YVES FÉLIX

La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle

Astérisque, tome 176 (1989)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__176__1_0>

176 ASTÉRISQUE

1989

LA DICHOTOMIE ELLIPTIQUE - HYPERBOLIQUE EN HOMOTOPIE RATIONNELLE

Yves FÉLIX

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. subjects Classification : 55 P 62, 55 P 50, 55 P 15, 55 P 35

INTRODUCTION

Les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ d'un c.w. complexe fini 1-connexe sont des groupes abéliens finiment engendrés. Ils s'écrivent donc sous la forme

$$\pi_i(X) = \mathbf{Z}^{n_i} \oplus T_i ,$$

où T_i est un sous-groupe fini. n_i est alors la dimension de l'espace vectoriel $\pi_i(X) \otimes \mathbf{Q}$.

Les c.w. complexes finis 1-connexes X se répartissent ainsi de manière naturelle en deux classes distinctes : les elliptiques et les hyperboliques, les premiers étant caractérisés par le fait que les entiers n_i sont presque tous nuls. Cette dichotomie naïve est fondamentale. Sa description est le sujet de ce texte.

Les espaces elliptiques et hyperboliques ont des propriétés très différentes. Etre elliptique est une condition très forte. Nous verrons au paragraphe 5 que la caractéristique d'Euler d'un espace elliptique est toujours positive ou nulle, et que sa cohomologie satisfait à la dualité de Poincaré. De plus, si X est elliptique, on a $\sum_i \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q} \leq 2\,\mathrm{cat}(X)$, $\mathrm{cat}(X)$ désignant la catégorie de Lusternik-Schnirelman (la définition est rappelée ci-dessous).

Les premières propriétés des espaces hyperboliques concernent le caractère asymptotique de cette suite n_i.

Théorème 1. *Si X est un c.w. complexe fini 1-connexe, hyperbolique, la suite $\sum_{i=1}^{r} n_i$ a une croissance exponentielle.*

Rappelons de quoi il s'agit. On distingue différents types de croissance. Une suite n_i est dite à *croissance polynomiale* d'ordre d s'il existe des nombres positifs c et d avec

$$n_r \leq c.r^d \quad \forall r \geq 1.$$

La suite n_i est dite à *croissance exponentielle* s'il existe un nombre réel $c > 1$ avec

$$n_r \geq c^r \quad \forall r \geq 1 .$$

La suite n_i est dite à *croissance intermédiaire* dans les autres cas.

La dichotomie se précise : si X est elliptique, le groupe $\pi_i(X)$ est fini pour presque tout i ; si X est hyperbolique, X contient "beaucoup" d'homotopie.

Pour chaque entier p, il existe un degré n tel que $\pi_n(X)$ contient $\mathbf{Z}^p$; la suite $\sum_{i=2}^{n} \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q}$ a une croissance exponentielle.

Cette dichotomie s'étend aux espaces de catégorie (de Lusternik-Schnirelmann) finie, et c'est là son cadre naturel. Un espace topologique X est dit de catégorie inférieure ou égale à n si et seulement si X peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans X. Ainsi, par exemple, un C.W. complexe 1-connexe de dimension n est de catégorie inférieure ou égale à n. Introduit par Lusternik et Schnirelmann dans le contexte du calcul des variations, cet invariant numérique s'est avéré très utile en analyse et en topologie.

De tels théorèmes de dichotomie dans la croissance apparaissent aussi dans d'autres domaines des mathématiques, et notamment en théorie des groupes. Si G est un groupe engendré par $g_1, g_2, \ldots, g_n$, tout élément g de G peut être représenté par un mot $g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \ldots g_{i_p}^{\alpha_p}$; l'entier $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_p|$ est appelé la longueur du mot. Par définition, la norme de g (relativement à $g_1, \ldots, g_n$) est la longueur minimale des mots représentant g. On obtient ainsi une suite d'entiers b_n, où b_n désigne le nombre d'éléments de G de norme inférieure à n. La croissance de la suite b_n est appelée croissance du groupe. Posé en 1968 par Milnor, le problème de la croissance des groupes a pour premier résultat marquant le théorème de dichotomie de Tits (1972) : "Tout sous-groupe finiment engendré d'un groupe de Lie connexe a une croissance ou polynomiale, ou exponentielle". Dès lors se pose le problème de l'existence d'un groupe à croissance intermédiaire. Il faut attendre jusqu'en 1983 (Grigorchuk) pour voir apparaître le premier exemple de groupe finiment engendré à croissance intermédiaire. Et aujourd'hui, le problème de l'existence d'un groupe de présentation finie à croissance intermédiaire est encore ouvert.

Pour démontrer le théorème de dichotomie, nous utiliserons les modèles minimaux de Sullivan. Les modèles minimaux sont des objets algébriques déterminés à isomorphisme près par le type d'homotopie rationnelle des espaces. Introduits au début des années 1970 à partir des travaux de Quillen et Sullivan, ils contiennent tous les invariants homotopiques rationnels des espaces.

Rappelons qu'un espace 1-connexe est dit rationnel si ses groupes d'homotopie sont des $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels. A chaque espace topologique 1-connexe X, on peut associer son rationalisé $X_{\mathbf{Q}}$. Il existe diverses constructions de $X_{\mathbf{Q}}$; nous les rappellerons au paragraphe 2 : $X_{\mathbf{Q}}$ est caractérisé à équivalence d'homotopie près comme le seul espace rationnel Y pour lequel il existe une application continue $f : X \to Y$ induisant un isomorphisme en cohomologie rationnelle. Le type d'homotopie de $X_{\mathbf{Q}}$ s'appelle le type d'homotopie rationnelle de X.

Un des problèmes à l'origine de l'homotopie rationnelle était d'associer de manière fonctorielle, à chaque espace X, une algèbre différentielle graduée commutative dont la cohomologie soit isomorphe à la cohomologie rationnelle de X. Déjà en 1950, Cartan ([23]) construisait pour chaque espace homogène une algèbre différentielle graduée commutative libre de même cohomologie que X. En 1955, Thom ([97]) posait le problème d'associer à chaque C.W. complexe une algèbre de cochaînes commutatives. C'est Quillen ([86]) en 1969, qui le premier établit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des espaces rationnels connexes et simplement connexes et une catégorie algébrique, celle des algèbres de Lie différentielles graduées, 1-réduites.

Associant à chaque espace X l'algèbre différentielle des formes P.L. sur X, Sullivan ([93]) généralise le foncteur formes sur une variété et met au point une théorie fructueuse en établissant lui-aussi une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des espaces rationnels 1-connexes de type fini et la catégorie des $\mathbf{Q}$ -algèbres différentielles graduées commutatives 1-connexes de type fini. Il associe alors à chaque espace X son modèle minimal : C'est une algèbre différentielle graduée commutative $(\Lambda Z, d)$, ΛZ désignant le produit tensoriel de l'algèbre extérieure sur Z^{impair} par l'algèbre symétrique sur Z^{pair}. La cohomologie rationnelle de X, $H^*(X;\mathbf{Q})$, et l'espace vectoriel d'homotopie rationnelle $\pi_*(X) \otimes \mathbf{Q}$ sont respectivement isomorphes à $H^*(\Lambda Z, d)$ et $\mathrm{Hom}\,(Z, \mathbf{Q})$.

Pendant les années 75-80, l'homotopie rationnelle a développé et raffiné ses modèles. C'est en 1977 qu'Halperin a écrit la première version de *Lectures on minimal models* ([60]). Cette époque est marquée par un intérêt particulier pour la formalité des espaces : Un espace X est dit formel s'il existe un morphisme d'algèbres différentielles graduées du modèle minimal de X vers $(H^*(X;\mathbf{Q}), 0)$ induisant un isomorphisme en cohomologie. Le but est clair: Si un espace X est formel, tous les invariants homotopiques rationnels de X s'obtiennent en fonction de $H^*(X;\mathbf{Q})$. On a ainsi par exemple un isomorphisme $H_*(\Omega X, \mathbf{Q}) = \mathrm{Tor}^{H^*(X,\mathbf{Q})}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$. Dans ([25]), Deligne, Griffiths, Morgan et Sullivan montrent que les variétés Kahleriennes compactes 1-connexes sont formelles. Différents auteurs construisent des théories d'obstruction à la formalité ([63],[28]).

La première application des modèles minimaux fut la preuve par Sullivan et Vigué de l'existence d'une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes sur toute variété M dont la cohomologie rationnelle n'est pas engendrée par un seul générateur. Celle-ci a été suivie par le théorème de Allday-Halperin : "si un tore T agit librement dans un espace homogène G/H, alors $\dim T \leq \operatorname{rang} G - \operatorname{rang} H$". C'est en étudiant ce problème en 1976 que Halperin a trouvé les premières propriétés des espaces elliptiques.

L'intérêt de l'homotopie rationnelle pour la catégorie de Lusternik-Schnirelmann date de 1979 ([77],[30]). La catégorie joue en fait un rôle primordial en homotopie rationnelle, grâce au théorème suivant (le "mappping theorem") : Si $f : X \to Y$ est une application continue et si $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q} : \pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} \to \pi_*(Y) \otimes \mathbf{Q}$ est injective, alors $\operatorname{cat}(X_{\mathbf{Q}}) \leq \operatorname{cat}(Y_{\mathbf{Q}})$. Ce théorème est en fait à la base de la croissance exponentielle.

Avec la cohomologie rationnelle, un invariant très important est l'algèbre de Lie graduée $L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$. Rappelons-en brièvement la définition (§7): Si α et β sont deux éléments homogènes de L_X, leur crochet $[\alpha, \beta]$ est défini comme suit : Représentons α et β par des applications continues $f : S^p \to \Omega X$ et $g : S^q \to \Omega X$, et considérons l'application $h : S^p \times S^q \to \Omega X$ définie à homotopie près par

$$h(x, y) = f(x).g(y).f(x)^{-1}.g(y)^{-1}.$$

Comme la restriction de h à $S^p \vee S^q$ est homotopiquement triviale, h induit une application quotient $S^{p+q} \simeq S^p \wedge S^q \to \Omega X$ dont la classe d'homotopie représente le crochet $[\alpha,\beta]$. L'algèbre de Lie L_X joue pour les espaces 1-connexes un rôle analogue à celui joué par le groupe fondàmental $\pi_1(X)$ pour un espace asphérique *. Par exemple, si X est 1-connexe, $H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) = UL_X$ et si X est asphérique, $H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[\pi_1(X)]$.

Quelles sont les conditions imposées à une algèbre de Lie graduée pour être l'algèbre de Lie d'homotopie d'une variété compacte, d'un C.W. complexe fini, d'un C.W. complexe de catégorie finie ? La première réponse à cette question tient compte de la dichotomie précédente.

* La correspondance n'est évidemment pas parfaite : un espace asphérique est entièrement défini par son groupe fondamental, et deux espaces 1-connexes différents peuvent avoir même algèbre de Lie d'homotopie.

Théorème 2. *Si X est elliptique, l'algèbre de Lie L_X est nilpotente et l'algèbre $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est noetherienne.*

Si X est hyperbolique, la réunion de tous les idéaux résolubles de L_X est un idéal de dimension finie. En particulier, L_X n'est pas résoluble. De même, $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ n'est pas noetherienne.

Ce théorème est une illustration de la dichotomie ; d'autres résultats plus précis se trouvent dans le texte (§11, 12). Pour la plupart ils se déduisent d'un passage topologie-algèbre reliant la L.S. catégorie de X à la profondeur de son algèbre de Lie L_X.

Rappelons que la profondeur d'une algèbre de Lie L est le plus petit entier n tel que $\mathrm{Ext}^n_{UL}(\mathbf{Q}, UL) \neq 0$. Si $\mathrm{Ext}^*_{UL}(\mathbf{Q}, UL) = 0$, on pose $\mathrm{prof}(L) = \infty$. Si L est une algèbre de Lie classique de dimension finie, alors $\mathrm{prof}(L) = \dim L$. La liaison entre cet invariant et $\mathrm{cat}\, X$ s'énonce comme suit :

Théorème 3. *Si X est un espace 1-connexe à nombres de Betti finis, alors*

$$\mathrm{prof}(L_X) \leq \mathrm{cat}\, X\ .$$

Les problèmes de structure de L_X sont ainsi ramenés à l'étude des propriétés des algèbres de Lie graduées de type fini et de profondeur finie. Par exemple, l'étude des espaces X de catégorie deux se réduit à celle des algèbres de Lie de profondeur inférieure ou égale à deux. On retrouve par exemple le théorème de Bogvad : si X est hyperbolique et si $\mathrm{cat}\, X = 2$, alors $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ contient une algèbre tensorielle sur deux générateurs.

A la fin du paragraphe 14, nous résumons les propriétés de L_X, mettons en évidence les applications à la géométrie et présentons les conjectures de Moore, montrant ainsi que la dicholomie dépasse le cadre rationnel.

Dans ce texte, nous avons voulu nous concentrer sur la dichotomie rationnelle. Les théorèmes présentés dépassent en réalité très souvent le cadre des espaces rationnels. Ainsi, le théorème 3 se généralise à tout corps k de manière naturelle :

Théorème 4 ([33]) *Si X est un espace 1-connexe à nombres de Betti finis, alors*

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega X;k)) \leq \mathrm{cat}\, X\ .$$

Il en résulte en particulier que tout idéal de Hopf résoluble de $H_*(\Omega X; k)$ a un gradué associé de la forme $k[x_1, x_2, ..., x_n] \otimes E$ avec E abélien de dimension finie et $n \leq \mathrm{cat}\, X$.

Une analogie très étroite entre l'homotopie rationnelle et la théorie cohomologique des anneaux locaux nous a permis d'y définir une dichotomie similaire avec d'une part les intersections complètes et d'autre part les anneaux A qui ne le sont pas ([35]). En particulier, la série $\sum_p \dim \mathrm{Tor}_p^A(k,k)$ a une croissance polynomiale dans le premier cas et exponentielle dans le second.

Une grande partie de mes contributions originales au sujet présenté ici est due à une collaboration avec S. Halperin, J.M. Lemaire et J.C. Thomas. Cette collaboration m'a beaucoup apporté et je leur en suis reconnaissant.

Je tiens à remercier Madame R. Bérat et Madame C. Evrard du secrétariat scientifique de l'U.F.R. de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois pour le soin et l'attention apportés à la dactylographie de ce texte.

Je remercie également D. Tanré et J.C. Thomas d'avoir bien voulu relire ce texte. Leurs remarques et suggestions m'ont été très précieuses.

TABLE DES MATIÈRES

1 - DÉFINITION DE LA CATÉGORIE DE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN.

1.1. - Généralités.

La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace X est un entier noté $\text{cat}(X)$ défini par : $\text{cat}(X) \leq n$ si et seulement si X peut être recouvert par $(n+1)$ ouverts contractiles dans X. L'entier $\text{cat}(X)$ est un invariant homotopique.

En approche directe, la détermination de $\text{cat}(X)$ est malaisée. On a cependant, de façon évidente :

Lemme 1.1. $\text{cat}(X) = 0$ *si et seulement si* X *est contractile.*

Lemme 1.2. *Si* C_f *désigne le cône de* $f : X \to Y$, *alors* $\text{cat}(C_f) \leq \text{cat}(Y)+1$.

Une première estimation de $\text{cat}(X)$ par la topologie algébrique est fournie par la nilpotence de l'algèbre de cohomologie réduite de X à coefficients dans l'anneau A , $\tilde{H}^*(X;A)$. Si R est un anneau, posons $\text{nil}\, R = \inf\{n | R^{n+1} = 0\}$.

Lemme 1.3. $\text{cat}\,(X) \geq \text{nil}\, \tilde{H}^*(X;A)$.

■ Démonstration du lemme 1.3. (Par ex. [69]). Si U est contractile dans X, l'injection $u : U \to X$ est une application homotopiquement triviale. Le morphisme induit en cohomologie

$$u^* : \tilde{H}^*(X;A) \to \tilde{H}^*(U;A)$$

est trivial. Le morphisme de restriction

$$r : H^*(X,U;A) \to \tilde{H}^*(X;A)$$

est donc surjectif. Considérons un recouvrement ouvert $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ de X formé d'ouverts contractiles dans X. Si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont des éléments de $\tilde{H}^*(X;A)$, on considère $y_i \in H^*(X,U_i;A)$ avec $r_i(y_i) = x_i$.

Le cup produit $y_1 \ldots y_{n+1}$ appartient à $H^*(X, U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{n+1};A)$. Ce dernier groupe est nul car $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{n+1} = X$, et, par suite, le produit $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est nul. ■

Les progrés décisifs dans l'estimation de la L.S. catégorie s'appuient sur les interprétations de Whitehead ([99]) et Ganea ([12]) que nous développons dans les §1.2. et 1.3. suivants.

1.2. - Les bouquets garnis.

Soit X un espace topologique pointé avec point de base noté $*$. Nous appellerons *bouquet garni* de n copies de X (en anglais "fat wedge") le sous-espace $T^n(X)$ de $X^n = X \times X \times \ldots \times X$ (n fois) consistant des n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec au moins un x_i égal à $*$.

Proposition 1.2 ([99], [12]). *$\mathrm{cat}(X) \leq n$ ssi l'application diagonale $\Delta_X : X \to X^{n+1}$ se factorise à homotopie près par $T^{n+1}(X)$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Delta_X"] \arrow[dr] & & X^{n+1} \\ & T^{n+1}(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Corollaire 1. *$\mathrm{cat}(X) \leq 1$ si et seulement si X est un co-H-espace.*

Corollaire 2 ([69], prop. 5.1). *Si X est $(r-1)$-connexe, $r > 1$, de dimension p, alors $\mathrm{cat}(X) \leq p/r$.*

■ On peut supposer X $(r-1)$-réduit. En supposant X^{n+1} muni de la structure cellulaire produit, $T^{n+1}(X)$ est un sous-complexe de X^{n+1} contenant le $(((n+1) \cdot r) - 1)$-squelette de X^{n+1}. Si $p < (n+1)r$, l'application diagonale $X \to X^{n+1}$ se factorise par $T^{n+1}(X)$. Il en résulte que $\mathrm{cat}(X) \leq p/r$. ■

1.3. - La construction de Ganea.

Notons Δ^{n-1} le $(n-1)$-simplexe standard

$$\Delta^{n-1} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\} .$$

Les opérateurs face $\alpha_j : \Delta^{n-2} \to \Delta^{n-1}$, $1 \leq j \leq n-1$, sont définis par $\alpha_j(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{n-1})$. Le *joint* $A_1 * A_2 * \ldots * A_n$ de n espaces topologiques pointés $(A_1, *)$, $(A_2, *), \ldots, (A_n, *)$ est alors défini par

$$A_1 * A_2 * \ldots * A_n = \frac{(A_1 \times \ldots \times A_n) \times \Delta^{n-1}}{\sim} ,$$

où pour tout j

$$\big((a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n), \alpha_j(t)\big) \sim \big((a_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{*}, \ldots, a_n), t\big) .$$

$A_1 * \ldots * A_n$ est l'ensemble des "barycentres"

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \ ,$$

où $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$, le tout soumis à la condition : $\sum_{i=1}^n t_i a_i = \sum_{i=1}^n t'_i a_i$ si pour chaque i soit $t_i = t'_i$ soit $a_i = *$.

Le joint de 2 espaces $X * Y$ est homéomorphe à $(X \times CY) \cup_{X\times Y} (CX \times Y)$. L'homéomorphisme $\varphi : (X \times CY) \cup_{X\times Y} (CX \times Y) \to X * Y$ est défini par

$$\varphi(x,(y,t)) = (1 - \frac{t}{2})x + \frac{t}{2}y \qquad (y,t) \in CY \ ,$$
$$\varphi((x,t),y) = \frac{t}{2}x + (1 - \frac{t}{2})y \qquad (x,t) \in CX \ ,$$

avec $CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}$.

Soit A un espace. Le joint itéré $(n-1)$ fois de l'espace A avec lui-même est noté $\overset{n}{*}A$. Notons $p_{ij} = A^i \to A^{i-1}$, $1 \leq j \leq i \leq n$, l'application définie par

$$p_{ij}(a_1, \ldots, a_i) = (a_1, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_i) \ .$$

On a alors :

$$\overset{n}{*}A = \frac{\cup_{1 \leq i \leq n} A^i \times \Delta^i}{\sim} \ ,$$

avec $\big(a, \alpha_j(t)\big) \sim \big(p_{ij}(a), t\big)$, $a \in A^i$.

Posons $\Omega X = \{(\alpha, r)\ ,\ r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $\alpha : [0,r] \to X |\ \alpha(0) = \alpha(r) = *\}$.

Notons $J_n = \overset{n}{*}\Omega X$. La composition à droite par un lacet définit une action de ΩX sur J_n

$$J_n \times \Omega X \to J_n \ ,$$

$$(\sum t_i g_i, g) \to \sum t_i g_i g \ .$$

Désignons alors par $\Omega XP(n-1)$ l'espace des orbites pour cette action. Nous obtenons une fibration $\Omega X \to J_n \to \Omega XP(n-1)$ représentée par une application classifiante

$$\Omega XP(n-1) \xrightarrow{p_{n-1}} B\Omega X \cong X \ .$$

Convertissons p_{n-1} en une fibration, nous obtenons un diagramme de fibrations

$$\begin{tikzcd}
\Omega X = J_1 \arrow[r] \arrow[d] & J_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & J_n \arrow[r, "k_n"] \arrow[d] & J_{n+1} \arrow[d] \\
\Omega X P(0) \arrow[r] \arrow[drr] & \Omega X P(1) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots & \Omega X P(n-1) \arrow[r] \arrow[dl] & \Omega X P(n) \arrow[dll] \\
 & & X & &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que J_n est normalement inclus dans J_{n+1}. Lorsque n tend vers l'infini, $J(\infty) = \cup_n J_n$ est contractile ([81]). Il en résulte des équivalences d'homotopie

$$\Omega X P(\infty) \cong B\Omega X \cong X \ .$$

Proposition 1.3.1. ([48]). cat$(X) \leq n$ *si et seulement si la fibration* p_n : $\Omega X P(n) \to X$ *a une section homotopique.*

Pour augmenter notre intuition sur les applications p_n, nous en donnons maintenant une autre description.

Considérons la fibration en espaces de lacets de base X :

$$\Omega X \xrightarrow{i} EX \xrightarrow{p} X,$$

où $EX = \{(\alpha, r)\ , r \in \mathbf{R}_{\geq 0} \text{ et } \alpha : [0,r] \to X,\ \alpha(0) = *\}$; $p(\alpha) = \alpha(r)$.

Formons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[d, "i"] & F_1 \arrow[d, "i_1"] & F_2 \arrow[d, "i_2"] & & F_n \arrow[d, "i_n"] & \\
EX \arrow[r, "j_0"] \arrow[drrr] & E_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr] & E_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[dr] & \cdots & E_n \arrow[r, "j_n"] \arrow[dl, "q_n"'] & E_{n+1} \arrow[dll] \\
 & & & X & &
\end{tikzcd}$$

où 1) $j_n : E_n \to E_{n+1}$ désigne la cofibre de i_n.

2) Comme $q_n i_n$ est l'application constante, q_n se factorise à homotopie près par E_{n+1}, ceci définit q_{n+1}.

3) F_{n+1} désigne la fibre homotopique de q_{n+1}.

Proposition 1.3.2. *Les fibrations* $F_n \xrightarrow{i_n} E_n \xrightarrow{q_n} X$ *et* $J_{n+1} \to \Omega XP(n) \xrightarrow{p_n} X$ *ont même type d'homotopie.*

■ Si Y est un H-espace pointé agissant librement à droite sur X, on peut regarder l'espace $\bar{X}$ des orbites pour cette action. L'injection naturelle $k : X \to X * Y$ définie par $k(x) = 1 \cdot x + 0 \cdot *$ induit par passage au quotient un morphisme $\bar{k} : \bar{X} \to \overline{X * Y}$. La suite

$$X \xrightarrow{p} \bar{X} \xrightarrow{\bar{k}} \overline{X * Y}$$

est une cofibration. Il suffit de voir que $\overline{X * Y}$ est homéomorphe à C_p la cofibre homotopique de p. $C_p = (X \times [0,1]) \cup \bar{X} / \sim$ avec $(x, 0) \sim *$ et $(x, 1) \sim p(x)$. Définissons $\theta : C_p \to \overline{X * Y}$ en posant

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= [tx + (1-t)*] \,, \qquad & x \in X \,, \\ \theta(z) &= \bar{k}(z) \,, \qquad & z \in \bar{X} \,. \end{aligned}$$

θ est clairement un homéomorphisme.

Appliquons ceci à la construction des espaces $\Omega XP(n)$. Les suites

$$J_{n+1} \to \Omega XP(n) \to \Omega XP(n+1)$$

sont alors des cofibrations. Ceci permet de définir par récurrence sur n des morphismes $\varphi_n : E_n \to \Omega XP(n)$ induisant des isomorphismes en homologie. ■

La construction de Ganea est, de plus, reliée à celle des bouquets garnis. Dans [49], Gilbert montre en effet l'existence d'une somme amalgamée homotopique

$$\begin{tikzcd} \Omega XP(n) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ T^{n+1}(X) \arrow[r] & X^{n+1} \,. \end{tikzcd}$$

L'existence d'une section homotopique de p_n est donc équivalente à celle d'une factorisation homotopique de Δ à travers $T^{n+1}(X)$. Ceci démontre la proposition 1.3.

Dans le même texte ([49]), Gilbert montre que les injections $(1_X)^n \times \Delta$: $X^{n+1} \to X^{n+2}$ induisent par image inverse les morphismes :

$$\Omega XP(n) \to \Omega XP(n-1) .$$

1.4. - La suite spectrale de Milnor-Moore et l'invariant e de Toomer.

La L.S. catégorie d'un espace X est un invariante homotopique difficile à appréhender. L'inégalité (Lemme 1.3)

$$\operatorname{nil} \tilde{H}^*(X;A) \leq \operatorname{cat}(X)$$

donne une première approximation de $\operatorname{cat}(X)$. La construction des espaces $\Omega XP(n)$ va en fournir une autre.

Soit k un corps, la filtration de $X \cong \Omega XP(\infty)$ par les sous-espaces $X_n = \Omega XP(n)$ fournit une suite spectrale $E^r_{p,q}$ convergeant vers $H_*(X;k)$. Elle peut être décrite comme suit. Notons

$$i : H_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \to H_{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}) ,$$
$$J_{p,q} : H_{p+q}(X_p) \to H_{p+q}(X) ,$$

les homomorphismes induits par les inclusions.

Désignons par :

$$\partial : H_{p+q}(X_{p+r-1}, X_{p-1}) \to H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-r-1}) ,$$

l'homomorphisme bord du triple $(X_{p+r-1}, X_{p-1}, X_{p-r-1})$. Alors

$$E^r_{p,q} = \text{Image de } i .$$
$$E^\infty_{p,q} = \text{Image de } J_{p,q}/\text{Image de } J_{p-1,q+1} .$$
$$d^r = \partial | E^r_{p,q} .$$

Avec les notations introduites en 1.3, on a en particulier :

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(J_p;k) = [\otimes^p \tilde{H}_*(\Omega X;k)]_q \quad \text{pour} \quad q > 0 .$$

Pour mieux comprendre cette suite spectrale, il est utile de remarquer qu'elle est isomorphe à la suite spectrale de la bar construction appliquée à l'algèbre différentielle graduée $C_*(\Omega X;k)$.

Bar construction. Si (A, d_A) est une algèbre différentielle graduée connexe $(A_0 = k)$ avec d_A de degré -1, on note $B(A)$ (resp. $\bar{B}(A)$) la bar construction (resp. la bar construction réduite) sur A.

Posons $\bar{A} = \oplus_{p>0} A_p$, $(s\bar{A})_p = \bar{A}_{p-1}$ et $(s\bar{A})^{\otimes p} = s\bar{A} \otimes \ldots \otimes s\bar{A}$, p fois. Comme coalgèbre, $\bar{B}(A) = T(s\bar{A}) = \oplus_{k\geq 0}(s\bar{A})^{\otimes k}$.

$$\bar{\Delta}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{p=1}^{n-1}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \ldots \otimes v_n).$$

On note usuellement $[a_1|\ldots|a_k]$ pour $sa_1 \otimes \cdots \otimes sa_k$. La différentielle $\bar{d}$ sur $\overline{B}(A)$ est alors définie par $\bar{d} = d_E + d_I$,

$$d_E([a_1|\ldots|a_k]) = -\sum_{1\leq r<k} (-1)^{n(r)}[a_1|\ldots|a_r a_{r+1}|\ldots a_k] \ ,$$

$$d_I([a_1|\ldots|a_k]) = -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{n(i-1)}[a_1|\ldots|d_A a_i|\ldots a_k] \ ,$$

$n(r) = [\sum_{i=r}^{r} \deg(a_i)] + r$. Bidegré $[a_1|\ldots|a_k] = (k, \sum |a_i| - 1)$. d_E et d_I sont de bidegrés respectifs $(-1, 0)$ et $(0, -1)$.

On définit alors $B(A)$: $B(A) = A \otimes \bar{B}(A)$. Le bidegré de $a \otimes \varphi$ est défini comme étant $(0, |a|)$ + bidegré φ . $B(A)$ possède une différentielle d définie par

$$\begin{aligned} d(a \otimes [a_1|\ldots a_k]) =& d_A(a) \otimes [a_1|\ldots|a_k] + (-1)^{\deg(a)} a \otimes \bar{d}[a_1|\ldots|a_k] \\ &+ (-1)^{\deg(a)} aa_1 \otimes [a_2|\ldots|a_k] \ . \end{aligned}$$

$B(A)$ est un A-module libre différentiel acyclique et la projection naturelle $\varepsilon \otimes 1$: $B(A) \to \bar{B}(A)$ induit un isomorphisme bigradué

$$H_*(\bar{B}(A), \bar{d}) \cong H_*\big(k \otimes_A (A \otimes B(A)), 1 \otimes d\big) \ .$$

$H_*(\bar{B}(A), \bar{d})$ est, par conséquent, isomorphe à l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}^A(k,k)$. Les sous-espaces $\bar{B}(A)_i = \oplus_{k=0}^{i} \bar{A}^{\otimes k}$ forment une filtration de $\bar{B}(A)$ et induisent une suite spectrale convergeant vers $H_*(\bar{B}(A))$. L'isomorphisme $H_*(\bar{B}(A), d_I) \cong \bar{B}(H_*(A))$ induit les isomorphismes :

$$E^1 = H_*(\bar{B}(A), d_I) \cong \bar{B}(H_*(A)) \ .$$
$$E^2 = H_*(\bar{B}(H_*(A)), d_E) \cong \mathrm{Tor}^{H_*(A)}(k,k) \ .$$

Cette suite spectrale s'appelle suite spectrale de Milnor-Moore associée à l'algèbre différentielle graduée (A, d_A) .

Lien entre la Bar construction et la construction de Ganea.

Nous désignerons par $C_*(\Omega X; k)$ l'espace vectoriel engendré par les cubes singuliers normalisés de ΩX avec sommets au point de base. (Normalisés signifiant modulo les cubes singuliers dégénérés de ΩX) . Il est bien connu ([2]) que $C_*(\Omega X; k)$ est une algèbre différentielle graduée connexe.

Théorème 1.4.([51], th. 3.3). *La suite spectrale obtenue en filtrant $\Omega XP(\infty)$ par les sous-espaces $\Omega XP(n)$ est isomorphe à partir du terme E^1 à la suite spectrale de Milnor-Moore associée à $C_*(\Omega X; k)$.*

■ Posons $A = C_*(\Omega X; k)$. Construisons un morphisme de A-module différentiel

$$\mu : B(A) \to C_*(J_\infty; k) ,$$

préservant les filtrations, c'est-à-dire vérifiant :

$$\mu(A \otimes \bar{B}(A)_i) \subset C_*(J_{i+1}; k) .$$

On en déduira par passage au quotient un morphisme de complexes :

$$\bar{\mu} : \bar{B}(A) \to C_*(\Omega XP(\infty); k) ,$$

avec $$\bar{\mu}(\bar{B}(A)_i) \subset C_*(\Omega XP(i); k) .$$

On construit μ par récurrence sur i . Pour $i = 0$, μ est simplement l'identité $A = C_*(\Omega X; k)$; supposons avoir construit un morphisme de A-modules,

$$\mu_i : A \otimes \bar{B}(A)_i \to C_*(J_{i+1}; k) ,$$

induisant un isomorphisme en homologie. Le complexe $\hat{A}_{i+1} = A \otimes \bar{B}(A)_i + k \otimes \bar{B}(A)_{i+1}$ est acyclique et le morphisme $J_{i+1} \to J_{i+2}$ homotopiquement trivial ; il en résulte que μ_i s'étend en un morphisme de complexes

$$\hat{\mu}_i : \hat{A}_{i+1} \to C_*(J_{i+2}; k) ,$$

que l'on peut étendre à nouveau par la structure de A-module de $C_*(J_{i+2}; k)$ en un morphisme

$$\mu_{i+1} : A \otimes \bar{B}(A)_{i+1} \to C_*(J_{i+2}; k) .$$

Il s'ensuit que $\bar{\mu}$ induit un isomorphisme

$$\tilde{\mu} : H\big(\bar{B}(A)_{i+1}, \bar{B}(A)_i\big) \cong H\left(\hat{A}_{i+1}, A \otimes \bar{B}(A)_i\right) \cong H\big(\Omega XP(i+1), \Omega XP(i); k\big) .$$

Le lemme des 5 montre alors que μ_{i+1} induit un isomorphisme en homologie. ∎

Invariant e de Toomer.

Si k est un corps et X un espace, on peut définir un entier $e_k(X)$. Il s'appelle invariant de Toomer ou longueur de Moore de X. Il est défini comme le supremum des entiers l tel que $E^{\infty}_{l,*} \neq 0$ dans la suite spectrale de Milnor-Moore [98].

Il résulte clairement de la description précédente de $E^{\infty}_{l,*}$ que $e_k(X) \leq n$ si et seulement si le morphisme $H_*(\Omega XP(n); k) \stackrel{(p_n)_*}{\to} H_*(X; k)$ est surjectif. Comme $\mathrm{cat}(X)$ est le plus petit entier n tel que la projection $p_n : E_n \to X$ ait une section, on a :

Proposition 1.4. *$e_k(X) \leq \mathrm{cat}\,(X)$ pour tout corps k.*

Le lemme 1.2 montre que $\mathrm{cat}\,(\Omega XP(n)) = \mathrm{cat}\,(E_n) \leq n$ et donc nil $\tilde{H}^*(E_n; k) \leq n$. Il en résulte que :

$$\mathrm{nil}\, \tilde{H}^*(X; k) \leq e_k(X) \leq \mathrm{cat}(X) .$$

Nous noterons $e_0(X)$ l'entier $e_k(X)$ défini pour $k = \mathbf{Q}$.

2 - ESPACES RATIONNELS ET MODÈLES MINIMAUX.

2.1. - Rationalisation d'un espace.

On peut concevoir le théorème suivant de Serre ([90]) comme point de départ de l'homotopie rationnelle.

Théorème. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre c.w. complexes 1-connexes de type fini. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*
(1) $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q} : \pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} \to \pi_*(Y) \otimes \mathbf{Q}$ *est un isomorphisme.*
(2) $H_*(f;\mathbf{Q}) : H_*(X;\mathbf{Q}) \to H_*(Y;\mathbf{Q})$ *est un isomorphisme.*

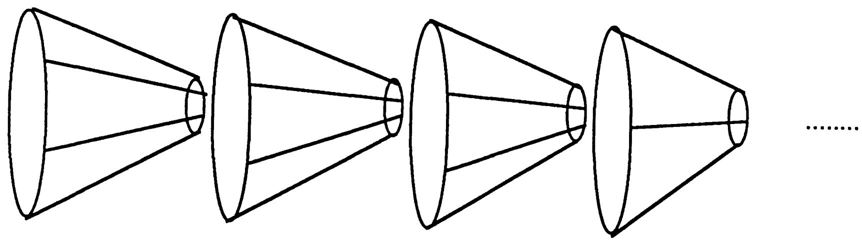
Un espace X 1-connexe est dit *rationnel* si ses groupes d'homotopie sont des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels, ou, de façon équivalente, si ses groupes d'homologie à coefficients entiers sont des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels.

$f : X \to X_0$ est dite une *rationalisation* de X si X_0 est un espace rationnel et $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q}$ un isomorphisme. Par exemple, si $n \geq 2$, $K(G,n) \to K(G \otimes \mathbf{Q}, n)$ est une rationalisation.

Tout c.w. complexe 1-connexe admet une rationalisation, unique à équivalence d'homotopie près, que l'on peut construire de diverses façons :

Construction cellulaire : Si S^n désigne la n-sphère usuelle, choisissons pour chaque entier $p \geq 2$ une application $p : S^n \to S^n$ de degré p et définissons la sphère rationnelle $(S^n)_0$ comme étant le télescope infini construit à partir de la suite

$$S^n \xrightarrow{\times 2} S^n \xrightarrow{\times 3} S^n \longrightarrow \dots$$



L'inclusion de S^n dans la sphère de gauche localise l'homologie. On a donc $\tilde{H}_*((S^n)_0;\mathbf{Z}) \cong \tilde{H}_*(S^n;\mathbf{Q})$.

Si maintenant X est un c.w. complexe 1-réduit, on peut construire une rationalisation $g : X \to X_0$ par récurrence sur le squelette de X :

$$X^{(2)} \subset X^{(3)} \subset \ldots \subset X^{(n)} \subset X^{(n+1)} \subset \ldots$$

Supposons avoir construit $g_n : X^{(n)} \to (X^{(n)})_0$. Notons :

$$\varphi : VS^n \to X^{(n)} ,$$

l'application d'attachement des $(n+1)$-cellules de X . φ induit une application

$$\varphi_0 : V(S^n)_0 \to (X^{(n)})_0 ,$$

dont nous noterons la cofibre par $\left(X^{(n+1)}\right)_0$. g_n s'étend alors à homotopie près en un morphisme $g_{n+1} = X^{(n+1)} \to \left(X^{(n+1)}\right)_0$ induisant un isomorphisme en cohomologie rationnelle.

Construction par tour de Postnikov.

Tout espace X 1-connexe admet une tour de fibrations dite tour de Postnikov

$$\ldots \to X_{n+1} \overset{p_{n+1}}{\to} X_n \overset{p_n}{\to} \ldots\ldots X_3 \to X_2 ,$$

jouissant des propriétés suivantes:

(1) X est la limite homotopique inverse de ce diagramme;

(2) les fibrations p_n sont des fibrations image réciproque des fibrations universelles

$$K(\pi_n(X), n) \simeq \Omega K(\pi_n(X), n+1) \to EK(\pi_n(X), n+1) \to K(\pi_n(X), n+1)$$

au moyen d'applications continues $f_n : X_{n+1} \to K(\pi_n(X), n+1)$.

En particulier (1) fournit des applications continues $g_n : X \to X_n$ vérifiant $p_n g_n \sim g_{n-1}$ et $\pi_*(g_n)$ est un isomorphisme pour $* \leq n$.

Si $X_n \overset{\varphi_n}{\to} Y_n$ est une rationalisation, l'application composée

$$X_n \overset{f_{n+1}}{\to} K(\pi_{n+1}(X), n+2) \to K(\pi_{n+1}(X) \otimes \mathbf{Q}, n+2)$$

se factorise à homotopie près par par Y_n. En prenant l'image inverse de la fibration en espaces de lacets de base $K(\pi_{n+1}(X) \otimes \mathbf{Q}, n+2)$, on obtient alors une fibration

$$Y_{n+1} \overset{q_n}{\to} Y_n .$$

Par définition des espaces X_n, on a un morphisme $\varphi_{n+1} : X_{n+1} \to Y_{n+1}$ vérifiant $q_n\varphi_{n+1} \simeq \varphi_n p_n$. Les longues suites exactes d'homotopie des fibrations entraînent que φ_{n+1} est une rationalisation.

Localisation par télescope.

Supposons que l'espace X possède un ensemble dénombrable d'endomorphismes φ_i, $i \geq 1$ satisfaisant aux conditions suivantes
(1) les morphismes $H_*(\varphi_i; \mathbf{Q})$ sont des isomorphismes ;
(2) $\forall q \geq 2, \forall x \in \tilde{H}_*(X;\mathbf{Z})$, $\exists i \geq 1$ et y dans $\tilde{H}_*(X;\mathbf{Z})$ avec $\varphi_i(x) = qy$.

Dans ce cas, on obtient (comme pour S^2) la rationalisation de X en prenant le télescope infini

$$X \overset{\varphi_1}{\to} X \overset{\varphi_2}{\to} X \to \dots$$

$(X)_0$ est la limite homotopique de ce diagramme.

Malheureusement, pareille famille d'endomorphismes n'existe pas toujours.

Dans ([14]), Body et Sullivan ont donné une condition nécessaire et suffisante à leur existence (voir aussi [88]).

Localisation par les P.L. formes.

Dans ([93]), Sullivan définit les foncteurs P.L. (piecewise linear) formes, A_{PL}, et réalisation géométrique, $\langle - \rangle$, entre la catégorie des c.w. complexes 1-connexes de type fini et celle des algèbres différentielles graduées commutatives cohomologiquement connexes de type fini ADGC

$$\boxed{\text{C.W. complexes}} \underset{\langle - \rangle}{\overset{A_{PL}}{\rightleftarrows}} \boxed{\text{A.D.G.C.}}$$

Si X est 1-connexe, de type fini, alors $X_0 \cong \langle A_{PL}(X) \rangle$ ([93], [20]).

Localisation des groupes.

Un groupe G est dit local si $\forall n \geq 1$, l'application $x \mapsto x^n$, $x \in G$, est bijective. Le localisé d'un groupe G est un groupe local H muni d'un morphisme $e : G \to H$ satisfaisant aux conditions:
(1) $Ker\ e$ est formé des éléments de torsion de G ;
(2) $\forall h \in H$, $\exists g \in G$ et $n \geq 1$ avec $h^n = g$.

Si G est abélien, la loi du groupe peut s'écrire additivement et G se localise par le morphisme de rationalisation

$$G \to G_0 = G \otimes \mathbf{Q} .$$

Tout groupe nilpotent se localise ([67]). Ceci peut se faire de 2 manières, soit par récurrence sur l'indice de nilpotence de G ([67], chapitre I) soit en passant aux anneaux de groupe ([86]). Rappelons cette dernière construction :

Complétion de Malčev ([86]) : Soit G un groupe nilpotent. Son anneau de groupe à coefficients rationnels $\mathbf{Q}[G]$ est une algèbre de Hopf contenant G dans ses éléments de groupe. On complète $\mathbf{Q}[G]$ pour la filtration I-adique, $I = \ker \varepsilon$

$$\varepsilon : \mathbf{Q}[G] \to \mathbf{Q}, \qquad \sum a_i g_i \mapsto \sum a_i .$$

Notons $\hat{\mathbf{Q}}[G]$ l'algèbre de Hopf complète ainsi obtenue. On pose alors $G_0 = \mathcal{G}(\widehat{Q}[G])$, $\mathcal{G}$ désignant le foncteur éléments de groupe. Désignons par $\mathcal{P}$ le foncteur élément primitif. Les foncteurs exponentielle et logarithme

$$\mathcal{G}(\hat{Q}[G]) \underset{\mathbf{exp}}{\overset{\mathbf{log}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(\hat{Q}[G])$$

sont alors des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Nous noterons L_G l'algèbre de Lie $\log(G_0) = \mathcal{P}(\hat{Q}[G])$. L_G est une algèbre de Lie nilpotente et admet par le théorème d'Ado une représentation fidèle formée de matrices nilpotentes. En prenant l'exponentielle, on obtient un isomorphisme entre G_0 et un groupe de matrices unipotentes.

Espaces nilpotents

Un espace X est dit *nilpotent* si son groupe fondamental $\pi_1(X)$ est un groupe nilpotent opèrant de façon nilpotente sur les $\pi_i(X)$, $i \geq 2$. Tout espace nilpotent se localise. Plus précisément :

Théorème ([67], chapitre II). *Si X est un c.w. complexe nilpotent de type fini, alors il existe un morphisme $f : X \to Y$ tel que $\pi_*(f) : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$ soit une localisation.*

La première étape dans la construction du localisé consiste à localiser un espace $K(G;1)$, G nilpotent, c'est-à-dire à localiser le groupe nilpotent G.

Une fibration est dite *nilpotente* si sa base est une espace nilpotent dont le groupe fondamental opére de façon nilpotente sur la cohomologie de la fibre.

2.2. - Rationalisation et catégorie.

Dans les espaces 1-connexes, le foncteur rationalisation commute aux produits et aux bouquets garnis ; la définition de Whitehead de la L.S. catégorie montre que

$$\mathrm{cat}(X_0) \leq \mathrm{cat}(X) .$$

Si X est 1-connexe, appelons catégorie rationnelle l'entier noté $\mathrm{cat}_0(X)$ et défini par

$$\mathrm{cat}_0(X) = \mathrm{cat}(X_0) .$$

Tout espace de dimension finie n vérifie $\mathrm{cat}(X) \leq n$ et donc $\mathrm{cat}_0(X) < \infty$. Dans les paragraphes ultérieurs, nous étudierons les conséquences de la propriété $\mathrm{cat}_0(X) < \infty$ sur l'homotopie de X.

2.3. - Modèles minimaux.

A.D.G.C.

Une *algèbre différentielle graduée commutative* (en abrégé a.d.g.c.) est une $\mathbf{Q}$-algèbre graduée A ($A = \oplus_{p\geq 0} A^p$, le degré d'un élément x étant noté $|x|$) commutative (dans le sens gradué : $xy = (-1)^{|x|\cdot|y|} y \cdot x$), munie d'une différentielle d_A de degré $+1$,

$$d_A^2 = 0 \ , d_A(xy) = d_A(x) \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot d_A(y).$$

(A, d_A) est dite r-connexe si $A^0 = \mathbf{Q}$ et $A^i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

La cohomologie de (A, d_A) est par définition l'homologie de A pour la différentielle d_A . C'est une algèbre graduée commutative notée $H^*(A, d_A)$.

Si X est un espace vectoriel gradué connexe ($X = \oplus_{n>0} X^n$), on note ΛX l'algèbre graduée commutative libre sur X

$$\Lambda X = \text{alg.sym.}(X^{\text{pair}}) \otimes \text{alg.ext.}(X^{\text{impair}}) .$$

Une a.d.g.c. (A, d_A) est dite *minimale* si A est libre ($A = \Lambda X$) et si X admet une base x_α indexée par un ensemble bien ordonné A avec $dx_\alpha \in \Lambda_{\beta<\alpha}(x_\beta)$. Pareille base s'appelle une *K.S. (Koszul-Sullivan) base de X* .

Si X est 1-connexe ($X^1 = 0$), alors $(\Lambda X, d)$ est minimale si et seulement si d est décomposable : $d(X) \subset \Lambda^{\geq 2}(X)$.

Soit (A, d_A) une a.d.g.c. avec $H^0(A, d_A) = \mathbf{Q}$. Supposons que chaque $H^i(A, d_A)$ soit de dimension finie. Il existe alors une a.d.g.c. minimale $(\Lambda X, d)$ et un morphisme

$$\varphi : (\Lambda X, d) \to (A, d_A) ,$$

induisant un isomorphisme en cohomologie ([93]).

$(\Lambda X, d)$ s'appelle le *modèle minimal de* (A, d_A) . Il est unique à isomorphisme près.

Nous appellerons désormais *quasi-iso* tout morphisme d'a.d.g.c. induisant un isomorphisme en cohomologie.

K.S. modèle.

Soit $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ un morphisme d'a.d.g.c. ; supposons que $H^0(A, d_A) = H^0(B, d_B) = \mathbf{Q}$ et que les $H^i(A, d_A)$, $H^i(B, d_B)$ soient de dimension finie, alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(A, d_A) \arrow[r, "f"] & (B, d_B) & \\
(\Lambda X, d) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & (\Lambda Y, \bar{D}) ,
\end{tikzcd}$$

tel que :

(1) φ est un modèle minimal de (A, d_A),

(2) $H^*(\psi)$ est un iso.,

(3) $\exists$ une base (y_i) de Y indexée par un ensemble bien ordonné avec $D(y_i) \in \Lambda X \otimes \Lambda Y_{<i}$.

Pareille extension s'appelle une K.S. extension de f ([60]). Elle est unique à isomorphisme près. La base (y_i) de Y s'appelle *K.S. base* de $(\Lambda Y, \bar{D})$.

Si $(\Lambda X, d)$ est une a.d.g.c. libre (comme algèbre graduée), nous pouvons filtrer ΛX par les puissances de l'idéal d'augmentation, ceci définit une suite spectrale vérifiant $E_0 = (\Lambda X, d_0)$, $d_0(X) \subset X$. Nous noterons $Q(d) = d_0$, et Y un supplémentaire dans X de $\ker d_0$. Décomposons X sous la forme

$$X = H^*(X, Q(d)) \oplus Y \oplus Q(d)(Y) .$$

L'idéal I engendré par Y et $d(Y)$ est d-stable et $Q(d)$ acyclique. Il est donc acyclique. Ceci munit l'a.d.g.c. quotient

$$(\Lambda X, d)/I \cong \Lambda\big(H^*(X, Q(d))\big)$$

d'une structure d'a.d.g.c. minimale.

K.S. modèle de la multiplication.

Soit $(\Lambda Z, d)$ une a.d.g.c. minimale 1-connexe de type fini et $\mu : (\Lambda Z, d) \otimes (\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z, d)$ la multiplication.

Définissons l'espace vectoriel gradué $\bar{Z}$ par $\bar{Z}^p = Z^{p+1}$. Construisons, par récurrence sur une K.S. base de $(\Lambda Z, d)$, une différentielle D sur $\Lambda Z \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}$ et un quasi-isomorphisme ψ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & (\Lambda Z, d) \\
(\Lambda Z, d) \otimes (\Lambda Z, d) \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D) . \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Nous voulons de plus que $D(\bar{z}) - z \otimes 1 + 1 \otimes z \in \Lambda^{\geq 2}(Z \oplus Z \oplus \bar{Z})$.

Pour le premier générateur z_1, on pose $D(\bar{z}_1) = z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1$ et $\psi(\bar{z}_1) = 0$. Supposons avoir défini ψ et D pour $z_1, \ldots, z_p$. Considérons

$$\psi_p \ : A_p = \Lambda(z_1, \ldots, z_p) \otimes \Lambda(z_1, \ldots, z_p) \otimes \Lambda(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p) \to \Lambda(z_1, \ldots, z_p) .$$

Filtrons A_p et $\Lambda(z_1, \ldots, z_p)$ par les puissances de l'idéal d'augmentation. Comme $E_2(\psi_p)$ est un iso, ψ_p est un quasi-iso. ψ_p étant en plus surjectif, $\ker \psi_p$ est un idéal acyclique pour D et $Q(D)$. $dz_{p+1} \otimes 1 - 1 \otimes dz_{p+1}$ est un cocycle décomposable dans $\ker \psi_p$, c'est donc le cobord d'un élément décomposable α .

$$d_\alpha = dz_{p+1} \otimes 1 - 1 \otimes dz_{p+1} \ , \ \psi_p(\alpha) = 0 .$$

En conséquence,

$$z_{p+1} \otimes 1 - 1 \otimes z_{p+1} - \alpha$$

est un cocycle de A_{p+1}, et l'on pose

$$D(\bar{z}_{p+1}) = z_{p+1} \otimes 1 - 1 \otimes z_{p+1} - \alpha .$$
$$\psi(\bar{z}_{p+1}) = 0 .$$

Homotopie dans A.D.G.C.

Soit (A, d_A) une a.d.g.c. de modèle minimal $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\rho} (A, d_A)$. Deux morphismes d'a.d.g.c.

$$f, g : (A, d_A) \to (B, d_B)$$

sont dits *homotopes* s'il existe un morphisme d'a.d.g.c.

$$H : (\Lambda X \otimes \Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D) \to (B, d_B) \ ,$$

avec $H(x \otimes 1) = f\rho(x)$ et $H(1 \otimes x) = g\rho(x)$ ([60], [20], [93]) .

Modèle minimal d'un morphisme.

Si $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ est un morphisme d'a.d.g.c., il existe un diagramme commutatif à homotopie près où ρ et σ sont deux modèles minimaux ([93]).

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xrightarrow{f} & (B, d_B) \\ \uparrow{\scriptstyle \rho} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\ (\Lambda Z, d) & \xrightarrow{g} & (\Lambda Y, d') \end{array}$$

g est alors appelé le modèle minimal de f. Une fois fixé ρ et σ, il est unique à isomorphisme près.

Topologie et A.D.G.C.

Si X est un espace topologique connexe, le modèle minimal de l'a.d.g.c. $A_{PL}(X)$ s'appelle le *modèle minimal* (de Sullivan) de X . On le note parfois $\mathcal{M}_X$ ([93], [60], [11], [95], [20]) . Un espace X est dit de *type fini* si sa cohomologie rationnelle est un espace vectoriel gradué de type fini. La correspondance $X \to \mathcal{M}_X$ est excellente pour les espaces nilpotents de type fini :

Théorème 2.3.1 ([3], [24]). *Soit $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal d'un espace nilpotent X, de type fini, on a alors des isomorphismes*
$Z^1 \cong L_{\pi_1(X)}$, où L_G désigne l'algèbre de Lie associée au complété de Malčev du groupe G ,
$Z^n \cong Hom(\pi_n(X), \mathbf{Q}) \qquad n \geq 2,$
$H^n(\Lambda Z, d) \cong H^n(X; \mathbf{Q})$.

Théorème 2.3.2 ([93]). *Soient X et Y deux espaces nilpotents de type fini, de modèle minimaux respectifs $(\Lambda Z, d)$ et $(\Lambda Z', d')$, alors l'association modèle minimal induit une bijection*

$$[X_0, Y_0]_{Top} \cong [(\Lambda Z', d'), (\Lambda Z, d)]_{A.D.G.C.}$$

$[\ ,\ ]_C$ *désignant les classes d'homotopie d'applications dans la catégorie C .*

Théorème 2.3.3 ([60], §20). *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration nilpotente entre espaces de type fini.*

Considérons le diagramme commutatif en traits pleins

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(B) \arrow[r, "p_*"] & A_{PL}(E) \arrow[r, "i_*"] & A_{PL}(F) \\ (\Lambda Z, d) \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "j"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda Y, D) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & (\Lambda Y, \bar{D}) \arrow[u, dashed, "\theta"] \end{tikzcd},$$

où j est un K.S. modèle de p_*, alors il existe un quasi-iso θ rendant commutatif tout le diagramme.

Autrement dit, la donnée du modèle de $p : E \to B$ fournit le modèle de F . Plus généralement,

Théorème 2.3.4 ([60], th. 20.6). *Si*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

est un carré fibré entre espaces de type fini, $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda Y, D)$ un K.S. modèle de p et $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda X, d')$ un modèle de f, alors,

$$(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D') = (\Lambda X, d') \otimes_{(\Lambda Z, d)} (\Lambda Z \otimes \Lambda Y, D)$$

est un modèle de E' .

La différentielle du modèle de Sullivan de X fournit la tour de Postnikov de X_0 . En effet :

Théorème 2.3.5 ([93]). *Si $K(\mathbf{Q},n) \to X \to X'$ est une fibration principale d'invariant $\alpha : X' \to K(\mathbf{Q},n+1)$ avec $\Omega\alpha \sim 0$, alors $\mathcal{M}_X \cong (\mathcal{M}'_X, \otimes\Lambda x_n, d)$ où $d(x_n)$ est un cocycle de $\mathcal{M}_X$ représentant la classe α .*

Exemple. Le modèle des espaces homogènes G/K, avec G un groupe de Lie connexe compact et K un sous-groupe connexe fermé.

Dans ce cas, les espaces classifiants B_G et B_K sont 1-connexes. Un résultat classique de Borel [19, théorème 19.1] montre alors que $H^*(B_G)$ et $H^*(B_K)$ sont des algèbres de polynômes ΛQ_G et ΛQ_K . Il en résulte immédiatement que $(\Lambda Q_G, 0)$ et $(\Lambda Q_K, 0)$ sont les modèles minimaux de B_G et B_K .

L'injection $j : K \to G$ induit un morphisme B_j entre les espaces classifiants $B_j : BK \to BG$. On a alors un carré fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/K & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ BK & \xrightarrow{Bj} & BG , \end{array}$$

où $G \to EG \to BG$ désigne la fibration universelle pour G . Une application du théorème 2.3.4 fournit alors le modèle de G/K .

Proposition 2.3.6. *Un modèle (non nécessairement minimal) de G/K est donné par l'a.d.g.c. $(\Lambda Q_K \otimes \Lambda s^{-1}Q_G, D)$ avec $D(Q_K) = 0$ et $D(s^{-1}x) = (B_j)^*(x)$, $x \in Q_G$.*

2.4. - Homologie et cohomologie d'un espace rationnel.

Si X_0 est le rationalisé d'un c.w. complexe fini 1-connexe X, on a par construction

$$\pi_*(X_0) \cong \pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} ,$$
$$H_*(X_0; \mathbf{Z}) \cong H_*(X; \mathbf{Q}) .$$

La structure de $H^*(X_0; \mathbf{Z})$ est par contre plus complexe. Prenons par exemple $X = S^n$ avec la structure cellulaire formée d'une cellule e_0 de dimension 0 et d'une cellule e de dimension n .

$(S^n)_0 = X_0$ admet alors une structure cellulaire avec une 0- cellule e_0, une infinité de cellules de dimension n $(e_i)_{i\geq 1}$ et une infinité de cellules de dimension $n+1$ $(f_i)_{i\geq 1}$. L'homomorphisme bord du complexe des chaînes cellulaires est défini par $\partial f_i = e_i - (i+1)e_{i+1}$.

$$\oplus_{i\geq 1}\mathbf{Z}f_i \xrightarrow{\partial} \oplus_{i\geq 1}\mathbf{Z}e_i \,.$$

$H^*((S^n)_0;\mathbf{Z})$ est donc la cohomologie du complexe

$$0 \to C^n = \prod_{i\geq 1}\mathbf{Z}e_i^* \xrightarrow{\delta} C^{n+1} = \prod_{i\geq 1}\mathbf{Z}f_i^* \to 0\,,$$

$$\delta(\sum \alpha_i e_i^*) = \sum(\alpha_i - (i+1)\alpha_{i+1})f_i^* \,.$$

Identifions C^n et C^{n+1} à $t\mathbf{Z}[[t]]$. H^n et H^{n+1} sont alors respectivement le noyau et le conoyau de l'homomorphisme

$$t\mathbf{Z}[[t]] \xrightarrow{\delta} t\mathbf{Z}[[t]] \,.$$

$$\delta(f) = f - f' \qquad [f' = \text{dérivée de } f]\,.$$

Lemme 2.4.1. $H^n((S^n)_0;\mathbf{Z}) = 0$.

■ • Plongeons $t\mathbf{Z}[[t]]$ dans $\mathbf{Q}((t))$. $\ker\delta_{\mathbf{Q}}$ est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(e^t - 1)$.

$$\ker\delta_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}(e^t - 1)\,.$$

On a alors $\ker\delta = \ker\delta_{\mathbf{Q}} \cap t\mathbf{Z}[[t]] = 0$. ■

Lemme 2.4.2. $H^{n+1}((S^n)_0;\mathbf{Z})$ *est un groupe non nul sans torsion.*

■ Pour voir que H^{n+1} est non nul, il suffit d'exhiber un élément non nul, par exemple $\sum_{n\geq 1} t^n = t/(1-t)$.

L'équation $f(t) = f'(t) + t/(1-t)$ n'a en effet pas de solution dans $\mathbf{Z}[[t]]$: Les équations $a_n - (n+1)a_{n+1} = 1$ montrent que $a_n \neq 0$ pour n très grand et que $|a_n| > n|a_{n+1}|$. Il en résulte que $|a_1| > (n!)|a_{n+1}|$ pour tout n, ce qui est absurde.

H^{n+1} n'a pas d'élément de torsion : soit $g \in t\mathbf{Z}[[t]]$ avec $pg = f - f'$, $p \in \mathbf{Z}$. Ecrivons $g = \sum_{n\geq 1} b_n t^n$ et $f = \sum_{n\geq 1} a_n t^n$. On a donc $pb_n = a_n - (n+1)a_{n+1}$ pour tout n ce qui entraîne :

$$a_n \equiv (n+1)a_{n+1} \bmod p\,,$$

$$a_r \equiv (n!/r!)a_n \bmod p \text{ pour } n \geq r\,.$$

Ceci entraîne $a_r \equiv 0 \forall r$, et donc $a_r = \mathrm{p}d_r$. Nous pouvons donc écrire $g = f_1 - (f_1)'$ avec $f_1 = \sum d_n t^n$. ■

3 - "LE MAPPING THEOREM".

3.1. - Le mapping theorem.

La catégorie rationnelle est un invariant homotopique. Sa force et son utilité résident dans son comportement à l'égard de certaines applications continues. C'est le contenu du mapping theorem.

Théorème 3.1.([30], [41]). *Soit* $f : X \to Y$ *une application continue entre espaces 1-connexes de type fini. Si* $\pi_*(f)\otimes\mathbf{Q} : \pi_*(X)\otimes\mathbf{Q} \to \pi_*(Y)\otimes\mathbf{Q}$ *est injectif, alors* $\mathrm{cat}_0(X) \leq \mathrm{cat}_0(Y)$.

La démonstration de ce théorème repose sur les trois lemmes suivants :

Lemme 1. *Soient* X *et* Y *deux espaces connexes et soit*

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{p} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y ,$$

la suite de fibrations homotopiques induite par une application f. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) i *est homotopiquement trivial ;*

(2) p *a une section homotopique ;*

(3) Ωf *admet une rétraction homotopique ;*

(4) La fibration $\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{p} F$ *est homotopiquement triviale.*

Lemme 2. *Soit* $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ *une fibration, si* i *est homotopiquement trivial, alors* $\mathrm{cat}(E) \leq \mathrm{cat}(B)$.

■ Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de B formé d'ouverts contractiles dans B . Les inclusions $p^{-1}(U_i) \to E$ se factorisent à homotopie près à travers F . Comme $i : F \to E$ est homotopiquement trivial, il en est de même des inclusions $p^{-1}(U_i) \to E$. ■

Lemme 3. *Si* X *est un espace rationnel 1-connexe, alors* ΩX *a le type d'homotopie d'un produit faible d'espaces d'Eilenberg-MacLane.*

■ Le théorème de Milnor-Moore ([82]) affirme que l'application de Hurewicz induit un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$h_* : \pi_*(\Omega X) \to \mathcal{P}H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) .$$

Choisissons pour chaque i une rétraction r_i de h_i

$$r_i : H_i(\Omega X; \mathbf{Q}) \to \pi_i(\Omega X) .$$

Chaque r_i définit une classe de $H^i(\Omega X; \pi_i(\Omega X))$ correspondant à une application continue

$$\sigma_i : \Omega X \to K(\pi_i(\Omega X), i) ,$$

induisant un isomorphisme sur les groupes d'homotopie en dimension i. Le produit de ces applications σ_i induit donc une équivalence d'homotopie

$$\Omega X \xrightarrow{\simeq} \prod_i K(\pi_i(\Omega X), i) .$$

■

Proposition 3.1.1. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces connexes. Supposons que*

1) $\pi_*(f)$ est injectif et scindé.

2) ΩY a le type d'homotopie d'un produit faible d'espaces d'Eilenberg-MacLane. Alors ΩX a le type d'homotopie faible d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane, et $\operatorname{cat} X \leq \operatorname{cat} Y$.

■ Si G est un groupe abélien gradué, $G = \oplus_{i\geq 2} G_i$, nous désignerons par $K(G)$ l'espace produit $\prod_{i\geq 2} K(G_i, i)$. Notons $\phi : \Omega Y \to K(\pi_*(\Omega Y))$ l'équivalence d'homotopie et ρ la rétraction de $\pi_*(f)$. La composition

$$\psi : \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\phi} K(\pi_*(\Omega Y)) \xrightarrow{K(\rho)} K(\pi_*(\Omega X))$$

induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie. C'est donc une équivalence d'homotopie. L'application $\psi^{-1} \circ K(\rho) \circ \varphi$ est un rétract homotopique de Ωf.

Notons $F \xrightarrow{i} X$ la fibre homotopique de f . Par le lemme 1, i est homotopiquement trivial et par le lemme 2, $\operatorname{cat} X \leq \operatorname{cat} Y$. ■

Le "mapping theorem" résulte alors directement de la proposition 1 combinée avec le lemme 3.

Les hypothèses de la proposition 3.1.1. sont très importantes. Les exemples suivants le montrent :

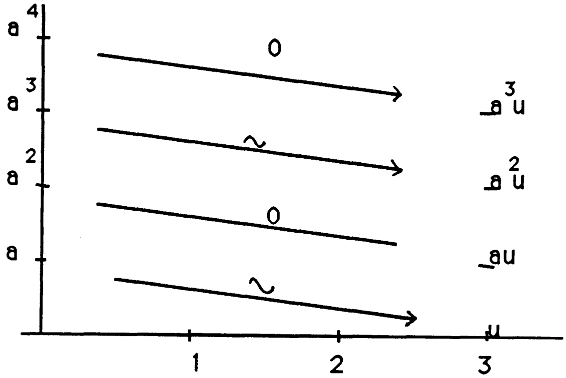
Exemple 1. (Illustrant l'importance de l'hypothèse ΩY = produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane).

Notons $p = S^3 \to K(\mathbf{Z},3)$ l'application continue définissant la classe fondamentale de S^3 et par $S^3_{(3)}$ la fibre homotopique de p . L'application $S^3_{(3)} \xrightarrow{i} S^3$ induit une application injective scindée sur les groupes d'homotopie mais ΩS^3 n'est pas un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane. Nous avons en fait $\text{cat}(S^3) = 1$ et $\text{cat}\big(S^3_{(3)}\big) = \infty$ car $H^*(S^3_{(3)};\mathbf{Z}/2) \supset (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[b]$.

En effet, considérons la suite spectrale de Serre à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de la fibration $K(\mathbf{Z},2) \to S^3_{(3)} \to S^3$.

$$H^*(K(\mathbf{Z},2);\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[a], \quad \text{degré}(a) = 2 .$$

La seule différentielle non nulle est d_3



comme d_3 est une différentielle d'algèbre $d_3(a^{2p+1}) = a^{2p}u$ et $d_3(a^{2p}) = 0$, on a donc :

$$H^*(S^3_{(3)};\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \Lambda_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}(au) \otimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[a^2] .$$

Exemple 2. (Illustrant l'importance de l'hypothèse $\pi_* f$ injectif scindé).

Considérons simplement $p : K(\mathbf{Z},3) \to K(\mathbf{Q},3)$. $\pi_*(p)$ est injectif et $\Omega K(\mathbf{Q},3) = K(\mathbf{Q},2)$ est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane ; on a cependant

$$\text{cat}(K(\mathbf{Z},3)) \geq \text{nil}\, \tilde{H}^*(K(\mathbf{Z},3);\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \infty .$$

$$\text{cat}(K(\mathbf{Q},3)) \cong \text{cat}(S^3_{\mathbf{Q}}) = 1 .$$

Remarque: Dans le "mapping theorem", on ne peut pas remplacer $\text{cat}_0(-)$ par nil $\tilde{H}^*(-;\mathbf{Q})$. Considérons en effet l'application

$$X = S^3_a \times S^5 \xrightarrow{f} Y = (S^3_a \vee S^3_b) \cup_\omega e^8 ,$$

avec $\omega = \left[S^3_a, [S^3_a, S^3_b]\right]$ où $f(S^3_a) = S^3_a$ et $f(S^5) = [S^3_a, S^3_b]$; clairement, $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q}$ est injective, nil $\tilde{H}^*(X;\mathbf{Q}) = 2$ et nil $\tilde{H}^*(Y;\mathbf{Q}) = 1$.

Les espaces topologiques 1-connexes X, avec un espace de lacets du même type d'homotopie qu'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane, ne se rencontrent pas tous les jours. Bien sûr, les espaces rationnels, et les espaces "tames" ([41]) sont de cette forme. Un c.w. complexe fini 1-connexe n'en est cependant jamais :

Proposition 3.2. *Soit X un c.w. complexe fini 1-connexe. Si ΩX a le type d'homotopie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane, alors X a le type d'homotopie d'un point.*

■ Notons $\mathcal{A}_p$ l'algèbre de Steenrod mod p . Comme X est de dimension finie, $H_*(X;\mathbf{Z}/p)$ est quasi-borné. [Un $\mathcal{A}_p$-module H_* est dit quasi-borné si chaque sous-$\mathcal{A}_p$-module de $\mathrm{Hom}(H_*, \mathbf{Z}/p)$ finiment engendré est de dimension finie ([72])]. Il en résulte ([72]) que $H_*(\Omega X;\mathbf{Z}/p)$ est aussi quasi-borné.

Par hypothèse, ΩX a le type d'homotopie d'un produit $\prod_{i\geq 2} K(G_i, i)$. Comme X est de type fini, les groupes G_i sont de type fini. Il s'en suit que pour chaque $i \geq 2$ et chaque p, chaque sous-$\mathcal{A}_p$-module de type fini de $H^*(K(G_i,i);\mathbf{Z}/p)$ est de dimension finie. Si $G_i \neq 0$, ceci est en contradiction avec les résultats classiques sur la cohomologie des $K(\pi, n)$ ([22]). On a donc $G_i = 0, \forall i \geq 2$. ■

3.2. - Les fibres de Postnikov d'un espace X.

Soit X un espace 1-connexe et

$$\begin{tikzcd}
 & X_n \arrow[d, "p_n"] \\
X \arrow[ur, "f_n"] \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[ddr, "f_2"] & X_{n-1} \arrow[d, "p_{n-1}"] \\
 & \vdots \\
 & X_2
\end{tikzcd}$$

sa tour de Postnikov. Notons $g_n : X_{[n]} \to X$ la fibre homotopique de f_n. $\pi_r(g_n)$ est un iso pour $r > n$ et $\pi_r(X_{[n]}) = 0$, $r \leq n$. D'autre part, les projections p_n

définissent la suite d'applications naturelles

$$X_{[n+1]} \xrightarrow{q_{n+1}} X_{[n]} \xrightarrow{q_n} \dots X_{[3]} \xrightarrow{q_2} X_{[2]} \xrightarrow{q_1} X \ ,$$

et d'après le "mapping theorem",

$$\mathrm{cat}_0(X_{[n+1]}) \leq \mathrm{cat}_0(X_{[n]}) \leq \mathrm{cat}_0(X) \ .$$

Les espaces $X_{[n]}$ s'appellent les *fibres de Postnikov* de X .

Définition. *On appelle catégorie résiduelle de X, $r\,\mathrm{cat}_0(X)$, l'entier* $\min \mathrm{cat}_0(X_{[n]})$.

Définition. *On appelle longueur de Moore résiduelle de X, $re_0(X)$, l'entier défini par*

$$re_0(X) = \lim_{m\to\infty} \big(\sup_{p>m} e_0(X_{[p]})\big) \ .$$

On a clairement $re_0(X) \leq r\,\mathrm{cat}_0(X) \leq \mathrm{cat}_0(X)$.

3.3. - Les groupes de Gottlieb de X.

Définition [53]. *Le $p^{\text{ème}}$ groupe de Gottlieb de X, $G_p(X)$, est le sous-groupe de $\pi_p(X)$ formé des éléments représentés par des applications $\alpha : S^p \to X$ telles que le morphisme $\alpha \vee \mathrm{id} : S^p \vee X \to X$ s'étende à $S^p \times X$.*

$$\begin{tikzcd} S^p \vee X \arrow[dr, "\alpha \vee \mathrm{id}"] \arrow[dd] & \\ & X \\ S^p \times X \arrow[ur, "\overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Exemples.

1) Si X est un H-espace, alors $G_p(X) = \pi_p(X)$;

2) Si $X = S^3 \vee S^3$, alors $G_p(X) \otimes \mathbf{Q} = 0$, pour tout p .

Les éléments de $G_p(X)$ sont appelés les éléments de Gottlieb. Un élément de $\pi_p(X)$ est appelé *semi-Gottlieb* s'il est représenté par une application continue $\alpha : S^p \to X$ telle que le morphisme $\alpha \vee g_{p-1} : S^p \vee X_{[p-1]} \to X$ s'étende à $S^p \times X_{[p-1]}$. Les éléments semi-Gottlieb forment un groupe noté $SG_p(X)$. On a

$$G_p(X) \subset SG_p(X) = G_p(X_{[p-1]}) \ .$$

3.3.1. Groupe de Gottlieb et classifiant des fibrations de fibre X.

Notons aut X le monoïde des self-équivalences d'homotopie de X . L'évaluation aut $X \stackrel{ev}{\to} X$ induit un homomorphisme de groupes

$$\pi_p(\text{aut } X, 1_X) \stackrel{(ev)_p}{\to} \pi_p(X) .$$

Il résulte des définitions que $G_p(X) = \text{image } (ev)_p$.

La fibration universelle pour les fibrations de base X est $X \to B\text{aut } ^\bullet(X) \to B\text{aut } X$. Elle a pour base le classifiant du monoïde aut X ([53]). Le morphisme de connection y est défini par l'évaluation

$$\Omega B\text{aut } X \cong \text{aut } X \stackrel{ev}{\to} X .$$

Il en résulte que $G_p(X)$ est l'image du connectant de la suite exacte longue d'homotopie de la fibration universelle.

Par définition de la fibration universelle, on a :

Corollaire. *Si $F \to E \to B$ est une fibration alors $\delta : \pi_*(B) \to \pi_{*-1}(F)$ a son image contenue dans $G_{*-1}(F)$.*

3.3.2. Fibration associée à un élément de Gottlieb.

Représentons l'élément a de $G_p(X)$ par une application continue $\alpha : S^p \to$ aut X respectant les points de base. Ceci fournit une application continue $\tilde{\alpha} : S^{p+1} \to B\text{aut } X$.

Prenons la fibration image réciproque de la fibration universelle le long de $\tilde{\alpha}$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S^p \arrow[r] & \Omega S^{p+1} \arrow[r, "\Omega\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\partial"] & \text{aut } X \arrow[d, "ev"] \\
& X \arrow[r, "id"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& E \arrow[r] \arrow[d] & B\text{aut } ^\bullet X \arrow[d] \\
& S^{p+1} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & B\text{aut } X
\end{tikzcd}$$

avec $(\Omega\tilde{\alpha})|_{S^p} = \alpha$. Comme $\partial = \mathrm{ev}(\Omega\tilde{\alpha})$, l'image du morphisme de connection $\partial : \pi_{p+1}(S^{p+1}) \to \pi_p(X)$ est $\mathbf{Z}a$.

Théorème 3.3 ([30]) *****. *Soit X un espace 1-connexe de type fini et de catégorie finie n, alors*

(a) $\forall i \geq 1 \qquad G_{2i}(X) \otimes \mathbf{Q} = 0$;

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} dim_{\mathbf{Q}} SG_{2i+1}(X) \otimes \mathbf{Q} \leq n - re(X)$.

En d'autres mots, les groupes $G_i(X)$ sont de torsion à l'exception d'un nombre fini concentré en degrés impairs, ce nombre étant borné par la catégorie de X.

■ a) Supposons qu'il existe un élément a dans $G_{2p}(X)$ avec $qa \neq 0$, $\forall q > 0$. Cet élément définit une fibration

$$X \to E \to S^{2p+1} .$$

Notons ∂ le connectant de la fibration : $\Omega S^{2p+1} \xrightarrow{\partial} X$. Comme $\pi_*(\Omega S^{2p+1}) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}e$ avec degré $e = 2p$ et $\partial(e) = a$, $\pi_*(\partial) \otimes \mathbf{Q}$ est injectif.

D'autre part, $(\Omega S^{2p+1})_0$ a le type d'homotopie de $K(\mathbf{Q}, 2p)$ et est de catégorie infinie car $H^*(K(\mathbf{Q}, 2p)) = \mathbf{Q}[u]$, degré $u = 2p$. Par le mapping theorem, on aurait alors

$$\infty = \mathrm{cat}_0(\Omega S^{2p+1}) \leq \mathrm{cat}_0(X) = n ,$$

ce qui est absurde.

b) Soient $\alpha_i : S^{n_i} \to X$, $i = 1, \ldots, s$ des applications continues représentant s éléments linéairement indépendants de $SG_{\mathrm{impair}} \otimes \mathbf{Q}$. Les applications $\alpha_i \bigvee id : S^{n_i} \bigvee X_{[r_i]} \to X$ s'étendent en des applications continues

$$\bar{\alpha}_i : S^{n_i} \times X_{[r_i]} \to X , \qquad r_i = n_i - 1 .$$

* K. Hess a récemment montré que, si X est un espace 1-connexe de type fini, alors $\mathrm{cat}_0(X \times S^{2n+1}) = \mathrm{cat}_0(X) + 1$. A partir de ce résultat, la même démonstration que ci-dessus montre que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{dim}_{\mathbf{Q}} SG_{2i+1}(X) \otimes \mathbf{Q} \leq n - r\,\mathrm{cat}_0(X)$$

Ceci définit une application

$$\alpha : \Big(\prod_{i=1}^{s} S^{n_i}\Big) \times X_{[r]} \to X \qquad r = \max(r_1, \cdots, r_s)\ ,$$

par

$$\alpha(t_1, \cdots, t_s, x) = \bar{\alpha}_1\big(t_1, \overline{\alpha}_2(t_2, \bar{\alpha}_3(t_3, \cdots, \bar{\alpha}_s(t_s, x), \cdots))\big)\ .$$

Elle se restreint pour chaque $m \geq r$ en

$$\tilde{\alpha}_m : \prod_{i=1}^{s}(S^{n_i}) \times (X_{[m]}) \to X\ .$$

L'application localisée $(\tilde{\alpha}_m)_0$ est alors injective sur les groupes d'homotopie dès que m est plus grand que les n_i. Comme $e_0(X \times Y) = e_0(X) + e_0(Y)$([98]), on a

$$s + re_0(X) \leq \mathrm{cat}_0\Big(\Big(\prod_{i=1}^{s} S^{n_i}\Big) \times X_{[m]}\Big) \leq \mathrm{cat}_0 X\ .$$

Il en résulte que s est borné par $n - re_0(X)$, ce qui entraîne la thése. ∎

Corollaire. *Soit $F \to E \to B$ une fibration nilpotente avec F de catégorie finie. Notons $\partial_p : \pi_p(B) \to \pi_{p-1}(F)$ le connectant de la suite exacte longue d'homotopie. On a alors*

a) $\mathrm{Im}\partial_{2p+1} \otimes \mathbf{Q} = 0$.

b) $\sum \dim \mathrm{Im}\partial_i \otimes \mathbf{Q} \leq \mathrm{cat}_0 F$.

3.4. - Le mapping theorem pour les espaces non-simplement connexes.

Théorème 3.4.[42]. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces connexes pointés ayant le type d'homotopie de c.w. complexes. Supposons que*

(a) $\pi_1(f)$ est injectif.

(b) $\Omega\tilde{f}$ admet une rétraction homotopique ($\tilde{f}$ = revêtement univesel de f) . Alors $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y)$.

∎ Si $\pi_1(f)$ est un isomorphisme, alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega\tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & F & \longrightarrow & \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\
\downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega Y & \xrightarrow{\delta} & F & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

comme $\Omega\tilde{f}$ admet une rétraction, $\tilde{\delta}$ a une section homotopique. Il en est de même pour δ . i est donc homotopiquement trivial. Par le lemme 3.1.2, on a alors $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y)$.

Supposons $\pi_1(f)$ injectif. Notons $p : Y' \to Y$ le revêtement de Y correspondant au sous-groupe $\pi_1(f)(\pi_1(X))$ de $\pi_1(Y)$. L'application f se décompose en $f = p \circ g$ avec $g : X \to Y'$ induisant un isomorphisme sur le π_1. p étant un revêtement, on a $\mathrm{cat}(Y') \leq \mathrm{cat}(Y)$. Comme $\pi_1(g)$ est un isomorphisme, on a aussi $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y')$. ∎

Définition. *Un espace X est dit presque rationnel si son revêtement universel est un espace rationnel* ([66]).

Du mapping theorem et du théorème précédent, on déduit :

Corollaire. *Soient X et Y deux espaces presque rationnels et $f : X \to Y$ une application continue telle que $\pi_*(f)$ soit injective. Alors* $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(Y)$.

Nous observons maintenant que la finitude de la catégorie d'un espace presque rationnel impose une sévère restriction à son groupe fondamental.

Proposition 3.3. *Le groupe fondamental d'un espace presque rationnel de catégorie finie est sans torsion.*

∎ Soit X un espace presque rationnel et $\tilde{X}$ son revêtement universel qui est un espace rationnel. Si $\pi_1(X)$ contient des éléments de torsion, il contient un groupe cyclique C_p d'ordre p premier. Notons Y le revêtement de X avec $\pi_1(Y) = C_p$. L'espace Y est presque rationnel et $\tilde{Y} = \tilde{X}$. Comme $H_+(\tilde{X}; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$, on a $H^+(\tilde{X}; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0$. La suite spectrale de Serre de la fibration

$$\tilde{X} \to Y \to K(C_p, 1)$$

montre que $H^*(Y; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = H^*(C_p; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \supset (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[u]$.

$\mathrm{cat}(Y)$ est donc infinie. Il en est de même pour $\mathrm{cat}(X)$. ∎

Remarque : La même démonstration montre que pour tout sous-groupe G de $\pi_1(X)$ et pour tout p premier, il existe q avec

$$H^{>q}(G; \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = 0.$$

Les résultats du paragraphe 3.3 sur les éléments de Gottlieb se généralisent aux espaces presque rationnels.

Proposition 3.4. *Si X est un espace presque rationnel de catégorie m, alors le sous-groupe $G_1(X)$ de $\pi_1(X)$ est un groupe abélien libre de rang fini r et l'on a*

$$r + \sum_{k>0} \dim_{\mathbf{Q}} G_{2k+1}(X) + re(X) \leq m \ .$$

■ Comme en 3.3, on définit une application injective en homotopie

$$(S^1)^r \times S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_k} \times \tilde{X}_{[m]} \to X \ ,$$

qui induit la formule précédente. ■

Remarques :

1) On peut "presque-localiser" en localisant fibre par fibre ([20],[88]), mais cette technique ne préserve pas la catégorie. Ainsi la catégorie de $\mathbf{R}P(2)$ est 2 mais celle de sa presque-localisation est infinie en vertu d'une proposition précédente.

2) Pour tout c.w. complexe X de catégorie m, on a toujours :

rang $G_1(X) \leq m$.

En effet, appelons $\bar{X}$ le revêtement de X correspondant au sous-groupe $G_1(X)$. La projection $\bar{X} \to K(G_1(X),1)$ a une section homotopique. Il en résulte que $\operatorname{cat} K(G_1(X),1) \leq \operatorname{cat} \bar{X} \leq \operatorname{cat} X$.

3) Le théorème 3.1. peut être amélioré comme suit : soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces 1-connexes de type fini . Si $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q}$ est injective, alors f se décompose à homotopie près sous la forme $f = g.h$ avec :

(i) $h : X \to Z$ est une équivalence d'homotopie rationnelle,

(ii) $cat(Z) \leq cat(Y)$.

(Remplaçons f par une fibration homotopique équivalente $f : E \to Y$, et désignons par $Z \to Y$ la fibration image réciproque de la fibration $E_0 \to Y_0$ par l'application de rationnalisation.)

4 - cat_0 ET LES MODÈLES MINIMAUX DE SULLIVAN.

Le but du présent chapitre est le calcul de cat_0, de e et de la suite spectrale de Milnor-Moore à l'aide des modèles minimaux.

4.1. - Modèle des espaces de Ganea.

Soit X un espace 1-connexe de type fini, de modèle minimal $(\Lambda Z, d)$. Pour chaque $m \geq 1$, l'idéal $\Lambda^{\geq m}Z$ est stable pour d. Nous noterons

$$(\Lambda Z/\Lambda^{\geq m}Z, \bar{d})$$

l'a.d.g.c. quotient. Avec les notations du paragraphe 1.3 nous pouvons énoncer :

Théorème 4.1.1. ([30]) *Soit X un espace 1-connexe de type fini, de modèle minimal $(\Lambda Z, d)$. Notons W un espace rationnel du même type d'homotopie que l'a.d.g.c. $(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d})$. Alors il existe une équivalence d'homotopie*

$$(E_m)_0 \cong W \vee \vee_\alpha S_\alpha \ ,$$

où $\vee_\alpha S_\alpha$ désigne un bouquet de sphères rationalisées et E_m le m^e-espace de Ganea associé à X .

Théorème 4.1.2. *Soit X un espace 1-connexe de type fini de modèle minimal $(\Lambda Z, d)$. Notons $r_m : W_m \to W_{m+1}$ une application continue entre espaces rationnels représentant la projection $(\Lambda Z/\Lambda^{>m+1}Z, \bar{d}) \to (\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d})$. On a alors un diagramme commutatif à homotopie près, où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes*

$$\begin{array}{ccc}
(E_m)_0 & \xrightarrow{j_m} & (E_{m+1})_0 \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
W_m \vee (\vee_\alpha S_\alpha) & \xrightarrow{r_m V_*} & W_{m+1} \vee (\vee_\beta S_\beta) \ .
\end{array}$$

La démonstration de ces deux théorèmes est assez technique. Nous la reportons au paragraphe 4.7.

4.2. - Catégorie d'une a.d.g.c. et cat_0 d'un espace.

Soit (A, d_A) une a.d.g.c. dont la cohomologie est 1-connexe et de type fini. Notons $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\phi} (A, d_A)$ son modèle minimal.

Définition. $\mathrm{cat}(A, d_A)$ *est le plus petit entier* m *tel que le modèle minimal de la projection* $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d})$ *admette une rétraction* ρ .

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z, d) \arrow[r, "p_m"] & (\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d}) \\
& (\Lambda Y, d) . \arrow[ul, "\rho"] \arrow[u, "\wr \psi"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 4.2. *Si* $(\Lambda Z, d)$ *est le modèle minimal d'un espace* X *1-connexe de type fini, alors* $\mathrm{cat}(\Lambda Z, d) = \mathrm{cat}_0(X)$.

■ Si W_n représente le type d'homotopie rationnelle de $(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d})$, alors (th. 4.1.1) $(E_m)_0$ a le type d'homotopie rationnelle de $W_m \vee \bigvee_\alpha S^\alpha$. De plus, (4.1.2) la restriction de la projection $q_m : (E_m)_0 \to X_0$ à $\bigvee_\alpha S^\alpha$ est homotopiquement triviale. Il en résulte l'équivalence entre l'existence d'une section homotopique de q_m et de $q_m|W_m$. Cette équivalence entraîne l'énoncé. ■

Corollaire. $\mathrm{cat}_0(X) \leq m$ *si et seulement si il existe une a.d.g.c.* (A, d_A) *avec* $(A^+)^{m+1} = 0$ *et un morphisme* ϕ *du modèle minimal* $(\Lambda Z, d)$ *de* X *dans* (A, d_A), *dont le modèle minimal* θ *admet une rétraction* ρ

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z, d) \arrow[r, "\phi"] & (A, d_A) \\
& (\Lambda Y, d) . \arrow[ul, "\rho"] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

■ Si $\mathrm{cat}_0(X) \leq m$, alors on peut prendre $(A, d_A) = (\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d})$. Inversément, s'il existe (A, d_A) et ϕ, alors ϕ se factorise par $(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d})$. Ceci fournira la rétraction de p_m . ■

Définition. *Dans la suite, nous dirons pour simplifier que* $(\Lambda Z, d)$ *est un retracte de* (A, d_A) .

4.3. - La suite spectrale de Milnor-Moore. (2)

La suite spectrale de Milnor-Moore a été définie en 1.4. Nous en donnons ici un calcul au moyen des modèles minimaux de Sullivan.

Les espaces E_n sont contenus les uns dans les autres et définissent une filtration de X conduisant à la suite spectrale de Milnor-Moore

$$E_m \xrightarrow{j_m} E_{m+1} \xrightarrow{j_{m+1}} E_{m+2} \to \cdots \to X .$$

Par le théorème 4.1.1., on a une équivalence d'homotopie $E_m \simeq W_m \vee R_m$ avec R_m un bouquet de sphères.

Remplaçons les morphismes $r_m : W_m \to W_{m+1}$ par des injections. Les espaces W_m forment ainsi une filtration de X. On a de plus (4.1.2) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
W_m & \overset{r_m}{\subseteq} & W_{m+1} & \overset{r_{m+1}}{\subseteq} & W_{m+2} & \subseteq & \cdots & \subseteq & X \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_m} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{m+2}} & & & & \| \\
E_m & \underset{j_m}{\subseteq} & E_m & \underset{j_m}{\subseteq} & E_{m+1} & \subseteq & \cdots & \subseteq & X ,
\end{array}$$

où ϕ_m désigne l'injection : $W_m \to E_m$. Ceci induit un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{p,q}(W_*) \to E_r^{p,q}(E_*) .$$

Lemme. *Le morphisme $\phi : W_* \to E_*$ induit un isomorphisme de suites spectrales à partir du terme E_2 .*

■ Les termes E_1 sont définis par :

$$E_1^{p,q}(W_*) = H^{p+q}(W_p, W_{p-1}) .$$
$$E_1^{p,q}(E_*) = H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) .$$

Comme E_m est équivalent à $W_m \vee R_m$ et $j_m \simeq r_m \vee *$, on a une courte suite exacte

$$0 \to H^{p+q}(W_p, W_{p-1}) \to H^{p+q}(E_p, E_{p-1}) \to H^{p+q}(R_p) \oplus H^{p+q-1}(R_{p-1}) \to 0 .$$

Les différentielles d_1 sont définies comme les connectants des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^*(E_{p+1}, E_p) & \longrightarrow & C^*(E_{p+1}, E_{p-1}) & \longrightarrow & C^*(E_p, E_{p-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^*(W_{p+1}, W_p) & \longrightarrow & C^*(W_{p+1}, W_{p-1}) & \longrightarrow & C^*(W_p, W_{p-1}) & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Le résultat s'en déduit de suite. ■

Filtrons $(\Lambda Z, d)$ par les puissances $\Lambda^{\geq p} Z$ de l'idéal d'augmentation .Nous obtenons une suite spectrale $E_r^{p,q}(\Lambda Z)$ vérifiant $E_2^{p,q}(\Lambda Z) = H^{p,q}(\Lambda Z, d_1)$ où $(d - d_1)(Z) \subset \Lambda^{\geq 3} Z$ et

$$E_2^{p,q}(\Lambda Z) \Rightarrow E_\infty^{p,q}(\Lambda Z) = H^{p,q}(\Lambda Z, d) \, .$$

Théorème 4.3. *La suite spectrale $E_r^{p,q}(\Lambda Z)$ est isomorphe à partir du terme E_2 à la suite spectrale de Milnor-Moore de X .*

■ En vertu du théorème précédent, il suffit de voir que les suites spectrales $E_r^{p,q}(\Lambda Z)$ et $E_r^{p,q}(W_.)$ sont isomorphes pour $r \geq 1$. Ceci est vrai car les deux suites spectrales sont définies à partir de deux couples exacts isomorphes

$$\begin{tikzcd}
\oplus_p H^*(\Lambda Z/\Lambda^{>p} Z) \arrow[r] & \oplus_p H^*(\Lambda Z/\Lambda^{>p} Z) \arrow[d, "\partial"] \\
 & \oplus_p \Lambda^p Z \, . \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\oplus_p H^*(W_p) \arrow[r] & \oplus_p H^*(W_p) \arrow[d, "\partial"] \\
 & \oplus_p H^*(W_p, W_{p-1}) \, . \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

■

Corollaire. 1) *La longueur d'Eilenberg-Moore d'un espace X, $e_0(X)$ est le plus grand entier p tel que $E_\infty^{p,*}(\Lambda Z) \neq 0$.*
2) $e_0(X) = \inf\{n|$ *l'application de projection* $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z/\Lambda^{>n} Z, \bar{d})$ *est injective en cohomologie*$\}$.

4.4. - Exemple d'espace avec $e_0 \neq \mathrm{cat}_0$ [77].

Désignons par X l'espace $(CP^2 \vee S^2) \bigcup_w e^7$ avec $w = [\alpha, \beta]$ où $\alpha \in \pi_5(CP^2)$ désigne le triple crochet de Whitehead d'ordre supérieur et β désigne un générateur de $\pi_2(S^2)$. Le modèle minimal $(\Lambda Z, d)$ de X est défini par $Z = \oplus_{p \geq 2} Z^p$

$Z^2 : x_2, y_2 \quad dx_2 = dy_2 = 0$.

$Z^3 : x_3, y_3 \quad dx_3 = y_2^2$, $dy_3 = x_2 y_2$.

$Z^4 : v_4 \quad dv_4 = y_3 y_2 - x_3 x_2$.

$Z^5 : v_5, y_5 \quad dy_5 = x_2^3$, $dv_5 = v_4 y_2 + y_3 x_3$.

$Z^6 : v_6, w_6 \quad dv_6 = y_3 v_4 - v_5 x_2$, $dw_6 = x_3 v_4 - v_5 y_2$.

$Z^{\geq 7}$ est construit par récurrence pour que $H^{\geq 8}(\Lambda Z, d) = 0$.

La cohomologie est représentée par les cocycles

$$1,\ x_2,\ x_2^2,\ y_2,\ y_5 y_2 - y_3 x_2^2\ .$$

L'idéal I engendré par $Z^{\geq 4}, y_2, x_3, x_2^3$ est un idéal différentiel. Le quotient est $\Lambda(y_3)\otimes\Lambda(x_2/x_2^3)$. Le modèle minimal de la projection est donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z, d) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "h"'] & (\Lambda Z/I, \bar{d}) & \cong & (\Lambda y_3 \otimes \Lambda(x_2/x_2^3), 0) \\
& (\Lambda y_3, x_2, y_5, d) \arrow[urr, "\cong"] & & dy_5 = x_2^3\ .
\end{tikzcd}$$

La dernière a.d.g.c. étant le modèle minimal de $CP^2 \times S^3$, nous avons donc :

Proposition 4.4.1. *L'application $CP^2 \vee S^3 \to X$, définie sur CP^2 par l'injection canonique et sur S^3 par le crochet de Whitehead des 2 sphères S^2, s'étend en une application continue injective en homotopie*

$$h : (CP^2 \times S^3)_0 \to X_0\ .$$

Comme $\mathrm{cat}_0(CP^2 \times S^3)_0 = 3$, il en résulte :

Proposition 4.4.2. $\mathrm{cat}_0(X) = 3$ *et* $e_0(X) = 2$.

Comme $e_0(X \times Y) = e_0(X) + e_0(Y)$ ([98]), en multipliant h n fois avec elle-même, on obtient :

Proposition 4.4.3. $\mathrm{cat}_0(X^n) = 3n$ *et* $e_0(X^n) = 2.n$.

Remarque : l'application h fournit en outre un exemple d'application injective en homotopie rationnelle $f : X \to Y$ avec $e_0(X) > e_0(Y)$.

4.5. - Catégorie et fibration.

Soit $F \to E \to B$ une fibration avec B 1-connexe. Notons K_i l'image du connectant $\partial_{i-1} : \pi_{i-1}(B) \to \pi_i(F)$ et

$$k = \sum_{i \text{ impair}} \dim K_i \otimes \mathbf{Q}\ .$$

En 3.3., nous avons vu que $k \leq \mathrm{cat}_0(F)$. Nous améliorons cette inégalité comme suit :

Théorème 4.5. $k \leq \mathrm{cat}_0(F) \leq \mathrm{cat}_0(E) + k$.

Lemme. *Si $S^{2n+1} \to E \xrightarrow{p} B$ est une fibration, alors*

$$\mathrm{cat}_0(E) \leq \mathrm{cat}_0(B) + 1 .$$

■ (Démonstration du lemme.) Soit $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda u, D) \to (\Lambda u, 0)$ le K.S. modèle de p, $|u| = 2n+1$. Si $\mathrm{cat}_0(B) = m$, $(\Lambda Z, d)$ est un rétracte de $(\Lambda Z/\Lambda^{>m} Z, \bar{d})$ et, par conséquent, $(\Lambda Z \otimes \Lambda u, D)$ est un rétracte de $(\Lambda Z/\Lambda^{>m} Z \otimes \Lambda u, \bar{D})$. Cette dernière a.d.g.c. étant de nilpotence $m+2$, le résultat s'en déduit.■

■ (Démonstration du théorème.) La démonstration du théorème se fait par récurrence sur k. Le cas $k = 0$ résulte du mapping theorem. Supposons donc le théorème vrai pour les fibrations avec $k = m-1$ et soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration avec $k = m$.

Notons $(\Lambda Y \otimes \Lambda Z, D)$ un K.S. modèle de E. Notons x le premier élément d'une K.S. base de Z à être de degré impair avec $\mathbf{Q}(D)(x) = y \neq 0$. Posons $n =$ degré y . Formons l'a.d.g.c. quotient $(\Lambda Y^{\geq n} \otimes \Lambda Z, \bar{D})$. Par le mapping theorem

$$\mathrm{cat}(\Lambda Y^{\geq n} \otimes \Lambda Z, \bar{D}) \leq \mathrm{cat}_0(E) .$$

Construisons l'a.d.g.c. $(\Lambda Y^{\geq n} \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, \bar{D})$ avec $\bar{D}u = y$.

Par le lemme précédent :

$$\mathrm{cat}(\Lambda Y^{\geq n} \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, \bar{D}) \leq \mathrm{cat}_0(E) + 1 .$$

En divisant par y et u, on a un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda Y^{\geq n} \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, \bar{D}) \xrightarrow{p} (\Lambda Y^{\geq n}/\Lambda y \otimes \Lambda Z, \bar{D}) .$$

Dans la fibration

$$(\Lambda Y^{\geq n}/\Lambda y, \bar{d}) \to (\Lambda Y^{\geq n}/\Lambda y \otimes \Lambda Z, \bar{D}) \to (\Lambda \bar{Z}, \bar{D}) ,$$

$k = m-1$. Par l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$\mathrm{cat}_0(F) \leq m - 1 + \mathrm{cat}_0(\Lambda Y^{\geq n}/\Lambda y \otimes \Lambda Z, \bar{D}) \leq m + \mathrm{cat}_0(E) . \qquad ■$$

4.6. - Description des éléments de Gottlieb.

Soit X un espace nilpotent de modèle minimal $(\Lambda Z, d)$. Notons G_n^ψ l'espace des applications linéaires $f : Z^n \to \mathbf{Q}$ qui s'étendent en des dérivations θ de degré $-n$ de ΛZ avec $\theta d - (-1)^n d\theta = 0$.

Proposition 4.6. *$G_n(X_0)$ est isomorphe à G_n^ψ .*

■ La donnée d'une dérivation θ est équivalente à celle d'un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\phi : (\Lambda Z, d) \to H^*(S^n; \mathbf{Q}) \otimes (\Lambda Z, d) ,$$

avec $\phi(x) = 1 \otimes x + \alpha \otimes \theta(x)$ [α désignant le générateur de $H^n(S^n; \mathbf{Q})$] . ■

Exemples :

1) Soit V une variété 1-connexe de dimension $2n$ avec $\chi(V) \neq 0$. Notons E l'espace total du fibré en sphères S^{2n-1} associé au fibré tangent.

Un modèle de E est donné par la K.S. extension

$$\mathcal{M}_V \to (\mathcal{M}_V \otimes \Lambda x_{2n-1}, d) \to (\Lambda x_{2n-1}, O) .$$

Par le théorème 2.3.5., on a : $[d(x_{2n-1})] = \chi(v) \cdot \omega$, ω classe fondamentale de V. Si V n'a pas le type d'homotopie rationnelle d'une sphère, alors $\pi_*(E) \otimes \mathbf{Q} \cong (\pi_*(V) \otimes \mathbf{Q}) \oplus \mathbf{Q}x_{2n-1}$ et $x_{2n-1} \in G_{2n-1}(E) \otimes \mathbf{Q}$.

2) Soit $f : S^3 \times S^5 \to K(\mathbf{Z}, 8)$ l'application classifiante associée à la classe fondamentale de $S^3 \times S^5$. Notons $S^7 \to E \to S^3 \times S^5$ l'image réciproque par f de la fibration.

$$\Omega K(\mathbf{Z}, 8) \to EK(\mathbf{Z}, 8) \to K(\mathbf{Z}, 8).$$

$\pi_*(E) \otimes \mathbf{Q}$ est un espace vectoriel de dimension 3 engendré par les classes x_3, x_5 et x_7 des sphères S^3, S^5, S^7 .

$$G_*(E) \otimes \mathbf{Q} = G_7(E) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}x_7 .$$

$$SG_*(E) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}x_7 \oplus \mathbf{Q}x_5 .$$

Problèmes.

La détection des éléments de Gottlieb n'est pas aisée. Si X est un C.W. complexe 1-connexe fini, nous savons (th.3.3) que $G_{2n}(X) \otimes \mathbf{Q} = 0$ et que $G_{\text{impair}}(X) \otimes \mathbf{Q}$ est de dimension finie. Nous conjecturons : si $\dim X = r$ alors $G_p(X) \otimes \mathbf{Q} = 0$ pour $p \geq 2r$.

4.7. - Modèle des espaces de Ganea. Démonstration des résultats énoncés en 4.1.

4.7.1. - *Un modèle pour le bouquet garni $T^{m+1}(X)$.*

Soit $f : (\Lambda Z, d) \to A_{PL}(X)$ un modèle de X. Notons X^m le produit de m copies de l'espace X et $(\Lambda Z, d)^{\otimes m}$ le produit tensoriel de m copies de $(\Lambda Z, d)$. Notons alors $p_i : X^{m+1} \to X$ les projections canoniques. L'application

$$f_{m+1} : (\Lambda Z, d)^{\otimes(m+1)} \to A_{PL}(X^{m+1}) ,$$

définie par

$$f_{m+1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{m+1}) = A_{PL}(p_1)(\alpha_1) \times A_{PL}(p_2)(\alpha_2) \times \cdots \times A_{PL}(p_{m+1})(\alpha_{m+1}),$$

est alors un modèle du produit X^{m+1}. Un modèle de la diagonale $\Delta : X \to X^{m+1}$ est fourni par la multiplication

$$u : (\Lambda Z, d)^{\otimes(m+1)} \to (\Lambda Z, d).$$

Pour analyser l'a.d.g.c. $A_{PL}(T^{m+1}(X))$, notons $*$ le point de base de X et $T_i^{m+1}(X)$ le sous-espace de $T^{m+1}(X)$ formé des points dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée est $*$. On a

$$T^{m+1}(X) = \bigcup_{i=1}^{m+1} T_i^{m+1}(X) .$$

Les simplexes singuliers de $T^{m+1}(X)$ dont l'image est contenue dans un des $T_i^{m+1}(X)$ forment un sous-complexe simplicial que nous noterons $E(X)$. Les formes différentielles PL compatibles sur les simplexes de $E(X)$ forment une a.d.g.c. que nous noterons $\tilde{A}(T^{m+1}(X))$ [60, (§13.5)].

Notons ρ la restriction canonique

$$\rho : A_{PL}(T^{m+1}(X)) \to \tilde{A}(T^{m+1}(X)) .$$

Les projections p_i déterminent des morphismes

$$\lambda_i : A_{PL}(X) \xrightarrow{(p_i)^*} A_{PL}(X^{m+1}) \to A_{PL}(T^{m+1}) \xrightarrow{\rho} \tilde{A}(T^{m+1}(X)) .$$

Multipliant ces applications ensemble, nous obtenons un morphisme d'a.d.g.c.

$$\lambda : (A_{PL}(X))^{\otimes m+1} \to \tilde{A}(T^{m+1}(X)) .$$

Notons finalement I l'idéal d'augmentation de $A_{PL}(X)$

$$I = \ker \varepsilon\ , \qquad \varepsilon : A_{PL}(X) \to A_{PL}(*) \cong \mathbf{Q}\ .$$

On a $I^{\otimes(m+1)} \subset \ker \lambda$ et λ induit donc par passage au quotient un morphisme

$$\bar{\lambda} : \frac{(A_{PL}(X))^{\otimes(m+1)}}{I^{\otimes(m+1)}} \to \tilde{A}(T^{m+1}(X))\ .$$

Lemme. *Les morphismes*

$$\frac{A_{PL}(X)^{\otimes(m+1)}}{I^{\otimes(m+1)}} \xrightarrow{\bar{\lambda}} \tilde{A}(T^{m+1}(X)) \xleftarrow{\rho} A_{PL}(T^{m+1}(X))$$

sont des quasi-isomorphismes.

■ Comme X est un c.w. complexe, le point de base $*$ admet un voisinage ouvert contractile U. Les injections

$$T_i^{m+1}(X) \rightarrowtail X^{i-1} \times U \times X^{m+1-i}$$

sont donc des équivalences d'homotopie et les sous-complexes $T_i^{m+1}(X)$ forment une famille excisive ([88] 4.6.3). Il en résulte que l'injection de $E(X)$ dans les simplexes singuliers de $T^{m+1}(X)$ induit un isomorphisme en homologie. Par ([58], théorème 14.18), il en est de même de l'application induite par les PL. formes : ρ est un quasi-isomorphisme.

Montrons par récurrence sur m que $\bar{\lambda}$ est un quasi-isomorphisme. Pour $m = 0$, $\bar{\lambda}$ est l'identité sur $\mathbf{Q}$. Supposons le résultat vrai pour $m = n - 1$ et considérons le cas $m = n$. L'espace $T^{m+1}(X)$ se décompose sous la forme

$$T^{m+1}(X) = (X \times T^m(X)) \bigcup (* \times X^m)\ ,$$

avec $* \times T^m(X) = (X \times T^m(X)) \bigcap (* \times X^m)$. Notons $\tilde{A}(X \times T^m(X))$ l'a.d.g.c. formée par les formes différentielles compatibles définies sur les simplexes singuliers dont l'image est contenue dans $\bigcup_{i\geq 2} T_i^{m+1}(X)$. La décomposition précédente conduit à un diagramme commutatif de courtes suites exactes représenté à la page suivante. Les morphismes i_1, i_2, j_1, j_2 proviennent des injections naturelles. $f_2 = g_1 = \varepsilon \otimes 1$, f_1 et g_2 sont les projections canoniques. $\tilde{\lambda}_m$ est défini par $\tilde{\lambda}_m(\alpha \otimes \beta) = A(p_1)(\alpha) \wedge A(p_2)\lambda(\beta)$.

$\tilde{\lambda}_m$ et f_m sont des quasi-isomorphismes. Par récurrence, $\bar{\lambda}_m$ en est un. $\bar{\lambda}_{m+1}$ est alors un quasi-isomorphisme par le lemme des cinq. ■

Notons $\eta : (\Lambda Z)^{\otimes(m+1)} \to (\Lambda Z^{\otimes(m+1)}/(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}$ la projection ; utilisons-la pour équiper l'algèbre quotient d'une différentielle. Le quasi-isomorphisme

$$f : (\Lambda Z, d) \to A_{PL}(X) ,$$

défini au début de ce paragraphe, détermine alors un quasi-isomorphisme

$$\Gamma : \frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}} \to \frac{A_{PL}(X)^{\otimes(m+1)}}{I^{\otimes(m+1)}} .$$

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)} \arrow[rrr] \arrow[d, "\eta"] & & & A_{PL}(X^{m+1}) \arrow[d] \\
\frac{(\Lambda Z)^{(\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}} \arrow[r, "\cong \Gamma"] & \frac{A_{PL}(X)^{\otimes(m+1)}}{I^{\otimes(m+1)}} \arrow[r, "\cong \bar{\lambda}"] & \tilde{A}(T^{m+1}(X)) & A_{PL}(T^{m+1}(X)) . \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Il entraîne la proposition suivante :

Proposition 4.7.1. *Soit* $r : (\Lambda Y, d) \to \frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}}$ *un modèle minimal, alors ce modèle se relève en un quasi-iso :*

$$r' : (\Lambda Y, d) \xrightarrow{\cong} A_{PL}(T^{m+1}(X)) .$$

De plus, si $\xi : (\Lambda Z, d)^{\otimes(m+1)} \to (\Lambda Y, d)$ *représente* η*, alors* ξ *est un modèle de l'inclusion* $T^{m+1}(X) \to X^{m+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{A}(T^{m+1}(X)) \arrow[r, "(i_1,i_2)"] & \tilde{A}(X \times T^m(X)) \oplus A_{PL}(* \times X^m) \arrow[r, "(j_1-j_2)"] & \tilde{A}(T^m(X)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{A_{PL}(X)^{\otimes(m+1)}}{I^{\otimes(m+1)}} \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[u, "\bar{\lambda}_{m+1}"'] & \left[A_{PL}(X) \otimes \frac{A_{PL}(X)^{\otimes m}}{I^{\otimes m}}\right] \oplus A_{PL}(X)^{\otimes m} \arrow[r, "(g_1-g_2)"] \arrow[u, "(\tilde{\lambda}_m, f_m)"'] & \frac{A_{PL}(X)^{\otimes m}}{I^{\otimes m}} \arrow[r] \arrow[u, "\bar{\lambda}_m"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

4.7.2. - *Un modèle pour l'espace de Ganea E_m.*

4.7.2.1. - L'espace E_m s'obtient comme somme amalgamée homotopique du diagramme

$$\begin{tikzcd} E_m \arrow[r] \arrow[d] & T^{m+1}(X) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X^{m+1} . \end{tikzcd}$$

Pour le construire, il suffit de remplacer Δ par une fibration p homotopiquement équivalente et de prendre ensuite sa restriction à $T^{m+1}(X)$. La bonne correspondance entre K.S. modèles et fibrations (paragraphe 2.3.) nous permet de réaliser ce programme dans les modèles.

4.7.2.2. - La diagonale Δ a pour modèle la multiplication

$$u : (\Lambda Z, d)^{\otimes(m+1)} \to (\Lambda Z, d) ,$$

et pour K.S. modèle le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\Lambda Z, d)^{\otimes(m+1)} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "i"'] & (\Lambda Z, d) \\ & ((\Lambda Z)^{\otimes(m+1)} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}, D) . \arrow[u, "\wr\, \psi"'] \end{tikzcd}$$

Supposons pour simplifier que $(\Lambda Z)_i$, $1 \leq i \leq m+1$, et $(\Lambda \bar{Z})_i$, $1 \leq i \leq m$, représentent respectivement les copies de ΛZ et $\Lambda \bar{Z}$ en $i^{\text{ème}}$ position dans $(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}$. Alors, pour $i = 1, \cdots, m$, $((\Lambda Z)_i \otimes (\Lambda Z)_{i+1} \otimes (\Lambda \bar{Z})_i, D)$ est l'a.d.g.c. définie en 2.3.

Formons alors le produit tensoriel

$$\begin{aligned} \Gamma_m(X) &= \Big(\frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}, D\Big) \\ &\overset{\text{def}}{=} \frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}} \otimes_{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}} (\Lambda Z^{\otimes(m+1)} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}) . \end{aligned}$$

La proposition suivante résulte alors clairement du théorème 2.3.4.

Proposition. *$\Gamma_m(X)$ représente le type d'homotopie rationnelle de E_m.*

4.7.2.3 - **Théorème.** *Il existe une équivalence d'homotopie*

$$\Gamma_m \cong [\Lambda Z / \Lambda^{>m} Z] \oplus V ,$$

où

(1) $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z$ *est l'a.d.g.c. quotient de* $(\Lambda Z, d)$ *par l'idéal différentiel* $\Lambda^{>m}Z$.

(2) $V = \sum_{p\geq 1} V^p$. *La différentielle dans* V *est nulle.*

(3) $V \cdot [(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z) \oplus V]^+ = 0$.

Cette équivalence d'homotopie est construite comme la composée de trois autres α_1, α_2 et α_3.

Considérons tout d'abors l'a.d.g.c.

$$A = \Big((\Lambda Z)^{\otimes(m+1)} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}, D\Big) ,$$

ainsi que la K.S. extension

$$(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\lambda_i} ((\Lambda Z)^{\otimes(m+1)} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}, D) \xrightarrow{\rho_i} ((\Lambda Z)^{\otimes m} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}, \bar{D}) ,$$

où λ_i est l'inclusion du $i^{\text{ème}}$ facteur et $\rho_i = \varepsilon$ sur $(\Lambda Z)_i$. Comme $\mathbf{Q}(\bar{D})$ est un isomorphisme de $\bar{Z}$ sur Z, on a

$$H((\Lambda Z)^{\otimes m} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}, \bar{D}) = \mathbf{Q} .$$

Notons $\tilde{D}$ la différentielle induite de $\bar{D}$ sur $(\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}$. $\tilde{D} = 0$. En effet, supposons qu'il existe un élément $\bar{z}$ avec $\tilde{D}(\bar{z}) \neq 0$. Prenons alors un tel $\bar{z}$ de plus bas degré. On a, dans ce cas

$$0 = \bar{D}(\tilde{D}(\bar{z}) + (\bar{D} - \tilde{D})(\bar{z})) .$$

Or $\bar{D}(\tilde{D}(\bar{z}))$ a une composante non nulle dans $(\oplus^m Z) \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}$, tandis que $(\bar{D} - \tilde{D})(\bar{z}) \in \Lambda^{\geq 2}(\oplus^m Z) \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}$, ce qui est absurde.

Introduisons une bigraduation sur Γ_m et A comme suit

$$A^{p,q} = \sum_{p_1+\cdots+p_{m+1}=p} \left[[\Lambda^{p_1} Z \otimes \ldots \otimes \ldots \Lambda^{p_{m+1}} Z] \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}\right]^{p+q} ,$$

$$\Gamma_m^{p,q} = \sum_{p_1+\cdots+p_{m+1}=p} \left[\left(\frac{\Lambda^{p_1} Z \otimes \ldots \otimes \Lambda^{p_{m+1}} Z}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes(m+1)}}\right) \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}\right]^{p+q} .$$

Comme $\tilde{D} = 0$, D se décompose sous la forme $D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$ avec $D_i(A^{p,q}) \subset A^{p+i,q-i+1}$.

La bigraduation de A induit une bigraduation sur $(\Lambda Z)^{\otimes m} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}$. ρ_{m+1} est un morphisme bigradué d'algèbres et un morphisme filtré d'a.d.g.c. filtrées. Il se factorise de la même manière par Γ_m et on a une courte suite exacte d'a.d.g.c.

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d] \arrow[dr, "\rho_{m+1}"] & & \\ 0 \arrow[r] & \frac{(\Lambda Z)^{\otimes m}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes m}} \otimes \Lambda^+ Z \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m} \arrow[r] & \Gamma_m \arrow[r, "\bar{\rho}_{m+1}"] & (\Lambda Z)^{\otimes m} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Posons $\Delta_m = \mathbf{Q} \oplus \ker \bar{\rho}_{m+1}$. L'injection

$$\alpha_1 : \Delta_m \to \Gamma_m$$

est un morphisme bigradué d'algèbres filtrées. Notons $E_r^{p,q}$ les suites spectrales induites. Comme $E_2((\Lambda Z)^{\otimes m} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes m}) = \mathbf{Q}$, $E_2(\alpha_1)$ est un isomorphisme et α_1 un quasi-iso.

Lemme. $E_2^{p,*}(\Gamma_m) = E_2^{p,*}(\Delta_m) = 0$ *pour* $p > m$.

■ Comme $E_2(\alpha_1)$ est un isomorphisme, il suffit de voir que $H^{p,*}(\Delta_m, D_1) = 0$ pour $p > m$.

Δ_m peut s'écrire

$$\Delta_m = \mathbf{Q} \oplus \left[\left(\frac{(\Lambda Z)^{\otimes m}}{(\Lambda^+ Z)^{\otimes m}} \otimes (\Lambda \bar{Z})^{\otimes (m-1)} \right) \otimes \Lambda^+ Z \otimes (\Lambda \bar{Z})_m \right] .$$

L'algèbre entre crochets est D-stable et donc D_1-stable. Elle est, en outre, isomorphe à Γ_{m-1}. On a donc

$$\Delta_m = \mathbf{Q} \oplus (\Gamma_{m-1} \oplus \Lambda^+ Z \otimes \Lambda \bar{Z}) .$$

L'injection de $\Lambda^+ Z$ dans ΛZ fournit une courte suite exacte d'a.d.g.c. bigraduées

$$(*) \qquad 0 \to (\Delta_m^+, D_1) \to (\Gamma_{m-1} \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D_1) \to (\Gamma_{m-1} \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{D}_1) \to 0 .$$

On travaille alors par récurrence sur m. Si $m = 1$, $\Delta_1^+ \simeq \Lambda^+ Z \otimes \Lambda \bar{Z}$. La courte suite exacte

$$0 \to (\Lambda^+ Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D) \to (\Lambda \bar{Z}, \bar{D}) \to 0$$

montre que

$$H^{0,*}(\Delta_1) = \mathbf{Q} \; ,$$
$$H^{1,r}(\Delta_1) = (\Lambda^+ \bar{Z})^r \; ,$$
$$H^{p,*}(\Delta_1) = 0 \qquad p > 1 \; .$$

Le pas récurrent résulte alors de la suite $(*)$. En effet, l'injection $\Gamma_{m-1} \to (\Gamma_{m-1} \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D_1)$ est un quasi-iso bigradué et donc

$$H^{p,*}(\Gamma_{m-1} \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D_1) = 0, \; p \geq m \; .$$

D'autre part, $\Lambda \bar{Z}$ est concentrée en degré zéro ; un argument de suite spectrale montre alors que

$$H^{p,*}(\Gamma_{m-1} \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{D}_1) = 0, \; p \geq m \; . \qquad \blacksquare$$

Construisons maintenant α_2 et α_3. Dans $\Delta_m^{m,*}$, choisissons un supplémentaire gradué U de $\Delta_m^{m,*} \cap \ker D_1$. Posons $J = \Delta_m^{>m,*} \oplus U$. J est un sous-espace D-stable. C'est un idéal car $\Delta_m = \mathbf{Q} \oplus \Delta_m^{+,*}$. Comme $H^{p,*}(J, D_1) = 0$, J est un idéal acyclique. α_2 sera le morphisme quotient

$$\alpha_2 : \Delta_m \to \Delta_m / J \; .$$

Comme $(\Delta_m/J)^+$ est de nilpotence $m+1$, l'inclusion de ΛZ dans Δ_m en tant que $(m+1)^{\text{ème}}$ facteur,

$$(\Lambda Z, d) \to \Delta_m \; ,$$

se factorise en un morphisme quotient

$$\xi : (\Lambda Z / \Lambda^{>m} Z, \bar{d}) \to \Delta_m / J \; .$$

Bigraduons ΛZ par $(\Lambda Z)^{p,q} = (\Lambda^p Z)^{p+q}$. d se décompose en $d = \sum_{i \geq 1} d_i$ avec d_i homogène de bidegré $(i, 1-i)$. ξ est alors homogène de bidegré $(0,0)$. Choisissons un espace vectoriel gradué $V \subset (\Delta_m/J)^{m,*}$ tel que

$$H^{m,*}(\Delta_m/J) = \xi^*(H^{m,*}(\Lambda Z / \Lambda^{>m} Z, \bar{d}_1)) \oplus V \; .$$

ξ induit un morphisme $\alpha_3 : (\Lambda Z / \Lambda^{>m} Z) \oplus V \to \Delta_m / J$. Montrons que α_3 induit un isomorphisme au niveau E_2 des suites spectrales. Il en résultera que α_3 est un quasi-isomorphisme. Considérons pour cela simplement le diagramme commutatif suivant où i désigne l'injection sur le $(m+1)^{\text{ème}}$ facteur.

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z,\bar{d}) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\xi"'] & \mathbf{Q}\oplus\left[(\Lambda Z)^{\otimes m}\otimes\frac{\Lambda^+Z}{\Lambda^{>m}Z}\otimes(\Lambda\overline{Z})^{\otimes m}\right] \arrow[d, "\phi"] \\
 & \Delta_m/J\,.
\end{tikzcd}$$

i est clairement un quasi-iso et ϕ un isomorphisme en bidegré (p,q) pour $p<m$ et une injection sur $(\ker D_1)^{m,*}$. Il en résulte que $H^{p,*}(\phi)$ est un iso pour $p<m$ et est injectif pour $p=m$. ∎

4.7.2.4. - *Démonstration du théorème 4.1.1.*

Il résulte directement du théorème 4.7.2.3., car V est le modèle d'un bouquet de sphères.

4.7.2.5. *Modèle de l'inclusion $E_m \mapsto E_{m+1}$.*

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X^{m+1} \arrow[rr, "(1_X)^m\times\Delta"] & & X^{m+2} \\
 & X \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

a pour modèle

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z)^{\otimes(m+2)} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "i"] & (\Lambda Z)^{\otimes m+1} \arrow[d, "i"] \\
((\Lambda Z)^{\otimes(m+2)}\otimes(\Lambda\bar{Z})^{\otimes(m+1)},D) \arrow[r, "\cong"] & (\Lambda Z^{\otimes(m+1)}\otimes(\Lambda\bar{Z})^{\otimes m},D)\,,
\end{tikzcd}$$

avec $\theta(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+2})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}\cdot\alpha_{m+2})$.

L'application induite $T^{m+1}(X)\to T^{m+2}(X)$ a donc pour modèle l'application induite sur les quotients

$$\frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+2)}}{(\Lambda^+Z)^{\otimes(m+2)}} \xrightarrow{\theta} \frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+Z)^{\otimes(m+1)}}\,,$$

et par naturalité, le morphisme $j_m : E_m \to E_{m+1}$ (paragraphe 1.3) a pour modèle l'application θ',

$$\theta' : \Gamma_{m+1}=\frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+2)}}{(\Lambda^+Z)^{\otimes(m+2)}}\otimes(\Lambda\bar{Z})^{\otimes(m+1)} \to \Gamma_m=\frac{(\Lambda Z)^{\otimes(m+1)}}{(\Lambda^+Z)^{\otimes(m+1)}}\otimes(\Lambda\bar{Z})^{\otimes m}\,,$$

définie par :

$$\theta'(a_1,\ldots,a_{m+2},b_1,\ldots,b_{m+1})=(a_1,\ldots,a_m,a_{m+1}\cdot a_{m+2},b_1,\ldots,b_m)\ .$$

Nous allons maintenant suivre le modèle de j_m le long des quasi-isos α_1, α_2 et α_3 du paragraphe 4.2.3.

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma_{m+1} \arrow[r, "\theta'"] & \Gamma_m \\
 & \Delta_{m+1} \arrow[u, "\alpha_{1,m+1}"'] \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha_{2,m+1}"] & \Delta_m \arrow[u, "\alpha_{1,m}"'] \arrow[d, "\alpha_{2,m}"] \\
 & \Delta_{m+1}/J_{m+1} \arrow[r, "\gamma_2"] & \Delta_m/J_m \\
\Lambda Z \arrow[ur, "i_{m+2}"] \arrow[urr, "i_{m+1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\gamma_1(u_1,\ldots,u_{m+1},\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m,u_{m+2},\bar{v})=(u_1,\ldots,u_m,\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{m-1},u_{m+1}\cdot u_{m+2},\bar{v}_m)$$

i_p désignant l'inclusion dans le $p^{\text{ème}}$ facteur. La nilpotence des algèbres Δ_r/J_r fournit un nouveau diagramme où p désigne la projection usuelle.

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{m+1}/J_{m+1} \arrow[r, "\bar{\alpha_2}"] & \Delta_m/J_m \\
\Lambda Z/\Lambda^{>m+1}Z \arrow[u, "\xi_{m+1}"'] \arrow[r, "p"] & \Lambda Z/\Lambda^{>m}Z \arrow[u, "\xi_m"']
\end{tikzcd}$$

La localisation de l'espace vectoriel V_m dans $(\Delta_m/J_m)^{m,*}$ et V_{m+1} dans $(\Delta_{m+1}/J_{m+1})^{m+1,*}$ entraîne la thèse. ∎

5 - ESPACES π-FINIS.

Un espace topologique nilpotent X est dit π-fini si :

$$rang\pi_1(X) + \sum_{i=2}^{\infty} \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q} < \infty.$$

Autrement dit, X est π-fini si son modèle minimal $(\Lambda Z, d)$ satisfait $\dim Z < \infty$. X est dit *elliptique* si X est π-fini et si $H^*(X;\mathbf{Q})$ est de dimension finie.

Le but du présent chapitre est de présenter de façon "self-contained" un certain nombre de résultats importants sur l'homotopie et la cohomologie des espaces π-finis.

Les espaces π-finis les plus simples du point de vue rationnel sont les espaces purs. Ils seront définis et étudiés au §5.1. Tout espace peut être "approximé" par un espace pur (§5.2). Les résultats du §5.1 peuvent ainsi s'étendre aux espaces elliptiques (5.2, 5.3) et aux espaces π-finis à cohomologie noethérienne (5.6).

Les résultats les plus importants de ce chapitre peuvent se réunir en un théorème :

Théorème. *Si X est un espace nilpotent elliptique, alors*

1) $\chi(X) = \sum(-1)^i \dim H^i(X;\mathbf{Q})$ *vérifie* $\chi(X) \geq 0$.

2) $\sum(-1)^i \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q} \leq 0$.

3) $H^*(X;\mathbf{Q})$ *satisfait à la dualité de Poincaré.*

4) $\mathrm{cat}_0(X) \geq \dim \pi_{\mathrm{impair}}(X) \otimes \mathbf{Q}$.

5) Si $m = \max\{p | H_p(X;\mathbf{Q}) \neq 0\}$, *alors* $\dim H_*(X;\mathbf{Q}) \leq 2^m$ *et* $\pi_p(X) \otimes \mathbf{Q} = 0$ *pour* $p \geq 2m$.

Nous ferons ici usage de notions issues de l'algèbre commutative (dimension de Krull, anneaux de Cohen-Macaulay,...). Pour rendre la lecture du texte plus aisée nous avons ajouté un paragraphe de rappels sur ces notions (§5.7) .

5.1. - Espaces purs.

Un espace X 1-connexe de type fini est dit pur si son modèle minimal s'écrit $(\Lambda Z, d) = (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ avec Q et P des espaces vectoriels concentrés respectivement en degrés pairs et impairs, et vérifiant

$$d(Q) = 0\,, \quad d(P) \subset \Lambda Q\,.$$

$(\Lambda Z, d)$ est alors muni d'une seconde graduation canonique $\Lambda Z = \oplus_{p\geq 0}(\Lambda Z)_p$ avec $(\Lambda Z)_p = \Lambda Q \otimes \Lambda^p P$. On a $d(\Lambda Z)_p^q \subset (\Lambda Z)_{p-1}^{q+1}$.

$H^*(X;\mathbf{Q}) \cong H^*(\Lambda Z, d)$ est également muni d'une seconde graduation $H = \oplus H_p^q$, $H_p \cdot H_q \subset H_{p+q}$.

Série de Poincaré-Koszul.

Soit V un espace vectoriel bigradué, $V = \oplus_{p,q\geq 0} V_p^q$ avec $\dim V_p^q < \infty$,$\forall p,q$. On définit alors la série de Poincaré-Koszul de V, U_V par $U_V(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r$ avec $c_r = \sum_{p+q=r}(-1)^p \dim V_p^q$. Si V est muni d'une différentielle d avec $d(V_p^q) \subset V_{p-1}^{q+1}$, alors les espaces vectoriels $\oplus_{p+q=r} V_p^q$ sont stables pour d. On a donc :

$$U_{H^*(V,d)}(t) = U_V(t) \; .$$

Soit X un espace pur. Notons $2b_1 - 1, \ldots, 2b_r - 1$ les degrés d'une base homogène de P et $2a_1, \cdots, 2a_s$ les degrés d'une base homogène de Q, alors

$$U_{H^*(X,\mathbf{Q})}(t) = \frac{\prod_{i=1}^r (1 - t^{2b_i})}{\prod_{j=1}^s (1 - t^{2a_j})} \; .$$

Caractéristique d'Euler homotopique χ_π .

Lorsque X est π-fini, la caractérisitque d'Euler homotopique est définie par:

$$\chi_\pi(X) = \dim Q - \dim P \; .$$

Si X est 1-connexe, alors

$$\chi_\pi(X) = \dim \pi_{\text{pair}}(X) \otimes \mathbf{Q} - \dim \pi_{\text{impair}}(X) \otimes \mathbf{Q} \; .$$

Pour distinguer χ_π de la caractéristique d'Euler cohomologique usuelle, nous noterons souvent cette dernière χ_c.

Théorème 5.1. ([54]). *Supposons que X soit pur et elliptique, alors :*

1) $\chi_\pi \leq 0$.

2) $\chi_c \geq 0$ *; si* $\chi_\pi < 0$, $\chi_c = 0$ *et si* $\chi_\pi = 0$, $\chi_c = \prod \frac{b_i}{a_i}$.

3) Posons $k = -\chi_\pi$, *alors* $H_k^*(X;\mathbf{Q}) \neq 0$ *et* $H_{>k}^*(X;\mathbf{Q}) = 0$.

4) Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $\chi_\pi = 0$,

(ii) $H_+(X;\mathbf{Q}) = 0$,

(iii) $H_1^*(X;\mathbf{Q}) = 0$,

(iv) $\chi_c > 0$,

(v) $H^* = H^{\text{pair}} = \Lambda Q/P\cdot\Lambda Q$,

(vi) Le choix d'une section linéaire $\sigma : H_0(\Lambda Q\otimes\Lambda P, d)\to\Lambda Q$ *fournit un isomorphisme de* $\Lambda s^{-1}P$*-module.*

$$(\mathrm{Im}\sigma)\otimes\Lambda s^{-1}P \xrightarrow{\cong} \Lambda Q\ ,$$
$$\alpha\otimes s^{-1}x \to \alpha\cdot dx\ .$$

■ 1) $U_{H(X;\mathbf{Q})}(t)$ est un polynôme. On note $\rho(X)$ la multiplicité de 1 comme racine de $U_X(t)$. L'égalité

$$\prod_{j=1}^{s}(1-t^{2a_j})U_X(t) = \prod_{i=1}^{r}(1-t^{2b_i})$$

entraîne $\dim Q + \rho(X) = \dim P$ et donc

$$\chi_\pi = \dim Q - dimP = -\rho(X) \le 0\ .$$

2) Comme $U_X(1) = U_X(-1)$, on a

$$\chi_c(X) = \lim_{t\to 1}\frac{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{2b_i})}{\prod_{j=1}^{r}(1-t^{2a_j})},\quad \text{ce qui fournit le résultat}\ .$$

3) Posons l avec $H_l(X;\mathbf{Q})\neq 0$ et $H_{>l}(X;\mathbf{Q}) = 0$. Considérons l'a.d.g.c.

$$R = (\Lambda Q\otimes\Lambda P\otimes\Lambda sQ, D)\ .$$

avec $(sQ)^p = Q^{p+1}$ et $d(sq) = q\quad \forall q\in Q$.

Munissons R d'une seconde graduation d'algèbre en posant $sQ = (sQ)_1$.

Ecrivons cette a.d.g.c. sous la forme

$$R = ((\Lambda Q\otimes\Lambda sQ)\otimes\Lambda P, D)\ .$$

L'augmentation $\Lambda Q\otimes\Lambda sQ\to\mathbf{Q}$ induit un quasi-iso bigradué

$$(\Lambda Q\otimes\Lambda sQ\otimes\Lambda P, D)\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1}(\Lambda P, 0)\ .$$

Filtrons maintenant R par le degré de graduation en $\Lambda Q \otimes \Lambda P$. On obtient une suite spectrale trigraduée de terme E_1 trigradué

$$(E_1^{p,q})_r = (H^p(\Lambda Q \otimes \Lambda P) \otimes \Lambda(sQ))_r^{p+q} .$$

Comme $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P)$ et $\Lambda(sQ)$ sont de dimensions finies, on a

$$l + \dim Q = \max\{ p \text{ avec } (E_1)_p \neq 0\} = \max\{ p \text{ avec } H_p(R) \neq 0\} = \dim P .$$

4) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) résulte de 3).
(ii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) est clair à partir de 2).

(iii) $\Rightarrow$ (vi).

Notons K le noyau du morphisme $\phi : H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P) \otimes \Lambda s^{-1}P \to \Lambda Q$ défini par $\phi(\alpha \otimes s^{-1}x_1 \Lambda \ldots \Lambda s^{-1}x_r) = \alpha \cdot dx_1 \ldots dx_r$. Ceci induit une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \to (K \otimes \Lambda P, D') \to (H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P) \otimes \Lambda s^{-1}P \otimes \Lambda P, D) \xrightarrow{\phi} (\Lambda Q \otimes \Lambda P, D) \to 0,$$

et donc une suite exacte

$$H_1(\Lambda Q \otimes \Lambda P) \to H_0(K \otimes \Lambda P) \to H_0(H_0 \otimes \Lambda s^{-1}P \otimes \Lambda P) \xrightarrow{\cong} H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P) .$$

Si $H_1 = 0$, $H_0(K \otimes \Lambda P) = 0$ et donc $K = 0$, car si x est l'élément de plus bas degré de K, alors $x \otimes 1$ définit une classe cohomologiquement non nulle dans $K \otimes \Lambda P$.

(vi) $\Rightarrow$ (ii).

Si $\phi : H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P) \otimes \Lambda s^{-1}P \to \Lambda Q$ est un isomorphisme, on a une suite d'isomorphismes

$$H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P, D) \xrightarrow{\cong} H_*(H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P) \otimes \Lambda s^{-1}P \otimes \Lambda P, D) \xrightarrow{\cong} H_*(\Lambda Q \otimes \Lambda P) . \ \blacksquare$$

Proposition 5.1.1. *Soit X un espace pur et π-fini. Si $H_l \neq 0$, on a $H_k \neq 0$ pour $0 \leq k \leq l$.*

■ Elle se fait par récurrence sur la dimension de P. Décomposons P sous la forme $P = P_1 \oplus \mathbf{Q}x$, et considérons la suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \to (\Lambda Q \otimes \Lambda P_1, D) \to (\Lambda Q \otimes \Lambda P, D) \xrightarrow{\mu} (\Lambda Q \otimes \Lambda P_1, D) \to 0 ,$$

où $\mu(\alpha x + \beta) = \alpha$; $\alpha, \beta \in \Lambda Q \otimes \Lambda P_1$.

Le connectant Δ est la multiplication par dx. Ceci induit une suite exacte courte bigraduée

$$0 \to (\text{coker}\Delta)_p \to H_p(\Lambda Q \otimes \Lambda P, D) \to (\ker \Delta)_{p_1} \to 0 .$$

Par induction, on a $H_p((\Lambda Q \otimes \Lambda P_1), D) \neq 0$, $p \leq q$ et $= 0$ pour $p > q$. Il en est donc de même pour coker$\Delta = H_*(\Lambda Q \otimes \Lambda P)/dx \cdot H_*(\Lambda Q \otimes \Lambda P)$. Il en résulte que $H_p(\Lambda Q \otimes \Lambda P, D) \neq 0$, $p \leq q'$ et $= 0$ pour $p > q'$ avec $q' = q$ si $(\ker \Delta)_q = 0$ et $q' = q + 1$ si $(\ker \Delta)_q \neq 0$. ■

Lemme. *Soit X un espace pur π-fini avec $H_+ \neq 0$. Notons $r = \min\{ q | H_1^q(X; \mathbf{Q}) \neq 0\}$. Notons N le minimum des degrés des éléments de P alors :*

1) Pour $p > 0$, $H_p^q = 0$ pour $q < r + N(p-1)$.

2) $r = \min\{ q | H_+^q \neq 0\}$.

■ La démonstration se fait par récurrence sur dim P, comme dans la proposition précédente. Les résultats se déduisent de la suite exacte courte

$$0 \to (\text{coker}\,\Delta)_p^q \to H_1^q(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \to (\ker \Delta)_{p-1}^{q-|x|} \to 0 .$$ ■

Proposition 5.1.2. *Soit X un espace pur π-fini avec $H_+ \neq 0$. Notons r le minimum des entiers q avec $H_1^q(X; \mathbf{Q}) \neq 0$, s le degré maximum des éléments de P et n le degré maximum des éléments de $H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$. Alors $r \leq n + s$.*

■ Supposons que $r > n+s$. Ajoutons par induction à $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ des variables pour tuer H_+ : on obtient ainsi un complexe $(\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda Z, d) \cong H_0$. Le complexe $(\Lambda Z, \bar{d})$ n'a pas une cohomologie de dimension finie, car dans ce cas n serait égale à la dimension formelle de $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P)$ plus la dimension maximale de $H^*(\Lambda Z, \bar{d})$, ce qui est absurde.

D'autre part, l'hypothèse sur les dimensions montre que P est contenu dans le groupe de Gottlieb de $(\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda Z, d)$. Il en résulte que

$$(*) \qquad (\Lambda P \otimes \Lambda Z, \bar{d}) \cong (\Lambda P, 0) \otimes (\Lambda Z, \bar{d}) .$$

Finalement, on a un quasi-isomorphisme $(\Lambda P \otimes \Lambda Z, \bar{d}) \cong (\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda sQ, d)$ avec $\mathbf{Q}(d)(s_\alpha) = \alpha$. Il en résulte que $H^*(\Lambda P \otimes \Lambda Z, \bar{d})$ est de dimension finie, ce qui, compte tenu de $(*)$, montre que $H^*(\Lambda Z, \bar{d})$ est de dimension finie. ■

5.2. - La suite spectrale impaire.

Soit X un espace π-fini. Notons son modèle minimal sous la forme $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ avec $Q = Q^{\text{pair}}$ et $P = P^{\text{impair}}$. Filtrons $\Lambda Q \otimes \Lambda P$ par

$$F_p = \oplus_{r+s \geq p} [\Lambda Q \otimes \Lambda^r P]^s \, .$$

$$E_0^{p,q} = [\Lambda Q \otimes \Lambda^{-q} P]^{p+q} \, ,$$

$d_0(Q) = 0$ et $d_0(P) \subset \Lambda Q$; $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)$ est donc un complexe pur.

Ceci définit une suite spectrale, appelée suite spectrale impaire vérifiant

$$E_2^{p,q} = E_1^{p,q} = H^{p,q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0) \, ,$$

et convergeant vers $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$.

Grâce à cette suite spectrale les résultats du paragraphe 5.1 vont s'étendre aux espaces π-finis.

Proposition 5.2.([59]). *Soit $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ le modèle minimal d'un espace π-fini X. Les conditions suivantes sont équivalentes*

1) $\dim H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0) < \infty$.

2) $\dim H^*(X; \mathbf{Q}) = \dim H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) < \infty$.

■ (1) $\Rightarrow$ (2) résulte de la suite spectrale ci-dessus.

(2) $\Rightarrow$ (1). Ecrivons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) = (\Lambda(x_1, \ldots, x_n), d)$.

Comme $H^*(X; \mathbf{Q}) < \infty$, $\text{cat}_0(\Lambda(x_1, \ldots, x_n), d) < \infty$. Il en est donc de même pour les a.d.g.c. quotient : $\text{cat}_0(\Lambda(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \bar{d})$.

Ceci entraîne

$$\dim H^*(\Lambda(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \bar{d}) < \infty \, .$$

On démontre le résultat par récurrence sur n. Décomposons $\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$ sous la forme d'une K.S. extension

$$(\Lambda x_1, 0) \to (\Lambda(x_1, \ldots, x_n), d) \to (\Lambda(x_2, \ldots, x_n), \bar{d}) \, .$$

Par l'hypothèse de récurrence $\dim H^*(\Lambda(x_2, \ldots, x_n), \bar{d}_0) < \infty$. Si x_1 est de degré impair, $\dim H^*(\Lambda(x_1, \ldots, x_n), d_0) < \infty$. Si x_1 est de degré pair, on considère la suite spectrale obtenue en filtrant $(\Lambda(x_1,\dots,x_n),d_0)$ par les puissances de x_1. Elle satisfait

$$E_2 = \Lambda x_1 \otimes H^*(\Lambda(x_2,\dots,x_n),\bar{d}_0)\ ,$$

et E_2 est un (Λx_1)-module de type fini par l'hypothèse de récurrence. Comme $H^*(\Lambda(x_1,\dots,x_n),d) < \infty$, une puissance de x_1 est un d-cobord et donc un d_0-cobord. $[x_1^p] = 0$ dans E_∞. Il s'ensuit que E_∞ est un $\Lambda x_1/x_1^p$-module finiment engendré. On a donc $\dim E_\infty = \dim H^*\big(\Lambda(x_1,\dots,x_n),d_0\big) < \infty$. ∎

Théorème 5.2.([59]). *Soit X un espace elliptique. Dans ce cas, $\chi_\pi(X) \le 0$, $\chi_c(X) \ge 0$. De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) $\chi_\pi = 0$,

(2) $\chi_c > 0$,

(3) $H^*(X;\mathbf{Q}) \doteq H^{\text{pair}}(X;\mathbf{Q})$.

∎ Si $(\Lambda Q\otimes\Lambda P,d)$ est le modèle minimal de X, on a une suite spectrale impaire

$$H^*(\Lambda Q\otimes\Lambda P,d_0) \Rightarrow H^*(\Lambda Q\otimes\Lambda P,d)\ .$$

Comme $H^*(\Lambda Q\otimes\Lambda P,d_0) < \infty$, ces deux a.d.g.c. ont même χ_c. Elles ont aussi même χ_π. Les deux premières assertions proviennent du théorème 5.1. En vertu du même théorème 5.1., les 3 conditions (1), (2) et (3) sont équivalentes à la dégénérescence de la suite spectrale impaire au terme E_1. ∎

5.3. - Dualité de Poincaré et dimension.

Définition. *Une algèbre graduée de dimension finie A est dite de dimension formelle m si $A^m \neq 0$ et $A^{>m} = 0$.*

Définition. *Une algèbre à dualité de Poincaré A est une algèbre graduée commutative de dimension formelle m finie vérifiant*

(1) $A^m \cong \mathbf{Q}\omega$.

(2) *$\forall p$, la multiplication $A^p \times A^{m-p} \to A^m \cong \mathbf{Q}$ est une forme bilinéaire non dégénérée.*

A est à dualité de Poincaré si seulement si le A-module $\bar{A} = Hom(A,\mathbf{Q})$ est libre de rang 1.

$$\bar{A} \cong A\cdot\bar{\omega}\ .$$

on a les propriétés suivantes :

1) $A \otimes B$ est à dualité de Poincaré si et seulement si A et B le sont.

2) Si (A, d_A) est une a.d.g.c. avec A est une algèbre à dualité de Poincaré et si la classe fondamentale de A est non cohomologue à zéro dans $H^*(A; d_A)$, alors $H^*(A; d_A)$ est à dualité de Poincaré.

Théorème 5.3.1.([59]). *Soit X un espace elliptique. Alors*

(1) *$H^*(X; \mathbf{Q})$ satisfait à la dualité de Poincaré.*

(2) *La dimension formelle m de $H^*(X; \mathbf{Q})$ vérifie*

$$m = \dim Z^{pair} - \sum_k (-1)^k k \dim Z^k ,$$

avec $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X.

■ (1) Ecrivons $(\Lambda Z, d)$ sous la forme $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$. Il suffit de voir que $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)$ est une algèbre à dualité de Poincaré.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de Q. Comme $H^*((\Lambda Q \otimes \Lambda P), d_0) < \infty$, il existe un entier n_i avec $x_i^{n_i} = dw_i$. Considérons l'a.d.g.c. $(\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda U, D_0)$ avec $U = (u_1, \dots, u_n)$, $D(u_i) = x_i^{n_i}$.

Les $x_i^{n_i}$ déterminent une suite régulière dans ΛQ. Ceci définit un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda U, D_0) \xrightarrow{\phi} (\Lambda(x_i)/x_i^{n_i} \otimes \Lambda P, \bar{D}_0) .$$

D'autre part, le changement de variable $u_i' = u_i - w_i$ définit un isomorphisme d'a.d.g.c.

$$(\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda U, D_0) \xrightarrow{\phi} (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0) \otimes (\Lambda U, 0) .$$

Comme $(\Lambda(x_i)/x_i^{n_i} \otimes \Lambda P)$ est une algèbre à dualité de Poincaré, il en est de même pour sa cohomologie. Comme ΛU est à dualité de Poincaré, la propriété (1) ci-dessus montre que $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)$ satisfait à la dualité de Poincaré.

(2) Ecrivons $(\Lambda Z, d) \cong (\Lambda(x_1, \dots, x_n), d)$ et démontrons la formule précédente par récurrence sur n.

Si $n = 1$, on a $(\Lambda x_1, 0)$ et $m =$ degré (x_1).

Supposons que la formule soit vraie pour les espaces π-finis de cohomologie finie avec $\dim Z \leq n-1$. On considère la K.S. extension

$$(\Lambda x_1, 0) \to (\Lambda(x_1, \dots, x_n), d) \to (\Lambda(x_2, \dots, x_n), \bar{d}) .$$

Si le degré de x_1 est impair, un argument de coin montre que

$$m = \text{dim formelle } H^*(\Lambda(x_2, \dots, x_n), \bar{d}) + \text{degré } (x_1) ,$$

ce qui entraîne la formule par hypothèse d'induction.

Si le degré de x_1 est pair, on choisit k tel que $x_1^k = dw$, on considère alors l'a.d.g.c.

$$(\Lambda(x_1, \dots, x_n, u), D) \qquad \text{avec} \qquad D(u) = x_1^k .$$

On a alors des quasi-isomorphismes

$$(\Lambda(x_1, \dots, x_n), d) \otimes (\Lambda u, 0) \xrightarrow{\Phi} (\Lambda(x_1, \dots, x_n, u), D) \to (\Lambda x_1 / x_1^k \otimes \Lambda(x_2, \dots, x_n), \bar{D})$$

avec $\Phi(u) = u - w$. Il en résulte :

$$\begin{aligned} m &= (k-1)\text{degré } x_1 + \text{dim formelle } H^*(\Lambda(x_2, \dots, x_n), \bar{D}) - \text{degré } u \\ &= 1 - \text{degré } x_1 + \text{dim formelle } H^*(\Lambda(x_2, \dots, x_n), \bar{D}) . \end{aligned}$$

■

Autre formulation pour m.

Notons $(2b_i - 1)$, $1 \leq i \leq q$ les degrés d'une base homogène de P et $(2a_i)$, $1 \leq i \leq r$ les degrés d'une base homogène de Q. On a alors :

$$m = \sum_{i=1}^{q} (2b_i - 1) - \sum_{i=1}^{r} (2a_i - 1) .$$

Théorème 5.3.2.([47]). *Soit X un espace elliptique. Notons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ le modèle minimal de X, $2b_1 - 1, \dots, 2b_q - 1$ les degrés d'une base homogène de P et $2a_1, \dots, 2a_r$ les degrés d'une base homogène de Q. Pour toute suite $a_1, \dots, a_s$ de longueur s extraite de la suite a_i, il existe alors au moins s éléments b_i pouvant s'écrire sous la forme*

$$b_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} a_j \ , \ \alpha_{ij} \geq 0 \ , \ \Sigma \alpha_{ij} \geq 2 .$$

■ Notons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ le modèle minimal de X. Par 5.2 le modèle pur associé $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)$ est de dimension cohomologique finie. Le choix de s éléments $x_1, \ldots, x_s$ dans Q, de degrés $a_1, \ldots, a_s$, fournit une injection

$$(\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_s], 0) \to (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0) ,$$

et donc un morphisme en cohomologie

$$\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_s] \xrightarrow{\phi} H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0) = \Lambda Q / d(P \cdot \Lambda Q) .$$

Complétons $x_1, \ldots, x_s$ en une base $x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_r$ de Q. Comme $H(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)$ est de dimension finie, il est nécessaire que

$$\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_s]/d(P) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda Q / (d(P \cdot \Lambda Q), x_{s+1}, \ldots, x_r)$$

soit de dimension finie. Ceci implique la thèse. ■

Corollaire 1. *Avec les notations précédentes si* $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_q$ *et* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_r$, *alors* $b_i \geq 2a_i$ *pour* $1 \leq i \leq r$.

■ Pour $1 \leq k \leq r$, considérons les entiers de la forme $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} a_j$ avec $\alpha_{ij} \geq 0$ et $\Sigma \alpha_{ij} \geq 2$. Parmi ces entiers, on doit trouver k éléments b_i ; b_l doit donc y appartenir avec $l \geq k$, auquel cas $b_k \geq b_l \geq 2a_k$. ■

Corollaire 2. *Avec les notations précédentes,*

$$\sum_{i=1}^{q} b_i \leq m = \dim \max H^*(X; \mathbf{Q}) .$$

■

$$m = 2(\sum_{i=1}^{q} b_i - \sum_{i=1}^{r} a_i) - (q - r) \geq \sum_{i=1}^{q} b_i + \sum_{i=r+1}^{q} b_i - (q - r) \geq \sum_{i=1}^{q} b_i . \quad ■$$

Corollaire 3. *Si* X *est un espace 1-connexe, elliptique, de dimension formelle* m, *alors*

(1) $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} \leq m$.

(2) $\sum_k 2k \cdot \dim \pi_{2k}(X) \otimes \mathbf{Q} \leq m$.

(3) $\sum_k (2k-1) \dim \pi_{2k-1}(X) \otimes \mathbf{Q} \leq 2m - 1$.

■ Par le théorème principal, on a

$$m = 2(\sum_{i=1}^{q} b_i - \sum_{i=1}^{r} a_i) - (q-r) .$$

Comme $\sum_{i=1}^{r} b_i \geq 2\sum_{i=1}^{r} a_i$, $\sum_{i=1}^{r} b_i - \sum_{i=1}^{r} a_i \geq \sum_{i=1}^{r} a_i$ et donc

$$m \geq 2\sum_{i=1}^{r} a_i + (q-r) \geq q+r ,$$

ce qui donne (1) et (2).

D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{q}(2b_i - 1) = 2\sum_{i=1}^{q} b_i - q = m + 2\sum_{i=1}^{r} a_i - r \leq 2m-1 ,$$

ce qui fournit (3). ■

5.4. - Théorèmes de structure pour les espaces π-finis.

5.4.1. - Premier théorème de structure (Allday [62]). *Soit X un espace pur, elliptique, alors il existe une fibration*

$$\prod_{i=1}^{n} K(\mathbf{Q},2) \overset{p}{\leftarrow} E \leftarrow X_0 ,$$

X_0 désignant la rationalisation de X, avec E un espace pur vérifiant $\chi_\pi(E) = 0$ et $H^*(E;\mathbf{Q}) < \infty$.

■ Soit $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ le modèle minimal de X. Notons $u_1, \ldots, u_q$ une base homogène de P et $\Lambda Q = \mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_r]$. Posons $f_i = d(u_i)$. Nous avons alors

$$\dim \frac{\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_r]}{(f_1, \ldots, f_q)} = \dim H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) < \infty .$$

Nous allons construire une suite de polynômes $g_1, \ldots, g_q$ dans $\mathbf{Q}[x_{r+1}, \ldots, x_q]$, degré $(x_i) = 2$, telle que

$$\dim \frac{\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_q]}{(f_1 + g_1, \ldots, f_q + g_q)} < \infty .$$

Dans ce cas, le résultat annoncé proviendra de la K.S. extension

$$\mathbf{Q}[x_{r+1}, \ldots, x_q] \to (\mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_q] \otimes \Lambda P, D) \to (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) ,$$

où $D(u_i) = f_i + g_i$.

La construction de la suite g_m se fait par récurrence sur m, $1 \leq m \leq q$: Supposons avoir choisi $g_1, \ldots, g_{m-1}$ de telle sorte que la dimension du sous-espace engendré par $f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_{m-1} + g_{m-1}$ soit $q - m + 1$, construisons g_m tel que la dimension de l'espace engendré par $f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_m + g_m$ soit $q - m$. Notons $I = (f_1 + g_1, \ldots, f_{m-1} + g_{m-1})$ et $P_1, \ldots, P_s$ les idéaux premiers associés de I. Soit $b_m =$ degré (f_m) et notons L l'espace vectoriel des polynômes de degré b_m en les variables x_i, $r + 1 \leq i \leq q$.

$f_m + L$ n'est pas contenu dans la réunion des P_i. En effet, autrement $f_m + L$ serait dans un P_i, disons P_1. On aurait $f_m \in P_1$, $L \subset P_1$. P_1 étant premier, $x_{r+1}, \ldots, x_q$ appartiendraient à P_1. Notons I' l'idéal engendré par P_1, $f_{m+1}, \ldots$ et f_q. Par le théorème de Macaulay, on aurait $\mathrm{Dim} P_1 = q - m + 1$. Par suite, $\dim I' \geq q - m + 1 - (q - m) = 1$. Comme $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_q]/I'$ est de dimension finie, on aurait aussi $\mathrm{Dim} I' = 0$, ce qui est absurde.

Comme $f_m + L \not\subset \cup P_i$, il existe g_m dans L tel que $f_m + g_m$ n'appartient à aucun des P_i. Notons

$$J = (f_1 + g_1, \ldots, f_m + g_m)\,.$$

Tout premier associé de J contient donc strictement un premier de I, ce qui entraîne

$$\mathrm{Dim}\, J = \mathrm{Dim}\, I - 1\,. \qquad \blacksquare$$

De ce théorème, nous déduisons :

Théorème 5.4.2. *Soit X un espace pur, π-fini, de cohomologie finie, notons $(2b_i - 1\,,\ 1 \leq i \leq q)$ les degrés d'une base homogène de P et $(2a_i,\ 1 \leq i \leq r)$ les degrés d'une base homogène de Q. On a alors :*

(1) *la série $\sum c_m t^m = \prod_{i=1}^q (1 - t^{2b_i})/(1-t)^{q-r} \sum_{i=1}^r (1 - t^{2a_i})$ est un polynôme à coefficients positifs.*

(2) $\dim H^i(X; \mathbf{Q}) \leq c_i$ *pour tout i.*

(3) $\dim H^*(X; \mathbf{Q}) \leq 2^{q-r} \prod_{i=1}^q b_i / \prod_{i=1}^r a_j \leq 2^m$ *où m désigne la dimension formelle de $H^*(X; \mathbf{Q})$.*

■ Le théorème 5.4.1. fournit une fibration

$$(*) \qquad E \leftarrow X_0 \leftarrow \Omega(\prod_{i=1}^{q-r} K(\mathbf{Q},2)) = \prod_{i=1}^{q-r} S_0^1 \, .$$

La cohomologie de E a pour série de Poincaré (th. 5.1)

$$P(E) = \Pi(1-t^{2b_i})/(1-t^2)^{q-r}\Pi(1-t^{2a_i})\, .$$

Le terme E_2 de la suite spectrale de Serre de la fibration $(*)$ a alors pour série $\Sigma c_m t^m$. Ceci entraîne les assertions 1 et 2.

Pour obtenir la première inégalité de 3), il suffit de calculer $\lim_{t\to 1}(\Sigma c_m t^m)$. Pour la seconde, il suffit de voir que $2b_i \leq 2^{b_i}$ et d'utiliser (5.4) $\sum_{i=1}^q b_i \leq m$. On a

$$\dim H^*(X;\mathbf{Q}) \leq \prod_{i=1}^{q}(2b_i) \leq 2^{\Sigma b_i} \leq 2^m \, . \qquad ■$$

5.4.3. Deuxième théorème de structure ([31]). *Soit X un espace π-fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $H^*(X;\mathbf{Q})$ *est noetherien.*

(2) *il existe une fibration*

$$F \to X \xrightarrow{p} \prod_{i=1}^{r} K(\mathbf{Q},2n_i)\, ,$$

avec F π-fini et $H^*(F;\mathbf{Q}) < \infty$.

■ (1) ⇒ (2). Si $H^*(X;\mathbf{Q})$ est noetherien, notons V l'espace vectoriel de dimension finie formé des générateurs de la sous-algèbre $H^{\mathrm{pair}}(X;\mathbf{Q})$. Ceci définit une application continue

$$p : X \to \prod_{i=1}^{r} K(\mathbf{Q},2n_i)\, .$$

Considérons la fibration image réciproque par p de la fibration des chemins sur $\prod_{i=1}^r K(\mathbf{Q},2n_i)$.

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{r} K(\mathbf{Q},2n_i-1) \to F \xrightarrow{j} X\, ,$$

où F est précisément la fibre homotopique de p.

Notons $E_r^{p,q}$ la suite spectrale de Serre de $(*)$. Le terme E_2 est un $H^*(X;\mathbf{Q})$-module libre de type fini. Le terme E_∞ est donc aussi un $E_\infty^{*,0}$-module de type fini. Le choix de p montre que la transgression tue l'idéal engendré par V. L'espace $E_\infty^{*,0}$ est donc de dimension finie. Il en est de même pour $H^*(F;\mathbf{Q})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). La suite spectrale de Serre de la fibration

$$F \to X \xrightarrow{p} \prod_i K(\mathbf{Q}, 2n_i)$$

montre que E_2 est un module de type fini sur $H^*\big(\Pi K(\mathbf{Q}, 2n_i)\big)$. Il en résulte que E_∞ est de type fini sur l'algèbre noetherienne $p^*H^*\big(\Pi K(\mathbf{Q}, 2n_i)\big)$. $H^*(X;\mathbf{Q})$ est donc une algèbre noetherienne. ∎

5.4.4 Troisième théorème de structure.([62]). *Soit X un espace π-fini, alors il existe une fibration*

$$F \to E \xrightarrow{p} X\ ,$$

où F et E sont des espaces π-finis dont l'homotopie rationnelle est concentrée en dimensions impaires.

∎ Notons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ le modèle minimal de X, et p la projection canonique

$$p : (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \to P \oplus \mathbf{Q} = (\Lambda Q \otimes \Lambda P)/(\Lambda^+ Q, \Lambda^{\geq 2} P)\ .$$

p admet un K.S. modèle ϕ

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathbf{Q} \oplus P, 0) & \\
 & (\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda V, D) \arrow[u, "\phi"'] \arrow[r] & (\Lambda V, \bar{D})\ .
\end{tikzcd}$$

P étant concentré en degrés impairs, tous les générateurs du modèle minimal de $\mathbf{Q} \oplus P$ sont de degrés impairs. Il en résulte que $V = V^{\text{impair}}$. Si n désigne le degré maximal des éléments de Q, il suffit de prendre pour p la réalisation géométrique de la K.S. extension

$$(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \to (\Lambda Q \otimes \Lambda P \otimes \Lambda V^{<n}, D) \to (\Lambda V^{<n}, \bar{D})\ .$$

5.4.5. - Nous terminons ce §5.4 avec une proposition reliant les complexes purs aux suites régulières.

Proposition 5.4.5.[59, lemme 8]. *Soit $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ un complexe pur avec $H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P) < \infty$. Alors il existe une base (non nécessairement homogène) $u_1, \ldots, u_s$ de P telle que $d(u_1), \ldots, d(u_r)$, $r = \dim Q$ forment une suite régulière dans ΛQ.*

■ On construit $u_1, \ldots, u_r$ par récurrence. Prenons pour u_1 un élément quelconque de P. Supposons avoir construit une suite régulière $d(u_1), \ldots, d(u_k)$ avec $u_i \in P$.

De deux choses l'une, ou il existe un élément u_{k+1} dans P tel que $d(u_{k+1})$ ne soit pas diviseur de zéro dans $\Lambda Q/I$ ($I =$ idéal engendré par $d(u_1), \ldots, d(u_k)$), ou il n'en existe pas. Dans le premier cas, on continue. Dans le second cas, (prop. 5.2) $d(P)$ est contenu dans un idéal premier P_1 de I. Il en résulte que

$$\dim \Lambda Q/P_1 \leq \dim \Lambda Q/d(P) = \dim H_0(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) < \infty ,$$

et donc Dim $P_1 = 0$.

Par le théorème de Macaulay, I est unmixed et Dim $I = 0$. On a donc $\dim_{\mathbf{Q}} \Lambda Q/I < \infty$, ce qui entraîne $k = r$. Il suffit alors de prolonger $u_1, \ldots, u_r$ en une base de P. ■

Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses, on a un quasi-iso d'algèbres graduées inférieurement $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \xrightarrow{\sim} \big((\Lambda Q \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_r)) \otimes \big(\Lambda(u_{r+1}, \ldots, u_s), d\big)$ et $H(\Lambda Q \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_r)) = H_0\big(\Lambda Q \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_r)\big)$.*

5.5. - Espaces π-finis à cohomologie noetherienne.

Si A est un espace vectoriel gradué de type fini, nous désignerons par $P_A(t)$ sa série de Hilbert

$$P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim A^n t^n .$$

On pose alors

$$\rho_0(A) = \inf\{\alpha | \lim_{t \to 1^-} (1-t)^\alpha P_A(t) = 0\} .$$

Si A est une algèbre graduée commutative (au sens usuel) et noetherienne, alors

(§5.7) $$\rho_0(A) = \text{Dim } A.$$

Le but de ce paragraphe est la démonstration des 2 théorèmes suivants :

Théorème 5.5.1. ([31]). *Soit X un espace π-fini, pur, dont la cohomologie est noetherienne. Notons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ son modèle pur et k l'entier maximal tel que $H_k(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d) \neq 0$. On a alors*

$$k = \rho_0(H^*(X;\mathbf{Q})) - \chi_\pi(X)\,.$$

Théorème 5.5.2. ([31]). *Soit X un espace π-fini à cohomologie noetherienne. Notons $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d)$ son modèle, $(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)$ le modèle pur associé et $E_r^{p,q}$ la suite spectrale impaire. Alors*

1) $\rho_0 H^*(X;\mathbf{Q}) = \rho_0(H^*(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_0)) = \mathrm{Dim}\, H^{\mathrm{pair}}(X;\mathbf{Q})\,.$

2) $\rho_0(H^*(X;\mathbf{Q}) - \chi_\pi(X)$ *est le plus grand entier k avec $E_\infty^{k,*} \neq 0$.*

Corollaire 1. *Si X est un espace π-fini à cohomologie noetherienne, alors $\chi_\pi(X) \leq \rho_0(H^*(X;\mathbf{Q}))$.*

Corollaire 2. *Si X est un espace π-fini à cohomologie noetherienne, on a*

$$\mathrm{nil}\, H^{\mathrm{impair}}(X;\mathbf{Q}) \leq \rho_0 H^*(X;\mathbf{Q}) - \chi_\pi(X) + 1\,.$$

■ **Démonstration du corollaire 2.** Un produit de q éléments de $H^{\mathrm{impair}}(X;\mathbf{Q})$ se représente par un cocycle de $\Lambda Q \otimes \Lambda^{\geq q} P$. Pareil cocycle est nul dans la suite spectrale impaire à partir du niveau E_1 si $q \geq k+1$. ■

■ **Démonstration du théorème 5.5.2.** Soit X un espace π-fini à cohomologie noetherienne. Par le théorème 5.4.3. Il existe une K.S. extension

$$(\Lambda Y, 0) \to (\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D) \to (\Lambda W \otimes \Lambda V, d)\,,$$

avec 1) Y et W concentrés en degrés pairs et V en degré impair.

2) $(\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D)$ est un modèle (non nécessairement minimal) de X. La suite spectrale impaire associée est isomorphe à partir du terme E_1 à la suite spectrale impaire de X.

3) $H^*(\Lambda W \otimes \Lambda V, d) < \infty$.

Construction d'une suite régulière particulière dans $\Lambda Y \otimes \Lambda W$.

Par la proposition 5.4.5, il existe une suite $v_1, \ldots, v_s$ d'éléments de V (non nécessairement homogènes) telle que les éléments $d_0 v_1, \ldots, d_0 v_s$ forment une suite régulière dans ΛW . Les $D_0 v_i$, $i \leq i \leq s$ forment alors une suite régulière dans $\Lambda Y \otimes \Lambda W$.

Etendons cette suite en une suite régulière maximale de $\Lambda Y \otimes \Lambda W$ formée d'éléments de la forme

$$D_0(v_1), \ldots, D_0(v_s), D_0(v_{s+1}), \ldots, D_0(v_{s+t}) , \quad v_i \in V .$$

Choisissons N un entier divisible par les degrés d'une base homogène de Y et étendons la suite précédente en une suite régulière maximale

$$D_0(v_1), \ldots, D_0(v_{s+t}), c_1, \ldots, c_r \quad \text{avec} \quad c_i \in (\Lambda Y)^N .$$

Notons I l'idéal engendré par cette suite. Tout élément de $(\Lambda Y)^N$ est diviseur de zéro dans $(\Lambda Y \otimes \Lambda W)/I$; $(\Lambda Y)^N$ est donc contenu dans un des idéaux premiers associés de I, disons P_1. Comme $(\Lambda Y)^N$ contient une puissance de chaque $y \in Y$, $\Lambda^+ Y$ est contenu dans P_1. Il en résulte que $\mathrm{Dim}\, P_1 = 0$, et donc que $t+r = \dim Y$.

montrons que $k = \dim V - (s+t)$.

Décomposons V sous la forme $V = V_1 \oplus V_2$ avec pour V_1 le sous-espace vectoriel engendré par les v_i, $1 \leq i \leq s+t$. La suite $D_0(v_i)$ étant régulière, la projection canonique

$$p : (\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D_0) \to (\Lambda Y \otimes (\Lambda W/I) \otimes \Lambda V_2, \bar{D}_0) ,$$

où I désigne l'idéal engendré par les $D_0(v_i)$, est un quasi-isomorphisme.

Posons $l = \dim V_2 = \dim V - (s+t)$. On a $H_{>l}(\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D_0) = 0$. On a, d'autre part,

$$H_l(\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D_0) \cong \{\alpha \in (\Lambda Y \otimes \Lambda W)/I \mid (dv) \cdot \alpha = 0 \quad \forall v \in V_2\} .$$

La maximalité de la suite régulière $D_0 v_i$, $1 \leq i \leq s+t$, montre que, pour tout v de V_2, $D_0 v$ est diviseur de zéro dans $(\Lambda Y \otimes \Lambda W)/I$. On a donc $D_0(V_2) \subset P_1$, idéal premier associé de I .

Ecrivons I comme intersection non redondante d'idéaux primaires

$$I = \cap_{i=1}^c B_i .$$

Comme I est défini par une suite régulière, I est unmixed (th. de Macaulay) ; il existe donc des éléments q_i dans B_i, $i \geq 2$ avec $q_i \notin P_1$. Posons $q = \prod_{i \geq 2} q_i$. $q \notin P_1$ et donc $q \notin I$. Pour tout élément v de V_2, $D_0 v$ appartient à P_1 et une puissance $(D_0 v)^\alpha$ appartient à B_1 .

Soit v_i, $1 \leq i \leq l$, une base de V_2 . On considère l'élément

$$\omega = (D_0 v_l)^{\alpha_l - 1} \dots (D_0 v_2)^{\alpha_2 - 1} (D_0 v_1)^{\alpha_1 - 1} q \ ,$$

où α_j est le plus petit entier avec

$$(D_0 v_j)^{\alpha_j} (D_0 v_{j-1})^{\alpha_{j-1} - 1} \dots (D_0 v_1)^{\alpha_1 - 1} q \quad \text{dans} \quad I \ .$$

L'élément ω appartient à H_l et on a donc $l = k$.

montrons que $\rho_0(H^*(X;\mathbf{Q})) = \rho_0(E_1^{*,*}) = k + \chi_\pi(X)$.

Notons toujours P_1 l'idéal premier associé de I contenant $D_0(V_2)$. L'application $\mathbf{Q}[c_1, \dots, c_r] \hookrightarrow \Lambda Y \otimes \Lambda W/(P_1)$ est injective. En effet, autrement elle se factoriserait par une algèbre quotient

$$\mathbf{Q}[c_1, \dots, c_r]/(K) \hookrightarrow \Lambda Y \otimes \Lambda W/P_1 \ .$$

Comme $\mathbf{Q}[c_1, \dots, c_r]/(K)$ est de dimension $< r$, elle est de type fini sur une algèbre de polynôme $\mathbf{Q}[b_1, \dots, b_{r'}]$ avec $r' < r$. Posons $I' = (P_1, b_1, \dots, b_{r'})$. On a $\operatorname{Dim} I' \geq \operatorname{Dim} P_1 - r' \geq 1$. Mais, d'autre part, $\dim_{\mathbf{Q}}(\Lambda Y \otimes \Lambda W)/I' < \infty$, ce qui est absurde. L'application $\mathbf{Q}[c_1, \dots, c_r] \to H^*(\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D)$ est également injective. Supposons le contraire. Prenons $\phi \in \mathbf{Q}[c_1, \dots, c_r]$ avec $\phi = D\psi$, $\psi \in \Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V$. On décompose ψ sous la forme

$$\psi = \psi_0 + \dots + \psi_m \quad \text{avec} \quad \psi_i \in \Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda^i V \ ,$$

et on a $\phi = D_0 \psi_0$ ce qui est absurde.

Ceci montre que

$$(*) \qquad \operatorname{Dim} H^{\text{pair}}(X;\mathbf{Q}) \geq r \ .$$

D'autre part, $\Lambda Y \otimes \Lambda W$ est finiment engendré comme module sur $\mathbf{Q}[D_0 v_1, \dots, D_0 v_{s+t}, c_1, \dots, c_r]$. Comme $H_0(\Lambda Y \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, D_0)$ est un

$\mathbf{Q}[c_1,\ldots,c_r]$-module de type fini, $H(\Lambda Y\otimes\Lambda W\otimes\Lambda V,D_0)$ est un $\mathbf{Q}[c_1,\ldots,c_r]$-module de type fini et

$$(**)\qquad \rho_0(H(\Lambda Y\otimes\Lambda W\otimes\Lambda V,D_0)\leq r\ .$$

$(*)$ et $(**)$ induisent le résultat. ∎

Le premier théorème de structure 5.4.1. peut se généraliser sous la forme :

Théorème 5.5.3. *Soit X un espace pur avec $\rho_0H^*(X;\mathbf{Q})=d$. Il existe alors une fibration*

$$\prod_{i=1}^{p}K(\mathbf{Q},2)\leftarrow E\leftarrow X_0\ ,$$

avec E un espace pur vérifiant $H^*(E;\mathbf{Q})=H^{\mathrm{pair}}(E;\mathbf{Q})$ et $\mathrm{Dim}\,H^*(E;\mathbf{Q})=d$.

∎ Notons $(\Lambda P\otimes\Lambda Q,d)$ le modèle minimal de X. Comme $\rho_0(H^*(X;\mathbf{Q}))=d$, $\mathrm{Dim}\,[\Lambda P/d(Q)\cdot\Lambda P]=d$. Choisissons une suite $x_1,\ldots,x_d$ dans ΛP homogène formant dans le quotient une suite de paramètres. Considérons l'a.d.g.c.

$$(A,d_A)=(\Lambda P\otimes\Lambda Q\otimes\Lambda(u_1,\ldots,u_d),d)\quad\text{avec}\quad du_i=x_i\ .$$

Comme $H^*(A,d_A)<\infty$, il existe par le théorème 5.5.1 un espace vectoriel P' et une K.S. extension

$$(\Lambda P',O)\to(\Lambda(P\oplus P')\otimes\Lambda(Q\oplus(u_1,\ldots,u_d)),D)\to(A,d_A)\ ,$$

où $H^*(\Lambda(P\oplus P')\otimes\Lambda Q\otimes\Lambda(u_1,\ldots,u_d),D)<\infty$ et

$$\dim P\oplus P'=\dim Q+d\ .$$

Soit $v_1,\ldots,v_s$ une base homogène de Q. Comme

$$D(v_1),\ldots,D(v_s),D(u_1),\ldots,D(u_d)$$

est une suite régulière dans $\Lambda(P\oplus P')$, il en est de même de $D(v_1),\ldots,D(v_s)$. La K.S. extension

$$(\Lambda P',0)\to(\Lambda(P'\oplus P)\otimes\Lambda Q,D)\to(\Lambda P\otimes\Lambda Q,d)$$

fournit la fibration souhaitée. ∎

Corollaire. *Soit X un espace π-fini avec cohomologie noetherienne. Notons $2a_1,\ldots,2a_r,2b_1-1,\ldots,2b_s-1$ les degrés d'une base de $\pi_*(X)\otimes\mathbf{Q}$, alors on a*

$$P_X \leq \prod_{i=1}^{s}(1-t^{2b_i})/\prod_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i})\cdot(1-t)^{s-r-d} ,$$

où $d=\rho_0\,H^*(X;\mathbf{Q})$.

5.6. - Espaces π-finis et cat_0 .

Le but du présent paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 5.6. *Soit X un espace π-fini 1-connexe alors*

$$\dim \pi_{\mathbf{impair}}(X)\otimes\mathbf{Q} \leq e_0(X) \leq \mathrm{cat}_0(X) .$$

Lemme 5.6.1. *Si X est un c.w. complexe nilpotent tel que $H^*(X;\mathbf{Q})$ est une algèbre à dualité de Poincaré de classe fondamentale ω. Notons $(\Lambda Z,d)$ le modèle minimal de X, alors $e_0(X)=\sup\{k|\omega$ peut être représenté par un cocycle dans $\Lambda^{\geq k}Z\}$.*

■ Un homomorphisme ϕ de source $H^*(X;\mathbf{Q})$ est injectif si $\phi(\omega)\neq 0$. ■

Lemme 5.6.2. *Si $(\Lambda Z,d)\to(\Lambda Z\otimes\Lambda u,d)\to(\Lambda u,0)$ est un K.S. complexe avec degré de u impair et $H^*(\Lambda Z,d)$ une algèbre de dimension finie satisfaisant à la dualité de Poincaré, alors*

$$e_0(\Lambda Z\otimes\Lambda u,d)\leq e_0(\Lambda Z,d)+1 .$$

■ Si $e_0(\Lambda Z\otimes\Lambda u,d)=k$, alors le lemme 5.6.1. fournit un représentant $\phi\otimes u+\psi\in\Lambda^{\geq k}(\Lambda Z\otimes\Lambda u)$ pour la classe fondamentale. Il en résulte que ϕ est un représentant de la classe fondamentale de $(\Lambda Z,d)$ appartenant à $\Lambda^{\geq k-1}(\Lambda Z)$, et donc $e_0(\Lambda Z,d)\geq k-1$. ■

Lemme 5.6.3. *Si $(\Lambda y,0)\to(\Lambda y\otimes\Lambda Z,d)\to(\Lambda Z,\bar d)$ est une K.S. extension avec $H^*(\Lambda Z,d)$ et $H^*(\Lambda y\otimes\Lambda Z,d)$ deux algèbres de dimensions finies à dualité de Poincaré, alors :*

$$e_0(\Lambda Z,\bar d) \quad\leq\quad \begin{cases} e_0(\Lambda y\otimes\Lambda Z,d)-1 & \text{si } |y| \text{ est impair.}\\ e_0(\Lambda y\otimes\Lambda Z,d) & \text{si } |y| \text{ est pair .}\end{cases}$$

■ Supposons y de degré impair et $e_0(\Lambda Z, \bar{d}) = k$. Par le lemme 5.6.1., la classe fondamentale ω de $H^*(\Lambda Z, d)$ peut être représentée par un cocycle $\phi \in \Lambda^{\geq k} Z$. Dans ce cas, $y \otimes \phi$ représente la classe fondamentale de $(\Lambda y \otimes \Lambda Z, d)$ et donc $e_0(\Lambda y \otimes \Lambda Z, d) \geq k+1$.

Supposons y de degré pair. On considère le $K.S.$-complexe

$$(\Lambda y \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, D) \quad \text{avec} \quad Du = y^2 \ .$$

Par le lemme 5.6.2., on a :

$$e_0(\Lambda y \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, D) \leq e_0(\Lambda y \otimes \Lambda Z, d) + 1 \ .$$

Notons I l'idéal de $\Lambda y \otimes \Lambda u$ engendré par u et y^2. I est D-sta
Construisons $\sigma : I \to I$ par $\sigma(y^k u) = 0$ et $\sigma(y^k) = y^{k-2}u$. On a ε
id. Considérons l'opérateur $\psi : I \otimes \Lambda Z \to I \otimes \Lambda Z$ défini par

$$\psi = D \cdot (\sigma \otimes 1) - (\sigma \otimes 1) \cdot D \ .$$

De façon claire, pour tout ϕ de ΛZ, il existe un entier $N(\phi)$ avec $(\psi - 1)^{N(\phi)}\phi = 0$.

Si $\phi \in \Lambda^{\geq p} Z$ représente la classe fondamentale de $H^*(\Lambda Z, \bar{D})$, alors

$$y \otimes \phi - \sum_{k=1}^{N(\phi)} (-1)^{k+1}\, C_N^k (\sigma \otimes 1) \psi^{k-1} D(y \otimes \phi)$$

est un cocycle de $\Lambda^{\geq p+1} Z$ représentant la classe fondamentale de $(\Lambda y \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, D)$. On a donc

$$e_0(\Lambda y \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda u, D) \geq e_0(\Lambda Z, \bar{D}) + 1 \ ,$$

ce qui entraîne l'inégalité désirée. ■

Le théorème résulte du lemme 5.6.3. par induction.

5.7. - Rappel sur les notions de dimension et idéaux primaires.

<u>Dim A</u> .

Soit A un anneau noetherien, Dim A est la longueur maximale n des chaînes d'idéaux premiers de A

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq p_2 \subsetneq \ldots \subsetneq p_n \subsetneq A \ .$$

Si p est un idéal premier de A, *la hauteur* de p, $ht(\rho)$ est la longueur maximale n des chaînes d'idéaux premiers avec $P_n = p$. Pour un idéal quelconque, on pose

$$ht(I) = \inf\{ht(p)\ ,\quad p \text{ premier } \quad \supset I\}\ .$$
$$\text{Dim } I = \text{Dim } A/I\ .$$

on a : $\forall I \quad \text{Dim } I + ht(I) \leq \text{Dim } A$.

$\underline{\text{Depth}_I M}$.

Soit M un A-module. Une suite $a_1, \ldots, a_r$ d'éléments de A est dite M-régulière si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) M n'est pas engendré par $a_1, \ldots, a_r$;

2) $\forall i$, $1 \leq i \leq r$, a_i n'est pas diviseur de zéro dans $M/(a_1, \ldots, a_{i-1}) \cdot M$.

Soit I un idéal de A avec $A \neq IA$. On appelle *I-profondeur* de M, $\text{depth}_I(M)$, la longueur d'une suite M-régulière maximale formée d'éléments de I. On a ([80], th. 28) .

$$\text{depth}_I(M) = \min\{i | \text{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}\ .$$

Cas des Q-algèbres graduées connexes noetheriennes $A = \oplus A^i$, $A^0 =$ Q .

Dans ce cas, ([91]), Dim A est aussi la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers gradués de A. Si M est un module gradué, depth(M) est la longueur d'une suite M-régulière maximale formée d'éléments homogènes de A^+ .

Théorème (cas local [80], th. 17 ; lemme 4 p. 105). *Si A est une algèbre graduée connexe noetherienne, $a_1, \ldots, a_r$ une suite d'éléments homogènes de A^+ alors,*

1) $\text{Dim}(A/(a_1, \ldots, a_r)) \geq \text{Dim}A - r$.

2) *Si les a_i forment une suite régulière, on a*

$$\text{Dim}(A/(a_1, \ldots, a_r)) = \text{Dim } A - r\ .$$

Systèmes de paramètres.

Si A est engendré par des éléments homogènes $y_1, \ldots, y_n$ de degrés $d_1, \ldots, d_n$ alors $P(A) \cdot \pi_i(1 - t^{d_i})$ est un polynôme en t ([91], th. 4.2). $P(A)$ désigne la série de Hilbert de A :

$$P(A) = \sum (\dim_{\mathbf{Q}} A^n) t^n \ .$$

Inversement, si $P(A) \cdot \pi_i(1 - t^{d_i})$ est un polynôme pour un choix convenable de d_i, alors il existe des éléments homogènes $y_1, \ldots, y_n$ de degrés $d_1, \ldots, d_n$ tels que A soit un $\mathbf{Q}[y_1, \ldots, y_n]$ module de type fini ([91], th. 5.4]. Posons

$d(A) = \inf\{n \mid \exists d_1, \ldots, d_n \text{ avec } P(A) \cdot \pi_i(1 - t^{d_i}) \text{ un polynôme}\}$,

$d'(A) =$ multiplicité de 1 comme pôle de $P(A)$,

$s(A) = \inf\{n \mid \exists y_1, \ldots, y_n \in A^+ \text{ avec } A \text{ un module de type fini sur } \mathbf{Q}[y_1, \ldots, y_n]\}$

Théorème ([91], th. 5.5.]). Dim $A = d(A) = d'(A) = s(A)$.

On appelle *système de paramètres* une suite $y_1, \ldots, y_n$ d'éléments deA^+ telle que A soit un $\mathbf{Q}[y_1, \ldots, y_n]$- module de type fini. Par le théorème précédent $n =$ Dim A. De plus ([91], th. 6.2) $\mathbf{Q}[y_1, \ldots, y_n]$ s'injecte dans A.

Anneaux de Cohen-Macaulay.

On a toujours Depth $A \leq$ Dim A .

A est dit de *Cohen-Macaulay* si Dim $A =$ depth A.

Théorème ([91], th. 6.8). *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *A est Cohen-Macaulay.*

(2) *Tout système de paramètres est une A-suite régulière.*

(3) *Pour tout système de paramètres $(y_1, \ldots, y_n)$, A est un $\mathbf{Q}[y_1, \ldots, y_n]$-module libre de type fini.*

Théorème (Cas local [80], th. 30, 31). *Si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre de Cohen-Macaulay, alors*

(1) *Pour toute suite régulière $(a_1, \ldots, a_n)$, $A/(a_1, \ldots, a_n)$ est Cohen-Macaulay.*

(2) *Pour tout idéal gradué I, on a $ht(I) = \mathrm{depth}_I(A)$; $ht(I) + \dim A/I = \dim A$.*

Exemple : $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ est Cohen-Macaulay ([80], th. 33). Il en est de même de tous ses quotients par des suites régulières.

Exemple : Soit I un idéal de hauteur p dans $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$. Alors I contient une suite régulière formée de p éléments.

Lemme. *Si A est un anneau noetherien, alors :*

$$\mathrm{Dim}\, A = 0 \;\text{ ssi }\; \dim_{\mathbf{Q}} A < \infty \,.$$

■ Si $\dim_{\mathbf{Q}} A < \infty$, tout élément de A^+ est nilpotent et A n'a qu'un seul idéal premier gradué A^+. Si Dim $A = 0$, A^+ est le seul idéal gradué premier. Tout élément y de A^+ est donc nilpotent et $\dim_{\mathbf{Q}} A < \infty$. ■

Idéaux premiers associés.

Dans une $\mathbf{Q}$-algèbre (graduée) noethérienne, tout idéal I est une intersection finie non redondante d'idéaux (gradués) primaires D_i :

$$I = \cap\, D_i \,.$$

Les idéaux premiers correspondants p_i sont appelés les *idéaux premiers associés.* Ce sont les p premiers tels que I contient une copie de A/p .

$$I \supset s^r\, A/p \,.$$

I est dit *unmixed* si tous les premiers associés ont la même dimension.

Théorème [100, th. 26]. *Si I est un idéal de $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par une suite régulière, alors I est unmixed.*

Corollaire 1. *Si $I \subset J$ alors tout idéal premier p de J contient un idéal premier P' de I.*

Corollaire 2. *Si x est un diviseur de zéro dans I (il existe y dans I avec $xy = 0$), alors x appartient à un idéal premier associé. En effet, les éléments maximaux dans la famille des idéaux annulateurs d'un élément de I sont premiers.*

Proposition. *Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie non homogène de $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$. Supposons que, pour un certain idéal I, tout élément* *de V soit diviseur de zéro dans* $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]/I$, *alors V est contenu dans un des idéaux premiers associés de I .*

■ Prenons une suite infinie $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de V dont toute suite de longueur p soit une base de V. Chaque x_i est diviseur de zéro donc appartient à un des premiers associés de I. Il existe donc un premier associé contenant une base de V. ■

6 - LA CROISSANCE EXPONENTIELLE.

6.1. - La croissance.

Les espaces nilpotents de type fini et de catégorie finie se décomposent en deux familles : les espaces elliptiques et les autres appelés hyperboliques. Le but du présent paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 6.1. ([35]). *Si X est un espace nilpotent, de type fini, de catégorie finie m et hyperbolique, alors il existe une suite infinie d'entiers $q_0, q_1, \dots$ avec $q_i = l_i q_{i-1} - 1$ et $l_i \in [2, m+1]$, ainsi qu'une constante $C > 1$ telle que*

$$\dim \pi_{q_i}(X) \otimes \mathbf{Q} \geq C^{q_i} \quad \textit{pour} \quad i \geq 0 \,.$$

Notons $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X. L'isomorphisme

$$Z^i \cong \mathrm{Hom}(\pi_i(X), \mathbf{Q}) \quad \text{pour} \quad i \geq 2$$

montre que l'assertion est équivalente à

$$\dim Z^{q_i} \geq C^{q_i}, \quad \text{pour} \quad i \geq 0 \,.$$

Notons $Z^{[k,l]} = \bigoplus_{j=k}^{l} Z^j$ et $k(n) = \dim Z^{[n,2n-2]}$.

Définition. *Un l-widget dans X est une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ de classes d'homotopie $\alpha_i : S^{n_i} \to X$ avec*

1) les n_i sont de degrés impairs,

2) $n_i > n_1 + \dots + n_{i-1}$ pour $i > 1$,

3) α_i induit un élément non nul dans $\pi_{n_i}(X) \otimes \mathbf{Q}$,

4) L'application $S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \dots \vee S^{n_l} \xrightarrow{\vee \alpha_i} X$ s'étend en une application continue

$$\bar{\alpha} : S^{n_1} \times \dots \times S^{n_l} \to X \,.$$

Lemme 1. *Soit X un espace nilpotent de type fini, hyperbolique. Si les entiers $k(n)$ sont bornés, alors X admet des l-widget pour tout entier l .*

■ X admet un l-widget s'il existe des éléments non nuls $z_1, z_2, \ldots, z_l$ dans Z homogènes de degrés impairs avec

$$\deg z_i > \deg z_1 + \deg z_2 + \cdots + \deg z_{i-1} \qquad i > 1 .$$

et tels que l'on ait un morphisme d'a.d.g.c.

$$\psi : (\Lambda Z, d) \to (\Lambda(z_1, \ldots, z_l), 0) ,$$

avec $\psi(z_i) = z_i$.

Supposons $k(n) \leq K$, pour tout n, et montrons, par induction sur l, l'existence d'un l-widget dans X. Pour $l = 1$, c'est clair. Supposons donc le résultat vrai pour l. $(\Lambda Z, d)$ et toutes les a.d.g.c. quotients $(\Lambda Z^{>n}, \bar{d})$ admettent donc des l-widget. Notons $(z_1, \ldots, z_l)$ un l-widget pour $(\Lambda Z, d)$. Posons $q = \sum_{i=1}^{l} \deg(z_i)$. Prenons alors $z_{l+1}, \ldots, z_{2l}$ un l-widget de $(\Lambda Z^{>q}, \bar{d})$. On recommence et on obtient de cette manière une suite de $(K + 1)$ l-widget

$$z_1, \ldots, z_l \quad ; \quad z_{l+1}, \ldots, z_{2l} \quad ; \quad z_{2l+1}, \ldots, z_{3l} \quad ; \quad \ldots z_{(K+1)l} \, .$$

avec $\deg(z_{rl+1}) > \sum_{i=1}^{l} \deg(z_{(r-1)l+i})$. Posons $N = \deg(z_{(K+1)l})$. Soit x un élément de degré p impair dans $Z^{>n}$, $p > N$.

Comme $k(p) = \dim Z^{[p,2p-2]} \leq K$, il existe un entier s, $1 \leq s \leq K + 1$ avec

$$Z^r = 0 \qquad \textit{pour} \qquad p + \deg(z_{sl+1}) - 1 \leq r \leq p + \sum_{i=1}^{l} \deg(z_{sl+i}) - 1 .$$

Notons

$$x_i = z_{sl+i} \qquad 1 \leq i \leq l .$$

La suite $x_1, \ldots, x_l, x$ est alors un $(l+1)$-widget pour X. En effet, pour des raisons de degré, il n'y a pas d'élément z dans Z avec $dz \in x \cdot \Lambda(x_1, \ldots, x_l)$. ■

Lemme 2. *Soit X un espace nilpotent de type fini, hyperbolique. Si les entiers $k(n)$ ne sont pas bornés, et si $m = \mathrm{cat}_0(X) < \infty$, alors les entiers $\dim \pi_p(X) \otimes \mathbf{Q}$ ne sont pas bornés.*

■ Notons $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X. Fixons un entier N. La différentielle $\bar{d}$ dans $(\Lambda Z^{\geq N}, \bar{d})$ se décompose sous la forme

$$\bar{d} = \beta + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$

avec, $\forall x \in Z^{\geq N}$, $\beta(x) \in \Lambda Z^{[N,2N-2]} \otimes \Lambda^+ Z^{\geq 2N-1}$ et $\alpha_i(x) \in \Lambda^i Z^{[N,2N-2]}$.

Pour raison de degré, $\bar{d} = 0$ sur $Z^{[N,2N-2]}$.

Comme $\mathrm{cat}_0(\Lambda Z^{\geq N}, \bar{d}) \leq \mathrm{cat}_0(\Lambda Z, d) \leq m$ (Théorème 3.1.), on a

$$\Lambda^{m+1} Z^{[N,2N-2]} = \bigcup_{i=2}^{m+1} \alpha_i(Z^{\geq N}) \cdot \Lambda^{m+1-i} Z^{[N,2N-2]} ,$$

ce qui donne

$$C_{k(N)}^{m+1} \leq \sum_{i=2}^{m+1} k(iN-1) \cdot k(N)^{m+1-i} \leq m \cdot k \cdot k(N)^{m-1},$$

avec $k = \sup\{k(iN-1) \ \mid \ 2 \leq i \leq m+1\}$.

Prenons $k(N) \geq (2^{m+1} m(m+1)!)^3$. On a $k(N) \geq (m+1) + \frac{k(N)}{2}$ et donc,

$$C_{k(N)}^{m+1} \geq \left(\frac{k(N)}{2}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{(m+1)!}.$$

En combinant les inégalités précédentes, on obtient

$$m \cdot k \cdot k(N)^{m-1} \geq \frac{k(N)^{m+1}}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{(m+1)!} ,$$

ce qui donne

$$k \geq \frac{k(N)^2}{2^{m+1} \cdot m \cdot (m+1)!} \geq k(N)^{\frac{5}{3}} .$$

Par définition de k, nous obtenons ainsi une suite $N_0 < N_1 < N_2 \ldots$ d'entiers avec $N_i = s_i N_{i-1} - 1$, $\quad s_i \in [2, m+1]$ telle que

$$k(N_{i+1}) \geq k(N_i)^{\frac{5}{3}} \qquad \forall i \geq 0 .$$

Dans ce cas l'inégalité

$$\frac{k(N_{i+1})}{N_{i+1}} \geq \frac{k(N_i)^{\frac{2}{3}}}{m+1} \cdot \frac{k(N_i)}{N_i}$$

montre que $\lim_{i \to \infty} \frac{k(N_i)}{N_i} = \infty$. Ceci entraîne le résultat ∎

∎ **Démonstration du théorème 6.1.** Comme $\mathrm{cat}_0(X) = m < \infty$, il ne peut exister de l-widget pour $l > m$. les $k(n)$ ne sont donc pas bornés (lemme 1). Il en est de même des $\dim_p(X) \otimes \mathbf{Q}$ (lemme 2).

Notons $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X. Posons $a = \left(1/2(m+1)\right)^{m+1}$ et prenons q tel que

$$N = \dim Z^q = \dim \pi_q(X) \otimes \mathbf{Q}$$

satisfasse $N \cdot a > 1$. On considère alors $(\Lambda Z^{\geq q}, \bar{d}) = (\Lambda Z^q \otimes \Lambda Z^{>q}, \bar{d})$. Décomposons $\bar{d}$ sous la forme $\bar{d} = \beta + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i$, avec

$$\beta(x) \in \Lambda Z^q \otimes \Lambda^+ Z^{>q} \quad et \quad \alpha_i(x) \in \Lambda^i Z^q .$$

comme $\mathrm{cat}_0(\Lambda Z^{\geq q}, \bar{d}) \leq m$ (§3), on a

$$\Lambda^{m+1} Z^q = \cup_{i=2}^{m+1} \alpha_i(Z^{qi-1}) \cdot \Lambda^{m+1-i} Z^q .$$

Il s'ensuit que

$$\left(\frac{N}{2}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{(m+1)!} \leq C_N^{m+1} \leq \dim \Lambda^{m+1} Z^q \leq \sum_{i=2}^{m+1} \dim Z^{qi-1} \cdot N^{m+1-i} ,$$

ceci implique l'existence de $i \in [2, m+1]$ avec

$$\dim X^{qi-1} \geq a \cdot N^i .$$

En itérant ce processus, on obtient une suite d'entiers $q = q_0, q_1, \ldots$ avec $q_i = l_i q_{i-1} - 1$ pour $l_i \in [2, m+1]$, et $\dim X^{q_i} \geq a \cdot (\dim X^{q_{i-1}})^{l_i}$ on a donc

$$\dim X^{q_i} \geq a^{(1 + l_i + l_i l_{i-1} + \ldots + l_i \cdot l_{i-1} \cdot l_{i-2} \ldots l_1)} N^{l_1 l_2 \ldots l_i} .$$

Comme

$$\begin{aligned}(1 + l_i + l_i l_{i-1} + \ldots + l_i l_{i-1} \ldots l_1) &\leq (l_1 \ldots l_i)\left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}} + \ldots + \frac{1}{2}\right) \\ &\leq (l_1 \ldots l_i) ,\end{aligned}$$

on a $\dim X^{q_i} \geq (aN)^{l_1 l_2 \ldots l_i} \geq \left[(aN)^{\frac{1}{q}}\right]^{q_i}$. On pose

$$C = (aN)^{\frac{1}{q}}. \qquad \blacksquare$$

6.2. - Le rayon de convergence

Soit X un C.W. complexe 1-connexe de type fini. Notons R_X le rayon de convergence de la série $\sum_{i \geq 2} (\dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q}) t^i$.

Théorème 6.2.1. *Si $H^*(X;\mathbf{Q})$ est noetherien, ou si X est de catégorie finie, alors $R_X < 1$ si et seulement si $\sum_i \dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q} = \infty$.*

■ Si $H^*(X;\mathbf{Q})$ est noetherien, il existe une fibration $F \to X \to \prod_{i=1}^n K(\mathbf{Q}, 2n_i)$ avec $\dim H^*(F;\mathbf{Q}) < \infty$; comme $R_X = R_F$, il suffit de démontrer le théorème lorsque X est de catégorie finie m. Dans ce cas, si F est hyperbolique, il existe (théorème 6.1) une suite infinie d'entiers $q_1 < q_2 < \ldots$ avec $q_i < mq_{i-1}$ et une constante $c > 1$, le tout tel que

$$\dim \pi_{q_i}(X) \otimes \mathbf{Q} > c^{q_i} \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Il en résulte que

$$R_X = \limsup_i [\dim \pi_i(X) \otimes \mathbf{Q}]^{-\frac{1}{i}} \leq \frac{1}{c} < 1 .$$

la réciproque est évidente. ■

Ce nombre R_X est également le rayon de convergence de la série de Poincaré de ΩX :

Proposition 6.2.2. ([9]) *Soit X hyperbolique, de catégorie finie. Notons par R le rayon de convergence de la série $\sum \dim H_i(\Omega X;\mathbf{Q})\, t^i$. Dans ce cas $R_X = R$.*

■ Comme $H^*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est une algèbre graduée commutative libre sur $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$, on a

$$P_{\Omega X}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + t^{2k-1})^{a_{2k-1}}}{(1 - t^{2k})^{a_{2k}}} ,$$

avec $a_i = \dim \pi_i(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} = \dim \pi_{i+1}(X) \otimes \mathbf{Q}$. Pour $0 < z < 1$ on a $(1 + t^{2k-1})^{a_{2k-1}} \geq 1 + a_{2k-1} t^{2k-1}$ et $(1 - t^{2k})^{a_{2k}} \geq 1 + a_{2k} t^{2k}$.

Ceci donne $P_{\Omega X}(t) \geq \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_i t^i) \geq \sum a_i t^i$ et donc $R_X \geq R$.

Comme $R_X < 1$, il existe un nombre réel α avec $-\ln(1 - x) \leq \alpha x$ pour $x < R_X$. On a alors

$$\begin{cases} (1 + t^{2k-1})^{a_{2k-1}} \leq e^{a_{2k-1} \cdot t^{2k-1}} \\ \left(\dfrac{1}{1 - t^{2k}}\right)^{a_{2k}} \leq e^{a_{2k} t^{2k}} \end{cases}$$

pour $t < R_X$. Ceci induit $P_{\Omega X} \leq e^{\sum_{i=2}^{\infty} a_i t^i}$. Comme le membre de droite converge pour $t < R_X$. Il en est de même du membre de gauche et donc $R_X \leq R$. ■

Pour certaines catégories d'espaces, il est cependant possible d'approximer R_X. C'est le cas des espaces formels . Un espace X est dit *formel* s'il existe un quasi-isomorphisme φ entre son modèle minimal et l'a.d.g.c. $(H^*(X;\mathbf{Q},0)$:

$$\varphi : \mathcal{M}_X \xrightarrow{\sim} (H^*(X;\mathbf{Q}),0).$$

De nombreux espaces sont formels. Dans [25], Deligne, Griffiths, Morgan et Sullivan ont montré que les variétés kälhériennes compactes 1-connexes sont formelles.

Théorème 6.2.3. [43] *Soit X un C.W. complexe fini 1-connexe formel. Notons $r = \inf\{|z|$, z parcourant les zéros de $P_X(t)\}$ alors $R_X \leq r$.*

■ $(H^*(X;\mathbf{Q}),0)$ admet un modèle minimal particulier appelé le modèle bigradué de $H^*(X;\mathbf{Q})$. Il s'agit d'une algèbre graduée commutative libre bigraduée $(\Lambda Z, d)$: $Z = \oplus_{\substack{p\geq 0\\ q\geq 2}} Z_p^q$ avec

$$d(Z_p^q) \subset (\Lambda^{\geq 2} Z)_{p-1}^{q+1} \quad \text{et} \quad H(\Lambda Z, d) = H_0(\Lambda Z, d)\,.$$

Il en résulte que la suite

$$0 \to (\Lambda Z)^2_{p+q-2} \xrightarrow{d} (\Lambda Z)^3_{p+q-3} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} (\Lambda Z)^q_p \xrightarrow{d} \dots (\Lambda Z)_0^{p+q} \to H^{p+q}(X;\mathbf{Q}) \to 0$$

est exacte. On en déduit l'égalité des séries formelles

$$(1) \qquad P_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=r} (-1)^p \dim(\Lambda Z)_p^q \Big) t^r = \prod_{r=2}^{\infty} (1-(-t)^r)^{\alpha_r}\ ,$$

avec $\alpha_r = -\sum_{p+q=r} (-1)^q \dim Z_p^q$.

Les séries $\sum_{i=2}^{\infty} \dim Z^i t^i$ et $\sum_{i=2}^{\infty} \Big(\sum_{s=2}^{i} \dim Z^i \Big) t^i = (1-t)^{-1} \sum_{i=2}^{\infty} \dim Z^i t^i$ ont même rayon de convergence. Comme $|\alpha_r| < \sum_{s=2}^{r} \dim Z^s$, on a $R_X \leq R'$ où R' désigne le rayon de convergence de la série $\sum_{r=2}^{\infty} \alpha_r t^r$.

Calculons maintenant R'.

De (1) on déduit :

$$\log P_X(t) = \sum_{r=2}^{\infty} \alpha_r \log\big(1-(-t)^r\big) = -\sum_{r=2}^{\infty} \alpha_r \big(\sum_{p\geq 1} \frac{(-t)^{pr}}{p} \big) = -\sum_{q=2}^{\infty} \gamma_q (-t)^q\ ,$$

avec $\gamma_q = \sum_{r|q} \alpha_r \cdot \frac{r}{q}$. Si μ désigne la fonction de Möbius , on a alors

$$\alpha_s = \sum_{r|s} \mu(\frac{s}{r})\frac{r}{s} \cdot \gamma_r .$$

Décomposons $P_X(t)$ en fonctions de ses racines $-\frac{1}{\sigma_i}$:

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \sigma_i t).$$

on a

$$\begin{aligned}\log P_X(t) &= \sum_{i=1}^{n} \log(1 + \sigma_i t) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\sigma_i t)^j}{j}) \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j)\frac{(-t)^j}{j} .\end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions de $\log p_X(t)$, on obtient

$$\gamma_q = \frac{1}{q}(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^q) ,$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{\infty} \alpha_s t^s &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r|s} \mu(\frac{s}{r})\frac{1}{s}\sigma_i^r t^s \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu(p)}{p}(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^r}{r}(t^p)^r) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu(p)}{p} \log(1 - \sigma_i t^p)) .\end{aligned}$$

La série $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu(p)}{p} \log(1 - \sigma_i t^p)$ converge uniformément dans le disque de rayon $\frac{1}{\sigma_i}$. En effet, fixons $r < |\frac{1}{\sigma_i}|$, il existe une constante A avec

$$|\log(1 - \sigma_i t)| \leq At \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq r ,$$

et l'on a alors

$$\Big|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu(p)}{p} \log(1 - \sigma_i t^p)\Big| \leq A\Sigma\frac{t^p}{p} \leq \frac{A}{1-t} .$$

Comme les $\frac{-1}{\sigma_i}$ sont les racines de $P_X(t)$, le résultat s'en déduit. ∎

On peut trouver des bornes supérieures de R_X pour d'autres catégories d'espaces. Citons par exemple

Proposition 6.2.4. ([43]) *Supposons que C_f soit le cône d'une application entre suspensions $f : \Sigma X_1 \to \Sigma X_2$ avec X_1 et X_2 des C.W. complexes finis, alors $R_X \leq \min\{|\rho|^{\frac{1}{2}}$, ρ parcourant les zéros du polynôme $1 + P_{X_1}(t) - P_{X_2}(t)\}$.*

6.3. - Homologie des fibres de Postnikov (1).

Les fibres de Postnikov $X_{[n]}$ d'un espace X ont été définies en 3.2.

Théorème 6.3. ([18]) *Soit X un C.W. complexe fini hyperbolique, alors il existe une suite infinie d'entiers n_i avec $H^*(X_{[n_i]};\mathbf{Q})$ de dimension infinie.*

■ Par le théorème 6.1., il existe une suite infinie d'entiers impairs n_i avec $\dim \pi_{n_i}(X) \otimes \mathbf{Q} > \mathrm{cat}_0(X)$. La proposition 6.3.1.suivante appliquée à la fibration

$$X_{[n_i]} \to X_{[n_i-1]} \to K(\pi_{n_i}(X) \otimes \mathbf{Q}, n_i)$$

fournit le résultat. ■

Proposition 6.3.1. *Soit $F \to E \to B$ une fibration avec B du type d'homotopie rationnelle d'un produit de r sphères impaires. Si $r > \mathrm{cat}_0 E = m$, alors $\dim H^*(F;\mathbf{Q}) = \infty$.*

■ Un KS-modèle de la fibration est donné par

$$(\Lambda(x_1, \ldots, x_r), 0) \to [\Lambda(x_1, \ldots, x_r) \otimes \Lambda Z, D] \to [\Lambda Z, \bar{D}] .$$

Si $H^*(F;\mathbf{Q}) = H^*(\Lambda Z, \bar{D})$ est de dimension finie, D est minimal, car autrement $\pi_{\text{pair}}(F) \otimes \mathbf{Q}$ contiendrait un élément de Gottlieb non nul ce qui est absurde car F est un espace de catégorie finie.

Notons α un cocycle représentant une classe de degré maximal de $H^*(\Lambda Z, \bar{D})$; Dans ce cas,

$$x_1 \ldots x_r\, \alpha$$

est un cocycle non cohomologiquement trivial dans $\Lambda V = \Lambda(x_1, \ldots, x_r) \otimes \Lambda Z$. Ce cocycle appartient à $\Lambda^{>m}V$. Il est donc nul dans $\Lambda V/\Lambda^{>m}V$. L'hypothèse "$\mathrm{cat}_0 E = m$" entraîne que ce cocycle est cohomologiquement trivial, ce qui est absurde. ■

Remarque : Au paragraphe 11.7., nous verrons une version plus forte de ce théorème : Soit X un c.w. complexe 1-connexe hyperbolique de catégorie m . Si $\sum_{i=1}^{r} \dim \pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbf{Q} > m$, alors $\dim H^*(X_{[n]};\mathbf{Q}) = \infty$ pour tout $n \geq 2r+1$.

7 - L'ALGÈBRE DE LIE D'HOMOTOPIE RATIONNELLE D'UN ESPACE.

7.1. - $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ et le modèle de Quillen.

Une algèbre de Lie graduée L consiste en un espace vectoriel gradué connexe $L = \oplus_{p>0} L_p$ muni d'un crochet $[\ ,\ ] : L_p \times L_p \to L_{p+q}$ vérifiant:

$$[x,y] = -(-1)^{|x||y|}[y,x], \quad |x| = \text{degré}(x),$$
$$(-1)^{|x||z|}[x,[y,z]] + (-1)^{|y||x|}[y,[z,x]] + (-1)^{|z||y|}[z,[x,y]] = 0.$$

Si X est un espace 1-connexe de type fini, l'espace vectoriel gradué $\oplus_n \pi_n(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée. Le crochet $[\alpha, \beta]$ de deux éléments α et β, appelé crochet de Whitehead, est défini comme suit : représentons α et β par des applications continues pointées

$$f : S^p \to \Omega X \quad \text{et} \quad g : S^q \to \Omega X\ .$$

Considérons l'application $h : S^p \times S^q \to \Omega X$ définie par

$$h(x,y) = f(x) \cdot g(y) \cdot f(x)^{-1} \cdot g(y)^{-1}\ .$$

La restriction de h à $S^p \vee S^q$ est homotopiquement triviale; h induit donc une application continue pointée

$$S^{p+q} \cong S^p \wedge S^q \to \Omega X,$$

dont la classe d'homotopie est le crochet $[\alpha, \beta]$. De cette manière, $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ devient une algèbre de Lie graduée de type fini. Inversement :

Théorème 7.1.1. (Quillen [86]) *Pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie graduée connexe de type fini L, il existe un C.W. complexe 1-connexe de type fini X avec $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ isomorphe à L .*

La correspondance

$$X \to \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$$

n'est malheureusement pas injective : $\pi_*(\Omega(\mathbf{C}P^n) \otimes \mathbf{Q})$ est, pour $n \geq 2$, une algèbre de Lie abélienne à 2 générateurs a_1 en degré 1 et a_{2n} en degré $2n$. On a donc

$$\pi_*\Omega(\mathbf{C}P^2 \times S^7) \otimes \mathbf{Q} \cong \pi_*\Omega(\mathbf{C}P^3 \times S^5) \otimes \mathbf{Q}\ .$$

Un premier exemple de calcul de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ a été fait par Hilton et Milnor :

Théorème 7.1.2. ([99]) *Si $X \cong \vee_{i=1}^{r} S^{n_i}$, alors $\pi_*(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de Lie libre engendrée par des éléments $x_{n_1-1}, x_{n_2-1}, \dots x_{n_r-1}$ correspondant aux injections naturelles des sphères :*

$$x_{n_i-1} : S^{n_i-1} \to \Omega S^{n_i} \to \Omega X \; .$$

Le défaut d'injectivité du foncteur $\pi_*(\Omega-)\otimes \mathbf{Q}$ est éliminé lorsqu'on remplace celui-ci par le foncteur de Quillen λ. λ induit en effet une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des l.d.g. et celle des espaces rationnels 1-connexes. De plus $\pi_*(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}$ est isomorphe à l'homologie de $\lambda(X)$.

$$\begin{tikzcd}
\text{Espaces 1-connexes de type fini.} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\pi_*(\Omega(-))\otimes \mathbf{Q}"'] & \text{L.D.G.} \arrow[d, "H_*(-)"] \\
 & \text{Algèbres de Lie graduées.}
\end{tikzcd}$$

L.D.G.

Notons L.D.G. la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées connexes. Une l.d.g. (L,∂) consiste en une algèbre de lie graduée connexe $L = \oplus_{p>0} L_p$ munie d'un endomorphisme d de carré zéro et de degré -1, sa différentielle, vérifiant:

$$d[x,y] = [dx,y] + (-1)^{|x|}[x,dy] \; .$$

Si V est un espace vectoriel gradué, nous noterons $\mathbf{L}(V)$ l'algèbre de Lie libre sur V, et $\mathbf{L}^{\geq n}(V)$ l'idéal engendré par les crochets de longueur au moins n. La l.d.g. (L,∂) est dite *libre* si L est de la forme $\mathbf{L}(V)$. Elle est dite *minimale* si $L = \mathbf{L}(V)$ et si $\partial(V) \subset \mathbf{L}^{\geq 2}(V)$.

Si (L,∂) est une l.d.g. connexe ($L_0 = 0$), il existe une l.d.g. minimale unique à isomorphisme près $(\mathbf{L}(V), d)$ et un morphisme

$$\varphi : (\mathbf{L}(V), d) \to (L,\partial) \; ,$$

induisant un isomorphisme en homologie ([11], [84]).

Le foncteur de Quillen.

Soit X un espace topologique 1-connexe. Notons $\mathcal{L}_X = (\mathbf{L}(V), d)$ le modèle minimal de $\lambda(X)$.

$\mathcal{L}_X$ jouit des propriétés suivantes ([11], [86], [95]) :

$$V_r \cong H_{r+1}(X;\mathbf{Q}) \quad \text{(iso d'espaces vectoriels) .}$$

$$H_p(\mathbf{L}(V),d) \cong \pi_p(\Omega X)\otimes \mathbf{Q} \quad \text{(iso d'algèbres de Lie) .}$$

Si le modèle de Sullivan (§2.3.) mime la construction de Postnikov d'un espace, le modèle de Quillen mime la construction cellulaire de celui-ci.

Proposition 7.1.3. ([75],[84]) *Supposons que X soit obtenu à partir de X' par adjonction d'une cellule e_n le long d'une application $\alpha : S^{n-1} \to X'$,*

$$X = X' \cup_\alpha e^n .$$

Si $\Sigma\alpha\otimes\mathbf{Q} \simeq 0$, alors $\mathcal{L}_X \cong (\mathcal{L}_{X'} * \mathbf{L}(v), d)$ avec $d(v)$ un cycle de $\mathcal{L}_{X'}$ représentant la classe $\Omega\alpha$. [$*$ désigne le produit libre dans la catégorie LDG].

$\mathbf{H_*(\Omega X;Q)}$.

La composition des lacets munit ΩX d'une structure de H-espace et donc $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ d'une structure d'algèbre de Hopf. L'homomorphisme de Hurewicz définit un morphisme d'algèbres de Lie

$$\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q} \xrightarrow{h} \mathcal{P}H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) .$$

Théorème 7.1.4. (Milnor-Moore [82]) *h est un isomorphisme.*

$H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est donc l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt fournit alors l'égalité de séries formelles

$$P_{\Omega X}(t) = \prod_{i\geq 1} \frac{(1+t^{2i+1})^{a_{2i+1}}}{(1-t^{2i})^{a_{2i}}} \quad , a_i = \dim \pi_i(\Omega X)\otimes\mathbf{Q} .$$

Le modèle de Quillen fournit d'autre part une majoration des rangs des groupes d'homotopie:

$$P_{\Omega X}(t) \leq P_{U\mathbf{L}(s^{-1}H_*(X;\mathbf{Q}))} = \frac{1}{1-\frac{1}{t}(P_X - 1)} .$$

7.2. - Le foncteur cochaînes C^*.

Nous rappellerons ici la construction explicite de C^*, en commençant avec des conventions sur les espaces vectoriels gradués différentiels :

(1) Si $X = \oplus_p X^p$ est un espace vectoriel gradué, nous notons X^* l'espace gradué dual : $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Q})$. Alors,

$$X^p = X_{-p} \quad \text{et} \quad (X^*)_p = (X^*)^{-p} = (X^p)^* \, .$$

(2) désignons par x_i les éléments de X et par f_i les éléments de X^*. Le produit tensoriel des éléments f_i s'interprète comme fonction multilinéaire par la règle

$$\langle f_1 \otimes \ldots \otimes f_p \quad ; x_1, \ldots, x_p \rangle = \varepsilon \langle f_1 ; x_1 \rangle \ldots \langle f_p ; x_p \rangle \, ,$$

où ε désigne l'indice gradué de la permutation

$$(f_1, f_2, \ldots, f_p, x_1, \ldots, x_p) \longmapsto (f_1, x_1, f_2, x_2, \ldots, f_p, x_p) \, .$$

(3) Les éléments de $\Lambda^p X$ s'interprètent comme des fonctions multilinéaires alternées par la règle

$$\langle f_1 \wedge \ldots \wedge f_p ; x_1, \ldots, x_p \rangle = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \langle f_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\sigma(p)} ; x_1, \ldots, x_p \rangle \, ,$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne l'indice gradué de la permutation σ

(4) On pose $(s^r X)^p = X^{p+r}$ (et donc $(s^r X)_p = X_{p-r}$) pour tout r de Z. Les éléments de $s^{-1}(X^*)$ s'interprètent comme des fonctions en sX par la règle

$$\langle s^{-1} f ; sx \rangle = (-1)^{|f|} \langle f ; x \rangle \, .$$

(5) Une différentielle d dans X est une application linéaire $d : X^p \to X^{p+1}$ telle que $d^2 = 0$. La différentielle duale en X^* est définie par

$$\langle df ; x \rangle + (-1)^{|f|} \langle f ; dx \rangle = 0 \, .$$

Les différentielles induites en sX et $s^{-1} X^*$ sont régies par les règles

$$sd + ds = 0 \quad , \quad s^{-1} d + d s^{-1} = 0 \, .$$

L'algèbre des cochaînes sur une l.d.g. (L, ∂), $C^*(L, \partial)$ est l'algèbre différentielle graduée commutative $(\Lambda s^{-1} L^*, d_1 + d_2)$ avec

$$\langle d_1 s^{-1} f ; sx \rangle = - \langle f ; \partial x \rangle \, ,$$

$$\langle d_2 s^{-1} f; sx, sy\rangle = (-1)^{|x|}\langle f; [x,y]\rangle .$$

En particulier, si L est une algèbre de Lie graduée $C^*(L)$ est isomorphe à $(\Lambda s^{-1}L^*, d_2)$ avec une différentielle purement quadratique. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de L, on choisit une base duale x_i^* avec $\langle x_i^*, x_j\rangle = \delta_{ij}$. Notons C_{ij}^k les constantes de structure de L :

$$[x_i, x_j] = C_{ij}^k x_k;$$

on a alors $C^*(L) = (\Lambda(s^{-1}x_i^*), d)$

$$ds^{-1}x_k^* = \sum_{i<j}(-1)^{|x_j|}C_{ij}^k s^{-1}x_j^* \Lambda s^{-1} x_i^* .$$

Cochaînes sur $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$.

Soit X un C.W. complexe 1-connexe de type fini, la différentielle d du modèle minimal $(\Lambda Z, d)$ de X peut se décomposer sous la forme

$$d = d_2 + d_3 + \dots \quad \text{avec} \quad d_i(Z) \subset \Lambda^i Z .$$

on a alors

Théorème 7.2. ([3]) $C^*(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}) \cong (\Lambda Z, d_2)$.

Corollaire. $\mathrm{Hom}(sZ, \mathbf{Q})$ *est isomorphe à* $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ *comme algèbre de Lie, lorsque le crochet est défini dans* $\mathrm{Hom}(sZ, \mathbf{Q})$ *par la loi*

$$\langle x; [f,g]\rangle = (-1)^{|f|}\langle d_2 s^{-1}x; sf, sg\rangle .$$

7.3. - Espace coformel associé à une algèbre de Lie L.

Soit L une algèbre de Lie graduée connexe. Comment construire un espace X avec $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} \cong L$? Donnons-nous une présentation de L

$$L \cong \mathbf{L}(a_i)/(r_j) .$$

Choisissons pour chaque i une sphère S^{n_i} avec $n_i = \deg(a_i) + 1$, et considérons le bouquet des sphères S^{n_i}, $\vee S^{n_i}$. Par le théorème de Hilton-Milnor (7.1.), on a un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\pi_*(\Omega \vee S^{n_i}) \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{L}(a_i) .$$

Représentons chaque élément r_j par une application continue

$$f_j : S^{m_j} \to \vee S^{n_i} \ ,$$

avec $m_j = \deg(r_j) + 1$. On note X_1 la cofibre de l'application $\vee f_j$,

$$\vee_j S^{m_j} \to \vee_i S^{n_i} \to X_1 \ .$$

Il existe alors une algèbre de Lie libre $\mathbf{L}(V_1)$ et une courte suite exacte ([45]) :

$$0 \to \mathbf{L}(V_1) \to \pi_*(\Omega X_1) \otimes \mathbf{Q} \to L \to 0 \ .$$

Choisissons une base de V_1, représentons ses éléments par des applications continues $g_k \ : \ S^{p_k} \ \to \ X_1$et notons X_2 la cofibre de l'application $\vee g_k$. On obtient ainsi une algèbre de Lie libre $\mathbf{L}(V_2)$ et une courte suite exacte

$$0 \to \mathbf{L}(V_2) \to \pi_*(\Omega X_2) \otimes \mathbf{Q} \to L \to 0.$$

On réitère le processus un nombre fini ou infini de fois et on obtient à la fin un espace X avec $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} \cong L$. L'espace X obtenu par cette construction s'appelle l'espace coformel associé a L. On a :

Théorème 7.3. ([45]) *Le modèle minimal de X est isomorphe à l'algèbre des cochaînes sur L.*

7.4. - Caractère noetherien de $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$.

Théorème 7.4. (Bogvad-Halperin [17]) *Soit X un C.W. complexe 1-connexe de catégorie finie. X est elliptique si et seulement si $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ est une algèbre noetherienne.*

■ Si X est elliptique, $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie et est donc noetherienne.

Inversement, supposons que $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ soit une algèbre graduée noetherienne et que X soit hyperbolique. Comme $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ est un $H_*(\Omega X_{[n]}; \mathbf{Q})$-module libre pour tout n, les algèbres $H_*(\Omega X_{[n]}; \mathbf{Q})$ sont également noetheriennes. Choisissons, par le théorème 6.3., un n tel que l'algèbre $H^*(X_{[n]}; \mathbf{Q})$ soit de dimension infinie. Posons alors $A = H_*(\Omega X_{[n]}; \mathbf{Q})$.

A est noetherien. Chaque espace vectoriel $\mathrm{Tor}_p^A(\mathbf{Q},\mathbf{Q})$ est de dimension finie. On considère alors la suite spectrale de Milnor-Moore (§1.4.)

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^A_{p,q}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}) \Longrightarrow H_*(X_{[n]};\mathbf{Q})\,.$$

comme $E^2_{p,*}$ est de dimension finie, chaque $E^\infty_{p,*}$ est de dimension finie. L'inégalité $e_0(X) \leq \mathrm{cat}_0(X)$ montre que $E^\infty = H_*(X_{[n]};\mathbf{Q})$ est de dimension finie, ce qui est absurde. ∎

Remarque : les λ-dimensions.

Un anneau A est dit de λ-dimension $\leq n$ si et seulement si pour tout A-module M et pour toute suite exacte

$$L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \dots L_1 \to L_0 \to M \to 0,$$

si les L_i sont libres finiment engendrés, alors $\mathrm{Ker} d_n$ est finiment engendré.

"$\lambda \dim A = 0$" est équivalent à "A noetherien".

A est dit *cohérent* si $\lambda \dim A = 1$.

Question (Roos). Soit X un C.W. complexe 1-connexe de catégorie finie, les propriétés suivantes sont-elles équivalentes :

(1) $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est cohérent;

(2) $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre de Lie libre à au moins 2 générateurs, de codimension finie.

(2) $\Longrightarrow$ (1) est démontré par Roos ([87]).

8 - COHOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE LIE GRADUÉE L.

Soit L une $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie graduée de type fini (*), $L = \oplus_{i\geq 0} L_i$. Un L-module à gauche M est un espace vectoriel gradué M muni d'un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\rho : L \to \mathrm{End}_{\mathbf{Q}} M \ .$$

Pareil ρ s'étend de manière unique en un homomorphisme d'algèbres associatives

$$\rho : UL \to \mathrm{End}_{\mathbf{Q}} M \ .$$

La cohomologie de L à coefficients dans M se définit comme suit : on choisit une résolution libre $P_\bullet$ de $\mathbf{Q}$ comme UL-module à gauche

$$P_\bullet \to \mathbf{Q} : \quad \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} UL \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q} \to 0 \ ,$$

avec d_i homogène de degré -1. On note $\mathrm{Hom}_{UL}(P_i, M)$ l'espace vectoriel engendré par les UL-homomorphismes homogènes. (**) $\mathrm{Hom}_{UL}(P_i, M)$ est alors un espace vectoriel gradué, et on pose

$$H^*_{Lie}(L; M) = \mathrm{Ext}^*_{UL}(\mathbf{Q}, M) = H^*(\mathrm{Hom}_{UL}(P_\bullet, M)) \ .$$

Remarque : Chaque $\mathrm{Ext}^r_{UL}(\mathbf{Q}, M)$ est un espace vectoriel gradué.

$$\mathrm{Ext}^r_{UL}(\mathbf{Q}, M)_n = \mathrm{Ext}^{r, r-n}_{UL}(\mathbf{Q}, M) \ .$$

8.1. - Une résolution particulière.

Soit L une $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie graduée connexe de type fini, considérons le complexe :

$$UL \otimes \Lambda^p sL \xrightarrow{D} UL \otimes \Lambda^{p-1} sL \to \ldots \qquad UL \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q} \ .$$

(*) Si R est une $\mathbf{Q}$-algèbre (associative ou de Lie), $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$, et si M est une R-module gradué, nous dirons que M est de type fini si pour chaque i, $\dim_{\mathbf{Q}} M_i$ est fini, et que M est finiment engendré s'il existe un morphisme surjectif de R-modules $R^n \to M$, avec n un nombre entier.

(**) De façon classique, si A et B sont deux espaces vectoriels gradués, une application $f : A \to B$ est dite de degré r si $f(A_p) \subset B_{p+r}$ pour chaque p.

où D est défini par la fomule:

$$D(sx_1 \wedge \ldots \wedge sx_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\beta_i} x_i \otimes sx_1 \wedge \ldots \wedge s\hat{x}_i \wedge \ldots \wedge sx_n$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{\varepsilon_{ij}} s[x_i, x_j] \wedge sx_1 \ldots \wedge s\hat{x}_i \wedge \ldots \wedge s\hat{x}_j \ldots \wedge sx_n ,$$

avec $\beta_i = (|x_i| + 1)(\sum_{j=1}^{i} |x_j| + 1) + |x_i|$ et $\varepsilon_{ij} = \beta_i + \beta_j + |x_i||x_j| + |x_j| + 1$.

Lemme 8.1.1. *$(UL \otimes \Lambda(sL), D)$ est une résolution du UL-module trivial $\mathbf{Q}$ par des UL-modules libres.*

■ Filtrons UL par la filtration en produits d'éléments de L :

$$\mathbf{Q} \subset L \subset U_2 L \subset \ldots \subset U_p L \subset \ldots \subset UL .$$

$U_p L$ est le sous-espace linéaire engendré par les produits

$$x_1 \ldots x_r \quad , \quad x_i \in L \qquad r \leq p .$$

La différentielle D est compatible avec cette filtration :

$$D(U_p L \otimes \Lambda^n sL) \subset U_{p+1} L \otimes \Lambda^{n-1} sL .$$

Elle induit donc une suite spectrale avec terme (E_1, d_1)

$$(E_1, d_1) = \big((\mathrm{gr}\,(UL)_p \otimes \Lambda^n sL) \xrightarrow{d_1} (\mathrm{gr}\,(UL)_{p+1} \otimes \Lambda^{n-1} sL)\big) .$$

Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, $(\mathrm{gr}\, UL)$ est isomorphe comme algèbre avec ΛL. La différentielle d_1 est une différentielle d'algèbre vérifiant

$$d_1|_{\Lambda L} = 0 \quad , \quad d_1(sx_i) = x_i .$$

(E_1, d_1) est donc une algèbre différentielle acyclique, et on a ainsi

$$\mathbf{Q} \cong E_2 \cong E_\infty \cong H(UL \otimes \Lambda sL, d) . \qquad ■$$

ΛsL est un espace vectoriel gradué dual à l'espace $\Lambda s^{-1} L^* = C^*(L)$. Notons ∂ la transposée de la différentielle d_2 (§7.2.). Si x appartient à L, notons $i(s^{-1}x^*) : A_p \to A_{p-1}$ l'application graduée duale de la multiplication à gauche par $s^{-1}x^*$.

$$\langle i(s^{-1}x^*)a; b\rangle = (-1)^{(|x|+1)(|a|+1)} \langle a; s^{-1}x^* \wedge b\rangle .$$

Lemme 8.1.2. *La différentielle D vérifie :*

$$D(z \otimes a) = (-1)^{|z|} z \cdot D(1 \otimes a) ,$$
$$D(1 \otimes a) = 1 \otimes \partial a + \sum_i x_i \otimes i(s^{-1}x_i^*)(a) ,$$

x_i parcourant une base de L.

8.2. - Les cochaînes à coefficients dans un module : $C^*(L;M)$.

Soit M un UL-module gradué. La résolution particulière $((UL\otimes\Lambda^* sL), D)$ fournit un complexe de cochaînes noté $C^*(L;M)$ tel que :

$$C^q(L;M) = \mathrm{Hom}_{UL}(UL\otimes\Lambda^q sL, M).$$

Sa cohomologie est notée $H^*_{\mathrm{Lie}}(L;M)$.

Lemme 8.2. *Par l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels bigradués $C^q(L;M) = (\mathrm{Hom}(\Lambda^q sL, M), d)$, $\mathrm{Hom}(\Lambda^* sL, M)$ est équipé d'une différentielle définie par : si $c\in C^q(L;M)$,*

$$dc(a) = (-1)^{|c|}c(\partial a) + \sum_{x\in \text{base de } L} (-1)^{|c|(|x|+1)} x\cdot c(i(s^{-1}x^*)\cdot a)\ .$$

Si $a = sx_1\wedge\ldots\wedge sx_{q+1}$, la formule peut se développer :

$$\begin{aligned} dc(a) = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|c|(|x_i|+1)+\beta_i} x_i\cdot c(sx_1\wedge\ldots\wedge s\hat{x}_i\wedge\ldots\wedge sx_n)\\ &+\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{|c|+\epsilon_{ij}} c(s[x_i,x_j],\ldots s\hat{x}_i,\ldots,s\hat{x}_j\ldots sx_n)\ . \end{aligned}$$

Cas particulier $M = M_{\le r}$.

Dans ce cas, $C^*(L;M)$ est isomorphe comme espace vectoriel gradué à $C^*(L)\otimes M$. L'isomorphisme

$$\varphi : C^*(L)\otimes M \to C^*(L;M)$$

est défini en posant $\varphi(f\otimes m)(a) = (-1)^{|f||m|}f(a)\cdot m$. Cet isomorphisme devient un isomorphisme de complexes de cochaînes lorsque l'on munit $C^*(L)\otimes M$ de la différentielle D définie par

$$D(f\otimes m) = d_2(f)\otimes m + (-1)^{|f|}\sum_i f\wedge s^{-1}x_i^*\otimes x_i\cdot m\ ,$$

x_i parcourant une base de L.

Cohomologie de l'algèbre $(C^*(L), d_2)$

En prenant $M = \mathbf{Q}$, on obtient un isomorphisme naturel bigradué

$$H^{q,p}(C^*(L)) \overset{\cong}{\to} H^{q,p}_{\mathrm{Lie}}(L;\mathbf{Q}) = \mathrm{Ext}^{q,p}_{UL}(\mathbf{Q},\mathbf{Q})\ .$$

8.3. - La suite spectrale d'Hochschild-Serre ([68]).

Soit L une algèbre de Lie graduée et I un idéal. Pour tout module M, les complexes $C^*(L;M)$ et $C^*(I;M)$ sont des L-modules : si $\gamma \in L$ et $f \in C^n(L;M)$ ou $C^n(I;M)$, on pose

$$\begin{aligned}&(\gamma \cdot f)(sx_1 \wedge \ldots \wedge sx_n) = \gamma \cdot f(sx_1 \wedge \ldots \wedge sx_n)\\ &-(-1)^{|\gamma||f|}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|\gamma|(\sum_{j<i}(|x_j|+1))+|\gamma|}f(sx_1 \wedge \ldots \wedge s[\gamma,x_i]\ldots \wedge sx_n)\,.\end{aligned}$$

Si $\sigma \in L$, on pose

$$f_{s\sigma}(sx_1 \wedge \ldots \wedge sx_n) = f(s\sigma \wedge sx_1 \wedge \ldots \wedge sx_n)\,.$$

On en déduit :

$$(1) \qquad \gamma \cdot (f)_{s\sigma} = (\gamma \cdot f)_{s\sigma} + (-1)^{|\gamma|(|f|+1)} f_{s[\gamma,\sigma]}\,.$$

$$(2) \qquad (df)_{s\gamma} = (-1)^{|f|(|\gamma|+1)+1}\gamma \cdot f + d(f_{s\gamma})\,.$$

Il en résulte que $d(\gamma \cdot f) = (-1)^{|\gamma|}\gamma \cdot df$.

L agit ainsi sur $H^*_{\mathrm{Lie}}(I;M)$. Si f est un cocycle et γ appartient à I, l'équation (2) donne

$$\gamma \cdot f = (-1)^{|f|(|\gamma|+1)} d(f_{s\gamma})\,.$$

L'action de L sur $H^*_{\mathrm{Lie}}(I;M)$ induit donc une action de L/I sur $H^*_{\mathrm{Lie}}(I;M)$.

La filtration.

Filtrons $C^*(L;M)$ en posant

$$p \leq 0, \quad F^pC^r(L;M) = C^r(L;M)\,,$$

$$p > 0, \quad F^pC^r(L;M) = \{f \in C^r(L;M) | f(g_1,\ldots,g_r) = 0 \text{ si } \quad g_1,\ldots,g_{r-p+1} \in I\}$$

$$F^0C^r = C^r \supset F^1C^r \supset \ldots \quad F^rC^r \supset F^{r+1}C^r = 0\,.$$

Les définitions impliquent que

$$dF^pC^r(L;M) \subset F^pC^{r+1}(L;M)\,.$$

$\{F^p\}$ forme donc une filtration du complexe $C^*(L;M)$. La suite spectrale $E_r^{p,q}$ associée s'appelle suite spectrale d'Hochschild-Serre.

Théorème 8.3.1. ([68]) *Avec les notations précédentes,*

(1) Le terme $E_2^{p,q}$ est isomorphe à l'espace vectoriel $H^p_{\mathrm{Lie}}(L/I, H^q(I;M))$ pour l'action de L/I sur $H^*_{\mathrm{Lie}}(I;M)$ définie précédemment.

(2) La suite spectrale converge vers $H^*_{\mathrm{Lie}}(L;M)$.

Cas particulier $M = M_{\leq r}$.

Filtrons l'espace vectoriel différentiel $C^*(L)\otimes M$ par les puissances de l'idéal $C^*(L/I)$ de $C^*(L)$. Nous obtenons une filtration F' de $C^*(L)\otimes M$ et l'isomorphisme canonique $\varphi : C^*(L)\otimes M \to C^*(L;M)$ est un isomorphisme de complexes filtrés.

Seconde description de l'action de L/I sur $H^*_{\mathrm{Lie}}(I;M)$.

Par les isomorphismes canoniques

$$C^*(I;M) = \mathrm{Hom}_{UI}(UI\otimes \Lambda sI, M) = \mathrm{Hom}_{UL}(UL\otimes \Lambda sI, M)\ ,$$

l'action de L sur $C^*(I;M)$ se transporte en une action de L sur le membre de droite. Si $\gamma\in L$ et $f\in \mathrm{Hom}_{UL}(UL\otimes\Lambda sI, M)$ on obtient alors,

(1) $(\gamma\cdot f)(1\otimes sx_1\wedge\ldots\wedge sx_n) = \quad (-1)^{|\gamma||f|}f(\gamma\otimes sx_1\wedge\ldots\wedge sx_n)$

$$-(-1)^{|\gamma||f|}\textstyle\sum_{i=1}^n(-1)^{|\gamma|(\sum_{j<i}(|x_j|+1))+|\gamma|}f(1\otimes sx_1\wedge\ldots\wedge s[\gamma,x_i]\wedge\ldots\wedge sx_n).$$

Comme UL est un UI-module libre, $UL\otimes\Lambda sI$ est une UL-résolution libre de $UL\otimes_{UI}\mathbf{Q}\cong U(L/I)$. Si γ appartient à L , notons $\tilde\gamma : UL\otimes\Lambda sI\to UL\otimes\Lambda sI$ l'application définie par

$$\begin{aligned}(2)\qquad \tilde\gamma(a\otimes sx_1\wedge\ldots\wedge sx_n) &= (-1)^{|\gamma||a|}a\gamma\otimes sx_1\wedge\ldots\wedge sx_n\\ &-\sum_{i=1}^n(-1)^{|\gamma|(1+|a|+\sum_{j<i}(|x_j|+1))}a\otimes sx_1\wedge\ldots\wedge s[\gamma,x_i]\wedge\ldots\wedge sx_n.\end{aligned}$$

La formule (1) peut alors s'écrire

$$(3)\qquad (\gamma\cdot f)(a) = (-1)^{|\gamma||f|}f(\tilde\gamma\cdot a)\ .$$

Un simple calcul montre que $\tilde\gamma$ est un homomorphisme de complexes de UL-modules, induisant la multiplication à droite par γ sur $U(L/I)$. On obtient ainsi :

Proposition 8.3.2. *Notons $P_\bullet \to U(L/I)$ une résolution libre de $U(L/I)$ comme UL-module. Si $g \in UL$, la multiplication à droite par g dans $U(L/I)$ est un homomorphisme de UL-modules et s'étend en un homomorphisme de complexes $\tilde{g} : P_\bullet \to P_\bullet$. Ces morphismes induisent par composition la structure de $U(L/I)$-module de $H^*_{Lie}(I; M) = \mathrm{Ext}^*_{UI}(\mathbf{Q}, M)$.*

Cas particulier $M = UL$.

Soit I un idéal de L, l'injection de UI-module $UI \hookrightarrow UL$ définit un morphisme canonique

$$\beta : \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \to \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UL) .$$

La structure de $U(L/I)$ module de $\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UL)$ nous permet d'étendre β en un morphisme de $U(L/I)$-modules à gauche

$$\alpha : U(L/I) \otimes \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \to \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UL) .$$

Proposition 8.3.3. *α est une injection.*

■ Soit e_i une base de $U(L/I)$, le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt fournit une décomposition $UL = UI \otimes U(L/I) = \oplus UI \cdot e_i$ et l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UL) \cong \Pi_i \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \cdot e_i \ .$$

Il en résulte une injection

$$\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \otimes U(L/I) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UL) .$$

L'action à gauche de $U(L/I)$ sur $\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UL)$ se restreint à $\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \otimes U(L/I)$ et fournit un morphisme de $U(L/I)$-modules à gauche.

$$\alpha : U(L/I) \otimes \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \to \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \otimes U(L/I) .$$

La définition de l'action de $U(L/I)$ sur le membre de droite montre que

$$\alpha(U(L/I)_q \otimes \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI)) \subset \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \otimes U(L/I)_{\leq q} ,$$

avec, pour $g \in U(L/I)_q$. ,

$$\alpha(g \otimes f) = (-1)^{|g||f|} f \otimes g \quad \mathrm{mod}(\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) \otimes U(L/I)_{<q}).■$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 8.3.4.([32]) *Soit L une algèbre de Lie graduée et I un idéal vérifiant*

$$H^{p,q}_{\mathrm{Lie}}(I;UI) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad (p,q) \neq (n,m)\,, \\ \mathbf{Q} & \text{pour} \quad (p,q) = (n,m)\,, \end{cases}$$

alors on a un isomorphisme bigradué

$$H^{p,q}_{\mathrm{Lie}}(L,UL) \cong H^{p-n,q-m}_{\mathrm{Lie}}(L/I;U(L/I))\,.$$

■ Considérons la suite spectrale d'Hochschild-Serre appliquée au cas particulier $M = UL$. Comme $UL = \oplus UI \cdot e_i$, e_i base de $U(L/I)$, on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q},UL) \cong \Pi_i \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q},UI)\cdot e_i\,.$$

Comme $\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q},UI)$ est de dimension un, on a

$$\Pi_i \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q},UI)\cdot e_i \cong \oplus_i \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q},UI)\cdot e_i \cong \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q},UI)\otimes U(L/I)\,.$$

les séries de Poincaré étant les mêmes, le morphisme α de la proposition précédente est un isomorphisme.

On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^{p,q}_{U(L/I)}(\mathbf{Q},\mathrm{Ext}^{r,s}_{UI}(\mathbf{Q},UL)) &\cong \mathrm{Ext}^{p,q}_{U(L/I)}(\mathbf{Q},U(L/I)\otimes \mathrm{Ext}^{r,s}_{UI}(\mathbf{Q},UI)) \\ &\cong \mathrm{Ext}^{p,q}_{U(L/I)}(\mathbf{Q},U(L/I))\otimes \mathrm{Ext}^{r,s}_{UI}(\mathbf{Q},UI)\,.\end{aligned}$$

La suite spectrale dégénère donc au terme E_2, ce qui entraîne le résultat. ■

8.4. - $\mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q},\mathrm{Hom}(M,N))$.

Définition 1. *Soient M et N deux L-modules à gauche.* $\mathrm{Hom}(M,N)$ *est un L-module pour l'action définie par*

$$(g\cdot f)(m) = g\cdot f(m) - (-1)^{|f||g|}f(g\cdot m), \quad g\in L, f\in \mathrm{Hom}(M,N)\,.$$

Définition 2. *Si R et N sont deux L-modules à gauche, $R\otimes M$ est un L-module pour l'action définie par*

$$g\cdot(r\otimes m) = (g\cdot r)\otimes m + (-1)^{|r||g|} r\otimes g\cdot m, \quad g\in L, r\in M, m\in N\,.$$

On a alors de façon évidente un isomorphisme d'adjonction

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{UL}(R, \mathrm{Hom}(M,N)) \cong \mathrm{Hom}_{UL}(R \otimes M, N)\ .$$

Lemme. *Si P est un L-module libre et si $M = \cup_{i \leq r} M_i$ est un L-module, alors $P \otimes M$ est un L-module libre.*

■ Si $\varphi : UL \otimes S \to P$ est un isomorphisme de L-modules à gauche alors l'application $\psi : UL \otimes S \otimes M \to P \otimes M$ définie par $\psi(g \otimes s \otimes m) = g \cdot (\varphi(1 \otimes s) \otimes m)$ en est un également. ■

Théorème 8.4.1. *Si $M = M_{\leq r}$, alors on a un isomorphisme bigradué*

$$\mathrm{Ext}_{UL}^{p,q}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_{UL}^{p,q}(\mathbf{Q}, \mathrm{Hom}(M,N))\ .$$

■ Soit $P_\bullet \to \mathbf{Q}$ une résolution libre de $\mathbf{Q}$ par des UL-modules. $P_\bullet \otimes M$ est une résolution libre de M par des UL-modules et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{UL}(M,N) \cong H(\mathrm{Hom}_{UL}(P_\bullet \otimes M, N)) &\cong H(\mathrm{Hom}_{UL}(P_\bullet, \mathrm{Hom}(M,N)) \\ &\cong \mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q}, \mathrm{Hom}(M,N))\ . \end{aligned}$$ ■

Le complexe $C^*(L; M, N)$.

Si $M = M_{\leq r}$ et $N = N_{\leq s}$ sont deux UL-modules, on peut considérer les complexes $(C^*(L) \otimes M, D_M)$ et $(C^*(L) \otimes N, D_N)$. L'espace vectoriel $C^*(L; M, N) = \mathrm{Hom}_{C^*(L)}(C^*(L) \otimes M, C^*(L) \otimes N)$ est alors muni d'une bigraduation et d'une différentielle D de bidegré $(1,0)$ par les règles

$$C^{p,q}(L; M, N) = \{f \in C(L; M, N) \text{ avec } f(M^r) \subset (C^p(L) \otimes N)^{p+q+r}\}\ .$$

$(Df)(m) = D_N f(m) - (-1)^{|f|} f D_M(m)$, $|f|$ désignant le degré total de f.

$C^*(L; M, N)$ est relié au complexe $C^*(L; \mathrm{Hom}(M,N))$ par un isomorphisme d'espaces vectoriels bigradués

$$\alpha : C(L; M, N) \to C^*(L; \mathrm{Hom}(M,N))\ ,$$

$$\alpha(f)(a)(m) = (-1)^{|m||a|} f(m)(a)\ .$$

Un simple calcul montre que α est un isomorphisme de complexes. Il en résulte :

Théorème 8.4.2. *Si $M = M_{\leq r}$ et $N = N_{\leq s}$, alors les espaces vectoriels $H^{p,q}(C^*(L; M, N))$ et $\mathrm{Ext}_{UL}^{p,q}(M,N)$ sont isomorphes.*

9 - Opération d'holonomie d'une fibration.

9.1. - Connexion homotopique.

Si X est un espace, nous noterons $X^{[0,1]}$ l'espace des chemins de $[0,1]$ dans X muni de la topologie compacte ouverte.

Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration. Notons $B^{[0,1]} \times_B E$ l'espace défini par :

$$B^{[0,1]} \times_B E = \{(\alpha, e) | \alpha : [0,1] \to B, \, e \in E, \, \alpha(1) = p(e)\} .$$

La propriété de relèvement des homotopies fournit une application continue appelée "connexion homotopique"

$$\lambda : B^{[0,1]} \times_B E \to E^{[0,1]} ,$$

avec $\lambda(\alpha, e)(1) = e$ et $p(\lambda(\alpha, e))(t) = \alpha(t)$.

En restriction à ΩB, cette application induit une action de ΩB sur F notée : $\mu : \Omega B \times F \to F$ définie par $\mu(\omega, f) = \lambda(\omega, f)(O)$. μ s'appelle l'opération d'holonomie de la fibration p. Elle est bien définie à homotopie près. Elle munit $H_*(F; \mathbf{Q})$ d'une structure canonique de $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$ -module.

Le modèle de μ. Soit $(\Lambda X, d) \to (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \to (\Lambda Y, \bar{D})$ un K.S. modèle minimal de la fibration p, et

$$(\Lambda X, d) \to (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D) \to (\Lambda \bar{X}, 0) ,$$

un K.S. modèle de la fibration $\Omega B \to EB \to B : \bar{X} = sX$. Un K.S. modèle de la fibration $\Omega B \to F \xrightarrow{i} E$ est alors donné par

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \arrow[r] \arrow[dr] & (\Lambda X \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda \bar{X}, D) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\, q"] & (\Lambda \bar{X}, 0) \\
 & (\Lambda Y, \bar{D}) &
\end{tikzcd}$$

où l'a.d.g.c. $(\Lambda X \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda \bar{X}, D)$ désigne l'a.d.g.c. produit tensoriel

$$(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D) \otimes_{\Lambda X} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) .$$

Proposition [39]. *Si $\rho : (\Lambda Y, \bar{D}) \to (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X} \otimes \Lambda Y, D)$ est une section de q, alors le composé*

$$(\Lambda Y, \bar{D}) \xrightarrow{q} (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X} \otimes \Lambda Y, D) \xrightarrow{\rho} (\Lambda \bar{X}, 0) \otimes (\Lambda Y, \bar{D}) ,$$

où $\rho(X) = 0$, $\rho(\bar{x}) = \bar{x}$ *et* $\rho(y) = y$, *est un modèle minimal de* μ .

■ L'opération λ induit une application

$$\lambda' : EB \times_B E \to F \,, \qquad \lambda'(\alpha, e) = \lambda(\alpha, e)(0) \,.$$

Un modèle de $EB \times_B E$ est fourni par le produit tensoriel

$$(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X} \otimes \Lambda Y, D) \cong (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D) \otimes_{\Lambda X} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \,.$$

Un modèle de λ' est donc fourni par une application

$$\rho : (\Lambda Y, \bar{D}) \to (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X} \otimes \Lambda Y, D) \,,$$

vérifiant $q\rho = 1_{\Lambda Y}$.

L'application $\mu : \Omega B \times F \to F$ est la composée

$$\Omega B \times F \xrightarrow{i} EB \times_B E \xrightarrow{\lambda'} F \,,$$

où i provient de la fibration

$$\Omega B \times F \xrightarrow{i} EB \times_B E \xrightarrow{m} B \,,$$

$i(\alpha, f) = (\alpha, f)$, $m(\alpha, e) = p \cdot (e(1))$.

Le K.S. modèle de m étant fourni par l'inclusion

$$(\Lambda X, d) \to (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X} \otimes \Lambda Y, D) \,,$$

un modèle de i est fourni par ρ . ■

L'opérateur d'holonomie induit une action μ_* de $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$ sur $H_*(F; \mathbf{Q})$ et une action contragrediente τ de $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$ sur $H^*(F; \mathbf{Q})$:

$$< \tau(u, \alpha), a >= (-1)^{|u||\alpha|} < \alpha, \mu_*(u \otimes a) > \,,$$

avec $a \in H_*(F; \mathbf{Q})$, $\alpha \in H^*(F; \mathbf{Q})$, $u \in H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$.

Description de τ .

Pour chaque a.d.g.c. (A, d_A), désignons par $\mathrm{Der}_p(A)$ l'espace vectoriel des dérivations de A de degré $-p$. La somme directe $\mathrm{Der}\,(A) = \oplus_p \mathrm{Der}_p(A)$, munie du crochet $[\theta, \theta'] = \theta_0\theta' - (-1)^{|\theta||\theta'|}\theta'_0\theta$ et de la différentielle $\partial\theta = [\theta, d_A]$, est une algèbre de Lie graduée différentielle.

Dans la K.S. extension $(\Lambda X, d) \to (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \to (\Lambda Y, \bar{D})$ associée à la fibration p, choisissons une base x_α de X, b_β de $\Lambda^2 X$ et c_δ de $\Lambda^{\geq 3} X$. La différentielle D induit les éléments θ^α, θ^β, θ^γ de $\mathrm{Der}(\Lambda Y)$ par la formule

$$D = 1 \otimes \bar{D} + \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \otimes \theta^\alpha + \sum_{\beta \in B} b_\beta \otimes \theta^\beta + \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \otimes \theta^\gamma \, .$$

De la relation $D^2 = 0$, on déduit :

(1) $[\theta^\alpha, \bar{D}] = 0$.

(2) $\sum_\alpha (d_2 x_\alpha) \otimes \theta^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\alpha'} (-1)^{|a_{\alpha'}||\theta^\alpha|} a_\alpha a_{\alpha'} \theta^\alpha \theta^{\alpha'} \;=\; - \sum_\beta b_\beta \otimes [\theta^\beta, \bar{D}]$.

Considérons alors l'homomorphisme de chaînes $\varphi : \mathrm{Hom}(\bar{X}, \mathbf{Q}) \to \mathrm{Der}(\Lambda Y)$ défini par $\varphi(u) = \sum_\alpha < sx_\alpha, u > \theta^\alpha$.

Lemme. *φ induit un homomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\varphi_* : \mathrm{Hom}(\bar{X}, \mathbf{Q}) \to H_*(\mathrm{Der}\ \Lambda Y) \, .$$

■

$$\begin{aligned}
[\varphi(u), \varphi(v)] &= \sum_{\alpha,\alpha'} < sx_\alpha, u >< sx'_\alpha, v > [\theta^\alpha, \theta^{\alpha'}] \\
&= \sum_{\alpha,\alpha'} (-1)^{|u|+|v|} < x_\alpha, su >< x'_\alpha, sv > [\theta^\alpha, \theta^{\alpha'}] \\
&= \sum_{\alpha,\alpha'} (-1)^{|u|+|v|+(|u|+1)(|v|+1)} < x_\alpha \otimes x_{\alpha'} \;\; su, sv > [\theta^\alpha, \theta^{\alpha'}] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\alpha'} (-1)^{|u||v|+1} < x_\alpha \Lambda x_{\alpha'} \; ; \; su, sv > [\theta^\alpha, \theta^{\alpha'}] \\
&= - \sum_\alpha (-1)^{|u||v|+1+|u|(|v|+1)} < d_2 x_\alpha \; ; \; su, sv > \cdot \theta^\alpha + \partial\Omega \\
&= \sum_\alpha (-1)^{|u|} < d_2 x_\alpha \; ; \; su, sv > \theta^\alpha + \partial\Omega \\
&= \sum_\alpha < sx_\alpha \; ; \; [u, v] > \theta^\alpha + \partial\Omega \\
&= \varphi[u, v] + \partial\Omega \, .
\end{aligned}$$

■

En composant φ_* avec le morphisme canonique

$$H_*(\mathrm{Der}\ (\Lambda Y), \partial) \to \mathrm{Der}\ (H^*(\Lambda Y, \bar{D})) \, ,$$

on obtient une opération $\hat{\tau}$ de $\mathrm{Hom}(\bar{X}, \mathbf{Q})$ sur $H^*(\Lambda Y, \bar{D})$, que l'on peut prolonger de manière naturelle à l'algèbre enveloppante $U\mathrm{Hom}\,(\bar{X}, \mathbf{Q})$.

Proposition. $\hat{\tau} = \tau$.

■ Comme les opérations τ et $\hat{\tau}$ sont naturelles, il suffit de vérifier $\tau = \hat{\tau}$ lorsque B est une sphère.

a) Cas d'une sphère impaire.

Dans ce cas, on a la K.S. extension

$$(\Lambda b, 0) \to (\Lambda b \otimes \Lambda Y, D) \to (\Lambda Y, \bar{D}) ,$$

$$D = 1 \otimes \bar{D} + b \otimes \theta .$$

Posons $\sigma(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \bar{b}^n \otimes \theta^n(\alpha)$, $\quad D\bar{b} = -b$.

σ est un homomorphisme d'a.d.g.c. et une section de q . De plus, $\sigma = \mu$ et donc, lorsque $< \bar{b}, u >= 1$, $< \tau(u,\alpha), a >=< \alpha, \mu_*(u,a) >=< \mu^*(\alpha), u \otimes a >=$ $< \theta(\alpha), a >< \bar{b}, u >=< \hat{\tau}(u,\alpha), a >$.

b) Cas d'une sphère paire.

Dans ce cas, on a la K.S. extension

$$(\Lambda(b,c), d) \to \big(\Lambda(b,c) \otimes \Lambda Y, D\big) \to (\Lambda Y, \bar{D}) ,$$

$db = 0$, $dc = b^2$, $d\bar{b} = -b$, $d\bar{c} = -c - b\bar{b}$.

Une section de q est définie de manière similaire :

$$\sigma(\alpha) = \alpha + \bar{b}\theta(\alpha) + \dots$$

et on a,

$$\begin{aligned} < \tau(u,\alpha), a > &= (-1)^{|\alpha|} < \alpha, \mu_*(u,a) >= (-1)^{|\alpha|} < \mu^*(\alpha), u \otimes a > \\ &= (-1)^{|\alpha|} < \bar{b}\theta(\alpha), u \otimes a >=< \bar{b}, u >< \theta(\alpha), a > \\ &=< \hat{\tau}(u,\alpha), a > . \end{aligned}$$ ■

Cas particulier des fibrations de base une sphère.

Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^n$ une fibration de base S^n et

$$(\Lambda b/b^2, 0) \to (\Lambda b/b^2 \otimes \Lambda Y, D) \to (\Lambda Y, \bar{D}) ,$$

un K.S. modèle de p :

$$D = 1 \otimes \bar{D} + b \otimes \theta \, .$$

Dans ce cas, l'opération d'holonomie τ est entièrement définie par θ^* . $\tau(a, \alpha) = \theta^*(\alpha)$ pour a un générateur de $H_{n-1}(\Omega S^n)$.

9.2. - Etude des fibrations $F \to E \to B$ avec $\pi_*(B) \otimes \mathbf{Q} < \infty$; fibres de Postnikov(2).

L'objet du présent paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème. *Soit $F \to E \to B$ une fibration avec $\pi_*(B) \otimes \mathbf{Q}$ et $H^*(E; \mathbf{Q})$ de dimension finie, alors*

(1) *$H_*(F; \mathbf{Q})$ est un $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$-module noetherien.*

(2) *La série de Poincaré de F est une fonction rationnelle de la forme $P(t)/\prod_{i=1}^n (1 - t^{2b_i})$ où $P(t)$ est un polynôme, et $2b_1 + 1, \ldots, 2b_n + 1$ sont les degrés d'une base homogène de $\pi_{\mathrm{impair}}(B) \otimes \mathbf{Q}$.*

■ (1) La suite spectrale de Serre de la fibration $\Omega B \to F \to E$ est une suite spectrale de $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$-modules. Le terme $E^2 = H_*(E) \otimes H_*(\Omega B)$ est un module noetherien. Il en est de même de chaque E^p. Comme $H_*(E)$ est de dimension finie, $E_p = E^\infty$ pour p assez grand. Il en résulte que $H_*(F; \mathbf{Q})$ est un module finiment engendré.

(2) résulte de la proposition suivante. ■

Proposition. *Soit L une $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie graduée connexe de dimension finie et V un UL-module gradué de type fini ($V = \oplus_{p \geq 0} V_p$), alors la série de Hilbert de V,*

$$H_V(t) = \sum_{n \geq 0} \dim V_n t^n \, ,$$

est une fonction rationnelle de la forme $P(t)/\prod_{i=1}^n (1 - t^{2b_i})$ où $P(t)$ est un polynôme et $2b_1, \ldots, 2b_n$ les degrés d'une base homogène de L_{pair} .

■ Nous travaillons par récurrence sur $\dim L$. Si $\dim L = 0$, V est de dimension finie et le résultat s'en déduit. Supposons le résultat vrai pour les algèbres de Lie de dimension p ; soit L une algèbre de Lie graduée de dimension $p+1$ et V un

UL-module de type fini. Si x est un générateur de degré maximal. x est donc dans le centre et on a une courte suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}x \to L \to L/x \to 0 .$$

(1) Si x est de degré impair, on pose

$$K = \{a \in V | x \cdot a = 0\} ,$$

K est un L/x-module gradué de type fini et on a une suite exacte courte de L-modules

$$0 \to K \to V \xrightarrow{x} K' \to 0$$

où K et K' sont des L/x-modules.

L'hypothèse de récurrence montre que

$$H_V(t) = H_K(t) + t^{-|x|} H_{K'}(t)$$

est rationnel de la forme souhaitée.

(2) Si x est de degré pair, on pose $K = \{\alpha \in V | x^n \cdot \alpha = 0 \text{ pour un certain } n\}$, K est un L-module noetherien. Comme de plus $\dim L < \infty$, il existe un n_0 tel que

$$K = \{a \in V | x^{n_0} \cdot a = 0\} .$$

K admet une filtration en sous-modules

$$K = K_{n_0} \supset K_{n_0 - 1} \supset K_{n_0 - 2} \supset \ldots \supset K_1 \supset 0 ,$$

avec $K_i = \{a \in V | x^i \cdot a = 0\}$; chaque K_i / K_{i+1} est un L/x-module noetherien. Par hypothése de récurrence, la série de Hilbert de K est donc de la forme $H_K(t) = P(t)/\prod_{i=1}^n (1 - t^{2a_i})$ avec $P(t)$ un polynôme et $2a_1, \ldots, 2a_n$ les degrés d'une base homogène de $(L/x)_{\text{pair}}$.

Dans V/K la multiplication par x est injective et on a une courte suite exacte de L-modules

$$(*) \qquad 0 \to V/K \xrightarrow{x} V/K \to V/(K, x) \to 0 .$$

$V' = V/(K, x)$ est un L/x-module noetherien auquel l'hypothèse de récurrence s'applique. La suite exacte courte (*) fournit l'égalité

$$H_V(t) = H_K(t) + H_{V/K}(t) = H_K(t) + H_{V'}(t)[1 - t^{|x|}]^{-1} . \qquad \blacksquare$$

Corollaire (Fibres de Postnikov). *Si X est un c.w. complexe fini, les séries de Poincaré de $H_*(X_{[n]})$ sont rationnelles pour tout n .*

9.3. - Holonomie et représentations de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$.

Soit L une algèbre de Lie graduée, M une algèbre graduée commutative et $\theta : L \to \mathrm{Der}(M)$ une représentation de L par dérivations. On lui associe (§8.2) l'algèbre des cochaînes de L à coefficients dans M , $(C^*(L) \otimes M, D)$:

$$D(f \otimes m) = d_2(f) \otimes m + (-1)^{|f|} \sum_{e \text{ base de } L} f \wedge s^{-1}e^* \otimes \theta(e)m \,.$$

Considérons l'extension

$$(C^*(L), d) \to (C^*(L) \otimes M, D) \to (M, 0) \,.$$

En lui appliquant le foncteur réalisation géométrique $\langle\ \rangle$ [18], on obtient une fibration $F \to E \to B$ avec

(1) $H^*(F; \mathbf{Q}) \cong M$,

(2) $\pi_*(\Omega B) \otimes \mathbf{Q} \cong L$,

(3) $H^*(E; \mathbf{Q}) \cong H^*(L; M)$,

(4) L'action φ de $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ sur $H_*(F)$ coïncide avec θ : $\forall e$, $\varphi(e) = \theta(e)$.

Inversement, si $F \to E \xrightarrow{p} X$ est une fibration entre espaces 1-connexes de type fini, on peut filtrer le K.S. modèle de p, $(\Lambda Z \otimes \Lambda Y, D)$, par la suite d'idéaux $\Lambda^{\geq p} Z \otimes \Lambda Y$. On obtient ainsi une suite spectrale vérifiant

$$E_2^{p,q} = H^{p,q}(\Lambda Z \otimes H^*(\Lambda Y), D_2) = H^{p,q}\big(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}\,;\, H^*(F; \mathbf{Q})\big) \,,$$

et convergeant vers la cohomologie de E .

9.4. - Holonomie dans les fibrations de Ganea.

Définition. *Si A est un anneau gradué, M et N deux A-modules à gauche, alors N est appelé un $r -$ syzygy de M s'il existe une suite exacte de A-modules*

$$0 \to N \to P_r \to P_{r-1} \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \,,$$

où les P_i sont projectifs.

Théorème. *Soit $F_m \to E_m \to X$ la m^e fibration de Ganea alors pour l'opération de $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ sur $H_*(F_m; \mathbf{Q})$, $\tilde{H}_*(F_m; \mathbf{Q})$ est un $m -$ syzygy de $\mathbf{Q}$.*

■ Posons $A = C_*(\Omega X; \mathbf{Q})$. Avec les notations du §1.4, on a alors un quasi-isomorphisme de A-modules

$$\mu : A \otimes \bar{B}(A)_m \to C_*(F_m; \mathbf{Q}) .$$

En filtrant $A \otimes \bar{B}(A)_m$ par la suite d'id'éaux $\oplus_{j=0}^k A^{\otimes j}$, $k \leq m$, on obtient une suite spectrale vérifiant

$$E_1 = H_*\big(H_*(A) \otimes \bar{B}(H_*(A))_m\big) ,$$

et convergeant vers $H_*(A \otimes \bar{B}(A)_m)$. Comme $\big(H_*(A) \otimes \bar{B}(H_*(A)), d_1\big)$ est acyclique, cette suite spectrale dégénère au terme E_1 et on a une suite exacte de $H_*(A)$-modules

$$0 \to (\tilde{E}_1) \to H_*(A) \otimes (\otimes^m H_*(A)) \to H_*(A) \otimes (\otimes^{m-1} H_*(A)) \to \ldots H_*(A) \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$$

ce qui fournit la thèse. ■

10 - CATÉGORIE D'UNE APPLICATION.

Le but premier de ce chapitre est la définition de la catégorie d'une application (10.1) et son calcul au moyen de l'homotopie rationnelle (10.6).

10.1. - Catégorie relative et catégorie d'une application.

Soit $\{A_i\}$ une suite de sous-espaces de X. Notons $T^{n+1}(X,\{A_i\})$ le bouquet garni relatif :

$$T^{n+1}(X,\{A_i\}) = \bigcup_{p=0}^{n} \prod^{p}(X) \times A_{p+1} \times \prod^{n-p}(X).$$

Si Y est un sous-espace de X, nous noterons $T^n(X,Y)$ le bouquet garni $T^n(X,\{A_i\})$ avec $A_i = Y$ pour chaque i.

Définition 1. $\mathrm{cat}(X,\{A_i\}) \leq n$ *si et seulement si l'application diagonale* $\Delta_X^{n+1} : X \to \prod^{n+1} X$ *se factorise à homotopie près par* $T^{n+1}(X,\{A_i\})$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_X^{n+1}"'] & T^{n+1}(X,\{A_i\}) \arrow[d] \\ & \prod^{n+1}(X) \end{tikzcd}$$

La catégorie d'une application $f : X \to Y$ est une notion introduite par Berstein et Ganea ([12]). Elle est définie comme suit :

Définition 2. $\mathrm{cat}\, f \leq n$ *si et seulement si il existe une application* $g : X \to T^{n+1}(Y)$ *rendant commutatif à homotopie près le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & T^{n+1}(Y) \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_Y^{n+1}"] & \prod^{n+1}(Y) \end{tikzcd}$$

Il résulte immédiatement de la définition que $\mathrm{cat}\, f \leq \mathrm{cat}\, X$ et $\mathrm{cat}\, f \leq \mathrm{cat}\, Y$.

Définition 3. *Si Y est un sous-espace de X, la catégorie relative* $\mathrm{cat}(X,Y)$ *est définie par* $\mathrm{cat}(X,Y) = \mathrm{cat}(X,\{A_i\})$ *avec $A_i = Y$ pour chaque i. En d'autres mots,* $\mathrm{cat}(X,Y)$ *est le plus petit entier n tel qu'il existe une application continue g rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\Delta_X^{n+1}"'] & T^{n+1}(X,Y) \arrow[d] \\ & \prod^{n+1}(X) \end{tikzcd}$$

De façon évidente, si $Z \subset Y$, alors $\mathrm{cat}(X,Y) \leq \mathrm{cat}(X,Z)$. En particulier, $\mathrm{cat}(X,Y) \leq \mathrm{cat}(X,\{*\}) = \mathrm{cat}(X)$.

Proposition 10.1.1. *Soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration, alors* $\mathrm{cat}\, p = \mathrm{cat}(E,F)$.

■ Ceci résulte directement du carré fibré

$$\begin{tikzcd} T^{n+1}(E,F) \arrow[r] \arrow[d] & \prod^{n+1}(E) \arrow[d, "\prod^{n+1}(p)"] \\ T^{n+1}(B) \arrow[r] & \prod^{n+1}(B) \end{tikzcd}$$

■

$\mathrm{cat}(X,Y)$ peut se définir en termes de recouvrements. En fait, la même démonstration que dans le cas absolu ([69]) donne :

Proposition 10.1.2. *Soit X un espace normal et Y un sous-espace fermé, rétract par déformation de l'un de ses voisinages.* $\mathrm{cat}(X,Y) \leq n$ *si et seulement si X admet un recouvrement ouvert $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ tel que les injections $U_i \xrightarrow{j_i} X$ se factorisent à homotopie près par Y.*

Comme dans le cas absolu, une première approximation de $\mathrm{cat}(X,Y)$ est fournie par la cohomologie. Notons K le noyau du morphisme de restriction $H^*(X;A) \to H^*(Y;A)$, alors :

Proposition 10.1.3. Nil $K \leq \mathrm{cat}(X,Y)$.

Définition 4. *Si $p : E \to B$ est une fibration, on pose :* $\mathrm{secat}(p) \leq n$ *si et seulement si B admet un recouvrement ouvert $U_1, \ldots, U_{n+1}$ tel que p admette une section σ_i sur chaque U_i.*

Si $Y \xrightarrow{i} X$ désigne l'inclusion d'un sous c.w. complexe et si $p : E \to X$ désigne la fibration homotopique associée, alors il existe des équivalences d'homotopie φ et ψ rendant commutatif à homotopie près le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "i"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & \\ E \arrow[u, shift right, "\psi"'] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

on a alors :

Proposition 10.1.4. $\mathrm{cat}(X, Y) = \mathrm{secat}(\mathrm{p})$.

■ Soit $(U_1, \ldots, U_{n+1})$ un recouvrement ouvert de X muni d'homotopies $H_i : U_i \times [0,1] \to X$ avec $H_i(u,0) = u$ et $H_i(u,1) \in Y$. Comme $p\varphi H_i(\bullet,1) \sim iH_i(\bullet,1) \sim H_i(\bullet,0)$, $\varphi H_i(\bullet,1)$ est une section homotopique de p sur U_i.

Inversement si $(U_1, \ldots, U_{n+1})$ est un recouvrement ouvert muni de sections homotopiques $\sigma_i : U_i \to E$, alors $1_{U_i} \sim p\sigma_i \sim i\psi\sigma_i$.

1_{U_i} est donc homotope à une application continue se factorisant par Y. ■

Corollaire. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E$ une fibration, alors*

$$\mathrm{secat}\ i = \mathrm{cat}(E, F) = \mathrm{cat}\, p\ .$$

10.2. - G-catégorie d'une application et G-catégorie relative.

Soit $g : E \to B$ une application continue entre espaces pointés. Dans ([64]), K. Hardie introduit la notion de catégorie de Ganea, G-catégorie, d'une application.

Définition 1. $G\mathrm{cat}(g) \leq n$ *si et seulement si il existe une application continue φ rendant commutatif à homotopie près le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\Delta_g"'] & (* \times \Pi^n(E)) \cup (B \times T^n(E)) \arrow[d] \\ & B \times \Pi^n(E) \end{tikzcd}$$

avec $\Delta_g = [g \times \Pi^n(id)] \circ \Delta_E^{n+1}$.

De manière évidente, $\mathrm{cat}(g) \leq G\,\mathrm{cat}(g) \leq \mathrm{cat}(E)$.

Définition 2. *Soit Y un sous-espace de X, la G-catégorie relative, $G\,\mathrm{cat}(X,Y)$ est définie par l'égalité*

$$G\,\mathrm{cat}(X,Y) = \mathrm{cat}(X, \{Y, *, *, \dots, *, \dots\}) .$$

Le lien entre les deux notions est fourni par la proposition :

Proposition 10.2. *Soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration, alors* $G\,\mathrm{cat}(p) = G\,\mathrm{cat}(E,F)$.

■ Ceci résulte immédiatement du carré fibré

$$\begin{array}{ccc} T^{n+1}(E, \{F, *, \dots, *, \dots\}) & \longrightarrow & \prod^{n+1}(E) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle p\times\prod^n(id)} \\ (* \times \prod^n(E)) \cup (B \times T^n(E)) & \longrightarrow & B \times \prod^n(E) \end{array}$$

■

Si M est un A-module, définissons $\mathrm{Nil}_A M$ par :

$$\mathrm{Nil}_A M = \inf\{n \mid a_1 \dots a_n . m = 0,\ \forall m \in M,\ a_i \in A\} .$$

Désignons par K le noyau du morphisme de restriction $H^*(X;A) \to H^*(Y;A)$. On a alors

$$\mathrm{Nil}_{\tilde{H}^*(X;A)} K \leq G\ \mathrm{cat}(X,Y) .$$

10.3. - Catégorie relative et cofibration.

Proposition 10.3. *Soit $A \to X$ une cofibration fermée, alors* $\mathrm{cat}(X/A) \leq \mathrm{cat}(X,A) + 1$.

■ Supposons $\mathrm{cat}(X,A) = n$. L'application composée

$$\Delta : X \xrightarrow{\Delta^{n+1}} \prod^{n+1}(X) \xrightarrow{\Pi^{n+1}(i)} \prod^{n+1}(X \cup_A CA)$$

est homotope à une application continue f vérifiant

$$f(X) \subset T^{n+1}(X \cup_A CA, A) .$$

Notons $\phi_t : X \cup_A CA \to X \cup_A CA$ une homotopie vérifiant $\phi_0 = 1$, $\phi_1(CA) = *$. Δ est alors homotope à $g = (\phi_1)^{n+1} \circ f$ et on a $g(X) \subset T^{n+1}(X \cup_A CA)$.

Etendons l'homotopie $\Delta \sim g$ en une homotopie entre l'application diagonale Δ et une application G

$$G : X \cup_A CA \to \prod^{n+1} (X \cup_A CA) ,$$

vérifiant $G(X) \subset T^{n+1}(X \cup_A CA)$.

L'application diagonale $\Delta^{n+2} : X \cup_A CA \to \prod^{n+2}(X \cup_A CA)$ est alors homotope à $G \times \phi_1$ et se factorise à travers $T^{n+2}(X \cup_A CA)$. En conséquence,

$$\mathrm{cat}(X/A) = \mathrm{cat}(X \cup_A CA) \leq \mathrm{cat}(X, A) + 1 \ . \qquad \blacksquare$$

10.4. - Catégorie relative et fibration.

10.4.1. Proposition. *Soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration, alors*

$$\mathrm{cat}\, B \leq (\mathrm{cat}\, p + 1)\, (\mathrm{secat} p + 1) - 1 \ .$$

■ Soit (U_i) un recouvrement ouvert de B muni de sections $\sigma_i : U_i \to E$ et soit (V_j) un recouvrement ouvert de E formé d'ouverts déformables dans F. Dans ce cas, les $\sigma_i^{-1}(V_j)$ sont des ouverts contractiles recouvrant B. En effet, les applications

$$\sigma_i^{-1}(V_j) \times [0,1] \xrightarrow{\sigma_i \times 1} V_j \times [0,1] \xrightarrow{H_j} E \xrightarrow{p} B$$

définissent des homotopies entre l'identité et l'application constante sur le point de base. ■

Corollaire 1. *Si X est un c.w. complexe et $A \xrightarrow{i} X$ un sous c.w. complexe, alors*

$$\mathrm{cat}\, X \leq [\mathrm{cat}(X, A) + 1][\mathrm{cat}\, i + 1] - 1 \ .$$

Corollaire 2 [64]. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration, alors* $\mathrm{cat}\, E + 1 \leq (\mathrm{cat}\, i + 1)(\mathrm{cat}\, p + 1)$.

10.4.2. - Le corollaire 1 admet la variante suivante obtenue en remplaçant cat par $G\,\mathrm{cat}$.

Proposition 10.4.2.(S. Halperin). *Soit X un c.w. complexe et $A \xrightarrow{i} X$ un sous-complexe, alors* $\operatorname{cat} X \leq G\operatorname{cat}(X,A) + \operatorname{cat} i$.

■ Supposons $\operatorname{cat} i = m$ et $G\operatorname{cat}(X,A) = n$. Dans ce cas, $X \xrightarrow{\Delta_X^{n+1}} \Pi^{n+1}X$ est homotope à une application f vérifiant $f(X) \subset (\Pi^n(X) \times A) \cup (T^n(X) \times X)$. D'autre part, $A \xrightarrow{\Delta_A^{m+1}} \Pi^{m+1}(A)$ est homotope à une application $g : A \to T^{m+1}(X)$. Etendons cette dernière homotopie à X : $\Delta_X^{m+1} \simeq G$ avec $G|_A = g$. On a alors

$$\Delta_X^{m+n+1} = \left((id)^n \times \Delta_X^{m+1}\right) \circ \Delta_X^{n+1} \simeq \left((id)^n \times G\right) \circ f \ . \qquad \blacksquare$$

Corollaire. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration avec F, E et B des c.w. complexes connexes pointés, alors*

$$\operatorname{cat} E \leq G\operatorname{cat} p + \operatorname{cat} i \ .$$

La différence entre les propriétés 10.4.1. et 10.4.2. tient son origine dans les inégalités

$$\operatorname{cat}(X,A) \leq G\operatorname{cat}(X,A) \ .$$

$$G\operatorname{cat}(X,A) \leq \operatorname{cat}(X,A) \cdot [\operatorname{cat} A + 1] - 1 \ .$$

10.5. - Joint de fibrations.

10.5.1. - Notons CX le cône sur un espace X. Alors :

Lemme. *Le joint $F_1 * F_2 * \ldots * F_n$ de n espaces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est homéomorphe au sous-espace E de $CF_1 \times \ldots \times CF_n$ formé des n-uples $(y_1, \ldots, y_n)$ avec y_i dans F_i pour au moins une valeur i.*

■ Il suffit de définir des homéomorphismes inverses φ et ψ

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_n \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} E \ ,$$

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^n t_i y_i\Big) = \Big(\big(\frac{t_1}{r}, y_1\big), \ldots, \big(\frac{t_n}{r}, y_n\big)\Big) \ , r = \max\{t_i\} \ ,$$

$$\psi((s_i, y_i)) = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{s_i}{\sum_{j=i}^n s_j}\Big) y_i \ .$$

$$CF = (F \times [0,1]/(F \times \{0\}) \ . \qquad \blacksquare$$

On a donc, en particulier, $*^n E = T^n(CE; E)$.

Définition. *Le bouquet garni* $T(p_1,\ldots,p_n)$ *de* n *fibrations* $F_i \to E_i \xrightarrow{p_i} B_i$ *est la fibration*

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_n \to E^{\;T(p_1,\ldots,p_n)}\, arrow B_1 \times \ldots \times B_n \ ,$$

où E *est défini comme suit :*

Posons $Z_i = \big[(E_i \times [0,1]) \cup B\big]/\{(e_i,0) \sim p_i(e)\}$, *alors* $E = \{(z_1,\ldots,z_n) \in Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_n | z_i \in E_i$ pour au moins une valeur $i\}$.

Le *joint* $p_1 * p_2 * \ldots p_n$ de n fibrations de même base

$$F_i \to E_i \xrightarrow{p_i} B$$

est la fibration

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_n \to E \xrightarrow{p_1 * \ldots * p_n} B \ ,$$

image réciproque de la fibration $T(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ par l'application diagonale Δ : $B \to \Pi^n B$.

10.5.2. - Soient $A_i \xrightarrow{j_i} B_i$, $1 \leq i \leq m$, m cofibrations fermées. Notons $T^m(B_i,A_i)$ le sous-espace de $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$ défini par :

$$T^m(B_i,A_i) = \cup_{i=0}^{m-1}(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_i \times A_{i+1} \times B_{i+2} \times B_{i+3} \times \ldots \times B_m) \, .$$

Notons p_i, $1 \leq i \leq m$, et p les fibrations homotopiques respectivement associées aux inclusions $A_i \hookrightarrow B_i$ et $T^m(B_i,A_i) \hookrightarrow B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$. On a alors :

Proposition 10.5.2. $p \simeq T(p_1,p_2,\ldots,p_m)$.

Corollaire 1. *Soient* $A_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} X$, $i \geq 1$, *des cofibrations fermées et* $p_i : E_i \to X$ *les fibrations homotopiques associées. Alors,* $\mathrm{cat}(X,\{A_i\}) \leq m$ *si et seulement si la fibration* $p_1 * \ldots * p_m$ *admet une section.*

■ Ceci résulte clairement du diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_1 * F_2 * \ldots, * F_m \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & F_1 * F_2 * \ldots * F_m \arrow[d] & \\
E' \arrow[r] \arrow[d, "p_1 * \ldots * p_m"] & E \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "T(p_1,\ldots,p_m)"] & T^m(X,\{A_i\}) \arrow[dl] \\
X \arrow[r, "\Delta_X^m"] & \Pi^m X &
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2. *Soit X un espace topologique pointé. Soit $* \xrightarrow{i_1} A \xrightarrow{i_2} X$ un sous-espace tel que les injections i_1, i_2 soient des cofibrations fermées. Notons $p = EX \to X$ et $g : E \to X$ les fibrations homotopiques respectivement associées à $i_2 i_1$ et i_2, alors :* $\operatorname{cat}(X, A) \leq n$ *si et seulement si* $\overbrace{g * g \ldots * g}^{n+1}$ *admet une section, et* $G\operatorname{cat}(X, A) \leq n$ *si et seulement si* $g * \overbrace{p * \ldots * p}^{n}$ *admet une section.*

10.5.3. - La construction de Ganea relative.

Soit $F \to E \xrightarrow{g} B$ une fibration. Considérons la suite de fibrations $F_m \to E_m \xrightarrow{g_m} B$ définie inductivement par les règles :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "j_1"] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "j_2"] & {} \\
E \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E_1 \arrow[r] \arrow[dl, "g_1"] & E_2 \arrow[r] \arrow[dll, "g_2"] & E_3 \arrow[r] & {} \\
B & & &
\end{tikzcd}$$

1) $F_m \xrightarrow{j_m} E_m$ est la fibre homotopique de g_m.

2) $E_{m+1} = E_m \cup CF_m$.

Dans sa thèse, Gilbert ([50], théorème 2.1) montre que $g_m \simeq g * \overbrace{p * \ldots * p}^{m}$ avec $p = EB \to B$ la fibration des chemins. Il en résulte :

Corollaire. *Soit $* \hookrightarrow A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ des cofibrations fermées. Notons $g : E \to X$ la fibration homotopique associée à i alors* $G\operatorname{cat}(X, A) \leq n$ *si et seulement si g_n admet une section.*

10.6. - Catégorie rationnelle d'une application.

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre c.w. complexes 1-connexes de type fini. On appelle *catégorie rationnelle* $\operatorname{cat}_0(f)$, la catégorie de l'application obtenue en rationalisant les espaces :

$$\operatorname{cat}_0(f) = \operatorname{cat}(f_{\mathbf{Q}}).$$

On a clairement : $\operatorname{cat}_0(f) \leq \operatorname{cat} f$.

Notons $\bar{f} : (\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda T, D)$ le K.S. modèle de f. Alors :

Théorème 10.6. $\mathrm{cat}_0(f) \leq n$ *si et seulement si il existe un morphisme d'a.d.g.c.* ρ *vérifiant* $\rho i = \bar{f}$.

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z, d) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda T, D) \\
(\Lambda Z / \Lambda^{>n} Z, \bar{d}) & (\Lambda Z \otimes \Lambda R, D) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

■ $\mathrm{cat}_0(f) \leq n$ si et seulement si $f_{\mathbf{Q}}$ se factorise à homotopie près par $(E_n(Y))_0$, et ceci est équivalent à une factorisation de $\bar{f}$ par le modèle minimal de $(\Lambda Z / \Lambda^{>n} Z, \bar{d})$ (§4) ce qui entraîne la thèse. ■

Définition. *Nous appellerons* $M\,\mathrm{cat}_0(f)$ *l'entier* n *minimum tel qu'il existe un morphisme de* ΛZ*-modules* ρ *vérifiant* $\rho i = \bar{f}$. *On a :*

$$M\,\mathrm{cat}_0(f) \leq \mathrm{cat}_0(f)\ .$$

11 - PROFONDEUR DES ALGÈBRES DE LIE.

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de profondeur d'une algèbre de Lie L, depth$L$. nous montrons ensuite (th.11.3.1) que si X est un espace 1-connexe de type fini, alors depth$\pi_*(\Omega X)\otimes \mathbf{Q} \leq \mathrm{cat}_0(X)$. Ceci ramène l'étude des espaces de catégorie finie à celle des algèbres de Lie de profondeur finie . Nous étudions ainsi en 11.4. le radical d'une algèbre de Lie de pròfondeur finie et en 11.5. le treillis de ses idéaux.Nous appliquerons ensuite en 11.6. ces résultats au treillis particulier des idéaux de $\pi_*(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}$.

11.1. - Définitions et propriétés.

Soit L une algèbre de Lie graduée, UL son algèbre enveloppante. Nous définissons la globale dimension de L par :

$$gl\mathrm{dim}L = gl\mathrm{dim}UL = sup\{i|\mathrm{Ext}^i_{UL}(\mathbf{Q},\mathbf{Q}) \neq 0\}\ ,$$

et la profondeur de L, depth L, par :

$$\mathrm{depth}L = \mathrm{depth}UL = inf\{i|\mathrm{Ext}^i_{UL}(\mathbf{Q},UL) \neq 0\}\ .$$

Pour tout module M de type fini, on a

$$\mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q},M) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^{UL}(\mathbf{Q},\mathrm{Hom}(M,\mathbf{Q})),\mathbf{Q})\ .$$

depth UL peut donc se calculer par la formule

$$\text{depth UL} = \inf\{i|\mathrm{Tor}^{UL}_i(\mathbf{Q},\mathrm{Hom}(UL,\mathbf{Q})) \neq 0\}\ .$$

Si $\mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q},UL) = 0$, nous dirons que L a une profondeur infinie. Il résulte des définitions que depth$L \leq gl$dim$L$.

Lemme 11.1. *Soit L une algèbre de Lie graduée nilpotente de dimension finie. Notons $n = \sum_{i\geq 0}(-1)^i i\cdot \dim L_i + \dim L_{pair}$ alors*

$$H^{i,j-i}(L,UL) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (i,j) \neq (\dim L_{pair}, n)\ . \\ \mathbf{Q} & \text{si} \quad (i,j) = (\dim L_{pair}, n)\ . \end{cases}$$

■ Si $L = \mathbf{Q}x$ avec x de degré pair, alors $UL = \mathbf{Q}[x]$. Une résolution de $\mathbf{Q}$ comme $\mathbf{Q}[x]$-module est donnée par

$$0 \to \mathbf{Q}[x]\cdot\alpha \xrightarrow{\partial} \mathbf{Q}[x] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q} \to 0, \quad \partial(\alpha) = x.$$

$H^*(L, UL)$ est de dimension 1 et est engendré par l'application θ de bidegré $(1, |x|)$

$$\theta : \mathbf{Q}[x]\alpha \to \mathbf{Q}[x], \quad \theta(\alpha) = 1 .$$

Si $L = \mathbf{Q}x$ avec x de degré impair, alors $UL = \Lambda x$. Une résolution de $\mathbf{Q}$ comme UL-module est donnée par :

$$\dots \Lambda x \cdot \alpha_p \xrightarrow{\partial} \dots \Lambda x \cdot \alpha_2 \xrightarrow{\partial} \Lambda x \cdot \alpha_1 \xrightarrow{\partial} \Lambda x \cdot \alpha_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q} \to 0 ,$$

$\partial(\alpha_p) = x \cdot \alpha_{p-1}, \quad \varepsilon(\alpha_0) = 1$.

$H^*(L, UL)$ est de dimension un et engendré par l'application f de bidegré $(0, -|x|)$. $f : \Lambda x \cdot \alpha_0 \to \Lambda x, \quad f(\alpha_0) = x$.

Si L est de dimension finie supérieure à un, considérons un idéal gradué L' de codimension 1. Par 8.3., la suite spectrale d'Hochschild-Serre fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q}, UL) \cong \mathrm{Ext}_{UL'}(\mathbf{Q}, UL') \otimes \mathrm{Ext}_{U(L/L')}(\mathbf{Q}, U(L/L')) ,$$

ce qui termine la démonstration. ∎

Théorème 11.1.1. *Une algèbre de Lie graduée connexe L est de profondeur zéro si et seulement si elle est abélienne, de dimension finie et concentrée en degrés impairs.*

∎

$$\mathrm{Ext}^0_{UL}(\mathbf{Q}, UL) = \{\alpha \in UL | \forall \beta \in L \quad \beta \cdot \alpha = 0\} .$$

Si UL est de profondeur zéro, il existe un élément $\alpha \in UL$ dans l'annulateur de l'idéal d'augmentation. Considérons le gradué associé à la filtration primitive. Ce gradué est l'algèbre graduée commutative libre sur L, par le théorème de Poincaré-Birkloff-Witt et α reste dans l'annulateur de l'idéal d'augmentation. Ceci n'est possible que si $\dim L < \infty$ et $L = L_{\text{impair}}$ ce qui entraîne le caractère abélien de L. La réciproque se déduit du lemme précédent. ∎

Théorème 11.1.2. *Soit L une algèbre de Lie graduée et I un idéal de L, alors* depthI $\leq$ depthL .

∎ Considérons la suite spectrale d'Hochschild-Serre

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{U(L/I)}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ext}^q_{UI}(\mathbf{Q}, UL)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{UL}(\mathbf{Q}, UL).$$

Comme UL est un UI-module libre, $E_2^{p,q} = 0 \quad q <$ depth$I$. Il en est donc de même pour $E_\infty^{p,q}$. ∎

Théorème 11.1.3. *Si* $L = I \times J$ *alors* depthL = depthI + depthJ .

■ Notons $(M)^v = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Q})$. Comme $UL = UI \otimes UJ$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}^{UL}(\mathbf{Q}, (UL)^v) &\cong \mathrm{Tor}^{UI \otimes UJ}(\mathbf{Q}, (UI)^v \otimes (UJ)^v) \\ &= \mathrm{Tor}^{UI}(\mathbf{Q}, (UI)^v) \otimes \mathrm{Tor}^{UJ}(\mathbf{Q}, (UJ)^v) .\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit. ■

Théorème 11.1.4. *Si I est un idéal de dimension finie dans une algèbre de Lie graduée L, alors*

$$\text{depth } L = \text{depth } L/I + \dim I_{\text{pair}} .$$

■ Par le lemme 11.1., $\mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI)$ est de dimension un et est concentré en degré filtrant $n = \dim I_{\text{pair}}$. Il résulte alors de 8.3. que

$$\mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q}, UL) \cong \mathrm{Ext}_{U(L/I)}(\mathbf{Q}, U(L/I)) \otimes \mathrm{Ext}_{UI}(\mathbf{Q}, UI) .$$ ■

11.2. - Grade d'un module.

Soit M un UL-module gradué : $M = \oplus_{i \geq 0} M_i$. On définit le grade de M par l'égalité :

$$\text{grade}(M) = \inf\{n | \mathrm{Ext}^n_{UL}(M, UL) \neq 0\} .$$

En prenant $M = \mathbf{Q}$ on retrouve depth $(UL) = \text{grade}(\mathbf{Q})$.

Appelons *dimension homologique* d'un UL-module M l'entier $hd(M)$ défini par

$$hd(M) = \sup\{n | \mathrm{Ext}^n_{UL}(M, \mathbf{Q}) \neq 0\} .$$

On a clairement :

$$\text{grade}(M) \leq hd(M) .$$

Proposition 11.2. *Soit L une algèbre de Lie graduée et M un UL-module avec* grade$(L) = m$. *Si N est un $p-syzygy$ de $\mathbf{Q}$, $p \leq m$, alors* $\mathrm{Ext}^q_{UL}(M, N) = 0, \quad q < p$.

■ Si N est un $p - syzygy$, on a une courte suite exacte

$$0 \to N \to UL \otimes V \to N_1 \to 0 ,$$

avec N_1 un $(p-1)-$ *syzygy* . Pour $q<p$, on a donc un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{UL}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^{q-1}_{UL}(M,N_1)\,.$$

En itérant, on obtient

$$\mathrm{Ext}^q_{UL}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^{q-p}_{UL}(M,\mathbf{Q}) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

11.3. - Profondeur et catégorie.

Le but de ce paragraphe est la démonstration des théorèmes suivants :

Théorème 11.3.1.[32] *Soit X un espace 1-connexe de type fini, alors*

(1) $\mathrm{depth} H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) \le \mathrm{cat}_0(X) \le \mathrm{gldim} H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$.

(2) Si $\mathrm{depth} H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = \mathrm{cat}_0(X)$, *alors* $\mathrm{cat}_0(X) = \mathrm{gldim} H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$.

Théorème 11.3.2. [39] *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces 1-connexes de type fini . Notons F la fibre homotopique de f. L'opération d'holonomie munit $H = H_*(F;\mathbf{Q})$ d'une structure de $H_*(\Omega Y;\mathbf{Q})$-module. On a alors :*

(1) $\mathrm{grade}(H) \le M\,\mathrm{cat}_0\, f \le \mathrm{cat}_0\, f$

(2) si $\mathrm{grade}(H) = M\,\mathrm{cat}_0\, f$, *alors* $M\,\mathrm{cat}_0\, f = hd(H_*(F;\mathbf{Q}))$.

Le théorème 11.3.1. est un cas particulier du théorème 11.3.2. Il motive l'étude au paragraphe 11.4. des algèbres de Lie graduées de profondeur finie.

Exemple 1.

Si la dimension de $\pi_*(X)\otimes\mathbf{Q}$ est finie, alors la profondeur de $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est aussi finie et l'on a de plus par 11.1 et 5.6.:

$$\mathrm{depth} H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = \dim \pi_*(X)\otimes\mathbf{Q} \le \mathrm{cat}_0(X).$$

En particulier, si $X = P^m(\mathbf{C})$, $\mathrm{grade}(X) = 1$, et $\mathrm{cat}_0(X) = m$.

Exemple 2. .

Si $X = Y_1 \vee Y_2$,avec Y_1 et Y_2 deux c.w. complexes 1-connexes à cohomologie rationnelle non triviale, alors par 13.2.3., $\mathrm{cat}_0(X) = \max(\mathrm{cat}_0(Y_1),\mathrm{cat}_0(Y_2))$,et

$$\mathrm{depth} H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = 1.$$

Lemme 1. *Soit X un CW-complexe 1-connexe de type fini, alors :*

$$\mathrm{cat}_0(X) \leq gl\mathrm{dim} H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) .$$

■ Si $gl\mathrm{dim} H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) = m$, alors $H^{p,*}_{\mathrm{Lie}}(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}; \mathbf{Q}) = 0$ pour $p > m$. Notons $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X. $(\Lambda Z, d_2)$ est isomorphe à l'algèbre des cochaînes sur $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ (§7.1). Il résulte de l'hypothèse précédente que tout d_2-cocycle dans $\Lambda^p Z$ est un d_2-cobord. Choisissons un supplémentaire S des d_2-cocycles dans $\Lambda^m Z$. Dans ce cas $I = S \oplus \Lambda^{>m} Z$ est un d-idéal différentiel acyclique. L'application quotient

$$\varphi : (\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z / I, \bar{d})$$

est donc un quasi-isomorphisme. Comme $\mathrm{nil}(\Lambda^+ Z/I) \leq m+1$, φ se factorise à travers $\Lambda Z / \Lambda^{>m} Z$. Il résulte alors de 4.3.1 que $\mathrm{cat}_0(X) \leq m$. ■

lemme 2. *(version relative du lemme 1)*

$$M\,\mathrm{cat}_0(f) \leq hd_{H_*(\Omega Y; \mathbf{Q})}(H_*(F; \mathbf{Q})) .$$

■ Si $hd(H_*(F; \mathbf{Q})) = m$, alors (§.8.2.)

$$H^{p,*}_{\mathrm{Lie}}(\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q}; H^*(F; \mathbf{Q})) = H^{p,*}(C^*(\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q};\ H^*(F; \mathbf{Q})) = 0 ,$$

pour $p > m$. Notons $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de Y et $(\Lambda Z \otimes H^*(F; \mathbf{Q}), D)$ un modèle minimal de X comme ΛZ-module. Dans ce cas $(\Lambda Z \otimes H^*(F; \mathbf{Q}), d_2)$ est isomorphe à l'algèbre $C^*(\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q};\ \ H^*(F; \mathbf{Q}))$ (§9). Posons $I = [\Lambda^{>m} Z \otimes H^*(F; \mathbf{Q})] \oplus S$ avec S un supplémentaire des D_2-cocycles dans $\Lambda^m Z \otimes H^*(F; \mathbf{Q})$. I est un D-idéal différentiel acyclique et l'application quotient

$$(\Lambda Z \otimes H^*(F; \mathbf{Q}), D) \xrightarrow{\varphi} ((\Lambda Z \otimes H^*(F; \mathbf{Q}))/I, \bar{D}) ,$$

un quasi-isomorphisme. Comme $\mathrm{nil}(\Lambda^+ Z \otimes H^*(F;\mathbf{Q})/I) \leq m+1$, φ se factorise à travers $(\Lambda Z / \Lambda^{>m} Z) \otimes H^*(F; \mathbf{Q})$. Il résulte alors de la définition de $M\,\mathrm{cat}_0(f)$ (§10.6.) que

$$M\,\mathrm{cat}_0(f) \leq m .$$ ■

Le théorème 11.3.2. sera un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 11.3.3. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces 1-connexes de type fini, de fibre homotopique F. Si grade$(H_*(F;\mathbf{Q})) \geq M\,\mathrm{cat}_0(f)$, alors*

$$M\,\mathrm{cat}_0(f) = hd_{H_*(\Omega Y;\mathbf{Q})}(H_*(F;\mathbf{Q}))\,.$$

Posons $m = M\,\mathrm{cat}_0(f)$ et $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de Y. Considérons la projection

$$p : (\Lambda Z, d_2) \to (\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d}_2)\,,$$

et bigraduons ΛZ par $(\Lambda Z)^{p,q} = (\Lambda^p Z)^{p+q}$. Comme p est un isomorphisme en bidegrés $(r,*)$ avec $r < m$ et est injectif en bidegrés $(m,*)$, il en est de même pour $H(p)$. p admet donc un K.S. modèle bigradué

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z, d_2) \arrow[r, "p"] \arrow[dr] & (\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z, \bar{d}_2) & \\
& (\Lambda Z \otimes \Lambda T, D_2) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r] & (\Lambda T, \bar{D}_2)\,,
\end{tikzcd}$$

avec $T = T^{\geq m,*}$ et D_2 de bidegré $(1,0)$.

Lemme 3. $H^+(\Lambda T, \bar{D}_2) \cong T^{m,*}$.

■ Considérons le K.S. modèle de l'augmentation $(\Lambda Z, d_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}$.

$$(\Lambda Z, d_2) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, d_2) \to (\Lambda \bar{Z}, 0)\,.$$

$\bar{Z}$ est naturellement bigradué avec $\bar{Z}^p = \bar{Z}^{0,p}$. Formons le produit tensoriel

$$(\Lambda Z \otimes \Lambda T \otimes \Lambda \bar{Z}, \tilde{D}) = (\Lambda Z \otimes \Lambda T, D_2) \otimes_{(\Lambda Z, d_2)} (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, d_2)\,.$$

L'augmentation $(\Lambda Z \otimes \Lambda T \otimes \Lambda \bar{Z}, \tilde{D}) \xrightarrow{\varepsilon} (\Lambda T, \bar{D}_2)$ définie par $\varepsilon(Z) = \varepsilon(\bar{Z}) = 0$, $\varepsilon(t) = t$, est un quasi-isomorphisme bigradué. Un autre quasi-isomorphisme est fourni par $\varphi = \psi \otimes 1$

$$(\Lambda Z \otimes \Lambda T \otimes \Lambda \bar{Z}, \tilde{D}) \to \left(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z) \otimes \Lambda \bar{Z}, \tilde{D}\right)\,.$$

Comme $\bar{Z} = \bar{Z}^{0,*}$, cette dernière a.d.g.c. est contenue en bidegrés (p,q), $p \leq m$. Il en résulte que $H(\Lambda T, \bar{D}) = H^{\leq m,*}(\Lambda T, \bar{D})$. Comme $T = T^{\geq m,*}$, on en déduit le résultat. ■

Une démonstration (standard), par récurrence sur une K.S. base de ΛT, permet d'affirmer :

Lemme 4. *a) Il existe une différentielle D sur $\Lambda Z \otimes \Lambda T$ vérifiant $(D - D_2)(T^{p,*}) \subset (\Lambda Z \otimes \Lambda T)^{\geq p+2,*}$ et $d\varphi = \varphi D$.*

b) Posons $T' = \mathbf{Q} \oplus T^{m,*}$. Le sous-espace $\Lambda Z \otimes T'$ est stable pour D et l'injection

$$\theta : (\Lambda Z \otimes T', D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda T, D)$$

est un quasi-isomorphisme de ΛZ-modules.

Notons $\bar{f} : (\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes H, D)$ un modèle minimal de f comme ΛZ-modules : $H \cong H^*(F; \mathbf{Q})$. Comme $M\,\mathrm{cat}_0(f) \leq m$, $\bar{f}$ se factorise par $(\Lambda Z \otimes T', D)$ comme morphisme de ΛZ-modules :

$$\begin{tikzcd} (\Lambda Z, d) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr] & (\Lambda Z \otimes H, D) \\ & (\Lambda Z \otimes T', D) . \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

Lemme 5. *Si grade $H_*(F; \mathbf{Q}) \geq M\,\mathrm{cat}_0(f)$, nous pouvons choisir ρ avec $\rho(1 \otimes T^m) \subset \Lambda^{\geq m} Z \otimes H$.*

■ Construisons par récurrence un morphisme ρ_i de ΛZ -modules,

$$\rho_i : (\Lambda Z \otimes T', D) \to (\Lambda Z \otimes H, D) ,$$

vérifiant $\rho_i(z \otimes 1) = z$ et $\rho_i(1 \otimes T^{m,*}) \subset \Lambda^{\geq i} Z \otimes H$.Supposons avoir construit ρ_{i-1}, construisons ρ_i.

ρ_{i-1} se décompose sous la forme $\rho_{i-1} = \alpha + \beta$ avec

$$\alpha(T^{m,*}) \leq \Lambda^{i-1} Z \otimes H \quad \text{et} \quad \beta(T^{m,*}) \subset \Lambda^{\geq i} Z \otimes H .$$

Comme $d_2 \alpha = \alpha D_2$, α est un cocycle dans

$$\mathrm{Hom}^{i-1,1-i}_{(\Lambda Z, d_2)}((\Lambda Z \otimes T^{m,*}, d_2), (\Lambda Z \otimes H, d_2)) .$$

Il définit donc (§8.4) une classe de cohomologie $[\alpha]$ dans

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^{i-1,1-i}_{UL}(T^{m,*}, H) \cong \mathrm{Ext}^{i-1,1-i}_{UL}(\mathbf{Q}, \mathrm{Hom}(T^{m,*}, H)) \\ &\cong \mathrm{Ext}^{i-1,1-i}_{UL}(\mathrm{Hom}(H, \mathbf{Q}), \mathrm{Hom}(T^{m,*}, \mathbf{Q})). \quad [L = \pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q}] . \end{aligned}$$

Notons $W_m \xrightarrow{q_m} Y$ la réalisation géométrique de la projection $p : (\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z/\Lambda^{>m} Z, \bar{d})$. On a alors par 4.2.4. une équivalence d'homotopie

$$W_n \vee S_m \xrightarrow{\cong} E_m \, .$$

où S_m désigne un bouquet de sphères et E_m le $m^{\text{ième}}$ espace de Ganea de Y. En particulier, W_m est un retracte de E_m. Notons G_m la fibre homotopique de q_m : G_m est un retracte de F_m. Comme $\tilde{H}_*(F_m)$ est un $m-syzygy$, on a $\mathrm{Ext}^{p,*}_{UL}(\mathrm{Hom}(H, \mathbf{Q}), \tilde{H}_*(F_m)) = 0$ pour $p < m$ (§11.2.). Par rétraction, on obtient :

$$\mathrm{Ext}^{p,*}_{UL}(\mathrm{Hom}(H, \mathbf{Q}), \tilde{H}_*(G_m)) = 0 \, , \qquad p < m \, .$$

D'autre part, $(\Lambda T, \bar{D})$ est un modèle de G_m. En particulier $\tilde{H}_*(G_m)$ et isomorphe à $\mathrm{Hom}(T^{m,*}, \mathbf{Q})$ comme UL-module. La classe $[\alpha]$ est donc nulle.

Il existe donc une application ΛZ-linéaire $\rho : \Lambda Z \otimes T^{m,*} \to \Lambda Z$ de degré total -1, vérifiant

$$\rho(1 \otimes T^{m,*}) \subset \Lambda^{i-2}(Z) \, ,$$

$$\alpha = d_2 \sigma + \sigma D_2 \, .$$

On pose $\rho_i = \rho_{i-1} - (D\sigma + \sigma D)$. ■

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de la proposition.

Filtrons $\Lambda Z \otimes T'$ et $\Lambda Z \otimes H$ en plaçant Z en filtration 1, T^m en filtration m et H en filtration 0. ρ est un morphisme filtré. $(\Lambda Z \otimes H, D)$ est ainsi un rétracte de $\Lambda Z \otimes T' \otimes H$ dans la catégorie filtrée.

$$(\Lambda Z \otimes H, D) \underset{i}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} (\Lambda Z \otimes H \otimes T', D) \, .$$

on passe au niveau E_2 de la suite spectrale. Le terme de droite $(\Lambda Z \otimes H \otimes T', D)$ est quasi-isomorphe à $(\Lambda Z/\Lambda^{>m} Z \otimes T', D)$ on a donc $H^{>m,*}(\Lambda Z \otimes H, D_2) = 0$. Ce qui entraîne

$$hd_{H_*(\Omega Y;\mathbf{Q})}(H_*(F;\mathbf{Q})) \le m \, .$$ ■

Sous certaines hypothèses, nous pouvons améliorer notre connaissance du cas $\mathrm{grade}(H_*(F;\mathbf{Q})) = M\,\mathrm{cat}_0(f)$:

Proposition 11.3.4. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces 1-connexes de type fini. Notons F la fibre homotopique de f. Supposons que le composé $\pi_*(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{*-1}(F) \xrightarrow{h} H_{*-1}(F; \mathbf{Q})$ soit nul et que* $\mathrm{grade}(H_*(F; \mathbf{Q})) = M\,\mathrm{cat}_0(f)$*, alors on a les égalités :*

$$M\,\mathrm{cat}_0(f) = \mathrm{cat}_0(f) = \mathrm{cat}_0(Y) = hdH_*(F; \mathbf{Q}) = gl\mathrm{dim}H_*(\Omega Y; \mathbf{Q})\,.$$

■ Avec les notations précédentes, la rétraction $\rho : (\Lambda Z \otimes T', D) \to (\Lambda Z \otimes H, D)$ préserve les filtrations. ρ induit donc un morphisme de suites spectrales

$$E_r(\Lambda Z \otimes T') \xrightarrow{E_r(\rho)} E_r(\Lambda Z \otimes H)\,.$$

Calculons $E_2(\Lambda Z \otimes H)$. L'hypothèse introduite montre que $(\Lambda Z \otimes H, d_2)$ est isomorphe à la somme directe de 2 complexes de ΛZ-modules :

$$(\Lambda Z \otimes H, d_2) \cong (\Lambda Z, d_2) \oplus (\Lambda Z \otimes H^+, d_2)\,.$$

Notons $\lambda = \rho i : \Lambda Z \xrightarrow{i} \Lambda Z \otimes T' \xrightarrow{\rho} \Lambda Z \otimes H$ l'injection canonique; $E_2(\lambda)$ est injectif. Il en est de même pour $E_2(i)$. Ceci entraîne $gl\mathrm{dim}H_*(\Omega Y; \mathbf{Q}) \leq m$. ■

11.4. - Radical d'une algèbre de Lie graduée connexe de profondeur finie.

Soit L une algèbre de Lie graduée et I un idéal. On note $I_{[1]} = [I, \bar{I}]$ et $I_{[n]} = [I_{[n-1]}, I_{[n-1]}]$. I est dit *résoluble* d'indice n si $I_{[n-1]} \neq 0$ et $I_{[n]} = 0$.

La réunion d'un nombre fini d'idéaux résolubles est résoluble. Il suffit de vérifier l'inclusion $(I \cup J)_{[2]} \subset I_{[1]} \cup J_{[1]}$. Le résultat s'en déduit.

Définition *On appelle radical d'une algèbre de Lie L,* $\mathrm{rad}L$*, la réunion des idéaux résolubles de L.*

Si L est de dimension infinie, le radical n'est pas nécessairement résoluble. Prenons, par exemple, pour chaque $n \geq 1$, une algèbre de Lie résoluble de dimension finie d'indice n, I_n, alors $L = \oplus_{j \geq 1} I_j$ est une algèbre de Lie non résoluble, mais égale à son radical.

Pareille chose ne peut pas se produire si depthL est fini, c'est ce que nous allons expliquer.

Proposition 11.4.1. *Une algèbre de Lie graduée résoluble L de profondeur finie est de dimension finie.*

■ Nous travaillons par récurrence sur l'indice n de résolubilité de L. L'hypothèse d'induction montre que $L_{[1]}$ est de dimension finie. L contient donc un idéal I abélien de codimension finie.

Si I était de dimension infinie, on aurait pour tout r une décomposition

$$I = I_1 \times \cdots \times I_r \ ,$$

avec I_j abélien et de dimension infinie.

Par le théorème 11.1.1. $\operatorname{depth} I_j \geq 1$. Or

$$\text{(11.1.3.)} \qquad \operatorname{depth} I = \operatorname{depth} I_1 + \operatorname{depth} I_2 + \cdots + \operatorname{depth} I_r \ ,$$

et donc $\operatorname{depth} I \geq r$.

Or $\operatorname{depth} I \leq \operatorname{depth} L$, (11.1.2.), ce qui amène à une contradiction. I doit être de dimension finie.

Théorème 11.4.2. *Soit L une algèbre de Lie graduée avec* $\operatorname{depth} L = m < \infty$*, alors*

(1) $\dim(\mathrm{rad} L)_{\mathrm{pair}} \leq m$.

(2) $\mathrm{rad} L$ *est de dimension finie.*

(3) si $\dim(\mathrm{rad} L)_{\mathrm{pair}} = m$*, alors* $L = \mathrm{rad} L$.

■ (1) si $\dim(\mathrm{rad} L)_{\mathrm{pair}} > m$, alors L contient un nombre fini d'idéaux résolubles dont la somme I vérifie $\dim I_{\mathrm{pair}} > m$. I est aussi résoluble et donc de dimension finie par 11.4.1. on a alors

$$\dim I_{\mathrm{pair}} \underset{11.1}{=} \operatorname{depth} I \underset{11.1.2.}{\leq} \operatorname{depth} L = m \ ,$$

ce qui est absurde.

(2) $\mathrm{rad} L_{\mathrm{pair}}$ est donc de dimension finie. Pour un certain N, $\mathrm{rad} L_{\geq N}$ ne contient plus d'éléments pairs et est abélien. $\mathrm{rad} L$ est donc résoluble et de dimension finie par 11.4.1.

(3) Si $L \neq \text{rad}(L)$, 1.11.4 fournit l'égalité

$$\text{depth}\, L = \text{depth}\,(L/\text{rad}L) + \dim(\text{rad}L)_{\text{pair}}\ .$$

Comme $L/\text{rad}L$ est nécessairement de dimension infinie. On a $\text{depth}\,(L/\text{rad}L) \geq 1$ et $\dim(\text{rad}L)_{\text{pair}} < m$. ■

Corollaire. rad$L$ *est une algèbre de Lie graduée nilpotente d'indice de résolubilité* $\leq 2m$.

Proposition 11.4.3. *Soit L une algèbre de Lie graduée de profondeur finie et I un idéal, alors* $\text{rad}I = \text{rad}L \cap I$.

■ Comme rad$L$ est de dimension finie, on a $\text{rad}L \cap I \subset \text{rad}I$. D'autre part, comme I est de profondeur finie (11.1.2.) rad$I$ est de dimension finie. Pour tout x de L, $\text{rad}I + [x, \text{rad}I]$ est un idéal de I. Comme il est de dimension finie, il est contenu dans rad$I$. On en déduit que rad$I$ est un idéal de L qui est par conséquent contenu dans rad$L$. ■

11.5. - Dimension de Goldie.

Un *treillis* est un ensemble partiellement ordonné L avec un plus petit élément 0 tel que chaque pair a, b de L admet un supremum $a \vee b$ et un infinum $a \wedge b$. Le treillis est dit *modulaire* si pour tout a, b, c de L avec $b \leq a$ on a

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)\ .$$

Définition 1. *Un élément a est dit* uniforme *si* $\forall x, y \in L, \quad 0 < x \leq a$ *et* $0 < y \leq a \Rightarrow x \wedge y \neq 0$.

Définition 2. *Une suite d'éléments* $(a_i | i \in I)$ *est dite* indépendante *si* $\forall i \in I\ , \qquad a_i \wedge (V_{j \neq i} a_j) = 0$.

Définition 3. *Un élément a de L est dit* essentiel *si* $\forall x \neq 0, \quad x \in L\ ,$

$$a \wedge x \neq 0\ .$$

La dimension de Goldie d'un treillis modulaire L est n s'il existe n éléments uniformes indépendants $a_1, \cdots, a_n$ dans L tels que $V_{i=1}^{n} a_i$ soit essentiel dans L ([80]).

Appliquons ces diverses définitions au cas particulier du treillis des idéaux d'une algèbre de Lie graduée de profondeur finie L .

Nous appellerons *décomposition essentiellement simple* la donnée de n idéaux $I_1, \cdots, I_n$ uniformes, indépendants et tels que $V_{i=1}^n I_i$ (ici $= I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$) soit essentielle.

Théorème 11.5. [32] *Soit L une algèbre de Lie graduée de profondeur finie. Notons $K = L/\mathrm{rad}L$, alors K admet une décomposition essentiellement simple. De plus* Goldie $\dim K \leq \operatorname{depth} L$.

Lemme 1 .

$\mathrm{rad}\, K = 0$.

■ (Démonstration du lemme 1.) Comme $\operatorname{depth} L = \operatorname{depth} K + \dim \mathrm{rad}_{\mathrm{pair}}(L)$ [th.11.1.4.], K est de profondeur finie. Si I est un idéal résoluble $\neq 0$ de K, I est de dimension finie et $I \oplus \mathrm{rad}L$ est un idéal résoluble de L contenant strictement $\mathrm{rad}L$, ce qui est absurde. ■

Si L et M sont deux idéaux de K, notons $[L, M]$ l'espace vectoriel engendré par les $[\alpha, \beta], \alpha \in L, \beta \in M$. C'est un idéal de K .

Lemme 2. *Si I et J sont des idéaux essentiellement simples de K, $I \wedge J \neq 0$, alors $I + J$ est un idéal essentiellement simple.*

■ Soient E, F des idéaux non nuls contenus dans $I + J$. Si $[E, I] = 0$ et $[E, J] = 0$, alors $[E, E] = 0$ car $E \subset I + J$. Mais dans ce cas E serait abélien ce qui est impossible par le lemme 1. Supposons donc $[E, I] \neq 0$, $E \cap I$ est donc non nul. Comme I est essentiellement simple

$$E \cap I \cap J = (E \cap I) \cap (I \cap J) \neq 0 \,.$$

La même procédure appliquée à F montre que $F \cap I \cap J \neq 0$. On la réapplique une nouvelle fois à $E \cap I \cap J$ et $F \cap I \cap J$ et on a $E \cap F \cap I \cap J = (E \cap I \cap J) \cap (F \cap I \cap J) \neq 0$, ce qui implique $E \cap F \neq 0$. ■

■ (Démonstration du théorème 11.5.) La réunion d'une suite croissante d'idéaux essentiellement simples est de façon évidente essentiellement simple. Par le lemme de Zorn, K a des idéaux essentiellement simples maximaux différents $I_1, \cdots, I_t, \cdots$.

Par le lemme 2, $I_i \cap I_j \neq 0$, ce qui donne

$$[I_i, I_1 + \cdots + I_{i-1} + I_{i+1} + \cdots + I_t] = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t} [I_i, I_j] = 0 \, .$$

$I_i \cap \big(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t} I_j \big)$ est donc un idéal abélien, nécessairement nul par le lemme 1. Ceci montre que le produit $I = I_1 \times \cdots \times I_t$ est un idéal de K, pour tout t. En particulier (th. 11.1.3.) $t \leq \operatorname{depth} I \leq \operatorname{depth} K$. Ceci montre que K ne possède qu'un nombre fini d'idéaux essentiellement simples. ∎

Exemple : Posons $X = (S^2_a \vee S^2_b) \times (S^2_c \vee S^2_d) \times (S^2_e \vee S^2_f)$. Munissons X de la structure cellulaire produit et notons x la 6-cellule de X image de la 6-cellule de $S^2_a \times S^2_c \times S^2_e$ par l'injection naturelle, ainsi que φ son application d'attachement. Soit alors ω un élément de $\pi_5(S^2_e \vee S^2_f)$ non dans l'idéal engendré par $[S^2_e]$. Posons Y le C.W. complexe obtenu en prenant les mêmes cellules que X avec les mêmes applications d'attachement à l'exception de x pour laquelle la nouvelle application d'attachement est Y possède les propriétés suivantes :

(1) Y n'a pas le type d'homotopie rationnelle du produit de 2 espaces d'homotopie rationnelle non triviale.

(2) $\operatorname{cat} Y = 3$.

(3) $\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{L}(a,b) \oplus \mathbf{L}(c,d) \oplus \mathbf{L}(e,f)$; Goldie $\dim\big(\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q}\big) = 3$.

Conjecture. Toute algèbre de Lie graduée de profondeur finie non résoluble est à croissance exponentielle.

Problème : Si $I_1, \cdots, I_r$ forme une décomposition essentiellement simple d'une algèbre de Lie graduée L de profondeur finie, étudier la croissance de l'algèbre de Lie quotient

$$L/(I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_r) \, .$$

11.6. - Structure de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$.

Si X est un C.W. complexe 1-connexe de catégorie finie, nous avons vu (th. 11.3.) que

$$\operatorname{depth} H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) \leq \operatorname{cat}(X) \, .$$

Les résultats des paragraphes 11.4. et 11.5. s'appliquent donc à l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ associée à un espace X. Notons $\mathrm{Rad}\, X$ le radical de L_X. Alors

Théorème 11.6.1. *(1)* $\mathrm{Rad}\, X$ *est de dimension finie et,*

$$\dim(\mathrm{Rad}\, X)_{\mathrm{pair}} \leq \mathrm{cat}\, X \ .$$

(2) $L_X/(\mathrm{Rad}\, X)$ *admet une décomposition essentiellement simple et,*

$$\text{Goldie} \dim(L_X/(\mathrm{Rad}\, X)) \leq \mathrm{cat}\, X$$

Il en résulte :

Théorème 11.6.2. *Si X est un C.W. complexe 1-connexe de catégorie finie, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) X est elliptique.

(2) $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ est nilpotent.

(3) $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ est résoluble.

Théorème 11.6.3. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} B$ une fibration avec B, E et F 1-connexes de type fini. Supposons* $\mathrm{cat}\, E < \infty$, *alors*

1) la réunion des idéaux résolubles de F est un idéal résoluble $\mathrm{Rad}\, F$.

2) $[\pi_*(\Omega i)]^{-1}(\mathrm{Rad}\, E) = \mathrm{Rad}\, F$.

■ $\mathrm{Ker}\pi_*(\Omega i)$ est un idéal abélien de $\pi_*(\Omega F) \otimes \mathbf{Q}$. i induit un morphisme injectif

$$\bar{i} : L = L_F/\mathrm{Ker}\ \pi_*(\Omega i) \to L_E \ ,$$

dont l'image est l'idéal $\mathrm{Im}\ \pi_*(\Omega i) = \mathrm{Ker}\ \pi_*(\Omega p)$; on a donc depth $L < \infty$ (th. 11.1.2.) et $\dim \mathrm{rad} L < \infty$ (th. 11.4.2.). $\mathrm{rad} L \oplus \mathrm{Ker}\ \pi_*\Omega i$ est alors un idéal résoluble contenant tout autre idéal résoluble. Ceci démontre (1) ainsi que

$$\mathrm{Rad}\, F = \mathrm{rad} L \oplus \mathrm{Ker}\ \pi_*(\Omega i) \ .$$

Il résulte maintenant de la proposition 11.4.3. que

$$\mathrm{rad} L = \bar{i}^{-1}(\mathrm{Rad}\, E), \quad \text{et donc que } \mathrm{Rad}\, F = (\pi_*\Omega i)^{-1}(\mathrm{Rad}\, E) \ . \qquad ■$$

11.6.4. Exemples.

1). Si X est un espace elliptique, alors $L_X = \text{Rad } X$.

2). Soit X un espace formel de cohomologie rationnele isomorphe à l'algèbre $\mathbf{Q}[X_1, .., X_n]/(X_i^2 X_j^2)$, alors la dimension du radical impair est n et la catégorie de l'espace est $n + 2$.

3). Considérons l'espace $X = (S_a^3 \vee S_b^3) \underset{c}{\cup} e^8$, avec $c = [a, [a, b]]$. X est coformel d'algèbre de Lie

$$L_X \cong \mathbf{L}(a, b)/[a, [a, b]].$$

Posons I l'idéal engendré par a.

$$I \cong \mathbf{Q}b \oplus \mathbf{L}(x_n); \qquad x_n = (\text{ad}(b))^n(a), \qquad n \geq 1.$$

Il en résulte que la dimension de Goldie de X est deux.

11.7. - Homologie des fibres de Postnikov (3).

Soit L une algèbre de Lie graduée de dimension finie et M un UL-module gradué, *la dimension de Gelfand-Kirillov de* M est le nombre défini par ([71])

$$GK\dim_L M = \sup_F \overline{\lim} \log_n d_F(n) ,$$

où F parcourt les sous-espaces de dimension finie de M et où $d_F(n)$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $a_1 \cdot a_2 \cdot a_p \cdot f$, $a_i \in L, f \in F, p \leq n$.

Notons E_F le sous-UL-module de M engendré par F et $E_F(n)$ la dimension de la composante de degré n. On a clairement :

$$GK\dim_L M = \sup_F \overline{\lim} \log_n (\sum_{i=1}^{n} E_F(i)) .$$

Le but du présent paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 11.7. *Soit* $F \to E \xrightarrow{p} B$ *une fibration avec* $\dim \pi_*(B) \otimes \mathbf{Q} < \infty$. *Alors* $H_*(F; \mathbf{Q})$ *est un* $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$*-module et*

$$GK\dim H_*(F; \mathbf{Q}) \geq \dim \pi_{\text{impair}}(B) \otimes \mathbf{Q} - \text{cat}_0(E) .$$

■ Si M est un UL-module, alors $GK\dim_L(M) = GK\dim_{L_{\text{pair}}}(M)$ et $\text{grade}_L(M) = \text{grade}_{L_{pair}}(M)$ (lemme 1). De plus $GK\dim_{L_{pair}}(M) + \text{grade}_{L_{\text{pair}}}(M) = \dim_{L_{pair}}$ (version graduée de [13] th. 2.7.). Dans le cas présent, ceci fournit :

$$\begin{aligned} GK\dim H_*(F;\mathbf{Q}) &= \text{depth} H_*(\Omega B;\mathbf{Q}) - \text{grade}_{H_*(\Omega B;\mathbf{Q})} H_*(F;\mathbf{Q}) \\ &\geq \dim \pi_{pair}(B) \otimes \mathbf{Q} - \text{cat}_0(p) \geq \dim \pi_{pair}(B) \otimes \mathbf{Q} - \text{cat}_0(E) . \end{aligned}$$

■

Lemme 1. *Soit L une algèbre de Lie graduée connexe de dimension finie et M un UL-module, alors*

$$\text{Ext}^{i,j}_{UL}(M, UL) \cong \text{Ext}^{i,j+d(L)}_{UL_{pair}}(M, UL_{pair}) .$$

$$\alpha(L) = \sum_{k \text{ impair}} k \dim L_k .$$

En particulier, $\text{grade}_L(M) = \text{grade}_{L_{pair}}(M)$;

■ La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de L. Soit y un élément de L_{impair}, de degré minimal r. Le supplémentaire L_1 de $\mathbf{Q}y$ dans L est un idéal :

$$0 \to L_1 \to L \to \mathbf{Q}y \to 0 .$$

Considérons la suite spectrale d'Hochschild-Serre :

$$\text{Ext}^p_{\mathbf{Q}y}(\mathbf{Q}, \text{Ext}^q_{UL_1}(M, UL)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}_{UL}(M, UL) .$$

$$\begin{aligned} \text{Ext}^q_{UL_1}(M, UL) &\cong \text{Ext}^q_{UL_1}(\mathbf{Q}, \text{Hom}(M, UL_1)) \otimes \Lambda y \\ &\cong \Lambda y \otimes \text{Ext}^q_{UL_1}(\mathbf{Q}, \text{Hom}(M, UL_1)) \end{aligned} \qquad (8.3.3.)$$

$\text{Ext}^q_{UL_1}(M, UL)$ est donc un Λy-module libre. Il s'ensuit que

$$\text{Ext}^{>0}_{\Lambda y}(\mathbf{Q}, \text{Ext}^q_{UL_1}(M, UL)) = 0,$$

et

$$\left[\text{Ext}^0_{\Lambda y}(\mathbf{Q}, \text{Ext}^q_{UL_1}(M, UL_1) \otimes \Lambda y)\right]^r = \text{Ext}^{q,r+|y|}_{UL_1}(M, UL_1) .y .$$ ■

Le grade fournit également une réponse partielle au problème suivant : soit B un espace topologique, donner des conditions sur B pour qu'il existe une fibration $F \to E \xrightarrow{p} B$ avec $\dim H^*(F;\mathbf{Q}) < \infty$ et $\dim H^*(E;\mathbf{Q}) < \infty$.

Une condition nécessaire est la suivante : depth $H_*(\Omega B; \mathbf{Q}) < \infty$. En effet si $\dim H^*(F; \mathbf{Q}) < \infty$, $\mathrm{grade}(H_*(F; \mathbf{Q})) = \mathrm{depth}\, H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$ comme $\mathrm{cat}_0(p) \leq \mathrm{cat}_0(E) < \infty$, on déduit du théorème 11.3.2. que
$\mathrm{depth}\, H_*(\Omega B; \mathbf{Q}) \leq \mathrm{cat}_0(p) < \infty$.

12 - CROISSANCE DES IDÉAUX DE $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$.

Soit X un espace hyperbolique 1-connexe de catégorie finie. Nous voulons montrer ici que $L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ contient de nombreux crochets non nuls. Nous espérons qu'il contient toujours une algèbre de Lie libre à au moins deux générateurs. En 12.1, nous montrons qu'il existe toujours deux éléments α et β dans L_X avec $(ad\alpha)^p(\beta) \neq 0 \quad \forall p$, et en 12.3 nous essayerons de localiser les premiers crochets non nuls. L'énoncé 12.1. est vrai non seulement pour L_X , mais également pour tous ses idéaux I de dimension infinie. A ce propos, nous donnerons en 12.2. des conditions équivalentes à la finitude d'un idéal de L_X. Précisons de suite que les résultats 12.1. et 12.2. sont de nature différente : le premier, contrairement au second , provient d'un résultat analogue sur les algèbres de Lie de profondeur finie. Nous utiliserons ces résultats en 12.4. pour étudier les liens entre e_0 et cat_0.

12.1. - Condition de Engel. Eléments de Engel dans une algèbre de Lie de profondeur finie.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant.

Théorème 12.1. *Soit X un espace hyperbolique 1-connexe de type fini, de catégorie $\leq m$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont m éléments linéairement indépendants de $\pi_{\text{pair}}(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$, il existe un β dans $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ et $i \leq m$ tel que*

$$(ad\alpha_i)^p(\beta) \neq 0 \qquad \forall p .$$

Un élément x d'une algèbre de Lie L est appelé *un élément de Engel* de L si pour tout y de L il existe $p \geq 1$ avec $[\mathrm{ad}(x)]^p(y) = 0$. Le théorème 12.1 résulte alors du théorème suivant :

Théorème 12.1 bis [40]. *Soit L une algèbre de Lie graduée connexe de type fini, de profondeur finie m, alors L a au plus m éléments de Engel, linéairement indépendants et de degrés pairs .*

■ Soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$ r éléments de Engel linéairement indépendants de L, de degrés respectifs $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_r$. Notons W_i un supplémentaire de $(\mathbf{Q}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}x_{i-1} \oplus \mathbf{Q}x_i)_{d_i}$ dans L_{d_i}. Considérons les idéaux V_i et M_i de L définis par

$$V_i = L_{>d_i} \oplus W_i \oplus \mathbf{Q}x_i .$$

$$M_i = L_{>d_i} \oplus W_i \, .$$

Montrons par induction sur i que depth $M_i \leq m - i$. Nous en déduirons $r \leq m$. Par l'hypothèse d'induction, on a depth $M_{i-1} \leq m - i + 1$, et donc par 11.1.2, depth $V_i \leq m - i + 1$. Appliquons la suite spectrale de Hochschild-Serre à la courte suite exacte

$$0 \to M_i \to V_i \to \mathbf{Q}x_i \to 0 \, .$$

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{Q}x_i}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ext}^q_{UM_i}(\mathbf{Q}, UV_i)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{UV_i}(\mathbf{Q}, UV_i) \, .$$

Par hypothése, les termes $E_2^{p,q}$ sont nuls si $q < m - i + 1$. Il suffit de voir que les termes $E_2^{0,q}$ sont nuls pour tout q. L'action de $\mathbf{Q}x_i$ sur $\mathrm{Ext}^q_{UM_i}(\mathbf{Q}, UV_i)$ provient d'une action de $\mathbf{Q}x_i$ sur $C^q(M_i, UV_i)$ définie en 8.3.

$$\begin{aligned} (x_i \cdot f)(sm_1 \wedge \cdots \wedge sm_r) &= x_i \cdot f(sm_1 \wedge \cdots \wedge sm_r) \\ &- \sum_{j=1}^{r} f(sm_1 \wedge \cdots \wedge s[x_i, m_j] \wedge \cdots \wedge sm_r) \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Supposons que f soit un cocycle et que $x_i \cdot f$ soit nul en cohomologie. On a alors $(x_i \cdot f) = dg$. Décomposons f et g sous la forme $f = \sum_{n\geq 0} x_i^n f_n$, $g = \sum_{n \geq 0} x_i^n g_n$, $f_n, g_n \in C(M_i, UM_i)$. Si $\alpha = sm_1 \wedge \cdots \wedge sm_r$, notons $x_i \cdot \alpha = \sum_{j=1}^r sm_1 \wedge \cdots \wedge s[x_i, m_j] \wedge \cdot \wedge sm_r$. Posons

$$g_n'(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{n+j}\left[(\mathrm{ad} x_i)^{j-1}(\alpha)\right] , \qquad \alpha \in \Lambda s M_i \, .$$

L'action étant nilpotente, $g_n'(\alpha)$ est un élément bien défini.

Posons $g' = \sum_{n=0}^{\infty} x_i^n g_n'$. Un simple calcul utilisant (1) montre que $dg' = f$.

Il en résulte que $\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Q}x_i}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ext}^r_{UM_i}(\mathbf{Q}, UV_i)) = 0$ et donc par convergence de la suite spectrale que

$$\text{depth } M_i \leq m - i \, . \qquad \blacksquare$$

Corollaire 1. *Soit L une algèbre de Lie graduée de type fini et de profondeur finie. Si tous les éléments de L sont de Engel, alors L est nilpotente.*

Ce corollaire généralise aux algèbres de Lie infinies le théorème classique de Engel.

Corollaire 2. *Soit X un espace hyperbolique 1-connexe de type fini, de catégorie $\leq m$. Si I est un idéal de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont m éléments linéairement indépendants de I_{pair}, il existe un β dans I et $i \leq m$ tel que*

$$(ad\alpha_i)^p(\beta) \neq 0\,, \qquad \forall p\,.$$

Exemple 1.(D. Anick) : Considérons l'espace

$$X = S^3_a \vee S^3_b \vee S^3_c \underset{w_1}{U} e^8 \underset{w_2}{U} e^8, \quad w_1 = [a,[a,b]], \quad w_2 = [a,[a,c]]\,.$$

alors a agit de façon localement nilpotente sur $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$. a n'appartient cependant pas au radical de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ car l'idéal engendré par a est de dimension infinie.

Exemple 2. Considérons l'espace

$$X = S^3_a \vee S^3_b \underset{w}{U} e^8, \quad w = [a,[a,b]].$$

alors a agit de nouveau de manière localement nilpotente sur $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$.

Exemple 3.([40]) Considrons l'espace X coformel (7.3.) associé à l'algèbre de Lie quotient de l'algèbre de Lie libre engendrée par deux éléments a et b de degré 2 par l'idéal engendré par les relations $[a,[a,[a,b]]]$ et $[b,[b,[a,b]]]$. Tous les éléments de $\pi_{\text{pair}}(X) \otimes \mathbf{Q}$ sont des éléments de Engel. La catégorie de X est donc infinie. Cette algèbre de Lie est apparue la première fois dans un travail de D.Anick ([5]) sur l'irrationnalité de certaines séries de Poincaré d'espaces de lacets.

12.2. - Idéaux nilpotents.

Théorème 12.2. *Soit X un espace 1-connexe de type fini de catégorie $\leq m$ et I un idéal de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) *I est de dimension finie ;*

(2) *I est nilpotent ;*

(3) *I est résoluble ;*

(4) *Toute sous-algèbre de I finiment engendrée est de dimension finie ;*

(5) *Les entiers $k(n) = \sum_{\substack{p=n \\ p\text{pair}}}^{2n-1} dim I_p$ sont bornés.*

Remarque : Comme le théorème 12.1., ceci résulte d'un énoncé similaire sur les algèbres de Lie de profondeur finie.

■ L'équivalence des énoncés 1, 2 et 3 résulte du §11.4. (1) $\Rightarrow$ (4) et (1) $\Rightarrow$ (5) sont évidents.

(4) $\Rightarrow$ (5). Si les entiers $k(n)$ n'étaient pas bornés, on choisirait p avec $k(p) \geq m$. Par 12.1,il existe des élements α et β avec $(ad\alpha)^p(\beta) \neq 0$ $\forall p$. Mais, dans ce cas, α et $[\alpha,\beta]$ engendrent une sous-algèbre de dimension infinie.

(5) $\Rightarrow$ (3). Supposons les entiers $k(n)$ majorés par M et I non résoluble. Dans ce cas, la suite

$$I \supset I_{[1]} \supset I_{[2]} \supset \dots \supset I_{[n]} \supset \dots$$

n'est pas stationnaire. Prenons n et p avec $2^n > 4.2^pM$ et $2^p > 4M + 6$. Comme $I_{[n]} \neq 0$, il existe 2^n éléments dans I, $\alpha_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \neq 0$ indexés par les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ où $\varepsilon_i = 0,1$, ainsi que des éléments $\alpha_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$ vérifiant

$\underline{a}$: $$\alpha_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j} = \left[\alpha_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j,0}\ ,\ \alpha_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j 1}\right]\ .$$

$\underline{b}$: $$[\alpha_0, \beta_0] \neq 0 \text{ dans } I_{[n]}\ .$$

Supposons que $|\alpha_0| \leq |\beta_0|$. Il existe alors un réarrangement $\gamma_1, \dots, \gamma_{2^{n-1}}$ des éléments $\alpha_{0,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n}$ tel que les éléments

$$\overline{\gamma}_j = [\gamma_j, [\gamma_{j-1}[\dots[\gamma_1, \beta]\dots]$$

soient non nuls.

Si au moins $2M + 4$ éléments parmi les γ_i sont de degrés impairs, alors au moins $M + 2$ $\overline{\gamma}_i$ sont de degrés pairs, et au moins $M + 1$ ont un degré vérifiant

$$|\beta| \leq |\overline{\gamma}_j| \leq 2|\beta| - 1\ ,$$

ce qui contredit (5).

Dans le cas contraire, au plus $2M + 3$ éléments extraits des $\alpha_{0\varepsilon_2\dots\varepsilon_n}$ sont de degrés impairs. Considérons les éléments $\alpha_{0,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p}$. Ils sont 2^{p-1}. Comme $2^{p-1} > 2M + 3$, nécessairement l'un d'entre eux est formé à partir d'éléments $\alpha_{0\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p\varepsilon_{p+1}\dots\varepsilon_n}$ pairs. Supposons alors que

$$|\alpha_{0,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p,0}| \leq |\alpha_{0,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p,1}|\ ,$$

et posons $\gamma = \alpha_{0,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p,1}$. Il existe alors une suite de 2^{n-p-1} éléments γ_i de la forme $\alpha_{0,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p,o,\varepsilon_{p+2},\dots,\varepsilon_n}$ telle que les éléments

$$[\gamma_j[\gamma_{j-1}[\dots[\gamma_1, \gamma]\dots]$$

soient non nuls. Pour $j < 2^{n-p-1}$, ces éléments ont un degré pair compris entre $|\gamma|$ et $2|\gamma| - 1$. Comme $2^{n-p-1} - 1 \geq 2M$, on a obtenu une contradiction à (5). ■

12.3. - Détection des crochets de Whitehead.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant ([35]).

Théorème 12.3. *Soit X un c.w. complexe 1-connexe de type fini vérifiant* $\mathrm{cat}(X)\le m$. *Si pour un entier n,* $\dim \pi_{2n}(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}\ge m+1$, *alors* $\pi_p(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$ *contient un crochet de Whitehead pour* $p\le(4n+1)m$.

■ Notons $(\Lambda Z,d)$ le modèle minimal de X. Quitte à quotienter par l'idéal engendré par $Z^{\le 2n}$, nous pouvons supposer que $Z=Z^{>2n}$. Notons $x_1,\dots,x_{m+1}$ $(m+1)$ éléments linéairement indépendants de Z^{2n+1}.

[Ils existent car $\dim\pi_{2n}(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}\ge m+1$] .

Formons l'a.d.g.c. $(\Lambda Z\otimes\Lambda U,D)$ où U est l'espace vectoriel engendré par les éléments u_0 et $u_{r,s}$, $r\ge 1$, $1\le s\le m$, $|u_{r,s}|=m(2n+1)+2n(r+1)$.

$$Du_0=x_1\dots x_{m+1}\ ,$$
$$Du_{r,s}=x_s u_{r-1,s}\ ,\qquad r>0\ .$$

La projection canonique $p:(\Lambda Z,d)\to(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z,\bar d)$ s'étend à $(\Lambda Z\otimes\Lambda U,D)$ en posant $p(u_0)=p(u_{r,s})=0$, $r>0$. Comme $\mathrm{cat}(X)\le m$, $(\Lambda Z,d)$ est un rétracte du modèle minimal de $(\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z,\bar d)$. Il existe donc un morphisme $\rho:(\Lambda Z\otimes\Lambda U,D)\to(\Lambda Z,d)$ étendant l'identité sur ΛZ. Notons $z_0=\rho(u_0)$ et $z_{r,s}=\rho(u_{r,s})$. Supposons que $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$ ne contienne pas de crochet pour $*\le(4n+1)m$, alors $d_2 z_{r,s}=0$ pour $r\le m-1$. Montrons par récurrence sur i que nous pouvons supposer

$$z_{m-1-i,s}\in\Lambda^{\ge i+1}Z\ ,\ 0<i\le m-1\ .$$

Ceci est clairement vrai pour $i=0$. Supposons que cela soit vrai pour un i donné et considérons $z_{m-1-(i+1),s}=z_{m-i,s}$. Décomposons : $z_{m-i,s}=v_s+w_s$, $v_s\in\Lambda^{<i+2}Z$, $w_s\in\Lambda^{\ge i+2}Z$.

Comme $dz_{m-i-1,s}=x_s z_{m-i,s}$, on a

$$x_s v_s=0\ ,$$

et donc $v_s=x_s\cdot v'_s$.

On remplace alors la suite $z_{j,s}$ par la suite $z'_{j,s}$ définie par :

$$z'_{j,s}=z_{j,s}\quad\text{si}\quad 0<j\le m-1\ ,\ j\ne m-i\ ,\ m-i-1\ ;$$
$$z'_{m-i,s}=w_s\ ;$$
$$z'_{m-i-1,s}=z_{m-i-1,s}+dv'_s\ ;$$

et la thèse est satisfaite pour $j = i + 1$. Il en résulte que $z_{1,s} \in \Lambda^{\geq m-1} Z$.

Décomposons z_0 sous la forme $z_0 = v_0 + w_0$ avec $v_0 \in \Lambda^{<m} Z$ et $w_0 \in \Lambda^{\geq m} Z$. On a $dv_0 = x_1, \dots, x_{m+1}$. Comme $d_2 z_{1,s} = 0$, on a $x_s v_0 = 0$, $1 \leq s \leq m$ et donc $v_0 = x_1, \dots, x_m \cdot \alpha$ ce qui est absurde. ■

Remarque : Le théorème 12.3. n'a pas de pendant direct dans les algèbres de Lie graduées de profondeur finie. En effet, soit L_1 une algèbre de Lie abélienne à deux générateurs x et y, avec x de degré pair et y de degré impair, alors (Voir paragraphe 13) l'algèbre de Lie $\mathbf{L}(z, t) * L_1$ est toujours de profondeur un.

12.4. - cat_0 et e_0.

12.4.1. *Construction d'un espace X vérifiant $\mathrm{cat}_0 X = \infty$ et $e_0(X) = 2$. [36].*

L'espace X est obtenu comme réalisation géométrique d'une a.d.g.c. minimale $(\Lambda Z, d)$.

Posons $Z_0 = Z_0^p$ un espace vectoriel de dimension $n \geq 3$ concentré en degré p. On définit inductivement des espaces vectoriels gradués Z_r, $r \geq 0$, et une différentielle d de bidegré $(1, -1)$ sur ΛZ_p^q par :

$$d(Z_0) = 0 \,,$$
$$Z_1^p = (\Lambda^3 Z_0)^{p+1} \,.$$

d est choisi de manière à induire un isomorphisme $Z_1^p \to (\Lambda^3 Z_0)^{p+1}$.

Supposons avoir défini $\Lambda(Z_{\leq r}, d)$. Comme $d : Z_r^p \to (\Lambda^3 Z)_{r-1}^{p+1}$, la longueur des mots dans $\Lambda Z_{\leq r}$ munit $H(\Lambda Z_{\leq r}, d)$ d'une troisième graduation

$$H_s^p(\Lambda(Z_{\leq r}), d) = \oplus_{q \geq 0} H_s^{q, p-q}(\Lambda(Z_{\leq r}), d) \,.$$

Z_{r+1} et $d : Z_{r+1} \to (\Lambda^3(Z_{\leq r}))_r$ sont alors choisis de telle manière que d induise un isomorphisme

$$Z_{r+1}^p \xrightarrow{d} H_r^{3, p-2}(\Lambda(Z_{\leq r}), d) \,.$$

On pose finalement $Z = \bigcup_{r \geq 0} Z_r$. Ceci fournit une a.d.g.c. à différentielle purement cubique $(\Lambda Z, d)$. On note X la réalisation géométrique de $(\Lambda Z, d)$.

Théorème. $\mathrm{cat}_0 X = \infty$ *et* $e_0(X) = 2$.

■ (1) $e_0(X) = 2$. On a par l'hypothèse $H^{3,*}(\Lambda Z, d) = 0$. Il reste à montrer que $H^{p,*}(\Lambda Z, d) = 0$, $p \geq 4$. Pour ceci, fixons une base $x_1, x_2, \dots$ de Z avec

$|x_i| \le |x_{i+1}|$. Soit $(\Lambda\ _iZ, d)$ l'a.d.g.c. obtenue en quotientant $(\Lambda Z, d)$ par l'idéal $\Lambda^+(x_1, \ldots, x_{i-1})$ et définissons la condition C_j^r par :

$$C_j^r : H^{p,q}(\Lambda\ _jZ, d) = 0 \text{ si } p \ge 3 \text{ et } p+q \le r\ .$$

Montrons

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad C_j^r \Rightarrow C_{j+1}^r\ . \\ &\text{(b)} \qquad (C_j^r, \forall j \ge 2) \Rightarrow C_1^{r+1}\ . \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduira.

(a) $C_j^r \Rightarrow C_{j+1}^r$. Notons d et $\bar d$ les différentielles induites dans $\Lambda\ _jZ$ et $\Lambda\ _{(j+1)}Z$. Si $\varphi \in (\Lambda^p\ _{(j+1)}Z)^s$, $s \le r$, $p \ge 3$ est un $\bar d$-cocycle alors $d\varphi = x_j\Omega$. Il y a deux cas à envisager : si le degré de x_j est pair, la relation $0 = d^2\varphi = x_jd\Omega$ implique $d\Omega = 0$, mais $\Omega \in (\Lambda^{p+1}\ _jZ)^{s-|x_j|+1}$ et en vertu de C_j^r, $\Omega = d\Gamma$ et $d(\varphi - x_j\Gamma) = 0$. Mais $\varphi - x_j\Gamma \in (\Lambda^p\ _jZ)^s$ et une seconde application de C_j^r donne $\varphi - x_j\Gamma = d\psi$ d'où $\varphi = \bar d\psi$.

Si le degré de x_j est impair, de $d(x_j\Omega) = 0$, on tire $d\Omega = x_j\Omega_1$ et une suite d'éléments de $\Lambda\ _jZ$, $\Omega = \Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_i$ avec $d\Omega_i = x_j\Omega_{i+1}$.

En particulier $|\Omega| > |\Omega_1| > \ldots$ et donc pour un certain i, $\Omega_{i+1} = 0$. Il s'en suit que $d\Omega_i = 0$ d'où (C_j^r), $\Omega_i = d\Gamma_i$ et donc $d(\Omega_{i-1} + x_j\Gamma_i) = 0$. Une nouvelle application de C_j^r donne $\Omega_{i-1} + x_j\Gamma_i = d\Gamma_{i-1}$ et $d(\Omega_{i-2} + x_j\Gamma_{i-1}) = 0$, ainsi de suite. On trouve finalement $d\psi = \varphi + x_j\Gamma_0$, d'où $\varphi = \bar d\psi$.

(b) $(C_j^r, \forall j \ge 2) \Rightarrow C_1^{r+1}$.

Soit $\phi \in (\Lambda^pZ)^{r+1}$ un cocycle, $p \ge 4$. Il faut montrer que ϕ est un cobord. Pour i assez grand, ϕ se projette sur zéro dans $\Lambda\ _iZ$. Il suffit donc de montrer que si ϕ se projette sur un cobord dans $\Lambda\ _{(i+1)}Z$, il se projette sur un cobord dans $\Lambda\ _iZ$. Notons d et $\bar d$ les différentielles dans Λ_iZ et $\Lambda_{(i+1)}Z$ et ψ et ψ' les images de ϕ respectivement dans $\Lambda\ _iZ$ et $\Lambda\ _{(i+1)}Z$. Alors $\psi' = \bar d\Gamma$.

Remplaçons ψ par $\psi - d\Gamma$. On a $\psi = x_i\Omega$.

Si $|x_i|$ est pair, on a alors $d\Omega = 0$. En appliquant C_j^r, on obtient $\Omega = d\Gamma$ et $\psi = d(x_i\Gamma)$.

Si $|x_i|$ est impair, nous trouvons $\Omega = \Omega_0, \Omega_1, \ldots$ avec $d\Omega_k = x_i\Omega_{k-1}$. Pour des raisons de degré, il existe un entier $k+1$ avec $\Omega_{k+1} = 0$. Les Ω_i sont tous de degré $\ge r$, nous concluons par le même raisonnement que $\Omega = d\Gamma + x_i\Gamma'$. Alors

$$\psi = x_i\Omega = -d(x_i\Gamma)\ .$$

(2) $\dim \pi_*(X)\otimes \mathbf{Q} = \infty$.

En effet, autrement (§5), on aurait $\dim \pi_{\text{impair}}(X)\otimes \mathbf{Q} \leq e_0(X) \leq 2$. Or si p est impair, $\dim \pi_{\text{impair}}(X)\otimes \mathbf{Q} \geq \dim Z_0^p \geq 3$. Et si p est pair, on a l'inégalité :$\dim \pi_{\text{impair}}(X)\otimes \mathbf{Q} \geq \dim Z_1 \geq 4$.

(3) $\operatorname{cat}_0 X = \infty$.

Comme $d_2 = 0$, $L_X = \pi_*(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de Lie abélienne. Si la catégorie de X était finie, L_X serait contenue dans son radical et serait de dimension finie (§11.4), ceci est absurde par (2). ∎

Remarque : l'espace X peut être décrit comme suit : notons X_0 un bouquet de n sphères S^p. X_1 désigne la cofibration $X_0 \cup_\varphi \vee_\alpha e_\alpha^{2p}$ où les cellules e_α^{2p} sont introduites pour tuer l'espace vectoriel des crochets de Whitehead $\pi_{2p-1}(X_0)$. Plus généralement, l'espace X est obtenu par induction de telle sorte que l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}$ soit abélienne.

Les Séries.

On vérifie par induction que

$$Z = \oplus_{q\geq 0} Z_q^{p+q(2p-1)} ,$$

$$\tilde{H}^*(\Lambda Z, d) = H_0^p(\Lambda Z, d) \oplus \oplus_{q\geq 0} H_q^{2p+q(2p-1)}(\Lambda Z, d) .$$

Posons $\alpha_q = \dim Z^{p+q(2p-1)}$ et $\beta_q = \dim H^{2p+q(2p-1)}(X;\mathbf{Q})$. En utilisant les séries de Koszul-Poincaré, on obtient l'identité

$$\prod_{q\geq 0}(1-(-1)^p T^{2q+1})^{(-1)^q\alpha_q} = 1 + (\dim H^p)t^p + \sum_{q\geq 0}(-1)^q \beta_q T^{2q+2} .$$

12.4.2. - *Construction d'un espace X_m de catégorie m vérifiant $e_0(X_m) = 2$.*

Dans la construction 12.4.1., fixons $p = 2n+1$, $\dim Z_0^p = m$ et posons X_m le $[(m-1)(4n+1)+1]$-squelette de X dans une décomposition homologique minimale.

Théorème. *Si $m \geq 2$, $\operatorname{cat}_0(X_m) = m$, $e_0(X_m) = 2$.*

∎ La cohomologie réduite de X_m est concentrée en m degrés différents :

$$p, 2p, 2p+(2p-1), 2p+2(2p-1), \ldots, 2p+(m-2)(2p-1) = (4n+1)(m-1)+1 .$$

Il en résulte que $\operatorname{cat}_0(X_m) \leq m$. D'autre part, si $\operatorname{cat}_0(X_m) \leq m-1$, comme $\dim \pi_{2n}(\Omega X_m)\otimes \mathbf{Q} \geq m$, $\pi_p(\Omega X)\otimes \mathbf{Q}$ contriendrait un crochet de Whitehead non nul pour $p \leq (4n+1)(m-1)$ [th. 12.1]. Or, par construction, l'algèbre de Lie est abélienne jusqu'en degré $(m-1)(4n+1)+1$. On a donc $\mathrm{cat}_0(X_m) = m$.

Posons $k = (m-1)(4n+1)+1$ et $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X. Notons I l'idéal $I = (\Lambda Z)^{>k} \oplus S$ avec S un supplémentaire des cocycles dans $(\Lambda Z)^k$. I est un idéal différentiel et l'algèbre quotient $(\Lambda Z/I, \bar{d})$ a même modèle minimal que X_m. Il en résulte clairement que $e_0(X_m) \leq 2$. ■

12.4.3. - *Construction d'espaces Y et Y_m vérifiant en plus depth $H_*(\Omega. ; \mathbf{Q}) = 1$.*

On pose

$$Y = X \vee (S^3 \vee S^3)\,,$$
$$Y_m = X_m \vee (S^3 \vee S^3)\,.$$

Il est clair que $\mathrm{cat}_0(Y) = \infty$, $e_0(Y) = 2$, $\mathrm{cat}_0(Y_m) = m$, $e_0(Y_m) = 2$. Il résultera du §13.2 que depth $H_*(\Omega Y; \mathbf{Q}) =$ depth $H_*(\Omega Y_m; \mathbf{Q}) = 1$.

13 - ALGÈBRES DE LIE DE PROFONDEUR UN.

Dans ce paragraphe, nous restreignons notre étude aux algèbres de Lie de profondeur un et par voie de conséquence aux espace de catégorie inférieure ou égale à deux.

13.1. - Algèbres de Lie de profondeur un.

Proposition 13.1.1. *Soit L une algèbre de Lie non résoluble de profondeur 1. Alors L contient un idéal L_1 de codimension finie telle que pour tout idéal L' de L contenu dans L_1 l'augmentation $\varepsilon : UL' \to \mathbf{Q}$ induise une application non nulle*

$$\mathrm{Ext}^1_{UL'}(\mathbf{Q}, UL') \to \mathrm{Ext}^1_{UL'}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) .$$

■ Considérons les algèbres de Lie quotients $L/L_{>n}$. Si $\dim(L)_{\text{pair}} \leq 1$, alors $L_{>n_0}$ est un idéal abélien et L est résoluble. Il en résulte que pour un certain n_0, $\dim(L/L_{>n_0})_{\text{pair}} \geq 2$. Posons $G = L/L_{>n_0}$, on a donc $\mathrm{Ext}^0_G(\mathbf{Q}, UG) = \mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{Q}, UG) = 0$, (th. 8.3.4).

Par le lemme 1 suivant, il existe n_1 tel que la projection $L \to L/L_{>n_1}$ induise un morphisme non nul

$$\mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL) \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, U(L/L_{>n_1})) .$$

Posons $n \geq \max(n_0, n_1)$ et $G = L/L_{>n}$.

$\mathrm{Ext}^0_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UG) \cong UG$ comme UG-module ; il en résulte que :

$$\mathrm{Ext}^1_{UG}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ext}^0_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UG)) = 0 .$$

La suite spectrale de Hochschild-Serre montre alors que la restriction induit une injection

$$\mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UG) \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Ext}^1_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UG) .$$

Le composé $\alpha_2\alpha_1$ donne ainsi un morphisme α non nul

$$\alpha : \mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL) \to \mathrm{Ext}^1_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UG) .$$

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL) & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UG) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_2} \\
\mathrm{Ext}^1_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UL) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Ext}^1_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UG) .
\end{array}$$

Il en résulte que β est non nul.

Prenons des éléments e_i dans UL représentant une base $\bar{e}_i$ de UG. β a la forme d'un produit d'applications de restriction

$$\prod_i \left[\mathrm{Ext}^1_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, UL_{>n})e_i \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1_{UL_{>n}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})e_i\right] .$$

ω doit donc être non nulle. ∎

Lemme 1. *Soit M un UL-module gradué de type fini borné inférieurement $M = \oplus_{p \geq r} M_p$, alors*

(1) $\mathrm{Ext}^{p,q}_{UL}(\mathbf{Q}, M) \cong \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Tor}^{UL}_{p,q}(\mathbf{Q}, \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Q})), \mathbf{Q}\right)$.

(2) $\mathrm{Ext}^{p,q}_{UL}(\mathbf{Q}, M) \cong \varprojlim_r \mathrm{Ext}^{p,q}_{UL}(\mathbf{Q}, M/M_{>r})$.

∎

(1) M est de type fini et est donc isomorphe à son bidual gradué. Notons $M^v = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Q})$.

Soit $F_\bullet \to \mathbf{Q}$ une résolution projective de $\mathbf{Q}$ comme UL-modules.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^{UL}(\mathbf{Q}, M^v), \mathbf{Q}) &\cong \mathrm{Hom}(H_*(F_\bullet \otimes_{UL} M^v), \mathbf{Q}) \\
&\cong H^*(\mathrm{Hom}(F_\bullet \otimes_{UL} M^v, \mathbf{Q})) = H^*(\mathrm{Hom}_{UL}(F_\bullet, M)) \\
&= \mathrm{Ext}_{UL}(\mathbf{Q}, M) .
\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}^{UL}_{p,q}(\mathbf{Q}, M^v) &\cong \mathrm{Tor}^{UL}_{p,q}\left(\mathbf{Q}, \varinjlim_r (M/M_{>r})^v\right) \\
&\cong \varinjlim_r \mathrm{Tor}^{UL}_{p,q}(\mathbf{Q}, (M/M_{>r})^v) .
\end{aligned}$$

(2) se déduit alors de (1). ∎

Théorème 13.1.2. *Soit L une algèbre de Lie non résoluble de profondeur 1, alors L contient un élément de degré pair x tel que, pour tout autre élément y de L_{pair}, $|y| \geq |x|$, $L \supset \mathbf{L}(x, y)$.*

Remarques.

1) En particulier L contient une algèbre de Lie libre à deux générateurs.

2) La démonstration présentée ici se base sur les démonstrations faites dans [18] et dans [38].

3) Nous osons conjecturer que $L_{>|x|} = \mathbf{L}(x) * L'$, $*$ désignant l'opération produit libre.

■ Par la proposition 13.1.1., L contient un idéal de Lie L_1 de codimension finie telle que la restriction

$$\omega : \mathrm{Ext}^1_{UL_1}(\mathbf{Q}, UL_1) \to \mathrm{Ext}^1_{UL_1}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$$

est non nulle.

Soit $F(*) : \ldots \to \oplus(UL_1)r_j \xrightarrow{\partial} \oplus(UL_1)e_i \xrightarrow{\partial} UL_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}$ une (UL_1)-résolution minimale de $\mathbf{Q}$ avec $\{\partial(e_i)\}$ un système de générateurs de L_1. Désignons par α un élément de $\mathrm{Ext}^1_{UL_1}(\mathbf{Q}, UL_1)$ avec $\omega(\alpha) \neq 0$. α se représente par une application UL_1-linéaire:

$$f : \oplus(UL_1)e_i \to UL_1 \ ,$$

avec $f(e_i)$ un scalaire pour un certain i. Nous pouvons supposer $f(e_1) = 1$.

1er cas. $x_1 = \partial(e_1)$ est de degré pair. Dans ce cas, montrons que pour tout y de $(L_1)_{\text{pair}}$, non multiple de x_1, $L_1 \supset \mathbf{L}(x_1, y)$. En effet, dans le cas contraire, il existe des éléments a et b non nuls de $\mathsf{U}(L_{1\,\text{pair}})$ et une relation $ax_1 + by = 0$.

Appliquons f, on obtient $a = -bf(y)$. En remplaçant a dans l'équation $ax_1 + by = 0$, on obtient

$$b[-f(y)x_1 + y] = 0 \ .$$

b ne pouvant pas être diviseur de zéro [6], on a $y = f(y)x_1$.

y et x_1 étant primitifs, la seule possibilité est que $f(y)$ soit une constante, absurde.

2ème cas. $x_1 = \partial(e_1)$ est de degré impair. Montrons, dans ce cas, que pour tout y de $(L_1)_{\text{pair}}$, non multiple de $[x_1, x_1]$, on a $L \supset \mathbf{L}([x_1, x_1], y)$. Supposons avoir une relation

$$ax_1^2 + by = 0 \quad \text{avec} \quad a, b \in U(L_{1\,\text{pair}}) \ ,$$

on applique f deux foix et l'on obtient

$$a = -bf^2(y) .$$

En remplaçant dans l'équation $ax_1 + by = 0$, on obtient

$$b[-f^2(y)x_1^2 + y] = 0 .$$

Ce qui, comme dans le premier cas, est absurde. ■

13.2. - Bouts d'une algèbre de Lie.

Le nombre de bouts d'une algèbre de Lie L, $e(L)$, est défini par

$$e(L) = \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL) . \qquad ([24])$$

Théorème 13.2.1 (Fel'dman, [24]). *Si* $L = L_{\mathrm{pair}}$, *alors* $e(L) \in \{0, 1, \infty\}$ *et* $e(L) = 1$ *si et seulement si* $\dim L_{\mathrm{pair}} = 1$.

■ Si L est résoluble, le résultat découle du lemme 11.1. Supposons L non résoluble et $e(L) > 0$. La courte suite exacte

$$0 \to U^+L \to UL \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q} \to 0$$

montre que $\mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL)$ est isomorphe à l'espace vectoriel quotient $\mathrm{Hom}_{UL}(U^+L, UL)/UL$ où g dans UL désigne l'application $f_g : U^+L \to UL$ définie par $f_g(x) = xg$.

Munissons UL de la filtration primitive F_p :

$$L = F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$$

Si $y \in UL$, nous appellerons deg y l'entier minimum n tel que $y \in F_n$ et y^* l'élément correspondant de $F_n/F_{n-1} \subset \mathrm{gr}\,(UL)$.

Soit α un élément non nul de $\mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL)$. Cet élément admet diverses représentations par des éléments f dans $\mathrm{Hom}_{UL}(U^+L, UL)$. Si $x \in L$, posons

$$n(x, \alpha) = \min\{\deg f(x) | f \in \alpha\} .$$

$n(x, \alpha) \geq 0$ ssi $f(x) \neq 0$ pour tout f dans α.

Il existe un x avec $n(x,\alpha) \geq 0$. En effet, autrement, il existerait pour chaque x de L un élément α_x dans UL avec

$$f(x) = x\alpha_x \, .$$

Fixons un petit x. On peut supposer $f(x) = 0$. Soit y un élément de L linéairement indépendant de x. Si l'algèbre de Lie engendrée par x et y n'est pas libre, alors il existe a et b dans UL avec $ax + by = 0$. Appliquons f, on obtient

$$by\alpha_y = 0 \, .$$

UL ne contenant pas de diviseur de zéro, on a $\alpha_y = 0$ et $f(y) = 0$.

Si l'algèbre de Lie engendrée par x et y est libre, écrivons

$$f[x,y] = [x,y]\alpha_{[x,y]} \, ,$$

ceci donne $xy(\alpha_y - \alpha_{[x,y]}) = yx\alpha_{[x,y]}$, ce qui fournit $\alpha_{[x,y]} = \alpha_y = 0$ et donc $f(y) = 0$.

Prenons x avec $n(x,\alpha) = p \geq 0$, on a alors $x \not| \, (fx)^*$ dans gr UL, car autrement on aurait $f(x) = x \cdot \lambda + \theta(x)$ avec $\deg \theta(x) = p-1$, ce qui montre que $n(x,\alpha) = p-1$, absurde.

Posons $r = |x|$ et définissons

$$\beta : L_{>r} \;\rightarrow\; \mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}, UL) = Hom_{UL}(U^+L, UL)/UL \, ,$$

par $\beta(y)(z) = f(z) \cdot y$.

β est injectif car autrement il existerait y avec $f(z) \cdot y = z \cdot \alpha$ pour tout z : on considère alors l'équation $f(x)^* \cdot y = x \cdot \alpha^*$ dans gr(UL). Comme $x \not| \, f(x)^*$, on a $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde. ■

Corollaire. *Soit L une algèbre de Lie, $L = L_{\mathrm{pair}}$, $e(L) = \infty$. Si L_1 est un idéal de L, alors $e(L_1) = \infty$.*

■ Par (11.1.2.) depth $L_1 \leq 1$. Il est impossible que $\dim L_1 = 1$, car autrement $L \supset L_1 \times L_1'$ et depth $L \geq 2$ (11.1.3). ■

La détection des algèbres de Lie de profondeur 1 est facilitée par le thèorème suivant.

Théorème 13.2.2 ([24]). *Soit L une algèbre de Lie et L_1 un idéal propre avec $(L/L_1)_{\mathrm{pair}} \neq 0$. Si L_1 est finiment engendrée comme algèbre de Lie, alors* $\mathrm{Ext}^1_{UL}(\mathbf{Q}; UL) = 0$.

Exemple : $L = \mathbb{L}(a,b)/[a,[a,[\dots[a,b]\dots]$, alors $\mathrm{Ext}^1 = 0$, car l'idéal engendré par b est finiment engendré comme algèbre de Lie.

■ Soit $F_\bullet : \dots \to (UL_1)^r_1 \to (UL_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}$ une résolution de $\mathbf{Q}$ comme (UL_1)-modules. Dans ce cas,

$$UL \otimes_{UL_1} F_\bullet : (UL)^r \to UL \xrightarrow{\varepsilon} U(L/L_1)$$

est une résolution de $U(L/L_1)$ par des UL-modules. L'action de $U(L/L_1)$ sur $\mathrm{Ext}^1_{UL_1}(\mathbf{Q}, UL_1)$ provient de l'action de $U(L/L_1)$ sur $UL \otimes_{UL_1} F_\bullet$ (§8.4).

Soit $\bar{q}$ dans $U(L/L_1)$. Choisissons un représentant q de $\bar{q}$ dans UL. Si $f \in \mathrm{Hom}_{UL}(UL, UL)$, alors

$$(q \cdot f)(\alpha) = f(\alpha \cdot q)$$

Si $q \in L$ et $\alpha \in L$, on a donc

$$\begin{aligned}(q \cdot f)(\alpha) = f(\alpha \cdot q) &= (-1)^{|\alpha||q|} f(q \cdot \alpha) + f([\alpha, q]) \\ &= (-1)^{|\alpha||q|} q \cdot f(\alpha) + f([\alpha, q]) \,.\end{aligned}$$

Dans ce cas, on a un isomorphisme de $U(L/L_1)$-modules

$$\mathrm{Ext}^1_{UL_1}(\mathbf{Q}, UL) \cong \mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L, UL)/\mathrm{Hom}_{UL_1}(UL, UL)\,,$$

avec $\forall q \in L/L_1$, $\alpha \in L$ et $f \in \mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L, UL)$

$$(q \cdot f)(\alpha) = (-1)^{|\alpha||q|} q \cdot f(\alpha) + f([\alpha, q])\,.$$

L'injection $U^+L_1 \hookrightarrow U^+L$ fournit un isomorphisme de $U(L/L_1)$-modules

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L, UL)/\mathrm{Hom}_{UL_1}(UL, UL) \xrightarrow{\sim} \\ &\qquad\qquad \mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L_1, UL)/\mathrm{Hom}_{UL_1}(UL_1, UL)\,.\end{aligned}$$

Comme L_1 est finiment engendrée comme algèbre de Lie, U^+L_1 est un UL_1-module finiment engendré. En conséquence,

$$\mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L_1, UL) \underset{U(L/L_1)}{\cong} \mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L_1, UL_1) \otimes U(L/L_1)\,,$$

et, en particulier

$$[\mathrm{Hom}_{UL_1}(U^+L_1, UL)]^{L/L_1} = 0\ . \qquad \blacksquare$$

Théorème 13.2.3. *Si $L = L_1 * L_2$ avec $\dim UL_1 = \infty$, alors $e(L) = \infty$.*

$\blacksquare$ $\mathbf{Q}$ admet une résolution comme UL-module du type suivant :

$$\ldots \to (\oplus ULr_l) \oplus (\oplus ULs_k) \xrightarrow{\partial} (\oplus ULe_i) \oplus (\oplus ULf_s) \xrightarrow{\partial} UL \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}$$

avec $\partial(r_l) \subset (\oplus ULe_i)$ et $\partial(s_k) \subset (\oplus ULf_j)$.

Soit α un élément non nul de UL. Définissons un morphisme

$$g : (\oplus ULe_i) \oplus (\oplus ULf_j) \to UL\ ,$$

en posant $g(e_i) = 0$ et $g(f_j) = \partial(f_j) \cdot \alpha$.

On a clairement $g\partial = 0$. Cependant, g ne peut s'écrire $h\partial$ pour $h : UL \to UL$ car autrement il existerait un élément non nul γ dans UL avec $\partial(e_i) \cdot \gamma = 0$. Ceci est impossible car les seuls éléments de L diviseurs de zéro dans UL sont les éléments x de L_{impair} vérifiant $[x, x] = 0$, ([6]). $\blacksquare$

13.2.4. Exemples d'algèbres de Lie de profondeur un.

1) $L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$, $X = P^\infty(\mathbf{C}) \times (S^3 \vee S^3)$; ceci résulte immédiatement du théorème précédent.

2) $L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$,
$X = (S^3_a \times S^3_b)\#(S^3_c \times S^3_d) \bigcup_{[a,c]} e^6$.
$L = \mathbf{L}(a, b, c, d)/([a, c], [a, b] - [c, d])$.

Une présentation de $\mathbf{Q}$ comme UL-module est, en effet, donnée par

$$0 \to UL\bar{r_1} \oplus UL\bar{r_2} \xrightarrow{\partial} UL\bar{a} \oplus UL\bar{b} \oplus UL\bar{c} \oplus UL\bar{d} \xrightarrow{\partial} UL \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}\ ,$$

$$\partial(\bar{a}) = a\ ,\ \partial(\bar{b}) = b\ ,\ \partial(\bar{c}) = c\ ,\ \partial(\bar{d}) = d\ ,$$

$$\partial(\bar{r_1}) = a\bar{c} - c\bar{a}\ ,\ \partial(\bar{r_2}) = a\bar{b} - b\bar{a} - c\bar{d} + d\bar{c}\ .$$

Un élément non nul de $H^1(L, UL)$ est fourni par l'application

$$\varphi : UL\bar{a} \oplus UL\bar{b} \oplus UL\bar{c} \oplus UL\bar{d} \to UL\ ,$$

$$\varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{c}) = 0\ ,\ \varphi(\bar{d}) = a\ ,\ \varphi(\bar{b}) = c\ .$$

3) Considérons l'espace projectif quotient $\frac{X=P^\infty(\mathbf{C})}{P^n(\mathbf{C})}$. D. Tanré montre dans ([96]) l'existence d'une fibration

$$\vee S^i \to \frac{P^\infty(\mathbf{C})}{P^n(\mathbf{C})} \to P^\infty.$$

Posons $L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$. Il en résulte l'existence d'une suite exacte d'algèbres de Lie

$$\mathbf{L}(x_{n+2}, .., x_{2n+1}) \to L \to (x_{n+1}).$$

Calculons la profondeur au moyen de la suite spectrale d'Hochschild-Serre. Le terme E^2 est donné par :

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{p}}_{\Lambda(\mathrm{x_{n+1}})}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ext}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{T}(\mathrm{x_{n+2}},\ldots,\mathrm{x_{2n+1}})}(\mathbf{Q}, \mathrm{UL}))$$

$$= \mathrm{Ext}^{\mathrm{p}}_{\Lambda(\mathrm{x_{n+1}})}(\mathbf{Q}, \mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{T}(\mathrm{x_{n+2}},\ldots,\mathrm{x_{2n+1}})}(\mathbf{Q}, \mathrm{T}(\mathrm{x_{n+2}}, \ldots, \mathrm{x_{2n+1}})) \otimes \Lambda \mathrm{x_{n+1}}).$$

Par 8.3.3. ceci est nul si p est différent de 0. Il en résulte que X est de profondeur un.

13.3. - Espaces de catégorie deux.

Un espace X de catégorie rationnelle 1 a le type d'homotopie rationnelle d'un co $-$ H-espace (§1) et donc d'un bouquet de sphères. On a donc dans ce cas

$$\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{L}(s\tilde{H}_*(X; \mathbf{Q}))\ .$$

Les espaces de catégorie rationnelle deux forment le premier type d'espaces non triviaux. Par [44], ils admettent une présentation sous forme de cofibre d'une application entre suspensions

$$\Sigma_1 \quad \xrightarrow{f} \Sigma_2 \to \quad X = C_f\ .$$

Notons alors L_X l'algèbre de Lie quotient $\pi_*(\Omega\Sigma_2)/Im\pi_*\Omega f$, on a :

Théorème ([46]). *Si $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} \neq L_X$ alors $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ contient un idéal I_X vérifiant :*

(1) I_X est une algèbre de Lie libre à au moins deux générateurs.

(2) Le quotient $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}/I_X$ est isomorphe à L_X.

Si A est une algèbre graduée, notons $A(t)$ sa série de Hilbert :

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim A_n t^n \ .$$

La série de Poincaré de $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ et la série de Hilbert de UL_X sont alors reliées par la relation

$$H_*(\Omega X;\mathbf{Q})(t)^{-1} = (1+t)(UL_X)(t)^{-1} - t\big(1 - \frac{\tilde{H}_*(\Sigma_1;\mathbf{Q})(t)}{t} + \frac{\tilde{H}_*(\Sigma_2;\mathbf{Q})(t)}{t}\big) \ .$$

Par le théorème 11.3.1., les espaces de catégorie deux se décomposent en deux catégories

1) les espaces X vérifiant depth $H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = 1$ et $gl\dim H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) > 2$.

2) les espaces X vérifiant $gl\dim H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = 2$.

Première espèce : $gl\dim H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) > 2$ et depth $H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = 1$.

Dans ce cas, I_X est une algèbre de Lie libre à au moins deux générateurs ([46]).

Seconde espèce : $gl\dim H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) = 2$.

Dans ce cas, le modèle minimal de X, $\mathcal{M}_X$ est isomorphe à l'algèbre des cochaînes sur $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$.

$$\mathcal{M}_X \xrightarrow{\cong} C^*(\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}) \ .$$

En particulier, $H^*(X;\mathbf{Q}) \cong \mathrm{Ext}^*_{H_*(\Omega X;\mathbf{Q})}(\mathbf{Q},\mathbf{Q})$, on a, d'autre part, un isomorphisme

$$H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) \cong UL_X \ .$$

La structure de $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est régie par le théorème suivant de Bogvad.

Théorème ([16]. *1) A contient une algèbre tensorielle à deux générateurs.*

2) Soit L la sous-algèbre de Lie de $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$ engendrée par deux éléments a et b de degré pair, alors soit L est abélienne, soit UL contient une algèbre tensorielle à deux générateurs.

Corollaire. *Soit X un espace de catégorie rationnelle deux, alors soit X est elliptique, soit $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ contient une algèbre tensorielle à deux générateurs.*

13.4. - Exemples.

Le propos du présent paragraphe est de donner une liste d'espaces intéressant à différents égards.

1) D. Anick [4].

$$X = S^2_a \vee S^2_b \cup_\alpha e^6 \cup_\beta e^6 ,$$

avec $\alpha = [a,[a,[a,b]]]$, $\beta = [b,[b,[a,b]]]$.

- L_X est une algèbre de Lie de dimension r_n en degré n avec $r_n = 2-\cos(n\pi/2)$.
- La série de Poincaré de $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ n'est pas rationnelle.

2) J.M. Lemaire [74].

$$X = (S^3_a \vee S^3_b) \times (S^3_c \vee S^3_d) \vee S^3_e \cup_{\alpha_1} e^6_1 \cup_{\alpha_2} e^6_2 \cup_{\alpha_3} e^6_3 ,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [a,e]-[d,e] , \\ \alpha_2 &= [b,e]-[d,e] , \\ \alpha_3 &= [c,e]-[d,e] . \end{aligned}$$

X est un c.w. complexe fini, mais $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$ n'est pas finiment engendré.

3) C. Löfwall et J.E. Roos ([78]).

$$X = (\vee_{i=1}^5 \quad S^2_i) \cup (\vee_{j=1}^8 \quad e^4_j) .$$

Les applications d'attachement des 8 4-cellules sont respectivement $[a_4,a_4]$, $[a_4,a_2-a_5]$, $[a_4,a_2]-[a_1,a_3]$, $[a_1,a_4]$, $[a_1,a_5]$, $[a_2,a_3]$, $[a_2,a_5]$, $[a_3,a_4]$.

- L'idéal I de L_X engendré par a_4 est abélien et de dimension infinie,

$$I = \oplus_{i\geq 2}\mathbf{Q}e_i \ , \ e_2 = a_4 \ , \ e_n = [a_2, e_{n-1}] .$$

En particulier $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre de Lie abélienne de dimension infinie.

- On a une courte suite exacte

$$0 \to I \to L_X \to \mathbf{L}(a_1,a_2)\oplus\mathbf{L}(a_3,a_5) \to 0 .$$

- La série de Poincaré de $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est non rationnelle.

4) J. Backelin ([10]).

Soit X un espace formel avec une cohomologie rationnelle H vérifiant $H = H^{\text{pair}} = \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]/I$ où I est un idéal engendré par des monômes. Il existe alors des algèbres de Lie $L_1, \ldots, L_p$ et des courtes suites exactes

$$\mathbf{L}(V_1) \to L_1 \to E \ ,$$

$$\mathbf{L}(V_2) \to L_2 \to L_1 \ ,$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{L}(V_p) \to L_p \to L_{p-1} \ ,$$

avec $L_p = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ et E une algèbre de Lie de dimension finie.

5) Goncharova ([52]).

Notons L l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbf{R}$ s'annulant à l'ordre 1 en 0. L admet comme base les vecteurs $e_i = X^{i+1}\frac{d}{dX}$, $i \geq 1$

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j} \ .$$

Plaçons e_i en degré $2i$. L est une algèbre de Lie de présentation finie. $\dim \operatorname{Tor}_i^{UL}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = 2$ pour chaque $i \geq 1$. UL n'est pas rationnelle.

6 D. Anick ([6]) and L. Avramov ([8]).

Anick et Avramov construisent un c.w. complexe 1-connexe X avec 7 cellules de dimension 2 et 11 cellules de dimension 4 tel que $H_*(\Omega X; \mathbf{Z})$ a de la torsion pour chaque nombre premier p. D. Anick montre de plus que cette torsion est dans l'image de l'application de Hurewicz $\pi_*(\Omega X) \to H_*(\Omega X; \mathbf{Z})$.

14 - LA DICHOTOMIE.

14.1. - Enoncé.

Soit X un c.w. complexe 1-connexe de catégorie finie. Les différents résultats obtenus sur la structure de $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ peuvent être résumés dans le théorème suivant. Notons $\rho_i = \dim \pi_i(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ et R_X le rayon de convergence de la série $\sum \rho_i t^i$. Alors :

Théorème. *Il y a 2 possibilités : soit $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i$ est finie (et X est appelé elliptique), soit $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i$ est infinie et, dans ce cas, la suite $\bar{\rho_i} = \sum_{j \leq i} \rho_j$ croît de manière exponentielle (X est alors appelé hyperbolique).*

Les espaces elliptiques et hyperboliques jouissent de propriétés différentes présentées dans le tableau ci-dessous.

Cas elliptique.	Cas hyperbolique.
$\boxed{\text{Croissance des } \bar{\rho}_i}$	
L'espace X est de dimension finie n. $\rho_i = 0 \quad i > 2n-1.$ $\rho_{\text{impair}} \leq \rho_{\text{pair}} \leq \text{cat}(X) \leq n$.	La suite croît de manière exponentielle : $\exists c > 1$ telle que $\forall p \geq 1$ $\sum_{i=1}^{p} \rho_i > c^p$.
$\boxed{\text{Le rayon de convergence } R_X}$	
$R_X \geq 1.$	$R_X < 1.$
$\boxed{\text{Structure d'algèbre de Lie de } \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}}$	
$\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de Lie nilpotente.	• $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ est non résoluble. • Tout idéal résoluble est de dimension finie.

	Conjecture Avramov-Félix : $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$ contient une algèbre de Lie libre à deux générateurs.

$\boxed{\text{Structure de l'algèbre } H_*(\Omega X; \mathbf{Q})}$

$H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ est une algèbre noetherienne.	$H_*(\Omega X; \mathbf{Q})$ n'est jamais noetherienne.

Les espaces elliptiques X jouissent de propriétés plus spécifiques :

1) $\sum_{i=1}^{n} \dim H_i(X; \mathbf{Q}) \leq 2^n$.

2) $\mathcal{X}(X) \geq 0$.

3) $H^*(X; \mathbf{Q})$ est une algèbre à dualité de Poincaré.

Si un espace X de catégorie finie ne vérifie pas l'une de ces propriétés, alors X est nécessairement hyperbolique avec les conséquences que l'on connaît sur ses groupes d'homotopie.

14.2. - Variétés à courbure positive.

Soit M une variété compacte connexe sans bord 1-connexe de dimension n. Soit g une métrique sur M et B_ε la boule euclidienne de rayon ε dans $\mathbf{R}^n$.

M est dit posséder une *courbure sectionnelle positive* si pour tout point m de M il existe $\varepsilon > 0$ et une application différentiable $f : B_\varepsilon \to M$ telle que :

1) f induit un difféomorphisme entre B_ε et la boule de M centrée en m de rayon ε.

2) $\forall x, y \in B_\varepsilon$, $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Les variétés à courbure sectionnelle positive M ont été fortement étudiées. Différents auteurs ont formulé des conjectures à leur sujet.

I - Conjecture de Hopf-Chern:

$\chi(M) \geq 0$ et,

$\chi(M) > 0$ ssi $H^*(M; \mathbf{Q}) = H^{\text{pair}}(M; \mathbf{Q})$.

II - Conjecture de Gromov: $dimH^*(M;\mathbf{Q}) \leq 2^n$.

[Dans [57], Gromov montre l'existence d'une constante $C(n)$ telle que $\dim H^*(M;\mathbf{Q}) < C(n)$].

III - Conjecture de Bott: $\dim \pi_*(M) \otimes \mathbf{Q} < \infty$.

Le théorème de dichotomie relie ces diverses conjectures

$$III \Rightarrow I + II \, .$$

14.3. - Une application géométrique, Le problème des géodésiques fermées.

Quelles sont les variétés riemanniennes M qui possèdent une infinité de géodésiques géométriquement distinctes? En 1969, Gromoll et Meyer réduisent ce problème à un problème de cohomologie.

Théorème [56]. *Si les nombres de Betti de l'espace des lacets libres M^{S^1} ne sont pas bornés, alors M possède une infinité de géodésiques géométriquement distinctes.*

Ce résultat fut utilisé en 1973 par D. Sullivan et M. Vigué-Poirrier. Avec les modèles minimaux, ils démontrèrent :

Théorème [94]. *Soit X un espace 1-connexe de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) La suite $b_i(X^{S^1})$ n'est pas bornée.

2) $\sum_i \dim \pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbf{Q} \geq 2$.

3) $H^*(X;\mathbf{Q})$ ne peut pas être engendré par un seul générateur.

Utilisant le théorème de dichotomie, K. Grove et S. Halperin ont généralisé ce théorème, en 1983, de la manière suivante : soit A une isométrie de M. Une géodésique c sur M est dite A-invariante si $A(c(t)) = c(t+a)$ pour une constante a.

Alors :

Théorème [58]. *Sur une variété riemannienne 1-connexe M vérifiant* $\dim \pi_*(M) \otimes \mathbf{Q} = \infty$, *toute isométrie A a une infinité de géodésiques A-invariantes géométriquement distinctes.*

Remarque : Pour d'autres applications géométriques du théorème de dichotomie, voir [45].

14.4. - Les conjectures de Moore.

Soit X un c.w. complexe fini 1-connexe et p un nombre premier. Si pour un certain k, aucun $\pi_i(X)$ ne contient $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, alors X est dit *avoir un exposant en* p .

X n'a pas d'exposant en p si, pour tout entier k, il existe un i avec $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} \subset \pi_i(X)$.

Les conjectures de Moore s'énoncent alors comme suit :

Conjectures (Moore).

1) Si X est un c.w. complexe fini 1-connexe, alors X est elliptique si et seulement si X a un exposant pour tous les nombres premiers p .

2) Si X est un c.w. complexe fini 1-connexe, alors X est hyperbolique si et seulement, pour chaque premier p, X n'a pas d'exposant en p.

Cette conjecture n'est résolue que pour très peu d'espaces : les sphères, les H-espaces finis, les bouquets de sphères... Pour un survey global, de bonnes références sont [85] et [89].

Pour les espaces elliptiques, un résultat partiel fut fourni par McGibbon et Wilkerson :

Théorème [79]. *Soit X un espace elliptique, alors :*
(1) X a un exposant pour presque tous les nombres premiers p.
(2) Pour presque tout nombre premier p, ΩX est p-équivalent à un produit de sphères et d'espaces de lacets sur des sphères.

Pour les espaces de catégorie 2, un autre résultat partiel fut donné par D. Anick :

Théorème [5]. *Soit X un espace 1-connexe de catégorie rationnelle deux; X est hyperbolique ssi pour presque tous les nombres premiers p, X n'a pas d'exposant en p.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F. ADAMS - *On the cobar construction.* Proc. N.A.S. U.S.A. 42 (1956), 409-412.

[2] J.F. ADAMS et P. HILTON - *On the chain algebra of a loop space.* Comment. Math. Helv. 30 (1955), 305-330.

[3] P. ANDREWS et M. ARKOWITZ - *Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products.* Can. J. of Math. 30-5 (1978), 961-982.

[4] D. ANICK - *The smallest Ω-irrational c.w. complex.* J. of pure and applied algebra 28 (1983), 213-222.

[5] D. ANICK - *Homotopy exponents for spaces of category two.* Preprint (1987).

[6] D. ANICK - *A loop space whose homology has torsion of all orders.* Pacific Journal of Mathematics 123 (1986), 257-262.

[7] M. AUBRY et J.M. LEMAIRE - *Zero divisors in enveloping algebras of graded Lie algebras.* J. of pure and applied algebra 38 (1985), 159-166.

[8] L. AVRAMOV - *Torsion in loop space homology.* Topology 25 (1986), 155-157

[9] I. BABENKO - *On analytical properties of Poincaré series of loop spaces.* Math. Zam 27 (1980), 751-764.

[10] J. BACKELIN - *Monomial ideal residue class rings and iterated Golod maps.* Math. Scand. 53 (1983), 16-24.

[11] H. BAUES et J.M. LEMAIRE - *Minimal models in homotopy theory.* Math. Ann. 225-3 (1977), 219-242.

[12] I. BERSTEIN et T. GANEA - *The category of a map and of a cohomology class.* Fundam. Math. 50 (1961/2), 265-279.

[13] J.E. BJORK - *Rings of differential operators.* North-Holland, vol. 21, (1979).

[14] R. BODY et D. SULLIVAN - *Homotopy types with telescope.* Preprint U.C.S. D. La Jolla, California.

[15] R. BOGVAD - *Some elementary results on the cohomology of graded Lie algebras.* S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), 156-166. Homotopie algebrique et algèbre locale. Luminy (1982).

[16] R. BOGVAD - *The enveloping algebra of a graded Lie algebra of global dimension two contains a free subalgebra on two generators.* J. of pure and applied algebra 38 (1985), 213-216.

[17] R. BOGVAD et S. HALPERIN - *On a conjecture of Roos.* Lecture Notes in Math. 1183 (1985), 120-127. Nordic summer school on relations between algebraic topology and local rings, 1983, Stockholm.

[18] R. BOGVAD et C.JACOBSSON - *Graded Lie algebras of depth one.* Report 3 (1989) department of mathematics,University of Stockholm.

[19] A. BOREL - *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts.* Ann. of Math. 57 (1953), 115-207.

[20] A.K. BOUSFIELD et V.K.A.M. GUGENHEIM - *On P.L. De Rham theory and rational homotopy type.* Memoir of the A.M.S. 179 (1976).

[21 A.K. BOUSFIELD et D.M. KAN - *Homotopy limits, completions and localizations.* Lecture Notes in mathematics n 304 (1972), Springer Verlag.

[22] H. CARTAN - *Cohomologie des $K(\pi, n)$.* Séminaire Cartan 1954/1955, exposés 9 et 10. Paris, (1956).

[23] H. CARTAN - *La transgression dans un groupe de Lie et dans un fibré principal.* Colloque de topologie, Bruxelles (1950).

[24] B. CENKL et R. PORTER - *Malcev's completion of a group and differential forms.* J. of dif. geometry, 15 (1980), 531-542.

[25] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN et D. SULLIVAN - *The real homotopy theory of Kähler manifolds.* Invent. Math. 29 (1975), 245-254.

[26] G.L. FELD'MAN - *Ends of Lie algebras.* Uspekhi Math. Nauk. 38 (1983), 199-200.

[27] Y. FÉLIX - *Caractéristique d'Euler homotopique.* C.R.A.S. Paris 291 (1980).

[28] Y. FÉLIX - *Dénombrement des types de k-homotopie. Théorie de la déformation.* Mémoire de la S.M.F. ,3 (1980).

[29] Y. FÉLIX - *Catégorie L.S. et invariant e.* S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), 179-182. Homotopie algébrique et algèbre locale. Luminy, 1982.

[30] Y. FÉLIX et S. HALPERIN - *Rational L.S. category and its applications.* T.A.M.S. 273 (1982), 1-37.

[31] Y. FÉLIX et S. HALPERIN - *Formal spaces with finite dimension rational homotopy.* T.A.M.S. 270 (1982), 575-588.

[32] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, C. JACOBSON, C. LOFWALL et J.C. THOMAS - *The radical of the homotopy Lie algebra.* Amer. J. of Math. (1988), 301-322.

[33] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.M. LEMAIRE et J.C. THOMAS - *Mod p loop space homology.* Invent. Math. 95 (1989),247-262.

[34] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, D. TANRÉ et J.C. THOMAS - *The radical of* $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$. Lecture Notes in Math. 1183 (1986), 133-135.

[35] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS - *The homotopy Lie algebra for finite complexes.* Publ. I.H.E.S. 56 (1983), 387-410.

[36] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS - *L.S. catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore.* Bull. S.M.F. 111 (1983), 89-96.

[37] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS - *Hopf algebras of polynomial growth.* A paraître Journal of Algebra.

[38] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS - *Loop space homology of spaces of L.S. category one and two.* Preprint.

[39] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS - *The grade of a fibration.* Preprint.

[40] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS - *Engel's elements in the homotopy Lie algebra.* Preprint.

[41] Y. FÉLIX et J.M. LEMAIRE - *On the mapping theorem for L.S. category.* Topology 24 (1985), 41-43.

[42] Y. FÉLIX et J.M. LEMAIRE - *On the mapping theorem for L.S. category II.* A paraître Can J. of Math.

[43] Y. FÉLIX et J.C. THOMAS - *The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces.* Invent. Math. 68 (1982), 257-274.

[44] Y. FÉLIX et J.C. THOMAS - *Sur l'opération d'holonomie rationnelle.* Lecture Notes in Math. 1183 (1986), 136-169.

[45] Y. FÉLIX et J.C. THOMAS - *On the ubiquity of the rational homotopy Lie algebra of a topological space.* Bull Soc. Math. Belgique 38 (1986), 175-190.

[46] Y. FÉLIX et J.C. THOMAS - *Sur la structure des espaces de L.S. catégorie deux.* Illinois J. of Math. 30 (1986), 574-593.

[47] J. FRIEDLANDER et S. HALPERIN -*An arithmetic characterization of the rational homotopy type of certain spaces.* Invent. Math. 53 (1979), 117-138.

[48] T. GANEA - *Lusternik-Schnirelmann category and strong category.* Illinois J. Math. 11 (1967), 417-427.

[49] W. GILBERT - *Some examples for weak category and conilpotency.* Illinois J. Math. 12 (1968), 421-432.

[50] W. GILBERT - *Some problems in algebraic topology on Lusternik-Schnirelmann categories and cocategories.* Thesis (1967), Oxford.

[51] M. GINSBURG - *On the Lusternik-Schnirelmann category.* Ann. Math. 77 (1963), 538-551.

[52] L.V. GONCHAROVA - *Cohomology of Lie algebras of formal vector fields on the line.* Funkt. Anal. 7 (1973), 6-14.

[53] D.H. GOTTLIEB - *Evaluation subgroup of homotopy groups.* Amer. J. Math. 91 (1969), 729-756.

[54] W. GREUB, S. HALPERIN et VANSTONE - *Connections, curvature and cohomology III.* Academic press, New York, (1976).

[55] P.A. GRIFFITHS et J.W. MORGAN - *Rational homotopy theory and differential forms.* Progress in Math. 16, Birkhaüser (1981).

[56] D. GROMOLL et W. MEYER - *Periodic geodesics on compact riemannian manifolds.* J. Diff. Geom. 3 (1969), 493-500.

[57] D. GROMOV - *Curvature, diameter and Betti numbers.* Comment. Math. Helv. 56 (1981), 179-195.

[58] K. GROVE et S. HALPERIN - *Contributions of rational homotopy to global problems in geometry.* Publ. I.H.E.S. 56 (1983), 379-385.

[59] S. HALPERIN - *Finiteness in the minimal models of Sullivan.* T.A.M.S. 230 (1977), 173-199.

[60] S. HALPERIN - *Lectures on minimal models.* Memoire S.M.F. 9-10 (1983).

[61] S. HALPERIN - *Spaces whose rational homology and ψ-homotopy are both finite dimensional.* S.M.F. Asterisque 113-114 (1984), 198-205. Homotopie algébrique et algèbre locale. Luminy, 1982.

[62] S. HALPERIN et G. LEVIN - *High skeleta of c.w. complexes.* Lecture Notes in Math. 1183 (1986), 211-217. Nordic summer school on relations between algebraic topology and local rings, 1983, Stockholm.

[63] S. HALPERIN et J. STASHEFF - *Obstructions to homotopy equivalences.* Advances in Math.32 (1979), 233-279.

[64] K. A. HARDIE - *A note on fibrations and category.* Michigan Math. J. 17 (1970), 351-352.

[65] K.A. HARDIE - *An upper bound for* $\operatorname{cat} E$. Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 395-396.

[66] H.W. HENN - *On almost rational co-H-spaces.* Proc. A.M.S. 87 (1983), 164-168.

[67] P. HILTON, G. MISLIN et J. ROITBERG - *Localization of nilpotent groups and spaces.* Math. studies (North Holland) 15 (1975).

[68] G.P. HOCHSCHILD et J.P. SERRE - *Cohomology of Lie algebras.* Ann. Math. 57, n 3, (1953), 591-603.

[69] I. JAMES - *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann.* Topology 17 (1978), 331-348.

[70] J.L. KOSZUL - *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie.* Bull. S.M.F. 78 (1950), 65-127.

[71] G.R. KRAUSE et T.H. LENAGAN - *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension.* Pitman (1985).

[72] J. LANNES et L. SCHWARTZ - *A propos de conjectures de Serre et Sullivan.* Invent. Math. 83 (1986), 596-603.

[73] D. LEHMANN- *Théorie homotopique des formes différentielles.* S.M.F. Astérisque 45 (1977).

[74] J.M. LEMAIRE - *A finite complex, whose rational homotopy is not finitely generated.* Lecture Notes in Math. 196 (1971), 114-120.

[75] J.M. LEMAIRE - *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets.* Lecture Notes in Math. 422 (1974).

[76] J.M. LEMAIRE - *Lusternik-Schnirelmann category : an introduction.* Lecture Notes in Math. 1183 (1986), 259-276. Nordic summer school on relations between Algebraic topology and local rings, 1983, Stockholm.

[77] J.M. LEMAIRE et F. SIGRIST - *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie.* Comment. Math. Helv. 56 (1981), 103-122.

[78] C. LOFWALL et J.E. ROOS - *Cohomologie des algèbres de Lie graduées et séries de Poincaré-Betti non rationnelles.* Notes C.R.A.S. Paris 290 (1980), 733-736.

[79] C. MACGIBBON et C.W. WILKERSON - *loop spaces of finite complexes at large primes.* Preprint.

[80] H. MATSUMURA - *Commutative algebra.* (1980), Benjamin.

[81] J.W. MILNOR - *Construction of universal bundles II.* Ann of Math. 63 (1956) 430-436.

[82] J.W. MILNOR et J.C. MOORE - *On the structure of Hopf algebras.* Ann. of Math. 81 (1965), 211-264.

[83] C. NASTASESCU et F. VAN OYSTAEYEN - *Dimensions of ring theory.* (1987), Reidel Publishing Company.

[84] J. NEISENDORFER - *Lie algebras, coalgebras and rational homotopy theory for nilpotent spaces.* Pacific Journal of Mathematics 74 (1978), 429-460.

[85] J. NEISENDORFER et P.S. SELICK - *Some examples of spaces with or without exponents.* Can Math. Soc. Conf. Proc. Vol. 2, part. 1 (1982).

[86] D. QUILLEN - *Rational homotopy theory.* Ann. of Math. 90 (1969), 205-295.

[87] J.E. ROOS - *On the use of graded lie algebras in the theory of local rings.* London Math. Soc. Lecture notes series, 72 (1982) 204-230, Cambridge University

Press.

[88] H. SHEERER - *Fibrewise P-universal nilpotent fibration.* Proc. Royal Soc. Edinburgh 98 (1984), 89-104.

[89] P.S. SELICK - *Moore conjectures.* Lecture Notes in Math. 1318 (1988). 219-227.

[90] J.P. SERRE - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of math. 58 (1953), 258-294.

[91] W. SMOKE - *Dimension and multiplicity for graded algebras.* J. of algebra 21, (1972), 149-173.

[92] E.H. SPANIER - *Algebraic topology.* Mac Graw Hill. Academic Press (1966).

[93] D. SULLIVAN - Infinitesimal computations in topology. Publ. I.H.E.S. 47 (1977), 269-331.

[94] D. SULLIVAN et M. VIGUÉ-POIRRIER - The homology theory of the closed geodesic problem. J. of Dif. Geometry 11 (1976), 633-644.

[95] D. TANRÉ - *Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan.* Lecture Notes in Math. 1025 (1983).

[96] D. TANRÉ - *Cohomologie de Harrison et espaces projectifs tronqués.* Journal of Pure and Applied Algebra 38 (1985), 355-366.

[97] R. THOM - Operations en cohomologie réelle. Séminaire Cartan 1955, exposé 17.

[98] G.H. TOOMER - *L.S. category and the Moore spectral sequence.* Math. Z. 138 (1974), 123-143.

[99] G. WHITEHEAD - *The homology suspension.* Colloque de Topologie algébrique. Louvain 1956, 89-95.

[100] O. ZARISKI et P. SAMUEL - *Commutative algebra vol. II.* Graduate texts in mathematics n° 29, Springer Verlag.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

INDEX DES SYMBOLES.

FELIX Yves
Institut Mathématique
Université catholique de Louvain
1348, Louvain – La – Neuve
Belgique.

Summary.

The homotopy groups $\pi_i(X)$ of a 1-connected finite space X are finitely generated abelian groups. They can be written : $\pi_i(X) = \mathbb{Z}^{n_i} + T_i$, where T_i is a finite group. There are then exactly two possibilities, either all the n_i except a finite number are zero, or there is an infinite sequence of nonzero n_i. This naive dichotomy is fundamental and its description is the object of the text.
If a space is elliptic, then its Euler-Poincaré characteristic is non negative and its cohomology satisfies Poincaré duality. Moreover, all the n_i are zero for i greater or equal to two times the dimension of the space.

On the other hand, if X is hyperbolic, then the sequence $\Sigma_{i \leq r} n_i$ has an exponential growth.

The graded rational vector space $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ inherits a natural structure of graded Lie algebra. The fundamental theorem of the texts concerns its structure : In fact, the depth of this Lie algebra is less or equal to the category of the space. This fact leads us in a natural way to the study of graded Lie algebra of finite depth. We prove for instance that these Lie algebras are solvable if and only if they are finite dimensional.