $B_1^{(d)}$.

Sei also im folgenden W die zyklische Gruppe Z_d der Ordnung d , die wir gemäß der später einzuführenden Terminologie auch $W(B_1^{(d)})$ nennen werden.

2.1. Definition. Seien $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{d-1})$ und T unabhängige Transzendenten über \mathbb{Z} . Wir nennen

$$\mathcal{H}(B_1^{(d)}, \mathbf{u}) := \mathbb{Z}[\mathbf{u}, T] / ((T - u_0) \cdots (T - u_{d-1}))$$

die zyklotomische Heckealgebra zu $W(B_1^{(d)})$ über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$. Für einen beliebigen Ring R mit Homomorphismus $\mathbb{Z}[\mathbf{u}] \rightarrow R$ sei $\mathcal{H}_R(B_1^{(d)}, \mathbf{u}) := R \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbf{u}]} \mathcal{H}(B_1^{(d)}, \mathbf{u})$.

Durch Skalierung von T können wir ohne Beschränkung $u_0 = 1$ setzen, was wir im weiteren tun werden. Offensichtlich ist $\mathcal{H}(B_1^{(d)}, \mathbf{u})$ frei über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ mit Basis

$$(1, T, T^2, \dots, T^{d-1}),$$

und wird durch

$$(2.2) \quad t: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbf{u}], \quad h = \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i \mapsto t(h) := a_0$$

zu einer symmetrischen Algebra über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, p_0^{-1}]$. Hier schreiben wir $p_i \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ für die Koeffizienten des Minimalpolynoms von T :

$$(T - u_0) \cdots (T - u_{d-1}) =: f(T) =: T^d + p_{d-1} T^{d-1} + \cdots + p_0.$$

Mit diesen Definitionen errechnet man leicht:

2.3. Bemerkung. Die zu $(1, T, \dots, T^{d-1})$ bezüglich t duale Basis von $\mathcal{H}(B_1^{(d)}, \mathbf{u})$ ist

$$\left(-\frac{1}{p_0} \sum_{k=1}^{d-i} p_{i+k} T^k \mid i = 0, \dots, d-1 \right).$$

Die d (linearen) irreduziblen Charaktere von \mathcal{H} sind durch $\chi_i: T \mapsto u_i$, $i = 0, \dots, d-1$, gegeben. Damit lassen sich die relativen Grade von \mathcal{H} bezüglich t errechnen (siehe 1C). Wir schreiben hier auch *generische Grade* für die relativen Grade.

2.4. Bemerkung. Die generischen Grade von \mathcal{H} bezüglich t sind

$$f_i := \prod_{k \neq i} \frac{u_k}{u_k - u_i}, \quad i = 0, \dots, d-1.$$

Beweis. Gemäß 1.3 haben wir

$$\frac{1}{\sum_j u_i^j \sum_{k=1}^{d-j} (-u_i^k p_{j+k} / p_0)}$$

für den linearen Charakter mit $T \mapsto u_i$ zu berechnen. Nun gilt

$$\sum_j u_i^j \sum_{k=1}^{d-j} \frac{-u_i^k p_{j+k}}{p_0} = -\frac{1}{p_0} \sum_{l=1}^d l p_l u_i^l = -\frac{u_i}{p_0} f'(u_i),$$

und mit dem Wert von p_0 erhalten wir

$$f_i = (-1)^{d-1} \prod_{k \neq i} \frac{u_k}{u_i - u_k}$$

wie behauptet. \square

Unter der Annahme, daß die zyklotomischen Algebren die Zerlegung der Deligne-Lusztig Induktion beschreiben, sollten die eben berechneten generischen Grade für geeignete Spezialisierungen der Parameter u_1, \dots, u_{d-1} bis auf ein Vorzeichen die Grade der irreduziblen Konstituenten von $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ ergeben. Ist etwa $\mathbf{L} = \mathbf{T}_c$ der Coxetertorus von \mathbf{G} , so wird $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, 1)$ zyklisch. In diesem Fall hat Lusztig auf anderem Wege die Grade der Konstituenten von $R_{\mathbf{T}_c}^{\mathbf{G}}(1)$ berechnet [17]. Seine Formeln stimmen bis auf das Vorzeichen genau mit der in Bemerkung 2.4 erhaltenen überein. Sein Beweis setzt allerdings voraus, daß das Produkt der zugehörigen Eigenwerte des Frobenius gleich dem p -Anteil des Index $|\mathbf{G}^F|/|\mathbf{L}^F|$ ist. Dies trifft in den von ihm untersuchten Fällen zu, gilt aber im allgemeinen nicht.

2.5. Bemerkung. Sei K ein algebraischer Abschluß des Quotientenkörpers von $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$. Dann ist $\mathcal{H}_K(B_1^{(d)}, \mathbf{u})$ isomorph zu der Gruppenalgebra $KW(B_1^{(d)})$.

Beweis. Wir sahen bereits, daß \mathcal{H} frei von der Dimension d über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ ist. Da weiter \mathcal{H} unter der Spezialisierung $u_k \mapsto e^{2i\pi k/d}$ in die Gruppenalgebra der durch das Bild von T erzeugten zyklischen Gruppe der Ordnung d übergeht, folgt die Aussage nun aus dem Deformationssatz von Tits ([12], 68.17). \square

Wir können einen solchen Isomorphismus sogar explizit angeben und damit verifizieren, daß die Aussage schon über dem Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, e^{2i\pi/d}]$ gilt.

2.6. Bemerkung. Sei $R := \mathbb{Z}[\mathbf{u}, 1/d, \zeta]$, wobei ζ eine primitive d -te Einheitswurzel bezeichnet. Für $W(B_1^{(d)}) =: \langle s \rangle$ definiert die Festsetzung

$$T \mapsto \sum_{j=0}^{d-1} a_j s^j, \quad \text{mit } a_j = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} u_k \zeta^{-jk},$$

einen injektiven Algebrenhomomorphismus $\mathcal{H}_R(B_1^{(d)}, \mathbf{u}) \rightarrow RW(B_1^{(d)})$. Die Umkehrabbildung ist über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \{(u_i - u_j)^{-1} \mid i \neq j\}, \zeta]$ definiert.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß alle irreduziblen (also linearen) Charaktere von \mathcal{H}_R und $RW(B_1^{(d)})$ auf T und $\sum_{j=0}^{d-1} a_j s^j$ übereinstimmen. Dazu identifizieren wir den linearen Charakter $\chi_i : T \mapsto u_i$ von \mathcal{H}_R mit dem linearen

Charakter von $W(B_1^{(d)})$ mit $\chi_i(s) = \zeta^i$. Auf der rechten Seite kann dieser ausgewertet werden zu

$$\chi_i\left(\sum_{j=0}^{d-1} a_j s^j\right) = \frac{1}{d} \sum_{j,k=0}^{d-1} u_k \zeta^{-jk} \chi_i(s)^j = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} u_k \sum_{j=0}^{d-1} \zeta^{j(i-k)} = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} u_k \delta_{i,k} d = u_i.$$

Das stimmt mit $\chi_i(T) = u_i$ überein, womit der erste Teil folgt. Setzt man für die Umkehrabbildung $s \mapsto \sum_{j=0}^{d-1} b_j T^j$ an und wertet auf den linearen Charakteren aus, so findet man $\zeta^i = \sum_{j=0}^{d-1} b_j u_i^j$. Die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems für die b_j ist eine Vandermondematrix in den u_i , und dies zeigt die zweite Behauptung. \square

2B. Werte der Parameter.

Es bleibt die Aufgabe, Spezialisierungen der Parameter u_i zu finden, für die die in Bemerkung 2.4 bestimmten generischen Grade in Grade von Konstituenten von $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}$ übergehen. Da die Zerlegungen der uns interessierenden $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}$ bekannt sind, können diese in jedem Fall durch den Vergleich der generischen Grade mit den bekannten Graden der Konstituenten der $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}$ bestimmt werden.

Da jeweils d Charaktergrade in Übereinstimmung gebracht werden müssen, es aber nur $d-1$ frei wählbare Parameter für \mathcal{H} gibt, ist es keineswegs selbstverständlich, daß solche Spezialisierungen immer existieren. In allen untersuchten Fällen lassen sich aber solche finden, die zudem jeweils halbzahlige Potenzen von q , multipliziert mit einer d -ten Einheitswurzel sind. Insbesondere findet man für exzeptionelle Gruppen:

2.7. Bemerkung. *Mit den in Tabelle 8.1 aufgeführten Parameterwerten spezialisieren die generischen Grade der zyklischen zyklotomischen Heckealgebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda), \mathbf{u})$, multipliziert mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda))(q)$, zu den Graden unipotenter Charaktere in den entsprechenden zyklischen Φ_d -Blöcken exzeptioneller Gruppen mit dem richtigen Vorzeichen gemäß (d-HV6). Bei Substitution von q durch ζ_d gehen überdies die Parameterwerte jeweils genau in die $d-1$ nichttrivialen d -ten Einheitswurzeln über, in Übereinstimmung mit (d-HV2).*

Im Falle der Coxetertori stößt man selbstverständlich wieder auf die von Lusztig in [17] auf anderem Wege bestimmten Eigenwerte der Frobeniusabbildung, daher wurden diese nicht noch einmal aufgeführt.

Wir wenden uns nun den Gruppen \mathbb{G} vom Typ A_{n-1} zu. Ist \mathbb{G} von getwistetem Typ, so erhalten wir alle Charaktergrade, indem q durch $-q$ in der ungetwisteten Version ersetzt wird. Es reicht daher, die Untersuchung auf den ungetwisteten Typ zu beschränken. Die zugehörigen endlichen Gruppen

können dann als allgemeine lineare Gruppen $GL_n(q)$ gewählt werden, soweit nur die unipotenten Charaktere betroffen sind.

Die d -kuspidalen Paare von \mathbb{G} haben die Form (\mathbb{L}, λ) , mit

$$(2.8) \quad \mathbb{L}(q) = (q^d - 1)^a \times GL_{n-ad}(q)$$

für ein geeignetes a und wobei λ durch einen d -Kern parametrisiert wird [8]. Die zugehörige relative Weylgruppe hat dann den Typ $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda) \cong Z_d \wr \mathfrak{S}_a$. Also ist $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda)$ zyklisch wenn entweder $a = 1$ oder aber $d = 1$, $a = 2$ gilt. Der zweite Fall wird durch die klassische Howlett-Lehrer Theorie abgedeckt und damit vollständig verstanden. Es bleibt die Frage nach den Werten der Parameter zum Paar (\mathbb{L}, λ) im ersten Fall.

Wir schreiben $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n - d$ für den d -Kern, der den d -kusalen Charakter λ von \mathbb{L} parametrisiert, und $\beta := (\lambda_1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_r + r - 1)$ für die zugehörige Folge von β -Zahlen. Letztere stellen wir uns verteilt auf die d Stäbe eines nach unten hin unbegrenzten Abakus vor. Da λ ein d -Kern ist, liegen die endlich vielen Perlen auf jedem Stab ohne Zwischenraum untereinander. Durch Verschieben

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) \mapsto (0, \beta_1 + 1, \dots, \beta_r + 1)$$

der β -Zahlen können wir erreichen, daß der erste Stab genau eine Perle und die übrigen jeweils mindestens ein Perle enthalten. Man beachte, daß dies die Verteilung der Perlen zu λ auf dem Abakus eindeutig festgelegt.

2.9. Definition. Die d -Gestalt eines d -Kerns λ ist die Folge (b_0, \dots, b_{d-1}) , wobei b_i angibt, wieviele Perlen mehr auf dem $i + 1$ -ten Stab als auf dem ersten Stab liegen (also gelten $b_0 = 0$ und $b_i \geq 0$).

Damit können wir formulieren:

2.10. Bemerkung. Sei \mathbb{L} wie in 2.8 mit $a = 1$ und $\lambda = \lambda_\lambda \in \text{Uch}(\mathbb{L})$ parametrisiert durch den d -Kern λ der d -Gestalt (b_0, \dots, b_{d-1}) . Für die Wahl

$$\{x^{b_0 d} = 1, x^{b_1 d + 1}, x^{b_2 d + 2}, \dots, x^{b_{d-1} d + d - 1}\}$$

der Parameter der generischen zyklotomischen Algebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda))$ spezialisieren die generischen Grade, multipliziert mit $\text{Deg}R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda)$, zu den Graden unipotenter Charaktere im Φ_d -Block von \mathbb{G} oberhalb (\mathbb{L}, λ) mit den richtigen Vorzeichen (siehe (d -HV6)).

Beweis. Sei $\rho_\mu(1)$ der Grad des unipotenten Charakters $\rho \in \text{Uch}(\mathbb{G})$ mit Parameter μ . Wir müssen also $\rho_\mu(1)/\rho_\lambda(1)$ für alle $\mu \vdash n$ mit d -Kern λ berechnen und zeigen, daß dieser Wert mit dem von f_i wie in Bemerkung 2.4 unter der

angegebenen Spezialisierung der Parameter übereinstimmt. Das Abakusdiagramm für die Partition $\mu \vdash n$ mit d -Kern $\lambda \vdash n - d$ entsteht bekanntlich aus dem von λ , indem auf einem der Stäbe die unterste Perle um genau eine Position weitergeschoben wird. Wir schreiben $l(h)$ für die Länge eines Hakens h einer Partition (siehe [16]). Der Charaktergrad $\rho_\mu(1)$ wird durch die Hakenformel

$$\rho_\mu(1) = \frac{x^{n(\mu)} |\mathbb{G}|_{x'}}{\prod_{(h \text{ Haken von } \mu)} (x^{l(h)} - 1)} \quad \text{mit} \quad n(\mu) = \sum_{i=1}^m (m-i)\beta'_i - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{i}{2}$$

angegeben (siehe [21], (21)), wobei $(\beta'_1, \dots, \beta'_m)$ die β -Zahlen zu μ bezeichnen. Um den Quotienten $|\rho_\mu(1)/\rho_\lambda(1)|_{x'}$ zu berechnen, genügt es also, diejenigen Haken zu bestimmen, die nur in einem der beiden Diagramme vorkommen. Mit der d -Gestalt (b_0, \dots, b_{d-1}) des d -Kerns λ sieht man leicht, daß die in μ aber nicht in λ vorkommenden Haken die Längen

$$\{d\} \cup \{|(b_i - b_k)d + i - k| \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq d-1, k \neq i\}$$

besitzen, wenn die verschobene Perle auf dem i -ten Stab sitzt. Die Behauptung über den x' -Anteil folgt damit unmittelbar durch Vergleich mit 2.4, da wir Vorzeichenwechsel zugelassen haben.

Wir wenden uns nun dem x -Anteil $n(\mu)$ zu. Hier ist

$$\begin{aligned} n(\mu) - n(\lambda) &= \sum_{i=1}^m (m-i)\beta'_i - \sum_{i=1}^m (m-i)\beta_i \\ &= m \sum_{i=1}^m (\beta'_i - \beta_i) + \sum_{i=1}^m i(\beta_i - \beta'_i) = md + \sum_{i=1}^m i\beta_i - \sum_{i=1}^m i\beta'_i, \end{aligned}$$

da gemäß unserer Konvention β und β' gleich viele Teile haben. Verschieben der untersten Perle auf dem Stab i des Abakusdiagramms bewirkt die Addition von d zu der β -Zahl $b_i d + i$. Durch Umordnen der Größe nach verringert sich der Index aller β -Zahlen zwischen $b_i d + i$ und $(b_i + 1)d + i$ um eins, während der von $(b_i + 1)d + i$ sich entsprechend um d vergrößert. Damit ergibt sich als Differenz zwischen $n(\mu)$ und $n(\lambda)$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} md + \sum_{\substack{k > i \\ b_k \geq b_i}} (b_i d + k) + \sum_{\substack{k < i \\ b_k > b_i}} (b_i d + k + d) - \sum_{\substack{k > i \\ b_k \geq b_i}} (b_i d + i) - \sum_{\substack{k < i \\ b_k > b_i}} (b_i d + i) \\ - d \left(\sum_{\substack{k \\ b_k < b_i}} b_k + \sum_{\substack{k \leq i \\ b_k \geq b_i}} b_i + \sum_{\substack{k > i \\ b_k \geq b_i}} (b_i - 1) \right) - d \sum_{\substack{k > i \\ b_k \geq b_i}} 1 - d \sum_{\substack{k < i \\ b_k > b_i}} 1. \end{aligned}$$

Andererseits wird der x -Anteil von f_i bei der obigen Spezialisierung durch

$$\sum_{\substack{k > i \\ b_k \geq b_i}} (d(b_k - b_i) + k - i) + \sum_{\substack{k < i \\ b_k > b_i}} (d(b_k - b_i) + k - i)$$

gegeben. Man rechnet leicht nach, daß diese zwei Ausdrücke übereinstimmen. \square

Die Parameterwerte können auch noch auf andere Weise charakterisiert werden. Entfernt man die einzige Perle auf dem ersten Stab des Abakus (den wir wie oben normalisiert annehmen), dann sind die Parameterwerte gerade die $x^{l(h_i)}$, wobei h_i der Haken von der untersten Perle auf dem i -ten Stab zur Position der entfernten Perle ist.

Somit sind auch in Typ A die Parameterwerte sämtlich positive ganzzahlige Potenzen von q . Zudem faktorisiert die Spezialisierung von \mathcal{H} zur Gruppealgebra nach Konstruktion durch die angegebenen Parameterwerte.

2.11. Anmerkung. Im Spezialfall $d = 2$ erhalten wir durch Übergang von q zu $-q$ eine Aussage für $d = 1$ in der unitären Gruppe $\mathbb{G}^- = \text{GU}_n$. Diese liefert eine hübsche neue Interpretation der Parameterwerte in der üblichen Howlett-Lehrer Theorie der unitären Gruppen durch die 2-Gestalt eines 2-Kerns. Man überzeugt sich, daß so in der Tat die bekannten Werte (siehe [21], p.464) erhalten werden.

Wir wenden uns nun den verbleibenden klassischen Gruppen \mathbb{G} zu, also solchen vom Typ B_n, C_n, D_n und 2D_n . Sei zunächst $d \geq 1$ ungerade. Die d -kuspidalen Leviuntergruppen von \mathbb{G} haben dann die Struktur

$$(2.12) \quad \mathbb{L}(q) = (q^d - 1)^a \times \mathbb{H}(q)$$

für ein geeignetes a , wobei \mathbb{H} denselben klassischen Typ wie \mathbb{G} oder \mathbb{G}^- sowie Rang $n - ad$ hat. Die unipotenten Charaktere werden hier durch sogenannte Symbole $\Lambda = (S, T)$ parametrisiert (siehe [21]). Das sind Paare von Folgen S und T von β -Zahlen, wobei ein Verschieben der Folgen nur gleichzeitig erlaubt ist. Ein Symbol kann also auch als gekoppeltes Paar von Abakusdiagrammen mit jeweils d Stäben aufgefaßt werden. Die d -kuspidalen unipotenten Charaktere werden dann durch Symbole parametrisiert, für die beide Abakusdiagramme d -Kerne sind. Für eine d -kuspidale Leviuntergruppe \mathbb{L} wie oben mit zugehörigem d -kuspidalem Charakter λ gilt dann $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda) \cong Z_{2d} \wr \mathfrak{S}_a$ ([8]), zumindest wenn das Symbol nicht ausgeartet ist. Im ausgearteten Fall, der nur für die Typen D_n und 2D_n auftreten kann, hat $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda)$ Index 2 in $Z_{2d} \wr \mathfrak{S}_a$. Der zyklische Fall tritt damit wieder für $a = 1$ auf.

Offensichtlich kann auch für ein Paar von gekoppelten Abakusdiagrammen durch Verschieben erreicht werden, daß das Minimum der Perlenanzahl auf dem ersten Stab eines der beiden Diagramme angenommen wird.

Im Fall nichtausgearteter Symbole Λ ordnen wir das Paar nun so, daß für die ersten $k \geq 0$ Stäbe die Zahl der Perlen in beiden Diagrammen übereinstimmt, während das zweite auf dem $k+1$ -ten Stab mehr Perlen als das erste enthält. Dies erlaubt die

2.13. Definition. Die d -Gestalt $G(\Lambda)$ eines d -Kerns Λ ist die Folge (b_0, \dots, b_{2d-1}) , wobei (b_0, \dots, b_{d-1}) die d -Gestalt des ersten Abakusdiagramms angibt, und b_i , $d \leq i \leq 2d-1$ die Perlendifferenz zwischen dem $i-d+1$ -ten Stab des zweiten Diagramms zum ersten Stab des ersten.

2.14. Bemerkung. Sei \mathbb{L} wie in 2.12 mit $a=1$ und Λ ein nichtausgearteter d -Kern der d -Gestalt $G(\Lambda) = (b_0, \dots, b_{2d-1})$. Für die Wahl

$$\{x^{b_0 d} = 1, x^{b_1 d+1}, \dots, x^{b_{d-1} d+d-1}, -x^{b_d d}, -x^{b_{d+1} d+1}, \dots, -x^{b_{2d-1} d+d-1}\}$$

der Parameter der generischen zyklotomischen Algebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda}))$ spezialisieren die generischen Grade, multipliziert mit $\text{Deg} R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda_{\Lambda})$, zu den Graden unipotenter Charaktere im Φ_d -Block von \mathbb{G} oberhalb $(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda})$ mit den richtigen Vorzeichen (siehe (d-HV6)).

Beweis. Der Beweis läßt sich wie bei Bemerkung 2.10 durch Benutzung der Hakenformel ([21], Prop. 5) für die Grade der unipotenten Charaktere klassischer Gruppen führen. Für ein Symbol $\Lambda = (S, T)$ sortieren wir die β -Zahlen von S und T aufsteigend zu $(\beta_1, \dots, \beta_{l+m})$. Dann gilt

$$\rho_{\Lambda}(1) = \frac{q^{n(\Lambda)} |\mathbb{G}|_{x'}}{2^{c(\Lambda)} \prod_{(h \text{ Haken von } \Lambda)} (q^{l(h)} - 1) \prod_{(h \text{ Kohaken von } \Lambda)} (q^{l(h)} + 1)}$$

mit

$$n(\Lambda) = \sum_{i=1}^{l+m} (l+m-i) \beta_i - \sum_{i \geq 1} \binom{m+l-2i}{2}$$

und einer Funktion $c(\Lambda)$, die nur von der Anzahl der Teile von S und T abhängt. Insbesondere kürzt sich die 2-Potenz im gesuchten Quotienten der Grade heraus. Wir betrachten zunächst wieder den x' -Anteil. Ist Λ ein d -Kern, so stellt man leicht fest, daß bei Einfügen eines d -Hakens auf dem i -ten Stabes eines der beiden Abakusdiagramme von Λ genau d neue Haken der Längen

$$\{d\} \cup \{(b_i - b_k)d + i - k \mid \text{für } 0 \leq k \leq d-1, k \neq i\}$$

und d neue Kohaken der Längen

$$\{d\} \cup \{|(b_i - b_{d+k})d + i - k| \text{ für } 0 \leq k \leq d-1, k \neq i\}$$

hinzukommen. Vergleich mit 2.4 ergibt hieraus die Behauptung über den x' -Anteil.

Die Aussage über die genaue x -Potenz ergibt sich unmittelbar wie in Bemerkung 2.10, da die Formeln in beiden Fällen vollständig analog gebaut sind. \square

2.15. Definition. Die d -Gestalt $G(\Lambda)$ eines ausgearteten d -Kerns $\Lambda = (S, S)$ sei die d -Gestalt $G(S)$ eines der beiden zugehörigen (gleichen) Abakusdiagramme.

Analog wie oben erhält man dann:

2.16. Bemerkung. Sei \mathbb{L} wie in 2.12 und Λ ein ausgearteter d -Kern der d -Gestalt (b_0, \dots, b_{d-1}) . Für die Wahl

$$\{x^{2b_0d} = 1, x^{2b_1d+2}, \dots, x^{2b_{d-1}d+2d-2}\}$$

der Parameter der generischen zyklotomischen Algebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda}))$ spezialisieren die generischen Grade, multipliziert mit $\text{Deg}R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda_{\Lambda})$, zu den Graden unipotenter Charaktere im Φ_d -Block von \mathbb{G} oberhalb $(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda})$ mit den richtigen Vorzeichen (siehe (d-HV6)).

Ist $d = 2e$ das Doppelte der ungeraden Zahl e , so zeigt die allgemeine Ennoladualität für die Grade unipotenter Charaktere (siehe etwa [8]), daß die zugehörigen Spezialisierungen aus denen von Bemerkung 2.14 und 2.16 durch Ersetzen von x durch $-x$ erhalten werden, bei gleichzeitiger Ersetzung der d -Kerne durch d -Kokerne.

2.17. Beispiel. Sei n ungerade, $\mathbb{G} = B_n$ und $d = 2n$. Der einzige d -Kokern von B_0 ist das Symbol $\binom{0}{-}$, und die nach Bemerkung 2.14 und der obigen Beobachtung zum Fall $d \equiv 2 \pmod{4}$ hierzu gehörenden Parameterspezialisierungen sind

$$\begin{aligned} \{1, (-x), (-x)^2, \dots, (-x)^{n-1}, -(-x)^n, -(-x)^1, -(-x)^2, \dots, -(-x)^{n-1}\} \\ = \{1, x, \dots, x^{n-1}, x^n, -x, -x^2, \dots, -x^{n-1}\}. \end{aligned}$$

Nach [17], (7.3), sind dies bei Ersetzung von x durch q genau die Eigenwerte des Frobenius auf der Summe der l -adischen Kohomologiegruppen zum Coxetertertorus T_c der Ordnung $|T_c| = q^n + 1$ von $B_n(q)$, wie vorausgesagt.

Sei weiter n ungerade, $d = 2n$, aber nun $\mathbb{G} = {}^2D_n$. Der einzige d -Kokern von D_0 ist das ausgeartete Symbol $(\bar{\quad})$. Mit Bemerkung 2.16 bestimmt man die zugehörigen Parameter als

$$\{1, x^2, \dots, x^{2n-2}\},$$

und dies sind nach loc. cit. wiederum (für $x = q$) die Eigenwerte des Frobenius auf den zum Coxetertorus T_c der Ordnung $|T_c| = q^n + 1$ gehörenden Kohomologiegruppen.

Es bleibt der Fall von durch 4 teilbarem d zu betrachten. Sei dazu nun $d = 2e$. Ein Symbol Λ , welches keine d -Kohaken besitzt, heißt ein d -Kokern. Bildet man das übliche Paar von Abakusdiagrammen mit je e Stäben, so ist die Kokerneigenschaft daran schwer abzulesen. Stattdessen bilden wir einen neuen Abakus, der aus der ersten Reihe des ersten, der zweiten des zweiten, und so abwechselnd aus den beiden ursprünglichen aufgebaut wird. Entsprechend entsteht ein zweiter Abakus aus den jeweils übrigbleibenden Reihen der anfänglichen Diagramme. Damit erhalten wir ein neues Paar von Abakusdiagrammen Λ' , und hier gilt nun wie bei den d -Kernen, daß auf jedem Stab die Perlen ohne Lücken untereinander sitzen.

2.18. Definition. Die d -Kogestalt $G(\Lambda)$ eines ausgearteten d -Kokerns $\Lambda = (S, S)$, $d = 2e$, sei die e -Gestalt $G(\Lambda')$ des gewisteten Abakusdiagramms Λ' .

2.19. Bemerkung. Sei \mathbb{L} wie in 2.12 mit $a = 1$, $d = 2e$.

(a) Ist Λ ein nichtausgearteter d -Kokern der d -Kogestalt $G(\Lambda) = (b_0, \dots, b_{2e-1})$, so spezialisieren für die Wahl

$$\{x^{b_0 e} = 1, x^{b_1 e+1}, \dots, x^{b_{e-1} e+e-1}, \\ -(-1)^{b_e} x^{b_e e}, -(-1)^{b_{e+1}} x^{b_{e+1} e+1}, \dots, -(-1)^{b_{2e-1}} x^{b_{2e-1} e+e-1}\}$$

der Parameter der generischen zyklotomischen Algebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda}))$ die generischen Grade, multipliziert mit $\text{Deg}R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda_{\Lambda})$, zu den Graden unipotenter Charaktere im Φ_d -Block von \mathbb{G} oberhalb $(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda})$ mit den richtigen Vorzeichen (siehe (d-HV6)).

(b) Ist Λ ein ausgearteter d -Kokern der d -Kogestalt (b_0, \dots, b_{e-1}) , so spezialisieren für die Wahl

$$\{x^{2b_0 e} = 1, x^{2b_1 e+2}, \dots, x^{2b_{e-1} e+2e-2}\}$$

der Parameter der generischen zyklotomischen Algebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \lambda_{\Lambda}))$ die generischen Grade, multipliziert mit $\text{Deg}R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda_{\Lambda})$, zu den Graden unipotenter

Charaktere im Φ_d -Block von \mathbb{G} oberhalb $(\mathbb{L}, \lambda_\Lambda)$ mit den richtigen Vorzeichen (siehe (d-HV6)).

Der Beweis verläuft analog zu denen der vorherigen Ergebnisse und sei dem Leser überlassen.

Dies vervollständigt die Liste der möglichen Parameter für zyklotomische Heckealgebren im zyklischen Fall. Bevor wir allgemeine zyklotomische Heckealgebren definieren können, müssen wir geeignete Präsentationen für die zugrundeliegenden Spiegelungsgruppen finden.

3. KOMPLEXE SPIEGELUNGSGRUPPEN UND ZYKLOTOMISCHE WEYLGRUPPEN

Wir geben Präsentationen für die im Zusammenhang mit der Zerlegung von $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}$ auftretenden komplexen Spiegelungsgruppen an. Aus diesen Präsentationen lassen sich dann die zugehörigen zyklotomischen Heckealgebren definieren, was im nächsten Abschnitt geschehen wird.

3A. Präsentationen einiger komplexer Spiegelungsgruppen.

Wir verstehen hier gemäß dem allgemeinen Sprachgebrauch (siehe etwa [23], [24]) unter komplexen Spiegelungsgruppen endliche Gruppen, die in einer treuen komplexen n -dimensionalen Matrixdarstellung durch Elemente mit einem $n - 1$ -dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1, sogenannte Pseudoreflektionen, erzeugt werden. Die irreduziblen komplexen Spiegelungsgruppen wurden von Shephard und Todd klassifiziert [23]. Die für uns interessanten darunter sind in ihrer Bezeichnungsweise die zwei doppelt unendlichen Serien $G(d, 1, n)$ und $G(d, 2, n)$ sowie die elf Einzelgruppen $G_4, G_5, G_8, G_9, G_{10}, G_{12}, G_{16}, G_{25}, G_{26}, G_{31}, G_{32}$.

Wir suchen nun 'schöne' Präsentationen für diese Gruppen, mit komplexen Spiegelungen als Erzeugern ähnlich wie bei Coxetergruppen. Dabei tritt allerdings das schon von Shepard und Todd erwähnte Problem auf, daß nicht jede n -dimensionale komplexe Spiegelungsgruppe von genau n Spiegelungen erzeugt werden kann, sondern in manchen Fällen $n + 1$ solche nötig sind. Für die Gruppen, die bereits durch n Spiegelungen erzeugt werden können, gab Coxeter in [11] Präsentationen an. Die Präsentationen in den übrigen Fällen sind unseres Wissens neu.

Die Präsentationen werden wie im Fall der Coxetergruppen durch ein Diagramm gegeben. Bezeichne $B_n^{(d)}$ für $n, d \geq 1$ das Diagramm

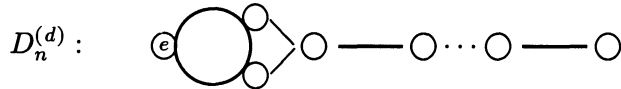
$$B_n^{(d)} : \quad \textcircled{d} \text{---} \textcircled{\quad} \text{---} \textcircled{\quad} \cdots \textcircled{\quad} \text{---} \textcircled{\quad}$$

mit insgesamt n Knoten. Die Knoten repräsentieren die Erzeuger, wobei der mit einem d markierte die Ordnung d habe und die unmarkierten Involutionen entsprechen. Die Relationen werden durch die Verbindungslinien beschrieben: Erzeuger zu unverbundenen Knoten kommutieren, während k Verbindungslinien zwischen r und s eine *Zopfrelation*

$$rsr \cdots = srs \cdots$$

mit k' Faktoren auf beiden Seiten bedeuten, wobei $k' = 3$ für $k = 1$, $k' = 4$ für $k = 2$ und $k' = 6$ für $k = 3$ gilt, also wie die entsprechende Konvention bei Coxetergruppen. Für den Fall $d = 2$ geht $B_n^{(2)}$ in das wohlbekannte Diagramm zu der üblichen Weylgruppe vom Typ B_n über, und weiter ist $B_n^{(1)} = A_{n-1}$.

Für geraden Parameter $d = 2e$ definieren wir weiter $D_n^{(d)}$ für $n \geq 2$ durch



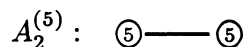
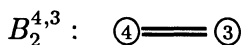
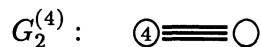
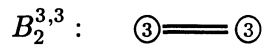
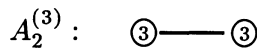
mit insgesamt $n + 1$ Knoten. Der Kreis an den ersten drei Knoten steht für die gerichtete zirkuläre Zopfrelation

$$rst = str = trs$$

zwischen den ersten drei Erzeugern (im Uhrzeigersinn). Die übrigen Konventionen sind wie beim Typ $B_n^{(d)}$. Der Spezialfall $D_n^{(2)} = D_n$ hat die Namenswahl für diese Diagramme motiviert.

Weiter setzen wir $D_1^{(d)} := B_1^{(e)}$ und erweitern unsere Definition auf alle $d \geq 1$ durch die Festsetzung $D_n^{(d)} := D_n^{(2d)}$ falls d ungerade ist.

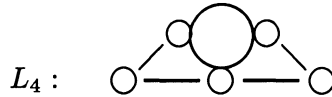
Weiter definieren wir die folgenden sieben exzeptionellen Diagramme, die Präsentationen für zweidimensionale komplexe Spiegelungsgruppen liefern werden:



und weitere vier für höherdimensionale Spiegelungsgruppen:

$$A_3^{(3)} : \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$$

$$B_3^{2,3} : \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{=} \textcircled{\quad}$$



$$A_4^{(3)} : \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$$

Hier wäre allenfalls noch der Doppelkreis im Diagramm K_2 zu erklären: er symbolisiert die zirkuläre Zopfrelation

$$rstr = str s = trst$$

zwischen den drei involutorischen Erzeugern r, s und t .

Insbesondere sind alle Relationen entweder verallgemeinerte Zopfrelationen mit gleich vielen Faktoren auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, oder solche der Art $s^d = 1$.

3.1. Definition. Die oben aufgeführten Diagramme \mathcal{D} heißen *zyklotomische Diagramme*. Die dadurch beschriebenen endlich präsentierten Gruppen $W = W(\mathcal{D})$ heißen *zyklotomische Weylgruppen*. Des weiteren wollen wir auch die üblichen Dynkindiagramme der endlichen Gruppen vom Lie-Typ und die zugehörigen Weylgruppen als *spezielle zyklotomische Diagramme* bzw. *Weylgruppen* bezeichnen.

3.2. Satz. Die zyklotomischen Diagramme liefern Präsentationen für die folgenden komplexen Spiegelungsgruppen:

$$W(B_n^{(d)}) \cong G(d, 1, n), \quad W(D_n^{(2e)}) \cong G(2e, 2, n),$$

$$W(A_2^{(3)}) \cong G_4, \quad W(A_3^{(3)}) \cong G_{25}, \quad W(A_4^{(3)}) \cong G_{32},$$

$$W(B_2^{3,3}) \cong G_5, \quad W(A_2^{(4)}) \cong G_8, \quad W(G_2^{(4)}) \cong G_9, \quad W(B_2^{4,3}) \cong G_{10},$$

$$W(K_2) \cong G_{12}, \quad W(A_2^{(5)}) \cong G_{16}, \quad W(B_3^{2,3}) \cong G_{26}, \quad W(L_4) \cong G_{31}.$$

Beweis. Für die Diagramme ohne zirkuläre Relationen wurde dies bereits von Coxeter [11] gezeigt. Im Fall $B_n^{(d)}$ etwa liefern die involutorischen Erzeuger s_2, \dots, s_n zu den letzten $n - 1$ Knoten eine Präsentation der symmetrischen

Gruppe \mathfrak{S}_n . Das Element s_1 der Ordnung d kommutiert aufgrund der Relation $s_1 s_2 s_1 s_2 = s_2 s_1 s_2 s_1$ mit allen seinen Konjugierten unter (s_2, \dots, s_n) , und somit beschreibt die Präsentation das Kranzprodukt $Z_d \wr \mathfrak{S}_n$. Dies ist aber gerade die Spiegelungsgruppe $G(d, 1, n)$.

Für gerades d betrachte man nun die von $s_1^2, s_2, s_1 s_2 s_1, s_3, s_4, \dots, s_n$ erzeugte Untergruppe H von $B_n^{(d)}$. Dies ist die komplexe Spiegelungsgruppe $G(d, 2, n)$ [23]. Mit dem Coxeter-Todd Algorithmus sieht man, daß H den Index zwei in $W(B_n^{(d)})$ hat, mit Nebenklassenvertretern $\{1, s_1\}$. Mit dem Reidemeister-Schreier Verfahren ergibt sich, daß H auf den Erzeugern $s_1^2, s_2, s_1 s_2 s_1, s_3, s_4, \dots, s_n$ genau die oben für $D_n^{(d)}$ angegebene Präsentation besitzt.

Bei den exzeptionellen Diagrammen K_2 und L_4 bestimmt man etwa die Charaktertafel (vorzugsweise auf dem Computer) von $W(\mathcal{D})$, und liest daraus die Existenz einer irreduziblen Spiegelungsdarstellung von $W(\mathcal{D})$ der gewünschten Dimension ab. Die Behauptung folgt dann mit dem Klassifikationssatz von Shephard und Todd. \square

Die vorgestellten Präsentationen ähneln in vielerlei Hinsicht denen für Weylgruppen als Coxetergruppen.

3.3. Anmerkung. Durch Wegnahme von Knoten und den zugehörigen Verbindungslinien aus einem zyklotomischen Diagramm erhält man das Diagramm einer *parabolischen* Spiegelungsuntergruppe. Dabei ist zu beachten, daß bei den zirkulären Relationen immer mindestens zwei der Knoten auf dem Kreis entfernt werden müssen, um die Präsentation einer Untergruppe zu erhalten, da die Relation zwischen zwei übrigbleibenden Erzeugern keinen Sinn macht.

3B. Zyklotomische Weylgruppen.

Die Motivation für die Bezeichnung *zyklotomische Weylgruppen* für die Gruppen $W(\mathcal{D})$ ergibt sich durch folgende Tatsache: Die eingeführten Gruppen $W(\mathcal{D})$ treten in den generischen reductiven Gruppen als relative Weylgruppen $W_{\mathbb{C}}(\mathbb{L}, \lambda)$ für geeignete d -kuspidaale Paare (\mathbb{L}, λ) auf (siehe [8]).

Im Fall $d = 1$ handelt es sich dabei gerade um die üblichen Weylgruppen $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ und $I_2(8)$ (in 2F_4). Für allgemeines d kommen noch die eingeführten zyklotomischen Weylgruppen hinzu.

3.5. Bemerkung. Die für vorgegebenes d möglichen zyklotomischen Weylgruppen sind genau die in 3.4 aufgeführten. Dabei treten die Einträge in den Zeilen 4–10 nur in exzeptionellen Gruppen auf.

Wegen $A_{n-1} = B_n^{(1)}$, $B_n = B_n^{(2)}$ und $D_n = D_n^{(2)}$ sind die klassischen Weylgruppen in der Tat Spezialfälle der zyklotomischen Weylgruppen. Die umständliche Fallunterscheidung nach der Restklasse von d modulo 4 spiegelt

3.4. d -zyklotomische Diagramme.

d	\mathcal{D}
$d \equiv 0 \pmod{4}$	$B_n^{(d)}, D_n^{(d)}$
$d \equiv 2 \pmod{4}$	$B_n^{(d/2)}, B_n^{(d)}, D_n^{(d)}$
$d \equiv 1 \pmod{2}$	$B_n^{(d)}, B_n^{(2d)}, D_n^{(2d)}$
1, 2	$E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, I_2(8)$
3, 6	$A_2^{(3)}, A_3^{(3)}, A_4^{(3)}, B_2^{3,3}, B_3^{2,3}$
4	$A_2^{(4)}, K_2, L_4$
5, 10	$A_2^{(5)}$
8	$G_2^{(4)}$
$8', 8''$	$A_2^{(4)}$
12	$B_2^{4,3}$

das Verhalten des zyklotomischen Polynoms $\Phi_d(x)$ bei Ersetzen von x durch $-x$ wider.

3.6. Zyklotomische Weylgruppen

\mathcal{D}	(\mathbb{G}, d)
$B_2^{(4)}$	$(E_7, 4)$
$A_2^{(3)}$	$({}^3D_4, 3), ({}^3D_4, 6)$
$B_2^{3,3}$	$(F_4, 3), (F_4, 6), (E_6, 6), ({}^2E_6, 3), (E_8, 3), (E_8, 6)$
$A_2^{(4)}$	$({}^2F_4, 8'), ({}^2F_4, 8''), (F_4, 4), (E_6, 4), ({}^2E_6, 4), (E_7, 4), (E_8, 4)$
$G_2^{(4)}$	$(E_8, 8)$
$B_2^{4,3}$	$(E_8, 12)$
K_2	$({}^2F_4, 4)$
$A_2^{(5)}$	$(E_8, 5), (E_8, 10)$
$A_3^{(3)}$	$(E_6, 3), ({}^2E_6, 6)$
$B_3^{2,3}$	$(E_7, 3), (E_7, 6)$
L_4	$(E_8, 4)$
$A_4^{(3)}$	$(E_8, 3), (E_8, 6)$
$I_2^{3,3}(5)$	$(H_4, 3), (H_4, 6)$
M_2	$(H_4, 4)$

In Tabelle 3.6 werden für die exceptionellen Gruppen genau die bei vorge-

gegebenem d auftretenden Diagramme klassifiziert. Hierbei wurden einerseits die gewöhnlichen Dynkindiagramme (also die Fälle $d = 1$ und $d = 2$) sowie alle zyklischen Fälle $B_1^{(d)}$ der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Diese Tabelle erhält man etwa aus Table 1 und 3 von [8]. Das entsprechende Ergebnis für klassische Gruppen \mathbb{G} ergibt sich leicht aus den Überlegungen im Abschnitt 2B.

Die beiden letzten Zeilen werden in Abschnitt 3D ihre Erklärung finden.

Einige grundlegende Eigenschaften der exzeptionellen zyklotomischen Weylgruppen sind in der Tabelle 8.2 in §7 zusammengestellt.

3C. Die Charaktere der zyklotomischen Weylgruppen $W(D_n^{(d)})$.

Wir stellen hier einige Ergebnisse über die Gruppen $W(D_n^{(d)})$ und ihre Darstellungen zusammen, die später benötigt werden.

Die Darstellungstheorie des Kranzprodukts $W(B_n^{(d)}) \cong Z_d \wr \mathfrak{S}_n$ ist wohlbekannt (siehe etwa [16], 4.4). Die irreduziblen Darstellungen über einem Zerfällungskörper werden durch d -Tupel von Partitionen

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad \alpha_i \vdash n_i, \quad \text{mit} \quad \sum n_i = n$$

parametrisiert. Ein vollständiges Vertretersystem der absolut irreduziblen Charaktere erhält man auf folgende Weise: Seien ξ_1, \dots, ξ_d die irreduziblen Charaktere der zyklischen Gruppe Z_d . Die Trägheitsgruppe des irreduziblen Charakters

$$\xi := \xi_1^{n_1} \# \dots \# \xi_d^{n_d}$$

von $Z_d^{n_1} \times \dots \times Z_d^{n_d}$ (hier bezeichnet $\#$ das äußere Tensorprodukt) ist die Untergruppe

$$H := Z_d \wr \mathfrak{S}_{n_1} \times \dots \times Z_d \wr \mathfrak{S}_{n_d}$$

von $Z_d \wr \mathfrak{S}_n$. Sei nun weiter $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ein d -Tupel von Partitionen mit $\alpha_i \vdash n_i$. Man setzt ξ auf H fort und bildet dort

$$\xi_\alpha := (\xi_1^{n_1} \otimes \chi_{\alpha_1}) \# \dots \# (\xi_d^{n_d} \otimes \chi_{\alpha_d}),$$

wobei χ_{α_i} den durch die Partition $\alpha_i \vdash n_i$ indizierten Charakter von \mathfrak{S}_{n_i} bezeichnet. Die Induktion von ξ_α zu $Z_d \wr \mathfrak{S}_n$ ist ein irreduzibler Charakter und wird mit α indiziert.

Die zyklotomische Weylgruppe $W(D_n^{(2e)})$ hat Index zwei in $W(B_n^{(d)}) \cong Z_d \wr \mathfrak{S}_n$, $d = 2e$. Wird der Kern des Kranzprodukts $Z_d \wr \mathfrak{S}_n$ durch die Elemente z_1, \dots, z_d der Ordnung d erzeugt, so bilden die Produkte $z_i z_j$ mit $1 \leq i, j \leq d$ zusammen mit einem zu \mathfrak{S}_n isomorphen Komplement ein Erzeugendensystem

für $W(D_n^{(d)})$. Alternativ kann $W(D_n^{(d)})$ auch so beschrieben werden: Sind s_1, \dots, s_n die Erzeuger von $W(B_n^{(d)})$ gemäß dem zyklotomischen Diagramm $B_n^{(d)}$, wobei s_1 die Ordnung d habe, so erzeugen $s_1^2, s_1^{-1}s_2s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ darin eine zu $W(D_n^{(d)})$ isomorphe Untergruppe.

Zur Untersuchung der Darstellungstheorie von $W(D_n^{(d)})$ ist also zu entscheiden, welche irreduziblen Darstellungen von $W(B_n^{(d)})$ bei Einschränkung auf $W(D_n^{(d)})$ zerfallen, und welche in Paaren assoziierter vorkommen. Dazu ordnen wir die Charaktere ξ_i von Z_d so an, daß $\xi_{2i} = \xi_{2i-1}^{-1}$ für $1 \leq i \leq e = d/2$ gilt.

3.7. Bemerkung. Eine irreduzible Darstellung χ_α von $W(B_n^{(2e)})$, parametrisiert durch das $2e$ -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2e})$ von Partitionen, bleibt bei Einschränkung auf $W(D_n^{(2e)})$ genau dann nicht irreduzibel, wenn $\alpha_{2i-1} = \alpha_{2i}$ für alle $1 \leq i \leq e$ gilt.

Der Beweis ist einfach und sei dem Leser überlassen (siehe etwa [16], Ex. 4.4, für eine ähnliche Untersuchung).

3D. Weitere Spiegelungsgruppen.

Bei Einführung der zyklotomischen Weylgruppen stößt man auf die folgende Kuriosität (siehe auch Paragraph 7 und den Anhang):

3.8. Anmerkung. Bekanntlich kommen die endlichen Coxetergruppen H_3 , H_4 und $I_2(p)$ für $p \neq 2, 3, 4, 6, 8$ nicht als Weylgruppen endlicher Gruppen mit BN-Paar vor. Trotzdem zeigt es sich, daß Konstruktionen wie Heckealgebren und damit generische Grade auch für diese Gruppen Sinn machen. Untersucht man die hier vorkommenden Zentralisatoren regulärer Elemente, so tauchen in H_4 für $d = 3, 6$ und $d = 4$ zwei weitere komplexe Spiegelungsgruppen auf, die bei den Weylgruppen noch nicht vorkamen. Wie man sich leicht anhand direkter Rechnung oder durch Vergleich der von Springer [24] ausgerechneten Grade der Invarianten mit der Liste in [10] überzeugt, handelt es sich um G_{20} und G_{22} in der Notation von Shephard und Todd. Auch für diese Gruppen findet sich eine Präsentation von der oben untersuchten Art. Genauer ist

$$I_2^{3,3}(5) : \quad \textcircled{3} \text{---}^5 \text{---} \textcircled{3}$$

eine Präsentation für G_{20} , während das Diagramm M_2 für G_{22} durch drei Involutionen in zirkulärer Relation mit jeweils fünf Faktoren in jedem Produkt dargestellt wird (im Gegensatz zu K_2 mit vier und $D_2^{(4)}$ mit jeweils dreien). In beiden Fällen erhalten wir also Zopfrelationen in fünf Faktoren, was insofern nicht überrascht, als solche auch schon in der Präsentation von H_4 eine Rolle spielen.

Neben den zyklotomischen Diagrammen gibt es weitere ähnliche Diagramme für komplexe Spiegelungsgruppen, und zwar haben G_6 , G_{14} , G_{17} , G_{18} und G_{21} die Präsentationen

$$G_2^{(3)} : \textcircled{3} \equiv \equiv \equiv \bigcirc \qquad I_2^{(3)}(8) : \textcircled{3} \equiv \equiv \equiv \bigcirc$$

$$G_2^{(5)} : \textcircled{5} \equiv \equiv \equiv \bigcirc \qquad B_2^{5,3} : \textcircled{5} \equiv \equiv \textcircled{3} \qquad I_2^{(3)}(10) : \textcircled{3} \equiv \equiv \equiv \bigcirc$$

(siehe [11]), sowie G_7 , G_{11} und G_{19} die zirkulären Präsentationen

$$D_2^{3,3} : \textcircled{3} \textcircled{3} \textcircled{3} \qquad D_2^{3,4} : \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{3} \qquad D_2^{3,5} : \textcircled{3} \textcircled{5} \textcircled{3}$$

Für die Spiegelungsgruppen G_{13} , G_{15} , G_{24} , G_{27} , G_{29} , G_{33} und G_{34} , sowie $G(d, p, n)$, $p \neq 1, 2$, sind uns keine vergleichbar einfachen Präsentationen bekannt.

4. ZYKLOTOMISCHE HECKEALGEBREN

Als ersten Schritt zur angekündigten Definition der Heckealgebren $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ zu d -kuspidalen Paaren $(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ in endlichen generischen reductiven Gruppen \mathbb{G} konstruieren wir generische Versionen dieser Algebren, die nur von der relativen Weylgruppe $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$, beziehungsweise der dafür im vorigen Paragraphen angegebenen Präsentation abhängen. Durch geeignete Spezialisierung der vorkommenden Parameter soll daraus dann die gesuchte Algebra $\mathcal{H}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}); x)$ erhalten werden. Die Spezialisierungen sind nach den Ergebnissen des Paragraphen 2 bereits in sämtlichen zyklischen Fällen bekannt. In 4C werden wir einige Überlegungen zum allgemeinen Fall anstellen, welche wir dann im folgenden Paragraphen zumindest für ein paar kleine Fälle verifizieren.

4A. Definition der zyklotomischen Heckealgebren.

Die klassische Heckealgebra zu einer endlichen Weylgruppe W wird ausgehend von der Präsentation von W als Coxetergruppe definiert. Für jeden Erzeuger s von W wählt man einen Erzeuger T_s der Heckealgebra $\mathcal{H}(W)$, der der quadratischen Relation $T_s^2 = u_s 1 + (u_s - 1)T_s$ mit einem Parameter u_s genügt. Dies läßt sich umschreiben zu

$$((-T_s) + u_s)((-T_s) - 1) = 0.$$

Bei der Spezialisierung $u_s \mapsto 1$ geht dies in die Relation für s in W über. Weiter verlangt man, daß T_r und T_s untereinander dieselbe Zopfrelation wie r und s erfüllen. Die entstehende \mathbb{C} -Algebra ist dann isomorph zur Gruppenalgebra CW .

Beim Versuch der Imitation des eben geschilderten Verfahrens für die im letzten Abschnitt bewiesenen Präsentationen der zyklotomischen Weylgruppen stößt man auf das Problem, daß nicht mehr alle Erzeuger s notwendig die Ordnung 2 haben. Die richtige Verallgemeinerung der quadratischen Relation wurde bereits im zweiten Paragraphen bei der Behandlung des zyklischen Falls gefunden.

4.1. Definition. Sei W eine zyklotomische Weylgruppe mit Diagramm $\mathcal{D} = \mathcal{D}(W)$, erzeugt durch die Menge von Spiegelungen S , und $\mathbf{u} = (u_{s,i} \mid s \in S, 0 \leq i \leq d(s) - 1)$ eine Menge von Transzendenten, so daß die Polynome $P_s := \prod_i (x - u_{s,i})$ die zwischen den $s \in S$ geltenden Zopfrelationen erfüllen. Wir definieren die zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}(W, \mathbf{u}) = \mathcal{H}(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ zu \mathcal{D} wie folgt:

- $\mathcal{H}(W, \mathbf{u})$ wird als $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ -Algebra durch $\{T_s \mid s \in S\}$ erzeugt.
- Hat der Erzeuger $s \in S$ die Ordnung $d = d(s)$, so erfüllt T_s die Relation

$$(T_s - u_{s,0})(T_s - u_{s,1}) \cdots (T_s - u_{s,d-1}) = 0.$$

- Sind $s_1, \dots, s_k \in S$, $k \in \{2, 3\}$, in der Präsentation durch eine Zopfrelation verbunden, so stehen T_{s_1}, \dots, T_{s_k} in derselben Zopfrelation.

Offensichtlich kann durch Skalierung von T_s immer $u_{s,0} = 1$ erreicht werden, und von dieser Normierung werden wir im weiteren öfters stillschweigend Gebrauch machen.

Für einen beliebigen Ring R mit Homomorphismus $f : \mathbb{Z}[\mathbf{u}] \rightarrow R$ sei schließlich $\mathcal{H}_R(W, \mathbf{u}) := R \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbf{u}]} \mathcal{H}(W, \mathbf{u})$. (Genauer müßte hier natürlich der Morphismus f in die Notation eingehen, aber dieser wird im folgenden jeweils aus dem Zusammenhang klar sein.)

Die zyklotomischen Heckealgebren besitzen also im allgemeinen mehrere Parameter $\mathbf{u} = (u_{s,i} \mid s \in S, 1 \leq i \leq d(s) - 1)$. Man hat etwa für $\mathcal{H}(A_2^{(3)})$ zwei freie Parameter, für $\mathcal{H}(B_2^{3,3})$ vier und für $\mathcal{H}(B_2^{4,3})$ fünf. Die Algebra $\mathcal{H}(D_n^{(4)})$, $n \geq 3$, besitzt zwei Parameter, aber in $\mathcal{H}(D_2^{(4)})$ sind der zweite und der dritte Erzeuger nicht mehr über einen vierten verbunden, so daß hier drei Parameter erlaubt sind.

4.2. Anmerkung. Folgt aus den Zopfrelationen zwischen $r, s \in S$ die Gleichheit der Polynome P_r und P_s , so sind die beiden Erzeuger bereits in der zugehörigen Zopfgruppe konjugiert, welche entsteht, wenn die Relationen über die Ordnungen der Erzeuger weggelassen werden. Dies illustriert das folgende

Beispiel: Eine Zopfrelation $rsr = srs$ zwischen Reflektionen r, s ist gleichbedeutend mit $s = r^{-1}s^{-1}rsr$, erzwingt also, daß r und s in der Zopfgruppe und somit erst recht in $W(\mathcal{D})$ konjugiert sind. Entsprechend sind auch T_r und T_s in der Heckealgebra $\mathcal{H}_K(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ über dem Quotientenkörper K von $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ konjugiert, müssen also dieselben Eigenwerte besitzen. Daher bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, die Parameter $u_{s,i}$ der in der Definition vorausgesetzten Verträglichkeitsbedingung zu unterwerfen.

Nach Konstruktion ist die zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}(W)$ im folgenden Sinne eine Quantisierung der zyklotomischen Weylgruppe:

4.3. Bemerkung. Ist R ein Körper der Charakteristik 0, und spezialisiert man in der zyklotomischen Heckealgebra $\mathcal{H}_R(W)$ die Parameter $u_{s,i}$ zum Knoten der Ordnung $d = d(s)$ zu ζ_d^i , wobei ζ_d eine primitive d -te Einheitswurzel bezeichnet, so wird die spezialisierte Algebra isomorph zur Gruppenalgebra RW von W über R (siehe (d-HV2)).

4.4. Anmerkungen. 1) Die klassische Iwahori-Hecke Algebra ergibt sich als Spezialfall der obigen Definition. Hier fordern wir die quadratische Relation $(T_s - q)(T_s - 1)$, wobei der Parameter wie üblich mit q bezeichnet ist. So erhält man die Heckealgebra zu W mit $d = 2$. Zum Übergang nach $d = 1$ ersetzt man formal q durch $-q$ (siehe [8]), wodurch die Relation für $(-T_s)$ genau in die klassische übergeht.

2) Im klassischen Fall erfüllt die Heckealgebra das Lemma von Matsumoto ([5], IV, §1.6, Prop. 5): Sind $s_1 \cdots s_k = s'_1 \cdots s'_k = w$ zwei reduzierte Ausdrücke für dasselbe Element $w \in W$, so gilt in $\mathcal{H}(W)$ auch $T_{s_1} \cdots T_{s_k} = T_{s'_1} \cdots T_{s'_k}$, was dann die Definition von T_w erlaubt. Dies gilt in zyklotomischen Heckealgebren im Allgemeinen nicht.

4.5. Beispiel. Sei $W = D_2^{(4)} = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = 1, rst = str = trs \rangle$. Wir wählen $u_{r,1} = u_{s,1} = u_{t,1} =: u$. Dann rechnet man leicht

$$T_t T_s T_r - T_r T_t T_s = (u + 1)(T_r T_t + T_r T_s - T_t T_r - T_t T_s)$$

nach, obwohl $tsr = rts$ in W gilt.

4B. Der Struktursatz für generische Heckealgebren.

In Verallgemeinerung des klassischen Ergebnisses über Iwahori-Hecke Algebren liegt die folgende Vermutung nahe, die wir zur Zeit leider noch nicht in voller Allgemeinheit zeigen können. Sei dazu $\mathbf{u}^{-1} := (u_0^{-1}, \dots, u_{d-1}^{-1})$.

4.6. Vermutung. Sei \mathcal{D} ein zyklotomisches Diagramm. Dann ist die zyklotomische Algebra $\mathcal{H}(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ frei vom Rang $|W(\mathcal{D})|$ über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$. Insbesondere ist für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper K , der $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ enthält,

$\mathcal{H}_K(\mathcal{D}) = K \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbf{u}]} \mathcal{H}(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ isomorph zur Gruppenalgebra $KW(\mathcal{D})$ (siehe (d-HV1) und (d-HV5)).

Der zweite Teil der Vermutung ergibt sich aus dem ersten unter Verwendung von Bemerkung 4.3 aus dem Deformationssatz von Tits (siehe etwa [12], 68.17).

In der Tat sollte diese Aussage auch für die beiden nach Anmerkung 3.8 in H_4 vorkommenden komplexen Spiegelungsgruppen und die dazu entsprechend Definition 4.1 gebildeten Algebren zutreffen. Es ist sogar denkbar, daß sie auch für die acht weiteren im Abschnitt 3D vorgestellten Spiegelungsgruppen richtig ist.

Abgesehen von einigen der exzeptionellen Diagramme ist Vermutung 4.6 richtig:

4.7. Satz. Die Vermutung 4.6 gilt für die zyklotomischen Diagramme $\mathcal{D} \in \{B_n^{(d)}, D_n^{(d)}, A_2^{(3)}, A_3^{(3)}, B_2^{3,3}, K_2\}$.

Beweis. Der Beweis des Satzes erfolgt in zwei Schritten. Zunächst geben wir ein Erzeugendensystem der richtigen Kardinalität von $\mathcal{H} := \mathcal{H}_R(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ über $R := \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$ an. Dessen Freiheit wird dann durch die Konstruktion genügend vieler inäquivalenter irreduzibler Matrixdarstellungen von \mathcal{H} gezeigt, also durch Nachweis eines genügend großen halbeinfachen Faktors.

Die einfachste Situation liegt für die Diagramme $B_n^{(d)}$ vor. Wir folgen hier dem eleganten Beweis dieses Falles in [3]. Seien dazu die Erzeuger von \mathcal{H} mit T_1, \dots, T_n bezeichnet, wobei jeweils T_i und T_{i+1} nicht kommutieren und T_1 zum Knoten der Ordnung d gehöre. Induktiv definieren wir dann $S_1 := T_1$, $S_i := T_i S_{i-1} T_i$ für $i = 2, \dots, n$. Es ist leicht zu zeigen, daß S_1, \dots, S_n eine kommutative Teilalgebra von \mathcal{H} erzeugen. Die Erzeuger $-T_2, \dots, -T_n$ erfüllen die Relationen der Iwahori-Hecke Algebra vom Typ A_{n-1} . Nach dem Lemma von Matsumoto (siehe [5], IV, §1.6, Prop. 5) erlaubt dies für jeden reduzierten Ausdruck $w = t_{i_1} \cdots t_{i_r}$ eines Elements $w \in W(B_n^{(d)})$ in den zugehörigen Gruppenelementen t_2, \dots, t_n die eindeutige Definition eines $T_w := T_{i_1} \cdots T_{i_r}$ in \mathcal{H} , unabhängig von der Wahl des reduzierten Ausdrucks für w .

Damit zeigt man die Zerlegung

$$(4.8) \quad \mathcal{H}(B_n^{(d)}) = \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq d-1 \\ w \in \mathfrak{S}_n}} R S_1^{k_1} \cdots S_n^{k_n} T_w,$$

deren Invarianz unter T_1, \dots, T_n leicht folgt. Da eine ähnliche, aber kompliziertere Rechnung anschließend auch im Fall $D_n^{(d)}$ vorgeführt wird, verweisen wir hier für die Details auf [3], Prop. 3.4. Hierbei beachte man, daß alle T_i

wegen $u_{i,j}^{-1} \in R$ bereits in \mathcal{H} invertierbar sind. Damit haben wir die richtige Anzahl von Erzeugern für \mathcal{H} gefunden.

Die Konstruktion irreduzibler Matrixdarstellungen für \mathcal{H} ist nun eine direkte Verallgemeinerung des Verfahrens von Hoefsmit [15]. In [15] wurden sämtliche inäquivalenten irreduziblen Matrixdarstellungen der generischen Iwahori-Hecke Algebra vom Typ $B_n = B_n^{(2)}$ explizit bestimmt. Durch die Ersetzung $T_i \mapsto -T_i$ der Erzeuger dieser Algebra erhält man so Darstellungen von $\mathcal{H}(B_n^{(2)}, \mathbf{u})$. Um allgemein Darstellungen für $\mathcal{H}(B_n^{(d)}, \mathbf{u})$ zu bekommen, kann man diese Konstruktion leicht auf beliebiges d verallgemeinern. Dies wurde bereits in [3] durchgeführt, weshalb wir hier darauf verzichten können.

Bevor wir den Hauptsatz über die Struktur der zyklotomischen Heckealgebra $\mathcal{H} = \mathcal{H}(D_n^{(d)}, \mathbf{u})$ beweisen können, müssen wir einige Hilfsergebnisse zusammentragen. Die Beweisidee ist eine Verallgemeinerung von [3], Prop. 3.4. Seien dazu die Erzeuger von \mathcal{H} als $S_1, T_2, T_2', T_3, T_4, \dots, T_n$ bezeichnet, wobei T_3, \dots, T_n zu dem Teildiagramm vom Typ A_{n-2} gehören, T_2 und T_2' nicht mit T_3 kommutieren, und schließlich S_1, T_2, T_2' gemäß der Relation $S_1 T_2' T_2 = T_2' T_2 S_1 = T_2 S_1 T_2'$ angeordnet seien. Zur Abkürzung setzen wir weiter $u := u_{2,1} = \dots = u_{n,1}$ und $u' := u_{2',1}$ (siehe Lemma 4.2). Zunächst bestimmen wir die Struktur von $\mathcal{H}(D_2^{(d)})$.

4.9. Lemma. *Die Menge*

$$B := \{S_1^k, S_1^k T_2 S_1^l, S_1^k T_2' S_1^l, T_2 S_1^k T_2 S_1^l \mid 0 \leq k, l \leq e-1\} \\ \cup \{T_2 S_1^k T_2' S_1^l \mid 1 \leq k \leq e-1, 0 \leq l \leq e-1\}$$

bildet ein R -Erzeugendensystem von $\mathcal{H}(D_2^{(2e)})$.

Beweis. Da der R -Modul $\sum_{T \in B} RT$ die Eins enthält, genügt es, seine Invarianz unter Linksmultiplikation mit T_2, T_2' und S_1 zu zeigen. Da T_2, T_2' und S_1 in $\mathcal{H}(D_2^{(2e)})$ invertierbar sind, ist dies gleichbedeutend mit der Invarianz unter $T_2, T_2' T_2$ und $S_1 T_2' T_2$. Wegen $T_2^2 = (u+1)T_2 - u$ folgt die Invarianz unter T_2 unmittelbar.

Weiter ist $T_2' T_2 S_1^k = T_2 S_1 T_2' S_1^{k-1}$ in B enthalten, oder läßt sich im Fall $k=0$ linear aus B kombinieren. Ebenso gilt

$$T_2' T_2 S_1^k T_2 S_1^l = S_1^k T_2' T_2^2 S_1^l \\ = (u+1)S_1^k T_2' T_2 S_1^l - uS_1^k T_2' S_1^l = (u+1)T_2' T_2 S_1^{k+l} - uS_1^k T_2' S_1^l,$$

und dies liegt nach dem eben bewiesenen im Erzeugnis von B . Beim dritten

Elementtyp erhält man

$$\begin{aligned} T_2' T_2 S_1^k T_2' S_1^l &= S_1^k T_2' T_2 T_2' S_1^l = S_1^k T_2'^2 S_1 T_2 S_1^{l-1} \\ &= (u' + 1) S_1^k T_2' S_1 T_2 S_1^{l-1} - u' S_1^k S_1 T_2 S_1^{l-1} \\ &= (u' + 1) S_1^k T_2 T_2' S_1^l - u' S_1^{k+1} T_2 S_1^{l-1}, \end{aligned}$$

welches wieder in B ausgedrückt werden kann. Beim vierten und fünften Typ folgt die Aussage sofort aus dem vorigen und der Gleichung $T_2^2 = (u+1)T_2 - u$.

Es bleibt die Invarianz unter $S_1 T_2' T_2 = T_2 S_1 T_2'$ zu beweisen. Für S_1^k ist das sofort klar. Wir verwenden nun weiter, daß das Element $S_1 T_2' T_2$ nach den definierenden Relationen mit allen drei Erzeugern S_1, T_2, T_2' vertauschbar ist, also im Zentrum von \mathcal{H} liegt. So wird $S_1 T_2' T_2 S_1^k T_2 S_1^l = S_1^{k+1} T_2' T_2^2 S_1^l$, und dafür sahen wir oben schon die Behauptung. Ebenso ist $S_1 T_2' T_2 S_1^k T_2' S_1^l = S_1^{k+1} T_2' T_2 T_2' S_1^l$ schon oben untersucht worden. Wegen der Vertauschbarkeit von $S_1 T_2' T_2$ mit T_2 können für die letzten beiden Typen von $b \in B$ die $S_1 T_2' T_2 b$ als Produkte von T_2 mit bereits behandelten Elementen geschrieben werden, und die T_2 -Invarianz wurde bereits gezeigt. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Im allgemeinen Fall $n \geq 3$ definieren wir für $2 \leq i \leq n$ Elemente $S_i \in \mathcal{H}$ induktiv durch $S_2 := S_1 T_2' T_2$, $S_i := T_i S_{i-1} T_i$ für $i = 3, \dots, n$. (Hier ist sogar $u' = u$.)

4.10. Lemma. In $\mathcal{H}(D_n^{(d)})$ gelten die folgenden Relationen:

- (a) $T_i S_j = S_j T_i$ für $3 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j, j+1$,
- (b) $S_i S_j = S_j S_i$ für $1 \leq i, j \leq n$,
- (c) $T_i S_i = (u+1)S_i - u S_{i-1} T_i$ für $i \geq 3$,
- (d) $T_i S_{i-1} = (1+u^{-1})S_i - u^{-1} S_i T_i$ für $i \geq 3$,
- (e) $T_i S_{i-1} S_i = S_{i-1} S_i T_i$ für $i \geq 3$.

Beweis. Aussage (a) zeigen wir durch Induktion nach j . Der Fall $j = 1$ ist nach Definition richtig, für $j = 2$ haben wir entsprechend $T_i S_2 = T_i S_1 T_2' T_2 = S_2 T_i$ wegen $i > j+1 = 3$. Sei die Behauptung nun bis zum Index $j-1$ bereits bewiesen. Ist $i > j+1$, so folgt die Vertauschbarkeit direkt aus den Relationen. Gilt hingegen $i < j-1$, so wird $T_i S_j = T_i T_j S_{j-1} T_j = T_j S_{j-1} T_j T_i = S_j T_i$ nach Induktionsannahme. Im Fall $i = j-1$ schreiben wir

$$T_{j-1} S_j = T_{j-1} T_j T_{j-1} S_{j-2} T_{j-1} T_j = T_j T_{j-1} S_{j-2} T_j T_{j-1} T_j = S_j T_{j-1},$$

und dies ist immer möglich, da $2 < i = j-1$ vorausgesetzt war.

Im zweiten Teil kann man sich offensichtlich auf $j > i$ beschränken. Für $i = 1$ gilt $S_1 \cdot S_2 = S_1 S_1 T_2' T_2 = S_1 T_2' T_2 S_1 = S_2 S_1$, also dann per Induktion

über j auch $S_1 S_j = S_1 T_j S_{j-1} T_j = S_j S_1$ für alle $2 < j \leq n$. Sei nun $i = 2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S_2 S_3 &= S_1 T'_2 T_2 T_3 S_1 T'_2 T_2 T_3 = S_1 T'_2 T_3 T_2 T_3 S_1 T'_2 T_3 = S_1 T'_2 T_3 T_2 S_1 T'_2 T_3 T'_2 \\ &= S_1 T'_2 T_3 T'_2 T_2 S_1 T_3 T'_2 = T_3 S_1 T'_2 T_2 T_3 T_2 S_1 T'_2 = S_3 S_2 \end{aligned}$$

und sodann wie eben $S_2 S_j = S_2 T_j S_{j-1} T_j = S_j S_2$ für $j \geq 4$. Im allgemeinen Fall $3 \leq i < j$ wird $S_i S_j = T_i S_{i-1} T_i S_j = S_j S_i$ per Induktion und wegen (a).

In (c) findet man $T_i S_i = T_i^2 S_{i-1} T_i = (u+1)S_i - uS_{i-1}T_i$, in (d) folgt die Behauptung wegen $T_i S_{i-1} = T_i S_{i-1} T_i T_i^{-1} = (u+1)S_i/u - S_i T_i/u$. Teil (e) ergibt sich aus $T_i S_{i-1} S_i = T_i S_{i-1} T_i S_{i-1} T_i = S_i S_{i-1} T_i = S_{i-1} S_i T_i$, wobei die letzte Gleichheit wegen (b) gilt. \square

Nach diesen Vorbereitungen ist der Beweis des Hauptresultats nicht mehr schwierig. Im Fall $D_2^{(d)}$ folgt dies sofort durch Abzählen aus Lemma 4.9 und den im Beweis von Satz 6.1 konstruierten irreduziblen Matrixdarstellungen.

Da wir für $d = 2$ die klassischen Iwahori-Hecke Algebren erhalten, für welche die Aussage wohlbekannt ist, setzen wir nun der Einfachheit halber $d > 2$ voraus. Nach Lemma 4.10 erzeugen die Elemente $S_1^k S_2^l$, $0 \leq k \leq e-1$, $0 \leq l \leq 2e-1$, eine kommutative Teilalgebra von $\mathcal{H}(D_2^{(2e)})$. Wegen $2e > 2$ hat die größte kommutative Teilalgebra von $RW(D_2^{(2e)})$ die Dimension $2e^2$. Somit besitzt $\langle S_1^k S_2^l \mid k, l \rangle$ ebenfalls die Dimension $2e^2$, und insbesondere liegen alle Potenzen von S_2 wieder in dieser Teilalgebra. Aus Dimensionsgründen muß daher

$$(4.11) \quad \mathcal{H}(D_2^{(2e)}) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq e-1 \\ 0 \leq l \leq 2e-1}} R S_1^k S_2^l + \sum_{\substack{0 \leq k \leq e-1 \\ 0 \leq l \leq 2e-1}} R S_1^k S_2^l T_2$$

gelten.

Die Erzeuger $-T_2, \dots, -T_n$ erfüllen die Relationen der Heckealgebra vom Typ A_{n-1} . Nach dem Lemma von Matsumoto erlaubt dies wie oben die eindeutige Definition von Elementen T_w für $w \in \langle t_2, \dots, t_n \rangle$.

Damit können wir die Zerlegung

$$(4.12) \quad \mathcal{H}(D_n^{(2e)}) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq e-1, 0 \leq k_i \leq 2e-1 \\ w \in \mathfrak{S}_n}} R S_1^k S_2^{k_2} \dots S_n^{k_n} T_w$$

beweisen, aus der der erste Teil des Ergebnisses für $\mathcal{H}(D_n^{(2e)})$ sofort folgt. Es genügt dazu wiederum, die Invarianz unter Linksmultiplikation mit den Erzeugern $S_1, T'_2, T_2, T_3, \dots, T_n$ zu bestätigen. Für S_1 ist dies sofort klar. Die T_i , $3 \leq i \leq n$, vertauschen nach Lemma 4.10(a) mit allen S_j außer für $i = j$

und $i = j + 1$. Nach Lemma 4.10(e) können sie auch an Produkten der Form $(S_{i-1}S_i)^k$ vorbeigeschoben werden. Sind die Exponenten von S_{i-1} und S_i in der Darstellung 4.12 verschieden, so erlauben Lemma 4.10(c) und (d) immer noch das Vertauschen mit T_i , unter Inkaufnahme der Erhöhung des kleineren der beiden Exponenten. Insgesamt können die T_i , $3 \leq i \leq n$, also bis zu T_w geschoben werden. Dort ist man aber in einer Teilalgebra, die die Relationen von A_{n-1} erfüllt, und die Gültigkeit der Behauptung folgt.

Es bleibt die Linksmultiplikation mit T'_2 und T_2 zu untersuchen. Wegen

$$(4.13) \quad T'_2 = S_1^{-1}S_2T_2^{-1} = (1 + u^{-1})S_1^{-1}S_2 - u^{-1}S_1^{-1}S_2T_2$$

genügt es sogar, nur die Multiplikation mit T_2 zu betrachten. Wir sortieren die S_i nun so um, daß die Potenzen von S_1 und S_2 ganz rechts stehen. Man verifiziert $T_2S_3 = S_3T'_2$ und sodann induktiv $T_2S_j = S_jT'_2$ für $4 \leq j \leq n$. Dabei kann T'_2 jeweils wieder durch den Ausdruck 4.13 ersetzt werden. Hat man auf diese Weise T_2 und die unterwegs entstandenen $S_1^{-1}S_2$ an allen S_i mit $3 \leq i \leq n$ vorbeigebracht, so zeigt schließlich die Anwendung von 4.11 die Invarianz.

Als nächstes prüft man nach, daß die Elemente

$$\tilde{S}_1 := \tilde{T}_1^2, \quad \tilde{T}'_2 := \tilde{T}_1^{-1}\tilde{T}_2\tilde{T}_1, \quad \tilde{T}_i \quad \text{für } i = 2, \dots, n,$$

von $\mathcal{H}(B_n^{(2e)}, \mathbf{v}) = \langle \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n \rangle$ mit

$$\mathbf{v} = (\pm\sqrt{u_{1,0}}, \dots, \pm\sqrt{u_{1,e-1}}, u_{2,0}, u_{2,1})$$

für $n \geq 3$ die Relationen von $\mathcal{H}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$ erfüllen. Insbesondere gibt es einen surjektiven Algebrenhomomorphismus von \mathcal{H} auf $\tilde{\mathcal{H}} := \langle \tilde{S}_1, \tilde{T}'_2, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_n \rangle$, der jeweils T_i auf \tilde{T}_i sendet. Da aber das Bild unseres Erzeugendensystems für \mathcal{H} in der Teilalgebra $\tilde{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}(B_n^{(2e)}, \mathbf{v})$ nach dem oben gezeigten frei über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$ ist, gilt das erst recht für das Urbild. Damit folgt auch die restliche Behauptung für $\mathcal{H}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$.

In $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, \mathbf{u})$ bildet $B :=$

$$\{T_1^i, T_2T_1^i, T_2^2T_1^i, T_1T_2T_1^i, T_1^2T_2T_1^i, T_1T_2^2T_1^i, T_1^2T_2^2T_1^i, T_2T_1^2T_2T_1^i \mid 0 \leq i \leq 2\}$$

eine Basis. Denn man überzeugt sich leicht anhand der Relationen, daß die Elemente von B unter Linksmultiplikation mit T_1 und T_2 jeweils in Linearkombinationen aus B übergehen. So ist etwa im schwierigsten Fall

$$\begin{aligned} T_2 \cdot T_1^2T_2^2T_1^i &= T_1^{-1}T_1T_2T_1^2T_2^2T_1^i = T_1^{-1}T_2T_1T_2T_1T_2^2T_1^i = T_1^{-1}T_2T_1^3T_2T_1^{i+1} \\ &= \alpha_1T_1^{-1}T_2^2T_1^{i+1} + \alpha_2T_1^{-1}T_2T_1T_2T_1^{i+1} + \alpha_3T_1^{-1}T_2T_1^2T_2T_1^{i+1} \\ &= \alpha_4T_2^2T_1^{i+1} + \alpha_5T_1T_2^2T_1^{i+1} + \alpha_6T_1^2T_2^2T_1^{i+1} + \alpha_2T_2T_1^{i+2} + \alpha_3T_2T_1^2T_2T_1^i \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq 2$ mit gewissen $\alpha_j \in K$. Die irreduziblen Matrixdarstellungen von $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, \mathbf{u})$ werden in 5B konstruiert. Damit folgt auch hier die Behauptung.

In $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, \mathbf{u})$ sei \mathcal{H}' die von T_1 und T_2 erzeugte Teilalgebra. Weiter sei

$$B := \{1, T_3, T_2T_3, T_2^2T_3, T_1T_2T_3, T_1^2T_2T_3, T_1T_2^2T_3, T_1^2T_2^2T_3, T_3T_2^2T_3, \\ T_1T_3T_2^2T_3, T_1^2T_3T_2^2T_3, T_2T_1^2T_2T_3, T_3T_2T_1^2T_2T_3, T_2T_1^2T_3T_2^2T_3, \\ T_2^2T_1T_3T_2^2T_3, T_1T_2^2T_1T_3T_2^2T_3, T_2T_1T_3T_2^2T_3, T_3^2, T_2T_3^2, T_2^2T_3^2, T_1T_2T_3^2, \\ T_1^2T_2T_3^2, T_1T_2^2T_3^2, T_1^2T_2^2T_3^2, T_2T_1^2T_2T_3^2, T_3T_2T_1^2T_2T_3^2, T_3^2T_2T_1^2T_2T_3^2\}.$$

Dann stellt man anhand der definierenden Relationen fest, daß

$$\sum_{S \in B} R S \mathcal{H}'$$

invariant unter Linksmultiplikation mit T_1, T_2 und T_3 bleibt, und daher schon gleich \mathcal{H} sein muß. Das Nachprüfen dieser Aussage für die 81 Produkte sei dem Leser überlassen. Etwas vereinfacht wird die Rechnung durch konsequente Benutzung der Formel $T_i T_j T_i^2 T_j = T_j T_i^2 T_j T_i$ für $1 \leq i, j \leq 3$, welche unmittelbar aus den definierenden Relationen folgt. Da die Erzeuger T_1, T_2 von \mathcal{H}' die Relationen von $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, \mathbf{u})$ erfüllen, können wir ein Erzeugendensystem für \mathcal{H}' wie oben wählen. Damit haben wir insgesamt $|B| |W(A_2^{(3)})| = 27 \cdot 24 = |W(A_3^{(3)})|$ Erzeuger für \mathcal{H} . Die irreduziblen Matrixdarstellungen werden später in 5F konstruiert, woraus die Aussage schließlich folgt.

Für die Algebren zu $B_2^{3,3}$ und K_2 schlagen wir einen anderen Weg zum Beweis der endlichen Erzeugung ein. Seien dazu \mathcal{D} ein zyklotomisches Diagramm mit k Knoten und t_1, \dots, t_k dazugehörige Erzeuger einer freien Halbgruppe M . Die Weylgruppe $W(\mathcal{D})$ entsteht als Quotient von M modulo der durch die Relationen \mathcal{R} von \mathcal{D} erzeugten Äquivalenzrelation. Wir wählen nun eine Ordnung $<$ auf M , welche monoton bezüglich der Multiplikation ist, und schreiben die Relationen in \mathcal{R} so um, daß jeweils die linke Seite größer als die rechte ist. Für Worte $w_1, w_2 \in M$ schreiben wir $w_1 \rightarrow w_2$, falls w_1 durch eine Folge von Anwendungen von Relationen in \mathcal{R} in w_2 übergeht. Wir nennen die Relationen in \mathcal{R} *konfluent*, falls es keine Ableitungen unendlicher Länge gibt und falls aus $w_1 \rightarrow w_2$ und $w_1 \rightarrow w_3$ schon die Existenz eines w_4 mit $w_2 \rightarrow w_4$ und $w_3 \rightarrow w_4$ folgt.

Die erste Bedingung ist leicht zu erfüllen, indem man $<$ als Verfeinerung der Längenfunktion auf der freien Halbgruppe M wählt. Das Knuth–Bendix Verfahren versucht, aus der Relationenmenge \mathcal{R} eine konfluentes Menge \mathcal{R}_{kon} von Relationen zu konstruieren. Ist das Verfahren erfolgreich, so liefert es also

einen Normalformalgorithmus in M/\equiv , das heißt, in jeder Klasse von M modulo \mathcal{R}_{kon} existiert ein eindeutig bestimmtes Element minimaler Länge, und dieses kann durch Anwendung der Relationen erhalten werden. Die Elemente von $W = M/\equiv$ entsprechen bijektiv diesen Normalformen.

Zur Anwendung dieser Überlegungen auf die Algebren \mathcal{H} überträgt man die Ordnung $<$ auf die Monome in den Erzeugern T_i von \mathcal{H} . In \mathcal{H} gelten nun nicht mehr dieselben Relationen wie in W . Kann aber gezeigt werden, daß aus $w_1 \rightarrow w_2$ in M schon

$$T_{w_1} \rightarrow T_{w_2} + a \quad \text{mit} \quad a = \sum \alpha_i U_i, \quad \alpha_i \in K, \quad U_i < T_{w_1} \text{ Monome,}$$

folgt, so kann der Normalformalgorithmus von W auf \mathcal{H} übertragen werden. Es genügt offensichtlich, dies für die Relationen in \mathcal{R}_{kon} zu zeigen.

Die definierenden Relationen von \mathcal{H} haben bereits die gewünschte Form. Für K_2 bestimmt man mit dem Computer eine konfluente Präsentation. Diese besteht aus 24 Relationen, welche wir hier nicht wiedergeben wollen. Man bestätigt, daß diese, modulo Termen kleinerer Länge, auch in der Algebra $\mathcal{H}(K_2)$ gelten, und erhält so ein Erzeugendensystem der Ordnung $|W(K_2)|$. Die irreduziblen Matrixdarstellungen von $\mathcal{H}(K_2)$ werden in 5E konstruiert, womit die Aussage auch in diesem Fall bewiesen ist. Ebenso geht man für $B_2^{3,3}$ vor, wobei hier die Darstellungen in 5C bestimmt werden. \square

Gemäß der vorgestellten Beweismethode müssen zur vollständigen Verifizierung von Vermutung 4.6 sämtliche Darstellungen der übrigen exzeptionellen zyklotomischen Heckealgebren bestimmt werden; ein Projekt, das wegen der Darstellungsgrade in der Größenordnung 80 etwa bei $A_4^{(3)}$ im Moment abgeschlossen scheint. Wir hoffen aber, die kleineren verbleibenden Fälle auf diese Art und Weise noch erledigen zu können.

Wir führen noch einige Inklusionen zwischen zyklotomischen Heckealgebren auf:

4.14. Bemerkung. (a) Für $n \geq 3$ ist $\mathcal{H}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$ eine Teilalgebra von $\mathcal{H}(B_n^{(2e)}, \mathbf{v})$ mit $\mathbf{v} = (\pm\sqrt{u_{1,0}}, \dots, \pm\sqrt{u_{1,e-1}}, u_{2,0}, u_{2,1})$.

(b) $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, \mathbf{u})$ ist Teilalgebra von $\mathcal{H}(B_3^{2,3}, \mathbf{v})$ für $\mathbf{v} = (u_{1,0}, u_{1,1}, u_{1,2}, 1, -1)$.

Beweis. Der erste Teil wurde bereits im Beweis des vorigen Satzes benutzt. Im zweiten Fall erfüllen die Elemente $T_1, T_2, T_3 T_2 T_3$ in $\mathcal{H}(B_3^{2,3}, \mathbf{v})$ die Relationen des Standarderzeugendensystems von $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, \mathbf{u})$, da wegen der Parameterwahl in diesem Fall $T_3^{-1} = T_3$ gilt. \square

4C. Parabolische Teilalgebren.

In der Anmerkung 3.3 wurde das Konzept der parabolischen Untergruppen einer zyklotomischen Weylgruppe W eingeführt. Diese erhält man durch

Wegnahme eines oder mehrerer Knoten aus dem Diagramm für W , wobei in zirkulären Relationen nicht nur ein einzelner Knoten entfernt werden darf. Da die zyklotomische Algebra $\mathcal{H}(W, \mathbf{u})$ zu W ebenfalls über das Diagramm definiert wird, macht auch hier der Begriff der *parabolischen Teilalgebren* Sinn. Sie werden durch Teilmengen $(T_s \mid s \in I)$ der Erzeuger der Algebra zu W erzeugt, wobei I die Erzeuger einer parabolischen Untergruppe von W sind. Als direkte Konsequenz aus Satz 4.7 für parabolische Teilalgebren erhalten wir:

4.15. Folgerung. *Ist \mathcal{D} eines der zyklotomischen Diagramme in Satz 4.7, so erzeugen die zu einem parabolischen Teildiagramm \mathcal{D}' von \mathcal{D} gehörigen Erzeuger in $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ eine zu $\mathcal{H}(\mathcal{D}')$ isomorphe Unteralgebra.*

In diesem Zusammenhang noch ein Wort zu den im ersten Paragraphen formulierten Vermutungen. Wir kennen nun parabolische Teilsysteme für die Diagramme, für die Weylgruppen und für die zugehörigen Heckealgebren. Die Heckealgebren sollen einmal als Endomorphismenalgebren gewisser $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda})$ für d -kuspidaale Paare $(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ mit $W = W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ identifiziert werden. Auch in der Sprechweise der d -zerfallenden Leviuntergruppen von \mathbb{G} kann man von parabolischen Strukturen sprechen. Sei dazu d fest und $(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ ein d -kuspidaales Paar in \mathbb{G} . Ist \mathbb{M} eine weitere d -zerfallende Leviuntergruppe von \mathbb{G} mit $\mathbb{L} \leq \mathbb{M} \leq \mathbb{G}$, so ist $\text{Uch}(\mathbb{M}, (\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}))$ nicht leer, es gibt also Charaktere $\boldsymbol{\mu}$ mit $(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}) \leq (\mathbb{M}, \boldsymbol{\mu})$. Im Beweis des Fundamental Theorem in [8] wurde die Existenz eines Verbandsisomorphismus zwischen der durch Inklusion geordneten Menge der parabolischen Untergruppen von $W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$ und der Menge der d -zerfallenden Leviuntergruppen \mathbb{M} mit $\mathbb{L} \leq \mathbb{M} \leq \mathbb{G}$ gezeigt.

Im klassischen Fall verhält sich diese Beziehung zwischen den verschiedenen parabolischen Teilstrukturen vernünftig: Ist $\mathbb{L} \leq \mathbb{M} \leq \mathbb{G}$ mit parabolischer Weyluntergruppe $W_{\mathbb{M}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}) \leq W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda})$, so ist die Endomorphismenalgebra zu $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{M}}(\boldsymbol{\lambda})$ gerade die parabolische Teilalgebra $\mathcal{H}(W_{\mathbb{M}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}))$ von $\mathcal{H}(W_{\mathbb{G}}(\mathbb{L}, \boldsymbol{\lambda}))$. Insbesondere bedeutet dies umgekehrt, daß die Werte der Parameter im klassischen Fall bereits durch die Werte im zyklischen Fall, also durch die Diagramme mit nur einem Knoten festgelegt sind.

Wir sehen zur Zeit keinen mathematischen Grund, warum dies auch im allgemeinen Fall so sein sollte, vermuten aber, daß sich diese Eigenschaft auch auf die zyklotomischen Heckealgebren fortsetzt. Damit wären also sämtliche Parameter für alle vorkommenden Heckealgebren bereits durch die Ergebnisse des Paragraphen 2 im zyklischen Fall bestimmt und könnten durch einfaches Zusammensetzen gewonnen werden.

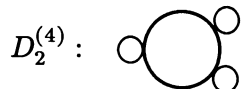
5. EINIGE EXZEPTIONELLE ZYKLOTOMISCHE ALGEBREN

Für die zyklotomischen Heckealgebren zu $D_2^{(4)}$ sowie einigen kleineren ex-

zeptionellen Spiegelungsgruppen können alle irreduziblen Darstellungen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 explizit bestimmt werden.

5A. Die Algebra $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$.

Die Algebra $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$ aus der unendlichen Serie der $D_n^{(d)}$ -Diagramme verdient besondere Beachtung. Es handelt sich hierbei bisher um den einzigen Fall, in dem eine nichtabelsche zyklotomische Algebra als Endomorphismenalgebra der Kohomologie einer Deligne–Lusztig–Varietät identifiziert werden konnte. In der Tat konnte Lusztig für ein geeignetes reguläres Element w der Ordnung 4 in der Weylgruppe $W(D_4)$ drei Automorphismen T_1, T_2, T_3 auf der Varietät X_w konstruieren, die die Relation $T_1T_2T_3 = T_2T_3T_1 = T_3T_1T_2$ erfüllen. Die zyklotomische Weylgruppe $W(D_2^{(4)})$ des Zentralisators von w in $W(D_4)$ besitzt nun nach §3 ebenfalls eine Präsentation



mit diesen Relationen.

Die zugehörige Heckealgebra $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$ mit $\mathbf{u} = (1, u, 1, v, 1, w)$ besitzt acht lineare Darstellungen, entsprechend den jeweils zwei verschiedenen Eigenwerten der drei Erzeuger T_1, T_2, T_3 , sowie die zwei 2-dimensionalen Darstellungen

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} v+1 & -1 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -r/uv \\ r & w+1 \end{pmatrix}$$

mit $x := -(w(v+1) + r(1+w))/vw$ und $r := \sqrt{uvw}$.

Damit läßt sich die "Charaktertafel" von $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$ in Tabelle 5.2 bestimmen; zur Abkürzung schreiben wir S für das zentrale Element $T_1T_2T_3$ von $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$.

Mit Lemma 1.2 bestimmt man hieraus leicht die relativen Grade bezüglich der in Tabelle 5.1 angegebenen Klassenvertreter durch Lösen eines linearen Gleichungssystems. Man beachte dabei, daß zur Auswertung von Lemma 1.2 nicht die Kenntnis einer vollständigen Basis erforderlich ist. Urbilder von Klassenvertretern in $W(D_2^{(4)})$ unter der Spezialisierungsabbildung ergeben bereits ein Teilsystem maximalen Rangs.

5.2. Bemerkung. Die relativen Grade f_i der zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$ lauten

$$\frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{(x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_2)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)}$$

5.1. Charaktertafel von $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, (1, u, 1, v, 1, w))$.

1	T_1	T_2	T_3	T_1T_2	T_2T_3	T_3T_1	S	S^2	S^3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	u	1	1	u	1	u	u	u^2	u^3
1	1	v	1	v	v	1	v	v^2	v^3
1	1	1	w	1	w	w	w	w^2	w^3
1	u	v	1	uv	v	u	uv	u^2v^2	u^3v^3
1	u	1	w	u	w	uw	uw	u^2w^2	u^3w^3
1	1	v	w	v	vw	w	vw	v^2w^2	v^3w^3
1	u	v	w	uv	vw	uw	uvw	$u^2v^2w^2$	$u^3v^3w^3$
2	$u + 1$	$v + 1$	$w + 1$	$\frac{r(w+1)}{w}$	$\frac{r(u+1)}{u}$	$\frac{r(v+1)}{v}$	$2r$	$2r^2$	$2r^3$
2	$u + 1$	$v + 1$	$w + 1$	$-\frac{r(w+1)}{w}$	$-\frac{r(u+1)}{u}$	$-\frac{r(v+1)}{v}$	$-2r$	$2r^2$	$-2r^3$

für die acht möglichen Wahlen von $\{x_1, x_2\} = \{1, u\}$, $\{y_1, y_2\} = \{1, v\}$, $\{z_1, z_2\} = \{1, w\}$ sowie

$$\frac{ruvw}{2(r-1)(r-u)(r-v)(r-w)}$$

für die beiden 2-dimensionalen Darstellungen.

Gemäß der obigen Anmerkung sollte $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$ als Endomorphismenalgebra der Varietät X_w zu der Deligne–Lusztig Induktion $R_{\mathbb{T}_w}^{\mathbb{G}}$ in $\mathbb{G} = D_4$ mit $|\mathbb{T}_w| = \Phi_4(x)^2$ vorkommen. Nach Bemerkung 2.19 gehören zu dieser Situation die Spezialisierungen $u, v, w \mapsto q^2$ der Parameter.

5.3. Folgerung. *Unter der Spezialisierung $u, v, w \mapsto q^2$ gehen die relativen Grade von $\mathcal{H}(D_2^{(4)}, \mathbf{u})$, multipliziert mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{T}_w}^{\mathbb{G}}(1))(q)$, bis auf das Vorzeichen in die Grade unipotenter Charaktere im Φ_4 -Hauptblock von $D_4(q)$ über.*

5B. Die Algebra $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, \mathbf{u})$.

Die kleinste exzeptionelle zyklotomische Weylgruppe G_4 besitzt die Präsentation

$$A_2^{(3)} : \quad \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$$

(siehe Satz 3.2) und ist isomorph zu der speziellen linearen Gruppe $SL_2(3)$. Diese besitzt sieben irreduzible komplexe Charaktere. Die zugehörigen Darstellungen der Heckealgebra $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (1, u, v)$, lassen sich leicht angeben. Mit den Standarderzeugern T_1 und T_2 von \mathcal{H} sind dies neben den drei

offensichtlichen linearen Darstellungen $X_{1,2,3}$ zu den drei möglichen Eigenwerten $1, u, v$ von T_1 und T_2 die drei aus

$$X_{4,5,6} : T_1 \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} y & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

durch geeignete Wahl von $x, y \in \{1, u, v\}$ erhältlichen 2-dimensionalen sowie die 3-dimensionale

$$X_7 : T_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u(1+v) & u & 0 \\ v & -1 & v \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} u & 1 & u \\ 0 & v & v(u+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind alle irreduziblen Darstellungen bereits über dem Ring $\mathbb{Z}[\mathbf{u}]$ realisiert.

Vertreter minimaler Länge der sieben Konjugiertenklassen von $W(A_2^{(3)})$ sind $1, s_1, s_1^2, s_1 s_2, s_1 s_2 s_1, s_1^2 s_2^2$ und $s_1 s_2^2 s_1 s_2^2$. Aus den oben angegebenen Matrixdarstellungen errechnet man nun durch Spurbildung leicht die "Charaktertafel" 5.4 von $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, (1, u, v))$:

5.4. Charaktertafel von $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, (1, u, v))$.

	1	T_1	T_1^2	$T_1 T_2$	$T_1 T_2 T_1$	$T_1^2 T_2^2$	$T_1 T_2^2 T_1 T_2^2$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	u	u^2	u^2	u^3	u^4	u^6
χ_3	1	v	v^2	v^2	v^3	v^4	v^6
χ_4	2	$1+u$	$1+u^2$	u	0	$-u(1+u^2)$	$-2u^3$
χ_5	2	$1+v$	$1+v^2$	v	0	$-v(1+v^2)$	$-2v^3$
χ_6	2	$u+v$	u^2+v^2	uv	0	$-uv(u^2+v^2)$	$-2u^3v^3$
χ_7	3	$1+u+v$	$1+u^2+v^2$	0	$-uv$	$u^2+v^2+u^2v^2$	$3u^2v^2$

Mit Lemma 1.2 bestimmt man hieraus die relativen Grade:

5.5. Bemerkung. Die relativen Grade f_i der zyklotomischen Heckealgebra $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, (1, u, v))$ zu den irreduziblen Darstellungen X_i lauten

$$f_{1,2,3} = \frac{x^4 y^4}{(x^2 - xz + z^2)(y^2 - yz + z^2)(x - z)(y - z)(xy + z^2)},$$

$$f_{4,5,6} = \frac{-x^4 y z}{(x^2 + yz)(y^2 - yz + z^2)(x - y)(x - z)},$$

$$f_7 = \frac{u^2 v^2 w^2}{(u^2 + vw)(v^2 + uw)(w^2 + uv)},$$

mit $\{x, y, z\} = \{1, u, v\}$.

Die Gruppe $G_4 = W(A_2^{(3)})$ kommt nur für den Φ_3 -Hauptblock und den Φ_6 -Hauptblock von ${}^3D_4(q)$ als relative Weylgruppe in Gruppen vom Lie-Typ vor. Hier prüft man sofort nach:

5.6. Folgerung. *Unter der Spezialisierung $u \mapsto q, v \mapsto q^2$ gehen die relativen Grade f_1, \dots, f_7 von $\mathcal{H}(A_2^{(3)}, (1, u, v))$, multipliziert mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^G(\lambda))(q)$, bis auf das Vorzeichen in die Grade unipotenter Charaktere im Φ_3 -Hauptblock von ${}^3D_4(q)$ über.*

Das einzige nichttriviale echte Teildiagramm von $A_2^{(3)}$ hat den Typ $B_1^{(3)}$ und gehört zu der Leviuntergruppe $\Phi_3(q).A_2(q)$ von ${}^3D_4(q)$. Da für den zyklischen Fall $d = 3$ in $A_2(q)$ die Parameter in Bemerkung 2.10 zu $1, q, q^2$ bestimmt wurden, erhält man hier wie gewünscht die Parameter im höherdimensionalen Fall aus denen im zyklischen.

5C. Die Algebra $\mathcal{H}(B_2^{3,3}, \mathbf{u})$.

Die komplexe Spiegelungsgruppe G_5 mit der Präsentation

$$B_2^{3,3} : \quad \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$$

ist isomorph zum direkten Produkt $SL_2(3) \times 3$, und besitzt damit 21 inäquivalente komplexe irreduzible Darstellungen. Als entsprechende Darstellungen der Heckealgebra $\mathcal{H}(G_5, \mathbf{u})$ erhält man neun lineare Darstellungen X_{3i+j+1} über die möglichen Eigenwerte $u_{1,i}$ und $u_{2,j}$ von T_1 und T_2 , weiter die neun 2-dimensionalen aus

$$X_{10, \dots, 18} : \quad T_1 \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ ux + vy & v \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

durch geeignete Wahl der Parameter $u, v \in \{u_{1,j}\}$ $x, y \in \{u_{2,j}\}$ erzeugbaren Darstellungen, sowie schließlich die drei 3-dimensionalen $X_{19,20,21}$:

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(r^2 + vx)/vx & u & 0 \\ -y(v+r)/r & v+r & v \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} x & x+r & -u(x+r)/r \\ 0 & y & -(r^2 + vx)/vx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $\{u, v\} = \{u_{1,1}, u_{1,2}\}$, $\{w, x\} = \{u_{2,1}, u_{2,2}\}$, wobei $r^3 = uvxy$ sei. Die Darstellungen sind demnach hier erst über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}, \zeta_3, \sqrt[3]{u_{1,1}u_{1,2}u_{2,1}u_{2,2}}]$ definiert. Mit Lemma 1.2 erhält man nun:

5.7. Bemerkung. Die relativen Grade f_i der zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}_R(B_2^{3,3}, \mathbf{u})$ zu den irreduziblen Darstellungen X_i lauten $f_{1,\dots,9} =$

$$\frac{u^4 v^4 x^4 y^4}{(uvxy + wz)(ux + wz)(uy + wz)(vx + wz)(vy + wz)(u - w)(v - w)(y - z)(x - z)},$$

$$f_{10,\dots,18} = \frac{-u^4 x^4 vywz}{(u^2 x^2 + vywz)(vy + wz)(vz + wy)(x - y)(x - z)(u - v)(u - w)},$$

für alle möglichen Wahlen $\{u, v, w\} = \{u_{1,j}\}$, $\{x, y, z\} = \{u_{2,j}\}$, sowie $f_{19,20,21} =$

$$\frac{u^3 v^3 x^3 y^3}{3(r + u)(r + v)(r + x)(r + y)(r + 1)(r + ux)(r + vx)(r + uy)(r + vy)}$$

mit $r^3 = uvxy$ und $\{u, v\} = \{u_{1,1}, u_{1,2}\}$, $\{x, y\} = \{u_{2,1}, u_{2,2}\}$.

Die Spiegelungsgruppe G_5 tritt in den in Tabelle 5.9 aufgeführten exzeptionellen Gruppen als relative Weylgruppe auf.

5.8. Folgerung. Spezialisiert man die relativen Grade f_i von $\mathcal{H}_R(B_2^{3,3}, \mathbf{u})$ entsprechend den Parameterwerten in 5.9, so erhält man nach Multiplikation mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda}))(q)$ bis auf das Vorzeichen die Grade der unipotenten Charaktere im jeweils angegebenen Φ_d -Block von \mathbb{G} .

5.9. Parameter für $\mathcal{H}(B_2^{3,3})$.

\mathbb{G}	d	$\mathbb{L}(q)$	$\boldsymbol{\lambda}$	Parameter
F_4	3	$(q^2 + q + 1)^2$	1	q, q^2, q, q^2
	6	$(q^2 - q + 1)^2$	1	$-q, q^2, -q, q^2$
E_6	6	$(q^2 - q + 1)^2(q^2 + q + 1)$	1	$-q, q^2, q^2, q^4$
2E_6	3	$(q^2 + q + 1)^2(q^2 - q + 1)$	1	q, q^2, q^2, q^4
E_8	3	$(q^2 + q + 1)^2 {}^3D_4(q)$	${}^3D_4[-1]$	q, q^2, q^4, q^8
	6	$(q^2 - q + 1)^2 {}^3D_4(q)$	$\phi_{2,1}$	$-q, q^2, q^4, q^8$

Man prüft nach, daß die Parameterwerte immer bereits durch die 1-dimensionalen Teildiagramme bestimmt sind. Weiter stellt man fest, daß die zwei nichtrationalen relativen Grade immer zu unipotenten Charakteren spezialisieren, für die der zugehörige Eigenwert des Frobenius eine dritte oder sechste Einheitswurzel ist.

5D. Die Algebra $\mathcal{H}(A_2^{(4)}, \mathbf{u})$.

Die Gruppe G_8 wird präsentiert durch

$$A_2^{(4)} : \quad \textcircled{4} \text{---} \textcircled{4}$$

und besitzt 16 komplexe irreduzible Charaktere. Die entsprechenden Darstellungen der Heckealgebra $\mathcal{H}(A_2^{(4)}, \mathbf{u})$ können wiederum explizit angegeben werden. Es sind dies die vier linearen Charaktere $X_{1, \dots, 4}$ zu den Eigenwerten u_0, \dots, u_3 von T_1 und T_2 , die sechs aus

$$X_{5, \dots, 10} : \quad T_1 \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ -u & v \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} v & v \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

durch Wahl der Parameter $u, v \in \{\mathbf{u}\}$ erhältlichen der Dimension zwei, die vier aus

$$X_{11, \dots, 14} : \quad T_1 \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ -v(u+w) & v & 0 \\ w & -1 & w \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} v & 1 & v \\ 0 & w & w(u+v) \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

erhältlichen 3-dimensionalen, sowie die zwei 4-dimensionalen $X_{15, 16}$:

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/v & u & 0 & 0 \\ 1/r & (uv-r)/r & v & 0 \\ -u & ua & ra & w \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} w & va & uva & -uv^2/r \\ 0 & v & uv-r & v/r \\ 0 & 0 & u & 1/r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $a := r - uv - w$, $r := \sqrt{uvw}$ und $(1, u, v, w) = \mathbf{u}$. Wiederum sind die Darstellungen nicht über $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$ realisierbar, sondern erst nach der quadratischen Erweiterung mit $\sqrt{u_0 u_1 u_2 u_3}$. Wie im Falle von G_4 beweist man:

5.10. Bemerkung. Die relativen Grade f_i der zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}(A_2^{(4)}, \mathbf{u})$ zu den irreduziblen Darstellungen X_i lauten für die vier linearen Charaktere

$$\frac{u^6 v^6 w^6}{(uvw-x^3)(uw+x^2)(vw+x^2)(uv+x^2)\Phi_6(u, x)\Phi_6(v, x)\Phi_6(w, x)(u-x)(v-x)(w-x)},$$

für die sechs 2-dimensionalen Charaktere

$$\frac{-u^6 v^6 w x}{(u^2 v^2 + uvwx + w^2 x^2)\Phi_6(w, x)(u^2 + wx)(v^2 + wx)(u-w)(u-x)(v-w)(v-x)},$$

für die vier 3-dimensionalen

$$\frac{u^6 v^2 w^2 x^2}{(u^3 - vwx)(vw + x^2)(vx + w^2)(wx + v^2)(u - v)(u - w)(u - x)},$$

wobei jeweils $\{u, v, w, x\} = \{\mathbf{u}\}$ ist, sowie

$$\frac{-u^4 v^4 w^4}{2(r + u^2)(r + v^2)(r + w^2)(r + 1)(r + u + vw)(r + v + uw)(r + w + uv)} r$$

mit $r = \pm\sqrt{uvw}$ und $(1, u, v, w) = \mathbf{u}$ für die zwei 4-dimensionalen.

Hierbei bezeichnet $\Phi_i(x, y)$ das homogenisierte i -te zyklotomische Polynom in x und y , so daß $\Phi_i(x, 1) = \Phi_i(x)$ wird.

Die Spiegelungsgruppe G_8 tritt mehrmals als relative Weylgruppe in den exzeptionellen Gruppen auf.

5.11. Folgerung. *Spezialisiert man die relativen Grade f_i von $\mathcal{H}_R(A_2^{(4)}, \mathbf{u})$ entsprechend den Parameterwerten in 5.12, so erhält man nach Multiplikation mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\boldsymbol{\lambda}))(q)$ bis auf das Vorzeichen die Grade der unipotenten Charaktere im jeweils angegebenen Φ_d -Block von \mathbb{G} .*

5.12. Parameter für $\mathcal{H}(A_2^{(4)})$.

\mathbb{G}	d	$L(q)$	$\boldsymbol{\lambda}$	Parameter
2F_4	8'	$(q^2 + \sqrt{2}q + 1)^2$	1	$\zeta_8^3 q, \zeta_8^5 q, q^2$
	8''	$(q^2 - \sqrt{2}q + 1)^2$	1	$\zeta_8 q, \zeta_8^7 q, q^2$
F_4	4	$(q^2 + 1)^2$	1	$q, -q, q^2$
E_6	4	$(q^2 + 1)^2(q - 1)^2$	1	$-q, q^2, -q^3$
2E_6	4	$(q^2 + 1)^2(q + 1)^2$	1	q, q^2, q^3
E_7	4	$(q^2 + 1)^2 A_1(q)^3$	ϕ_2^3	$q, -q, -q^4$
			ϕ_{11}^3	$q^3, -q^3, -q^4$
E_8	4	$(q^2 + 1)^2 D_4(q)$	$\phi_{3,1}$	$-1, -q, q^5$
			$\phi_{123,013}$	$-q^4, q^5, -q^5$
			$\phi_{013,2}$	$-q, -q^4, q^5$
			$\phi_{012,3}$	$q, -q^4, -q^5$

5E. Die Algebra $\mathcal{H}(K_2, \mathfrak{u})$.

Die Gruppe G_{12} wird präsentiert durch

$$K_2 : \circlearrowleft$$

und ist isomorph zu $GL_2(3)$. Diese besitzt 8 komplexe irreduzible Charaktere. Die entsprechenden Darstellungen der Heckealgebra $\mathcal{H}(K_2, (1, \mathfrak{u}))$ können nicht mehr so leicht wie in den vorher behandelten Fällen berechnet werden. Insbesondere die 4-dimensionale Darstellung kostet einige Mühe. Da die Matrizen für die Erzeuger T_1, T_2, T_3 bereits recht umfangreich werden, geben wir diese nicht explizit an. Die zwei möglichen Eigenwerte der T_i führen zu den beiden linearen Darstellungen, die drei 2-dimensionalen Darstellungen sind durch

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & u \end{pmatrix}, \quad T_3 \mapsto \frac{1}{r-1} \begin{pmatrix} u(u-r+1) & -(u-r) \\ a(u-r) & ru-u-a \end{pmatrix}$$

mit $a := u^2 - ru + u - r + 1$ und $r := \sqrt{2u}$, sowie

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & u+1 \end{pmatrix}$$

gegeben, und schließlich die beiden 3-dimensionalen durch

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & -x & y \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad T_3 \mapsto \begin{pmatrix} x+y & -x & -x \\ 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\{x, y\} = \{1, u\}$. Zwei der drei 2-dimensionalen Darstellungen sind erst über einer Erweiterung mit $\sqrt{2u}$ realisierbar, die übrigen lassen sich über $\mathbb{Q}(u)$ schreiben. Man stellt fest:

5.13. Bemerkung. Die relativen Grade f_i der zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}_R(K_2, (1, \mathfrak{u}))$ lauten mit $\{x, y\} = \{1, u\}$

$$\frac{x^{12}}{(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)^2(x - y)^2}$$

für die zwei linearen Charaktere,

$$\frac{-u^2}{12(u^2 \pm u\sqrt{2u} + u \pm \sqrt{2u} + 1)(u \pm \sqrt{2u} + 1)^2}$$

sowie

$$\frac{u^2}{2(u^2 - u + 1)(u - 1)^2}$$

für die drei 2-dimensionalen,

$$\frac{-x^5 y}{(x - y)^2 (x^2 + y^2)^2}$$

für die zwei 3-dimensionalen, sowie

$$\frac{u^2}{3(u^2 + 1)^2}$$

für die 4-dimensionale Darstellung.

Die Spiegelungsgruppe G_{12} tritt als relative Weylgruppe nur beim Φ_4 -Hauptblock von ${}^2F_4(q^2)$ auf.

5.14. Folgerung. *Unter der Spezialisierung $u \mapsto q^2$ gehen die relativen Grade von $\mathcal{H}(K_2, (1, u))$, multipliziert mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^G(\lambda))(q)$, bis auf das Vorzeichen in die Grade unipotenter Charaktere im Φ_4 -Hauptblock von ${}^2F_4(q^2)$ über.*

5F. Die Algebra $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, \mathbf{u})$.

Die Spiegelungsgruppe $G_{25} = W(A_3^{(3)})$ mit der Präsentation

$$A_3^{(3)} : \quad \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$$

besitzt 24 irreduzible komplexe Charaktere. Mit etwas Mühe können die zugehörigen Darstellungen der zyklotomischen Heckealgebra $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, (1, u, v))$ konstruiert und daraus die relativen Grade berechnet werden. Da die beiden größten irreduziblen Darstellungen 9-dimensional sind, Koeffizienten in $\mathbb{Q}(u, v, \zeta_3)$ besitzen, und daher die Matrizen für die Erzeuger recht umfangreich werden, geben wir die Darstellungen hier nicht explizit an.

5.15. Bemerkung. *Die relativen Grade f_i der zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, (1, u, v))$ zu den irreduziblen Darstellungen X_i lauten mit $\{x, y, z\} = \{1, u, v\}$ für die drei linearen Charaktere*

$$\frac{x^{12} y^{12}}{\Phi_3(xy, z^2) \Phi_6(x, z) \Phi_6(y, z) (x^2 y - z^3) (y^2 x - z^3) \Phi_4(x, z) \Phi_4(y, z) (xy + z^2) (x - z)^2 (y - z)^2},$$

für die drei 2-dimensionalen Darstellungen

$$\frac{x^2 y^2 z^{12}}{(x^2 y^2 + x y z^2 + z^4)(x^2 - x y + y^2)(x y + z^2)(x + z)(y + z)(x - y)^2(x - z)^2(y - z)^2},$$

für die insgesamt sieben 3-dimensionalen

$$\frac{-u^4 v^4}{(u - v)^2(u^2 + v)(u + v^2)(u - 1)^2(uv + 1)(v - 1)^2}$$

und

$$\frac{-x^{12} y^4 z}{(x^2 - x z + z^2)(x^3 - y z^2)(x^2 + y z)(x y + z^2)(y^2 + z^2)(x + z)(x - y)(x - z)^2(y - z)^2},$$

für die sechs 6-dimensionalen

$$\frac{x^8 y^4 z^2}{(x y^2 - z^3)(x^2 - x z + 1)(x z + y^2)(x + y)(x + z)(x - y)^2(x - z)^2(y - z)},$$

für die drei 8-dimensionalen

$$\frac{x^6 y^6 z^2}{(x^2 y^2 + x y z^2 + z^4)(x z^2 - y^3)(x^3 - y z^2)(x - y)^2(x - z)(y - z)},$$

sowie

$$\frac{-u^4 v^4 (\zeta_3 u v (u^3 + v^3 + 1) + \zeta_3^2 (u^3 v^3 + u^3 + v^3))}{(u^4 + v u^2 + v^2) \Phi_6(u) \Phi_6(v) \Phi_6(u, v) (u^2 v^2 + u v + 1) (u^2 + u v^2 + v^4)}$$

und der dazu konjugiert komplexe für die beiden 9-dimensionalen.

5.16. Folgerung. *Unter der Spezialisierung $u \mapsto q$, $v \mapsto q^2$, gehen die relativen Grade von $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, (1, u, v))$, multipliziert mit $\text{Deg}(R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\lambda}))(q)$, bis auf das Vorzeichen in die Grade unipotenter Charaktere im Φ_3 -Hauptblock von $E_6(q)$ über.*

Die beiden 9-dimensionalen Darstellungen entsprechen hierbei den beiden kuspidalen unipotenten Charakteren von E_6 mit ζ_3 und ζ_3^2 als assoziierten Eigenwerten des Frobenius.

6. RATIONALITÄT DER DARSTELLUNGEN ZYKLOTOMISCHER HECKEALGEBREN

Wie auch im Fall der gewöhnlichen Heckealgebren stellt sich bei den zyklotomischen Heckealgebren die Frage nach der Rationalität der irreduziblen Darstellungen. Dieses Problem hat zwei Aspekte: einerseits die Rationalität der Darstellungen der generischen Heckealgebra mit algebraisch unabhängigen Parametern, andererseits die Rationalität der Darstellungen nach der (ersten) Spezialisierung zu den in der Natur vorkommenden Parametern, also zu den in Abschnitt 2 bestimmten Potenzen von $q^{\frac{1}{2}}$, multipliziert mit einer Einheitswurzel. Wir untersuchen zunächst die generische Fragestellung.

6A. Rationalität der Darstellungen im generischen Fall.

Wir gehen von einem der zusammenhängenden zyklotomischen Diagramme \mathcal{D} in Definition 3.1 aus. Dazu bilden wir die zyklotomische Heckealgebra $\mathcal{H}_{\bar{K}}(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ über dem Körper $\bar{K} = \overline{\mathbb{Q}(\mathbf{u})}$ und mit algebraisch unabhängigem Parametersatz \mathbf{u} . Zuerst untersuchen wir die zwei doppelt unendlichen Serien $B_n^{(d)}$ und $D_n^{(d)}$. Für die Beschreibung der Darstellungen der zugehörigen Weylgruppen verweisen wir auf Abschnitt 3C.

6.1. Satz. (a) *Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen der zyklotomischen Heckealgebren $\mathcal{H}_{\bar{K}}(B_n^{(d)}, \mathbf{u})$ sind rational.*

(b) *Der irreduzible Charakter χ_α der zyklotomischen Heckealgebra $\mathcal{H}_{\bar{K}}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$ ist nicht rational genau dann, wenn $\alpha_{2i-1} \neq \alpha_{2i}$ für mindestens zwei i zwischen 1 und e gilt.*

Beweis. Die irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(B_n^{(d)}, \mathbf{u})$ lassen sich durch leichte Verallgemeinerung der Konstruktion von Hoefsmit [15] mit Hilfe von Standardtableaux explizit hinschreiben (siehe hierzu [3], Th. 3.7). Insbesondere sieht man, daß alle Matrizen der Standarderzeuger nur Einträge aus $\mathbb{Q}(\mathbf{u})$ haben. Damit folgt der erste Teil des Satzes.

Zum Beweis des zweiten Teils verwenden wir Bemerkung 4.14(a), welche eine Einbettung von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$ in die Algebra zu $B_n^{(2e)}$ liefert. Diese existiert zwar nur für Dimension $n \geq 3$, da $\mathcal{H}_{\bar{K}}(D_2^{(2e)})$ einen Parameter mehr besitzt, aber für $n = 2$ bestimmt man die höchstens 2-dimensionalen irreduziblen Darstellungen leicht explizit und prüft so die Aussage nach. Neben den offensichtlichen $4e$ linearen Darstellungen sind dies die $e(e-1)$ 2-dimensionalen

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} u_i & a_{ij} \\ 0 & u_j \end{pmatrix}, \quad T'_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1+v & -1 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -r_{ij}/(u_j v) \\ r/u_i & 1+w \end{pmatrix}$$

mit $r_{ij} := \sqrt{u_i u_j v w}$ und $a_{ij} := -(w u_i (v+1) + r_{ij} (w+1)) / (v w)$ für $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{e-1}, 1, v, 1, w)$.

Für $n \geq 3$ erhält man aus Bemerkung 4.14(a) und der Isomorphieausage in Satz 4.7 bereits diejenigen Darstellungen von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$, die durch Einschränken einer irreduziblen Darstellung von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(B_n^{(2e)}, \mathbf{v})$ mit

$$\mathbf{v} = (\pm\sqrt{u_{1,0}}, \dots, \pm\sqrt{u_{1,e-1}}, u_{2,0}, u_{2,1})$$

entstehen. Diese lassen sich nach Teil (a) schon über $K := \mathbb{Q}(\mathbf{v})$ schreiben. Der Charakterkörper ist also in allen solchen Fällen in K enthalten. Wir können aber sogar die Operation der erzeugenden Automorphismen von $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\mathbf{u}))$ auf den irreduziblen Charakteren χ_α von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(B_n^{(d)}, \mathbf{v})$ bestimmen. Sei dazu $\delta_i \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\mathbf{u}))$ derjenige Automorphismus, welcher $\sqrt{u_{1,i}}$ auf $-\sqrt{u_{1,i}}$ abbildet und die übrigen $\sqrt{u_{1,j}}$, $j \neq i$, festläßt. Dann ist $\delta_i(\chi_\alpha) = \chi_{\alpha'}$ mit

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2i}, \alpha_{2i-1}, \dots, \alpha_{2e-1}, \alpha_{2e}).$$

Also bleibt χ_α unter $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\mathbf{u}))$ invariant, wenn $\alpha_{2i-1} = \alpha_{2i}$ für alle $1 \leq i \leq e$ gilt. Stimmt α_{2i-1} für genau ein i nicht mit α_{2i} überein, so vertauscht die Galoisgruppe offensichtlich gerade die zwei Fortsetzungen des irreduziblen Charakters von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$ auf $\mathcal{H}_{\bar{K}}(B_n^{(2e)}, \mathbf{v})$, und der Charakter von $\mathcal{H}_{\bar{K}}(D_n^{(2e)})$ bleibt auch in diesem Fall invariant. Damit folgt die Aussage (b) für die durch Einschränken erhaltenen irreduziblen Charaktere.

Es bleiben die aufspaltenden Charaktere zu untersuchen. Nach den obigen Überlegungen und Bemerkung 3.7 sind diese jedenfalls $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\mathbf{u}))$ -invariant. Die Rationalität der Konstituenten zeigen wir durch Berechnung einer Vielfachheit in einem geeigneten induzierten Charakter. Zunächst genügt es, sich auf gerade n zu beschränken, da nach Bemerkung 3.7 für ungerades n alle Charaktere irreduzibel einschränken. Für $n = 2$ haben die aufspaltenden Charaktere den Grad 2, ihre irreduziblen Konstituenten sind also linear. Die linearen Charaktere werden aber gerade durch die möglichen Eigenwerte beschrieben und sind somit sicher rational.

Sei nun χ_α der durch das $d := 2e$ -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ von Partitionen $\alpha_i \vdash n_i$ parametrisierte irreduzible Charakter von $W = W(B_n^{(d)})$, und ψ_α der irreduzible Charakter der zugehörigen Trägheitsgruppe $H_\alpha \cong Z_d \wr \mathfrak{S}_{n_1} \times \dots \times Z_d \wr \mathfrak{S}_{n_d}$, so daß $\chi_\alpha = (\psi_\alpha)^W$ gilt. Zur Zerlegung des Induzierten $(\chi_\alpha)^{W'}$ nach $W' := W(B_{n+2}^{(d)})$ können wir also auch $(\psi_\alpha)_{H_\alpha}^{W'}$ betrachten. Diese Induktion zerfällt in zwei Schritte gemäß dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Char}(W(B_n^{(d)})) & \longrightarrow & \text{Char}(W(B_{n+2}^{(d)})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Char}(H_\alpha) & \longrightarrow & \text{Char}(H_\alpha \times Z_d^2). \end{array}$$

Die Induktion in der unteren Zeile ist jedoch nach Definition von ψ_α leicht durch eine entsprechende Induktion in symmetrischen Gruppen zu beschreiben. Damit zeigt sich, daß $\chi_\alpha^{W'}$ diejenigen zerfallenden Charaktere von W' , deren Partitionentupel aus α durch Hinzufügen zweier 1-Haken an verschiedenen Partitionen entsteht, mit der Vielfachheit 1 enthält. Zerfällt χ_α bei Einschränkung auf $W(D_n^{(d)})$, so enthalten die Induzierten der zwei Konstituenten also jeweils einen der entsprechenden zerfallenden Charaktere von W' . Dies erlaubt den Induktionsschritt von n nach $n+2$, da die Irrationalität eines solchen Charakters in $W(D_{n+2}^{(d)})$ die Irrationalität des Ausgangscharakters in $W(D_n^{(d)})$ erzwingen würde. Für $n = 2$ waren aber alle Charaktere schon als rational erkannt worden. \square

Als Ergebnis des obigen Beweises können wir sogar den genauen Charakterkörper explizit angeben.

6.2. Folgerung. *Der Charakterkörper von χ_α in Satz 6.1(b) ist*

$$\mathbb{Q}(\{\sqrt{u_{1,i}u_{1,j}} \mid \alpha_{2i-1} \neq \alpha_{2i}, \alpha_{2j-1} \neq \alpha_{2j}\}).$$

Wir erhalten auf diese Weise auch die bekannte Rationalitätsaussage für die klassischen Heckealgebren zum Diagramm $D_n = D_n^{(2)}$ zurück, denn hier besteht α nur aus zwei Partitionen, erfüllt also nie die Voraussetzung für Irrationalität in Satz 6.1.

Wir wenden uns nun den exzeptionellen Diagrammen zu. Das Resultat für die üblichen Weylgruppen und Heckealgebren ist aus [14] übernommen. Für diejenigen Fälle, in denen die Existenz der zugehörigen Heckealgebra nicht in Satz 4.7 nachgewiesen werden konnte, gilt die folgende Aussage nur unter der Annahme der Existenz.

6.3. Satz. *Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen der zyklotomischen Heckealgebren $\mathcal{H}_{\bar{K}}(\mathcal{D}, \mathbf{u})$ zu zusammenhängenden exzeptionellen zyklotomischen Diagrammen \mathcal{D} sind rational, besitzen also Werte in $\mathbb{Q}(\mathbf{u})$, außer in den folgenden Fällen:*

- für G_2 die zwei 2-dimensionalen Darstellungen,
- für E_7 die zwei 512-dimensionalen Darstellungen,
- für E_8 die vier 4096-dimensionalen Darstellungen,
- für $I_2(8)$ zwei der drei 2-dimensionalen Darstellungen,
- für $B_2^{3,3}$ die drei 3-dimensionalen Darstellungen,
- für $A_2^{(4)}$ die zwei 4-dimensionalen Darstellungen,
- für $G_2^{(4)}$ die zwölf 2-dimensionalen und die vier 4-dimensionalen Darstellungen,

- für $B_2^{4,3}$ die zwölf 3-dimensionalen und die sechs 4-dimensionalen Darstellungen,
- für K_2 zwei der drei 2-dimensionalen Darstellungen,
- für $A_2^{(5)}$ die zehn 4-dimensionalen und die fünf 5-dimensionalen Darstellungen,
- für $A_3^{(3)}$ die zwei 9-dimensionalen Darstellungen,
- für $B_3^{2,3}$ die sechs 8-dimensionalen und die vier 9-dimensionalen Darstellungen,
- für L_4 sämtliche 34 Darstellungen, deren Spezialisierung zu $W(L_4)$ nicht-rational ist, sowie
- für $A_4^{(3)}$ die jeweils sechs 36-, 45- und 64-dimensionalen und die drei 81-dimensionalen Darstellungen.

Beweis. Die Beweisidee wird aus der Arbeit [4] übernommen, in der das entsprechende Problem für die klassischen Heckealgebren im Falle gleicher Parameter gelöst wurde (für den Fall ungleicher Parameter siehe man etwa [14], II, Th. 3.1, sowie [12], 67.14, für $I_2(8)$). Für den Nachweis der Rationalität eines Charakters χ von \mathcal{H} genügt es zu zeigen, daß dessen Spezialisierung $\bar{\chi}$ auf den Gruppenring $\bar{\mathbb{Q}}W(\mathcal{D})$ durch seine Vielfachheiten in Induzierten rationaler Charaktere eindeutig bestimmt wird. Denn dann müssen alle algebraischen Automorphismen trivial auf $\bar{\chi}$ operieren, und diese Aussage gilt sodann auch für den ursprünglichen Charakter χ . Als Untergruppen zum Induzieren bieten sich hier die parabolischen Weyluntergruppen an (siehe Anmerkung 3.3). Den Induktionsanfang erhält man mit den zyklischen Weylgruppen $W(B_1^{(d)})$, für die alle Charaktere in Abschnitt 2 explizit angegeben wurden und offensichtlich Werte in $\mathbb{Q}(\mathbf{u})$ besitzen.

Die irreduziblen Darstellungen der Algebren zu $A_2^{(3)}$, $B_2^{3,3}$, $A_2^{(4)}$, K_2 und $A_3^{(3)}$ wurden in Abschnitt 5 explizit bestimmt. Die Aussage für diese Gruppen folgt somit durch Vergleich mit den dortigen Ergebnissen.

Für die verbleibenden sechs Algebren verfährt man wie oben angedeutet: Die Zerlegung der Induzierten von bereits als rational erkannten Charakteren parabolischer Untergruppen beweist, daß außer den im Satz aufgeführten Charakteren alle bereits durch ihre Vielfachheiten in den Induzierten ausgezeichnet sind und daher rational sein müssen. \square

6.4. Anmerkung. Der Beweis des vorangehenden Satzes konkretisiert die im Beweis des Hauptsatzes von [8] gemachte Bemerkung, daß die meisten Charaktere der zyklotomischen Weylgruppen bereits durch ihre Vielfachheiten in Induzierten irreduzibler Charaktere parabolischer Untergruppen bestimmt sind.

Der genaue Charakterkörper kann wiederum explizit angegeben werden:

6.5. Bemerkung. Der Charakterkörper in den Ausnahmefällen des Satzes 6.3 ist

- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{\prod u_{ij}})$ für die zwei 2-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(G_2, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$ für die zwei 512-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(E_7, (1, u))$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$ für die vier 4096-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(E_8, (1, u))$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{2 \prod u_{ij}})$ für die zwei irrationalen Darstellungen von $\mathcal{H}(I_2(8), \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_3, \sqrt[3]{\prod u_{ij}})$ für die drei 3-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(B_2^{3,3}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{\prod u_j})$ für die zwei 4-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(A_2^{(4)}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{uv \prod u_{2j}})$ mit $\{u, v\} \subset \{u_{1j}\}$ für die zwölf 2-dimensionalen und $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_4, \sqrt[4]{\prod u_{1j} \prod u_{2j}^2})$ für die vier 4-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(G_2^{(4)}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_3, \sqrt[3]{\prod uvw \prod u_{2j}})$ mit $\{u, v, w\} \subset \{u_{1j}\}$ für die zwölf 3-dimensionalen und $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{xy \prod u_{1j}})$ mit $\{x, y\} \subset \{u_{2j}\}$ für die sechs 4-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(B_2^{4,3}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2u})$ für die zwei irrationalen 2-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(K_2, (1, u))$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{\prod uvwx})$ mit $\{u, v, w, x\} \subset \{u_j\}$ für die zehn 4-dimensionalen und $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_5, \sqrt[5]{\prod u_j})$ für die fünf 5-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(A_2^{(5)}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_3)$ für die zwei 9-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{uv \prod u_{3,j}})$ mit $\{u, v\} \subset \{u_{1j}\}$ für die sechs 8-dimensionalen und $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_3)$ für die vier 9-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(B_3^{2,3}, \mathbf{u})$,
- $\mathbb{Q}(u, \zeta_4)$ für die zwei 64-dimensionalen und $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$ für die übrigen nichttrivialen Darstellungen von $\mathcal{H}(L_4, (1, u))$, sowie
- $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_3)$ für die jeweils sechs 36- und 45-dimensionalen, $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt{uv})$ mit $\{u, v\} \subset \{\mathbf{u}\}$ für die sechs 64-dimensionalen sowie $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \zeta_3, \sqrt[3]{\prod u_j})$ für die drei 81-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(A_4^{(3)}, \mathbf{u})$.

Beweis. Für $B_2^{3,3}$, $A_2^{(4)}$, K_2 und $A_3^{(3)}$ folgt dies sofort aus den expliziten Ergebnissen im Abschnitt 5.

Die zwölf 2-dimensionalen Darstellungen von $\mathcal{H}(G_2^{(4)})$ bestimmt man leicht als

$$T_1 \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ -u - vy + \sqrt{uvy} & v \end{pmatrix}, \quad T_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\{u, v\} \in \{u_{1,j}\}$, $\{1, y\} = \{u_{2,1}, u_{2,2}\}$, und verifiziert damit die Aussage in diesem Fall.

In den übrigen Fällen können die Darstellungen zwar (zur Zeit noch) nicht explizit konstruiert werden, aber die Abwandlung eines Arguments von Springer führt zum gewünschten Resultat (siehe [4], correction, Fußnote): Das Element $S := T_1T_2T_1T_2T_1T_2 = T_2T_1T_2T_1T_2T_1$ liegt offensichtlich zentral in $\mathcal{H}(G_2^{(4)})$, operiert also in jeder absolut irreduziblen Darstellung von $\mathcal{H}(G_2^{(4)})$ als Skalar. In den 4-dimensionalen Darstellungen von \mathcal{H} gilt $\det(T_1) = uvwx$, $\det(T_2) = y^2z^2$, für $\{u, v, w, x\} = \{u_{1,j}\}$ und $\{y, z\} = \{u_{2,j}\}$, wie man durch Spezialisierung zur Gruppenalgebra $KW(G_2^{(4)})$ sofort verifiziert. Damit ergibt sich $\det(S) = u^3v^3w^3x^3y^6z^6$, und S muß demnach wie der Skalar $\sqrt[4]{u^3v^3w^3x^3y^6z^6}$ operieren, wobei die vier verschiedenen Darstellungen offensichtlich genau die vier verschiedenen Galoiskonjugierten dieser Wurzel realisieren. Das war aber die Behauptung in diesem Fall.

In $\mathcal{H}(B_2^{4,3})$ liegt das Element $S := T_1T_2T_1T_2 = T_2T_1T_2T_1$ zentral, seine Determinante in den zwölf 3-dimensionalen Darstellungen ergibt sich zu $\det(S) = u^2v^2w^2a^2b^2c^2$ mit $\{u, v, w\} \subset \{u_{1,j}\}$ und $\{a, b, c\} = \{u_{2,j}\}$. Wie eben schließt man somit, daß S als Skalar aus $\mathbb{Q}(\mathbf{u}, \sqrt[3]{uvwabc})$ operiert. Im 4-dimensionalen Fall wird $\det(S) = (uvwabc^2)^2$ mit $\{u, v, w, x\} = \{u_{1,j}\}$ und a, b, c wie eben. Die Aussage über den Charakterkörper folgt somit.

Für $\mathcal{H}(A_2^{5})$ liegt $S := T_1T_2T_1T_2T_1T_2 = T_2T_1T_2T_1T_2T_1$ zentral. Im 4-dimensionalen Fall wird $\det(S) = (uvw)^6$ mit $\{u, v, w, x\} \subset \{u_j\}$, im 5-dimensionalen Fall gilt $\det(S) = (\prod u_j)^6$. Die Aussage folgt in beiden Fällen.

In $\mathcal{H}(B_3^{2,3})$ liegt $S := T_1T_2T_1T_3T_2T_1T_3T_2T_3$ zentral, und man erhält $\det(S) = u^{24}v^{12}w^{12}x^{12}y^{12}$ mit $\{u, v, w\} = \{u_{1,j}\}$ und $\{x, y\} = \{u_{3,j}\}$ für die Darstellungen der Dimension 8. Im 9-dimensionalen Fall wird $\det(S) = (uvwx^2y)^{27}$, und S operiert als Skalar $\zeta(uvwx^2y)^3$, mit $\zeta^9 = 1$. Das Bild $s \in KW(B_3^{2,3})$ von S unter der Spezialisierungsabbildung auf die Gruppenalgebra hat die Spur $\pm 9\zeta_3$. Wegen $o(s) = 6$ operiert s in dieser Darstellung also als dritte oder sechste Einheitswurzel. Somit muß ζ eine primitive dritte Einheitswurzel sein, und die Behauptung folgt.

Für L_4 bezeichnen wir die drei in der zirkulären Relation gebundenen Erzeuger mit s_1, s_2, s_3 und denken uns s_4 mit s_2 und s_3 sowie s_5 mit s_1 und s_2 verbunden. Die zugehörigen Erzeuger der zyklotomischen Algebra seien mit T_i bezeichnet. Wir setzen $T := T_1T_2T_3T_4T_5$. Dann rechnet man $T_1T^3 = T^3T_3$, $T_3T^3 = T^3T_1$, $T_4T^3 = T^3T_5$ und $T_5T^3 = T^3T_4$ nach, und da T^6 natürlich auch durch T zentralisiert wird, liegt

$$S := T^6 = (T_1T_2T_3T_4T_5)^6$$

zentral in der zyklotomischen Algebra. In der 64-dimensionalen irreduziblen Darstellung von $\mathcal{H}(L_4, (1, u))$ hat S die Determinante $\det(S) = u^{30 \cdot 32}$, operiert also als Skalar ζu^{15} mit $\zeta^{64} = 1$. Das entsprechende Element in der

Gruppenalgebra operiert als vierte Einheitswurzel, womit der erste Teil der Aussage gezeigt ist. Die verbleibenden nichtrationalen Charaktere unterscheiden sich jeweils durch ihre Vielfachheiten in den Induzierten nichtrationaler Charaktere von der parabolischen Untergruppe $W(D_3^{(4)})$, so daß sich die Rationalitätsaussage aus Folgerung 6.2 ergibt.

Für $A_4^{(3)}$ prüft man nach, daß alle Charaktere außer denen der Grade 64 und 81 eindeutig durch ihre Vielfachheiten in den von $A_3^{(3)}$ induzierten Charakteren bestimmt werden. Nach dem Argument im Beweis zu Satz 6.3 liegen ihre Werte also höchstens in demselben Charakterkörper wie die der Charaktere von $\mathcal{H}(A_3^{(3)}, \mathbf{u})$. Da die 36- und 45-dimensionalen Charaktere bei Einschränkung auf $A_3^{(3)}$ jeweils genau einen der zwei nichtrationalen Charaktere von $A_3^{(3)}$ enthalten, muß ihr Charakterkörper mit demjenigen dieser Charaktere übereinstimmen.

Schließlich nehmen die drei 81-dimensionalen Darstellungen von $W(A_4^{(3)})$ auf den Erzeugern s_i den Wert 0 an, weshalb die T_i in der entsprechenden Darstellung von $\mathcal{H}(A_4^{(3)}, (1, u, v))$ die Determinante $\det(T_i) = u^{27}v^{27}$ haben. Man findet das zentrale Element

$$S := (T_1 T_2 T_1 T_3 T_2 T_1 T_4 T_3 T_2 T_1)^2$$

in $\mathcal{H}(A_4^{(3)})$, welches somit als Skalar und mit $\det(S) = (uv)^{20 \cdot 27}$ operiert. Analog haben die T_i für die 64-dimensionalen Darstellungen die Determinante $\det(T_i) = x^{16}y^{24}z^{24}$ mit $\{x, y, z\} = \{1, u, v\}$. Dies zeigt die Behauptung im letzten Fall. \square

Anmerkung. Für die zwei 9-dimensionalen Darstellungen von $A_3^{(3)}$ und damit für die 36- und 45-dimensionalen von $A_4^{(3)}$ hätte das Resultat auch ohne die explizite Konstruktion der Darstellungen von $A_3^{(3)}$ in Abschnitt 5 mit Springers Argument bewiesen werden können.

6B. Rationalität der Charaktere nach der ersten Spezialisierung.

Eine weitere interessante Frage ist die nach der Rationalität der Darstellungen der spezialisierten Heckealgebren für solche Parametersätze wie sie in der Situation relativer Weylgruppen auftreten. Sind sowohl die generische Darstellung als auch alle Parameterwerte rational, so ist sicher auch die spezialisierte Darstellung über \mathbb{Q} definiert. Es bleiben also nur solche Fälle zu untersuchen, in denen entweder die Parameterwerte nichtrational sind, oder die Darstellung unter die in Satz 6.3 gefundenen Ausnahmen fällt. Wir nennen einen Parametersatz zulässig, falls er zu einem Φ_d -Block in einer generischen Gruppe vom Lie-Typ gehört. Diese Parametersätze wurden in den Bemerkungen 2.7–2.16 für alle zyklischen Fälle und in Paragraph 5 für

einige höherdimensionale exzeptionelle Algebren bestimmt. Treffen die in Abschnitt 4C gemachten Überlegungen zu den Parametern im Allgemeinen zu, so kennen wir die zulässigen Parametersätze sogar in allen Fällen. Zusätzlich zur schon eben gemachten Voraussetzung der Existenz gemäß Vermutung 4.6 nehmen wir für den folgenden Satz also zudem noch an, daß die zulässigen Parametersätze aus denen der Teildiagramme erhalten werden. Dann gilt:

6.6. Satz. *Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen der spezialisierten zyklotomischen Heckealgebren $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\bar{x})}(\mathcal{D})$ zu zulässigen Parametersätzen sind rational, besitzen also Werte in $\mathbb{Q}(x)$, außer in den folgenden Fällen mit Charakterkörper $K \neq \mathbb{Q}$:*

- für $B_1^{(d)}$ in den exzeptionellen Gruppen die zu den nichtrationalen Parameterwerten in Tabelle 8.1 gehörigen Darstellungen,
- für E_7 die beiden 512-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{x})$ für $d = 1$ bzw. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-x})$ für $d = 2$,
- für E_8 die vier 4096-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{x})$ für $d = 1$ bzw. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-x})$ für $d = 2$,
- für $B_2^{3,3}$ zwei der drei 3-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$,
- für $A_2^{(4)}$ im Falle $\mathbb{G} = F_4$, $d = 4$, die zwei 4-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_4)$,
- für $G_2^{(4)}$ zwei der vier 4-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_4)$,
- für $B_2^{4,3}$ acht der zwölf 3-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ und zwei der sechs 4-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_4)$,
- für K_2 zwei der drei 2-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
- für $A_2^{(5)}$ vier der zehn 4-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{x})$ für $d = 5$ bzw. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-x})$ für $d = 10$ und vier der fünf 5-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$,
- für $A_3^{(3)}$ die zwei 9-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$,
- für $B_3^{2,3}$ zwei der sechs 8-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{x})$ für $d = 3$ bzw. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-x})$ für $d = 6$ und die vier 9-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$,
- für L_4 die zwei 64-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_4)$, sowie
- für $A_4^{(3)}$ die jeweils sechs 36- und 45-dimensionalen und zwei der drei 81-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ und vier der sechs 64-dimensionalen Darstellungen mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{x})$ für $d = 3$ bzw. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-x})$ für $d = 6$.

Beweis. Gemäß Satz 6.1 sind die Charaktere für $\mathcal{H}(B_n^{(d)}, \mathbf{u})$ sämtlich rational, während die für $\mathcal{H}(D_n^{(2e)}, \mathbf{u})$ höchstens Werte in $\mathbb{Q}(\{\sqrt{u_i}\})$ annehmen. Nach den Bemerkungen 2.10, 2.14, 2.16 und 2.19 sind alle Parametersätze für klassische Gruppen rational, und im Falle ausgearteter d -(Ko)-Kerne sogar

jeweils positive gerade Potenzen von x . Damit sind also alle spezialisierten Charaktere für klassische Gruppen als rational nachgewiesen, und wir müssen uns nunmehr um die exzeptionellen Gruppen kümmern.

Die generischen Algebren zu den zyklischen Gruppen $W(B_1^{(d)})$ haben nach Paragraph 2 rationale irreduzible Darstellungen, und eine spezialisierte Darstellung wird genau dann nicht-rational, wenn der zugehörige Parameter nicht-rational ist. Dies führt zum ersten Ausnahmefall.

Die zulässigen Parameterspezialisierungen für $\mathcal{H}(B_2^{3,3})$ wurden in 5.9 angegeben. In allen sechs Fällen enthält $\mathbb{Q}(x, \zeta_3)$ den Charakterkörper.

Die Parameterwerte für $\mathcal{H}(A_2^{(4)})$ finden sich in 5.12. Hier ist der Charakterkörper gleich $\mathbb{Q}(x, \zeta_4)$ im Falle $\mathbb{G} = F_4$, $d = 4$, und gleich $\mathbb{Q}(x)$ sonst.

Die relative Weylgruppe $W(G_2^{(4)})$ tritt nur in E_8 für $d = 8$ auf. Die parabolischen Unterdiagramme vom Rang 1 entsprechen den Leviuntergruppen $\Phi_8 {}^2D_4$ und $\Phi_8 A_1^{(4)}$. Die zugehörigen Parametersätze in diesen Fällen sind nach den Bemerkungen 2.16 und 2.10 gleich $\{1, x^2, x^4, x^6\}$ und $\{1, x^4\}$. Man erhält somit, daß die 2-dimensionalen Charaktere bei der Spezialisierung rational werden, ebenso wie zwei der 4-dimensionalen.

Auch $W(B_2^{(4,3)})$ kommt nur in E_8 vor, für $d = 12$. Die parabolischen Teilsysteme vom Rang 1 gehören zu Leviuntergruppen $\Phi_{12} {}^3D_4$ und $\Phi_{12} ({}^2A_2)^{(2)}$. In beiden Fällen ist die Φ_{12} -Untergruppe ein Coxetertorus. Damit bekommt man die Parametersätze $\{1, x^3, -x^3, x^6\}$ und $\{1, -x^2, x^4\}$ für die zwei Knoten des Diagramms.

Nach Folgerung 5.14 liegen die Charakterwerte von $\mathcal{H}(K_2)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$W(A_2^{(5)})$ tritt für $d = 5$ und $d = 10$ in E_8 auf. Die Knoten gehören jeweils zu Leviuntergruppen $\Phi_5 A_4$ bzw. $\Phi_{10} {}^2A_4$. Gemäß Bemerkung 2.10 gehören dazu die Parametersätze $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ bzw. $\{1, -x, x^2, -x^3, x^4\}$. Vier der 4-dimensionalen Charaktere haben damit Werte in $\mathbb{Q}(\sqrt{x})$ bzw. $\mathbb{Q}(\sqrt{-x})$, während vier der 5-dimensionalen Werte in $\mathbb{Q}(x, \zeta_5)$ annehmen.

Für $\mathcal{H}(A_3^{(3)})$ ist die Behauptung klar.

Die zyklotomische Weylgruppe $W(B_3^{2,3})$ kommt nur für $d = 3$ und $d = 6$ in $\mathbb{G} = E_7$ vor. Die zugehörigen Parameterspezialisierungen bestimmt man aus dem Unterdiagramm $B_2^{(3)}$ vom Rang 2 zu $1, x, x^2; 1, x^3$ für $d = 3$ und $1, -x, x^2; 1, -x^3$ für $d = 6$. Das Resultat ergibt sich mit Bemerkung 6.5.

Für die 64-dimensionalen Charaktere von $\mathcal{H}(L_4)$ ist wiederum nichts zu zeigen. Nach Bemerkung 2.19 ist der einzige zulässige Parametersatz für L_4 gleich $\{1, x^2\}$, so daß alle weiteren nicht-rationalen Charaktere der generischen Algebra rationale Spezialisierungen besitzen.

Die Parameterwerte für $\mathcal{H}(A_4^{(3)})$ in E_8 sind $\{1, x, x^2\}$ im Fall $d = 3$ und $\{1, -x, x^2\}$ im Fall $d = 6$. Die Behauptung folgt damit aus den Ergebnissen

der Bemerkung 6.5. \square

Durch Vergleich von Tabelle 8.1 und Satz 6.6 mit den bekannten Ergebnissen über die Rationalität und die Eigenwerte des Frobenius für die unipotenten Charaktere der Gruppen vom Lie-Typ verifiziert man hieraus leicht das folgende Indiz für die Richtigkeit der in Abschnitt 1 vorgestellten Vermutungen:

6.7. Folgerung. *Die Rationalitätseigenschaften der spezialisierten Charaktere der zyklotomischen Heckealgebren stimmen mit denen der nach 1.1 und den Vermutungen (d-HVi) dazugehörigen unipotenten Charaktere in Φ_d -Blöcken von Gruppen vom Lie-Typ überein.*

Man beachte hierbei, daß die Irrationalität $\sqrt{2}$ für K_2 dadurch wieder aufgehoben wird, daß der Parameter x nur die Werte $\sqrt{2^{2n+1}}$ annehmen kann.

7. d -HARISH-CHANDRA THEORIE FÜR ENDLICHE COXETERGRUPPEN

Die endlichen Coxetergruppen H_3 , H_4 und $I_2(p)$, $p \notin \{2, 3, 4, 6\}$, kommen nicht als Weylgruppen endlicher Gruppen vom Lie-Typ vor. Mit der hier und in [8] erhaltenen Einsicht in die Struktur der Mengen $Uch(\mathbb{G})$ unipotenter Charaktere ist es nun jedoch möglich, eine Entsprechung von $Uch(\mathbb{G})$ auch für diese Coxetergruppen zu konstruieren, die sowohl mit der d -Harish-Chandra Theorie als auch, soweit nachprüfbar, mit der hier vorgestellten Theorie der zyklotomischen Heckealgebren verträglich ist. Diese Mengen "unipotenter Charaktere" haben aber keine Entsprechung mehr auf der Seite der Gruppen vom Lie-Typ.

In [7] wurde jeder endlichen Weylgruppe W und jedem Graphautomorphismus ϕ von W eine generische Gruppe $\mathbb{G} = ((X, R, Y, R^\vee), W\phi)$ zugeordnet, wobei X, Y zueinander duale \mathbb{Z} -Gitter und R bzw. R^\vee Wurzelsysteme in X bzw. in Y sind. Um wohldefinierte Objekte nicht nur für Weylgruppen sondern für alle endlichen Coxetergruppen zu erhalten, müssen wir die Definition einer generischen endlichen reduktiven Gruppe aus [8] leicht abändern.

7.1. Definition. *Wir nennen ein Tripel $(V, W\phi)$, bestehend aus*

- *einem endlich-dimensionalen Vektorraum V über dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} ,*
- *einer endlichen, von Spiegelungen erzeugten Untergruppe W von $GL(V)$, und*
- *einem W normalisierenden Automorphismus ϕ von V von endlicher Ordnung,*

eine "verallgemeinerte generische endliche reduktive Gruppe".

Für ein solches Tripel $\mathcal{G} := (V, W\phi)$ bezeichne

- K den Koeffizientenkörper der Polynome $\det(1 - xw\phi)$ ($w \in W$) und

- Σ die Menge aller Spiegelungen in W (wir setzen $N := |\Sigma|$).

Eine generische endliche reduktive Gruppe $\mathbb{G} = ((X, R, Y, R^\vee), W\phi)$ definiert durch

$$\mathcal{G} := (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Y, W\phi)$$

auf natürliche Weise eine verallgemeinerte generische endliche reduktive Gruppe. Abgesehen von den zugehörigen algebraischen Gruppen und ihren nichtunipotenten Charakteren können wir alle anderen Begriffe, die ausgehend von \mathbb{G} definiert wurden, auch von der zugehörigen verallgemeinerten Gruppe \mathcal{G} ablesen, wie nun gezeigt wird:

Sei \mathcal{G} eine verallgemeinerte Gruppe.

- Ein Untertorus von \mathcal{G} ist eine verallgemeinerte Gruppe der Bauart $\mathcal{S} = (V', (w\phi)|_{V'})$, mit einem Teilraum V' von V und einem Element $w\phi$ aus $W\phi$, welches V' stabilisiert.

• Der Zentralisator eines Torus $\mathcal{S} = (V', (w\phi)|_{V'})$ von \mathcal{G} ist die verallgemeinerte Gruppe $\mathcal{L} := (V, W'w\phi)$, mit der durch die Menge Σ' von $s \in \Sigma$ mit $V' \subseteq \ker(s - 1)$ erzeugten Untergruppe W' von $GL(V)$ Die Zentralisatoren von Tori werden verallgemeinerte Leviuntergruppen von \mathcal{G} genannt.

- Die Ordnung von \mathcal{G} ist das durch

$$|\mathcal{G}| := \frac{\varepsilon_{\mathcal{G}} x^N}{\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{1}{\det_V(1 - xw\phi)}}$$

gegebene Polynom aus $K[x]$, wobei $\varepsilon_{\mathcal{G}}$ wie in [8] definiert wird: Mit SV sei die symmetrische Algebra von V bezeichnet. Die graduierte Teilalgebra der W -invarianten Elemente von SV sei $(SV)^W$, und darin \mathfrak{A} das Ideal der Elemente ohne Terme vom Grad 0. Auf dem Vektorraum $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ operiert das Bild $\bar{\phi}$ von ϕ modulo W , und wir setzen $\varepsilon_{\mathcal{G}} := (-1)^r \det \bar{\phi}$ mit $r := \dim \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$.

- Sei Φ ein irreduzibles zyklotomisches Polynom in $K[x]$. Eine Φ -Untergruppe von \mathcal{G} ist ein Untertorus \mathcal{S} , dessen Ordnung eine Potenz von Φ ist. Die Φ -Tori erfüllen Sylowsätze wie in [7].

Weiter wurde in [8] jeder generischen Gruppe eine Menge $\text{Uch}(\mathbb{G})$ unipotenter Charaktere γ zugeordnet (die nur von \mathcal{G} abhängt und daher auch als $\text{Uch}(\mathcal{G})$ aufgefaßt werden kann), versehen mit generischen Graden $\text{Deg}(\gamma) \in \mathbb{Q}[x]$, so daß die Grade der unipotenten Charaktere ρ_{γ} der endlichen reduktiven Gruppe $\mathbb{G}(q)$ durch Spezialisierung von x zu q in $\text{Deg}(\gamma)$ entstehen. Für jeden Teiler $\Phi_d(x)$ des Poincaré-Polynoms von $W_{\mathbb{G}}$, also der Ordnung $|\mathbb{G}| \in \mathbb{Z}[x]$, ergeben die Konstituenten der $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}(\lambda)$, wobei (\mathbb{L}, λ) die d -kuspidalen Paare von \mathbb{G} durchläuft, eine Partition von $\text{Uch}(\mathbb{G})$ in sogenannte d -Harish-Chandra Serien.

Die Existenz der Menge $\text{Uch}(\mathbb{G})$ wurde dort aus der Lusztigschen Klassifikation der unipotenten Charaktere der endlichen Gruppen vom Lie-Typ gefolgert. Dieser Zugang ist uns bei dem Versuch der Definition von $\text{Uch}(\mathcal{G})$ für \mathcal{G} zu beliebigen endlichen Coxetergruppen versperrt, da etwa zu H_3 oder H_4 keine algebraische Gruppe existiert, und es somit auch keine spezialisierten Charaktere und keinen $R_{\mathbb{L}}^{\mathbb{G}}$ -Funktork gibt. Ein möglicher Zugang zur Definition von $\text{Uch}(\mathcal{G})$ wird von G. Lusztig im Anhang gegeben.

Bei geeigneter Interpretation erfüllen auch diese Mengen $\text{Uch}(\mathcal{G})$ eine Harish-Chandra Theorie. Für einen irreduziblen Teiler Φ von $|\mathcal{G}|$ über $K[x]$ sei dazu $\gamma \in \text{Uch}(\mathcal{G})$ Φ -kuspidal, falls die maximale Φ -Potenz in $|\mathcal{G}|$ auch in $\text{Deg}(\gamma)$ aufgeht (man beachte, das auch hier Φ_1 -kuspidal mit Kuspidalität im Sinne von Lusztig übereinstimmt.). Eine Leviuntergruppe \mathcal{L} heiÙe Φ -zerfallend, falls sie der Zentralisator eines Φ -Torus $\mathcal{S} \leq \mathcal{G}$ ist. Ein Paar (\mathcal{L}, λ) , bestehend aus einer Φ -zerfallenden Leviuntergruppe \mathcal{L} und einem Φ -kuspidalen Charakter $\lambda \in \text{Uch}(\mathcal{L})$, heiÙe Φ -kuspidales Paar von \mathcal{G} . Als Hauptergebnis erhält man dann:

7.2. Satz. *Für jede verallgemeinerte generische Gruppe \mathcal{G} und jedes Φ existiert eine Partition*

$$\text{Uch}(\mathcal{G}) = \bigcup_{(\mathcal{L}, \lambda) \text{ } \Phi\text{-kuspidal}} \text{Uch}(\mathcal{G}, (\mathcal{L}, \lambda))$$

(wobei die Vereinigung über die Φ -kuspidalen Paare von \mathcal{G} genommen wird) von $\text{Uch}(\mathcal{G})$ in Φ -Harish-Chandra Serien, so daß die durch

$$R_{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}}(\lambda) := \sum_{\gamma \in \text{Uch}(\mathcal{G}, (\mathcal{L}, \lambda))} \text{Deg}(\gamma)(\zeta) \gamma$$

mit $\Phi(\zeta) = 0$ definierte lineare Abbildung $R_{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}}(\lambda) : \mathbb{Z} \text{Uch}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z} \text{Uch}(\mathcal{G})$ das Theorem 3.2 in [8] erfüllt. Insbesondere sind die $\text{Deg}(\gamma)(\zeta_d)$ bis auf das Vorzeichen gleich den Graden der irreduziblen Charaktere von $W_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}, \lambda)$.

Im Falle von Weylgruppen W ist dies mit $\text{Uch}(\mathcal{G}, (\mathcal{L}, \lambda)) := \text{Uch}(\mathbb{G}, (\mathbb{L}, \lambda))$ eines der Hauptergebnisse von [8]. Für die übrigen endlichen Coxetergruppen lassen sich die $\text{Uch}(\mathcal{G}, (\mathcal{L}, \lambda))$ leicht anhand der von Lusztig im Anhang angegebenen Gradpolynome der unipotenten Charaktere bestimmen und damit die Behauptung nachrechnen.

Analog zu der Situation in den Gruppen vom Lie-Typ kann man die unipotenten Charaktere in Familien aufteilen, entsprechend der Zellzerlegung von W (vergleiche hierzu auch die Andeutung in [19], S.xv). Für H_4 liegen die sechs ersten je in einer Familie für sich, dann folgen sechs 4-elementige

Familien, und die übrigen 74 Charaktere bilden die letzte Familie. Es ist nicht unmittelbar klar, ob diese Familie wie im Fall der Gruppen vom Lie-Typ einer endliche Gruppe zugeordnet ist. Wir merken an, daß die Gruppe $SL_2(5)$ genau 74 Paare (g, χ) besitzt, wobei g Vertreter der Konjugiertenklassen durchläuft und χ irreduzible Charaktere des Zentralisators in $SL_2(5)$ von g .

Die Grade in der ersten und dritten 4-elementigen Familie von H_3 sowie in der ersten, zweiten, fünften und sechsten 4-elementigen Familie von H_4 sind mit den jeweiligen Scheingraden ("fake-degrees") durch die Fourier-Transformationsmatrix

$$(7.3) \quad M := \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} -\bar{a} & a & 1 & 1 \\ a & -\bar{a} & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & \bar{a} \\ 1 & -1 & \bar{a} & a \end{pmatrix}$$

mit $a := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ verbunden.

Zur Konstruktion der Mengen $\text{Uch}(\mathcal{G})$ wurde die Vermutung (d -HV6) nur in zyklischen Fällen und für $\Phi = \Phi_1$ herangezogen (siehe Anhang). Im Nachhinein kann man verifizieren, daß (d -HV6) für alle Φ -Blöcke stimmt, in denen man die generischen Grade der zugehörigen zyklotomischen Heckealgebren kennt.

7.4. Bemerkung. *Spezialisiert man die generischen Grade der in Tabelle 8.3 angegebenen zyklotomischen Heckealgebren gemäß den dort aufgeführten Parametern, so erhält man die Grade $\text{Deg}(\gamma)$ der $\gamma \in \text{Uch}(\mathcal{G}, (\mathcal{L}, \lambda))$ im entsprechenden generischen Φ -Block von $I_2(5)$, H_3 bzw. H_4 .*

In H_3 gibt es eine Φ_2 -zerfallende Leviuntergruppe $\Phi_2 {}^2I_2(5)$ mit einem Φ_2 -kuspidalen Charakter. Dabei erhält man die Charaktergrade von ${}^2I_2(5)$ gemäß der Ennola-Dualität durch Ersetzen von x durch $-x$ aus denen von $I_2(5)$ (siehe Anhang).

7.5. Anmerkung. In H_4 fehlen uns noch die generischen Grade der zu den in H_4 vorkommenden Spiegelungsgruppen G_{20} und G_{22} mit Diagrammen $I_2^{3,3}(5)$ bzw. M_2 gehörenden Heckealgebren (siehe 3.8) für einen vollständigen Nachweis von (d -HV6). Umgekehrt sollten aber diejenigen der aufgeführten Grade von H_4 mit vollem Φ_4 -Defekt genau die generischen Grade von $\mathcal{H}(M_2)$ sein. (Man beachte hierzu, daß $\mathcal{H}(M_2)$ nur einen Parameter hat.)

Dieser (vermutete) Zusammenhang, der nicht über den Umweg einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ entstehen kann, deutet unserer Ansicht nach auf eine noch unbekannt Struktur hin, als deren "Schatten" wir die generische

Gruppe \mathcal{G} , die Menge $Uch(\mathcal{G})$ und die Menge der zugehörigen zyklotomischen Heckealgebren ansehen können.

8. TABELLEN

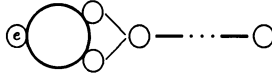
8.1. Parameter für zyklische zyklotomische Heckealgebren in exzeptionellen Gruppen.


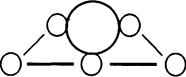
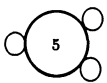
\mathcal{G}	d	$L(q)$	λ	W	Parameter
2G_2	4	Φ_4	1	Z_6	$\zeta_{12}q, \zeta_{12}^5q, \zeta_{12}^7q, \zeta_{12}^{11}q, q^2$
2F_4	12	Φ_{12}	1	Z_6	$-\zeta_3q^4, -\zeta_3^2q^4, q^4, -q^4, q^8$
F_4	4	$\Phi_4 \cdot B_2(q)$	$\phi_{11,-}, \phi_{-,2}$	Z_4	$q^3, -q^3, q^6$
	8	Φ_8	1	Z_8	$q^2, q^3, -q^3, \zeta_4q^3, \zeta_4^3q^3, q^4, q^6$
E_6	3	$\Phi_3 \cdot {}^3D_4(q)$	${}^3D_4[-1]$	Z_3	q^4, q^8
	4	$\Phi_1\Phi_4 \cdot {}^2A_3(q)$	ϕ_{22}	Z_4	q^3, q^6, q^9
	5	$\Phi_1\Phi_5 \cdot A_1(q)$	ϕ_2	Z_5	q^3, q^4, q^6, q^{12}
			ϕ_{11}	Z_5	q^6, q^8, q^9, q^{12}
	8	$\Phi_1\Phi_2\Phi_8$	1	Z_8	$q^3, -q^3, q^4, q^5, q^6, -q^6, q^9$
	9	Φ_9	1	Z_9	$q^2, q^3, q^4, \zeta_3q^4, \zeta_3^2q^4, q^5, q^6, q^8$
E_7	6	$\Phi_2\Phi_6 \cdot {}^3D_4(q)$	$\phi_{2,1}$	Z_6	q, q^4, q^5, q^8, q^9
	6	$\Phi_6 \cdot {}^2A_5(q)$	ϕ_{42}	Z_6	$q, -q, q^3, q^5, q^8$
			ϕ_{2211}	Z_6	$q^3, q^5, q^7, -q^7, q^8$
	8	$\Phi_8 \cdot A_1(q^2) \cdot A_1(q)$	ϕ_2^2	Z_8	$q^2, q^3, -q^3, q^5, -q^5, q^6, q^{12}$
			$\phi_2\phi_{11}$	Z_8	$q, -q, q^4, q^6, q^7, -q^7, q^{10}$
			$\phi_{11}\phi_2$	Z_8	$q^3, -q^3, q^4, q^6, q^9, -q^9, q^{10}$
			ϕ_{11}^2	Z_8	$q^6, q^7, -q^7, q^9, -q^9, q^{10}, q^{12}$
	10	$\Phi_2\Phi_{10} \cdot {}^2A_2(q)$	ϕ_3	Z_{10}	$-1, q, q^2, -q^2, q^3, -q^3, q^4, q^6, q^9$
			ϕ_{21}	Z_{10}	$q, q^3, q^4, iq^{\frac{5}{2}}, -iq^{\frac{5}{2}}, q^5, q^6, q^8, q^9$
			ϕ_{111}	Z_{10}	$q^3, q^5, q^6, -q^6, q^7, -q^7, q^8, q^9, -q^9$
	12	$\Phi_{12} \cdot A_1(q^3)$	ϕ_2	Z_{12}	$q, -q, q^2, \zeta_3q^2, \zeta_3^2q^2, q^3, -q^3, q^4, q^5, -q^5, q^8$
			ϕ_{11}	Z_{12}	$q^3, -q^3, q^4, q^5, -q^5, q^6, \zeta_3q^6, \zeta_3^2q^6, q^7, -q^7, q^8$
	14	$\Phi_2\Phi_{14}$	1	Z_{14}	$q^2, q^3, -q^3, q^4, -q^4, iq^{\frac{3}{2}}, -iq^{\frac{3}{2}}, q^5, -q^5, q^6, -q^6, q^7, q^9$
E_8	6	$\Phi_6 \cdot {}^2E_6(q)$	$\phi'_{9,6}$	Z_6	$-1, q^2, q^5, q^7, q^{10}$
			$\phi''_{9,6}$	Z_6	$q^3, q^5, q^8, q^{10}, -q^{10}$
			$\phi''_{6,6}$	Z_6	$q, q^5, -q^5, q^9, q^{10}$
	8	$\Phi_8 \cdot {}^2D_4(q)$	$\phi_{13,-}$	Z_8	$-1, q, q^3, q^5, q^6, -q^6, q^{15}$
			$\phi_{0123,13}$	Z_8	$q^9, -q^9, q^{10}, q^{12}, q^{14}, q^{15}, -q^{15}$
			$\phi_{023,1}$	Z_8	$q^3, q^5, -q^6, q^9, -q^{10}, q^{12}, q^{15}$
			$\phi_{123,0}$	Z_8	$q^3, -q^5, q^6, -q^9, q^{10}, q^{12}, q^{15}$
			$\phi_{013,2}$	Z_8	$-q^3, q^5, q^6, q^9, q^{10}, q^{12}, -q^{15}$
			$\phi_{012,3}$	Z_8	$-q^3, -q^5, -q^6, -q^9, -q^{10}, q^{12}, -q^{15}$

G	d	$L(q)$	λ	W	Parameter	
10		$\Phi_{10} \cdot {}^2A_4(q)$	ϕ_{32}	Z_{10}	$-1, q^3, -q^3, q^4, q^6, -q^6, q^7, q^9, q^{12}$	
				ϕ_{221}	Z_{10}	$q^3, q^5, q^6, -q^6, q^8, q^9, -q^9, q^{12}, -q^{12}$
12		$\Phi_{12} \cdot {}^3D_4(q)$	$\phi'_{1,3}$	Z_{12}	$\zeta_3, \zeta_3^2, q, -q, q^2, q^3, -q^3, q^5, -q^5, q^6, q^{10}$	
				$\phi''_{1,3}$	Z_{12}	$q^4, q^5, -q^5, q^7, -q^7, q^8, q^9, -q^9, q^{10}, \zeta_3 q^{10}, \zeta_3^2 q^{10}$
				$\phi_{2,2}$	Z_{12}	$-q, q^2, q^4, q^5, -q^5, \zeta_3 q^5, \zeta_3^2 q^5, q^6, q^8, -q^9, q^{10}$
				${}^3D_4[1]$	Z_{12}	$q, q^2, q^4, q^5, -q^5, -\zeta_3 q^5, -\zeta_3^2 q^5, q^6, q^8, q^9, q^{10}$
14		$\Phi_2 \Phi_{14} \cdot A_1(q)$	ϕ_2	Z_{14}	$q^3, -q^3, q^5, -q^5, q^6, -q^6, q^7, iq^{\frac{15}{2}}, -iq^{\frac{15}{2}}, q^8, q^9, -q^9, q^{15}$	
				ϕ_{11}	Z_{14}	$q^6, -q^6, q^7, iq^{\frac{15}{2}}, -iq^{\frac{15}{2}}, q^8, q^9, -q^9, q^{10}, -q^{10}, q^{12}, -q^{12}, q^{15}$
18		$\Phi_{18} \cdot {}^2A_2(q)$	ϕ_3	Z_{18}	$-1, q, q^2, \zeta_3 q^2, \zeta_3^2 q^2, iq^{\frac{5}{2}}, -iq^{\frac{5}{2}}, q^3, -q^3, q^4, -q^4, q^5, \zeta_3 q^5, \zeta_3^2 q^5, q^6, -q^6, q^{10}$	
				ϕ_{21}	Z_{18}	$q, q^3, -q^3, q^4, -q^4, q^5, -q^5, \zeta_3 q^5, \zeta_3^2 q^5, -\zeta_3 q^5, -\zeta_3^2 q^5, q^6, -q^6, q^7, -q^7, q^9, q^{10}$
				ϕ_{111}	Z_{18}	$q^4, -q^4, q^5, \zeta_3 q^5, \zeta_3^2 q^5, q^6, -q^6, q^7, -q^7, iq^{\frac{15}{2}}, -iq^{\frac{15}{2}}, q^8, \zeta_3 q^8, \zeta_3^2 q^8, q^9, q^{10}, -q^{10}$
20		Φ_{20}	1	Z_{20}	$q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, q^9, q^{12}, -q^3, -q^5, -q^6, -q^7, -q^9, iq^6, -iq^6, \zeta_5 q^6, \zeta_5^2 q^6, \zeta_5^3 q^6, \zeta_5^4 q^6$	
24		Φ_{24}	1	Z_{24}	$q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8, q^{10}, -q^3, -q^4, -q^5, -q^6, -q^7, \zeta_3 q^4, \zeta_3 q^5, \zeta_3 q^6, \zeta_3^2 q^4, \zeta_3^2 q^5, \zeta_3^2 q^6, -\zeta_3 q^5, -\zeta_3^2 q^5, iq^5, -iq^5$	

In der folgenden Tabelle haben wir einige Eigenschaften zyklotomischer Weylgruppen zusammengestellt. Die erste Spalte gibt die Numerierung der komplexen Spiegelungsgruppe in der Bezeichnung von Shephard und Todd [23] an, die weiteren den hier verwendeten Namen, die Ordnung, das zyklotomische Diagramm, die Dimension der Spiegelungsgruppe, die Grade der fundamentalen Invarianten, die Anzahl der Reflektionen in W der Ordnungen 2,3,4 und 5, die Ordnung des Zentrums $Z(W)$ und schließlich die Anzahl der Konjugiertenklassen. Die Einträge in den Spalten 6 und 7 wurden der Arbeit [10] von Cohen entnommen.

8.2. Eigenschaften zyklotomischer Weylgruppen.

	Name	$ W $	\mathcal{D}	dim
$G(d, 1, n)$	$B_n^{(d)}$	$d^n n!$	$\textcircled{d} \equiv \textcircled{} - \dots - \textcircled{}$	n
$G(2e, 2, n)$	$D_n^{(2e)}$	$(2e)^n n! / 2$		n

	Name	$ W $	\mathcal{D}	dim	Grade	#Reflek.	$ Z $	#Kl.
G_4	$A_2^{(3)}$	24	$\textcircled{3} - \textcircled{3}$	2	4, 6	-, 8, -, -	2	7
G_5	$B_2^{3,3}$	72	$\textcircled{3} \equiv \textcircled{3}$	2	6, 12	-, 16, -, -	6	21
G_8	$A_2^{(4)}$	96	$\textcircled{4} - \textcircled{4}$	2	8, 12	6, -, 12, -	4	16
G_9	$G_2^{(4)}$	192	$\textcircled{4} \equiv \textcircled{}$	2	8, 24	18, -, 12, -	8	32
G_{10}	$B_2^{4,3}$	288	$\textcircled{4} \equiv \textcircled{3}$	2	12, 24	6, 16, 12, -	12	48
G_{12}	K_2	48		2	6, 8	12, -, -, -	2	8
G_{16}	$A_2^{(5)}$	600	$\textcircled{5} - \textcircled{5}$	2	20, 30	-, -, -, 48	10	45
G_{25}	$A_3^{(3)}$	648	$\textcircled{3} - \textcircled{3} - \textcircled{3}$	3	6, 9, 12	-, 24, -, -	3	24
G_{26}	$B_3^{3,3}$	1296	$\textcircled{3} - \textcircled{3} \equiv \textcircled{}$	3	6, 12, 18	9, 24, -, -	6	48
G_{31}	L_4	46080		4	8, 12, 20, 24	60, -, -, -	4	59
G_{32}	$A_4^{(3)}$	155520	$\textcircled{3} - \textcircled{3} - \textcircled{3} - \textcircled{3}$	4	12, 18, 24, 30	-, 80, -, -	6	102
G_{20}	$I_2^{3,3}(5)$	360	$\textcircled{3} \overset{5}{-} \textcircled{3}$	2	12, 30	-, 40, -, -	6	27
G_{22}	M_2	240		2	12, 20	30, -, -, -	4	18

8.3. Parameter für zyklische zyklotomische Heckealgebren in $I_2(5)$, H_3 und H_4 .

\mathcal{G}	d	\mathcal{L}	λ	W	Parameter
$I_2(5)$	2	$\Phi_1\Phi_2$	1	Z_2	q^5
	5'	Φ'_5	1	Z_5	$q, \zeta_5 q, \zeta_5^4 q, q^2$
	5''	Φ''_5	1	Z_5	$q, \zeta_5^2 q, \zeta_5^3 q, q^2$
H_3	1	$\Phi_1 \cdot I_2(5)$	$I_2(5)[\zeta_5]$	Z_2	$-q^5$
			$I_2(5)[\zeta_5^4]$	Z_2	$-q^5$
	2	$\Phi_2 \cdot {}^2I_2(5)$	${}^2I_2(5)[\zeta_5]$	Z_2	q^5
			${}^2I_2(5)[\zeta_5^4]$	Z_2	q^5
				Z_6	$q^2, q^{\frac{5}{2}}, -q^{\frac{5}{2}}, -q^3, -q^5$
	5'	$\Phi_1\Phi'_5$	1	Z_{10}	$-q, -\zeta_5^2 q, -\zeta_5^3 q, q^{\frac{3}{2}}, -q^{\frac{3}{2}}, q^2, \zeta_5^2 q^2, \zeta_5^3 q^2, -q^3$
	6	$\Phi_2\Phi_6$	1	Z_6	$q^2, iq^{\frac{5}{2}}, -iq^{\frac{5}{2}}, q^3, q^5$
10'	$\Phi_2\Phi'_{10}$	1	Z_{10}	$q, \zeta_5^2 q, \zeta_5^3 q, iq^{\frac{3}{2}}, -iq^{\frac{3}{2}}, q^2, \zeta_5^2 q^2, \zeta_5^3 q^2, q^3$	
H_4	2	$\Phi_2 H_3$	$\chi_{4,1}$	Z_2	q^{15}
			$\chi_{4,2}$	Z_2	q^{15}
	10'	$\Phi'_{10} \cdot {}^2I_2(5)$	$\chi_{2,2}$	Z_{10}	$q, q^3, -q^3, \zeta_5^2 q^3, \zeta_5^3 q^3, -\zeta_5^2 q^3, -\zeta_5^3 q^3, q^5, q^6$
	12	Φ'_{12}	1	Z_{12}	$q^4, q^5, -q^5, iq^5, -iq^5, \zeta_3 q^5, \zeta_3^2 q^5, -\zeta_3 q^5, -\zeta_3^2 q^5, q^6, q^{10}$
	20'	Φ'_{20}	1	Z_{20}	$q^2, \zeta_5^2 q^2, \zeta_5^3 q^2, q^3, -q^3, iq^3, -iq^3, \zeta_5 q^3, \zeta_5^2 q^3, \zeta_5^3 q^3, \zeta_5^4 q^3, -\zeta_5 q^3, -\zeta_5^2 q^3, -\zeta_5^3 q^3, -\zeta_5^4 q^3, q^4, \zeta_5^2 q^4, \zeta_5^3 q^4, q^6$
	30'	Φ'_{30}	1	Z_{30}	$q, \zeta_5 q, \zeta_5^4 q, iq^{\frac{3}{2}}, -iq^{\frac{3}{2}}, q^2, -q^2, \zeta_3 q^2, \zeta_3^2 q^2, \zeta_3 q^2, \zeta_3^2 q^2, \zeta_5 q^2, \zeta_5^2 q^2, \zeta_5^3 q^2, \zeta_5^4 q^2, -\zeta_5 q^2, -\zeta_5^2 q^2, -\zeta_5^3 q^2, -\zeta_5^4 q^2, \zeta_{15} q^2, \zeta_{15}^4 q^2, \zeta_{15}^{11} q^2, \zeta_{15}^{14} q^2, iq^{\frac{5}{2}}, -iq^{\frac{5}{2}}, q^3, \zeta_5 q^3, \zeta_5^4 q^3, q^4$

M. B. : L.M.E.N.S.-D.M.I. (C.N.R.S. U.A. 762), 45 RUE D'ULM, F-75005 PARIS, FRANCE

E-mail address: broue@dmi.ens.fr

G. M. : I.W.R., IM NEUENHEIMER FELD 368, D-6900 HEIDELBERG, GERMANY

E-mail address: malle@kalliope.iwr.uni-heidelberg.de

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. L. Alperin und M. Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. **110** (1979), 143–157.
- [2] D. Alvis und G. Lusztig, *The representations and generic degrees of the Hecke algebra of type H_4* , J. reine angew. Math. **336** (1982), 201–212.
- [3] S. Ariki und K. Koike, *A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr S_n$ and construction of its irreducible representations*, preprint 1992, erscheint.
- [4] C. T. Benson und C. W. Curtis, *On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups*, Trans. Am. Math. Soc. **165** (1972), 251–273; corr. ibid. **202**, 505–406.
- [5] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.
- [6] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181–182** (1990), 61–92.
- [7] M. Broué und G. Malle, *Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis*, Math. Ann. **292** (1992), 241–262.
- [8] M. Broué, G. Malle und J. Michel, *Generic blocks of finite reductive groups*, Dieses Heft.
- [9] M. Broué und J. Michel, *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. reine angew. Math. **395** (1989), 56–67.
- [10] A. M. Cohen, *Finite complex reflection groups*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **9** (1976), 379–436.
- [11] H. S. M. Coxeter, *Finite groups generated by unitary reflections*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **31** (1967), 125–135.
- [12] C. W. Curtis und I. Reiner, *Methods in representation theory I, II*, John Wiley, New York, 1981/1987.
- [13] P. Deligne und G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103–161.
- [14] F. Digne und J. Michel, *Fonctions \mathcal{L} des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani*, Mémoires Soc. Math. France **20** (1985).
- [15] P. N. Hoefsmit, *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type*, Ph.D Thesis, Univ. of British Columbia (1974).
- [16] G. James und A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Addison Wesley, London, 1981.
- [17] G. Lusztig, *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius*, Invent. Math. **38** (1976), 101–159.
- [18] G. Lusztig, *A class of irreducible representations of a Weyl group II*, Indag. Math. **44** (1982), 219–226.
- [19] G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Mathematical Studies, no 107, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1984.
- [20] G. Lusztig, *Green functions and character sheaves*, Ann. of Math. **131** (1990), 355–408.
- [21] J. B. Olsson, *Remarks on symbols, hooks and degrees of unipotent characters*, J. Combinatorics A **42** (1986), 223–238.
- [22] J. Rickard, *Finite group actions and étale cohomology*, preprint (1992).
- [23] G. C. Shephard und J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.
- [24] T. A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159–198.