Astérisque

JEAN-PAUL ALLOUCHE

Sur la transcendance de la série formelle II

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 35-39
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__35_0>

Sur la transcendance de la série formelle Π

PAR JEAN-PAUL ALLOUCHE

Résumé : Nous donnons une preuve élémentaire de la transcendance de la série formelle Π, qui utilise le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy.

Abstract : We prove by elementary means that the formal series Π is transcendental, using the theorem of Christol, Kamae, Mendès France and Rauzy.

I. Introduction

A la réception d'un paquet de tirés à part d'une note aux Compte-Rendus, nous nous sommes aperçu que quelques exemplaires d'une autre note s'étaient glissés dans notre tas : cette deuxième note, due à Damamme et Hellegouarch [8], donne des résultats sur la fonction zéta de Carlitz. Notre attention, ayant été ainsi attirée, le fut une seconde fois par une faute d'impression dans une quantité notée Π, annoncée comme transcendante, et dont l'expression (erronée) était clairement algébrique, ([8]). Nous nous sommes donc lancé dans une quête bibliographique, puis avons obtenu des résultats que nous nous proposons de décrire ici.

Dans deux articles, parus en 1935 et en 1942 ([5] et [6]), Carlitz définit, sur le corps des séries formelles sur un corps fini, une fonction qui joue le rôle de l'exponentielle, son inverse qui joue celui du logarithme, et une fonction appelée depuis fonction zéta de Carlitz. Il introduit en particulier une quantité notée ξ_∞ (actuellement plutôt notée Π) qui joue le rôle de π=3,14159... Quelques années plus tard, Wade donne différentes propriétés de transcendance dont celle de cette série formelle Π, ([9], [10]).

Nous présentons ici une nouvelle démonstration de ce résultat, plus élémentaire et qui utilise le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy ([7]). En conclusion nous indiquerons nos espoirs d'obtenir, par des moyens élémentaires analogues, d'autres résultats de transcendance.

Ce texte est une version courte d'un article au titre identique accepté pour publication au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (2ème série) [2], où on trouvera une bibliographie plus importante.

S.M.F.
Astérisque 198-199-200 (1991)

II. La série formelle Π

Dans ce qui suit $\mathbb{F}_q$ est le corps fini de cardinal $q = p^s$ (et de caractéristique p). On note $\mathcal{F} = \bigcup_{m \geq 1} \mathbb{F}_q((x^{-m}))$, et on utilise les notations traditionnelles :

$$[k] = x^{q^k} - x,$$

$$F_k = [k][k-1]^q[k-2]^{q^2}...[1]^{q^{k-1}},$$

$$L_k = [k][k-1]...[1],$$

$$F_0 = L_0 = 1.$$

On pose aussi :

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{F_j} t^{q^j} \qquad (t \in \mathcal{F}),$$

$$\Pi = \xi_\infty = \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right) \qquad \text{[c'est un élément de } \mathbb{F}_q((x^{-1}))],$$

$$\xi = (x^q - x)^{1/q-1} \xi_\infty.$$

La fonction ψ est linéaire et joue un peu le rôle de l'exponentielle ; l'on a :

$$\forall t \in \mathcal{F} \qquad \forall E \in \mathbb{F}_q[x], \qquad \psi(t + \xi E) = \psi(t)$$

(autrement dit ξ joue le rôle de $\pi i = (3,14159...)i$).

Enfin, la fonction ζ (fonction zéta de Carlitz) est définie par :

$$\forall m \geq 1 \quad \zeta(m) = \sum_P{}' P^{-m},$$

où $\sum'$ signifie que la somme est prise sur l'ensemble des polynômes (dans $\mathbb{F}_q[x]$) de coefficient directeur égal à 1.

Notons que Carlitz a prouvé :

si $(q-1)|m$, alors $\zeta(m) = \xi^m r_m$, avec $r_m \in \mathbb{F}_q[x]$,

et que Wade a prouvé (entre autres) la transcendance (sur $\mathbb{F}_q(x)$) de la série formelle Π.

III. Le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy

Ce théorème, donné dans [7] (voir [1] pour un survol d'applications en théorie des nombres), donne en particulier une équivalence entre la transcendance sur $\mathbb{F}_q(x)$ d'une série formelle et une propriété combinatoire de ses coefficients :

THEORÈME. *La série formelle* $\sum a(n)x^{-n}$, *à coefficients dans* $\mathbb{F}_q$, *est algébrique sur* $\mathbb{F}_q(x)$ *si et seulement si l'ensemble de sous-suites :*

$$\{n \to a(q^k n + r); \quad k \geq 0; \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini.

Remarque : cette propriété combinatoire équivaut à la reconnaissabilité par automate fini de la suite $(a(n))$, voir [7] par exemple.

IV. Preuve élémentaire de la transcendance de la série formelle Π

En utilisant le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy rappelé au paragraphe précédent, on peut donner une preuve élémentaire de la transcendance de $\Pi = \prod_{j=1}^{+\infty}(1 - \frac{[j]}{[j+1]})$, et nous proposons ci-dessous les étapes d'une telle preuve (les détails sont laissés au lecteur... ou peuvent être trouvés dans [2]).

1. Posons $\alpha = \prod\limits_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}})$, alors α est algébrique sur $\mathbb{F}_q(x)$ et $\alpha/\Pi = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a(n)x^{-n}$, où $a(n) = 0$ si n ne peut pas s'écrire $\sum\limits_{j \in J}(q^j - 1)$ pour un ensemble fini d'indices J, et $a(n) = (-1)^{Card J}$ si $n = \sum\limits_{j \in J}(q^j - 1)$ (une telle écriture, si elle existe, est nécessairement unique).

2. Montrer que Π est transcendant, ou ce qui revient au même que α/Π est transcendant, équivaut à montrer que l'ensemble de suites $\{n \to a(q^k n + r); \quad k \geq 0, \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est infini. Il suffit même de montrer que l'ensemble de suites

$$\mathcal{S} =: \{n \to |a(q^k n + r)|; \quad k \geq 0, \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est infini.

3. Soit $b_k(n)$ la suite définie (pour $k \geq 2$), par

$$b_k(n) = |a(q^k n + q^k - k)|.$$

Alors, toujours pour $k \geq 2$, on a :

$$b_k(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq n < \dfrac{q^k - 1}{q - 1} - 1 \\ 1 \text{ si } n = \dfrac{q^k - 1}{q - 1} - 1 \end{cases}$$

les suites $b_k(n)$ sont donc toutes distinctes, et l'ensemble $\mathcal{S}$ est infini.

V. Le cas $q = 2$ et la définition des entiers d'après von Neumann

Le cas $q = 2$ dans le paragraphe précédent montre un rapport inattendu entre la série formelle Π et la définition de von Neumann des entiers.

Soit en effet (A_n) la suite d'ensembles définie par :

$A_0 = \emptyset$

$A_1 = \{\emptyset\}$

$A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

...

qui, on le sait, permet de définir les entiers ([4]) en appelant n le cardinal de A_n.

Écrivons ces ensembles A_n à l'aide des symboles { et } :

$A_0 = \{\}$

$A_1 = \{\{\}\}$

$A_2 = \{\{\}\{\{\}\}\}$

...

Alors la suite de "mots" (A_n) converge vers une suite infinie A, qui est point fixe de la substitution $\{ \to \{\{\}, \quad \} \to \}$, (voir [3]).

Le lecteur vérifiera que si l'on remplace dans la suite A les { par des 1 et les } par des 0, on obtient une suite $A' = u(0)u(1)u(2)... = 110...$, qui est telle que, si l'on écrit la série formelle α/Π dans le cas $q = 2$ (voir IV.1) :

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^{2^j}}\right) / \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^{2^j} - x}{x^{2^{j+1}} - x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)x^{-n},$$

alors, $|a(n)| = u(n)$ quel que soit l'entier n.

VI. Espoirs

En utilisant une propriété de la fonction zéta de Carlitz donnée dans l'introduction et la transcendance de la série formelle Π, on obtient sans mal la transcendance de $\zeta(m)$ pour les entiers m divisibles par $q-1$. Yu a démontré récemment (voir [11], [12], [13]), via l'étude des modules de Drinfeld, la transcendance de toutes les valeurs de la fonction zéta de Carlitz. Il serait donc très intéressant de donner une preuve élémentaire de ce résultat, via le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy. Nous n'avons pas encore une telle preuve, mais nous avons obtenu de cette façon d'autres résultats de transcendance, par exemple la transcendance sur $\mathbb{F}_q(x)$ de la "série des crochets" $\sum_{k=1}^{+\infty} [k]^{-1}$ démontrée pour la première fois par Wade ([9]).

Note ajoutée en septembre 1990 : G. Damamme a obtenu récemment une preuve élémentaire (mais qui n'utilise pas les automates finis) de la transcendance de toutes les valeurs de la fonction zéta de Carlitz (*Transcendance de la fonction zéta de Carlitz par la méthode de Wade*, Université de Caen, 1990).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. ALLOUCHE *Automates finis et théorie des nombres*, Expo. Math. **5** (1987), 239–266.

[2] J.-P. ALLOUCHE *Sur la transcendance de la série formelle* Π, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux **1,1 2ème série** (1989), 163–187.

[3] J.-P. ALLOUCHE, J. BÉTRÉMA et J. SHALLIT *Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre*, R.A.I.R.O., Informatique théorique et Applications **23,3** (1989), 235–249.

[4] N. BOURBAKI "Théorie des ensembles," chap. 3, Hermann, Paris, 1963, p. 39.

[5] L. CARLITZ *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J., **1** (1935), 137–168.

[6] L. CARLITZ *Some topics in the arithmetic of polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 679–691.

[7] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401–419.

[8] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zéta de Carlitz*, C.R. Acad. Sci. Paris **307, Série I** (1988), 635–637.

[9] L.I. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$*, Duke Math. J., **8** (1941), 701–720.

[10] L.I. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, II*, Duke Math. J., **10** (1943), 587–591.

[11] J. YU *Transcendence and Drinfeld modules*, Inv. Math. **83** (1986), 507-517.

[12] J. YU *Transcendence and Drinfeld modules, II*, Math. Res. Cent. Rep. (1986), 172–181, Symp. Taipei/Taiwan.

[13] J. YU . In Zbl. Math. 644.12005.

C.N.R.S. URA 0226 Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
FRANCE
(Reçu le 31 octobre 1989)