Astérisque

L. L. AVRAMOV
Y. FÉLIX

Espaces de Golod

Astérisque, tome 191 (1990), p. 29-34
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__191__29_0>

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Espaces de Golod

L.L. Avramov* et Y. Félix**

Un c.w. complexe fini 1-connexe X est appelé un *espace de Golod* si pour un certain n le revêtement n-connexe X_n de X a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères. La terminologie provient de l'analogie algèbre locale-homotopie rationnelle ([2]) : la notion constitue en fait la transposition en topologie de celle d'*anneau de Golod généralisé*, introduite dans [1]. Les espaces de Golod X jouissent de nombreuses propriétés :

- l'algèbre $H_*(\Omega X,\mathbb{Q})$ est cohérente (résulte de [5, Théorème 3]);
- tout $H_*(\Omega X,\mathbb{Q})$-module, qui admet une résolution finie par des $H_*(\Omega X,\mathbb{Q})$-modules libres, en possède une de longueur $1 + \sum_{i=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, (\pi_{2i+1}(X))$ (résulte de [5, Théorème 2]);
- la série de Poincaré $P_{\Omega X}(t)$ est rationnelle [3, Corollaire (4.2)].

Pour tout espace vectoriel gradué de type fini V on désigne par $|V|(t)$ la série formelle $\Sigma_i \dim(V_i)t^i$, et pour tout c.w. complexe de type fini Y on pose $P_Y(t) = |H_*(Y,\mathbb{Q})|(t)$.

Le but du présent texte est la démonstration de la propriété suivante des fibrations à base un espace de Golod, qui généralise la dernière propriété énoncée ci-dessus.

THEOREME. *Soit* $F \to E \xrightarrow{p} B$ *une fibration, avec* E *un c.w. complexe fini* 1-*connexe. Supposons que* B *soit un espace de Golod alors la série de Poincaré de* F *est rationnelle.*

Plus précisément, il existe un polynôme $\mathrm{Den}_B(t)$ *à coefficients entiers, tel que* $\mathrm{Den}_B(t)$ $P_F(t)$ *soit un polynôme pour tout* E. *En plus,* $\mathrm{Den}_B(t)$ *peut être calculé à partir de l'égalité*

$$P_{\Omega B}(t) = [\prod_{2\leq 2i\leq n} (1+t^{2i-1})^{\mathrm{rank}\,\pi_{2i}(B)}] / \mathrm{Den}_B(t),$$

où n *est tel que le revêtement n-connexe* B' *de* B *a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères.*

---

* Recherche financée en partie par le Contrat N° 884/88 avec le Ministère de la Culture, la Science et l'Education.
** Chercheur qualifié au FNRS.

Exemples : Une première famille d'espaces de Golod est fournie par les espaces formels de dimension finie dont la cohomologie est une algèbre graduée de Golod généralisée. Parmi ceux-ci on trouve tous les squelettes finis de produits d'espaces d'Eilenberg-MacLane, cf. [6].

Une seconde famille est fournie par les algèbres de Lie graduées de dimension finie, L. On note $\mathbb{L}\langle V\rangle$ (respectivement $\mathbb{L}\langle\{x_i\}_{i\in I}\rangle$) l'algèbre de Lie libre sur un espace vectoriel gradué V (respectivement sur un ensemble de générateurs $\{x_i\}_{i\in I}$). A une présentation $L = \mathbb{L}\langle\{x_i\}_{i\in I}\rangle/(\{y_j\}_{j\in J})$ on associe l'application

$$\vee_{j\in J} S^{|y_j|+2} \xrightarrow{g} \vee_{i\in I} S^{|x_i|+1}$$

qui envoie la classe fondamentale de $S^{|y_j|+2}$ sur le produit de Whitehead des classes fondamentales des $S^{|x_i|+1}$ correspondant à y_j. Notant par X la cofibre de g, on a par [4, Théorème 2] la suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \mathbb{L}\langle V\rangle \to \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q} \to L \to 0$$

qui montre bien que X est de Golod.

La démonstration repose sur les deux propositions suivantes extraites de [3]. Pour rester self-contained nous en donnerons une démonstration.

PROPOSITION 1 [3, Théorème (4.1)]. *Soit* $F \to E \to B$ *une fibration avec* $\pi_*(B) \otimes \mathbb{Q}$ *et* $H_*(E;\mathbb{Q})$ *de dimension finie, alors*

(1) $H_*(F;\mathbb{Q})$ *est un* $H_*(\Omega B;\mathbb{Q})$*-module noethérien.*

(2) *La série de Poincaré de* F *est une fonction rationnelle de la forme*

$p(t) / \prod_{i\geq 1} (1-t^{2i})^{\mathrm{rank}\, \pi_{2i+1}(B)}$ *, où* $p(t)$ *est un polynôme.*

PROPOSITION 2 [3, §4, Lemme 3]. *Soit* L *une algèbre de Lie graduée connexe de dimension finie sur un corps et* V *un* UL*-module gradué de type fini* ($V = \bigoplus_{p\geq 0} V_p$), *alors la série de Hilbert de* V

$$|V|(t) = \sum_{n\geq 0} \dim V_n t^n$$

est une fonction rationnelle de la forme $p(t) / \prod_{i\geq 1} (1-t^{2i})^{\dim L_{2i}}$ *, où* $p(t)$ *est un polynôme.*

Démonstration proposition 1 : (1) La suite spectrale de Serre de la fibration $\Omega B \to F \to E$ est une suite spectrale de $H_*(\Omega B,\mathbb{Q})$-modules. Le terme ${}^2E = H_*(\Omega B) \otimes H_*(E)$ est un module noethérien. Il en est de même de chaque ${}^pE$. Comme $H_*(E)$ est de dimension finie, ${}^pE = {}^\infty E$ pour p assez grand. Il en résulte que $H_*(F,\mathbb{Q})$ est un module de type fini. (2) résulte de la proposition 2. ■

Démonstration proposition 2 : elle calque de près la démonstration classique de Hilbert de la rationalité de $|V|(t)$ lorsque V est un module gradué de type fini sur un anneau commutatif de polynômes.

Nous travaillons par récurrence sur dim L. Si dim L = 0, V est de dimension finie et le résultat s'en déduit. Supposons le résultat vrai pour les algèbres de Lie de dimension p et soit L une algèbre de Lie graduée de dimension p + 1 et V un UL-module de type fini. Le générateur x de degré maximal est donc dans le centre et on a une suite exacte de L-modules gradués

$$(*) \qquad 0 \to K \to V \xrightarrow{x} V \to C \to 0.$$

(1) Si x est de degré impair, on pose $K' = xV$. Par Poincaré-Birkhoff-Witt, K' est un L-module contenu dans K, donc un L/(x) module lui aussi. L'hypothèse de récurrence appliquée à la suite exacte

$$0 \to K \to V \to K' \to 0$$

montre que $|V|(t) = |K|(t) + t^{-|x|}\,|K'|(t)$ est rationnel de la forme souhaitée.

(2) Si x est de degré pair, la suite exacte $(*)$ donne l'égalité

$$(1-t^{|x|})\,|V|(t) = |C|(t) - t^{|x|}\,|K|(t).$$

Comme xK = 0 et xC = 0, K et C sont en fait des modules de type fini sur L/(x), et on conclut par l'hypothèse de récurrence. ■

Démonstration du théorème : Comme B est un espace de Golod, nous avons un diagramme commutatif de fibrations, avec $\pi_*(B'') \otimes \mathbb{Q} < \infty$ où B' désigne le recouvrement n-connexe de B :

$$\begin{array}{ccccc} F & = & F & & \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow & & \\ E' & \to & E & \xrightarrow{p'} & B'' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \| \\ B' & \to & B & \xrightarrow[p]{} & B''. \end{array}$$

Par la proposition 1, $H_*(E',\mathbb{Q})$ et $H_*(B';\mathbb{Q})$ ont des séries de Poincaré rationnelles de dénominateur $q(t) = \prod_{3 \leq 2i+1 \leq n} (1-t^{2i})^{\operatorname{rank} \pi_{2i+1}(B)}$. Le morphisme de fibrations

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{r} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & = & E \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[p]{} & B'' \end{array}$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega B \times F & \xrightarrow{\nu} & F \\ {\scriptstyle \Omega p \times r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \Omega B'' \times E' & \xrightarrow[\nu']{} & E' \end{array}$$

où ν et ν' désignent respectivement les opérations d'holonomie de l'espace des lacets de la base sur la fibre dans les deux fibrations. Il en résulte que $I = \operatorname{Im} H_*(r;\mathbb{Q})$ est un sous $H_*(\Omega B'';\mathbb{Q})$-module de $H_*(E';\mathbb{Q})$. Il est donc de type fini. $|I|(t)$ est donc, par la proposition 2, une fraction rationnelle de dénominateur q(t).

Revenons à la fibration $F \to E' \to B'$. Par [3, Proposition (8.1)] elle détermine une suite spectrale

$$^2E_{p,q} = \operatorname{Tor}_p^{H_*(\Omega B',\mathbb{Q})} (\mathbb{Q}, H_*(F;\mathbb{Q}))_q \Rightarrow H_{p+q}(E,\mathbb{Q}).$$

Comme B' a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères, $H_*(\Omega B',\mathbb{Q})$ est l'algèbre associative libre sur la désuspension $s^{-1}\,\widetilde{H}_*(B',\mathbb{Q})$ de l'homologie réduite de B. Donc pour calculer le terme ${}^2E$ de la suite spectrale, on peut utiliser la résolution bien connue de $\mathbb{Q} = H_*(\Omega B',\mathbb{Q})/\widetilde{H}_*(\Omega B',\mathbb{Q})$, en tant que $H_*(\Omega B',\mathbb{Q})$-module à droite.

$$0 \to s^{-1}\,\widetilde{H}_*(B',\mathbb{Q}) \otimes H_*(\Omega B',\mathbb{Q}) \overset{\partial_1}{\to} H_*(\Omega B',\mathbb{Q})$$

Ceci donne la suite exacte d'espaces vectoriels gradués

$$0 \to {}^{\infty}E_{1,*} \to s^{-1}\,\widetilde{H}_*(B',\mathbb{Q}) \otimes H_*(F,\mathbb{Q}) \overset{\bar{\partial}_1}{\to} H_*(F,\mathbb{Q}) \to {}^{\infty}E_{0,*} \to 0$$

et les égalités ${}^{\infty}E_{p,*} = 0$ pour $p \neq 0,1$. En d'autres termes, on a le triangle exact d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{array}{ccc} H_*(F,\mathbb{Q}) & \overset{H_*(r,\mathbb{Q})}{\longrightarrow} & H_*(E',\mathbb{Q}) \\ & \nwarrow\partial_1 \quad \swarrow\delta & \\ & s^{-1}\,\widetilde{H}_*(B',\mathbb{Q}) \otimes H_*(F,\mathbb{Q}), & \end{array}$$

où δ est un homomorphisme de degré -1.

Un simple jeu sur les séries de Poincaré donne alors

$$(**) \qquad P_F(t) = \frac{(1+t^{-1})\,|\,I\,|(t) - t^{-1}\,P_{E'}(t)}{1 - t^{-1}\,(P_{B'}(t)-1)}.$$

Comme $|\,I\,|(t)$, $P_{E'}(t)$, et $P_{B'}(t)$ sont toutes des fonctions rationnelles de dénominateur $q(t)$, on trouve bien $P_F(t)$ sous la forme $p(t)/\mathrm{Den}_B(t)$, avec $p(t)$ un polynôme à coefficients entiers, et $\mathrm{Den}_B(t) = q(t)\,(1-t^{-1}\,(P_{B'}(t)-1)\,) \in \mathbb{Z}[t]$.

Reste à calculer $P_{\Omega B}(t)$. Dans ce cas la suite exacte d'homotopie rationnelle de la fibration $\Omega B' \to \Omega B = F \overset{r}{\to} E' = \Omega B''$ a un connectant nul, puisque B' est rationnellement un bouquet de sphères.

Ceci implique la surjectivité de $H_*(r,\mathbb{Q})$. La formule (**) devient

$$P_{\Omega B}(t) = \frac{P_{\Omega B''}(t)}{1 - t^{-1}(P_{B'}(t)-1)}.$$

Comme $P_{\Omega B''}(t) = \prod_{2\leq 2i\leq n} (1+t^{2i-1})^{\mathrm{rank}\,\pi_{2i}(B)} / q(t)$ par Poincaré-Birkhoff-Witt, on a bien la formule voulue. ■

Références

[1] L.L. AVRAMOV, Rings over which all modules have rational Poincaré series. Preprint.

[2] L.L. AVRAMOV and S. HALPERIN, Through the looking glass : A dictionary between rational homotopy theory and local algebra. Lecture Notes in Math. 1183 (1986) 1-27.

[3] Y. FELIX et J.C. THOMAS, Sur l'opération d'holonomie rationnelle. Lecture Notes in Math. 1183 (1986) 136-169.

[4] Y. FELIX et J.C. THOMAS, Sur la structure des espaces de L.S. catégorie deux. Illinois Journal of Math. 30 (1986) 574-593.

[5] J.E. ROOS, On the use of graded Lie algebras in the theory of local rings. London Math. Soc. Lecture Notes Series 72 (1982) 204-230, Cambridge University Press.

[6] R. RUCHTI, On formal spaces and their loop space. Illinois Journal of Math. 22 (1978) 96-107.

University of Sofia
Université Catholique de Louvain.