Astérisque

MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

Homologie de Hochschild et homologie cyclique des algèbres différentielles graduées

Astérisque, tome 191 (1990), p. 255-267

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__191__255_0>

HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD ET HOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES

Micheline Vigué-Poirrier *

La notion d'homologie de Hochschild pour une algèbre associative A sur un anneau commutatif unitaire k est bien connue, [Mc]. Elle est notée $HH_*(A)$ et définie par $HH_*(A) = \mathrm{Tor}^{A\otimes A^{op}}(A, A)$ où A^{op} est l'algèbre opposée de A .

Cette notion a été étendue à la catégorie des algèbres associatives différentielles graduées sur un anneau commutatif k (notée k-ADG) par plusieurs auteurs, [B1],[G].

La notion d'homologie cyclique, notée $HC_*(\cdot)$, est apparue plus récemment ; on trouvera un exposé complet dans [LQ] pour le cas des algèbres ; et pour la catégorie k-ADG dans [B1] ou [G].

Ce papier contient une généralisation à la catégorie k-ADG (où k est un corps quelconque) du résultat de Loday-Quillen du calcul explicite de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique pour une algèbre tensorielle. Nous fournissons un algorithme de calcul précis de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique pour une algèbre différentielle graduée libre. Le résultat général s'énonce ainsi :

Théorèmes 1.5 et 2.4 *Soit $(A, d) = (T(V), d)$ une algèbre différentielle graduée libre sur un corps commutatif k . Alors, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués :*

(1) $HH_*(A, d) = H_*(A \oplus (A \otimes \bar{V}), \delta)$ *où* $\bar{V}_n = V_{n-1}$, $\delta_{|A} = d$, $\delta(a \otimes \bar{v}) = da \otimes \bar{v} - S(a, dv) + (-1)^{|a|+|\bar{v}|}(av - (-1)^{|a|\cdot|v|}va)$ *et S est l'application k-linéaire :*

$$S(a, v_1 \cdots v_p) = (-1)^{|a|} \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\varepsilon_i} v_{i+1} \cdots v_p a v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i + (-1)^{|a|} a v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p \, .$$

(2) $HC_*(A, d) = H_*(k[u] \otimes (A \oplus A \otimes \bar{V}), D)$ *où* $|u| = 2$, $D = 0$ *sur* $k[u]$, $D = \delta$ *sur* $A \oplus \big(k[u] \otimes (A \otimes \bar{V})\big)$ *et*

$$D(u^n \otimes v_1 \cdots v_p) = u^n \otimes d(v_1 \cdots v_p) + u^{n-1} \otimes [v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\mu_i} v_{i+1} \cdots v_p v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i]$$

si $n \geq 1, p \geq 1$.

La motivation d'un tel travail est double : d'une part, il est facile de montrer que si (A, d) est une ADG quelconque, alors il existe une ADG libre $(T(V), d)$ et un morphisme $\rho : (T(V), d) \to$

* **URA au CNRS D 0751**

(A, d) qui induit un isomorphisme en homologie, et, par un résultat classique, [B1], les ADG (A, d) et $(T(V), d)$ ont des homologies de Hochschild et cycliques isomorphes ; le calcul, dans le cas général, se ramène donc, au calcul pour les ADG libres. D'autre part, en topologie algébrique, le calcul de l'homologie (resp. l'homologie équivariante)de l'espace des lacets libres sur un espace donné X se ramène à un calcul d'homologie de Hochschild (resp. cyclique) d'invariants topologiques liés à X, [BF],[G], [J]. Enfin, la théorie de Morse permet de montrer des résultats concernant la géométrie d'une variété riemannienne à partir uniquement de l'étude de la cohomologie de l'espace des lacets libres sur cette variété. Ceci explique notre recherche d'un "modèle" permettant de calculer l'homologie de l'espace des lacets libres sur un corps k quelconque. En caractéristique 0 , le problème a été complètement résolu dans [SV], en travaillant dans la catégorie des algèbres commutatives différentielles graduées. En caractéristique p non nulle, il est possible, dans certains cas, de travailler encore dans la catégorie des algèbres commutatives graduées, [HV].

Le plan de l'article est le suivant : Dans le § .1, nous donnons quelques rappels d'algèbre différentielle homologique, et nous définissons un complexe dont l'homologie calcule l'homologie de Hochschild. Dans le § .2, nous définissons sur le complexe précédent un opérateur β de degré $+1$; le complexe mixte ainsi obtenu permet de calculer l'homologie cyclique, cf. [K]. Dans le § .3, nous donnons une méthode de calcul de l'homologie (resp. de l'homologie équivariante) de l'espace des lacets libres sur un espace X , à valeurs dans un corps commutatif k , à partir de la donnée de l'algèbre $C_*(\Omega X, k)$ des chaînes sur l'espace des lacets ΩX ou de l'algèbre des cochaînes $C^*(X, k)$. Si X est un espace simplement connexe de L-S catégorie 1 , alors on a une formule explicite pour l'homologie (resp. l'homologie équivariante) de l'espace des lacets libres sur X . Elles coïncident avec celles données par Hsiang et Staffeldt [HS], et Burghelea [B1] pour X une suspension et k un corps de caractéristique 0. Cette formule figure aussi dans [CC]. Pour les sphères, un calcul analogue se trouve dans [H]. Notre modèle permet de calculer explicitement l'homologie de l'espace des lacets libres sur $X = \mathbf{C}P^2$.

Un problème reste ouvert. Peut-on montrer, en utilisant le modèle du § .3, la célèbre conjecture :

Conjecture : Soit X un espace simplement connexe tel que $H^*(X, k)$ soit de dimension finie (k corps quelconque).

Alors, la suite des nombres de Betti de l'homologie de l'espace des lacets libres à valeurs dans k n'est pas bornée si et seulement si $H^*(X, k)$ ne peut pas être engendrée par un seul élément en tant qu'algèbre commutative graduée.

Cette conjecture a été complètement résolue en caractéristique 0 , [SV]. En caractéristique $p \neq 0$, elle a été résolue dans certains cas, voir [HV].

§.1. Homologie de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée libre

Les définitions de base en algèbre homologique différentielle se trouvent, par exemple, dans [HMS],[FHT1].

Tous les espaces vectoriels sont définis sur un corps commutatif k et sont $\mathbf{Z}$-gradués, avec la convention que $M^n = M_{-n}$ si $\oplus_n M^n$ est un k-espace vectoriel gradué. La valeur absolue du degré d'un élément x est notée $|x|$.

On dit que (A, d) est une k-algèbre différentielle graduée (en abrégé ADG), si $A = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} A_n$ est un k-espace vectoriel gradué, muni d'une structure d'algèbre associative unitaire sur k telle que $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$. De plus, d est une dérivation de k-algèbre de degré ± 1 vérifiant $d^2 = 0$. Dans la suite, on considérera uniquement, ou bien des algèbres différentielles graduées A_* avec $A_n = 0$ pour $n < 0$ et d de degré -1 , ou bien des algèbres différentielles graduées A^* avec $A^n = 0$ pour $n < 0$ et d de degré $+1$. Une ADG de ce dernier type sera étudiée comme une ADG (A_{-*}, d_{-*}) uniquement graduée en degrés négatifs et munie d'une différentielle de degré -1 . Si $V = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} V_n$ est un k-espace vectoriel gradué, on note $T(V)$ l'algèbre associative libre construite sur V . Si (A, d) est une ADG, on définit l'ADG (A^{op}, d^{op}) par $A^{op} \simeq A$, $a^{op} \cdot b^{op} = (-1)^{|a|\cdot|b|}(ba)^{op}, d^{op}(a^{op}) = (da)^{op}$.

L'application $F_g : (A \otimes A^{op}) \otimes A \to A$ définie par $F_g(\alpha \otimes \beta^{op}, \gamma) = (-1)^{|\beta|\cdot|\gamma|}\alpha\gamma\beta$ munit A d'une structure de $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué à gauche.

L'application $F_d : A \otimes (A \otimes A^{op}) \to A$ définie par $F_d(\gamma, \alpha \otimes \beta^{op}) =$ $(-1)^{|\beta|(|\alpha|+|\gamma|)}\beta\gamma\alpha$ munit A d'une structure de $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué à droite.

Définition 1.1 [B1],[G]. *Soit (A_*, d_*) une algèbre différentielle graduée telle que, ou bien $A_n = 0$ pour tout $n < 0$, ou bien $A_n = 0$ pour tout $n > 0$ et $A_o = k$, alors on définit l'homologie de Hochschild de (A_*, d_*) , notée $HH_*(A_*, d_*)$ par $HH_*(A_*, d_*) = \mathrm{Tor}^{A\otimes A^{op}}(A, A)$.*

Définition 1.1.' *Soit (A^*, d^*) une algèbre différentielle graduée telle que $A^o = k$, $A^* = \oplus_{n\geq 0} A^n$, et d^* de degré $+1$, on définit l'homologie de Hochschild $HH^*(A^*, d^*)$ par*

$$HH^*(A^*, d^*) = HH_{-*}(A_{-*}, d_{-*}) .$$

La définition du foncteur Tor dans la catégorie différentielle se trouve, par exemple, dans [FHT1] et ne sera pas rappelée.

Si (A, d) est une algèbre différentielle graduée vérifiant les hypothèses de la définition 1.1, on a alors $HH_*(A, d) = H_*(A \otimes_{A\otimes A^{op}} P)$ où $P \to A$ est une résolution quelconque semi-libre de A par des $(A \otimes A^{op})$-modules différentiels gradués à gauche. Rappelons que si R est une algèbre différentielle graduée, un R-module est dit libre si c'est un $R_\#$-module libre sur une base de cycles (où $R_\#$ est l'algèbre graduée sous-jacente à R), et un R-module P est dit semi-libre s'il est une réunion croissante de sous-modules $0 = P_{-1} \subset P_0 \subset \cdots$ tel que chaque P_i/P_{i-1} soit libre.

Dans le cas particulier où $A = T(V)$, avec V gradué en degré 0 et $d = 0$, rappelons le résultat de Loday-Quillen (lemme 5.1), on a une suite exacte de $(A \otimes A^{op})$-modules : $0 \to A \otimes V \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$ où $m(a \otimes a') = aa'$, $b'(a \otimes v \otimes a') = av \otimes a' - a \otimes va'$, ce qui leur permet de calculer facilement l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique de $T(V)$.

Nous supposons maintenant que $(A, d) = (T(V), d)$ est une ADG libre vérifiant les hypothèses de la définition 1.1. Nous utilisons une version graduée de la résolution de [L-Q] pour construire une résolution semi-libre de A par des $(A \otimes A^{op})$-modules différentiels gradués.

Il est immédiat de vérifier que, si $W = \oplus_n W_n$ est un k-espace vectoriel gradué, alors $A \otimes W \otimes A$ est un $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué à gauche, si on pose $(\alpha \otimes \beta^{op}) \cdot (a \otimes w \otimes a') = (-1)^{|\beta| \cdot [|a| + |w| + |a'|]} \alpha a \otimes w \otimes a' \beta$, pour $\alpha, \beta, a, a' \in A, w \in W$. On a : $a \otimes w \otimes a' = (-1)^{|a'| \cdot |w|} (a \otimes a'^{op}) \cdot (1 \otimes w \otimes 1)$.

Soit $A = T(V)$ une algèbre tensorielle graduée, posons $\bar{V} = \oplus \bar{V}_n$ où $\bar{V}_n = V_{n-1}$. On définit $m : A \otimes A \to A$ par $m(a \otimes a') = aa'$, $\varepsilon : A \to A \otimes A$ par $\varepsilon(a) = a \otimes 1$, $\tilde{b}' : A \otimes \bar{V} \otimes A \to A \otimes A$ par $\tilde{b}'(a \otimes \bar{v} \otimes a') = (-1)^{|a'|}(av \otimes a' - a \otimes va')$ et $s : A \otimes A \to A \otimes \bar{V} \otimes A$ par $s(\alpha \otimes v_1 \cdots v_p) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{1+\sum_{k=i+1}^{p} |v_k|} \alpha v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i \otimes v_{i+1} \cdots v_p - \alpha v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p \otimes 1$, si $\alpha \in A$, $v_1 \cdots v_p \in T^p(V)$, et $s = 0$ sur $A \otimes k$.

Lemme 1.2 *Soit le diagramme suivant :* $A \otimes \bar{V} \otimes A \underset{s}{\overset{\tilde{b}'}{\rightleftarrows}} A \otimes A \underset{\varepsilon}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A$ *où* $\tilde{b}', s, m, \varepsilon$ *ont été définis ci-dessus. Alors*

1) $m\varepsilon = \mathrm{Id}_A$, $\tilde{b}' s + \varepsilon m = \mathrm{Id}_{A \otimes A}$, $s \tilde{b}' = \mathrm{Id}_{A \otimes \bar{V} \otimes A}$

2) La suite $0 \to A \otimes \bar{V} \otimes A \xrightarrow{\tilde{b}'} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$ *est une résolution de* A *par des* $(A \otimes A^{op})$*-modules gradués.*

■ Il est facile de vérifier que $\tilde{b}', m, \varepsilon, s$ sont des morphismes de $(A \otimes A^{op})$-modules gradués. De plus, 1) se montre immédiatement et prouve que (ε, s) est une homotopie entre Id et 0 , ce qui donne 2). ■

Soit maintenant $(A, d) = (T(V), d)$ une ADG libre; nous allons définir une différentielle d_1 sur $A \otimes \bar{V} \otimes A$ qui fasse de $(A \otimes \bar{V} \otimes A, d_1)$ un $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué et qui fasse de $\tilde{b}'$ un morphisme de modules différentiels gradués.

Si $a, a' \in A, \bar{v} \in \bar{V}$, on a : $a \otimes \bar{v} \otimes a' = (-1)^{|a'| \cdot |\bar{v}|} (a \otimes a'^{op}) \cdot (1 \otimes \bar{v} \otimes 1)$. Il suffit donc de définir $d_1(1 \otimes \bar{v} \otimes 1)$ et de l'étendre par :

$$(-1)^{|a'| \cdot |\bar{v}|} d_1(a \otimes \bar{v} \otimes a') = d(a \otimes a'^{op}) \cdot (1 \otimes \bar{v} \otimes 1) + (-1)^{|a| + |a'|} (a \otimes a'^{op}) \cdot d_1(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) .$$

On a $d\tilde{b}'(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = d(v \otimes 1 - 1 \otimes v) = dv \otimes 1 - 1 \otimes dv$, mais $1 \otimes \bar{v} \otimes 1 = -s(1 \otimes v)$, donc $d\tilde{b}'(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = -d\tilde{b}' s(1 \otimes v)$. D'après le lemme 1.2, $d\tilde{b}'(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = -d(1 \otimes v) + d\varepsilon m(1 \otimes v) =$

$-1\otimes dv+\varepsilon m(1\otimes dv)=\tilde{b}'(-s(1\otimes dv))$. Posons $d_1(1\otimes\bar{v}\otimes 1)=-s(1\otimes dv)$, soit $d_1 s(1\otimes v)=s(1\otimes dv)$.

$$(*)\qquad d_1(a\otimes\bar{v}\otimes a')=da\otimes\bar{v}\otimes a'+(-1)^{|a|+\bar{v}|}a\otimes\bar{v}\otimes da'+(-1)^{|a|+|a'|\cdot|v|+1}s(a\otimes(dv)a')\ .$$

Lemme 1.3 *(1) La formule (*) définit une différentielle d_1 sur $A\otimes\bar{V}\otimes A$ qui en fait un $(A\otimes A^{op})$-module différentiel.*

(2) On a $\tilde{b}'d_1=d\tilde{b}'$ et $sd=d_1 s$ où d désigne la différentielle produit sur $A\otimes A$.

■ (1) est vrai par construction et (2) est vérifié sur $k\otimes\bar{V}\otimes k$, donc partout. ■

Posons $P_n=(A\otimes A)_n\oplus(A\otimes\bar{V}\otimes A)_n$, $P=\oplus_n P_n$, $D_{|A\otimes A}=d$, $D(\xi)=d_1(\xi)+(-1)^{|\xi|}\tilde{b}'(\xi)$ si $\xi\in A\otimes\bar{V}\otimes A$. On définit $\Phi:(P,D)\to(A,d)$ par $\Phi=m$ sur $A\otimes A$, $\Phi=0$ sur $A\otimes\bar{V}\otimes A$.

Théorème 1.4 *Soit $(A,d)=(T(V),d)$ une ADG libre, et soit $\Phi:(P,D)\to(A,d)$ défini ci-dessus, alors $\big((P,D),\Phi\big)$ est une résolution semi-libre de (A,d) par des $(A\otimes A^{op})$-modules différentiels gradués.*

■ D est un morphisme de $(A\otimes A^{op})$-modules puisque $d_1,\tilde{b}'$, et d le sont. Si $\xi\in A\otimes\bar{V}\otimes A$, on a

$$\begin{aligned}D(D(\xi))=D(d_1(\xi)+(-1)^{|\xi|}\tilde{b}'(\xi))&=d_1\circ d_1(\xi)+(-1)^{|\xi|+1}\tilde{b}'d_1(\xi)\\&+(-1)^{|\xi|}d\tilde{b}'(\xi)=(-1)^{|\xi|}[d\tilde{b}'(\xi)-\tilde{b}'d_1(\xi)]=0\ ,\end{aligned}$$

donc $D^2=0$. Il est clair que (P,D) est un module semi-libre. Il reste à montrer que Φ_* : $H_*(P,D)\to H_*(A,d)$ est un isomorphisme. Cela découle d'un argument classique de suites spectrales compte-tenu des lemmes 1.2 et 1.3. ■

Par définition du Tor différentiel, on a :

$$\mathrm{Tor}^{A\otimes A^{op}}(A,A)=H_*(A\otimes_{A\otimes A^{op}}P,d\otimes_{A\otimes A^{op}}D)\ .$$

Il est facile de vérifier que l'application $\theta:A\otimes_{A\otimes A^{op}}[(A\otimes A)\oplus(A\otimes\bar{V}\otimes A)]\to A\oplus(A\otimes\bar{V})$ définie ci-dessous est un isomorphisme de k-modules gradués.

$$\theta(\alpha\otimes_{A\otimes A^{op}}(b\otimes b'))=(-1)^{|b'|\cdot[|\alpha|+|b|]}b'\alpha b\ ,\ \text{si } b,b',\alpha\in A$$

$$\theta(\alpha\otimes_{A\otimes A^{op}}(b\otimes\bar{v}\otimes b'))=(-1)^{|b'|\cdot[|\alpha|+|b|+|\bar{v}|]}b'\alpha b\otimes\bar{v}\ \text{si } \bar{v}\in\bar{V}\ .$$

Théorème 1.5 *Soit $(A,d)=(T(V),d)$ une algèbre différentielle graduée libre sur un corps commutatif k telle que, ou bien $V=\oplus_{n\geq 0}V_n$, ou bien $V=\oplus_{n\leq -1}V_n$, posons $\bar{V}=\oplus\bar{V}_n$ et $\bar{V}_n=V_{n-1}$. Alors il y a un isomorphisme de k-espaces vectoriels gradués : $HH_*(A,d)\simeq H_*(A\oplus(A\otimes\bar{V}),\delta)$ où la différentielle δ est donné par $\delta_{|A}=d$, $\delta(a\otimes\bar{v})=da\otimes\bar{v}-S(a,dv)+(-1)^{|a|+|\bar{v}|}(av-(-1)^{|a||v|}va)$. L'application $S:A\otimes A\to A\otimes\bar{V}$ est k-linéaire et définie par*

$S(a, v_1 \dots v_p) = (-1)^{|a|} \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\varepsilon_i} v_{i+1} \dots v_p a v_1 \dots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i + (-1)^{|a|} a v_1 \dots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p$ *et* $\varepsilon_i = (|v_{i+1}| + \dots + |v_p|)(|a| + |v_1| + \dots + |v_{i-1}|)$, *si* $a \in A, v_i \in V$.

■ Il suffit de transporter à $A \oplus (A \otimes \bar{V})$, à l'aide de l'isomorphisme θ , la formule de la différentielle $d \otimes_{A \otimes A^{op}} D$. En particulier, $S(a, dv) =$
$(-1)^{|a|} \theta(a \otimes_{A \otimes A^{op}} s(1 \otimes dv))$. ■

Pour tout $m \geq 1$, définissons la permutation cyclique $\tau_m : V^{\otimes m} \to V^{\otimes m}$ par $\tau_m(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = (-1)^{|v_m| \cdot [|v_1| + \dots + |v_{m-1}|]} v_m \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{m-1}$ et on pose $\tau_0 = Id$.

Remarque 1.6 L'application $S : V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes p} \to V^{\otimes m+p-1} \otimes \bar{V}$ définie pour $m \geq 0$, $p \geq 1$, est, au signe près, égale à :

$$\sigma \circ \left[Id + (\tau_{m+1} \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau_p) + (\tau_{m+1}^2 \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau_p^2) + \dots + (\tau_{m+1}^{p-1} \otimes Id) \circ (Id \otimes \tau_p^{p-1}) \right]$$

où σ est l'isomorphisme $V^{\otimes m+p} \to V^{\otimes (m+p-1)} \otimes \bar{V}$ qui envoie $v_1 \dots v_{m+p-1} v_{m+p}$ sur $v_1 \dots v_{m+p-1} \otimes \bar{v}_{m+p}$.

Le théorème 1.5 s'énonce ainsi dans le cas où $d = 0$.

Théorème 1.7 *Soit $A = T(V)$ une algèbre tensorielle graduée sur un corps commutatif k quelconque, avec, ou bien $V_n = 0$ pour $n < 0$, ou bien $V_n = 0$ $n \geq 0$, alors l'homologie de Hochschild $HH_*(T(V))$ se décompose en la somme directe de deux k-espaces vectoriels gradués :* $\bigoplus_{m \geq 0} (V^{\otimes m} / (\mathrm{Id} - \tau_m))$ *et* $\bigoplus_{m \geq 1} \overline{\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \tau_m)}$, *où* $\overline{\mathrm{Ker}(\ )_n} = \mathrm{Ker}(\ )_{n-1})$.

§.2. Homologie cyclique d'une algèbre différentielle graduée libre [B1],[BV],[G],[J].

Soit (A, d) une algèbre associative sur un corps commutatif k vérifiant les hypothèses de la définition 1.1. On définit le complexe de Hochschild bigradué $(C_{p,q}(A), d, b)$, $p \geq 0$, par $C_{pq} = \bigoplus_{i_0 + i_1 \dots + i_p = q} A_{i_0} \otimes A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_p}$, $d(a_{i_0} \otimes \dots \otimes a_{i_p}) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^{i_0 + \ + i_{k-1}} a_{i_0} \otimes a_{i_1} \dots \otimes da_{i_k} \otimes \dots \otimes a_{i_p}$, si $a_{i_j} \in A_{i_j}$.

$$b(a_{i_0} \otimes \dots \otimes a_{i_p}) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k a_{i_0} \otimes \dots \otimes a_{i_k} a_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes a_{i_p}$$
$$+ (-1)^{p + i_p(i_0 + \dots + i_{p-1})} a_{i_p} a_{i_0} \otimes \dots \otimes a_{i_{p-1}}$$

Proposition et Définition 2.1 $(C_{p,q}(A), d, b)$ *est un complexe bigradué appelé complexe de Hochschild bigradué. L'homologie du complexe total associé* $(C_* = \oplus_n C_n, d + b)$ *(où* $C_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$*) est isomorphe à l'homologie de Hochschild de* (A, d) .

Soit $N : C_{p,q} \to C_{p,q}$ défini par $N = \sum_{k+1}^{p} ((-1)^p \tau_{p+1})^k$, où $\tau_{p+1}(a_{i_0} \otimes a_{i_1} \dots \otimes a_{i_p}) = (-1)^{i_p(i_0 + \dots + i_{p-1})} a_{i_p} \otimes a_{i_0} \dots \otimes a_{p-1}$. Soit $s : C_{p,q} \to C_{p+1,q}$ définie par $s(a_0 \otimes \dots \otimes a_p) = 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_p$. Posons $B : C_{p,q} \to C_{p+1,q}$, $B = (\mathrm{Id} - (-1)^{p+1} \tau_{p+2}) \circ s \circ N$.

On vérifie que $B^2 = Bb + bB = Bd + dB = 0$. On peut former le bicomplexe :

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "b+d"] & \vdots \arrow[d, "b+d"] & \vdots \arrow[d, "b+d"] \\
\cdots & \mathcal{C}_2 \arrow[l] \arrow[d, "b+d"] & \mathcal{C}_1 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b+d"] & \mathcal{C}_0 \arrow[l, "B"'] \\
\cdots & \mathcal{C}_1 \arrow[l] \arrow[d, "b+d"] & \mathcal{C}_0 \arrow[l, "B"'] & \\
 & \mathcal{C}_0 & &
\end{tikzcd}
$$

dont le complexe total sera noté $k[u]\otimes_B \mathcal{C}$, ([K]), où $k[u]$ est l'algèbre de polynômes à un générateur de degré 2.

Définition 2.2 *L'homologie du complexe total $k[u]\otimes_B \mathcal{C}$ associé au complexe de Hochschild bigradué est appelée homologie cyclique de l'algèbre différentielle graduée (A, d) et notée $HC_*(A, d)$.*

Remarque : Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$, on retrouve la définition de [B1] ou [G]. Si $A = (\bigoplus_{n\geq 0} A^n, d)$, $A_0 = k, d$ de degré $+1$, alors $HC_*(A_{-*}, d_{-*})$ est uniquement graduée en degrés négatifs ou nuls et coïncide avec l'homologie cyclique négative $HC^-(A, d)$ introduite par Jones, [J].

Rappelons brièvement la définition de la résolution standard de Hochschild de A comme $(A \otimes A^{op})$-module différentiel, (voir [Mo],§.6). Posons pour $n \geq 0$, $B'_{n,*} = A \otimes (A^{\otimes n}) \otimes A$, et $b' : B'_{n,*} \to B'_{n-1,*}$ est défini par :

$$
\begin{aligned}
&b'(a \otimes (\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n) \otimes a') = a\lambda_1 \otimes \lambda_2 \cdots \otimes \lambda_n \otimes a' \\
&+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a\otimes\lambda_1\otimes\cdots\otimes\lambda_k\lambda_{k+1} \otimes \cdots \otimes \lambda_n \otimes a' + (-1)^n a \otimes \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \otimes \lambda_n a' .
\end{aligned}
$$

Soit $\mathcal{B}'_* = \oplus_n \mathcal{B}'_n$ où $\mathcal{B}'_n = \oplus_{p+q=n} B'_{pq}$ et $\Phi' : \mathcal{B}'_* \to A$ définie par $\Phi'_{|B'_{p,*}} = 0$ si $p \geq 1$, $\Phi'_{|B'_0}(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$ si $\alpha \in A, \beta \in A$; alors $((\mathcal{B}'_*, d + b'), \Phi')$ est une résolution semi-libre de A appelée résolution standard de Hochschild.

Revenons au cas où $(A, d) = (T(V), d)$ et généralisons, au cas différentiel gradué, les résultats de [K] §.3 : considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xrightarrow{b'} & B'_{1,*} = A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{b'} & B'_{0,*} = A\otimes A & \xrightarrow{m} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & \Big\downarrow j' & & \Big\downarrow \mathrm{Id} & & \Big\downarrow \mathrm{Id} & & \\
\longrightarrow & A\otimes \bar V\otimes A & \underset{s}{\overset{\tilde b'}{\rightleftarrows}} & A\otimes A & \underset{\varepsilon}{\overset{m}{\rightleftarrows}} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où la ligne du bas est la résolution $((P, D), \Phi)$ du §.1.

Posons $j' = s \circ b'$, c'est, par définition, un morphisme de $(A \otimes A^{op})$-modules différentiels gradués, qui rend commutatif le diagramme ci-dessous. Il définit un morphisme explicite de la résolution standard de Hochschild vers la résolution définie au §.1. Tensorisons chacune des deux résolutions par $A\otimes_{A\otimes A^{op}}$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{2,*}(A) = A\otimes (A^{\otimes 2}) & \xrightarrow{b} & C_{1,*} = A\otimes A & \xrightarrow{b} & A & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow j & & \Big\downarrow \mathrm{Id} & & \\
0 & \longrightarrow & A\otimes \bar V & \xrightarrow{\tilde b} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le morphisme j n'est rien d'autre que $\mathrm{Id} \otimes_{A\otimes A^{op}} j'$, après avoir identifié $A \otimes_{A\otimes A^{op}} B'_{**}(A)$ au complexe de Hochschild bigradué et $A \otimes_{A\otimes A^{op}} P$ à $E_1 = (A \otimes \bar V, \delta_1) \xrightarrow{\tilde b} E_0 = (A, d)$ où $\tilde b(a \otimes \bar v) = (-1)^{|a|+|\bar v|}\left[av - (-1)^{|a|\cdot|v|}va\right]$ et $\delta_1(a \otimes \bar v) = da \otimes \bar v - S(a, dv)$.

On a donc construit un morphisme $\mathcal{I}$ entre le complexe de Hochschild bigradué $(C_{**}(A), d, b)$ et le complexe défini au théorème 1.5 : on a $\mathcal{I}(x) = 0$ si $x \in C_{p,*}$ et $p \geq 2$, $\mathcal{I}(x) = j(x)$ si $x \in C_{1,*}$ et $\mathcal{I}(x) = x$ si $x \in C_{0,*} = A$, et il est classique que $\mathcal{I}$ induit un isomorphisme en homologie. On a : $j(a \otimes 1) = 0$ et

$$\begin{aligned}
&j(a \otimes v_1 \cdots v_p) = av_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar v_p \\
&+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{[|v_{i+1}|+\cdots+|v_p|]\cdot[|a|+|v_1|+\cdots+|v_i|]} v_{i+1} \cdots v_p a v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar v_i
\end{aligned}$$

si $a \in A$, $v_i \in V$.

Posons $\beta = j \circ B : A \to A \otimes \bar V$ et $\beta = 0$ sur $A \otimes \bar V$. On a $\beta(1) = 0$

$$\begin{aligned}
&\beta(v_1 \cdots v_p) = v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar v_p \\
&+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{[|v_{i+1}|\cdots+|v_p|][|v_1|+\cdots+|v_i|]} v_{i+1} \cdots v_p v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar v_i
\end{aligned}$$

Lemme 2.3 *L'application $\mathcal{I}$ de $(C_{**}(A), b, d, B)$ sur $(E_{1,*} = (A \otimes \bar V, \delta_1) \xrightarrow{\tilde b} E_{0,*} = (A, d), \beta)$ est un morphisme de complexes bigradués qui commute aux opérateurs B et β et qui induit un isomorphisme entre les homologies cycliques correspondantes. On a :*

$$HC_*(A, d) = H_*(k[u] \otimes_\beta (A \oplus A \otimes \bar V, \delta))$$

■ Démonstration identique à celle du lemme 3 de [K]. ■

On déduit du lemme 2.3, le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Soit $(A,d) = (T(V),d)$ une algèbre différentielle graduée libre sur un corps commutatif k telle que ou bien $V = \oplus_{n\geq 0} V_n$, ou bien $V = \oplus_{n\leq -1} V_n$. Soit $(A \oplus (A \otimes \bar{V}), \delta)$ le complexe défini au théorème 1.5. Alors l'homologie cyclique de (A,d) est isomorphe à l'homologie du complexe $(k[u] \otimes (A \oplus A \otimes \bar{V}), D)$ où $|u| = 2$, $D = 0$ sur $k[u]$, $D = \delta$ sur $A \oplus (A \otimes \bar{V})$, $D(u^n \otimes (a \otimes \bar{v})) = u^n \otimes \delta(a \otimes \bar{v})$ si $n \geq 1$,*

$$D(u^n \otimes a) = u^n \otimes da + u^{n-1} \otimes (v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p$$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{[|v_{i+1}|+\cdots+|v_p|][|v_1|+\cdots+|v_i|]} v_{i+1} \cdots v_p v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i)$$

si $a = v_1 \cdots v_p$, et $n \geq 1$.

Rappelons que, si $V = \oplus_p V_p$ est un espace vectoriel gradué, alors pour tout $m \geq 1$, $V^{\otimes m}$ est un espace vectoriel gradué, $V^{\otimes m} = \oplus_p (V^{\otimes m})_p$, et les groupes d'homologie $H_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, V^{\otimes m})$ où $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ agit sur $V^{\otimes m}$ via τ_m , sont des k-espaces vectoriels gradués; on a $H_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, V^{\otimes m}) = \oplus_p H_{n,p}(m)$ où $H_{n,p}(m) = H_{n,p}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, V^{\otimes m})$ est le $n^{\text{ième}}$groupe d'homologie de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ agissant sur $(V^{\otimes m})_p$ via τ_m . On peut alors énoncer :

Théorème 2.5. *Soit $A = T(V)$ une algèbre tensorielle graduée sur un corps commutatif quelconque k. Alors l'homologie cyclique réduite $H\tilde{C}_*(A,0) = HC_*(T(V),0)/HC_*(k)$ est donnée par :*

$$H\tilde{C}_n(T(V),0) = \bigoplus_{m\geq 1} \bigoplus_{p+q=n} H_{p,q}(m) .$$

■ Dans le cas particulier où la différentielle est nulle, le complexe défini au théorème 2.4 se décompose ainsi : $k[u] \otimes (A \oplus A \otimes \bar{V}) = k[u] \oplus \mathcal{F}^0_* \oplus \mathcal{F}^1_*$ où $\mathcal{F}^0_* = k[u] \otimes T^+(V)$, $\mathcal{F}^1_* = k[u] \otimes T(V) \otimes \bar{V}$, $D = 0$ sur $T^+(V)$, $D(u^n \otimes v_1 \cdots v_m) = u^{n-1} \beta(v_1 \cdots v_m)$ si $n \geq 1$ et $m \geq 1$, $D(u^n \otimes a \otimes \bar{v}) = u^n (-1)^{|a|} \times (av - (-1)^{|v||a|} va)$ si $n \geq 0$, $a \in A$, $v \in V$. On a $D(\mathcal{F}^0_*) \subset \mathcal{F}^1_*$ et $D(\mathcal{F}^1_*) \subset \mathcal{F}^0_*$. Reprenons les notations introduites dans la remarque 1.6, on a : $D(u^n \otimes \alpha) = u^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_0 \tau^i_m(\alpha)$ si $\alpha \in V^{\otimes m}$ et $D(u^n \otimes \alpha \otimes \bar{v}) = (-1)^{|\alpha|} u^n (Id - \tau_{m+1}) \circ \sigma^{-1}(\alpha \otimes \bar{v})$ si $\alpha \in V^{\otimes m}$.

La formule du théorème 2.5 résulte du calcul classique des groupes d'homologie d'un G-module lorsque G est le groupe cyclique $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, [Mc]. ■

Corollaire 2.6 *Soit $A = T(V)$ une algèbre tensorielle graduée sur un corps commutatif de caractéristique 0 , alors l'homologie cyclique réduite $H\tilde{C}_*(T(V),0)$ est isomorphe $T^+(V)/[T(V),T(V)]$ où $[T(V),T(V)]$ est le sous-espace engendré par les commutateurs gradués.*

■ Si le corps est de caractéristique 0 , les groupes d'homologie de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ agissant sur $V^{\otimes m}$ sont nuls en degrés homologiques strictement positifs, d'où le corollaire à partir du théorème. Ce résultat figurait déjà dans [BF]. ■

Remarque. Si $A = T(V)$ est graduée uniquement en degré 0 , alors les groupes d'homologie $H_{n,p}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, V^{\otimes m})$ sont nuls si $p > 0$, et le théorème 2.5 redonne la proposition 5.4 de [LQ].

§.3. Homologie de l'espace des lacets libres sur un espace topologique

Le point de départ de cette étude est le résultat de Burghelea-Fiedorowicz [BF] et de Goodwillie [G] qui dit :

Théorème 3.0. *Soit X un espace connexe par arcs, pointé, et k un anneau commutatif, alors il existe des isomorphismes de k-modules gradués :*

(1) $\quad HH_*(C_*(\Omega X), k) \simeq H_*(X^{S^1}, k)$

(2) $\quad HC_*(C_*(\Omega X), k) \simeq H_*^{S^1}(X^{S^1}, k)$

Rappelons que X^{S^1} est l'espace des lacets libres sur X muni de la topologie compacte ouverte, et que $C_*(\Omega X, k)$ est la k-ADG des chaînes singulières sur l'espace des lacets de Moore de X . Enfin $H_*^{S^1}(X^{S^1}, k)$ désigne l'homologie équivariante de l'espace des lacets libres sur lequel le groupe S^1 agit par rotation des lacets; par définition, $H_*^{S^1}(X^{S^1}, k)$ est l'homologie, à coefficients dans k , de l'espace de Borel associé à cette action et noté $X^{S^1} \times_{S^1} ES^1$.

Dans toute la suite, on supposera que k est un corps commutatif et X est simplement connexe. Rappelons le résultat de Adams-Hilton [A-H], il existe une k-ADG libre $(\mathcal{A}_X = T(W), d_X)$ et un morphisme $\mathcal{O}_X : \mathcal{A}_X \to C_*(\Omega X)$ qui induit un isomorphisme en homologie, de plus $W_p \simeq H_{p+1}(X, k)$. Le calcul de l'homologie (resp. équivariante) de X^{S^1} se ramène donc au calcul de l'homologie de Hochschild (resp. cyclique) de l'ADG libre $(\mathcal{A}_X, d_X)$. Le point de vue dual de celui de [BF] et [G] consiste à considérer la k-ADG $C^*(X, k)$ des cochaînes singulières de X et à regarder son homologie de Hochschild (resp. cyclique). Dans [HV], Halperin et l'auteur montrent que $HH_*(C_*(\Omega X), k)$ et $HH^*(C^*(X, k))$ sont des espaces vectoriels duaux, et donc, d'après le théorème 3.0, l'homologie de Hochschild de $(C^*(X, k))$ est isomorphie à la cohomologie de X^{S^1}. Dans [J], Jones démontre que l'homologie cyclique négative HC^-_{-*} de $C^*(X, k)$ est isomorphe à la cohomologie équivariante de X^{S^1} , donc l'homologie cyclique de $C^*(X, k)$ définie au §.2 est isomorphe à la cohomologie équivariante de X^{S^1} .

La moralité de cette étude est que le calcul de l'homologie ou de la cohomologie (resp. équivariante) de X^{S^1} se ramène au calcul de l'homologie de Hochschild (resp. cyclique) de $C_*(\Omega X, k)$ ou de $C^*(X, k)$. D'après un résultat classique, (théorème I, [B1]), on peut remplacer $C_*(\Omega X, k)$ par son modèle de Adams-Hilton, ou la cobar construction de Adams [A], et $C^*(X, k)$ par un modèle libre dans la catégorie k-ADG. Alors les théorèmes 1.5 et 2.4 fournissent des complexes calculant l'homologie et l'homologie équivariante de l'espace des lacets libres.

Soit X un espace simplement connexe tel que $H_*(\Omega X, k)$ soit une algèbre tensorielle graduée $T(V)$, pour le produit induit par la composition des lacets, alors nécessairement V_p est isomorphe à $H_{p+1}(X, k)$ pour tout $p \geq 1$. Les théorèmes 1.7 et 2.5 s'énoncent ainsi :

Théorème 3.1. *Soit X un espace simplement connexe et k un corps commutatif tel que $H_*(\Omega X, k)$ soit isomorphe à une algèbre tensorielle graduée. Posons $V_* = H_{*+1}(X, k)$. Alors pour tout $n \geq 0$*

(1) $H_n(X^{S^1}, k) = HH_n(C_*(\Omega X, k))$ est la somme directe de $\oplus_{m \geq 0} V^{\otimes m}/(\mathrm{Id} - \tau_m)$ et $\oplus_{m \geq 1} \overline{\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \tau_m)}$ où τ_m est la permutation cyclique agissant sur $V^{\otimes m}$.

(2) $H_n^{S^1}(X^{S^1}, k)/H_n(BS^1, k) = H\tilde{C}_n(C_*(\Omega X), k)$ est la somme directe

$$\bigoplus_{m \geq 1} \oplus_{i+j=n} H_{i,j}(m)$$

où $H_{i,j}(m)$ est la composante de degré j du $i^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ agissant sur $V^{\otimes m}$

Remarque. Le calcul de l'homologie cyclique des sphères est trivial à partir du résultat ci-dessus. Plus généralement, le théorème 3.1 permet de calculer l'homologie (resp. l'homologie équivariante) de l'espace des lacets libres sur n'importe quel espace simplement connexe de L-S-catégorie 1 , (L-S signifiant Lusternik-Schnirelman), comme le font remarquer les auteurs de [FHT2] dans l'introduction de leur article. Le premier exemple intéressant d'application des théorèmes 1.5 et 2.4 est l'espace $X = \mathbf{C}P^2$, en caractéristique $p > 2$. En effet, le modèle de Adams-Hilton est $(\mathcal{A}_X, d_X) = T(e_1, e_3)$ avec $|e_1| = 1$, $|e_3| = 3$, $de_1 = 0$, $de_3 = 2e_1^2$. On calcule d'abord $H_*(\mathcal{A}_X, d_X) = H_*(\Omega X)$: on montre que $c = e_3 e_1 + e_1 e_3$ est un cycle et n'est pas un bord, ainsi que toutes les puissances de c; de plus $e_1 c^p - c^p e_1$ est un bord, pour tout $p \geq 0$; donc $H_*(\Omega X)$ contient l'algèbre commutative $k[e_1]/e_1^2 \otimes k[c]$. A l'aide de la suite spectrale de Serre du fibré $\cdots \to \Omega S^5 \to \Omega \mathbf{C}P^2 \to S^1 \to \cdots$ associée à $S^1 \to S^5 \to \mathbf{C}P^2$, on montre que $H_*(\Omega X) = k[e_1]/e_1^2 \otimes k[c]$. On utilise alors le modèle exhibé au théorème 1.5 pour calculer l'homologie de Hochschild de $C_*(\Omega X)$, on vérifie facilement que $\dim H_n((\mathbf{C}P^2)^{S^1}, k) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Bibliographie

[A] ADAMS J.F. - On the cobar construction.*Proc. Nat. Acad. Sci, Vol.42, (1956), p. 409-412.*

[A-H] ADAMS J.F., HILTON P.J. - On the chain algebra of a loop space. *Comment. Math. Helv. n°*20, *(1955), p. 305-330.*

[B1] BURGHELEA D. - Cyclic homology and the K-theory of spaces I. *Proc. Summer Institute on algebraic K-theory, Boulder, Colorado, Contemporary Math. Vol.55, Part I, (1986), p. 89-115.*

[B-F] BURGHELEA D., FIEDOROWICZ Z. - Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces *Topology 25, (1986), 303-317.*

[B-V] BURGHELEA D., VIGUÉ-POIRRIER M. - Cyclic homology of commutatives algebras *Springer Lecture Notes in Math n°*1318, *(1988), p. 51-72.*

[C-C] CARLSSON G.E., COHEN R.L. - The cyclic groups and the free loop space *Comment. Math. Helv. 62, (1987), p. 423-449.*

[F-H-T1] FÉLIX Y., HALPERIN S., THOMAS J.C. - Gorenstein spaces -*Adv. in Math. 71, (1988), p. 92-112.*

[FTH2] FÉLIX Y., HALPERIN S., THOMAS J.C. - Loop space homology of spaces of *LS*-catgegory one and two. *Publ. IRMA Lille, 10, (1987).*

[G] GOODWILLIE T. - Cyclic homology, derivations, and the free loop space. *Topology 24, (1985), p. 187-215.*

[H] HINGSTON N. - An equivariant model for the free loop space of S^n . *Preprint, 1988.*

[H-M-S] HUSEMOLLER D., MOORE J.C., STASHEFF J.D. - Differential homological algebra and homogeneous spaces. *J. Pure Appl. Algebra. 5, (1974), p. 113-185.*

[H-S] HSIANG W.C., STAFFELDT R. - A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces. *Inv. Math. 68, (1982), p. 227-239.*

[H-V] HALPERIN S., VIGUÉ-POIRRIER M. - The homology of the free loop space. *Preprint 1988.*

[J] JONES J.D.S. - Cyclic homology and equivariant homology. *Inv. Math. 87, (1987), p. 403-423.*

[K] KASSEL C. - L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes.*Inv. Math. 91, (1988), p. 221-251.*

[L-Q] LODAY J.L., QUILLEN D. - Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. *Comment. Math. Helv. 59, (1984), p. 565-591.*

[Mc] MacLANE S. - Homology, *Grundlehren 114, Springer-Verlag, 1967.*

[Mo] MOORE J.C. - Algèbre homologique et homologie des espaces classifiants. *Séminaire Cartan 1959/1960, exposé n°7.*

[S-V] SULLIVAN D.,VIGUÉ-POIRRIER M. - The homology theory of the closed geodesic problem. *J. Differential Geom. 11, (1976), p. 633-644.*

VIGUÉ-POIRRIER M.
37, Parc d'Ardenay
91120 PALAISEAU - France