Astérisque

PHILIPPE RAMBOUR

# Éléments fixes du complété d'une clôture séparable sous l'action de son groupe de Galois

*Astérisque*, tome 198-199-200 (1991), p. 285-294

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__285_0>

# ÉLÉMENTS FIXES DU COMPLÉTÉ D'UNE CLÔTURE SÉPARABLE SOUS L'ACTION DE SON GROUPE DE GALOIS

par Philippe RAMBOUR

Soit $R$ un anneau, nœthérien, normal, intègre de corps des fractions $K$, et soit $I$ un idéal de $R$ qui ne soit pas confondu avec $R$ tout entier.

On désigne par :

- $R_s$ l'anneau des entiers sur $R$ d'une clôture séparable $K_s$ de $K$ ;
- $G$ le groupe $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ ;
- $\hat{R}_s$ le complété de $R_s$ pour la topologie définie par $IR_s$.

Le problème est de déterminer $\hat{R}_s^G$ qui est l'ensemble des éléments fixes du complété de $R_s$ sous l'action de $G$.

J. Ax a répondu à la question dans le cas où le corps $K$ est un corps local de caractéristique 0 ou $p$, c'est-à-dire un corps muni d'une valuation à valeur dans un groupe abélien et par laquelle $K$ est hensélien [1]. Dans ce travail nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'anneau $R_s$ est séparé pour la topologie $I$-adique et s'injecte donc dans $\hat{R}_s$. En caractéristique $p$, l'anneau $\hat{R}_s$ contient une clôture radicielle de $R$, notée $\sqrt{R}$, et $\hat{R}_s^G$ l'ensemble des points fixes de $\hat{R}_s$ sous l'action de $G$ n'est autre que l'adhérence de $\sqrt{R}$ dans $\hat{R}_s$.*

Pour obtenir la dernière assertion nous utiliserons des approximations d'un élément de $R_s$ qui dépendront du diamètre des conjugués, méthode mise au point par J. Ax [1].

## I. — Séparation de $R_s$ pour la topologie $I$-adique

PROPOSITION 1. — *Si $I \neq R$ alors $\bigcap_n I^n R_s$ est réduite à 0 et $R_s$ est donc séparé pour la topologie définie par $IR_s$.*

*Démonstration* : supposons d'abord que $I$ est un idéal principal. Il existe alors un élément $x$ de $R$ qui est un générateur de $I$. Puisque $R$ est normal et nœthérien et $I \neq R$ il existe une valuation $v$ vérifiant $v(x) > 0$ et cette valuation se prolonge à $R_s$. D'où si $a$ appartient à $\bigcap_n I^n R_s$, alors $v(a) = +\infty$ et donc $a = 0$.

Démontrons maintenant la propriété dans le cas où $I$ n'est pas forcément un idéal principal.

Notons $S$ le schéma affine $\operatorname{Spec} R$ et soit $\tilde{S}$ le normalisé de l'éclaté $\hat{S}$ par rapport au sous-schéma fermé $Y = \operatorname{Spec}(R/I)$. Montrons tout d'abord que l'application canonique $\pi : \tilde{S} \to S$ est une application surjective. Pour cela remarquons que l'on peut écrire $\pi$ comme la composée $\pi_2 \circ \pi_1$ où $\pi_1$ est l'application canonique de $\tilde{S}$ dans $\hat{S}$, $\pi_2$ l'application canonique de $\hat{S}$ dans $S$. $\pi_1$ et $\pi_2$ étant deux applications surjectives, il en est de même pour $\pi$.

$\pi_1$ est surjective : c'est le *going down* théorème (voir MATSUMURA : Commutative Algebra [2]).

$\pi_2$ est surjective : si $V = S - Y$, alors $\pi_2$ est un isomorphisme de $\pi_2^{-1}(V)$ sur $V$. Comme $\pi_2$ est propre, $\pi_2$ est fermé donc $\pi_2(\hat{S})$ est un fermé de $S$ contenant $V$. Comme $S$ est intègre $S$ est aussi irréductible donc on a forcément $\pi_2(\hat{S}) = S$.

Soit maintenant $U = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine de $\tilde{S}$. On sait que $A$ est un anneau nœthérien normal et si $U$ est choisi assez petit parmi les ouverts affines vérifiant : $\pi^{-1}(Y) \cap U \neq \emptyset$ alors $IA$ est un idéal principal de $A$, distinct de $A$. D'après ce qui a été démontré dans le cas principal on sait que $\bigcap_n I^n A_s = \{0\}$ avec $A_s$ clôture intégrale de $A$ contenue dans $K_s$. Puisque $R$ est contenu dans $A$, alors $R_s$ est contenu dans $A_s$ et $\bigcap\limits_n I^n R_s$ est réduite à 0.

## II. — $\hat{R}_s$ contient une clôture radicielle de $R$

PROPOSITION 2. — *Si $R$ est de caractéristique $p$, l'anneau $\hat{R}_s$ contient une clôture radicielle de $R$, on la note $\sqrt{R}$.*

*Démonstration* : soit $\beta$ un élément de $R$ et $N$ un entier naturel. On va montrer que $\hat{R}_s$ contient une solution de $X^{p^N} = \beta$. Pour cela fixons un élément non nul de $I$, appelé $a$. Pour tout entier naturel $m$ supérieur à $N$ on définit $X_m$ comme étant une racine de l'équation :

$$X^{p^N} - a^{p^m} X = \beta(1).$$

Puisque cette équation est séparable $X_m$ est bien un élément de $R_s$. Nous allons montrer que la suite $(X_m)_{m>N}$ ainsi définie est une suite de Cauchy dans $R_s$. Elle sera alors convergente dans $\hat{R}_s$, avec une limite $X_0$ qui vérifiera, en faisant tendre $m$ vers l'infini dans (1), $X_0^{p^N} = \beta$. Donc $X_0$ sera donc une racine $p^N$-ième de $\beta$, ce qui démontrera le théorème cherché.

Si $m$ et $m'$ vérifient :$m' > m > N$, on a :

$$X_m^{p^N} - X_{m'}^{p^N} = a^{p^m} X_m - a^{p^{m'}} X_{m'}$$

$$\left(\frac{X_m - X_{m'}}{a^{p^{m-N}}}\right)^{p^N} = X_m - a^{p^{m'}-p^m} X_{m'}.$$

Cette dernière égalité prouve que $(X_m - X_{m'})/a^{p^{m-N}}$ est un élément entier sur $R_s$, et puisque $R_s$ est un anneau normal $(X_m - X_{m'})/a^{p^{m-N}}$ est un élément de $R_s$. Si $\alpha$ cet élément, l'égalité $X_m - X_{m'} = a^{p^{m-N}} \alpha$ permet de savoir que $X_m - X_{m'}$ est un élément de $I^{p^{m-N}}$ ce qui prouve que la suite $(X_m)_{m>N}$ est bien une suite de Cauchy, ce qui achève la démonstration.

## III. — Diamètre des conjugués

Dans tout le paragraphe on supposera la caractéristique de $K$ égale à $p$.

DÉFINITION 1. — *Pour $\alpha$ élément de $R_s$, avec $\alpha \neq 0$, on pose :*

$$\delta(\alpha) = \max\{n/\alpha \in I^n\}.$$

DÉFINITION 2. — *Si $K'$ est une extension finie de $K$ on pose, si $\alpha$ est un élément de $R_s$ :*

$$\Delta_{K'} = \min\{n/\delta(\sigma(\alpha) - \alpha) \in I^n, \ \sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K')\}.$$

*Remarque* : si $\alpha$ est un élément de $K'$, on pose :

$$\Delta_{K'}(\alpha) = +\infty.$$

On remarque : $\Delta_{K'}(\alpha) \geq \delta(\alpha)$ pour toute extension finie $K'$ de $K$.

PROPOSITION 3.. — *Il existe deux réels a et b tels que pour tout $\alpha$ de $R_s$ il existe $\beta$ de $\sqrt{R}$ vérifiant $\alpha - \beta \in I^{[a\Delta_K(\alpha)]+b}$, et si $[K(\alpha) : K]$ premier à p, alors $\alpha - \beta \in I^{\Delta_K(\alpha)}$.*

*Démonstration* :

(a) Démontrons tout d'abord la proposition dans le cas où $[K(\alpha) : K]$ premier à $p$. On remarque alors que $\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}(\alpha)/\mathrm{K}}(\alpha)$ appartient à $R$ puisque $R$ est normal et donc $\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}(\alpha)/\mathrm{K}}(\alpha)\big/[\mathrm{K}(\alpha) : \mathrm{K}]$ est également un élément de $R$ et de plus :

$$\Big(\big(\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}(\alpha)/\mathrm{K}}\big)(\alpha)\Big/[\mathrm{K}(\alpha) : \mathrm{K}]\Big) - \alpha = \sum \frac{\alpha' - \alpha}{[\mathrm{K}(\alpha) : \mathrm{K}]}$$

$\alpha'$ parcourant les $K$ conjugués de $\alpha$. Ce dernier terme est un élément de $I^{\Delta_K}(\alpha)$.

(b) Pour montrer la proposition dans ce cas nous allons avoir besoin des lemmes suivants :

LEMME 1. — *On se donne $K'$ et $K$" deux extensions finies séparables de $K$ avec $K'$ contenu dans $K$" et vérifiant $[K" : K'] = p$. Alors si $\alpha$ est un élément de $R_s$ appartenant à $K$" on a :*

*(i) on peut trouver $\beta$ un élément de $R'$, où $R'$ est l'anneau des entiers de $K'$, qui soit tel que :*

$$\alpha^p - \beta \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)+\delta(\alpha)(p-1)}$$

*(ii) pour tout entier naturel n non nul on peut trouver un élément $\beta_n$ de $R'$ avec :*

$$\alpha^{p^n} - \beta_n \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n)} \qquad \text{où} \qquad a = (p-1)/p.$$

*Démonstration du Lemme 1* :

Si $\alpha$ est un élément de $K'$ il n'y a rien à démontrer. Sinon $[K'(\alpha) : K']$ vaut $p$ et on peut faire la démonstration ci-dessous.

(i) Si $\alpha_1 \cdots \alpha_p$ désigne les racines du polynôme minimal de $\alpha$ sur $K'$, on pose $\eta_i = \alpha_i - \alpha$. Alors

$$\begin{aligned} N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha) &= \prod_{i=1}^{p} \alpha_i = \prod_{i=1}^{p} (\alpha + \eta_i) \\ &= \alpha^p + b_1\alpha^{p-1} + \cdots + b_p. \end{aligned}$$

En remarquant que le $b_j$ sont, au signe près, les $j$-ième fonctions symétriques élémentaires de $\eta_j$ pour $1 \leq j \leq p$, et que les $\eta_j$ sont des éléments de $I^{\Delta_{K'}(\alpha)}$ on obtient facilement que : $N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha) - \alpha^p$ est un élément d'un $I^N$ avec :

$$N \geq \min_{1 \leq j \leq p} ((p-j)\delta(\alpha) + j\Delta_{K'}(\alpha)) = \Delta_{K'}(\alpha) + \delta(\alpha)(p-1)$$

en utilisant que $\Delta_{K'}(\alpha) \geq \delta(\alpha)$.

Comme $R'$ est normal, on a $N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha)$ élément de $R$ d'où le résultat.

(ii) Démontrons d'abord par récurrence sur $n$ que l'on peut trouver un élément $\beta_n$ de $R'$ vérifiant :

$$\alpha^{p^n} - \beta_n \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n/p)^n)+(p-1)^n\delta(\alpha)}$$

La formule annoncée sera alors une conséquence immédiate de ce résultat.

Si $n = 1$ c'est ce que l'on a obtenu au (i).

Montrons maintenant la formule pour $n$ quelconque. D'après l'hypothèse de récurrence il existe un élément $\beta_{n-1}$ de $R'$ vérifiant :

$$\alpha^{p^{n-1}} - \beta_{n-1} \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}(1-a^{n-1})+(p-1)^{n-1}\delta(\alpha)}$$

posons $x_{n-1} = \alpha^{p^{n-1}} - \beta_{n-1}$.

$$\delta(x_{n-1}) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}(1-a^{n-1}) + (p-1)^{n-1}\delta(\alpha).$$

et

$$\Delta_{K'}(x_{n-1}) = \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}$$

grâce au (i) on sait qu'il existe $\beta$ un élément de $R'$ vérifiant

$$x_{n-1}^p - \beta \in I^{\Delta_{K'}(x_{n-1})+\delta(x_{n-1})(p-1)}$$

ce qui implique, d'après les remarques ci-dessus :

$$\delta(\alpha^{p^n} - \beta_{n-1}^p - \beta) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}$$
$$+(p-1)(\Delta_{K'}(\alpha)(1-a^{n-1})p^{n-1} + (p-1)^{n-1}\delta(\alpha)).$$

C'est-à-dire que si l'on pose $\beta_{n-1}^p + \beta = \beta_n$ et que si l'on fait un petit calcul pour transformer $p^{n-1} + p^{n-1}(1-(p-1/p)^{n-1})(p-1)$ en $p^n(1-(p-1/p)^n)$ on obtient

$$\delta(\alpha^{p^n} - \beta) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n) + (p-1)^n\delta(\alpha)$$

qui est le résultat annoncé.

LEMME 2. — *Soit $H_m \supset H_{m-1} \supset \cdots \supset H_1 \supset H_0$ une tour d'extensions finies séparables de $K$ avec $[H_i : H_{i-1}] = p$ pour $1 \leq i \leq m$. On appelle $R_0$ l'anneau des entiers de $H_0$ par rapport à $R$, et $R_i$ l'anneau des entiers de $H_i$ sur $R_0$. Si $\alpha$ est un élément de $H_m$ et si $n$ est un entier naturel donné on peut trouver un élément $\beta_{m-i}$ de $R_{m-i}$ vérifiant :*

$$\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i} \qquad 1 \leq i \leq m.$$

*Démonstration* : Démontrons ce lemme par récurrence.

Pour $i = 1$ c'est une application immédiate du point (ii) du lemme 1 avec $K' = H_{m-1}$ en remarquant que puisque $H_0$ est contenu dans $H_{m-1}$, $\Delta_{H_0}(\alpha) \leq \Delta_{H_{m-1}}(\alpha)$.

Démontrons maintenant le lemme pour un $i$ quelconque $1 \leq i \leq m$.

D'après l'hypothèse de récurrence il existe $\beta_{i-1}$ élément de $R'_{m-i+1}$ avec

$$\alpha^{p^{(n-i)}} - \beta_{m-i+1} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}}. \tag{I}$$

on a

$$\Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}(1)$$

en effet si $\sigma$ un élément de $Gal(K_s/H_0)$, et si $\alpha' = \sigma(\alpha)$, et si $\beta'_{m-i+1} = \sigma(\beta_{m-i+1})$, alors :

$$\begin{aligned}\beta'_{m-i+1} - \beta_{m-i+1} = \beta'_{m-i+1} - \alpha'^{p^{n(i-1)}} + \alpha'^{p^{n(i-1)}} \\ + \alpha^{p^{n(i-1)}} - \alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1}\end{aligned}$$

en remarquant que :$\beta'_{m-i+1} - \alpha'^{p^{n(i-1)}}$ et $\beta_{m-i+1} - \alpha^{p^{n(i-1)}}$ sont des éléments de $I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}}$ et comme $\alpha^{p^{n(i-1)}} - \alpha'^{p^{n(i-1)}}$ dans $I^{\Delta_{H0}(\alpha)p^n(i-1)}$ on obtient l'inégalité (1).

Si l'on applique maintenant le résultat (ii) du lemme 1 avec $K' = H_{m-i}$ on peut trouver un élément de $R_{m-i}$ avec :

$$\beta_{m-i+1}^{p^n} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_{m-i}}(\beta_{m-i+1}).p^n(1-a^n)} \tag{II}$$

et remarquant que $\Delta_{H_{m-i}}(\beta_{m-i+1}) \geq \Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1})$

$$\beta_{m-i+1}^{p^n} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1})p^n(1-a^n)}.$$

Soit d'aprés l'inégalité (1) :

$$\beta_{m-i+1}^{p^n} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i} \tag{II'}$$

D'autre part en élevant $\alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1}$ à la puissance $p^n$ la relation (I) donne :

$$\delta(\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i+1}^{p^n}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i \qquad \text{(I')}.$$

d'où en combinant (II') et (I') :

$$\delta(\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i.$$

ce qui est le résultat annoncé.

(c) Démonstration de la proposition 3 dans le cas $[\tilde{K} : K] = p^m$.

Où $\tilde{K}$ désigne une extension galoisienne de degré minimale de $K$ contenant $\alpha$. En utilisant que Gal($\tilde{\mathrm{K}}(\alpha)$ : K) est résoluble on peut obtenir une tour d'extensions séparables :

$$\tilde{K} = K_m \supset K_{m-1} \supset \cdots \supset K_1 \supset K_0 = K.$$

On appelle $R_i$ l'anneau des entiers de $K_i$ sur $R$. Soit $n$ un entier naturel. Si on applique le lemme 2 avec $i = m$ et $H_m = \tilde{K}$, $H_0 = K$, on obtient l'existence d'un élément $\beta_0$ de $R$ vérifiant :

$$\alpha^{p^{nm}} - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)p^{nm}}(1-a^n)^m.$$

Si l'on choisit maintenant $n$ tel que :

$$1 - (p - 1/p)^n \geq 1/2,$$

on obtient :

$$\alpha^{p^{nm}} - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]}.$$

Si l'on admet pour l'instant que $x^{p^j} \in I^N$ implique :

$$x \in I^{[N/p^j]-r+1}$$

avec $r$ désignant le nombre de générateurs de $I$, on obtient que si $\beta$ vaut $\beta_0^{1/p^{nm}}$ alors :

$$\alpha - \beta \in I^{[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]/p^{nm}]-r+1}.$$

En remarquant que l'on peut choisir encore $n$ pour que :

$$[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]/p^{nm}] \geq \left[\frac{\Delta_K(\alpha)}{2}\right] - 1.$$

On obtient : $\alpha - \beta \in I^{[\Delta(\alpha)/2]-r}$ ce qui est le résultat voulu. Reste à démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. — *Si $A$ est un anneau de caractéristique $p$ pour lequel $x \longmapsto x^p$ est bijectif, si $J$ un idéal de $A$ engendré par $r$ éléments de $A$, alors si $n$ et $N$ sont deux entiers naturels $x^{p^n} \in J^N$ implique $x \in J^{[N/p^n]-r+1}$.*

*Démonstration* : démontrons ce lemme grâce à une récurrence sur $r$, où $r$ désigne le nombre des générateurs.

Si $r = 1$. Alors $I$ est un idéal principal et la propriété $x \longmapsto x^p$ bijectif donne le résultat.

Montrons maintenant la propriété pour $r$ quelconque. Posons $J = (y_1, \cdots, y_r)$ et $H = (y_2, \cdots, y_r)$. Si $x$ est tel que $x^{p^n} \in J^N$ on peut écrire :

$$x^{p^n} = X_0 y_1^N + X_1 y_1^{N-1} + \cdots + X_i y_1^{N-i} + \cdots + X_N$$

avec $X_i$ élément de $H^i$ pour $i$ vérifiant $0 \leq i \leq N$. On obtient ainsi que :

$$x = X_0^{1/p^n} y_1^{N/p^n} + X_1^{1/p^n} y_1^{N-1/p^n} + \cdots + X_i^{1/p^n} y_1^{(N-i)/p^n} + \cdots + X_N^{1/p^n} (1).$$

Comme

$$\left[\frac{N-i}{p^n}\right] \geq \left[\frac{N}{p^n}\right] - \left[\frac{i}{p^n}\right] - 1.$$

$y_1^{N-i/p^n}$ est donc un élément de $J^{[N/p^n]-[i/p^n]-1}$ et d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $H$ on sait que $X_i^{1/p^n}$ est un élément de $H^{[i/p^n]-r+2}$. Donc chaque terme de la sommation (1) appartient à : $J^{[N/p^n]-[i/p^n]-1+[i/p^n]-r+2}$ c'est-à-dire à : $J^{[N/p^n]-r+1}$ ce qui démontre le lemme.

(d) Démonstration de la proposition 3 dans le cas général.

Soit donc $\alpha$ un élément de $R_s$ tel que $[K(\alpha) : K]$ n'est pas un entier premier à $p$. Si $\tilde{K}$ désigne encore une extension galoisienne de $K$ de degré minimal contenant $\alpha$, on a : $[\tilde{K} : K] = qp^m$ avec $q$ premier à $p$.

Si $G'$ est un $p$-groupe de Sylow de Gal(K($\alpha$)/K). Soit $H$ l'ensemble des points fixes de $G'$ dans $\tilde{K}$. On sait qu'alors $H$ est une extension finie de $K$ contenue dans $\tilde{K}$ et telle que :

- $\tilde{K}$ est une extension galoisienne de $H$.
- $[\tilde{K}(\alpha) : H] = p^n$.

On appelle $R'$ l'anneau des entiers de $H$. Si $n$ désigne un entier naturel on peut appliquer à $\tilde{K}(\alpha)$ et $H$ ce qui a été fait au (b) avec $H$ dans le rôle de $K$. On peut donc obtenir $\gamma$ avec $\gamma$ élément de $R'$ et :

$$\alpha - \gamma \in I^{[\Delta_H(\alpha)/2]-r}.$$

D'après a) on sait qu'il existe un élément $\beta_0$ de $R$ vérifiant $\gamma - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\gamma)}$.

Puisque $K$ est contenu dans $H$, $\Delta_K(\alpha) \leq \Delta_H(\alpha)$ d'où

$$\alpha - \gamma \in I^{[\Delta_K(\alpha)/2]-r} \tag{1}$$

et comme en (b) on peut montrer que :

$$\Delta_K(\gamma) \geq [\Delta_K(\alpha)/2] - r.$$

d'où

$$\gamma - \beta_0 \in I^{[\Delta_K(\alpha)/2]-r}. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\alpha - \beta_0 \in I^{[\Delta_K[\alpha)/2]-r}$$

## IV. — Éléments fixes sous l'action du groupe $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$

PROPRIÉTÉ 4. — *Si $K$ un corps de caractéristique $p$, on a, avec les notations introduites au début de l'article :*

$$\hat{R}_s^G = \overline{\sqrt{R}},$$

*où $\overline{\sqrt{R}}$ désigne l'adhérence de $\sqrt{R}$ pour la topologie $I$-adique.*

*Démonstration* : si $x$ est un élément de $\hat{R}_s^G$ pour tout entier $N$ il existe un $\alpha$ qui est un élément de $R_s$ avec $x - \alpha$ éleément de $I^N\hat{R}_s$. Si $\sigma$ est un élément de $G$ on a toujours $x - \sigma(\alpha)$ élément de $I^N\hat{R}_s$, et donc $\alpha - \sigma(\alpha)$ élément de $I^N\hat{R}_s$ d'où $\Delta_K(\alpha) \geq N$.

Donc on peut trouver, d'après la proposition 3, un élément $\beta$ dans $\sqrt{R}$ où $\alpha - \beta$ est un élément soit de $I^{[N/2]-r}\hat{R}_s$. Donc $x - \beta$ est un élément de $I^{[N/2]-r}\hat{R}_s$. Il en résulte que $x$ est un élément de l'adhérence de $\sqrt{R}$. La réciprocité étant immédiate on obtient la propriété annoncée.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Ax. — Zeros of Polynomials over local fields, the Galois Action, *Journal of Algebra*, 15, 1970, 417-428.

[2] H. Matsumura. — Commutative Algebra, Second Edition, Mathematics Lecture Note Series, The Benjamin.cuminings publishing company.

PH. RAMBOUR
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
URA D0752
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX