Astérisque

MICHEL LAURENT

Sur quelques résultats récents de transcendance

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 209-230

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__209_0>

SUR QUELQUES RESULTATS RECENTS DE TRANSCENDANCE

par

Michel LAURENT

1. Introduction

Cet exposé vise un double objectif : présenter en premier lieu les principaux développements de la théorie des nombres transcendants grâce à une série d'exemples concrets et, d'autre part, illustrer une nouvelle méthode de transcendance en redémontrant de façon détaillée un résultat classique, à savoir le théorème des six exponentielles. Il est devenu maintenant habituel de formuler les résultats de transcendance en termes de groupes algébriques. Nous n'avons ici suivi ce point de vue que partiellement, nous étant surtout attaché à décrire les résultats concernant la fonction exponentielle usuelle. Aussi, commencerons nous par rappeler l'énoncé de la célèbre conjecture de SCHANUEL, qui est censé contenir tout ce qui est connu sur la transcendance de valeurs de la fonction exponentielle.

CONJECTURE : *Désignons par $x_1, \ldots, x_n$, soit des nombres complexes, soit des éléments de $\mathbf{C}_p$ situés dans le disque de convergence de l'exponentielle p-adique. On suppose que les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. Alors le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ du corps*

$$\mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$$

est $\geq n$.

Il s'ensuit en particulier que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ désignent des nombres algébriques non nuls et multiplicativement indépendants, les n nombres $x_i = \log \alpha_i, 1 \leq i \leq n$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Nous avons fait jouer au théorème des six exponentielles un rôle privilégié, l'utilisant comme fil conducteur entre les §.2, 3, 4 et 6. Le plan de l'article

est le suivant. On étudie dans le §.2 le rang de matrices dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques, et on applique les résultats obtenus à la conjecture de LEOPOLDT. Le §.3 est consacré à l'indépendance algébrique ; on y examine notamment les différents outils de nature algébrique qui ont été élaborés pour la circonstance. Dans les démonstrations modernes de transcendance, les lemmes de zéros jouent un rôle fondamental. Nous indiquons dans le §.4 l'énoncé le plus général actuellement connu en termes de groupes algébriques. Cet énoncé présente une grande analogie formelle avec une conjecture de géométrie diophantienne, due à S. LANG. On examine dans le §.5 les diverses contributions récentes à cette conjecture, ainsi que leurs relations avec certains résultats de transcendance et d'approximation diophantienne. Le §.6 est enfin consacré à la nouvelle preuve déjà mentionnée du théorème des six exponentielles.

2.1 Rang de matrices à coefficients logarithmiques

On se propose de minorer (ou si l'on est plus ambitieux de déterminer exactement) le rang sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{C}_p$, de matrices de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \log \alpha_{11} & \dots, & \log \alpha_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \log \alpha_{d1} & \dots, & \log \alpha_{d\ell} \end{bmatrix}$$

où les $\alpha_{ij}, 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq \ell$, désignent des nombres algébriques non nuls. Comme exemple de résultats de ce type, citons le

THÉORÈME DES SIX EXPONENTIELLES : *Il s'agit du cas particulier* $d = 2$, $\ell = 3$. *On suppose que les deux lignes et les trois colonnes de* A *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$. *Le rang de* A *est alors égal à deux.*

Signalons en passant la conjecture des quatre exponentielles, qui propose d'établir l'énoncé analogue obtenu avec $d = \ell = 2$. Dans le cas général, on dispose de minorations du rang de la matrice A sous des hypothèses du même type. D'une manière plus précise, les énoncés actuels prennent en compte les éventuelles relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les lignes de combinaisons $\mathbb{Q}$-linéaires de colonnes de A, relations qui ont évidemment pour effet de diminuer le rang d'une telle matrice. Il faut cependant noter que des hypothèses de cette nature, comme celles du théorème ci-dessous, sont insuffisantes pour décrire complètement le rang de la matrice A, voir [32].

Considérons le rang de A comme celui de ses vecteurs colonnes $y_j, 1 \leq j \leq \ell$, et désignons par

$$Y = \mathbb{Z}\, y_1 + \cdots + \mathbb{Z}\, y_\ell$$

le sous-groupe engendré dans $\mathbb{C}^d$ ou $\mathbb{C}_p^d$. L'énoncé suivant, dont la formulation m'a été indiquée par M. EMSALEM, se déduit du théorème 4.1 de [34]. D'un point de vue technique, on notera que les deux conditions de maximalité considérées ici impliquent la maximalité du coefficient $\mu^\sharp$ introduit dans [34].

THÉORÈME 1 : *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{C}_p^d$) contenant Y et soit W un sous-espace vectoriel de V. Supposons que W soit rationnel sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (i.e. engendré par des points à coordonnées algébriques) et que l'on ait :*

$$\max_T \left[\frac{rg(Y \cap T)}{\dim T}\right] = \frac{rgY}{d} ,$$

$$\max_T \left[\frac{\dim(W \cap T)}{\dim T}\right] = \frac{\dim W}{d} ,$$

où T décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels $\mathbb{Q}$-rationnels non nuls de $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{C}_p^d$). Alors

$$\dim V \geq \frac{d(rgY + \dim W)}{(rgY + d)} .$$

Lorsque $W = \{0\}$, on peut choisir pour V le $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}_p$)-espace vectoriel engendré par Y, et l'on obtient ainsi une minoration du rang A qui implique en particulier le théorème des six exponentielles.

A l'opposé, lorsque le sous-espace V est rationnel sur $\overline{\mathbb{Q}}$, le choix $W = V$ amène au célèbre résultat de A. BAKER : des logarithmes de nombres algébriques sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, si et seulement si ils le sont sur $\mathbb{Q}$.

2.2. Application à la conjecture de Leopoldt

Soit K un corps de nombres et soit p un nombre entier. La conjecture de LEOPOLDT affirme que le rang sur $\mathbb{Z}_p$ de l'adhérence p-adique du groupe des unités principales de K est égal au rang sur $\mathbb{Z}$ dudit groupe ; et cette assertion se ramène aisément au calcul du rang d'une matrice du type envisagé précédemment (voir par exemple le §.2 de [21]). Lorsque le corps K est galoisien sur $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois G, on dispose de plus d'une action de G sur l'adhérence p-adique, et l'utilisation de certains sous-espaces $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnels W permet d'isoler les diverses composantes isotypiques associées à cette action. On trouvera dans [20] une interprétation de cette construction en termes de tores. De façon précise, il est possible d'établir le résultat suivant.

Pour tout caractère absolument irréductible φ du groupe G, désignons par $d_\varphi = \varphi(1)$ le degré de la représentation linéaire ρ associée, et notons $r_\varphi = (\varphi(1) + \varphi(c))/2$ la multiplicité de la valeur propre $+1$ dans la matrice $\rho(c)$ représentant une conjugaison complexe $c \in G$ du corps K. On a alors le

THÉORÈME 2 (Cor.2 du th.1 de [21]) : *Supposons que pour tout caractère absolument irréductible φ du groupe G, on ait l'inégalité*

$$r_\varphi(r_\varphi - 1) < d_\varphi \ .$$

Alors le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt pour tout nombre premier p.

On dispose ainsi de conditions suffisantes qui sont très faciles à tester dès lors que l'on connait la table des caractères du groupe G. Les inégalités ci-dessus sont notamment vérifiées lorsque le groupe G est abélien, auquel cas on retrouve le théorème de BRUMER sur les corps abéliens [5], ainsi que pour certains groupes résolubles G, comme le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$, ou bien le groupe $GL_2(\mathbf{F}_3) = \widetilde{\mathfrak{S}}_4$, avec des valeurs convenablement choisies de la conjugaison complexe c. On trouvera d'autres exemples dans [21].

3.1. Indépendance algébrique de valeurs de la fonction exponentielle

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants, et soient $y_1, \ldots, y_n$ des nombres complexes qui sont eux aussi $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. On désigne par t_1, t_2, t_3 les degrés de transcendance sur $\mathbf{Q}$ des corps

$$\mathbf{Q}\ (e^{x_i y_j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\ ,$$
$$\mathbf{Q}\ (x_i, e^{x_i y_j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\ ,$$
$$\mathbf{Q}\ (x_i, y_j, e^{x_i y_j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)\ .$$

Plusieurs résultats classiques de transcendance se ramènent à des minorations des t_k, $1 \le k \le 3$. On vérifiera par exemple dans le §.6 que le théorème des six exponentielles équivaut à la minoration $t_1 \ge 1$ lorsque $m = 2$, $n = 3$, et que le théorème bien connu de GEL'FOND-SCHNEIDER sur la transcendance de a^b équivaut quant à lui à $t_2 \ge 1$, pour $m = 2$, $n = 1$. Un grand nombre de travaux (voir la bibliographie de [33]) ont donc été consacrés à ce problème, et le résultat suivant, extrait de [9], peut être considéré comme optimal au vu des méthodes utilisées. On notera aussi que l'on peut étendre cet énoncé au cas de vecteurs x_i et y_j de $\mathbf{C}^r$, $r \ge 1$, voir le §.12 de [35].

THÉORÈME 3 : *Sous réserve que les mesures ci-dessous d'indépendance linéaire sur* $\mathbb{Q}$ *des* x_i *et des* y_j *soient satisfaites, on a les minorations suivantes :*

i) si $m \geq 2, n \geq 3$, ou si $m \geq 3, n \geq 2$, $\quad t_1 \geq [mn/(m+n)]$,

ii) si $m \geq 2$, $\quad t_2 \geq [(mn+m)/(m+n)]$,

iii) $\quad t_3 \geq mn/(m+n)$.

Les mesures d'indépendance linéaire en question sont les suivantes. Dans chacun des cas $k = 1, 2, 3$, on suppose que les x_i et les y_j vérifient des inégalités de la forme :

$$\log|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i| \gg -\max|\lambda_i| ,$$

$$\log|\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j| \gg -(\max|\mu_j|)^{\eta_k} ,$$

pour tout multi-entier $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ non nul, avec

$$\eta_1 = \frac{mn}{2m+n} \quad , \quad \eta_2 = \frac{mn+m}{2m+n} \quad , \quad \eta_3 = \frac{mn+m+n-1}{2m+n} .$$

Quelques remarques.

1) La conjecture des quatre exponentielles équivaut à l'assertion $t_1 \geq 1$, lorsque $m = n = 2$. Autrement dit, la minoration i) devrait encore être valable pour $m = n = 2$.

2) Posons

$$N_1 = mn \quad , \quad N_2 = mn + m \quad , \quad N_3 = mn + m + n \quad ,$$

de telle sorte que $N_k, 1 \leq k \leq 3$, désigne le nombre de générateurs des trois corps introduits ci-dessus. Les minorations i)-iii) du théorème 3 peuvent alors s'écrire de manière unique sous la forme

$$t_k \geq [N_k/(m+n)] \ , \ 1 \leq k \leq 3 \ ,$$

sauf lorsque $k = 3$ et que $m + n$ divise mn ; auquel cas, on obtient $t_3 \geq [N_3/(m+n)] - 1$. On peut évidemment conjecturer que cette exception n'a pas lieu d'être. Par exemple, l'inégalité $t_3 \geq 2$ pour $m = n = 2$ impliquerait entre autre chose l'indépendance algébrique des nombres π et e^{π}.

3) On peut probablement s'affranchir de toute hypothèse de mesure d'indépendance linéaire dans l'énoncé du théorème 3. Il en est notamment ainsi en degré de transcendance 0 ou 1 (i.e. $t_k \geq 1$ ou 2).

Pour apprécier la qualité du théorème 3, indiquons simplement le

COROLLAIRE : *Soit α un nombre algébrique non nul, et soit $\log \alpha$ une détermination non nulle du logarithme de α. Soit β un nombre algébrique de degré $d \geq 2$. Il existe alors au moins $[(d+1)/2]$ nombres algébriquement indépendants parmi les $d-1$ nombres $\alpha^{\beta^j} = e^{\beta^j \log \alpha}$, $1 \leq j \leq d-1$.*

On notera que l'indépendance algébrique des $d-1$ nombres ci-dessus (problème posé par GEL'FOND en 1949 et par SCHNEIDER en 1955) découle aisément de la conjecture de SCHANUEL.

3.2. Outils d'indépendance algébrique

L'obtention de grands degrés de transcendance a nécessité l'élaboration de techniques sophistiquées, issues principalement de l'algèbre commutative. On peut schématiquement classer ces outils en deux groupes : ceux qui s'appuient sur le théorème des zéros de Hilbert, et ceux qui sont des généralisations d'un critère d'indépendance algébrique dû à GEL'FOND. Les deux familles de résultats devraient pouvoir s'utiliser de manière équivalente, ce qui n'est pas encore tout à fait le cas. A la suite de travaux de W.D. BROWNAWELL sur le Nullstellensatz effectif (cf. [3] pour un historique du sujet), J. KOLLAR vient d'obtenir le résultat optimal suivant :

THÉORÈME 4 (th.1.5 de [13]) : *Soient $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, sans zéros communs dans $\mathbb{C}^n$, et de degré total $\leq D$, avec $D \geq 3$. Il existe alors des polynômes $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que :*

$$\sum_{i=1}^{m} A_i P_i = 1 \ , \quad \deg(A_i) \leq D^{\min(m,n)} \ , \ 1 \leq i \leq m \ .$$

Les critères d'indépendance algébrique ont eux aussi suscité de nombreux travaux dont on trouvera une analyse détaillée dans [3] et [33]. A titre d'exemple, voici un énoncé qui est lui aussi essentiellement optimal, corollaire du théorème principal de [28].

THÉORÈME 5 : *Soient θ un point de $\mathbb{C}^n$ et η un nombre réel $> n+1$. Il n'existe aucune suite d'idéaux*

$$I_N \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \ , \quad N \geq N_0 \ ,$$

ayant les propriétés suivantes :

i) *I_N est engendré par des polynômes P_{Nj} , $1 \leq j \leq J_N$, de degré total $\leq N$, à coefficients entiers rationnels de valeur absolue $\leq e^N$,*

ii) *la boule de centre θ et de rayon $e^{-N^{n+1}}$ ne contient qu'un nombre fini de zéros de I_N,*

iii) $$0 < \max_{1 \leq j \leq J_N} (|P_{Nj}(\theta)|) < e^{-N^n}.$$

4. Lemmes de zéros

Les lemmes de zéros constituent un des principaux ingrédients des démonstrations actuelles de transcendance, cf. [1]. Dans le contexte des groupes algébriques commutatifs, on dispose d'un résultat presque optimal, dû à P. PHILIPPON [25], voir aussi [26], [27], [4]. Nous en proposons ici une formulation un peu différente, qui met bien en évidence l'analogie avec la conjecture de S. LANG du §.5.

La situation est la suivante. On se donne un groupe algébrique commutatif connexe G, écrit sous forme de produit et plongé termes à termes dans un produit d'espaces projectifs :

$$G = G_1 \times \cdots \times G_P \longrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{N_P} .$$

Soit Γ un sous-groupe de type fini de $G(\mathbf{C})$, et soit $W \subseteq t_G$ un sous-espace vectoriel du $\mathbf{C}$-espace vectoriel tangent à l'origine du groupe algébrique G. On identifiera (par restriction à l'origine) t_G à l'espace des champs de vecteurs tangents à $G(\mathbf{C})$ et invariants par translation. Associées à ces données, introduisons les définitions et notations suivantes.

1) Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell\}$ un système générateur du groupe Γ. Pour tout entier $S \geq 0$, on désignera par $\Gamma(S)$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{\ell} s_i \gamma_i$, $0 \leq s_i \leq S$.

2) Soit f une fonction rationnelle sur G, et soit T un entier ≥ 1. On notera par $(f)_{0,W,T}$ le lieu des points de G où f s'annule avec une multiplicité $\geq T$ le long de W, c'est à dire l'ensemble des points γ de $G(\mathbf{C})$ tels que

$$\frac{\partial^t f}{\partial w_1 \cdots \partial w_t} (\gamma) = 0 ,$$

pour tout $0 \leq t < T$, et tout élément $w_1, \ldots, w_t$ dans W. On notera que $(f)_{0,W,T}$ est localement fermé pour la topologie de Zariski sur G.

3) Soit f une fonction rationnelle sur G. On dira que f est de multidegré $\leq D = (D_1, \ldots, D_p)$, s'il existe un système de coordonnées multiprojectives $\mathbf{X} = (X_{10}, \ldots, X_{1N_1}; \ldots; X_{p0}, \ldots, X_{pN_p})$ dans $\mathbf{P}$ et un polynôme multihomogène $F \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$, de multidegré D, tel que f soit la restriction à G de la fonction rationnelle sur $\mathbf{P}$ égale à $(F(\mathbf{X})/X_{10}^{D_1} \cdots X_{p0}^{D_p})$.

En d'autres termes, f se déduit de F par déshomogénéisation relative à une base multiprojective de $\mathbf{P}$.

4) Soit V une sous-variété fermée de $\mathbf{P}$, et soit $D = (D_1, \ldots, D_p)$, un p-uplet d'entiers ≥ 0. On posera :
$H(V, D) = ((\dim V)!)$ { partie homogène de plus haut degré du *polynôme de Hilbert-Samuel* multihomogène de V, évaluée en D }.
Rappelons à ce propos que si I désigne l'idéal multihomogène de $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$ associé à V, le polynôme de Hilbert-Samuel de V, évalué en D, mesure la dimension sur $\mathbf{C}$ de la partie multihomogène de degré D de l'anneau multigradué $\mathbf{C}[\mathbf{X}]/I$, tout au moins lorsque les entiers $D_1, \ldots, D_p$ sont suffisamment grands. On notera aussi que les coefficients de $H(V, D)$, vu comme un polynôme en les variables $D_1, \ldots, D_p$ s'expriment classiquement en termes des degrés partiels de V, et que la fonction H fournit ainsi une mesure des degrés de V.

THÉORÈME 6 (th.2.1 de [25]) : *Soit f une fonction rationnelle sur G, non identiquement nulle, de multidegré $\leq D$, soit n la dimension de G, et soient T et S deux entiers ≥ 0, tels que :*

$$\Gamma(nS) \subseteq (f)_{0,W,nT+1} \cdot$$

Il existe alors un sous-groupe algébrique connexe G' de G, distinct de G et vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $$\bigcup_{\gamma \in \Gamma(S) \bmod G'} (\gamma + G') \subseteq (f)_{0,W,T+1} \quad ,$$

ii) $$\binom{T+\alpha}{\alpha} \operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S)+G'}{G'}\right) H(\overline{G}', D) \leq cH(\overline{G}, D),$$

où la barre désigne l'adhérence de Zariski dans $\mathbf{P}$, c désigne une constante ne dépendant que du plongement $G \to \mathbf{P}$, et où

$$\alpha = \dim W - \dim(W \cap t_{G'}) = \dim((W + t_{G'})/t_{G'}).$$

On notera que l'inégalité ii) ci-dessus est optimale à la valeur de la constante c près : il existe en effet une constante c_1, $0 < c_1 < 1$, ne dépendant elle aussi

que du plongement $G \to \mathbf{P}$, telle que pour tout sous-groupe algébrique G' de G, connexe et distinct de G, pour tout p-uplet D d'entiers positifs suffisamment grands, et pour tout $T \geq 0$, $S \geq 0$, vérifiant l'inégalité

$$\binom{T+\alpha}{\alpha} \operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S)+G'}{G'}\right) H(\overline{G}', D) \leq c_1 H(\overline{G}, D) ,$$

on peut construire une fonction rationnelle non nulle $f \in \mathbf{C}(G)$, de multidegré $\leq D$, et telle que l'inclusion i) ci-dessus soit satisfaite.

Dans le cas particulier d'un groupe G linéaire, la constante c peut être choisie égale à 1, tout au moins si l'on se restreint aux plongements usuels dans $\mathbb{P}^1$ des facteurs additifs et multiplicatifs. Il serait alors intéressant (et probablement très utile) de remplacer dans l'inégalité ii) les termes $H(\overline{G}, D)$ et $H(\overline{G}', D)$ par $\dfrac{H(\overline{G}, D)}{(\dim \overline{G})!}$ et $\dfrac{H(\overline{G}', D)}{(\dim \overline{G}')!}$ respectivement (en autorisant éventuellement un terme reste additif dans le membre de droite), avec pour hypothèse initiale l'inclusion moins restrictive $\Gamma(S) \subseteq (f)_{0,W,T+1}$. Un tel résultat serait optimal, au terme reste près, et ne semble pas connu même dans les cas les plus simples.

On notera que le polynôme $H(V, D)/(\dim V)!$ fournit le terme principal de la *fonction de Hilbert-Samuel* de la variété projective V, et mesure donc le nombre de variables linéairement indépendantes disponibles, paramètre fondamental dans toute démonstration de transcendance. La remarque ci-dessus, concernant l'optimalité du théorème 6 à une constante multiplicative près, se déduit d'ailleurs aisément d'une comparaison entre la fonction de Hilbert-Samuel de V et le polynôme $H(V, D)$, cf.[6].

5. Géométrie diophantienne

Ce thème a fait l'objet de nombreux travaux récents, issus plus ou moins directement de la théorie des nombres transcendants. On peut citer notamment des questions de minoration de hauteur [8], [11], ou bien de formes linéaires de logarithmes dans les groupes algébriques [29], [30], [12] ainsi qu'une approche diophantienne du théorème de FALTINGS sur les conjectures de MORDELL-SHAFAREVITCH-TATE. [7] , [17], [23].

Nous nous proposons ici de faire le point sur une conjecture de S. LANG, qui peut être abordée par des techniques très diverses.

CONJECTURE (p.221 de [14]) : *Soit G un groupe algébrique commutatif, ne contenant aucun sous-groupe $\simeq \mathbf{G}_a$. Soit V une sous-variété algébrique de G, et soit Γ un sous-groupe de rang fini (ie. contenu dans l'ensemble des points*

de division d'un groupe de type fini) de $G(\mathbf{C})$. Alors $V \cap \Gamma$ est réunion finie de sous-ensembles de la forme $\gamma + (G' \cap \Gamma)$, où G' désigne un sous-groupe algébrique de G, et γ un élément de $V \cap \Gamma$, tels que

$$\gamma + G' \subseteq V.$$

Un tel groupe algébrique G est extension d'une variété abélienne A par un groupe de type multiplicatif T; autrement dit on a une suite exacte $0 \to T \to G \to A \to 0$.

Lorsque $G = T$, la conjecture a été établie dans [19], en s'appuyant essentiellement sur le théorème du sous-espace de W. SCHMIDT. On obtient ainsi d'intéressantes applications concernant les équations diophantiennes exponentielles [15] , [16]. Le cas général reste encore largement ouvert. On dispose cependant de résultats très complets dans le cas particulier où Γ est égal au groupe G_{tors} des points de torsion de G, auquel cas on peut d'ailleurs étendre la conjecture à un groupe commutatif quelconque (contenant éventuellement des sous-groupes additifs). M. RAYNAUD avait considéré le cas d'une variété abélienne (conjecture dite de Manin-Mumford) et l'avait résolue grâce à des arguments de géométrie algébrique [31]. En adaptant, entre autres choses les idées introduites dans la preuve des lemmes de zéros, M. HINDRY a pu établir le cas général et apporter de plus des informations précises sur les origines γ et les directions G' intervenant dans la conjecture ci-dessus.

Voici l'énoncé précis qu'il obtient pour un produit

$$G = \mathbf{G}_m^n \times A \longrightarrow \mathbf{P} = (\mathbf{P}^1)^n \times \mathbf{P}^N,$$

où l'on a fixé un plongement projectif de A, et où le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ est naturellement plongé dans $\mathbf{P}^1$. La fonction H ci-dessous est alors relative à ce plongement (cf.§4). Introduisons tout d'abord quelques notations. Soit

$$m = \dim V \quad , \quad h = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{(2m)^i}{i!} \right].$$

On supposera que la variété abélienne A et le plongement $A \to \mathbf{P}^N$ sont définis sur un corps de nombres k. On désigne alors par q un nombre réel > 0, tel que pour tout point $P \in A_{\text{tors}}$, d'ordre exactement n dans A_{tors}, le degré d'un corps de rationalité $k(P)$ du point P soit $\gg n^{1/q}$. En fait, d'après un résultat de J-P.SERRE, tout réel > 1 convient. On a alors le

THÉORÈME 7 (th.1 de [10]) : *Supposons que la variété V soit définie sur k, et que l'adhérence de Zariski de V dans $\mathbf{P}$ soit définie par des polynômes*

de multidegré $\leq D = (D_1, \ldots, D_{n+1})$. *On peut alors choisir les couples* (γ, G') *intervenant dans la conjecture ci-dessus tels que :*

$$\begin{aligned} \text{ordre}(\gamma) &\leq c\, H(\overline{V}, D)^{q(hm+1)}, \\ H(\overline{G}', D) &\leq H(\overline{V}, 2D)^{hm}, \end{aligned}$$

où c *désigne une constante ne dépendant que de* A, k *et* q.

En ce qui concerne la constante q ci-dessus, on peut aussi utiliser des arguments diophantiens, qui ont le mérite d'être entièrement effectifs. On trouvera dans [2] un exposé des problèmes galoisiens qui peuvent être abordés par des arguments de transcendance. Voici un résultat dû à D. MASSER, qui montre en particulier que tout réel $q > \dim A$ convient.

THÉORÈME 8 (th.4 de [2]) : *Il existe une constante* c', *effectivement calculable en termes du degré* $[k : \mathbb{Q}]$ *et de la hauteur des équations de* A *dans* $\mathbb{P}^N$, *telle que pour tout point* $P \in A_{\text{tors}}$, *d'ordre exactement* n, *on ait :*

$$[k(P) : k] \geq c' n^{1/\dim A} / \log n.$$

6.1. Principe de la nouvelle preuve du théorème des six exponentielles

La plupart des démonstrations de transcendance commencent par la construction d'une fonction auxiliaire. Pour ce faire, on utilise souvent le lemme de Siegel qui permet de trouver une "petite" solution à un système d'équations linéaires. Nous allons procéder de manière différente. Au lieu de chercher une solution du système, nous considèrerons les déterminants des mineurs extraits de la matrice correspondante. Il s'agit là de *déterminants d'interpolation* que l'on peut majorer de manière tout à fait générale (§3 de [18]). De façon alternative, nous utiliserons ici un développement en série de Taylor de ces déterminants, ce qui nous amènera à étudier les *polynômes de Schur.*

Nous nous restreindrons à la version archimédienne du théorème des six exponentielles, le cas p-adique menant à des calculs similaires. Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème et fixons quelques notations légèrement différentes de celles du §2.

On se donne six nombres algébriques $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \log a_1 & , & \log a_2 & , & \log a_3 \\ \log b_1 & , & \log b_2 & , & \log b_3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de montrer que le rang de A est égal à deux lorsque les deux lignes et les trois colonnes de A sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\frac{\log b_1}{\log a_1} = \frac{\log b_2}{\log a_2} = \frac{\log b_3}{\log a_3} = \theta.$$

De manière équivalente, nous disposons de deux sous-groupes

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\theta \ , \\ Y &= \mathbf{Z}\log a_1 \oplus \mathbf{Z}\log a_2 \oplus \mathbf{Z}\log a_3 \ , \end{aligned}$$

tels que

$$e^{XY} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^*.$$

On remarquera incidemment que cette formulation des hypothèses nous ramène à la situation envisagée dans le théorème 3-i) avec $m = 2$, $n = 3$.

Pour tout entier $L \geq 0$, $M \geq 0$, notons :

$$\begin{aligned} X(L) &= \{\lambda_1 + \lambda_2\theta \ ; \ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq L\} \ , \\ Y(M) &= \{\mu_1 \log a_1 + \mu_2 \log a_2 + \mu_3 \log a_3 \ ; \ 0 \leq \mu_1, \mu_2, \mu_3 \leq M\} \ , \end{aligned}$$

et ordonnons les ensembles $X(L)$ et $Y(M)$ de manière arbitraire.

On introduit alors la matrice

$$A_{LM} = \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \ldots & e^{xy} & \ldots \\ & \vdots & \end{array} \right]_{\substack{x \in X(L) \\ y \in Y(M)}}$$

où x désigne l'indice de ligne et y l'indice de colonne. La matrice A_{LM} comporte donc $(L+1)^2$ lignes et $(M+1)^3$ colonnes.

Le principe de la démonstration est le suivant : nous allons successivement majorer et minorer le rang de la matrice A_{LM} , et pour des valeurs convenablement choisies des paramètres L et M, nous obtiendrons des estimations incompatibles. De manière imagée, on peut dire que la petitesse du rang de A (par hypothèse égal à 1) se prolonge analytiquement aux matrices A_{LM}, tandis qu'un argument de nature algébrique (le lemme de zéros) permet de minorer le rang de A_{LM}.

6.2. Quelques calculs de déterminants

Commençons par indiquer quelques propriétés élémentaires des *polynômes de Schur*, voir par exemple le §I-3 de [22].

Soit n un entier ≥ 1, et soient $X_1, \ldots, X_n$ des indéterminées. Désignons par

$$V(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$$

le discriminant des n variables X_i . Soit

$$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$$

un n-uplet d'entiers ≥ 0. Le polynôme

$$\det\left(X_i^{k_j+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

où i désigne l'indice de ligne et j l'indice de colonne, est antisymétrique, et est donc divisible par $V(X_1, \ldots, X_n)$. Le quotient

$$S_{\mathbf{k}}(X_1, \ldots, X_n) = \det\left(X_i^{k_j+j-1}\right) / V(X_1, \ldots, X_n)$$

s'appelle le polynôme de Schur d'indice $\mathbf{k}$. Ces polynômes de Schur sont clairement des fonctions symétriques des variables $X_1, \ldots, X_n$ et peuvent ainsi s'exprimer en termes de fonctions symétriques élémentaires. Voici un exemple d'une telle écriture, via les polynômes symétriques P_ℓ du lemme suivant :

LEMME 1 : *Pour tout n-uplet $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers ≥ 0 ,on a les formules :*

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{k}}(X_1, \ldots, X_n) &= \det(P_{k_i+i-j})_{1 \leq i,j \leq n} \\ &= \det(Q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \end{aligned}$$

où les polynômes P_ℓ ($\ell \in \mathbf{Z}$) et Q_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) sont définis par

$$P_\ell = \sum_{\substack{\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \ell}} X_1^{\lambda_1} \ldots X_n^{\lambda_n} \ , \ Q_{ij} = \sum_{\substack{\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_j = k_i + i - j}} X_1^{\lambda_1} \ldots X_j^{\lambda_j}.$$

(par convention, $P_\ell = 0, Q_{ij} = 0$, lorsque $\ell < 0$ ou $k_i < j - i$)

Preuve : L'égalité $S_{\mathbf{k}} = \det(P_{k_i+i-j})$ correspond à la formule 3.4 p.25 de [22]. Pour la deuxième égalité, remarquons que le polynôme Q_{ij} est égal à la

partie du polynôme P_{k_i+i-j} indépendante des variables $X_{j+1}, \ldots, X_n$. On vérifie aisément l'identité :

$$Q_{ij} = P_{k_i+i-j} - (\sum_{j<\alpha\leq n} X_\alpha)P_{k_i+i-j-1} + (\sum_{j<\alpha<\beta\leq n} X_\alpha X_\beta)P_{k_i+i-j-2} - \cdots$$

d'où s'ensuit l'égalité

$$\det(P_{k_i+i-j}) \;=\; \det(Q_{ij})$$

par combinaisons linéaires de colonnes.

Comme alternative, on peut aussi établir directement l'égalité $S_{\mathbf{k}} = \det(Q_{ij})$ par des manipulations de lignes dans la matrice $(X_i^{k_j+j-1})$ ayant pour but de faire apparaître les facteurs $(X_i - X_j)$ du discriminant exactement comme pour la formule du déterminant de Vandermonde qui correspond d'ailleurs au cas particulier $\mathbf{k} = 0$.

La *longueur* $L(P)$ d'un polynôme P à coefficients complexes désigne la somme des valeurs absolues des coefficients de P. Notons enfin $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n$ la *longueur* du n-uplet d'entiers naturels $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$. Lorsque $k_i \geq j - i$, le polynôme Q_{ij} est homogène de degré total $k_i + i - j$ et l'on a

$$L(Q_{ij}) = \binom{k_i + i - 1}{j - 1} \leq 2^{k_i+i-1}.$$

On déduit alors aisément du lemme 1 le

COROLLAIRE : *Pour tout n-uplet $\mathbf{k}$ d'entiers ≥ 0, le polynôme $S_{\mathbf{k}}$ est homogène de degré total $|\mathbf{k}|$ et de longueur $\leq (n!)2^{|\mathbf{k}|+(n^2-n)/2}$.*

Désignons par

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\ ,\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

deux suites de n nombres complexes. On s'intéresse maintenant au déterminant

$$\Delta = \det(e^{x_i y_j})_{1\leq i,j\leq n}\ .$$

LEMME 2 : *On a les formules*

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{0\leq k_1<\cdots<k_n} \frac{\det(x_i^{k_j})\det(y_j^{k_i})}{k_1!\cdots k_n!} \\ &= V(\mathbf{x})V(\mathbf{y}) \sum_{0\leq k_1\leq\cdots\leq k_n} \frac{S_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})S_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})}{\prod\limits_{1\leq i\leq n}(k_i+i-1)!}\end{aligned}$$

Preuve : On commence par développer chacun des coefficients $e^{x_i y_j}$ en série :

$$e^{x_i y_j} = \sum_{k \geq 0} \frac{x_i^k y_j^k}{k!} \ , \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Fixant l'indice i, la formule ci-dessus peut être vue comme un développement de la i-ième ligne de la matrice $(e^{x_i y_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ en une somme infinie de lignes. Par multilinéarité du déterminant, on obtient :

$$\Delta = \sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0} (\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}/k_i!) \det(y_j^{k_i}).$$

Dans la sommation ci-dessus, il est clair que l'on peut se restreindre aux n-uplets $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers deux à deux distincts. Désignons par $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique à n éléments, et par $\varepsilon(\sigma)$ la *signature* de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Ordonnons alors les n-uplets considérés par ordre croissant, il vient

$$\Delta = \sum_{\substack{0 \leq k_1 < \cdots < k_n \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{k_{\sigma(i)}}/k_{\sigma(i)}! \right) \det(y_j^{k_{\sigma(i)}})$$

$$= \sum_{0 \leq k_1 < \cdots < k_n} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (x_i^{k_{\sigma(i)}}/k_{\sigma(i)}!) \right) \det(y_j^{k_i})$$

$$= \sum_{0 \leq k_1 < \cdots < k_n} \frac{\det(x_i^{k_j}) \det(y_j^{k_i})}{k_1! \cdots k_n!} \ ,$$

d'où la première égalité. La deuxième s'en déduit immédiatement en remplaçant k_i par $k_i + i - 1$, $1 \leq i \leq n$.

6.3. Majoration du rang de A_{LM}

Comme de coutume en transcendance, on désignera dans ce qui suit par $c_1, c_2, \cdots$ des constantes > 0, indépendantes des paramètres L et M. On se propose d'établir dans ce paragraphe la

PROPOSITION 1 : *Supposons que le rang de A soit égal à 1. Alors*

$$rg(A_{LM}) \leq c_1 LM.$$

Il s'agit de montrer que pour tout entier n suffisamment grand devant LM, et pour toute suite extraite à n éléments :

$$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X(L) \ , \ \mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y(M),$$

le déterminant

$$\Delta = \det(e^{x_i y_j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

est nul. Pour cela, nous allons successivement majorer et minorer (quand $\Delta \neq 0$) la valeur absolue de Δ. Nous obtiendrons ainsi deux inégalités incompatibles lorsque $n > c_1 LM$.

LEMME 3 : *Il existe deux constantes c_2 et c_3 telles que pour toutes sous-suites $\mathbf{x} \subseteq X(L)$, $\mathbf{y} \subseteq Y(M)$ à $n > c_2 LM$ termes, on ait la majoration :*

$$|\Delta| \leq e^{-c_3 n^2}.$$

Preuve : On utilise le développement de Δ fourni par le lemme 2 :

$$\Delta = V(\mathbf{x})V(\mathbf{y}) \sum_{0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n} \frac{S_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) S_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})}{\prod\limits_{1 \leq i \leq n} (k_i + i - 1)!}$$

Remarquons tout d'abord que

$$(k_i + i - 1)! \geq k_i!(i-1)! \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

Il s'ensuit que

$$|\Delta| \leq \frac{|V(\mathbf{x})| \ |V(\mathbf{y})|}{\prod\limits_{1 \leq \nu \leq n-1} \nu!} \sum_{0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n} \frac{|S_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})| \ |S_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})|}{\prod\limits_{1 \leq i \leq n} k_i!}.$$

Posons

$$\alpha = \max(1, |x_1|, \ldots, |x_n|) \ , \ \beta = \max(1, |y_1|, \ldots, |y_n|).$$

Le corollaire du lemme 1, joint à la majoration triviale

$$|x_i - x_j| \leq 2\alpha \quad , \quad |y_i - y_j| \leq 2\beta$$

des facteurs des discriminants $V(\mathbf{x})$ et $V(\mathbf{y})$, implique alors l'inégalité

$$|\Delta| \leq \frac{(n!)^2 (16\alpha\beta)^{(n^2-n)/2}}{\prod\limits_{1 \leq \nu \leq n-1} \nu!} \sum_{0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n} \frac{(4\alpha\beta)^{k_1 + \cdots + k_n}}{\prod\limits_{1 \leq i \leq n} k_i!}$$

$$\leq \frac{(n!)^2 (16\alpha\beta)^{(n^2-n)/2} e^{4\alpha\beta n}}{\prod\limits_{1 \leq \nu \leq n-1} \nu!} \ .$$

Utilisant maintenant la minoration $\nu! \geq \nu^\nu e^{-\nu}$, valable pour tout $\nu \geq 1$, ainsi que la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin, il vient :

$$\log(\prod_{\nu=1}^{n-1} \nu!) \geq (\frac{n^2-n}{2}) \log n - \frac{3}{4}n^2 - 0(n) ,$$

d'où il s'ensuit que :

$$|\Delta| \leq \left(\frac{16\alpha\beta}{n}\right)^{(n^2-n)/2} e^{4\alpha\beta n + \frac{3}{4}n^2 + 0(n \log n)}.$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\alpha \leq c_4 L \ , \ \beta \leq c_5 M.$$

LEMME 4 : *Il existe une constante c_6 telle que pour tout entier n et toutes sous-suites $\mathbf{x} \subseteq X(L)$, $\mathbf{y} \subseteq Y(M)$ à n éléments, on ait :*
ou bien $\Delta = 0$
ou bien $|\Delta| \geq e^{-c_6(LM+\log n)n}$.

Preuve : Δ est le déterminant d'une matrice carrée $n \times n$, dont les coefficients sont des nombres algébriques de la forme :

$$e^{xy} = (a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} a_3^{\mu_3})^{\lambda_1} (b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} b_3^{\mu_3})^{\lambda_2},$$

si $x = \lambda_1 + \lambda_2\theta$ et $y = \mu_1 \log a_1 + \mu_2 \log a_2 + \mu_3 \log a_3$.

D'après l'expression ci-dessus, il est clair que

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} (s(e^{x_i y_j})) \leq e^{c_7 LM},$$

où l'on a noté, de façon standard, $s(\alpha)$ la *taille* d'un nombre algébrique α (voir par exemple le chapitre 1 de [36]). Il s'ensuit que

$$s(\Delta) \leq (n!) e^{c_7 LMn}.$$

Il suffit d'utiliser alors la classique *inégalité de Liouville.*

La proposition 1 se déduit alors immédiatement de la comparaison des lemmes 3 et 4. Soit n un entier ≥ 1, pour lequel il existe un déterminant extrait Δ d'ordre n et non nul. On a alors :

$$c_3 n^2 \leq c_6(LM + \log n)n,$$

d'où il s'ensuit que $n \leq c_1 LM$.

6.4. Minoration du rang de A_{LM}

Nous allons montrer que la matrice A_{LM} est de rang maximal, sauf peut-être lorsqu'elle est de forme à peu près carrée. De façon précise, on a la

PROPOSITION 2 : *Soient L et M deux entiers ≥ 0. On suppose que*

i) *ou bien* $M^3 \geq 16L^2$,

ii) *ou bien* $L^2 \geq 54M^3$,

alors

$$rg(A_{LM}) = \inf((L+1)^2 \ , \ (M+1)^3).$$

Pour minorer de manière générale le rang de la matrice A_{LM}, il suffit d'en extraire une sous-matrice du type $A_{L_1 M}$ ou A_{LM_1} vérifiant les hypothèses i) ou ii) ci-dessus. On obtient aisément le

COROLLAIRE : *Pour tout entier $L \geq 0$, $M \geq 0$, on a*

$$rg(A_{LM}) \geq \frac{1}{54} \inf(L^2, M^3).$$

Nous allons déduire la proposition 2 du lemme de zéros énoncé dans le §4. En fait, on peut remplacer essentiellement les constantes 16 et 54 par 2 et 16 respectivement ; voir pour cela les raffinements introduits dans le lemme de zéros de [24].

Preuve de la Proposition 2 : Nous allons démontrer en premier lieu que les vecteurs lignes de la matrice A_{LM} sont linéairement indépendants lorsque l'inégalité i) est satisfaite.

On raisonne par l'absurde. Soit

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L} \sum_{\lambda_2=0}^{L} p_{\lambda_1 \lambda_2} (a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} a_3^{\mu_3})^{\lambda_1} (b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} b_3^{\mu_3})^{\lambda_2} \ = \ 0 \ , \ 0 \leq \mu_1, \mu_2, \mu_3 \leq M,$$

une relation non triviale entre les lignes de A_{LM}. Introduisons le polynôme non nul :

$$f(X,Y) \ = \ \sum_{\lambda_1=0}^{L} \sum_{\lambda_2=0}^{L} p_{\lambda_1 \lambda_2} X^{\lambda_1} Y^{\lambda_2},$$

vu comme une fonction sur le groupe algébrique

$$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Par construction, la fonction f s'annule en tous les points de

$$\Gamma(M) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} a_3^{\mu_3} \\ b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} b_3^{\mu_3} \end{pmatrix} \ ; \ 0 \leq \mu_1, \mu_2, \mu_3 \leq M \right\}.$$

On applique alors le théorème 6 avec $S = [M/2]$. La constante c est ici égale à 1. Il existe donc un sous-groupe algébrique connexe $G' \not\subseteq \mathbb{G}_m^2$ tel que l'on ait l'inégalité :

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S) + G'}{G'}\right) H(\overline{G}'; L, L) \leq H(\mathbb{P}; L, L).$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S) + G'}{G'}\right) = (S+1)^3 \ , \ H(\overline{G}'; L, L) \geq 1 \ , \ H(\mathbb{P}; L, L) = 2L^2,$$

pour en déduire l'inégalité voulue : $M^3 < 16L^2$.

Dans le cas ii), on procède de manière analogue avec les colonnes de la matrice A_{LM}. Les détails sont laissés au lecteur.

6.5. Preuve du théorème des six exponentielles

Sous réserve que le rang de A soit égal à 1, nous avons obtenu l'encadrement suivant du rang de la matrice A_{LM} :

$$\frac{1}{54} \inf(L^2, M^3) \leq rg(A_{LM}) \leq c_1 LM \ , \ L \geq 0, M \geq 0.$$

Il suffit alors de choisir

$$L = T^3 \ , \ M = T^2 \ , \ T \in \mathbb{N},$$

pour obtenir une contradiction lorsque T est suffisamment grand.

REFERENCES

[1] D. BERTRAND, Lemmes de zéros et nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 38ième année, 1985-86, exposé 652 (= *Astérisque* **146-147** (1987), 21-44).

[2] D. BERTRAND, Galois representations and transcendental numbers, *New Advances in Transcendence Theory*, Cambridge University Press (1987), 37-55.

[3] D. BROWNAWELL, Applications of Cayley-Chow forms, *Number Theory Ulm* 1987, Springer Lecture Notes 1380, 1-18.

[4] W.D. BROWNAWELL, Note on a paper of P. Philippon, *Michigan Math. J.*, **14** (1987), 461-464.

[5] A. BRUMER, On the units of an algebraic number field, *Matematika*, **14** (1967), 121-144.

[6] M. CHARDIN, Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique, *Bull. Soc. Math. France*, **117** (1989), 305-318.

[7] D.V. et G.V. CHOODNOVSKY, Padé approximations and diophantine geometry, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, **82**, 2212-2216.

[8] S. DAVID, *Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes,* à paraître.

[9] G. DIAZ, Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles. *J. Number Theory*, **31** (1989), 1-23.

[10] M. HINDRY, Autour d'une conjecture de S. Lang, *Invent. Math.*, **94** (1988), 573-603.

[11] M. HINDRY et J. SILVERMAN, The canonical height and integral points on elliptic curves, *Invent. Math.*, **93** (1988), 419-450.

[12] N. HIRATA-KOHNO, *Formes linéaires en logarithmes sur les groupes algébriques,* à paraître.

[13] J. KOLLAR, Sharp effective Nullstellensatz, *J. Am. Math. Soc.*, **1-4** (1988), 963-975.

[14] S. LANG, *Fundamental of diophantine geometry*, Springer-Verlag (1983).

[15] M. LAURENT, Equations exponentielles-polynômes et suites récurrentes linéaires, *Astérisque*, **147-148**, 121-139.

[16] M. LAURENT, Equations exponentielles-polynômes et suites récurrentes linéaires II, *J. Number Theory*, **31** (1989), 24-53.

[17] M. LAURENT, Une nouvelle démonstration du théorème d'isogénie d'après D.V. et G.V. Choodnovsky, *Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1985-86*, Progress in Math., **71**, 119-131 , Birkhäuser.

[18] M. LAURENT, *Déterminants d'interpolation et théorème de Gel'fond-Schneider,* à paraître.

[19] M. LAURENT, Equations diophantiennes exponentielles, *Invent. Math.*, **78** (1984), 299-327.

[20] M. LAURENT, Rang p-adique d'unités : un point de vue torique, *Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1987-88*, Progress in Math., **81**, 131-146, Birkhäuser.

[21] M. LAURENT, Rang p-adique d'unités et action de groupes, *J. Reine Angew. Math.*, **399** (1989), 81-108.

[22] I.G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press (1977).

[23] D. MASSER et G. WÜSTHOLZ, Estimating isogenies on elliptic curves, *Invent. Math.*, à paraître.

[24] M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT, Linear forms in two logarithms and Schneider's method II, *Acta Arithmetica*, **LIII** (1989), 251-287.

[25] P. PHILIPPON, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. France*, **114** (1986), 355-383.

[26] P. PHILIPPON, Lemmes de zéros en caractéristique quelconque, *Problèmes diophantiens 1986-87*, Pub. de l'Univ. P. et M. Curie, **84** (1988).

[27] P. PHILIPPON, Lemmes de zéros sur les extensions, *Problèmes diophantiens 1987-88*, Pub. de l'Univ. P. et M. Curie, 88 (1989).

[28] P. PHILIPPON, Critères pour l'indépendance algébrique, *Publications IHES*, **64** (1988), 5-52.

[29] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT, Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques, *Illinois J. Math.*, **32** (1988), 281-314.

[30] P. PHILIPPON et M.WALDSCHMIDT, Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1986-87*, Progress in Math., **75**, 119-131, Birkhäuser.

[31] M. RAYNAUD, Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion, *Arithmetic and Geometry*, Progress in Math., **35**, 327-352, Birkhäuser.

[32] M. WALDSCHMIDT, A lower bound for the p-adic rank of units of an algebraic number field, *Topics in classical Number Theory Budapest 1981, Coll. Math. Soc. János Bolyai*, **34**, 1617-1650.

[33] M. WALDSCHMIDT, Algebraic independence of transcendental numbers, Gel'fond's method and its developments, *Perspective in Math. Anniversary of Oberwolfach 1984*, 551-571, Birkhäuser.

[34] M. WALDSCHMIDT, Transcendence method of Gel'fond, *New Advances in Transcendence Theory*, Cambridge University Press, (1988), 375-398.

[35] M. WALDSCHMIDT, Groupes algébriques et grands degrés de transcendance, *Acta Arithmetica*, **156** (1986), 253-302.

[36] M. WALDSCHMIDT, *Nombres transcendants*, Lecture Notes 402 (1974), Springer Verlag.

Michel LAURENT
Institut Henri Poincaré
11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS Cedex 05