Astérisque

C. SOULÉ

Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 355-371

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__355_0>

GEOMETRIE D'ARAKELOV
ET
THEORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

par

C. SOULÉ

0. Introduction

0.1. Les travaux récents de VOJTA [23] et FALTINGS [8] ont établi un lien remarquable entre la théorie de l'approximation des nombres algébriques et la théorie d'Arakelov. Celle-ci permet d'étendre le résultat classique de Thue-Siegel-Dyson-Gel'fond à des courbes de genre supérieur à un, obtenant ainsi une nouvelle preuve de la conjecture de MORDELL [23] et, plus généralement, de montrer des résultats de finitude sur les points rationnels de certaines sous-variétés des variétés abéliennes [8]. Nous tâcherons ici de présenter les résultats principaux de la géométrie d'Arakelov, et d'indiquer comment elle intervient dans ces travaux.

0.2. L'objectif premier de la géométrie d'Arakelov est l'étude des fibrés algébriques sur les variétés arithmétiques, munis d'une métrique hermitienne sur le fibré holomorphe associé. Que cette notion soit importante dans l'étude des équations diophantiennes se voit dès la définition de la hauteur d'un point P de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ (hauteur "naïve"). En effet, si $L_P \subset \mathbb{Z}^{N+1}$ désigne le $\mathbb{Z}$-module libre de rang un formé de 0 et des divers choix de coordonnées homogènes entières de P, la hauteur (logarithmique) de P est un invariant du fibré inversible L_P sur Spec ($\mathbb{Z}$) muni de la norme $\| \ \|$ induite par la métrique standard sur $\mathbb{C}^{N+1}$ (l'opposé de son degré arithmétique, cf. (8) ci-dessous) :

$$h(P) = \log \|s\| \ , \tag{1}$$

où s est n'importe quel générateur de L_P, i.e. un choix $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ de coordonnées sans diviseur commun, et

$$\|s\|^2 = \sum_{i=0}^{N} |x_i|^2 .$$

0.3. Un autre exemple est donné par les fonctions auxiliaires des démonstrations de transcendance, ou d'approximation des nombres algébriques. Considérons par exemple la preuve du théorème de Dyson. Etant donné un nombre algébrique α de degré m sur $\mathbb{Q}$, et $\varepsilon > 0$, ce théorème affirme qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres rationnels p/q tels que

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^{\sqrt{2m}+\varepsilon}} .$$

Pour le montrer on prouve qu'il existe un polynôme à coefficients entiers en deux variables $P(x,y) \neq 0$, homogène de degré (d_1, d_2), dont la taille est (explicitement) bornée et qui s'annule beaucoup au point (α, α), ainsi que ses dérivées. Plus précisément, son indice en ce point, i.e.

$$\sigma = \mathrm{Sup} \left\{ s \in \mathbb{R} \text{ tel que, si } \frac{i_1}{d_1} + \frac{i_2}{d_2} < s \text{ , alors } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i_2} P(\alpha, \alpha) = 0 \right\} ,$$

est grand. Etant données deux bonnes approximations p_1/q_1 et p_2/q_2 de α, on étudie alors l'indice de P en $(p_1/q_1, p_2/q_2)$ pour conclure que q_2/q_1 doit rester borné.

On peut voir un tel polynôme P comme une section du fibré en droites $\mathcal{O}(d_1, d_2)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, dont il faut contrôler la norme.

0.4. Une conséquence du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique (Théorème 1 ci-dessus) est une borne sur les sections non nulles d'un fibré ample sur une variété arithmétique (Théorème 2). Une variante de cet énoncé est une des étapes de la preuve de VOJTA [23] (cf. §.2).

0.5. FALTINGS généralise dans [8] le travail de VOJTA au cas des variétés abéliennes. Une extension astucieuse de la méthode classique de construction de la fonction auxiliaire lui permet d'éviter l'usage du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique. Il a cependant recours à la théorie d'Arakelov pour la définition et l'étude d'une hauteur pour les variétés projectives sur un corps de nombres. On verra ci-dessous (Théorème 3) que cette hauteur est essentiellement celle définie par PHILIPPON [7] [8], c'est à dire la hauteur logarithmique des coordonnées de Chow de cette variété. PHILIPPON utilise cette notion pour obtenir des critères d'indépendance algébrique [17], améliorant des résultats de NESTERENKO.

0.6. Cet article ne présente pas de résultat original, si ce n'est le Théorème 3 (dont une version voisine a été obtenue, indépendamment, par PHILIPPON). Les deux premiers paragraphes sont principalement un résumé des travaux de GILLET et l'auteur.

Je remercie D. BERTRAND pour plusieurs discussions, et pour m'avoir parlé de la hauteur des variétés projectives.

1. Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique

1.1. Appelons *variété arithmétique* la donnée d'un schéma X régulier, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, et *fibré hermitien* sur X la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un fibré algébrique E sur X et d'une métrique hermitienne lisse h sur le fibré holomorphe $E_{\mathbb{C}}$ induit par E sur l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X. Nous supposerons aussi que h est invariante par l'involution de conjugaison complexe, notée F_∞.

Choisissons une métrique Kählerienne, invariante par F_∞, sur $X(\mathbb{C})$. On peut alors associer à tout fibré hermitien $\overline{E}$ sur X un nombre réel $\chi(\overline{E})$, analogue arithmétique de la caractéristique d'Euler-Poincaré. Il est défini comme suit. Pour tout entier $q \geq 0$, on sait que le groupe de cohomologie cohérente $H^q(X, E)$ est un groupe abélien de type fini. On désigne par $\sharp H^q(X, E)_{\mathrm{tors}}$ le cardinal de son sous-groupe de torsion.

Par ailleurs, soit $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$ l'espace des formes différentielles de type $(0, q)$ sur $X(\mathbb{C})$ à coefficients dans $E_{\mathbb{C}}$. Les métriques choisies sur $E_{\mathbb{C}}$ et $X(\mathbb{C})$ fournissent un produit scalaire $< \, , \, >_{L^2}$ sur $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$: étant données deux telles formes η et η' on pose

$$(2) \qquad < \eta, \eta' >_{L^2} = \int_{X(\mathbb{C})} < \eta(x), \eta'(x) > \frac{\omega_0^n}{n!}$$

où $n = \dim(X/\mathbb{Z})$ et

$$(3) \qquad \omega_0 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{i}{2\pi} h_X \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) dz_\alpha d\overline{z}_\beta$$

pour tout choix de coordonnées locales z_α sur $X(\mathbf{C})$ (h_X est la métrique choisie sur l'espace tangent de $X(\mathbf{C})$).

L'espace vectoriel complexe engendré par $H^q(X,E)$ s'identifie à celui des formes harmoniques de type $(0,q)$ sur $X(\mathbf{C})$ à coefficients dans $E_{\mathbf{C}}$:

$$H^q(X,E)_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C} \cong H^q(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}}) \cong \mathcal{H}^{0q}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}}). \tag{4}$$

Il est donc muni du produit scalaire L^2.

On désigne par $\mathrm{vol}_{L^2}(H^q(X,E))$ le volume, pour ce produit scalaire, du quotient $H^q(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}})^+/H^q(X,E)$ où $(\ )^+$ désigne le sous-espace invariant par F_∞.

L'opérateur de Cauchy-Riemann de $E_{\mathbf{C}}$

$$\overline{\partial} : A^{0q}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}}) \longrightarrow A^{0,q+1}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}})$$

admet un adjoint $\overline{\partial}^*$ pour le produit scalaire L^2. Le Laplacien

$$\Delta_q = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$$

sur $A^{0q}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}})$ possède une fonction zêta

$$\zeta_q(s) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-s}$$

où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ désigne les valeurs propres non nulles de Δ_q (comptées avec multiplicité). Cette série converge si $\mathcal{R}e(s) > n$, et la fonction $\zeta_q(s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe, qui n'a pas de pôle en $s=0$. On peut donc prendre sa dérivée $\zeta_q'(0)$ en ce point.

On pose alors :

$$\chi(\overline{E}) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q \left(\log \sharp H^q(X,E)_{\mathrm{tors}} - \log \mathrm{Vol}_{L^2} H^q(X,E) + \frac{1}{2}\, q\zeta_q'(0)\right) . \tag{5}$$

(Ce nombre réel est le degré arithmétique du fibré déterminant de la cohomologie de E, muni de la métrique de Quillen [16] [19] [2] [12]).

1.2. Notre objectif est de donner une formule pour $\chi(\overline{E})$. Pour ce faire on introduit des *groupes de Chow arithmétiques* $\widehat{CH}^p(X)$, $p \geq 0$, de la façon suivante [9] [10].

Soit $Z \in Z^p(X)$ un cycle de codimension p sur X, c'est à dire un élément $Z = \sum_\alpha n_\alpha Z_\alpha$ du groupe abélien libre engendré par l'ensemble $X^{(p)}$ des sous-schémas fermés irréductibles de codimension p de X. On peut associer à Z un courant δ_Z sur $X(\mathbf{C})$, donné par intégration sur $Z(\mathbf{C})$ des formes différentielles η (de degré adéquat) :

$$\delta_Z(\eta) = \sum_\alpha n_\alpha \int_{Z_\alpha(\mathbf{C})} \eta \ . \tag{6}$$

Le courant δ_Z appartient à l'espace $\mathcal{D}^{pp}(X)$ des courants réels S de type (p,p) sur $X(\mathbf{C})$ tels que $F_\infty^*(S) = (-1)^p S$. On appelle *courant de Green* pour Z la donnée d'un courant $g \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$ tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit lisse, c'est à dire donné par intégration contre une forme différentielle ω sur $X(\mathbf{C})$ (ici $dd^c = \overline{\partial}\partial/2i\pi$).

Un exemple d'une telle situation s'obtient en considérant un fibré hermitien $\overline{L} = (L,h)$ de rang un sur X, et une section rationnelle s de L sur X. En effet, la formule de Poincaré-Lelong affirme que

$$dd^c(-\log h(s,s)) + \delta_{\mathrm{div}\,(s)} = c_1(L,h) \tag{7}$$

est la première forme de Chern de $\overline{L}$ (elle ne dépend pas du choix de s). Par conséquent $-\log h(s,s)$ est un courant de Green pour le diviseur $\mathrm{div}\,(s)$ de s.

Pour tout entier $p \geq 0$ on désigne par $\widehat{CH}^p(X)$ le groupe abélien engendré par les couples (Z,g), où $Z \in Z^p(X)$ et g est un courant de Green pour Z, modulo le sous-groupe engendré par les couples $(0, \partial u + \overline{\partial} v)$ (où u et v sont des courants de type $(p-2, p-1)$ et $(p-1, p-2)$ respectivement) et $(\mathrm{div}(f), -\log|f|^2)$, où f est une fonction rationnelle sur $Y \in X^{(p-1)}$ et $\log|f|^2$ est le courant sur $X(\mathbf{C})$ donné par l'intégrale indéfinie

$$(\log|f|^2)(\eta) = \int_{Y(\mathbf{C})} (\log|f|^2)\eta \ .$$

Si $p = 1$ par exemple, tout élément de $\widehat{CH}^1(X)$ est la classe $\widehat{c}_1(\overline{L})$ du couple $(\mathrm{div}\,(s), -\log h(s,s))$, où $\overline{L} = (L,h)$ est un fibré hermitien inversible sur X et $s \neq 0$ une section rationnelle de L (la classe $\widehat{c}_1(\overline{L})$ ne dépend pas du choix de s). Quand $X = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Z})$, le groupe $\widehat{CH}^1(\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{R}$, la classe de $\widehat{c}_1(\overline{L})$ est le degré arithmétique de $\overline{L}$:

$$\deg(\overline{L}) = -\log\|s\| \ , \quad \text{si } \ L = \mathbf{Z}s \ \text{ (et } \|s\|^2 = h(s,s)) \ . \tag{8}$$

1.3. Les groupes $\widehat{CH}^p(X)$ sont munis d'un produit d'intersection [10]

$$\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{CH}^q(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbf{Q}} \tag{9}$$

(Si A est un groupe abélien, $A_{\mathbf{Q}} = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$).

Formellement, ce produit s'obtient en associant à (Z, g) et (Z', g') la classe de $(Z \cap Z', g\delta_{Z'} + \omega g')$, où $\omega = dd^c g + \delta_Z$. Il y a de sérieuses difficultés avec cette formule, car le cycle $Z \cap Z'$ n'est pas toujours défini (on ne dispose pas d'un "moving lemma" sur $\mathbf{Z}$) et le produit de courants $g\delta_{Z'}$, nécessite aussi une définition adéquate. La première difficulté conduit à remplacer $\widehat{CH}^{p+q}(X)$ par $\widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbf{Q}}$. Ceci n'est pas nécessaire si $p \leq 1$ ou $q \leq 1$, ou si X est lisse sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres (cf. loc. cit.).

La formule suivante nous sera utile. Si η est une forme lisse de $\mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$, on note $a(\eta) \in \widehat{CH}^p(X)$ la classe du couple $(0, \eta)$. Alors, pour tout élément $x \in \widehat{CH}^q(X)$, on a

$$a(\eta)x = a(\eta\omega(x)) \tag{10}$$

où $\omega(x) = dd^c g + \delta_Z$, si (Z, g) est un représentant de x.

Un morphisme $f : X \to Y$ entre variétés arithmétiques induit des morphismes d'image inverse

$$f^* : \widehat{CH}^p(Y) \to \widehat{CH}^p(X)$$

et d'image directe

$$f_* : \widehat{CH}^p(X) \to \widehat{CH}^{p-\delta}(X) ,$$

où δ est la dimension relative. On a la formule de projection

$$f_*(xf^*(y)) = f_*(x)y . \tag{11}$$

En particulier, si $n = \dim(X/\mathbf{Z})$ est la dimension relative de X, le morphisme

$$f_* : \widehat{CH}^{n+1}(X) \to \widehat{CH}^1(\mathbf{Z}) = \mathbf{R}$$

associe à (Z, g) le nombre

$$f_*(Z, g) = \log \sharp H^0(Z, \mathcal{O}_Z) + \frac{1}{2} \int_{X(\mathbf{C})} g . \tag{12}$$

On obtient un accouplement (appelé nombre d'intersection)

$$\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{CH}^{n+1-p}(X) \to \mathbf{R}$$

en associant à $x \otimes y$ l'élément $f_*(xy)$. Ce nombre d'intersection sera parfois noté seulement xy.

1.4. Il existe une théorie des *classes caractéristiques* à valeurs dans les groupes $\widehat{CH}^p(X)$ pour les fibrés hermitiens sur X [11]. La première classe de Chern $\hat{c}_1(\overline{L})$ a été définie plus haut. On a aussi un caractère de Chern

$$\widehat{ch}(\overline{E}) \in \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{CH}^p(X)_{\mathbf{Q}} ,$$

qui commute aux images inverses, est additif sur les sommes directes orthogonales, multiplicatif pour le produit tensoriel, et tel que, pour tout fibré hermitien inversible $\overline{L}$,

$$\widehat{ch}(\overline{L}) = \exp\left(\hat{c}_1(\overline{L})\right) . \tag{13}$$

De plus la forme $\omega(\widehat{ch}(\overline{E}))$ sur $X(\mathbf{C})$ associée à $\widehat{ch}(\overline{E})$ est le représentant usuel du caractère de Chern de $E_{\mathbf{C}}$ en cohomologie (donné par le choix de la métrique sur $E_{\mathbf{C}}$).

1.5. Avant d'énoncer le résultat principal, il nous faut encore introduire une classe caractéristique

$$R(E_{\mathbf{C}}) \in H^*(X(\mathbf{C}), \mathbf{R})$$

dans la cohomologie réelle de $X(\mathbf{C})$, pour tout fibré holomorphe $E_{\mathbf{C}}$. Cette classe commute aux morphismes d'image inverse, elle est additive sur les suites exactes, et sa valeur pour tout fibré inversible $L_{\mathbf{C}}$ dont $x = c_1(L_{\mathbf{C}}) \in H^2(X(\mathbf{C}), \mathbf{R})$ est la première classe de Chern, est donnée par la formule

$$R(L_{\mathbf{C}}) = \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \geq 1}} \left(2\zeta'(-m) + \zeta(-m)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\right) \frac{x^m}{m!} , \tag{14}$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction zêta de Riemann, et $\zeta'(s)$ sa dérivée.

1.6. Si $\alpha \in \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{CH}^p(X)_{\mathbf{Q}}$, on désigne par $[\alpha]^{(p)}$ sa composante de degré p.

THÉORÈME 1 : *Soient $f : X \to$ Spec $(\mathbb{Z})$ une variété arithmétique de dimension relative n, munie d'une métrique Kählerienne invariante par F_∞, et $\overline{E}$ un fibré hermitien sur X. Alors*

$$\chi(\overline{E}) = f_* \left([\widehat{ch}(\overline{E})\widehat{Td}(X)]^{(n+1)} \right) - \frac{1}{2} \int_{X(\mathbf{C})} ch(E_{\mathbf{C}}) Td(X) R(X) . \tag{15}$$

1.7. *Remarques :*

- Dans (15), $Td(X)$ (resp. $R(X)$) est la classe de Todd (resp. la classe R) du fibré tangent à $X(\mathbf{C})$. Quand X est lisse sur $\mathbb{Z}$, $\widehat{Td}(X)$ est la classe de Todd arithmétique [11] du fibré tangent à X. En général la classe $\widehat{Td}(X)$ est associée au dual du complexe cotangent.
- On montre dans [13] qu'un énoncé tel que (15) reste valable si X est singulier quand sa fibre générique est lisse. On peut aussi remplacer la base Spec $(\mathbb{Z})$ par une variété arithmétique arbitraire.
- Le théorème 1 étend les résultats antérieurs d'ARAKELOV, FALTINGS [7] et DELIGNE [6]. Sa démonstration repose sur plusieurs travaux [1] [2] [3] [4] [5] [10] [11] [12].

2. Petites sections et conjecture de Mordell

2.1. On déduit du Théorème 1 le résultat suivant :

THÉORÈME 2 [13] : *Soient X une variété arithmétique, $n = \dim(X/\mathbb{Z})$ et $\overline{L}$ un fibré hermitien inversible sur X. On suppose que L est ample sur X et que la forme de Chern $c_1(\overline{L})$ est positive. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, et tout fibré hermitien $\overline{E}$ sur X, il existe un entier k_0 tel que, si $k \geq k_0$, $E \otimes L^{\otimes k}$ possède une section non nulle s sur X dont la norme en tout point $x \in X(\mathbf{C})$ est bornée comme suit :*

$$\|s(x)\| \leq \exp \left(k \left(\varepsilon - \frac{\overline{L}^{n+1}}{(n+1)L^n} \right) \right) . \tag{16}$$

Ici $\overline{L}^{n+1} = f_*(\hat{c}_1(\overline{L})^{n+1}) \in \mathbb{R}$ désigne la self-intersection arithmétique de $\overline{L}$, et $L^n = f_*(c_1(L_{\mathbf{C}})^n) \in \mathbb{Z}$ sa self-intersection géométrique.

2.2. Pour montrer le Théorème 2 on suppose d'abord que $\overline{L}^{n+1} > 0$. On utilise le Théorème 1 pour calculer $\chi(\overline{E} \otimes \overline{L}^k)$ en fonction de k. On trouve (en utilisant

(13)) que

$$\chi(\overline{E} \otimes \overline{L}^{\otimes k}) = r \, \frac{\overline{L}^{n+1}}{(n+1)!} \, k^{n+1} + O(k^n) \, , \tag{17}$$

où r est le rang de E (notons que l'énoncé précis du Théorème 1 n'est pas entièrement nécessaire, cf. [13]). Puisque L est ample, si k est grand et $q > 0$, le groupe $H^q(X, \otimes L^{\otimes k})$ est nul. Par ailleurs BISMUT et VASSEROT ont montré que

$$\sum_{q \geq 0} (-1)^{q+1} q \zeta_q'(0) = O(k^n \log(k)) \, . \tag{18}$$

Les formules (5) et (17) montrent donc que

$$\log \mathrm{Vol}_{L^2} H^0(X, E \otimes L^{\otimes k}) = r \, \frac{\overline{L}^{n+1}}{(n+1)!} \, k^{n+1} + O(k^n \log(k)) \, .$$

Comme le volume de la boule unité pour la norme L^2 est $O(k^n \log k)$, le théorème de MINKOWSKI, joint à un argument de GROMOV permettant de passer de la norme L^2 à la norme sup [13], montre que, si k est grand, $E \otimes L^{\otimes k}$ a une section $s \neq 0$ sur X telle que $\|s(x)\| \leq 1$ pour tout point $x \in X(\mathbf{C})$. Le cas général s'en déduit en multipliant la métrique de $\overline{L}$ par une constante pour se ramener au cas où $\overline{L}^{n+1} > 0$ [15].

2.3. La preuve ci-dessus montre aussi que le nombre de sections s satisfaisant (16) est au moins $\varepsilon r \, \dfrac{n^{d+1}}{d!} \, L^d$, où r est le rang de E. On peut alors appliquer le principe des boîtes de Dirichlet pour montrer qu'une des sections s (et ses dérivées) a un zéro d'ordre donné en un point de la fibre générique de X (cf. [15]).

2.4. La nouvelle démonstration par VOJTA de la conjecture de MORDELL [23] est une extension en genre positif du théorème de DYSON (cf. 0.3.). Le rôle du polynôme auxiliaire P est joué par une section non nulle s d'un fibré en droites de la forme

$$L = pr_1^*(\omega)^{\otimes a} \otimes pr_2^*(\omega)^{\otimes b} \otimes \mathcal{O}(\Delta)^{\otimes c}$$

sur une désingularisation du produit $X \times X$ de deux copies d'une surface arithmétique semi-stable de genre ≥ 2. Ici a, b, c sont des entiers convenablement choisis, $pr_i : X \times X \to X$, $i = 1, 2$, désigne les deux projections, Δ est la diagonale, et ω le fibré dualisant relatif de X. VOJTA obtient une borne sur la norme d'une telle section s par la méthode du Théorème 2. Cependant L n'est pas ample (mais $H^2(X \times X, L) = 0$ et la restriction de L à la fibre générique est ample) et la forme de Chern $c_1(\overline{L})$ n'est pas positive (mais sa restriction à un des facteurs est positive). On peut étendre l'argument de 2.2 à cette situation [23]. VOJTA étudie ensuite l'indice de s en un point rationnel (P, Q) de $X \times X$. Il montre que la hauteur de P est bornée par un multiple de la hauteur de Q, ce qui montre la finitude de l'ensemble des points rationnels de X.

3. Hauteur des variétés projectives

3.1. FALTINGS simplifie dans [8] l'argument de VOJTA, et l'étend au cas des sous-variétés des variétés abéliennes. En particulier, il obtient une section bornée d'un fibré ample par une méthode plus proche de la méthode classique de l'approximation diophantienne, qui évite de recourir au théorème de Riemann-Roch arithmétique.

Un des outils de [8] est la notion suivante de hauteur pour les variétés projectives. Soit k un corps de nombres, et $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k. Si $N \geq 1$ est un entier, on désigne par $\mathbb{P}^N$ l'espace projectif du fibré trivial de rang $N+1$ sur $\mathcal{O}_k$. On considère $\mathbb{P}^N$ comme une variété arithmétique (sur $\mathbb{Z}$) au sens de 1.1. L'ensemble $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ des points complexes de $\mathbb{P}^N$ est donc la réunion de $[k : \mathbb{Q}]$ copies de l'espace projectif complexe de dimension N, noté $\mathbb{CP}^N$. Si on munit $\mathcal{O}_k^{N+1}$ de la métrique standard, on obtient une action du groupe unitaire $U = U(N+1)$ sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Il existe une unique structure de Kähler sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ invariante par U. Les formes harmoniques sont les formes invariantes par U, et la projection orthogonale $H : \mathcal{D}^{pp}(\mathbb{P}^N) \to \mathcal{H}^{pp}(\mathbb{P}^N)$ des courants sur les formes harmoniques s'obtient en associant à $g \in \mathcal{D}^{pp}(\mathbb{P}^N)$ sa moyenne $\int_U u^*(g)du$, où du est la mesure de Haar de volume un de U.

Etant donné un sous-schéma fermé irréductible $X \subset \mathbb{P}^N$, on désigne par g_X le courant de Green pour X tel que $dd^c(g_X) + \delta_X$ est une forme harmonique sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, et $H(g_X) = 0$. Un tel courant g_X existe et est unique modulo les courants de la forme $\partial u + \overline{\partial} v$. On désigne par $\widehat{X} \in \widehat{CH}^{N-n}(\mathbb{P}^N)$ la classe de (X, g_X) avec $n = \dim(X) - 1$. Si la fibre générique $X_k = X \bigotimes_{\mathcal{O}_k} k$ de X est non vide, $n = \dim X_k$.

Par ailleurs, on munit le fibré en droite tautologique $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{P}^N$ de la métrique quotient de la métrique standard par la surjection canonique

$\mathbb{C}^{N+1} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$. Si $f : \mathbb{P}^N \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est le morphisme de définition de $\mathbb{P}^N$, on pose [8]

$$h(X) = f_* \left(\widehat{X}.\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{n+1}\right) \in \mathbb{R} \ . \tag{19}$$

On appelle $h(X)$ *la hauteur* de X. La formule (19) est à rapprocher de la définition du degré $\deg(X_k) \in \mathbb{Z}$ de la variété X_k. Si $c_1(\mathcal{L}_k) \in CH^2(\mathbb{P}^N_k) = \mathbb{Z}$ est la première classe de Chern de la restriction de $\mathcal{L}$ à X_k (dans le groupe de Chow usuel), et $[X_k] \in CH^{N-n}(\mathbb{P}^N_k)$ la classe de X_k, on a

$$[k : \mathbb{Q}] \deg(X_k) = f_* \left([X_k] c_1(\mathcal{L}_k)^n\right) \tag{20}$$

dans $\mathbb{Z} = CH^0(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Q})$. On notera que si $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ est la première forme de Chern de $\overline{\mathcal{L}}$ on a aussi

$$[k : \mathbb{Q}] \deg(X_k) = \int_{X(\mathbb{C})} c_1(\overline{\mathcal{L}})^n \ . \tag{21}$$

FALTINGS montre que $h(X) \geq 0$ et étudie le comportement de $h(X)$ par projection linéaire. Il en déduit que $h(X)$ fournit une borne pour la taille des équations de X sur $\mathbb{Z}$ ([8],cor.2.12).

Si X_k est une sous-variété irréductible de codimension n de $\mathbb{P}^N_k$ et X son adhérence dans $\mathbb{P}^N$, on pose

$$h(X_k) = h(X) \ . \tag{22}$$

Cette définition s'étend par linéarité au cas d'un cycle arbitraire sur $\mathbb{P}^N_k$. Si $P \in \mathbb{P}^N(k)$ est un point rationnel et X_k la variété de dimension zéro correspondante, le nombre $h(P) = h(X_k)$ coïncide avec la hauteur logarithmique du point P (voir 0.2. quand $k = \mathbb{Q}$).

3.2. PHILIPPON définit dans [17] et [18] la hauteur d'une variété projective comme étant celle de la forme de Chow associée. Plus précisément, appelons $\check{\mathbb{P}}^N_k$ l'espace projectif dual de $\mathbb{P}^N_k$. Un point ξ de $\check{\mathbb{P}}^N_k$ s'interprète comme un hyperplan de $\mathbb{P}^N_k$, d'équation $\xi.x = 0$. La sous-variété $Y_k \subset (\check{\mathbb{P}}^N_k)^{n+1}$ formée des $(n+1)$-uplets $(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ d'hyperplans tels que leur intersection $\xi^0 \cap \xi^1 \cap \ldots \cap \xi^n$ rencontre X_k est une hypersurface. Etant données des coordonnées homogènes ξ^α_j, $j = 0, \ldots, N$, pour chacun des $\xi^\alpha, \alpha = 0, \ldots, n$, l'équation de Y_k s'écrit $F(\xi^\alpha_j) = 0$, où F est multihomogène de degré $d = \deg(X_k)$ (F est unique à scalaire près) [20] [21].

Soient $S^N \subset \mathbf{CP}^N$ la sphère unité et $d\nu$ la mesure de probabilité sur $(S^N)^{n+1} \subset (\mathbf{CP}^N)^{n+1}$ invariante sous l'action de $\check{U} = (U(N+1))^{n+1}$. Si v est une place finie de k, notons Nv le nombre d'éléments du corps résiduel, et $|\alpha|_v = (N_v)^{-v(\alpha)}$ pour tout nombre $\alpha \in k$ de valuation $v(\alpha)$. On pose alors

$$|F|_v = \max_I |a_I|_v \ , \tag{23}$$

où a_I parcourt l'ensemble des coefficients de F. La hauteur de Philippon est donnée par la formule

$$h'(X_k) = \sum_v \log |F|_v + \sum_{\sigma : k \to \mathbf{C}} \int_{(S^N)^{n+1}} \log |\sigma(F)| d\nu \ , \tag{24}$$

où v parcourt l'ensemble des places finies et σ l'ensemble des plongements complexes de k. La formule du produit montre que ce nombre ne dépend pas du choix de F.

THÉORÈME 3 : *Avec les définitions* (19),(22) et (24) *ci-dessus, on a*

$$h(X_k) = h'(X_k) + \frac{1}{2}(n+1) \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \right) [k : \mathbf{Q}] \deg(X_k) \ . \tag{25}$$

3.3. Le théorème 3 est l'analogue arithmétique du fait que les degrés de X_k et F coïncident. Pour le démontrer nous allons d'abord comparer $h'(X_k)$ et la hauteur de Y_k au sens de [8]. Notons $\check{\mathbf{P}}^N$ l'espace projectif du fibré dual du fibré trivial de rang $N+1$ sur $\mathcal{O}_k$, $\check{\mathcal{L}}$ le fibré tautologique sur $\check{\mathbf{P}}^N$ muni de la métrique standard, et $\check{c} = \hat{c}_1(\overline{\check{\mathcal{L}}}) \in \widehat{CH}^1(\check{\mathbf{P}}^N)$ sa première classe de Chern arithmétique. Si $\alpha = 0, \ldots, n$ on désigne par $\mathrm{pr}_\alpha : (\check{\mathbf{P}}^N)^{n+1} \to (\check{\mathbf{P}}^N)$ la α-ième projection, et l'on pose

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha^* \mathcal{L} \text{ et } c_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha^*(\check{c}) = \hat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}_\alpha) \in \widehat{CH}^1((\check{\mathbf{P}}^N)^{n+1}) \ .$$

Soit F une équation de Y_k à coefficients dans $\mathcal{O}_k$. C'est une section sur $\check{P} = (\check{\mathbf{P}}^N)^{n+1}$ du fibré inversible $\bigotimes_{\alpha=0}^{n} \mathcal{L}_\alpha^{\otimes d}$. Si l'on munit $\check{P}(\mathbf{C})$ de la structure de Kähler standard, on peut définir comme en 3.1 une classe

$$\widehat{\mathrm{div}(F)} = (\mathrm{div}(F), g_{\mathrm{div}(F)}) \in \widehat{CH}^1(\check{P}) \ .$$

Puisque le couple $(\operatorname{div}(F), -\log\|F\|^2)$ représente $\widehat{c_1}\left(\bigotimes_{a=0}^{n}\overline{\mathcal{L}}_\alpha^{\otimes d}\right) = d(c_0+\cdots+c_n)$ et puisque $c_1\left(\bigotimes_{a=0}^{n}\overline{\mathcal{L}}_\alpha^{\otimes d}\right)$ est harmonique on a :

(26) $$\widehat{\operatorname{div}(F)} = d(c_0+\cdots+c_n) + a(H(\log\|F\|^2)) \ .$$

Si $\mu_\alpha = \omega(c_\alpha)$ désigne la première forme de Chern de $\overline{\mathcal{L}}_\alpha$, on déduit de (26) (en utilisant (10) et en omettant désormais f_* dans l'écriture d'un nombre d'intersection)

(27) $$\widehat{\operatorname{div}(F)}c_0^N\dots c_n^N = d\left(\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha^{N+1}\right)\left(\int_{\check{P}(\mathbf{C})}\mu_0^N\dots\mu_n^N\right)/[k:\mathbf{Q}]+ \int_{\check{P}(\mathbf{C})} H(\log\|F\|)\mu_0^N\dots\mu_n^N \ .$$

La première intégrale ci-dessus est égale à $[k:\mathbf{Q}]$, et la seconde se ramène à celle de (24) puisque

(28) $$\|F(\xi_j^\alpha)\|^2 = \frac{|F(\xi_j^\alpha)|^2}{\left(\prod_{\alpha=0}^{n}(\sum_{j=0}^{N}|\xi_j^\alpha|^2)\right)} \ ,$$

(29) i.e. $$\int_{\check{P}(\mathbf{C})} H(\log\|F\|)\mu_0^N\dots\mu_n^N = \sum_{\sigma:k\to\mathbf{C}}\int_{(S^N)^{n+1}}\log|\sigma(F)|d\nu \ .$$

Si Y est l'adhérence de Y_k dans $\check{P}$ et $\check{P}_v$ la réduction de $\check{P}$ modulo v, le cycle $\operatorname{div}(F)$ s'écrit :

(30) $$\operatorname{div}(F) = [Y] + \sum_v \inf(v(a_I))[\check{P}_v] \ .$$

Si l'on combine (27) (29) (30) (10) et (24) on obtient

(31) $$\hat{Y}.c_0^N\dots c_n^N = \deg(X_k)\left(\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha^{N+1}\right) + h'(X_k) \ .$$

3.4. Puisque $\check{\mathbf{P}}^N$ paramétrise les hyperplans de $\mathbf{P}^N$, le produit $\mathbf{P}^N\times\check{\mathbf{P}}^N$ contient un hyperplan canonique, d'équation $\xi.x=0$. C'est le diviseur d'une section $f\in$

$\Gamma(\mathbf{P}^N \times \check{\mathbf{P}}^N ; \mathcal{L} \otimes \check{\mathcal{L}})$. Pour $\alpha = 0, \ldots, n$ on désigne par $f_\alpha \in \Gamma(\mathbf{P}^N \times \check{\mathbf{P}} ; \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\alpha)$ la section correspondante, dont le diviseur a pour équation $\xi^\alpha . x = 0$. L'intersection des diviseurs $\operatorname{div}(f_\alpha)$ est la variété W d'équations $\xi^\alpha . x = 0, \alpha = 0, \ldots, n$. Si $\mathrm{pr}_1 : \mathbf{P}^N \times \check{P} \to \mathbf{P}^N$ et $\mathrm{pr}_2 : \mathbf{P}^N \times \check{P} \to \check{P}$ désignent les deux projections, on a par définition $Y_k = \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(X_k) \cap W_k)$.

Par ailleurs, si v est une place finie de k et $X \neq \mathbf{P}^N$, le fermé $\mathrm{pr}_2(pr_1^{-1}(X) \cap W)$ ne contient pas $\check{P}_v$, puisque, sur une extension finie du corps résiduel, il existe $n+1$ hyperplans dont l'intersection ne rencontre pas X modulo v. De plus la projection harmonique du courant $\check{\mathbf{P}}\,(\mathbf{C})$ est la moyenne de ses translatés $\int_{\check{U}} \check{u}^*(g) d\check{u}$, où $d\check{u}$ désigne la mesure de Haar de volume un sur $\check{U}$. Le groupe $\check{U}$ opère aussi sur $\mathbf{P}^N \times \check{P}(\mathbf{C})$, et sur $\widehat{\operatorname{div}(f_\alpha)}$ par sa α-ième projection sur $U(N+1)$. Il en résulte que l'élément $\prod_{\alpha=0}^{n} \widehat{\operatorname{div}(f_\alpha)}$ est représenté par un couple (W, g_W) où g_W est un courant tel que $\int_{\check{U}} \check{u}^*(g_W) d\check{u} = 0$.

Enfin $\mathrm{pr}_1^*(\widehat{X})$ est invariant sous l'action de $\check{U}$ et l'intégrale de g_X sur $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ est nulle. On peut donc conclure que

$$\hat{Y} = \mathrm{pr}_{2*} \left(\mathrm{pr}_1^*(\widehat{X}) \prod_{\alpha=0}^{n} \widehat{\operatorname{div}(f_\alpha)} \right) \tag{32}$$

dans $\widehat{CH}^1(\check{P})$.

3.5. Pour calculer la projection harmonique $H(-\log \|f\|^2)$ sur $\mathbf{P}^N \times \check{P}\,(\mathbf{C})$, il suffit de calculer la moyenne de $-\log \|f\|^2$ pour l'action de U sur $x \in \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$, car si u^t est le transposé de $u \in U$, on a $f(x, \xi) = f(ux, u^t \xi)$. Cette moyenne ne dépend donc pas du choix de ξ. Elle a été calculée par Stoll [22] (cf. aussi [11]). Si μ est la première forme de Chern de $\overline{\mathcal{L}}$, et μ^N la mesure de Fubini-Study, on a

$$H(-\log \|f\|^2) = \int_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \log \left(\sum_{i=0}^{N} |x_i|^2 / |x_0|^2 \right) \mu^N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \cdot$$

On a donc, dans $\widehat{CH}^1(\mathbf{P} \times \check{\mathbf{P}}^N)$,

$$\widehat{\operatorname{div}(f)} = \hat{c}_1(\mathcal{L}) + \hat{c}_1(\check{\mathcal{L}}) + a \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \right) \cdot \tag{33}$$

D'après (32) on en déduit que, si $c = \widehat{c}_1(\mathcal{L})$,

$$\widehat{Y} = \mathrm{pr}_{2*}\left(\mathrm{pr}_1^*(\widehat{X})\prod_{\alpha=0}^{n}\left(c + c_\alpha + a\Big(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j}\Big)\right)\right) \quad (34)$$

3.6. Les seuls groupes de Chow non nuls de Spec($\mathbb{Z}$) sont $\widehat{CH}^0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $\widehat{CH}^1(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$. Par conséquent, d'après (10), si $\alpha \in \widehat{CH}^p(\mathbf{P}^N)$ et $\beta \in \widehat{CH}^q(\check{P})$, on a

$$f_*(\mathrm{pr}_1^*(\alpha)\mathrm{pr}_1^*(\beta)) = \begin{cases} f_*(\omega(\alpha))f_*(\beta) & \text{si } p = N \text{ et } q = (n+1)N+1 \\ f_*(\alpha)f_*(\omega(\beta)) & \text{si } p = N+1 \text{ et } q = (n+1)N \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

La formule de projection (11) pour pr_2, (34), (10) et (21) montrent donc que

$$\widehat{Y}c_0^N \dots c_n^N = \widehat{X}.c^{n+1} + \deg(X_k)\left(\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha^{N+1} + \frac{1}{2}[k:\mathbb{Q}](n+1)\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j}\right) \quad (35)$$

Avec (31) et (19) ceci conclut la preuve du Théorème 3.

3.7. Le Théorème 3 est aussi conséquence du Théorème 2 de [18]. Il résulte du Théorème 3 que l'ensemble des variétés X_k de degré et de hauteur bornés est fini.

Les questions ouvertes sont nombreuses. Par exemple, quel est l'analogue arithmétique du théorème de Bezout ? Peut-on obtenir de nouveaux critères d'indépendance algébrique ? La notion de hauteur des variétés peut-elle servir à montrer que les groupes de Chow d'une variété lisse sur k sont de type fini ?

REFERENCES

[1] J.-M. BISMUT : Superconnection currents and complex immersions, *Inventiones*, Fasc.1, **99** (1990), 59-113.

[2] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ : Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III,*Comm. in Math. Physics* **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[3] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ : Bott-Chern currents and complex immersions, *Duke Math. J.*,no.1, **60** (1990), 255-284.

[4] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ : *Complex Immersions and Arakelov Geometry, The Grothendieck Festschrift*, Vol.I, Progress in Maths., Birkhaüser Boston, (1990) 249-331.

[5] J.-M. BISMUT, G. LEBEAU : Immersions complexes et métriques de Quillen, *CRAS Paris* **309** (1989), 487-491.

[6] P. DELIGNE : Le déterminant de la cohomologie dans Current trends in Arithmetical Algebraic Geometry, *Contemporary Math.* **67** (1987), 93-178.

[7] G. FALTINGS : Calculus on Arithmetic Surfaces, *Annals of Math.* **119** (1984), 387-424.

[8] G. FALTINGS : *Diophantine approximation on abelian varieties*, (1989), preprint.

[9] H. GILLET et C. SOULÉ : Classes caractéristiques en théorie d'Arakelov, *CRAS Paris* **301** (1985), 439-442.

[10] H. GILLET et C. SOULÉ : *Intersection on arithmetic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S., à paraître.

[11] H. GILLET et C. SOULÉ : Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metric I et II, *Annals of Math.* **131** (1990), 163-203 et 205-238.

[12] H. GILLET et C. SOULÉ : *Analytic torsion and the Arithmetic Todd genus*, avec un appendice de D. Zagier, Topology, à paraître.

[13] H. GILLET et C. SOULÉ : Amplitude arithmétique, *CRAS Paris* **307** (1988), 887-890.

[14] H. GILLET et C. SOULÉ : Un théorème de Riemann-Roch arithmétique, *CRAS Paris* **309** (1989), 929-932.

[15] H. GILLET et C. SOULÉ : à paraître.

[16] F.F. KNUDSEN et D. MUMFORD : The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "div", *Math. Scand.* **39** (1976), 19-55.

[17] P. PHILIPPON : Critères pour l'indépendance algébrique, *Publ. Math. IHES* **64** (1986), pp. 5-52.

[18] P. PHILIPPON : *Sur des hauteurs alternatives*, 1989, preprint.

[19] D. QUILLEN : Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface, *Funct. Anal. Appl.* (1985), 31-34.

[20] P. SAMUEL : *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Ergebnisse 4, Springer-Verlag, (1955).

[21] I.R. SHAFAREVICH : *Basic algebraic geometry*, Ergebnisse 213, Springer-Verlag, (1974).

[22] W. STOLL : About the value distribution of holomorphic maps into projective space, *Acta Math.* **123** (1969), 83-114.

[23] P. VOJTA : Siegel's theorem in the compact case, *Annals of Math.*, à paraître.

C. SOULÉ
I.H.E.S.
35, route de Chartres
91440 BURES SUR YVETTE