MICHEL BROUÉ

Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées

Astérisque, tome 181-182 (1990), p. 61-92

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__181-182__61_0>

Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées

MICHEL BROUÉ
Janvier 1989

Sommaire.

L'un des mystères de la théorie des représentations modulaires des groupes finis (représentations en caractéristique ℓ ou sur un anneau ℓ-adique) est la relation de ces représentations avec la "structure ℓ-locale" du groupe. Particulièrement frappante à cet égard est la conjecture d'Alperin ([Al]), qui énonce que l'on peut, par exemple, calculer le nombre de classes de conjugaison de ℓ'- éléments d'un groupe en fonction de sa structure ℓ-locale.

Il est bien connu que la structure ℓ-locale détermine l'homologie du groupe sur $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Notre conviction est que la structure ℓ-locale détermine beaucoup plus que l'homologie à coefficients triviaux. Le présent mémoire vient à l'appui de cette conviction. Nous pensons en effet y convaincre le lecteur que la structure locale du groupe, ou, plus

Je remercie Michel Enguehard, Paul Fong, Morton Harris, Jean Michel, Lluis Puig, Jean-Pierre Serre, pour l'intérêt qu'ils ont apporté à ce travail, leurs suggestions ou leur aide.

précisément, la structure locale d'un bloc de l'algèbre de groupe sur un anneau ℓ-adique, a une profonde influence sur la catégorie dérivée (bornée) de ce bloc (§6).

En fait, dans cette perspective, nos résultats sont modestes. Nous examinons en réalité l'"ombre" de ces objets, en ce sens que nous nous concentrons presque exclusivement sur ce qui se passe au premier niveau, celui des caractères . Une "isométrie parfaite" entre deux groupes finis doit être comprise comme la correspondance induite au niveau des caractères par une équivalence de catégories dérivées, ce que nous expliquons au §3. Une "isotypie" entre blocs (§4 et 5) doit être la conséquence, au niveau des caractères , d'une équivalence plus profonde entre les catégories dérivées correspondantes.

Cette approche est largement inspirée par les méthodes et les outils (induction "généralisée") introduits par Deligne et Lusztig pour l'étude des caractères des groupes réductifs finis ([De–Lu.1]). Il est rassurant (et réjouissant) de constater que la notion d'isotypie entre blocs que nous avons dégagée se trouve coïncider presque parfaitement avec la notion de types de blocs introduite par R. Brauer ([Bra]) il y a 18 ans, et à partir d'un point de vue apparemment éloigné du nôtre.

1. Isométries parfaites

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique zéro, et dont le corps résiduel k est de caractéristique $\ell \neq 0$. Soit K son corps des fractions; on le suppose "assez gros" pour tous les groupes finis que nous considérons.

Soit G un groupe fini. Dans toute la suite, on désigne par e un idempotent du centre $Z\mathcal{O}G$ de l'algèbre de groupe $\mathcal{O}G$. Par abus de notation, on désignera encore par e l'idempotent de $Z\mathrm{k}G$ image de e par la surjection canonique $\mathcal{O}G \to \mathrm{k}G$.

On note ${}_{\mathrm{K}Ge}\mathbf{Mod}$ la catégorie des $\mathrm{K}Ge$-modules à gauche et de type fini. Le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne ${}_{\mathrm{K}Ge}\mathbf{Mod}$ est isomorphe au groupe des caractères de G sur K associés à e, que l'on note $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$.

Soit H un second groupe fini, et soit f un idempotent de $Z\mathcal{O}H$. On désigne par $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$ le groupe des caractères des $\mathrm{K}Ge \otimes (\mathrm{K}Hf)^{\circ}$-modules (on note $(\mathrm{K}Hf)^{\circ}$ l'algèbre opposée à $\mathrm{K}Hf$), *i.e.,* le $\mathbb{Z}$-module engendré par les caractères des $(\mathrm{K}Ge, \mathrm{K}Hf)$-bimodules.

A tout élément μ de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$ sont associés deux homomorphismes

$$I_\mu : \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e) \qquad \text{et} \qquad R_\mu : \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e) \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$$

adjoints l'un de l'autre pour les produits scalaires usuels. Ces homomorphismes ("induction" et "restriction" généralisées) sont définis par les formules :

$$(\mathcal{F}) \qquad I_\mu(\beta)(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} \mu(g,h^{-1})\beta(h) \quad \text{et} \quad R_\mu(\alpha)(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mu(g^{-1},h)\alpha(g)$$

pour α (resp. β) fonction centrale sur G (resp. H) à valeurs dans K.

Remarquons que la dualité sur K induit un isomorphisme de groupes $\mu \mapsto \mu^*$ de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$ sur $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}((H,f),(G,e))$ et que $R_\mu = I_{\mu^*}$.

Enfin tout homomorphisme de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$ dans $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$ est de la forme I_μ pour un élément μ de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$.

1.1. DÉFINITION. *On dit que le caractère μ est parfait s'il satisfait aux deux conditions suivantes :*

(1) *Pour tout $g \in G$ et $h \in H$, on a $(\mu(g,h)/|C_G(g)|) \in \mathcal{O}$ et $(\mu(g,h)/|C_H(h)|) \in \mathcal{O}$,*

(2) *Si $\mu(g,h) \neq 0$, alors g est d'ordre premier à ℓ si et seulement si h est d'ordre premier à ℓ.*

Le résultat suivant est un critère commode pour établir la perfection d'un caractère μ.

1.2. PROPOSITION. *Supposons que μ soit combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères de modules de la forme $K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} M$ où M est un $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}H)$–bimodule dont les restrictions à $\mathcal{O}G$ et à $\mathcal{O}H$ sont des modules projectifs. Alors μ est parfait.*

DÉMONSTRATION: Supposons que μ est le caractère d'un $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}H)$–bimodule M tel que M soit un $\mathcal{O}G$–module projectif.

D'après le critère de Higman (cf. par exemple [Se], 14.4), il existe $u \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ tel que $\mathrm{Tr}_1^G(u) = id_M$ (on note $\mathrm{Tr}_1^G(u) = \sum_{g \in G} gug^{-1}$). Soit $z \in Z\mathcal{O}G$. On a

$$\mu(z,h) = tr_{M/\mathcal{O}}(z\,\mathrm{Tr}_1^G(u)h) = tr_{M/\mathcal{O}}(\mathrm{Tr}_1^G(zuh)) = |G| tr_{M/\mathcal{O}}(zuh),$$

et par conséquent $\mu(z,h)/|G| \in \mathcal{O}$. On applique ce résultat en prenant pour z la somme des éléments de la classe de conjugaison de g dans G, et on obtient $\mu(g,h)/|C_G(g)| \in \mathcal{O}$.

Soit maintenant $h \in H$ d'ordre premier à ℓ. La restriction de M à $G \times < h >$ est un module projectif. Son caractère s'annule sur les éléments ℓ–singuliers (cf. par exemple [Se], 16.4), et par conséquent si $\mu(g,h) \neq 0$, l'élément g est d'ordre premier à ℓ.

La proposition 1.2 est immédiate à partir de ce qui précède. ∎

Exemples.

Supposons que H est un sous–groupe de G. Soit μ le caractère de KG, considéré comme KG–module à gauche et KH–module à droite par multiplication. Alors μ est parfait, $I_\mu = \mathrm{Ind}_H^G$ et $R_\mu = \mathrm{Res}_H^G$.

Plus généralement, soit U un ℓ'–sous–groupe de G, et soit $H = N_G(U)/U$. Soit M le $\mathcal{O}$–module de base G/U. Il est clair que M est un $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}H)$–bimodule, dont les restrictions à $\mathcal{O}G$ et $\mathcal{O}H$ sont des modules projectifs. Le caractère μ associé est donc parfait. Les applications I_μ et R_μ correspondantes sont parfois appelées "induction et restriction de Harish–Chandra".

Soit $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne ${}_{\mathrm{k}Ge}\mathbf{Mod}$ (ce groupe est isomorphe au $\mathbb{Z}$–module engendré par les caractères modulaires des kGe–modules). Soit $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e)$ le groupe de Grothendieck de la sous–catégorie pleine des kGe–modules projectifs, sous–groupe de $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$. On identifie $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$ à un sous-groupe de l'espace vectoriel des fonctions centrales sur G à valeurs dans K. On rappelle (cf. [Se], III) que le produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions centrales sur G induit une dualité entre les $\mathbb{Z}$–modules $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e)$.

1.3. PROPOSITION. *Si le caractère μ est parfait, les formules $(\mathcal{F})$ définissent des applications linéaires encore notées*

$$I_\mu\colon \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(H,f) \to \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e) \text{ et } R_\mu\colon \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e) \to \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f)$$

, adjointes l'une de l'autre – et, dualement, des applications adjointes

$$R_\mu\colon \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e) \to \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(H,f) \text{ et } I_\mu\colon \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f) \to \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e) \quad .$$

DÉMONSTRATION: Le groupe $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f)$ s'identifie au sous–groupe de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$ formé des caractères qui s'annulent sur les éléments d'ordre divisible par ℓ (cf. par exemple [Se], chap.16, théorème 36). Il résulte alors des formules $(\mathcal{F})$ et de la deuxième assertion de la définition 1.1 que I_μ envoie $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f)$ dans $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e)$. Par adjonction, R_μ envoie $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$ dans $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(H,f)$. ∎

Remarque. On voit ainsi que si μ est parfait, il définit deux morphismes adjoints l'un de l'autre (I_μ et R_μ) entre les triangles (cf. [Se], III)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e) & \xrightarrow{d_G} & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e) \\ \uparrow {}^t d_G & & \uparrow c_G \\ \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e) & = & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f) & \xrightarrow{d_H} & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(H,f) \\ \uparrow {}^t d_H & & \uparrow c_H \\ \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f) & = & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f) \end{array}$$

1.4. DÉFINITION. *Une isométrie de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$ sur $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$ est dite parfaite si elle est de la forme I_μ où $\mu \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$ est parfait.*

1.5. THÉORÈME. *Soit $\mu \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$ définissant une isométrie parfaite entre $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$. Alors*

(1) *La bijection entre idempotents primitifs de $ZKHf$ et $ZKGe$ définie par I_μ induit un isomorphisme d'algèbres entre $Z\mathcal{O}Hf$ et $Z\mathcal{O}Ge$.*

(2) *L'application I_μ induit une bijection entre les blocs de H associés à f et les blocs de G associés à e, qui conserve le défaut, le nombre de caractères irréductibles ordinaires, le nombre de caractères irréductibles modulaires, la hauteur des caractères irréductibles ordinaires, les invariants de similitude de la matrice de Cartan.*

DÉMONSTRATION:

(1) Soit I_μ^o l'application de $ZKHf$ dans $ZKGe$ définie par

$$I_\mu^o(y) = \sum_{g\in G} \Big(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} \mu(g^{-1},h)y(h)\Big)g$$

pour $y = \sum_{h\in H} y(h)h \in ZKHf$. On définit de manière analogue $R_\mu^o\colon ZKGe \longrightarrow ZKHf$. On vérifie, en utilisant le fait que μ est parfait, que I_μ^o et R_μ^o induisent des isomorphismes $\mathcal{O}$–linéaires réciproques entre $Z\mathcal{O}Hf$ et $Z\mathcal{O}Ge$ (on peut aussi se reporter aux notations et remarques du 4A ci–dessous). De plus, la bijection entre idempotents primitifs de $ZKHf$ et $ZKGe$ induite par I_μ s'étend linéairement en un isomorphisme d'algèbres de $ZKHf$ sur $ZKGe$, donné par la formule $y \mapsto I_\mu^o(yR_\mu^o(e))$. En effet, soit ζ un caractère irréductible de KHf, et soit $e_H(\zeta)$ l'idempotent primitif de $ZKHf$ qui lui correspond. La fonction $I(\zeta)$ est, au signe près, un caractère irréductible de KGe, que l'on note χ. Soit $e_G(\chi)$ l'idempotent primitif de $ZKGe$ qui lui correspond. Puisque $e_H(\zeta) = \frac{\zeta(1)}{|H|}\sum_{h\in H}\zeta(h^{-1})h$ et $e_G(\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g$, on voit que

$$I_\mu^o(e_H(\zeta)) = \frac{|G|/\chi(1)}{|H|/\zeta(1)} e_G(\chi).$$

On en déduit aisément que $I_\mu^o(e_H(\zeta)R_\mu^o(e)) = e_G(\chi)$. On voit donc bien que l'isomorphisme d'algèbres de $ZKHf$ sur $ZKGe$ induit par I est en fait "défini sur $\mathcal{O}$" et induit donc un isomorphisme de $Z\mathcal{O}Hf$ sur $Z\mathcal{O}Ge$.

(2) La conservation du nombre de caractères modulaires irréductibles et des invariants de similitude de la matrice de Cartan résulte de la proposition 1.3 ci–dessus.

L'assertion concernant le défaut et les hauteurs se déduit du lemme plus précis suivant.

1.6. Lemme. *Si ζ est un caractère irréductible de KHf et si on pose $\chi_\zeta = I_\mu(\zeta)$, alors $\frac{|G|/\chi_\zeta(1)}{|H|/\zeta(1)}$ est un entier ℓ–adique inversible, dont la valeur modulo ℓ ne dépend que du bloc qui contient ζ.*

Démonstration: D'après ce qui précède, on voit que

$$I_\mu^o(f) = \sum_{\zeta\in \mathrm{Irr}_K(H,f)} \frac{|G|/\chi_\zeta(1)}{|H|/\zeta(1)} e_G(\chi_\zeta) \quad .$$

L'assertion annoncée résultera donc du fait que $I_\mu^o(f)$ est un élément inversible de $Z\mathcal{O}Ge$.

Or on sait (*cf.* ci–dessus) que $\rho_\mu\colon x \mapsto R_\mu^o(I_\mu^o(f)x)$ est un isomorphisme d'algèbres de $Z\mathcal{O}Hf$ sur $Z\mathcal{O}Ge$. Puisque $I_\mu^o(f)x = R_\mu^{o\,-1}(\rho_\mu(x))$, on voit que $I_\mu^o(f)$ est bien inversible. ∎

Le défaut de e est par définition l'entier $d(e)$ tel que

$$\ell^{d(e)} = \text{p.p.c.m.}\{(|G|/\chi(1))_\ell ; \chi \in \mathrm{Irr}_K(G,e)\},$$

et la hauteur de χ est l'entier $h(\chi)$ tel que $(|G|/\chi(1))_\ell = \ell^{d(e)-h(\chi)}$. On voit donc bien que le lemme précédent achève la démonstration du théorème 1.5.

Remarque. Dans le cas (*cf.* appendice) où H est le normalisateur d'un ℓ–sous–groupe de Sylow de G et où e et f sont les blocs principaux respectifs de G et H, le lemme 1.6 implique que $\chi_\zeta(1) \equiv \zeta(1) \mod \ell$.

2. Premiers exemples et applications

2A. Décomposition de Jordan des blocs des groupes réductifs finis.

Induction de Deligne–Lusztig.

Soit p un nombre premier différent de ℓ et soit q une puissance de p. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On suppose que le centre de $\mathbf{G}$ est connexe. Soit $\mathbf{G}^*$ un groupe dual de $\mathbf{G}$ et soit F^* une isogénie duale de F (cf. par exemple [Ca, 4.3]). Soient $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, de radical $\mathbf{U}$ et $\mathbf{L}$ un complément de Levi F-stable. Soit $\mathbf{X_P}$ la variété de Deligne-Lusztig définie par $\mathbf{X_P} = \{g \in \mathbf{G}/g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\}$. On note G,G^*,L les groupes finis $\mathbf{G}^F$,$\mathbf{G}^{*F^*}$,$\mathbf{L}^F$. Il est clair (cf. [De-Lu.1], [Lu]) que la multiplication à gauche par les éléments de G et la multiplication à droite par les éléments de L définissent une opération de $G \times L$ sur $\mathbf{X_P}$. On note μ l'élément de $\mathcal{R}_K(G,L)$ défini par le bimodule virtuel $\sum_i (-1)^i \mathbf{H}^i_c(\mathbf{X_P}, \mathbb{Q}_\ell)$. Conformément à la tradition, on note $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ l'application I_μ.

2.1. Proposition. *Le caractère μ est parfait.*

Pour démontrer la proposition 2.1, nous utilisons un lemme un peu plus général.

Soit H un groupe fini, et soit $\mathcal{S}$ un ensemble de sous-groupes de H. On dit qu'un $\mathbb{Z}_\ell H$-module V est *un module de ℓ-permutation $\mathcal{S}$-projectif* s'il est facteur direct d'un module de permutation $\mathbb{Z}_\ell(H/S)$ où S est un sous-groupe d'un élément de $\mathcal{S}$.

Soit $\mathbf{X}$ un schéma séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle $p \neq \ell$. Si le groupe fini H opère sur $\mathbf{X}$, on désigne par $\Lambda_{\mathbf{X}}$ le caractère virtuel de H défini par

$$\Lambda_{\mathbf{X}} = \sum_i (-1)^i \mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

et on note $\mathcal{S}t_H(\mathbf{X})$ l'ensemble des sous-groupes de H qui sont les stabilisateurs d'éléments de $\mathbf{X}$.

2.2. Lemme. *Le caractère $\Lambda_{\mathbf{X}}$ est combinaison linéaire de caractères de modules de ℓ-permutation $\mathcal{S}t_H(\mathbf{X})$-projectifs.*

Démonstration du lemme: Pour $S \in \mathcal{S}t_H(\mathbf{X})$ soit $\mathbf{X}(S)$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{X}$ de stabilisateur S. Alors la famille $(\mathbf{X}(S)_{\{S \in \mathcal{S}t_H(\mathbf{X})\}}$ définit une stratification de $\mathbf{X}$, d'où on déduit (additivité de la cohomologie ℓ-adique à support compact dans une stratification) que

$$\Lambda_{\mathbf{X}} = \sum_{S \in \mathcal{S}t_H(\mathbf{X})/H} \mathrm{Ind}_H^{N_H(S)}(\Lambda_{\mathbf{X}(S)}).$$

Le groupe $N_H(S)/S$ opère librement sur $\mathbf{X}(S)$. Il en résulte (cf. par exemple [De-Lu.1], prop.3.5) que $\Lambda_{\mathbf{X}(S)}$ est combinaison linéaire de caractères de $\mathbb{Z}_\ell(N_H(S)/S)$-modules projectifs, lesquels sont combinaison linéaire de facteurs directs du module $\mathbb{Z}_\ell(N_H(S)/S)$. ∎

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1: Reprenons les notations de la proposition 2.1. On pose $\mathbf{X} = \mathbf{X_P}$ et $H = G \times L$. Il est facile de vérifier que pour $v \in G$, le stabilisateur de v dans $G \times L$ est

$$C_{G\times L}(v) = \{({}^v z, z) | z \in C_L(v^{-1}F(v))\}.$$

On voit en particulier que si $S \in \mathcal{S}t_{G\times L}(\mathbf{X_P})$, on a $S \cap (G \times \{1\}) = \{1\}$ et $S \cap (\{1\} \times L) = \{1\}$, et donc que tout $\mathbf{Z}_\ell(G\times L)$–module de ℓ–permutation $\mathcal{S}t_{G\times L}(\mathbf{X_P})$–projectif est projectif comme $\mathbf{Z}_\ell G$–module et comme $\mathbf{Z}_\ell L$–module. La proposition 2.1 résulte alors du lemme 2.2 et de la proposition 1.2. ∎

Remarque. Soit $v \in \mathbf{X_P}$; posons $u = u^{-1}F(v)$. D'après [Sp–St], chap.III, 3.15, si le nombre premier ℓ est *bon* pour $\mathbf{G}$, on voit que $u \in C_{\mathbf{G}}(C_L(u))^\circ$. Par le théorème de Lang, il existe $c \in C_{\mathbf{G}}(C_L(u))^\circ$ tel que $cF(c)^{-1} = u$. On voit alors que $vc \in G = \mathbf{G}^F$, et que $C_{G\times L}(v) =^{(vc,1)} \Delta_{G\times L}(C_L(u))$, où $\Delta_{G\times L}$ désigne le plongement diagonal de L dans $G\times L$. En particulier, ceci prouve que $\Lambda_{\mathbf{X_P}}$ est combinaison linéaire de caractères de permutation qui sont $\Delta_{G\times L}(L)$–projectifs.

Décomposition de Jordan des blocs.

On suppose choisis un isomorphisme entre le groupe multiplicatif $\bar{\mathbf{F}}_q^\times$ d'une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$ et $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{p'}$, et un plongement de $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{p'}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$. Soit s un ℓ'–élément de G^* pour lequel on suppose que $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un sous–groupe de Levi de $\mathbf{G}^*$. Soit alors $\mathbf{G}(s)$ un sous–groupe de Levi F–stable de $\mathbf{G}$ en dualité avec $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ (on sait que le couple $(\mathbf{G}(s), \textit{dualité})$ est unique à conjugaison près par G). On pose $G(s) = \mathbf{G}(s)^F$ et on note $\hat{s}\colon G(s) \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ le caractère linéaire défini grâce à tous les choix précédents.

Soit e_s^G l'idempotent de $Z\mathcal{O}G$ correspondant à $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$ (cf. [Br–Mi]), ensemble de caractères irréductibles de G correspondant à la ℓ–section de s dans G^*. Soit $e_1^{G(s)}$ l'idempotent de $Z\mathcal{O}G(s)$ correspondant à $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$. Le résultat suivant est une consé-quence immédiate de [Lu], 8.Theorem, et de la proposition 2.1 ci–dessus; il a été annoncé dans [Br.3].

2.3. THÉORÈME. *La bijection de $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ sur $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$ définie par $\lambda \mapsto R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(s)}(\hat{s}\lambda)$ est une isométrie parfaite de $\mathcal{R}_K(G(s), e_1^{G(s)})$ sur $\mathcal{R}_K(G, e_s^G)$. En particulier, elle induit une bijection entre blocs, et définit un isomorphisme d'algèbres de $Z\mathcal{O}G(s)e_1^{G(s)}$ sur $Z\mathcal{O}Ge_s^G$.*

Les blocs contenus dans $\mathcal{E}_\ell(G(s),1)$ sont appelés les *blocs unipotents* de $G(s)$. On voit donc que l'application $\lambda \mapsto R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(s)}(\hat{s}\lambda)$ envoie les blocs unipotents de $G(s)$ sur les blocs de G contenus dans $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$.

Remarque. Il est en fait probable, comme l'a fait remarquer G.Hiß, que l'isométrie $\lambda \mapsto R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(s)}(\hat{s}\lambda)$ provient d'une équivalence de Morita entre $\mathcal{O}G(s)e_1^{G(s)}$ et $\mathcal{O}Ge_s^G$. L'auteur espère que ce résultat (qu'il a déjà établi dans le cas où $\mathbf{G}(s)$ est un tore) fera l'objet d'une publication prochaine.

2B. Sur la dualité entre caractères des groupes réductifs finis.

On conserve les notations qui précèdent. Soient de plus $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{B}$ un sous–groupe de Borel contenant $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{B}$ étant tous deux rationnels sur $\mathbb{F}_q$. On sait que l'ensemble ordonné des sous–groupes paraboliques rationnels de $\mathbf{G}$ qui contiennent $\mathbf{B}$ est isomorphe à l'ensemble, ordonné par inclusion, des parties d'un ensemble fini S : si $I \subset S$, on note $\mathbf{P}_I$ le sous–groupe parabolique correspondant, $\mathbf{U}_I$ son radical unipotent, $\mathbf{L}_I$ son sous–groupe de Levi contenant $\mathbf{T}$. Les groupes finis des points rationnels correspondants sont notés G, P_I, U_I, L_I. La dualité est un automorphisme involutif et isométrique de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G)$ défini (cf. par exemple [Alv], [Br.2], [De-Lu.2]) par

$$D_G = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} R_{L_I}^G \circ {}^*R_{L_I}^G$$

où $R_{L_I}^G$ est l'homomorphisme de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(L_I)$ dans $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G)$ défini par le $(\mathrm{K}G, \mathrm{K}L_I)$–bimodule $\mathrm{K}(G/U_I)$ (induction de Harish–Chandra, cf. 1 ci–dessus) et ${}^*R_{L_I}^G$ est son adjoint. Il est donc clair que D_G est défini par un caractère μ qui satisfait aux hypothèses de la proposition 1.2, puisqu'il est le caractère de $\mathrm{K} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} M$ où

$$M = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \mathcal{O}(G/U_I) \underset{\mathcal{O}L_I}{\otimes} \mathcal{O}(U_I \setminus G).$$

On en déduit :

2.4. THÉORÈME. *La dualité D_G est une isométrie parfaite de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G)$ dans lui-même. En particulier, elle induit une bijection entre blocs, et définit un automorphisme d'algèbres de $Z\mathcal{O}G$.*

Remarque. On doit en fait pouvoir démontrer (cf. [De–Lu.2]) que D_G est induite par une auto–équivalence de catégories triangulées de ${}_{\mathcal{O}G}\mathbf{Deb}$ avec elle-même (cf. 3 ci-dessous).

3. Equivalences de catégories dérivées et isométries parfaites

On note ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ la catégorie dont
- les objets sont les complexes de $\mathcal{O}Ge$–modules projectifs de type fini, bornés à droite et presque partout exacts,
- les morphismes sont les homomorphismes de complexes modulo homotopie.

On sait (cf. par exemple [Gri] ou [Ri.1]) que la catégorie ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ est équivalente à la catégorie notée $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}Ge)$ par Grothendieck et ses élèves.

Grâce aux résultats de Rickard ([Ri.1],[Ri.2]), on peut donner une description complète de ce qu'est une équivalence de catégories triangulées entre ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb}$. Le résultat suivant, dont la démonstration n'utilise pas le théorème principal de Rickard, peut aussi s'en déduire.

3.1. THÉORÈME. *Supposons qu'il existe une équivalence de catégories triangulées entre ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb}$. Alors il existe une isométrie parfaite entre $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e)$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H, f)$.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION: Soit $\mathbf{I}$: ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb} \rightarrow {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ une équivalence, de foncteur inverse $\mathbf{R}$.

1. La catégorie ${}_{\mathrm{K}Ge}\mathbf{Deb}$ est équivalente (en passant à l'homologie $\mathbf{H}$) à la catégorie $({}_{\mathrm{K}Ge}\mathbf{Mod})^{(\mathbb{Z})}$ des $\mathrm{K}Ge$-modules gradués de type fini. Les équivalences $\mathbf{I}$ et $\mathbf{R}$ induisent des équivalences $\mathbf{I}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{R}_{\mathrm{K}}$ entre $({}_{\mathrm{K}Ge}\mathbf{Mod})^{(\mathbb{Z})}$ et $({}_{\mathrm{K}Hf}\mathbf{Mod})^{(\mathbb{Z})}$ de la manière suivante. Soit $M_{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathbf{H}(\mathbf{I}(\mathcal{O}Hf))$. Alors M_{K} est un $(\mathrm{K}Ge, \mathrm{K}Hf)$-bimodule gradué de type fini, et pour tout $Y \in ({}_{\mathrm{K}Hf}\mathbf{Mod})^{(\mathbb{Z})}$, $\mathbf{I}_{\mathrm{K}}(Y)$ est le $\mathrm{K}Ge$-module gradué $M_{\mathrm{K}} \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathrm{K}H}{\otimes}} Y$ associé au $\mathrm{K}Ge$-module bigradué $M_{\mathrm{K}} \underset{\mathrm{K}H}{\otimes} Y$. De même, on a $\mathbf{R}_{\mathrm{K}}(X) = N_K \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathrm{K}G}{\otimes}} X$ avec $N_{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathbf{H}(\mathbf{R}(\mathcal{O}Ge))$ pour tout $X \in ({}_{\mathrm{K}Ge}\mathbf{Mod})^{(\mathbb{Z})}$. Soit μ le caractère de M_{K} (somme alternée des caractères des composantes homogènes). Alors $\mu \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$, le foncteur $\mathbf{I}_{\mathrm{K}}$ induit l'application I_μ au niveau des caractères , et cette application est une isométrie. On voit en particulier que le caractère de N_{K} est l'élément dual $\mu^* \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}((H,f),(G,e))$.

2. Soit $M = \mathbf{I}(\mathcal{O}Hf)$. Alors M est un objet "parfait" (au sens de Grothendieck, [Gr]) de ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$, *i.e.*, isomorphe à un complexe borné de $\mathcal{O}Ge$-modules projectifs de type fini. En effet, les éléments parfaits de ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ sont les objets P tels que, pour tout objet X, $\mathrm{Hom}(P, X[n])$ soit nul pour presque tout n (cf. par exemple [Ri.2]). On en déduit que $\mu(g,h)$ est divisible dans $\mathcal{O}$ par $|C_G(g)|$. Puisque l'objet $\mathbf{R}(\mathcal{O}Ge)$ fournit le caractère μ^*, on voit par un raisonnement analogue que $\mu(g,h)$ est divisible dans $\mathcal{O}$ par $|C_H(h)|$.

3. Le groupe des caractères des complexes parfaits de $\mathcal{O}Hf$-modules est égal au groupe $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f)$, et $\mathrm{K} \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f)$ s'identifie à l'espace $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;\mathrm{K})$ des fonctions centrales sur H nulles sur les éléments d'ordre divisible par ℓ. On déduit alors que la propriété (2) de la définition 1.1 est satisfaite du fait que I_μ et R_μ échangent les groupes $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f)$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e)$ (puisqu'ils échangent les complexes parfaits). ∎

Remarques.

1. Une équivalence de Morita entre ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Mod}$ et ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$ induit évidemment une équivalence de catégories triangulées entre ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$, et par conséquent une isométrie parfaite entre $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$. Dans ce cas, cette isométrie est produite par un "vrai" caractère μ (autrement dit, I_μ envoie un caractère irréductible sur un caractère irréductible).

2. Soit M un objet de ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}_{\mathcal{O}Hf}$ (*i.e.*, ${}_{\mathcal{O}Ge\otimes(\mathcal{O}Hf)^\circ}\mathbf{Deb}$), dont la restriction à $\mathcal{O}Ge$ est un élément parfait de ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$, et dont la restriction à $\mathcal{O}Hf$ est un élément parfait de ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb}$. Alors le caractère de M, élément de $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$, est parfait.

3. On sait (cf. [Gr]) que le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ est $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$. Les complexes parfaits y correspondent à $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e)$. Si X est un objet de ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et Y un objet parfait, la formule

$$< [X], [Y] >_G = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathrm{k}} \mathrm{Hom}(\mathrm{k} \otimes X, (\mathrm{k} \otimes Y)[i])$$

définit le couplage usuel $\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e) \times \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e) \to \mathbf{Z}$. On voit ainsi qu'une équivalence de catégories triangulées entre ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb}$ définit une isométrie

$$(\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e), \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(G,e)) \to (\mathcal{R}_{\mathrm{k}}(H,f), \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(H,f))$$

(ceci résulte également du théorème 3.1 et de la proposition 1.3).

4. Isométries parfaites compatibles à la fusion, types de blocs

4A. Compléments de notations.

Fonctions centrales.

Soit G un groupe fini, et soit e un idempotent de $Z\mathcal{O}G$. On note $\mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K})$ le K–espace vectoriel des fonctions centrales α sur G, à valeurs dans K, et telles que $\alpha(eg) = \alpha(g)$ pour tout g dans G. Soit $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathrm{K})$ le sous–module formé des fonctions qui s'annulent en–dehors de l'ensemble $G_{\ell'}$ des ℓ'–éléments de G. On définit de manière analogue $\mathrm{CF}(G,e;\mathcal{O})$, $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$, etc.

Rappelons que $\mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K})$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$< \alpha, \alpha' >_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \alpha(g)\alpha'(g^{-1}).$$

On appelle fonctions centrales projectives les éléments du $\mathcal{O}$–réseau dual du module $\mathrm{CF}(G,e;\mathcal{O})$ par rapport au produit scalaire $< \cdot,\cdot >_G$, et on note $\mathrm{CF}^{pr}(G,e;\mathcal{O})$ l'ensemble des fonctions centrales projectives. Ainsi, par définition, une fonction π de $\mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K})$ appartient à $\mathrm{CF}^{pr}(G,e;\mathcal{O})$ si et seulement si

$$< \pi, \alpha >_G \in \mathcal{O} \text{ pour tout } \alpha \in \mathrm{CF}(G,e;\mathcal{O}).$$

Il est immédiat de vérifier que cette dernière condition équivaut à

$$\pi(g)/|C_G(g)| \in \mathcal{O} \text{ pour tout } g \in G.$$

Enfin, on pose $\mathrm{CF}_{\ell'}^{pr}(G,e;\mathcal{O}) = \mathrm{CF}^{pr}(G,e;\mathcal{O}) \cap \mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$. Il est clair que le $\mathcal{O}$–module $\mathrm{CF}_{\ell'}^{pr}(G,e;\mathcal{O})$ est le dual de $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$.

Avec les notations précédentes on peut réinterpréter la propriété (1) de la définition d'un caractère parfait (cf. 1 ci–dessus) de la manière suivante.

Si μ est une fonction sur $G \times H$, pour tout $h \in H$ soit $\mu(\cdot,h)$ la fonction centrale sur G prenant la valeur $\mu(g,h)$ en $g \in G$. On voit alors que $\mu(g,h)/|C_G(g)| \in \mathcal{O}$ pour tout $g \in G$ si et seulement si $\mu(\cdot,h)$ est une fonction projective sur G. D'autre part, il est clair, d'après les formules $(\mathcal{F})$ (cf. 1 ci–dessus) que

$$I_\mu(\beta)(g) = < \mu(g,\cdot), \beta >_H \quad \text{et} \quad R_\mu(\alpha)(h) = < \mu(\cdot,h), \alpha >_G$$

pour tous $\alpha \in \mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K})$ et $\beta \in \mathrm{CF}(H,f;\mathrm{K})$. On en déduit

4.1. PROPOSITION. *Le caractère μ est parfait si et seulement si*

(1) *l'application I_μ envoie* $\mathrm{CF}(H,f;\mathcal{O})$ *dans* $\mathrm{CF}(G,e;\mathcal{O})$ *et l'application R_μ envoie* $\mathrm{CF}(G,e;\mathcal{O})$ *dans* $\mathrm{CF}(H,f;\mathcal{O})$,

(2) *l'application I_μ envoie* $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;K)$ *dans* $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;K)$ *et l'application R_μ envoie* $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;K)$ *dans* $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;K)$.

Applications de Décomposition généralisées.

On suppose dorénavant que e est un idempotent primitif dans $Z\mathcal{O}G$ (*i.e.*, que e est un bloc de G).

Soit x un ℓ–élément de G, et soit P le groupe cyclique engendré par x. Soit ε un idempotent primitif de $Z\mathcal{O}C_G(P)$ tel que (P,ε) soit une e–sous–paire de G (cf. [Al-Br]), *i.e.*, tel que "$\varepsilon^G = e$". On appelle e–élément de Brauer toute paire (x,ε) telle que $(<x>,\varepsilon)$ soit une e–sous–paire de G. Enfin on désigne par $E\ell(G,e)$ l'ensemble des e–éléments de Brauer de G.

On définit l'application linéaire

$$d_G^{(x,\varepsilon)}\colon \mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K}) \to \mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P),\varepsilon;\mathrm{K})$$

par la formule

$$d_G^{(x,\varepsilon)}(\alpha)(x') = \alpha(xx'\varepsilon)$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K})$ et $x' \in C_G(P)_{\ell'}$.

Soit $[E\ell(G,e)]$ un système de représentants des orbites de G (qui opère par conjugaison) sur $E\ell(G,e)$. Il est facile de vérifier (cf. [Br.1]) que la famille $(d_G^{(x,\varepsilon)})_{(x,\varepsilon)\in[E\ell(G,e)]}$ définit une isométrie bijective

$$\mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K}) \longleftrightarrow \overset{\perp}{\bigoplus_{(x,\varepsilon)\in[E\ell(G,e)]}} (\mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(x),\varepsilon;\mathrm{K})).$$

4B. Isométries compatibles à la fusion.

Dans tout ce qui suit, on fait les hypothèses suivantes.

4.2. HYPOTHÈSES. *Soient G et H deux groupes finis, et soient e et f deux idempotents primitifs respectivement de $Z\mathcal{O}G$ et $Z\mathcal{O}H$.*

On suppose que G et H contiennent un même ℓ–sous-groupe D, qui est groupe de défaut à la fois pour e et pour f, et on suppose que les inclusions de D dans G et H induisent une équivalence des catégories de Brauer associées $\mathbf{Br}_f(H)$ *et* $\mathbf{Br}_e(G)$ *(cf. [Br.3]). En d'autres termes:*

On suppose que l'on peut choisir une e–paire maximale (D,e_D) de G et une f–paire maximale (D,f_D) de H de sorte que, pour tous sous–groupes P et Q de D, si (P,e_P), (Q,e_Q) et (P,f_P), (Q,f_Q) désignent les paires respectivement contenues dans (D,e_D) et (D,f_D), les ensembles $\mathrm{Hom}((P,e_P),(Q,e_Q))$ *et* $\mathrm{Hom}((P,f_P),(Q,f_Q))$ *(considérés tous les deux comme sous–ensembles de* $\mathrm{Hom}(P,Q)$*) coïncident.*

Remarques.

1. Supposons que H est un sous–groupe de G, et que les blocs e et f sont les ℓ–blocs principaux respectifs de G et H. Alors les hypothèses 4.2 sont vérifiées si et seulement si H contrôle la fusion des ℓ–sous–groupes de G. C'est en particulier le cas si les ℓ–sous–groupes de Sylow de G sont abéliens, et si H est alors le normalisateur de l'un de ces ℓ–sous–groupes de Sylow.

2. Supposons encore que H est un sous–groupe de G. On note $\mathcal{S}p(G,e)$ l'ensemble des e–sous–paires de G (on rappelle que, si e est le bloc principal de G, l'ensemble ordonné $\mathcal{S}p(G,e)$ peut être vu comme l'ensemble des ℓ–sous–groupes de G). Supposons qu'il existe une application $\gamma\colon \mathcal{S}p(H,f) \to \mathcal{S}p(G,e)$ vérifiant:

(C1) Si $(P,\phi) \in \mathcal{S}p(H,f)$, il existe un bloc ε de $C_G(P)$ tel que $\gamma((P,\phi)) = (P,\varepsilon)$. De plus, γ est injective et $\gamma((P,\phi)^h) = \gamma((P,\phi))^h$ pour $h \in H$.

(C2) Tout élément de $\mathcal{S}p(G,e)$ est G–conjugué à un élément $\gamma((P,\phi))$ pour $(P,\phi) \in \mathcal{S}p(H,f)$.

(C3) Si (P,ϕ) et $(P',\phi') \in \mathcal{S}p(H,f)$ et si $g \in G$ sont tels que $\gamma((P',\phi')) = \gamma((P,\phi))^g$, il existe $z \in C_G(P)$ et $h \in H$ tels que $g = zh$.

(C4) On a $\gamma((P',\phi')) \subseteq \gamma((P,\phi))$ si et seulement si $(P',\phi') \subseteq (P,\phi)$.

On dit alors que (H,f) *contrôle la fusion des sous–paires* de (G,e). Dans ce cas, les catégories $\mathbf{Br}_e(G)$ et $\mathbf{Br}_f(H)$ sont équivalentes et les hypothèses 4.2 sont satisfaites.

On suppose dorénavant choisies et fixées les paires maximales (D,e_D) et (D,f_D), laissant au lecteur le soin de vérifier que les définitions que nous donnerons sont indépendantes de ce choix.

Les deux sous–groupes de $\mathrm{Aut}(P)$ définis par $N_G(P,e_P)$ et $N_H(P,f_P)$ coïncident; on désigne dorénavant ce groupe par $\mathrm{Aut}_{e,f}(P)$.

4.3. DÉFINITION. *Une application linéaire I de $\mathrm{CF}(H,f;K)$ dans $\mathrm{CF}(G,e;K)$ est dite compatible à la fusion si pour tout sous–groupe cyclique P de D, il existe une application linéaire $I_{\ell'}^P$ de $\mathrm{CF}_{\ell'}(C_H(P),f_P;K)$ dans $\mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P),e_P;K)$ telle que si x est un générateur de P, on a*

$$d_G^{(x,e_P)} \circ I = I_{\ell'}^P \circ d_H^{(x,f_P)}.$$

La famille $(I_{\ell'}^P)_{\{P\subseteq D\}}$ est alors appelée le système local de l'application compatible à la fusion I.

La proposition suivante est évidente, d'après (4A) ci–dessus.

4.4. PROPOSITION. *Soit $I\colon \mathrm{CF}(H,f;K) \to \mathrm{CF}(G,e;K)$ une application linéaire compatible à la fusion, de système local $(I_{\ell'}^P)$. Alors I est une isométrie si et seulement si toutes les applications $I_{\ell'}^P$ sont des isométries.*

Remarque.

Si I est une application linéaire compatible à la fusion, de système local $(I_{\ell'}^P)_{\{P\subseteq D\}}$, on voit que chaque application $I_{\ell'}^P$ est fixe par l'opération du groupe $\mathrm{Aut}_{e,f}(P)$.

4C. Isotypies entre blocs.

4.5. LEMME. *Soit $\mu \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$ définissant une isométrie*

$$I_\mu \colon \mathrm{CF}(H,f;\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{CF}(G,e;\mathrm{K}).$$

Supposons I_μ compatible à la fusion, de système local $(I^P_{\ell'})_{\{P\subseteq D\}}$. Si pour tout P non trivial l'application $I^P_{\ell'}$ envoie $\mathrm{CF}_{\ell'}(C_H(P),f_P;\mathcal{O})$ sur $\mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P),e_P;\mathcal{O})$, alors μ est parfait (et I_μ est une isométrie parfaite).

DÉMONSTRATION: Posons $I = I_\mu$. Puisque I est compatible à la fusion, pour tout $\beta \in \mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;\mathrm{K})$ on a $d_G^{(x,e_P)}(I(\beta)) = 0$ si x est non trivial. Par conséquent I envoie $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;\mathrm{K})$ dans $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathrm{K})$. On voit ainsi que μ satisfait à la condition (2) de la proposition 4.1.

Vérifions que I envoie $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;\mathcal{O})$ dans $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$. Puisque les caractères modulaires irréductibles forment une $\mathcal{O}$–base de $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;\mathcal{O})$ (cf. par exemple [Se], 18.2, ex.4), il suffit de vérifier que $I(\beta) \in \mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$ pour tout caractère irréductible modulaire β. Comme l'application de décomposition $d_H : \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f) \to \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(H,f)$ est surjective (cf. par exemple [Se], 16), il suffit de vérifier que $I(d_H(\zeta)) \in \mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$ pour tout $\zeta \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f)$. Or $I \circ d_H = I^{\{1\}}_{\ell'} \circ d_H$, puisque I envoie $\mathrm{CF}_{\ell'}(H,f;\mathrm{K})$ dans $\mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathrm{K})$. Comme I est compatible à la fusion, on a $I^{\{1\}}_{\ell'} \circ d_H = d_G \circ I$, et par suite $I(d_H(\zeta)) = d_G(I(\zeta))$, ce qui prouve que $I(d_H(\zeta)) \in \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(G,e)$, donc *a fortiori* que $I(d_H(\zeta)) \in \mathrm{CF}_{\ell'}(G,e;\mathcal{O})$. ∎

4.6. DÉFINITION. *On dit que les paires (G,e) et (H,f) (ou les blocs e et f) sont de même type si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(1) *Les catégories de Brauer $\mathbf{Br}_e(G)$ et $\mathbf{Br}_f(H)$ sont équivalentes (on peut alors supposer les hypothèses 4.2 ci-dessus satisfaites, et on en emploie les notations).*

(2) *Il existe une famille d'isométries parfaites*

$$\{I^P \colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_H(P),f_P) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_G(P),e_P)\}_{\{P\ (\text{cyclique})\ \subseteq D\}}$$

telle que, si (pour tout $P \subseteq D$) $I^P_{\ell'} \colon \mathrm{CF}_{\ell'}(C_H(P),f_P;\mathrm{K}) \to \mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P),e_P;\mathrm{K})$ désigne l'application induite par I^P, l'isométrie $I := I^{\{1\}}$ est compatible à la fusion, de système local $(I^P_{\ell'})_{\{P\subseteq D\}}$.

Une isométrie parfaite telle que I est alors appelée une isotypie entre e et f, et la famille $(I^P)_{\{P\subseteq D\}}$ en est appelée le système local.

Supposons les hypothèses 4.2 satisfaites, et soit $\mu \in \mathcal{R}_{\mathrm{K}}((G,e),(H,f))$, définissant une isométrie $I\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H,f) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$. Supposons qu'il existe une famille d'isométries parfaites

$$\{I^P \colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_H(P),f_P) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_G(P),e_P)\}_{\{\{1\}\neq P\subseteq D\}}$$

telle que, pour tout $P \subseteq D$, P cyclique non trivial et de générateur x, on ait

$$d_G^{(x,e_P)} \circ I = I^P_{\ell'} \circ d_H^{(x,f_P)}.$$

Alors I est une isotypie.

En effet, grâce au lemme 4.5, il suffit de vérifier que I est compatible à la fusion, et donc en l'occurrence que I envoie $\mathrm{CF}_{\ell'}(H, f; \mathrm{K})$ dans $\mathrm{CF}_{\ell'}(G, e; \mathrm{K})$. Or ceci résulte du fait que I est une isométrie qui envoie l'orthogonal de $\mathrm{CF}_{\ell'}(H, f; \mathrm{K})$ sur l'orthogonal de $\mathrm{CF}_{\ell'}(G, e; \mathrm{K})$.

Cette remarque sera d'usage constant dans les exemples que nous donnons ci–dessous.

Remarques.

1. R. Brauer a donné une définition du type d'un bloc (cf. [Bra]) qui ressemble beaucoup à la définition que nous venons de donner (elle en diffère essentiellement en ce sens qu'il exigeait que G et H aient même fusion sur les éléments du groupe de défaut, et non pas sur les ensembles de paires associées aux blocs considérés). En suivant ses méthodes ([Bra]), on peut démontrer que, un ℓ–groupe fini D étant donné, il n'existe qu'un nombre fini de types de blocs de défaut D.

2. La définition d'isotypie que nous venons de donner n'est en fait qu'un approximation de la bonne définition... La "bonne définition" consiste à remplacer la condition (2) de la définition 4.6 par la condition suivante:

Il existe une famille d'isométries parfaites

$$\{I^P : \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_H(P), f_P) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_G(P), e_P)\}_{\{P \subseteq D\}}$$

telle que, si (pour tout $P \subseteq D$) $I^P_{\ell'} : \mathrm{CF}_{\ell'}(C_H(P), f_P; K) \to \mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P), e_P; K)$ désigne l'application induite par I^P, l'isométrie I^P est compatible à la fusion, de système local $(I^{P<z>}_{\ell'})_{\{<z> \subseteq C_D(P)\}}$.

Cette définition ne sera néanmoins pleinement justifiée que lorsque on saura travailler à un niveau plus profond que celui des caractères (et lorsqu'il sera alors nécessaire de remplacer les ℓ–sous–groupes cycliques par tous les ℓ–sous–groupes).

Soit I une isotypie, de système local $(I^P)_{\{P \subseteq D\}}$. On note μ le caractère qui définit I, et, pour tout $P \subseteq D$, on note μ^P celui qui définit I^P; pour $z \in D$ on pose $\mu^z := \mu^{<z>}$. Il est alors facile de vérifier que la compatibilité à la fusion s'exprime, en termes de caractères , de la façon suivante.

Soient (x, ϵ) un e–élément de Brauer de G et (y, ϕ) un f–élément de Brauer de H. On dit que (x, ϵ) et (y, ϕ) sont conjugués s'il existe un élément $z \in D$ tel que (x, ϵ) soit G–conjugué à (z, e_z) et (y, ϕ) soit H–conjugué à (z, f_z) (nous utilisons toujours ici les notations des hypothèses 4.2, et nous laissons au lecteur le soin de vérifier que nos définitions sont indépendantes des choix effectués).

4.7. PROPOSITION. *Soient $x' \in C_G(x)_{\ell'}$ et $y' \in C_H(y)_{\ell'}$. Alors*

- *si (x, ϵ) et (y, ϕ) ne sont pas conjugués, on a $\mu(xx'\epsilon, yy'\phi) = 0$,*
- *pour $z \in D$, on a $\mu(zx'e_z, zy'f_z) = \mu^z(x', y')$ pour tous $x' \in C_G(z)_{\ell'}$ et $y' \in C_H(z)_{\ell'}$.*

4D. Invariants d'une isotypie.

Il est clair, par définition et d'après la remarque suivant la proposition 1.3, qu'une isotypie induit des isométries entre les triangles "ordinaires"

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_G(P), e_P) & \xrightarrow{d_{C_G(P)}} & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(C_G(P), e_P) \\ \uparrow {}^t d_{C_G(P)} & & \uparrow c_{C_G(P)} \\ \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_G(P), e_P) & = & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_G(P), e_P) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_H(P), f_P) & \xrightarrow{d_{C_H(P)}} & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(C_H(P), f_P) \\ \uparrow {}^t d_{C_H(P)} & & \uparrow c_{C_H(P)} \\ \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_H(P), f_P) & = & \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_H(P), f_P) \end{array}$$

de même qu'entre les triangles "généralisés"

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e) & \xrightarrow{d_G^{(x,e_P)}} & \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(C_G(P), e_P) \\ \uparrow {}^t d_G^{(x,e_P)} & & \uparrow c_{C_G(P)} \\ \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_G(P), e_P) & = & \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_G(P), e_P) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H, f) & \xrightarrow{d_H^{(x,f_P)}} & \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}(C_H(P), f_P) \\ \uparrow {}^t d_H^{(x,f_P)} & & \uparrow c_{C_H(P)} \\ \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_H(P), f_P) & = & \mathbf{Z}[\omega_x] \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{k}}^{pr}(C_H(P), f_P) \end{array}$$

où ω_x désigne une racine de l'unité d'ordre égal à l'ordre de x.

Dans [Br–Ol] ont été définis des coefficients $m_{(G,e)}^{(x,\epsilon)}(P, e_P)$ associés à toute e–sous–paire (P, e_P) et tout élément de Brauer (x, ϵ), qui sont en quelques sorte les "invariants locaux élémentaires" (cf. [Br–Ol]).

On suppose les hypothèses 4.2 satisfaites et on en utilise les notations.

4.8. THÉORÈME. *Supposons que les paires (G, e) et (H, f) sont de même type. Alors pour tout $P \subseteq D$ et tout $x \in D$, on a $m_{(G,e)}^{(x,e_x)}(P, e_P) = m_{(H,f)}^{(x,f_x)}(P, f_P)$.*

DÉMONSTRATION: D'après [Br–Ol], proposition 2.6, il suffit d'établir que, pour tout $P \subseteq D$ et tout $x \in Z(D)$, on a $m_{(C_G(x),e_x)}^{\{1\}}(P, e_P) = m_{(C_H(x),f_x)}^{\{1\}}(P, f_P)$. Comme les paires $(C_G(x), e_x)$ et $(C_H(x), f_x)$ ont même type, on peut les remplacer par, respectivement, (G, e) et (H, f), et on est ramené à démontrer que $m_{(G,e)}^{\{1\}}(P, e_P) = m_{(H,f)}^{\{1\}}(P, f_P)$. Par définition des coefficients m (cf. [Br–Ol]), on doit donc démontrer

$$\dim((\mathrm{k}C_G(P)_{\ell'})_P^{N_G(P,e_P)} e_P) = \dim((\mathrm{k}C_H(P)_{\ell'})_P^{N_H(P,f_P)} f_P).$$

Soit

$$I^P : \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_H(P), f_P) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_G(P), e_P)$$

l'isométrie parfaite définie par I. Puisque I^P est stable par le groupe $\mathrm{Aut}_{e,f}(P)$ (cf. §4B ci-dessus), il suffit de démontrer que I^P induit un isomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire de $(\mathcal{O}C_H(P)_{\ell'})^{C_H(P)}_{Z(P)} f_P$ sur $(\mathcal{O}C_G(P)_{\ell'})^{C_G(P)}_{Z(P)} f_P$. On voit donc que l'on peut en fait supposer P central dans G et dans H, et qu'il reste à démontrer que dans ce cas toute isométrie parfaite $I\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(H, f) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e)$ induit un isomorphisme de $(\mathcal{O}H_{\ell'})^H_P f$ sur $(\mathcal{O}G_{\ell'})^G_P e$.

Notons $\mathrm{F}_{\ell'}(G; \mathcal{O})^G_P$ l'ensemble des fonctions centrales sur G, à valeurs dans $\mathcal{O}$, nulles hors de $G_{\ell'}$, et qui sont des traces relatives de P à G de fonctions sur G à valeurs dans $\mathcal{O}$. On pose $\mathrm{F}_{\ell'}(G; \mathcal{O})^G_{\{1\}} = \mathrm{CF}^{pr}_{\ell'}(G; \mathcal{O})$. Il est alors facile de vérifier que $\mathrm{F}_{\ell'}(G; \mathcal{O})^G_P = (1/|P|)\,\mathrm{CF}^{pr}_{\ell'}(G; \mathcal{O})$, et l'assertion à démontrer est une conséquence de la proposition 1.3 ci-dessus. ∎

5. Premiers exemples d'isotypies

5A. Dualité dans les groupes réductifs finis.

On reprend les notations et hypothèses du 2 ci-dessus. D'après les théorèmes 1.5 et 2.1, l'application de dualité D_G définit une permutation de l'ensemble des ℓ-blocs de G.

Si x est un ℓ-élément de G, et si $P = < x >$, on pose $D^P = D_{C^\circ_G(P)}$. On peut considérer D^P comme une application de $\mathrm{CF}(C^\circ_G(P); \mathrm{K})$ dans lui-même, et on note $D^P_{\ell'}$ sa restriction à $\mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P); \mathrm{K})$ (remarquons que, d'après [Br–Mi], lemme 2.1, on a $C_G(P)_{\ell'} \subseteq C^\circ_G(P)$).

Soient e et e' deux blocs échangés par D_G, *i.e.*, tels que D_G définisse une isométrie (parfaite, involutive) entre $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e)$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e')$.

5.1. Théorème.

(1) Les hypothèses 4.2 sont satisfaites par les paires (G, e) et (G, e').

(2) L'application $D_G\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G, e')$ est une isotypie de système local $(D^P)_{\{P \subseteq G\}}$.

Indications sur la démonstration: Cela résulte essentiellement du fait que la dualité commute aux applications de décomposition généralisées, au sens suivant. Soit x un ℓ-élément de G et soit $P = < x >$. On note $d^x_G\colon \mathrm{CF}(G; \mathrm{K}) \to \mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P); \mathrm{K})$ l'application définie par la formule $d^x_G(\alpha)(x') = \alpha(xx')$ pour tout $\alpha \in \mathrm{CF}(G; \mathrm{K})$ et $x' \in C_G(P)_{\ell'}$. On déduit alors aisément du théorème 3 de [Di–Mi] que $d^x_G \circ D_G = D^P_{\ell'} \circ d^x_G$. ∎

5B. Blocs nilpotents.

Soit G un groupe fini et soit e un ℓ-bloc de G, que l'on suppose nilpotent, selon les définitions de [Br–Pu]: Si D est un groupe de défaut de e, les paires (G, e) et $(D, 1)$ satisfont aux hypothèses 4.2 ([Br–Pu], théorème 1.2).

Choisissons une e-sous-paire maximale (D, e_D), et un caractère irréductible χ de hauteur nulle et ℓ-rationnel. Pour $x \in D$ et $P = < x >$, on note (P, e_P) la paire telle que $(P, e_P) \subseteq (D, e_D)$. Soit χ_P un caractère irréductible de hauteur nulle et ℓ-rationnel de $C_G(P)$ dans e_P. Soit ϕ_P l'unique caractère modulaire irréductible de $C_G(P)$ contenu dans e_P ([Br–Pu], théorème 1.2). On sait (*id.*) qu'il existe un signe $\lambda(P)$ tel que $d_G^{(x,e_P)}(\chi) = \lambda(P)\phi_P$.

Soit $I\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(D) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$ l'isométrie telle que $\eta \mapsto \chi * \eta$. Plus généralement, soit $I^P\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_D(P)) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(C_G(P), e_P)$ l'isométrie telle que $\eta \mapsto \lambda(P)\chi_P * \eta$.

5.2. THÉORÈME. *L'isométrie I est une isotypie de système local $(I^P)_{\{P\subseteq D\}}$.*

DÉMONSTRATION: C'est une conséquence de la définition 4.3 et de la description de $\chi * \eta$ donnée dans [Br–Pu]. ∎

Remarque. L'isomorphisme entre les algèbres $Z\mathcal{O}D$ et $(Z\mathcal{O}G)e$ (cf. [Br–Pu], corollaire 1.4) est une conséquence immédiate des théorèmes 1.2 et 5.2.

5C. Blocs à groupes de défaut cycliques.

Soit e un bloc d'un groupe G, à groupe de défaut D cyclique. Soit (D, e_D) une e-sous-paire maximale. On pose $E = N_G(D,e_D)/C_G(D)$ et $\epsilon = |E|$. L'idempotent e_D est un bloc de $N_G(D,e_D)$, et les catégories de Brauer $\mathbf{Br}_e(G)$ et $\mathbf{Br}_{e_D}(N_G(D,e_D))$ sont équivalentes (cf. par exemple [Al–Br], prop.4.21).

Soient $\chi_1, \cdots, \chi_\epsilon$ les caractères irréductibles non exceptionnels de G dans e, et soient $\{\chi_\eta\}_{(\eta \in \mathrm{Irr}^!_{\mathrm{K}}(D)/E)}$ les $\frac{|D|-1}{\epsilon}$ caractères exceptionnels (cf. [Fe], chap.VII). Soient de même $\zeta_1, \cdots, \zeta_\epsilon$ les caractères irréductibles non exceptionnels du groupe $N_G(D,e_D)$ dans e_D et soient $\{\zeta_\eta\}_{(\eta \in \mathrm{Irr}^!_{\mathrm{K}}(D)/E)}$ les caractères exceptionnels.

Pour $x \in D$, $x \neq 1$, et $P = \langle x \rangle$, on note e_P le bloc de $C_G(P)$ tel que $(P, e_P) \subseteq (D, e_D)$. Comme e_P est nilpotent, l'espace vectoriel $\mathrm{CF}_{\ell'}(C_G(P), e_P; \mathrm{K})$ est de dimension 1. Soit φ_P l'unique caractère modulaire irréductible de $C_G(P)$ dans e_P, et soit ψ_P l'unique caractère modulaire irréductible de $C_{N_G(D,e_D)}(P)$ dans e_D.

D'après [Fe], chap.VII, théorème 2.17, il existe des signes $\delta, \delta_1, \cdots, \delta_\epsilon$, et pour tout $P \neq \{1\}$, $P \subseteq D$, deux signes $\lambda^G(P)$ et $\lambda^N(P)$ tels que

$$\begin{cases} d_G^{(x,e_P)}(\delta_i\chi_i) = \lambda^G(P)\varphi_P \\ d_G^{(x,e_P)}(\delta\chi_\eta) = -\lambda^G(P)\mathrm{Tr}_1^E(\eta)(x)\varphi_P \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d_{N_G(D,e_D)}^{(x,e_D)}(\zeta_i) = \lambda^N(P)\psi_P \\ d_{N_G(D,e_D)}^{(x,e_D)}(\zeta_\eta) = -\lambda^N(P)\mathrm{Tr}_1^E(\eta)(x)\psi_P \end{cases}$$

Soit I^P l'isotypie de $(C_{N_G(D,e_D)}(P), e_D)$ sur $(C_G(P), e_P)$ (cf. théorème 5.2 ci-dessus) qui envoie $\lambda^N(P)\psi_P$ sur $\lambda^G(P)\varphi_P$.

Le résultat suivant précise un théorème de Linckelmann ([Li]). Il résulte de la proposition 4.5 ci-dessus.

5.3. THÉORÈME. *L'application $I\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(N_G(D,e_D), e_D) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$ définie par*

$$I(\zeta_i) = \delta_i\chi_i \quad \textit{pour } i = 1, \cdots, \epsilon \quad \textit{et} \quad I(\zeta_\eta) = \delta\chi_\eta \quad \textit{pour} \quad \eta \in \mathrm{Irr}^\sharp_{\mathrm{K}}(D)/E$$

est une isotypie de système local $(I^P)_{\{P\subseteq D\}}$.

5D. Le ℓ–bloc principal de $\mathrm{GL}_2(\ell^n)$.

On suppose ℓ impair, et on pose $q = \ell^n$. Soit $G = \mathrm{GL}_2(q)$, et soit B le sous–groupe de Borel de G, normalisateur d'un ℓ–sous–groupe de Sylow de G.

Le ℓ–bloc principal de G.

Soit e le ℓ–bloc principal de G. Il y a q caractères irréductibles de G dans e :
- 2 caractères linéaires, notés 1_1 (il s'agit du caractère trivial) et 1_2,
- $(q-1)/2$ caractères de degré $(q-1)$, notés $\{(q-1)_{2i-1}\}_{(1\leq i\leq (q-1)/2)}$,
- $(q-3)/2$ caractères de degré $(q+1)$, notés $\{(q+1)_{2j}\}_{(1\leq j\leq (q-3)/2)}$.

Les caractères 1_1, 1_2, et $(q+1)_{2j}$ prennent la valeur 1 sur les éléments unipotents non triviaux de G. Les caractères $(q-1)_{2i-1}$ y prennent la valeur -1.

Le ℓ–bloc principal de B.

Soit f le ℓ–bloc principal de B. Il y a q caractères irréductibles de B dans f :
- $(q-1)$ caractères linéaires, notés $\{1_k\}_{(1\leq k\leq (q-1)/2)}$,
- 1 caractère de degré $(q-1)$, noté $(q-1)$.

Les caractères linéaires prennent la valeur -1 sur les éléments unipotents non triviaux de B. Le caractère $(q-1)$ y prend la valeur 1.

Pour P sous–groupe unipotent cyclique de B, soit I^P l'isotypie de (B,f) sur (G,e) qui envoie le caractère modulaire trivial de B sur l'opposé de celui de G.

5.4.Théorème. *L'application* $I\colon \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(B,f) \to \mathcal{R}_{\mathrm{K}}(G,e)$ *définie par*

$$I\colon \begin{pmatrix} 1_1 \\ 1_{2i-1} \\ 1_{2j} \\ (q-1) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ -(q-1)_{2i-1} \\ (q+1)_{2j} \\ -1_2 \end{pmatrix}$$

est une isotypie de système local $(I^P)_{\{P\subseteq D\}}$.

5E. Groupes ℓ–résolubles.

Soit G un groupe ℓ–résoluble et soit e un bloc de G. Dans [Pu.2], précisant la méthode de réduction de Fong ([Fo]), Puig exhibe un groupe H et un bloc f de H, ainsi qu'un foncteur $\mathbf{I}\colon {}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$, possédant les propriétés suivantes:

(1) On a $O_{\ell'}(H) \subseteq Z(H)$, et $H/O_{\ell'}(H)$ est isomorphe à un sous–groupe de G.

(2) Pour tout ℓ–sous–groupe P de H, il existe un et un seul bloc de $C_H(P)$, noté f_P, tel que (P,f_P) soit une f–sous–paire de H. En particulier, la catégorie de Brauer $\mathbf{Br}_f(H)$ est équivalente à la catégorie de Frobenius de H (cf. [Br.3]).

(3) Les catégories de Brauer $\mathbf{Br}_e(G)$ et $\mathbf{Br}_f(H)$ sont équivalentes.

(4) Le foncteur $\mathbf{I}$ est une équivalence de catégories .

Nous laissons le soin au lecteur de démontrer le théorème suivant:

5.5. Théorème. *Le foncteur* $\mathbf{I}\colon {}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$ *induit une isotypie de* (H,f) *sur* (G,e).

5F. Groupes réductifs finis en caractéristique différente de ℓ.

M. Enguehard a mis en évidence des isotypies entre blocs de même poids pour les groupes symétriques ([En.1]), et entre blocs unipotents de même poids pour les groupes linéaires ou unitaires ([En.2]).

Il est très probable que, sous les hypothèses du §2A ci–dessus, la décomposition de Jordan est une isotypie. Nous laissons en tout cas au lecteur le soin de vérifier ce qui suit, utilisant les résultats et les notations de [Br.3] et du §2A ci–dessus (voir aussi [Br–Ol]).

Soit $G = \mathrm{GL}_n(q)$ ou $\mathrm{U}_n(q^2)$, où q est une puissance d'un nombre premier différent de ℓ. Soit e un bloc de G, contenu dans l'idempotent e_s^G où $s \in G$. Soit e_u le bloc unipotent de $G(s) = C_G(s)$ correspondant à e (cf. par exemple le théorème 2.3 ci–dessus).

5.6. Théorème. *Les hypothèses (4.2) sont satisfaites pour les paires (G,e) et $(G(s),e_u)$, et l'application $\lambda \mapsto R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(s)}(\hat{s}\lambda)$ est une isotypie de $(G(s),e_u)$ sur (G,e).*

6. Questions, conjectures et rêves

En appendice, nous fournissons d'autres exemples d'isotypies, dont celles entre les 2–blocs principaux de *tous* les groupes simples à 2–sous–groupe de Sylow abélien et les blocs principaux des normalisateurs des 2–sous–groupes de Sylow correspondants.

Dans [Br.4], emporté trop loin par mon élan, j'avais conjecturé que la classe d'équivalence de la catégorie ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ ne dépendait que de celle de la catégorie de Brauer $\mathbf{Br}_e(G)$. Cette conjecture est fausse, comme le prouve l'exemple (suggéré par John Thompson) du groupe de Suzuki $G = \mathrm{Sz}(8)$ pour le nombre premier $\ell = 2$.

En effet, dans ce cas, les 2–sous–groupes de Sylow de G sont à intersections triviales, et par conséquent le normalisateur B de l'un d'entre eux contrôle la fusion des 2–sous–groupes. En d'autres termes, si e et f désignent les 2–blocs principaux respectifs de G et B, l'inclusion de B dans G induit une équivalence entre les catégories $\mathbf{Br}_f(B)$ et $\mathbf{Br}_e(G)$. Cependant, les matrices de Cartan respectives de G pour e et de B pour f sont

$$C_\ell(G) = \begin{pmatrix} 160 & 72 & 72 & 72 & 20 & 20 & 20 \\ 72 & 34 & 32 & 32 & 10 & 8 & 9 \\ 72 & 32 & 34 & 32 & 8 & 9 & 10 \\ 72 & 32 & 32 & 34 & 9 & 10 & 8 \\ 20 & 10 & 8 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 20 & 8 & 9 & 10 & 2 & 4 & 2 \\ 20 & 9 & 10 & 8 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$C_\ell(B) = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 10 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 10 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

On peut alors vérifier (je remercie J.–P. Serre pour l'aide apportée dans cette vérification) que les formes quadratiques entières définies par les matrices $C_\ell(G)$ et $C_\ell(B)$ ne sont pas équivalentes. Ceci prouve en particulier que les catégories ${}_{\mathrm{k}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathrm{k}Bf}\mathbf{Deb}$ ne sont pas équivalentes (cf. par exemple la remarque suivant le théorème 3.1 ci–dessus).

Aucun contre–exemple n'est cependant venu infirmer la conjecture ci–dessous.

6.1. CONJECTURE. *Soit G un groupe fini et soit e un bloc de G. Soit (D,f) une e-sous–paire maximale de G. Si D est abélien, les paires (G,e) et $(N_G(D,f),f)$ ont même type.*

L'exemple donné ci-dessus des blocs à groupes de défaut cycliques, ainsi entre autres que tous les exemples fournis en appendice, viennent à l'appui de cette conjecture.

Le lien évident des isométries parfaites avec les équivalences de catégories dérivées (cf. théorème 3.1 ci–dessus) nous amène à la

6.2. QUESTION. *Sous les mêmes hypothèses que 6.1, est–il vrai que les catégories ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}N_G(D,f)f}\mathbf{Deb}$ sont équivalentes ?*

Rickard ([Ri.2]) a démontré que si D est cyclique, alors les catégories dérivées ${}_{\mathrm{k}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathrm{k}N_G(D,f)f}\mathbf{Deb}$ sont équivalentes. Linckelmann vient de vérifier que ce résultat reste vrai en remplaçant k par $\mathcal{O}$, *i.e.*, que si D est cyclique la réponse à la question 6.2 est positive.

On peut également démontrer, en utilisant les résultats de Fong–Puig (cf. §5E ci–dessus), et le théorème de Dade sur les extensions associées aux modules d'endopermutation (cf. [Da.1], [Da.2], [Pu.3]) que si G est ℓ–résoluble et D abélien, alors les catégories ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$ et ${}_{\mathcal{O}N_G(D,f)f}\mathbf{Mod}$ sont équivalentes: dans ce cas, la réponse à la question 6.2 est donc encore positive.

Il devrait d'ailleurs exister de plus une équivalence des catégories dérivées "exprimant" la compatibilité à la fusion de l'isotypie conjecturée en (6.1). La notion d'"équivalence compatible à la fusion" entre ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Deb}$ reste à définir. Nous esquissons ici une définition possible de la notion d'"équivalence compatible à la fusion" entre ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$ et ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Mod}$.

6.3. TENTATIVE DE DÉFINITION. *Supposons les hypothèses (4.2) satisfaites pour les paires (G,e) et (H,f). On dit qu'une équivalence de catégories $\mathbf{I}\colon {}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$ est compatible à la fusion si on peut trouver*

- *une e–sous–paire maximale (D,e_D) de G et une f–sous–paire maximale (D,f_D) de H, un idempotent source i de e associé à (D,e_D) (i.e., cf. [Pu.2], un idempotent primitif i de $(\mathcal{O}Ge)^D$ tel que $Br_D(i) \neq 0$ et $Br_D(i)e_D = Br_D(i)$), et un idempotent source j de f associé à (D,f_D),*
- *un $\mathcal{O}D$–module d'endopermutations V (i.e., tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(V)$ admet une $\mathcal{O}$–base stable par la conjugaison par les éléments de D) indécomposable de vortex D,*

tels que le foncteur $\mathbf{I}$ soit naturellement isomorphe au foncteur $M \underset{\mathcal{O}Hf}{\otimes} \cdot$, où M désigne le $(\mathcal{O}Ge,\mathcal{O}Hf)$–bimodule indécomposable, qui est facteur direct du module

$\mathcal{O}Gi \underset{\mathcal{O}D}{\otimes} \mathrm{Ind}_{\Delta(D)}^{D\times D}(V) \underset{\mathcal{O}D}{\otimes} j\mathcal{O}H$, *et qui est de vortex* $\Delta(D)$ *comme* $(G \times H)$*–module.*

Une équivalence compatible à la fusion entre (G, e) et (H, f) induit une isotypie entre ces paires.

On dit que deux paires (G, e) et (H, f) sont *semblables* si les hypothèses (4.2) sont satisfaites et s'il existe une équivalence compatible à la fusion $\mathbf{I}$: ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Mod}$. Cette définition est inspirée par les travaux de Puig (voir par exemple [Pu.2], [Ku–Pu]), dont il doit résulter que

- si e est un bloc nilpotent, les paires (G, e) et $(D, 1)$ sont semblables (cf. [Pu.2]),
- si G est ℓ–résoluble, et si (H, f) est une paire comme décrite au §5E, les paires (G, e) et (H, f) sont semblables (cf. [Pu.1]).

Cas des groupes réductifs finis.

Les assertions qui suivent relèvent pour le moment de l'onirisme mathématique.

Nous utilisons les notations du §2A. On suppose de plus le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ simplement connexe et le nombre premier ℓ bon pour $\mathbf{G}$. Soit e un bloc de G, de groupe de défaut D supposé *abélien*. Le groupe $\mathbf{L} := C_{\mathbf{G}}(D)$ est alors un sous–groupe de Levi rationnel de $\mathbf{G}$, et on note $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de complément de Levi $\mathbf{L}$. Soit f un bloc de L tel que (D, f) soit une e–sous–paire (maximale) de G.

D'après les S.G.A., on sait que les groupes de cohomologie ℓ–adique à support compact de $\mathbf{X_P}$ sont les groupes d'homologie d'un élément bien défini de la catégorie ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}_{\mathcal{O}Lf}$, noté $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathbb{Z}_\ell)$. On pose $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O}) = \mathcal{O} \underset{\mathbb{Z}_\ell}{\otimes} \mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathbb{Z}_\ell)$. Les restrictions à $\mathcal{O}G$ et à $\mathcal{O}L$ de $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O})$ sont parfaites.

(Rêve 1) L'élément $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}Ge}\, e\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O}) \in {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ est un "tilting complex" au sens de [Ri.1] : il est un générateur de la catégorie triangulée ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$, et

$$\mathrm{Hom}(e\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O}), e\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O})[i]) = O \text{ pour tout } i \neq 0.$$

(Rêve 2) L'algèbre "de Hecke" $\mathrm{End}(e\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O}))$ est isomorphe à $(\mathcal{O}N_G(D, f)f)^\circ$, et par conséquent ([Ri.1]) le complexe $e\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X_P}, \mathcal{O})$ définit une équivalence de catégories triangulées, compatible à la fusion, entre ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{Deb}$ et ${}_{\mathcal{O}N_G(D,f)f}\mathbf{Deb}$.

APPENDICE

Exemples d'isotypies dans le cas d'un groupe de défaut abélien

A1. LES 2–BLOCS PRINCIPAUX DES GROUPES SIMPLES À 2–SOUS–GROUPE DE SYLOW ABÉLIEN

A1.1. $\mathrm{PSL}_2(q)$, $q \equiv 3$ ou 5 mod 8

2–bloc principal de $\mathrm{PSL}_2(3)$

Table des Caractères ordinaires

$\lvert C_H(h)\rvert$	12	4	3	3
classe (h)	(1)	(2)	(3)	$(\bar{3})$
σ_1	1	1	1	1
σ_ω	1	1	ω	$\overline{\omega}$
$\sigma_{\overline{\omega}}$	1	1	$\overline{\omega}$	ω
σ	3	-1	0	0

où $\omega = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

Table des Caractères modulaires

$\lvert C_H(h)\rvert$	12	3	3
classe (h)	(1)	(3)	$(\bar{3})$
β_0	1	1	1
β	1	ω	$\overline{\omega}$
β'	1	$\overline{\omega}$	ω

Matrice de Décomposition

	σ_0	σ_ω	$\sigma_{\overline{\omega}}$	σ
β_0	1	0	0	1
β	0	1	0	1
β'	0	0	1	1

Matrice de Décomposition généralisée en l'involution

	σ_0	σ_ω	$\sigma_{\overline{\omega}}$	σ
1	1	1	1	-1

2–bloc principal de $\mathrm{PSL}_2(q)$ ($q \equiv 3$ mod 8)

Table des Caractères ordinaires

$\lvert C_G(g)\rvert$	$\frac{1}{2}q(q^2-1)$	$q+1$	q	q	$q-1$
classe (g)	(1)	(t_1^m)	(u)	(v)	(t_0^n)
ρ_0	1	1	1	1	1
ρ_{ω_q}	$\frac{1}{2}(q-1)$	$(-1)^{m+1}$	ω_q	$\overline{\omega}_q$	0
$\rho_{\overline{\omega}_q}$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$(-1)^{m+1}$	$\overline{\omega}_q$	ω_q	0
ρ	q	-1	0	0	1

où $\omega_q = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-q})$, $t_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, $(<\lambda>= \mathbb{F}_q^\times)$,

$$|t_1| = q+1,\ u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \leq n \leq \tfrac{1}{2}(q-3),\ 1 \leq m \leq \tfrac{1}{2}(q-1)$$

Eléments 2–singuliers: t_1^m pour m impair

Table des Caractères modulaires

classe (g)	(1)	(t_1^{2i})	(u)	(v)	(t_0^n)
α_0	1	1	1	1	1
α	$\frac{1}{2}(q-1)$	-1	ω_q	$\overline{\omega}_q$	0
α'	$\frac{1}{2}(q-1)$	-1	$\overline{\omega}_q$	ω_q	0

Matrice de Décomposition

	ρ_0	ρ_{ω_q}	$\rho_{\overline{\omega}_q}$	ρ
α_0	1	0	0	1
α	0	1	0	1
α'	0	0	1	1

Matrice de Décomposition généralisée en l'involution

	ρ_0	ρ_{ω_q}	$\rho_{\overline{\omega}_q}$	ρ
1	1	1	1	-1

2–bloc principal de $PSL_2(q)$ ($q \equiv 5 \bmod 8$)

Table des Caractères ordinaires

$\lvert C_G(g)\rvert$	$\frac{1}{2}q(q^2-1)$	$q-1$	q	q	$q+1$
class (g)	(1)	(t_0^n)	(u)	(v)	(t_1^m)
ρ_0	1	1	1	1	1
ρ_{ω_q}	$\frac{1}{2}(q+1)$	$(-1)^n$	ω_q	$\overline{\omega}_q$	0
$\rho_{\overline{\omega}_q}$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$(-1)^n$	$\overline{\omega}_q$	ω_q	0
ρ	q	1	0	0	-1

où $\omega_q = \frac{1}{2}(1+\sqrt{q})$.

$$t_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix},\ (<\lambda> = \mathbf{F}_q^\times),$$

$$|t_1| = q+1,\ u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$1 \leq n \leq \tfrac{1}{2}(q-3),\ 1 \leq m \leq \tfrac{1}{2}(q-1)$$

Eléments 2–singuliers: t_0^n pour n impair

Table des Caractères modulaires

classe (g)	(1)	(t_0^{2i})	(u)	(v)	(t_1^m)
α_0	1	1	1	1	1
α	$\frac{1}{2}(q-1)$	0	$\omega_q - 1$	$\overline{\omega}_q - 1$	-1
α'	$\frac{1}{2}(q-1)$	0	$\overline{\omega}_q - 1$	$\omega_q - 1$	-1

Matrice de Décomposition

	ρ_0	ρ_{ω_q}	$\rho_{\overline{\omega}_q}$	ρ
α_0	1	1	1	1
α	0	1	0	1
α'	0	0	1	1

Matrice de Décomposition généralisée en l'involution

	ρ_0	ρ_{ω_q}	$\rho_{\overline{\omega}_q}$	ρ
1	1	-1	-1	1

Une isotypie entre les 2–blocs principaux de $G = \mathrm{PSL}_2(q)$ ($q \equiv 5$ ou $3 \bmod 8$) et de $H = \mathrm{PSL}_2(3)$, normalisateur dans G du 2–sous-groupe de Sylow

Puisque les centralisateurs d'involutions dans G et H sont cycliques, leurs blocs principaux sont nilpotents et pour qu'une isométrie soit compatible à la fusion il suffit qu'elle préserve la matrice de décomposition généralisée.

Cas où $q \equiv 3 \bmod 8$

L'application $I^{(2)}$ définie par $\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_\omega \\ \sigma_{\overline{\omega}} \\ \sigma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_{\omega_q} \\ \rho_{\overline{\omega}_q} \\ \rho \end{pmatrix}$ convient donc.

On peut en fait démontrer que cette correspondance est la trace (ou plutôt, "l'ombre portée"), au niveau des caractères, d'une équivalence de Morita entre les blocs principaux de G et de H.

L'action de $I^{(2)}$ sur les caractères modulaires irréductibles est évidente : d'après nos notations (sans aucun doute abusives), c'est l'identité...

Cas où $q \equiv 5 \bmod 8$

L'application $I^{(2)}$ définie par $\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_\omega \\ \sigma_{\overline{\omega}} \\ \sigma \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -\rho_{\omega_q} \\ -\rho_{\overline{\omega}_q} \\ -\rho \end{pmatrix}$ convient.

Calculons son action sur les caractères modulaires irréductibles. Puisque l'application de décomposition dans H envoie $(\sigma_0, \sigma_\omega, \sigma_{\overline{\omega}})$ sur (β_0, β, β'), on voit que $I^{(2)}(\beta_0)$, $I^{(2)}(\beta)$, $I^{(2)}(\beta')$ sont les images respectives, par l'application de décomposition dans G, de $I^{(2)}(\sigma_0)$, $I^{(2)}(\sigma_\omega)$, $I^{(2)}(\sigma_{\overline{\omega}})$, d'où on déduit :

$$I^{(2)}(\beta_0) = \alpha_0 \quad I^{(2)}(\beta) = -(\alpha_0 + \alpha), \quad I^{(2)}(\beta') = -(\alpha_0 + \alpha').$$

A1.2. Les Groupes de Janko J_1 et de Ree $\mathrm{R}(q)$

Pour les tables de caractères utilisées, on peut se reporter à [La–Mi.1], [La–Mi.2], [War].

2–bloc principal du normalisateur N d'un 2–sous-groupe de Sylow dans J_1 ou $\mathrm{R}(q)$

Les Caractères ordinaires sur les éléments 2–singuliers

caract.	1_1	1	$\overline{1}$	3	$\overline{3}$	7_0	7	$\overline{7}$
(2)	1	1	1	3	3	-1	-1	-1
(6)	1	ω	$\overline{\omega}$	0	0	-1	$-\omega$	$-\overline{\omega}$
$(\overline{6})$	1	$\overline{\omega}$	ω	0	0	-1	$-\overline{\omega}$	$-\omega$

Matrice de Décomposition généralisée en l'involution
(dont le centralisateur est (2) × $PSL_2(3)$)

Caract.	1_1	1	$\overline{1}$	3	$\overline{3}$	7_0	7	$\overline{7}$
β_0	1	0	0	1	1	-1	0	0
β	0	1	0	1	1	0	-1	0
β'	0	0	1	1	1	0	0	-1

2–bloc principal des Groupes de Ree R(q), d'ordres $q^3(q^3+1)(q-1)$

Les Caractères ordinaires sur les éléments 2–singuliers

Caract.	1_1	r_q	s_q	t_q	a_q	$\overline{a}_q$	b_q	$\overline{b}_q$
(2)	1	-1	q	$-q$	$-(q-1)/2$	$-(q-1)/2$	$(q-1)/2$	$(q-1)/2$
$(2(t_1^m))$	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
$(2q)$	1	-1	0	0	$-\omega_q$	$-\overline{\omega}_q$	ω_q	$\overline{\omega}_q$
$(\overline{2q})$	1	-1	0	0	$-\overline{\omega}_q$	$-\omega_q$	$\overline{\omega}_q$	ω_q
$(2(t_0^n))$	1	-1	1	-1	0	0	0	0

où $r_q = q^2 - q + 1$, $s_q = q^3$, $t_q = q(q^2 - q + 1)$
$a_q = \frac{1}{2}(q-1)r(q+1+3r)$, $b_q = \frac{1}{2}(q-1)r(q+1-3r)$
et $q = 3r^2$.

Matrice de Décomposition généralisée en l'involution
(dont le centralisateur est (2) × $PSL_2(q)$, $q \equiv 3 \bmod 8$)

Caract.	1_1	r_q	s_q	t_q	a_q	$\overline{a}_q$	b_q	$\overline{b}_q$
α_0	1	-1	1	-1	0	0	0	0
α	0	0	1	-1	-1	0	1	0
α'	0	0	1	-1	0	-1	0	1

Une isotypie entre les blocs principaux de N et de R(q)

La comparaison des matrices de décomposition généralisées en l'involution montre que l'application I définie par

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 7_0 \\ 3 \\ \overline{3} \\ 1 \\ 7 \\ \overline{1} \\ \overline{7} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ r_q \\ s_q \\ -t_q \\ b_q \\ a_q \\ \overline{b}_q \\ \overline{a}_q \end{pmatrix}$$

convient et “induit” $I^{(2)}$ au niveau du centralisateur d’une involution. On peut noter que I n’est pas uniquement définie par ces conditions (pas plus, d’ailleurs, que $I^{(2)}$ n’est la seule isométrie parfaite entre les centralisateurs d’une involution). On laisse le soin au lecteur de dresser la liste de ***toutes*** les isotypies entre les 2–blocs principaux de $\mathrm{R}(q)$ et N.

2–bloc principal du Groupe de Janko J_1

Les caractères ordinaires sur les éléments 2–singuliers

Caract.	1_1	209	77_0	133_0	77	$\overline{77}$	133	$\overline{133}$
(2)	1	1	5	5	-3	-3	-3	-3
(6)	1	1	-1	-1	0	0	0	0
(10)	1	1	0	0	$-\omega_5$	$-\overline{\omega}_5$	$-\omega_5$	$-\overline{\omega}_5$
$(\overline{10})$	1	1	0	0	$-\overline{\omega}_5$	$-\omega_5$	$-\overline{\omega}_5$	$-\omega_5$

Matrice de Décomposition généralisée en l’involution
(dont le centralisateur est $(2) \times \mathrm{PSL}_2(5)$)

Caract.	1_1	209	77_0	133_0	77	$\overline{77}$	133	$\overline{133}$
α_0	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
α	0	0	1	1	-1	0	-1	0
α'	0	0	1	1	0	-1	0	-1

Matrice de décomposition généralisée de J_1 en l’involution,
par rapport à la base $\{I^{(2)}(\beta_0), I^{(2)}(\beta), I^{(2)}(\beta')\}$

Caract.	1_1	209	77_0	133_0	77	$\overline{77}$	133	$\overline{133}$
$I^{(2)}(\beta_0)$	1	1	-1	-1	0	0	0	0
$I^{(2)}(\beta)$	0	0	-1	-1	1	0	1	0
$I^{(2)}(\beta)'$	0	0	-1	-1	0	1	0	1

Une Isotypie entre les blocs principaux de N et de J_1

La comparaison des matrices de décomposition généralisées en l’involution (la matrice de décomposition généralisée habituelle pour N, et la matrice de décomposition généralisée sur l’image de $I^{(2)}$ calculée ci–dessus pour J_1) montre que l’application I définie par

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 7_0 \\ 3 \\ \overline{3} \\ 1 \\ 7 \\ \overline{1} \\ \overline{7} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ -209 \\ -77_0 \\ -133_0 \\ 77 \\ -133 \\ \overline{77} \\ -\overline{133} \end{pmatrix}$$

convient et “induit” $I^{(2)}$ au niveau des centralisateurs d’une involution. On peut noter que I n’est pas uniquement définie par ces conditions (pas plus, d’ailleurs, que $I^{(2)}$ n’est la seule isométrie parfaite entre les centralisateurs d’une involution). On laisse le soin au lecteur de dresser la liste de ***toutes*** les isotypies entre les 2–blocs principaux de J_1 et N (Lempken, Staszewski et Willems ont également construit une telle isométrie parfaite).

A1.3. $PSL_2(q)$ pour q puissance de 2

Le 2–bloc principal de $PSL_2(q)$ pour $q = 2^n$ a q caractères irréductibles ordinaires: le caractère trivial 1_1, $\frac{1}{2}(q-2)$ caractères de degrés $(q+1)$ (dénotés ici $(q+1)_i$), et $\frac{1}{2}q$ caractères de degrés $(q-1)$ (dénotés $(q-1)_j$). Sur les éléments d'ordre pair, les caractères 1_1 et $(q+1)_i$ valent 1 et les caractères $(q-1)_j$ valent -1.

D'autre part, le bloc principal du normalisateur d'un 2–sous-groupe de Sylow (le sous-groupe de Borel) a q caractères : le caractère trivial 1_1^0, $q-2$ autres caractères de degrés 1, dénotés par $(1)_k$, et un caractère de degré $(q-1)$, dénoté $(q-1)_0$. Tous les caractères de degré 1 prennent la valeur 1 sur les éléments d'ordre pair, alors que le dernier caractère y prend la valeur -1.

On voit donc, par exemple, que l'application de $\mathrm{Irr}(H)$ dans $\mathrm{Irr}(G)$ définie par

$$\begin{pmatrix} (q-1)_0 \\ 1_1^0 \\ 1_1 \\ \vdots \\ 1_{(q-2)} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1_1 \\ -(q-1)_1 \\ (q+1)_1 \\ \vdots \\ -(q-1)_{q/2} \end{pmatrix}$$

convient.

A2. Quelques exemples pour $\ell = 3$

A2.1. Le 3–bloc principal de $PSL_3(4)$

Ce bloc contient 6 caractères irréductibles ordinaires, dont les valeurs sur l'unique classe de conjugaison 3–singulière sont données par:

Matrice de Décomposition généralisée en l'élément d'ordre 3

Caract.	1_1	20	35^1	35^2	35^3	64
1	1	2	-1	-1	-1	1

Le normalisateur d'un 3–sous-groupe de Sylow (extension d'un 3–groupe abélien élémentaire par le groupe des quaternions d'ordre 8) a 6 caractères irréductibles ordinaires, dont les valeurs en un élément 3-singulier sont données par

Matrice de Décomposition généralisée en l'élément d'ordre 3

Caract.	1_1	1_2	1_4	$\bar{1}_4$	2	8
1	1	1	1	1	2	-1

On voit ainsi que l'application définie par

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ 1_4 \\ \bar{1}_4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ -35^1 \\ -35^2 \\ -35^3 \\ 20 \\ 64 \end{pmatrix}$$

est une isotypie entre les 3–blocs principaux des groupes considérés (Cette isométrie parfaite avait été préalablement construite par J.–P. Serre).

A2.2. Le groupe sporadique simple de O'Nan

Les tables de caractères utilisées proviennent de l'Atlas.

Le 3–bloc non principal de défaut non nul

Soit G le groupe de O'Nan. Ce groupe a un 3-bloc de défaut un groupe (3^2), abélien élémentaire d'ordre 9.

En effet, le centralisateur $C_G(3^2)$ a la structure $3^2 \times \mathfrak{A}_6$, et $N_G(3^2)/C_G(3^2)$ est un groupe non abélien d'ordre 8. On en déduit l'existence d'un bloc de défaut 3^2 de $N_G(3^2)$, contenant 6 caractères, dénotés 9.1_1, 9.1_2, 9.1_4, $9.\bar{1}_4$, 9.2, 9.8 (de degrés respectifs 9, 9, 9, 9, 18, 72). Sa matrice de décomposition généralisée en l'unique "élément de Brauer" est

Caract.	9.1_1	9.1_2	9.1_4	$9.\bar{1}_4$	9.2	9.8
	1	1	1	1	2	-1

Le bloc correspondant de G donne la matrice de décomposition généralisée suivante

Caract.	10944	52668	58311^1	58311^2	58311^3	58653
	1	2	-1	-1	-1	1

On en déduit l'isotypie suivante entre les blocs de défaut (3^2) de G et de $N_G(3^2)$:

$$\begin{pmatrix} 9.1_1 \\ 9.1_2 \\ 9.1_4 \\ 9.\bar{1}_4 \\ 9.2 \\ 9.8 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 10944 \\ -58311^1 \\ -58311^2 \\ -58311^3 \\ 52668 \\ -58653 \end{pmatrix}.$$

On peut noter que la correspondance précédente respecte les congruences des degrés modulo 81.

Le 3–bloc principal du groupe de O'Nan

Soit H le normalisateur d'un 3–sous-groupe de Sylow dans le groupe de O'Nan G.

Les éléments d'ordres 3 sont tous conjugués, leurs centralisateurs ont les structures suivantes:

$$C_G(3) = (3^2) \times \mathfrak{A}_6 \quad , \quad C_H(3) = (3^2) \times (3^2.4)$$

et les 3–blocs principaux de ces deux derniers groupes sont parfaitement isométriques grâce à l'application $I^{(3)}$ définie par (exercice pour le lecteur !)

$$I^{(3)} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ 1_4 \\ \overline{1}_4 \\ 4 \\ \overline{4} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ -10 \\ -8 \\ -\overline{8} \\ -5 \\ -\overline{5} \end{pmatrix}.$$

L'image par $I^{(3)}$ des caractères modulaires irréductibles du bloc principal de $C_H(3)$ fournit une base du groupe des caractères modulaires du bloc principal de $C_G(3)$ dont la table des valeurs est donnée ci-dessous.

Classe	(1)	(2)	(4)	(5)	$(\overline{5})$
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	10	-2	0	0	0
ψ_3	-8	0	0	$-\zeta$	$-\overline{\zeta}$
ψ_4	-8	0	0	$-\overline{\zeta}$	$-\zeta$

où $\zeta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

Le calcul des matrices de décomposition généralisées en un élément d'ordre 3 pour les blocs principaux de H (ce calcul a été effectué par Paul Fong) et de G (pour ce dernier groupe, la matrice est relative à la base $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ définie ci-dessus) donne le résultat suivant :

Matrice de Décomposition généralisée en l'élément d'ordre 3 pour H
(lignes: caractères ordinaires; colonnes: caractères modulaires de $C_H(3)$)

	1_1	1_2	1_4	$\overline{1}_4$
1_1	1	0	0	0
1_2	0	1	0	0
2	1	1	0	0
$\overline{2}$	1	1	0	0
5^1	2	1	1	1
5^2	1	2	1	1
5^3	2	1	1	1
5^4	1	2	1	1
5^a	1	0	2	2
5^b	0	1	2	2
4	2	0	1	1
$\overline{4}$	0	2	1	1
8	2	2	2	2
$\overline{8}$	2	2	2	2
80^1	-1	0	0	0
80^2	0	-1	0	0
80^4	0	0	2	-1
$\overline{80}^4$	0	0	-1	2

Matrice de Décomposition généralisée en l'élément d'ordre 3 pour G
En lignes : les caractères ordinaires

	deg. mod 9	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
1_1	1	1	0	0	0
13376	2	1	1	0	0
$\overline{13376}$	2	1	1	0	0
25916	5	2	1	1	1
$\overline{25916}$	5	2	1	1	1
26752	4	0	-1	-2	-2
32395	4	-1	-2	-1	-1
$\overline{32395}$	4	-1	-2	-1	-1
37696	4	-1	0	-2	-2
64790	8	2	2	2	2
$\overline{64790}$	8	2	2	2	2
85064	5	-2	0	-1	-1
116963	8	-1	0	0	0
143374	4	0	2	1	1
175616	8	0	0	2	-1
$\overline{175616}$	8	0	0	-1	2
234080	8	0	-1	0	0
$\overline{234080}$	8	0	-1	0	0

On voit alors que l'application définie par

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ 2 \\ \overline{2} \\ 5^1 \\ 5^2 \\ 5^3 \\ 5^4 \\ 5^a \\ 5^b \\ 4 \\ \overline{4} \\ 8 \\ \overline{8} \\ 80^1 \\ 80^2 \\ 80^4 \\ \overline{80^4} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ -234080 \\ 13376 \\ \overline{13376} \\ 25916 \\ \overline{25916} \\ -32395 \\ -\overline{32395} \\ -37696 \\ -26752 \\ -85064 \\ 143374 \\ 64790 \\ \overline{64790} \\ 116963 \\ 234084 \\ -175616 \\ -\overline{175616} \end{pmatrix}$$

est une isotypie qui induit $I^{(3)}$ au niveau des centralisateurs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Alv] D. Alvis, *The duality operation in the character ring of a finite Chevalley group*, Proc.Symp.Pure Math. **37** (1980), 353–357.

[Al] J.L. Alperin, *Weights for finite groups*, Proc.Symp.Pure Math. **47** (1987), 369–380.

[Al–Br] J.L. Alperin and M. Broué, *Local Methods in Block Theory*, Ann.of Math. **110** (1979), 143–157.

[Bra] R. Brauer, *Types of Blocks of Representations of Finite Groups*, Proc.-Symp.Pure Math. **21** (1971), 7–11.

[Br.1] M. Broué, *On Characters of Height zero*, Proc.Symp.Pure Math. **37** (1980), 393–396.

[Br.2] M. Broué, *Dualité de Curtis et Caractères de Brauer*, C.R.Acad.Sc.Paris **295** (1982), 559–562.

[Br.3] M. Broué, *Les ℓ-blocs des groupes $GL(n,q)$ et $U(n,q^2)$ et leurs structures locales*, Astérisque **133–134** (1986), 159–188.

[Br.4] M. Broué, *Blocs, isométries parfaites, catégories dérivées*, C.R.Acad.Sc.-Paris **307** (1988), 13–18.

[Br.5] M. Broué, *Brauer coefficients of p–subgroups associated with a p–block of a finite group*, Journal of Algebra **51** (1979), 365–383.

[Br.6] M. Broué, *Théorie locale des blocs d'un groupe fini*, in "Proc. of the I.C.M., Berkeley," 1986, pp. 360–368.

[Br–Mi] M. Broué et J. Michel, *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. reine angew. Math. **395** (1989), 56–67.

[Br–Ol] M. Broué and J. Olsson, *Subpairs multiplicities in finite groups*, J. reine angew. Math. **371** (1986), 125–143.

[Br–Pu] M. Broué and L.Puig, *A Frobenius theorem for blocks*, Invent.Math. **56** (1980), 117–128.

[Ca] R. Carter, "Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters," Wiley–Interscience, New-York, 1985.

[Da.1] E.C. Dade, *Endo-permutation modules over p–groups I*, Ann.of Math. **107** (1978), 459–494; *II*, **108** (1978), 317–346.

[Da.2] E.C. Dade, *A correspondence of characters*, Proc.Symp.Pure Math. **37** (1980), 401–403.

[De–Lu.1] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann.of Math. **103** (1976), 103-161.

[De–Lu.2] P. Deligne and G. Lusztig, *Duality for representations of a reductive group over a finite field*, Journal of Algebra **81** (1983), 540–549.

[Di–Mi] F. Digne et J. Michel, *Remarques sur la Dualité de Curtis*, Journal of Algebra **79** (1982), 151–160.

[En.1] M. Enguehard, *Isométries parfaites entre blocs des groupes symétriques*, preprint (1988).

[En.2] M. Enguehard, *Isométries parfaites entre blocs de groupes linéaires ou unitaires*, preprint (1989).

[Fe] W. Feit, "The representation theory of finite groups," North–Holland, Amsterdam, 1982.
[Fo] P. Fong, *On the characters of p–solvable groups*, Trans.A.M.S. **98** (1961), 263–284.
[Gri] P.–P. Grivel, *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*, in "Algebraic D–modules," Academic Press, Orlando, 1987, pp. 1–107.
[Gr] A. Grothendieck, *Groupes des classes des catégories abéliennes et triangulées, complexes parfaits*, in "SGA 5," Springer–Verlag L.N. 589, 1977, pp. 351–371.
[Ha] D. Happel, "Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras," Cambridge University Press, 1988.
[Ku–Pu] B. Külshammer and L. Puig, *Extensions of nilpotent blocks*, à paraître (1988).
[Li] M. Linckelmann, *Le centre d'un bloc à groupes de défaut cycliques*, C.R.-Acad.Sc.Paris **307** (1988), 13–18.
[La–Mi.1] P. Landrock and G. Michler, *Block structure of the smallest Janko group*, Math.Ann. **232** (1978), 205–238.
[La–Mi.2] P. Landrock and G. Michler, *Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type*, Trans.AMS **260** (1980), 83–111.
[Lu] G. Lusztig, *On the Finiteness of the Number of Unipotent Classes*, Invent.Math. **34** (1976), 201–213.
[Pu.1] L. Puig, *Local block theory in p–solvable groups*, Proc.Symp.Pure Math **37** (1980), 385–388.
[Pu.2] L. Puig, *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent.Math. **93** (1988), 77–116.
[Pu.3] L. Puig, *Local extensions in endo–permutation modules split: a proof of Dade's theorem*, in "Séminaire sur les groupes finis, III," Université Paris VII, Paris, 1987, pp. 199–206.
[Ri.1] J. Rickard, *Morita Theory for Derived Categories*, preprint (1987).
[Ri.2] J. Rickard, *Derived Categories and Stable Equivalence*, preprint (1987).
[Se] J.-P. Serre, "Représentations linéaires des groupes finis," Hermann, Paris, 1971.
[Sp–St] T.A. Springer and R. Steinberg, *Conjugacy classes*, in "Seminar on algebraic groups and related finite groups," Springer–Verlag, 1970.
[War] H.M. Ward, *On Ree's series of simple groups*, Trans.Amer.Math.Soc. **121** (1966), 62–89.
[Wat] A. Watanabe, *On generalized decomposition numbers and Fong's reductions*, Osaka J. Math. **22** (1985), 393–400.

D.M.I., Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F–75005 Paris
Courrier électronique: broue@frulm63.bitnet, ou broue@dmi.ens.fr