PIERRE DE LA HARPE
ALAIN VALETTE

La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)

Astérisque, tome 175 (1989)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__175__1_0>

175 ASTÉRISQUE

1989

LA PROPRIÉTÉ (T) DE KAZHDAN POUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

Pierre de la HARPE et Alain VALETTE

(avec un appendice de Marc BURGER)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. subjects Classification : 22 D 10

INTRODUCTION

En 1967, D. Kazhdan a ouvert avec sa propriété (T) un nouveau chapitre dans l'étude des groupes localement compacts et de leurs représentations [Kaz].

En avril-mai 1987, le Troisième Cycle Romand de Mathématiques a organisé à Berne un "Séminaire Suisse" sur le sujet du titre. En voici des notes, à quelques compressions et développements près. Nous avons adopté le plan suivant.

Définition de Kazhdan et premières conséquences (chapitre 1).

Exemples (chapitres 2, 3 et 9).

Définitions équivalentes de la propriété (T) (chapitres 4 et 5).

Applications (chapitres 6, 7 et 8).

Liens avec les algèbres d'opérateurs (chapitre 10).

Les participants au séminaire nous ont beaucoup aidé par leurs questions et commentaires. Merci en particulier à N. A'Campo, J-P. Anker, E. Ghys, T. Giordano, E. Granirer, P. Jolissaint. Une mention spéciale pour M. Burger pour ses multiples remarques, pour nous avoir montré l'argument de Furstenberg prouvant que $SL_3(\mathbb{R})$ est un groupe de Kazhdan (théorème 2.4), et pour l'appendice qu'il a bien voulu adjoindre à notre texte.

Nous tenons à exprimer fortement notre gratitude à J-P. Serre. D'abord pour ses exposés sur le sujet qui nous ont beaucoup appris. Ensuite pour une lecture généreuse d'une première rédaction de ce texte, et pour de nombreuses suggestions de corrections et autres améliorations. Enfin et surtout pour des résultats, inédits jusqu'ici, résolvant des problèmes posés dans la première rédaction: ces résultats apparaissent aux numéros 2.11 et suivants, 3.17 et 6.24; les premiers montrent en particulier qu'il existe des groupes de Kazhdan à centres infinis.

Les deux auteurs remercient chaleureusement Mesdames N. Aelst et M. Muller, respectivement du Secrétariat du Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles et de Genève, pour le soin et la patience qu'elles ont consacrés à la frappe des versions successives de notre manuscrit.

Le second auteur bénéficiait durant l'élaboration de ce travail d'un mandat de chargé de recherches au Fonds national belge de la Recherche scientifique.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS ET PREMIÈRES CONSÉQUENCES

Les *groupes localement compacts* qui apparaissent ici sont toujours supposés *à base dénombrable*, c'est-à-dire métrisables et dénombrables à l'infini (voir [BTG], page IX.21); en particulier, les groupes discrets sont ici dénombrables. Les exemples principaux de tels groupes localement compacts sont les groupes de Lie réels avec un nombre fini de composantes connexes, les groupes algébriques sur les corps locaux, et leurs sous-groupes discrets. Rappelons qu'un *corps local* $\mathbb{F}$ est un corps commutatif localement compact non discret; si $\mathbb{F}$ est de caractéristique nulle, on sait que c'est le corps des réels, celui des complexes, ou une extension finie d'un corps p-adique; si $\mathbb{F}$ est de caractéristique non nulle, c'est un corps de séries formelles sur un corps fini (voir [BAC], chap. 6, §9, n°3).

Une *représentation* π d'un groupe localement compact G est ici une représentation fortement *continue* de G par des opérateurs *unitaires* sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{H}_\pi$ si nécessaire. Sauf mention expresse du contraire, les espaces de Hilbert considérés ici sont *complexes* (pourtant, aux chapitres 4 et 5, il est parfois commode d'introduire des espaces réels). Si $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ désigne le groupe des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$, une représentation de G est donc un homomorphisme $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, et la continuité forte de π équivaut à la continuité de l'application $G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ associée.

Rappelons qu'un *vecteur unité* dans $\mathcal{H}$ est un vecteur de norme 1.

1.- Définitions. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation. Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$ et une partie compacte $K \subset G$, on dit qu'un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}$ est (ε, K)-*invariant* si

$$\sup\{\|\pi(g)\xi - \xi\| : g \in K\} < \varepsilon \ .$$

On dit que π *possède presque des vecteurs invariants* si, pour tout (ε, K), il existe un vecteur unité (ε, K)-invariant. On dit enfin que π possède des *vecteurs invariants* non nuls s'il existe $\eta \in \mathcal{H}$ avec $\eta \neq 0$ et $\pi(g)\eta = \eta$ pour tout $g \in G$.

2.- Exemples. La représentation régulière $\lambda_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ de la droite réelle possède presque des vecteurs invariants. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et

$K \subset \mathbb{R}$ une partie compacte. On a $K \subset [-c, c]$ pour c assez grand. Choisissons deux nombres $a < b$ et posons $\xi = (b-a)^{-1/2}\chi$, où χ désigne la fonction caractéristique de $[a, b]$ et où le facteur $(b-a)^{-1/2}$ fait de $\xi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ un vecteur unité. Alors $\|\lambda_{\mathbb{R}}(t)\xi - \xi\|^2 \leq \frac{2c}{b-a}$ dès que $|t| \leq c$, donc ξ est (ε, K)-invariant si $b - a \geq 2c\varepsilon^{-2}$.

En revanche $\lambda_{\mathbb{R}}$ ne possède aucun vecteur invariant non nul. Plus généralement, si la représentation régulière gauche $\lambda_G : G \to \mathcal{U}(\mathcal{L}^2(G))$ d'un groupe localement compact G possède un vecteur invariant non nul, alors G est de mesure de Haar finie, et par suite G est compact ([BI], chap. 7, §1, n°2).

De même, la représentation régulière λ_G d'un groupe infini G du type $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{Z}^n$ possède presque des vecteurs invariants mais ne possède pas de vecteur invariant non nul. Ceci vaut plus généralement pour un groupe G moyennable (par exemple abélien) non compact. En fait, l'une des nombreuses définitions possibles de la moyennabilité de G demande que λ_G possède presque des vecteurs invariants: voir le théorème de A. Hulanicki (théorème 7.1.8 de [Zim]).

3.- Définition [Kaz]. Un groupe localement compact G possède la *propriété* (T), ou est un *groupe de Kazhdan*, si toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls.

4.- Remarque sur les espaces séparables. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation où G est comme plus haut et où $\mathcal{H}$ n'est pas séparable. Pour tout vecteur $\xi \in \mathcal{H}$, le sous-espace fermé $\mathcal{H}_\xi$ de $\mathcal{H}$ engendré par $\pi(G)\xi$ est invariant par G. Comme G est à base dénombrable, $\mathcal{H}_\xi$ est séparable. Une application du lemme de Zorn montre que $\mathcal{H}$ est somme directe (au sens hilbertien) d'une famille de sous-espaces séparables invariants par G.

Il en résulte qu'on ne changerait pas la définition 3 en remplaçant "représentation" par "représentation dans un espace de Hilbert séparable".

5.- Exemples banals. (i) Le groupe $\mathbb{R}$ ne possède pas la propriété (T). Plus généralement, un groupe moyennable non compact ne possède pas la propriété (T).

(ii) Tout groupe compact est un groupe de Kazhdan.

Preuve. L'assertion (i) est une reformulation du numéro 2 ci-dessus.

Pour (ii), considérons un groupe compact G et une représentation $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ qui possède presque des vecteurs invariants. Il existe donc $\xi \in \mathcal{H}$ avec $\|\xi\| = 1$ et

$$\sup\{\|\pi(g)\xi - \xi\| : g \in G\} < 2^{1/2}.$$

Pour $g \in G$, on écrit $\pi(g)\xi = \lambda_g \xi + \eta_g$ où λ_g est un nombre complexe et où η_g est un vecteur perpendiculaire à ξ. Comme π est unitaire $\|\pi(g)\xi - \xi\|^2 = 2(1 - \operatorname{Re}\lambda_g)$, donc $\operatorname{Re}\lambda_g > 0$ par hypothèse. Posons $\eta = \int_G \pi(g)\xi dg$; alors

$$\operatorname{Re}\langle \xi \mid \eta \rangle = \int_G (\operatorname{Re}\lambda_g) dg > 0$$

et en particulier $\eta \neq 0$. Vu l'invariance de la mesure de Haar, le vecteur η est invariant pour π. □

6.- Proposition. Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme continu d'image dense. Si le groupe G possède la propriété (T) alors H la possède aussi.

Preuve. Soit $\pi : H \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation qui possède presque des vecteurs invariants. Alors $\pi\varphi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ en possède aussi. Si G a la propriété T, il existe un vecteur unité de $\mathcal{H}$ invariant par $\pi(\varphi(G))$, donc aussi par $\pi\overline{(\varphi(G))} = \pi(H)$. □

7.- Proposition. Soit G un groupe de Kazhdan.

(i) Tout homomorphisme continu de G dans un groupe moyennable a une image relativement compacte.

(ii) Tout homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$ est banal.

(iii) Le groupe G est unimodulaire.

(iv) Le groupe abélien $G/\overline{(G,G)}$ est compact. En particulier, si G est discret, le groupe $G/(G,G)$ est fini.

Preuve. L'assertion (i) résulte des deux numéros précédents. Les autres assertions sont des cas particuliers de (i). □

8.- Remarques. Concernant l'assertion (ii) de la proposition, R. Alperin a montré que tout homomorphisme d'un groupe de Kazhdan dans $\mathbb{Z}^n$ est continu, donc banal [Alp].

Dans (iv), on désigne par (G,G) le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g,h \in G$, et la barre indique l'adhérence. Il y a des cas où (G,G) est automatiquement fermé: par exemple si G est un groupe de Lie réel connexe et s'il existe un homomorphisme continu injectif de G dans $GL_m(\mathbb{C})$ pour un entier m convenable. En particulier, (G,G) est fermé dans G si G est un groupe de Lie réel connexe qui est soit résoluble et simplement connexe, soit réductif (voir le n°XVIII.4 de [Hoc]). Toutefois, il existe un groupe de Lie réel connexe nilpotent G de dimension 4 dans lequel (G,G) n'est pas fermé (voir [BLi], exercice 6, page 276).

Il résulte de l'assertion (ii) qu'un groupe libre non réduit à un élément n'a pas la propriété (T); un tel groupe est groupe fondamental d'une surface ouverte. De même, il résulte de (ii) que le groupe fondamental d'une surface close orientable de genre $g \geq 1$ (ou non orientable de genre $g \geq 2$) n'a pas la propriété (T), puisque l'abélianisé d'un tel groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$ (ou à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^{g-1}$).

L'assertion (ii) implique en particulier que le groupe de cohomologie $H^1(G,\mathbb{R})$ est réduit à zéro. Il est naturel de demander plus généralement quand $H^i(\Gamma,\mathbb{R}) = 0$, où on écrit provisoirement Γ plutôt que G. Le problème a été étudié par Garland, Casselman, puis Borel et Wallach, lorsque Γ est un sous-groupe discret cocompact irréductible du groupe des $\mathbb{F}$-points d'un groupe algébrique semi-simple G défini sur un corps local non archimédien $\mathbb{F}$: on montre dans ce cas que $H^i(\Gamma,\mathbb{R}) = 0$ pour $i \neq 0,l$, où l est le $\mathbb{F}$-rang de G. Voir [Gar], ainsi que le théorème 2.6 et la proposition 3.7 au chapitre XIII de [BW]. Notons toutefois que la cohomologie ne s'annule pas dans les mêmes dimensions lorsque $\mathbb{F}$ est archimédien: nous donnons au n°3.18 un exemple d'un sous-groupe discret cocompact Γ d'un groupe de Lie simple réel de $\mathbb{R}$-rang strictement supérieur à 2, tel que $H^2(\Gamma,\mathbb{R}) \neq 0$.

9.- Proposition. Soit $1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1$ une suite exacte de groupes localement compacts et homomorphismes continus.

(i) Si G_1 et G_2 sont des groupes de Kazhdan, il en est de même de G.

(ii) Si G est produit direct de G_1 et G_2, alors G est de Kazhdan si et seulement si G_1 et G_2 sont de Kazhdan.

(iii) On suppose les groupes G, G_1 et G_2 discrets. Si G_1 et G_2 ont la propriété qu'aucun de leurs sous-groupes autres que $\{1\}$ n'est un groupe de Kazhdan, alors G a la même propriété.

Preuve. Notons d'abord que le morphisme de G sur G_2 est strict, parce que G est dénombrable à l'infini ([BTG], page IX.55, prop. 6). Il en résulte qu'une représentation de G constante sur G_1 se factorise en une représentation de G_2.

Pour (i), on considère une représentation $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ qui possède presque des vecteurs invariants. Notons $\mathcal{K}$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ des vecteurs invariants par G_1. Comme G_1 est un groupe de Kazhdan, $\mathcal{K}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme G_1 est normal dans G, l'espace $\mathcal{K}$ est invariant par G. Il n'est pas possible que la représentation de G dans l'orthogonal $\mathcal{K}^\perp$ possède presque des vecteurs invariants (sinon il y aurait dans $\mathcal{K}^\perp$ des vecteurs non nuls invariants par G_1, contrairement à la définition de $\mathcal{K}$). Par suite la représentation de G dans $\mathcal{K}$ possède presque des vecteurs invariants. Cette représentation se factorise en une représentation de G_2, qui est un groupe de Kazhdan. Ainsi $\mathcal{K}$ contient des vecteurs invariants par G_2, et donc aussi par G tout entier.

L'assertion (ii) résulte de l'assertion (i) et de la proposition 6.

Enfin, dans les hypothèses de (iii), considérons un sous-groupe H de G. Si l'image de H dans G_2 n'est pas réduite à un élément, la proposition 6 montre que H n'est pas un groupe de Kazhdan. Sinon H est un sous-groupe de G_1, et n'est donc pas non plus de Kazhdan. □

Notons que la réciproque de l'assertion (i) n'est pas vraie, car un sous-groupe fermé normal d'un groupe de Kazhdan n'a pas forcément la propriété (T). Ainsi le produit semi-direct $\mathbb{R}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{R})$ a la propriété (T) — c'est la proposition 2.10 ci-dessous — alors que le groupe abélien non compact $\mathbb{R}^3$ ne l'a pas.

L'assertion (iii) s'applique entre autres aux suites exactes où G_1 et G_2 sont des groupes libres. C'est par exemple ainsi qu'on montre que, pour tout entier $n \geq 1$, le groupe d'Artin des tresses colorées à n brins n'a aucun sous-groupe autre que $\{1\}$ qui ait la propriété (T); ce groupe est en effet une extension successive de groupes libres; voir [GH].

10.- Lemme. Soit G un groupe localement compact.

(i) Pour que G soit à génération compacte, il faut et il suffit que, pour toute suite emboîtée $G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots$ de sous-groupes ouverts de G recouvrant G, on a $G = G_m$ pour m assez grand.

(ii) Si G est un groupe de Kazhdan, alors G possède les propriétés de l'assertion (i).

Preuve. Rappelons d'abord qu'un sous-groupe ouvert H de G est aussi fermé, car $G - H$ est réunion des ouverts gH lorsque g décrit $G - H$.

(i) Pour montrer la nécessité, on suppose G engendré par une partie compacte K et on se donne une suite emboîtée $(G_n)_{n\geq 1}$ de sous-groupes ouverts de G recouvrant G. Comme $((G_{n+1} - G_n) \cap K)_{n\geq 1}$ est un recouvrement ouvert du compact K, on a $K \subset G_m$ et a fortiori $G = G_m$ pour m assez grand.

Montrons la suffisance. Comme G est dénombrable à l'infini, il existe une suite $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ de voisinages compacts de 1 qui recouvrent G (voir [BTG], page I.68). Pour $n \geq 1$, notons G_n le sous-groupe de G engendré par U_n. Comme U_n est un voisinage de 1, le sous-groupe G_n est ouvert dans G. Si la seconde condition de (i) est satisfaite, alors $G = G_m$ pour m assez grand, de sorte que G est engendré par le compact U_m.

(ii) Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ une suite emboîtée de sous-groupes ouverts de G recouvrant G. On va montrer que $G = G_m$ pour m assez grand.

Pour tout $n \geq 1$, l'espace quotient G/G_n est un espace discret dénombrable (car G est à base dénombrable). On le munit de la mesure qui compte les points. On note $\ell^2(G/G_n)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable pour cette mesure, $\xi_n \in \ell^2(G/G_n)$ la fonction caractéristique du point base, et π_n la représentation quasi-régulière de G dans $\ell^2(G/G_n)$. Soit π la somme directe des π_n.

Alors π possède presque des vecteurs invariants. Soit en effet K un compact de G. Le recouvrement $(G_{n+1} - G_n)_{n\geq 1}$ étant ouvert, $K \subset G_p$, et donc $\sup_{g\in K} \|\pi(g)\xi_p - \xi_p\| = 0$, pour p assez grand.

Comme G a la propriété (T), il existe un vecteur non nul

$$\eta \in \bigoplus_{n\geq 1} \ell^2(G/G_n)$$

invariant par G. Soit q un entier tel que la projection η_q de η sur $\ell^2(G/G_q)$ ne soit pas nulle. Alors $\pi_q(G)\eta_q = \eta_q$. En d'autres termes, la fonction $\eta_q : G/G_q \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante. Comme elle est aussi de carré sommable, l'ensemble G/G_q est fini. Comme G est la réunion des G_n, il existe un entier $m \geq q$ tel que $G = G_m$. $\square$

L'affirmation à retenir du lemme 10 s'énonce comme suit.

11.- Théorème. Tout groupe de Kazhdan est compactement engendré. En particulier, un groupe de Kazhdan discret est de type fini.

Le théorème précédent est un outil essentiel pour montrer que tout réseau dans un groupe de Lie réel connexe semi-simple est de type fini. Voir le corollaire 3.2 ci-dessous, ainsi que les remarques 6.18 et 13.21 de [Rag]. En revanche, les exemples de Gromov (voir la fin de notre chapitre 3) montrent qu'un groupe discret de Kazhdan n'est pas toujours de présentation finie.

12.- Remarque. Le lemme 10 ou le théorème 11 impliquent aussi que certains groupes n'ont pas la propriété (T). Par exemple

$$SL_3(\mathbb{Q}) = \bigcup_{N \geq 1} SL_3(\mathbb{Z}[1/N])$$

n'a pas la propriété (T).

Plus généralement, soit G un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$ de dimension au moins 1 (par exemple SL_n avec $n \geq 2$). Comme on peut montrer que le groupe $G(\mathbb{Q})$ des points rationnels de G n'est pas de type fini, ce groupe n'a pas la propriété (T). Ceci reste valable quand on remplace $\mathbb{Q}$ par un *corps global* quelconque $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire un $\mathbb{A}$-corps, ou corps adélisable, au sens de Weil [Wei]; en caractéristique nulle, $\mathbb{K}$ est un corps de nombres; en caractéristique finie, $\mathbb{K}$ est une extension de degré de transcendance 1 d'un corps fini).

Notons $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ l'anneau des *adèles* de $\mathbb{K}$. (Par exemple $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ est l'anneau des suites $(a_p)_{p \in P \cup \{\infty\}}$ où P désigne l'ensemble des nombres premiers, avec a_p dans le corps $\mathbb{Q}_p$ des p-adiques pour $p \in P$ et $a_\infty \in \mathbb{R}$, et a_p dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques pour presque tous les nombres premiers. La topologie convenable fait de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ un anneau localement compact dans lequel $\mathbb{Q}$ se plonge comme sous-anneau discret co-compact. Voir [Rob], [Wei].) Alors on peut montrer que le groupe $G(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})$ des points adéliques de G n'a pas non plus la propriété (T).

13.- Rappel sur la topologie de Fell [Fe1], [Fe2]. Soit à nouveau G un groupe localement compact. Notons $\widetilde{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de G dans des espaces de Hilbert séparables et $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G; comme G est à base dénombrable, $\widehat{G}$ est un sous-ensemble de $\widetilde{G}$ (voir la remarque 4). On dit que $\widehat{G}$ est le *dual unitaire* de G.

Il existe sur $\widetilde{G}$ (et donc sur $\widehat{G}$) une *topologie* dont la découverte est due à Fell et qu'on peut définir comme suit. Etant donné une (classe de) représentation $\pi \in \widetilde{G}$, une partie compacte K de G, un nombre réel $\varepsilon > 0$ et des vecteurs orthonormaux $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}_\pi$, on note $V(\pi; K, \varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ l'ensemble des représentations $\sigma \in \widetilde{G}$ telles qu'il existe des vecteurs orthonormaux $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{H}_\sigma$ avec

$$\sup_{g \in K} \left| \langle \eta_i | \sigma(g) \eta_j \rangle - \langle \xi_i | \pi(g) \xi_j \rangle \right| \leq \varepsilon \qquad 1 \leq i, j \leq n \ .$$

On munit alors $\widetilde{G}$ de la topologie pour laquelle, pour tout $\pi \in \widetilde{G}$, les ensembles $V(\pi; \ldots)$ constituent une base de voisinages de π. On note π_0 la *représentation unité* de G, définie par $\pi_0(g) = 1 \in \mathcal{U}(\mathbb{C})$ pour tout $g \in G$. Une représentation $\pi \in \widetilde{G}$ possède presque des vecteurs invariants si et seulement si la représentation unité π_0 est dans l'adhérence de π. (Attention: la relation $\pi_0 \subset \overline{\{\pi\}}$ n'implique en général pas que $\pi \in \overline{\{\pi_0\}}$, car $\{\pi_0\}$ est fermé dans $\widetilde{G}$! D'autre part, même lorsque les points de $\widehat{G}$ sont tous fermés (voir [Dix], numéros 13.9.4, 13.11.12 et 4.7.15), un point de $\widehat{G}$ peut ne pas être fermé dans $\widetilde{G}$.)

14.- Proposition. Soit G un groupe localement compact. On conserve les notations du n°13. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) G a la propriété (T) au sens de la définition 3.

(ii) Il existe un voisinage V de π_0 dans $\widetilde{G}$ tel que toute représentation π dans V a des vecteurs invariants non nuls.

(iii) La représentation unité π_0 est un point isolé de $\widehat{G}$.

(iv) Il existe une représentation irréductible de dimension finie de G qui est un point isolé de $\widehat{G}$.

(v) Toute représentation irréductible de dimension finie de G est un point isolé de $\widehat{G}$.

Preuve. Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i), en suivant [DK]. On considère d'abord un voisinage basique de π_0 dans $\widetilde{G}$ dont l'intersection avec $\widehat{G}$ est réduite à $\{\pi_0\}$; en d'autres termes, on considère une partie compacte K de G et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, si

$$V(K, \varepsilon) = \left\{ \sigma \in \widetilde{G} \ : \ \begin{array}{l} \text{il existe un vecteur unité } \eta \in \mathcal{H}_\varrho \text{ tel que} \\ |\langle \eta \,|\, \sigma(g) \eta \rangle - 1| \leq \varepsilon \text{ pour tout } g \in K \end{array} \right\} ,$$

alors $V(K,\varepsilon) \cap \widehat{G} = \{\pi_0\}$. On suppose de plus que $\varepsilon \leq 1$, et on note δ un nombre positif tel que $|1 - w| \leq \varepsilon$ pour tout nombre complexe w satisfaisant $|w| \leq 1$ et $1 - \mathrm{Re}\, w \leq \delta$.

Soit $\pi \in \widetilde{G}$ une représentation qui possède presque des vecteurs invariants, c'est-à-dire telle que π_0 soit adhérent à $\{\pi\}$. La *théorie de la réduction* (voir le théorème 8.5.2 de [Dix]) montre qu'il existe un espace borélien standard Z, une mesure positive bornée μ sur Z, un champ mesurable $z \mapsto \mathcal{H}_z$ d'espaces de Hilbert sur Z et un champ mesurable $z \mapsto \pi_z$ de représentations irréductibles de G dans les $\mathcal{H}_z$ tels qu'on puisse identifier la représentation π à l'intégrale directe $\int_Z^{\oplus} \pi_z d\mu(z)$. Comme $\pi \in V(K,\delta)$, il existe un vecteur unité $\xi = \int_Z^{\oplus} \xi_z d\mu(z)$ tel que $|\langle \xi | \pi(g)\xi\rangle - 1| \leq \delta$ pour tout $g \in K$. On pose $Z_1 = \{z \in Z : \xi_z \neq 0\}$; c'est un borélien dans Z, et $\mu(Z_1) > 0$ car $\xi \neq 0$.

Quitte à remplacer ξ_z par $\xi_z / \|\xi_z\|$ et $d_\mu(z)$ par $\|\xi_z\|^2 d\mu(z)$ aux points $z \in Z_1$ (ce qui ne change pas la classe d'équivalence de l'intégrale directe des π_z), on peut supposer $\|\xi_z\| = 1$ si $z \in Z_1$ et $\xi_z = 0$ sinon; la relation $\|\xi\|^2 = \int_{Z_1} \|\xi_z\|^2 d\mu(z) = 1$ restant vraie, on doit alors supposer $\mu(Z_1) = 1$. Avec ces normalisations, la condition sur ξ s'écrit

$$\Big| \int_{Z_1} \{\langle \xi_z | \pi_z(g)\xi_z\rangle - 1\} d\mu(z) \Big| \leq \delta$$

pour tout $g \in K$, de sorte que

$$\int_{Z_1} \{1 - \mathrm{Re}\, \langle \xi_z | \pi_z(g)\xi_z\rangle\} d\mu(z) \leq \delta$$

pour tout $g \in K$. Il existe donc une partie mesurable Z_2 dans Z_1 telle que $\mu(Z_2) > 0$ et telle que

$$0 \leq 1 - \mathrm{Re}\, \langle \xi_z | \pi_z(g)\xi_z\rangle \leq \delta$$

pour tout $z \in Z_2$. Par définition de δ, on a aussi

$$|\langle \xi_z | \pi_z(g)\xi_z\rangle - 1| \leq \varepsilon \ ,$$

ou encore $\pi_z \in V(K,\varepsilon)$ pour tout $z \in Z_2$. Ceci implique $\pi_z = \pi_0$ pour tout $z \in Z_2$. Il en résulte que $\int_{Z_2}^{\oplus} \mathcal{H}_z d\mu(z)$ est un sous-espace de $\mathcal{H}_\pi$ non réduit à zéro dont tous les vecteurs sont fixes par π.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est démontrée à la proposition 15.i ci-dessous. Pour plus de détails et pour l'équivalence des conditions (i) à (iii), nous renvoyons à [DK]. Pour l'équivalence de ces conditions avec (iv) et (v), nous renvoyons à [Wa2]. $\square$

En principe, on peut donc décider si un groupe a ou n'a pas la propriété (T) en étudiant la topologie de son dual unitaire $\widehat{G}$. Mais cette étude est notoirement difficile en général — voir par exemple [Clo] et [Tad] pour une mise au point dans le cas d'un groupe réductif. En fait, l'une des forces de l'approche de Kazhdan est précisément qu'elle permet souvent de décider qu'un groupe G a ou n'a pas la propriété (T) sans déterminer son dual $\widehat{G}$.

En termes de la topologie de Fell, on peut reformuler la définition 3 comme suit.

15.- Proposition. Soit G un groupe localement compact engendré par une partie compacte K.

(i) Si G a la propriété (T), il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que toute représentation $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ qui possède un vecteur unité (ε, K)-invariant possède un vecteur invariant non nul.

(ii) On suppose qu'il existe un nombre $\varepsilon' > 0$ tel que toute représentation irréductible $\pi \in \widehat{G}$ possédant un vecteur unité (ε', K)-invariant soit équivalente à la représentation unité π_0. Alors G a la propriété (T).

Preuve. (i) Supposons que l'assertion ne soit pas vraie, et montrons qu'on aboutit à une contradiction. Pour tout entier $n \geq 1$, notons K_n l'ensemble compact formé des produits $g_1 g_2 \dots g_n$, avec les g_j dans $K \cup K^{-1}$. Ainsi $G = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on peut choisir vu l'hypothèse une représentation $\pi_n : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_n)$ sans vecteur invariant et un vecteur unité $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ avec

$$\sup\{\|\pi_n(g)\xi_n - \xi_n\| : g \in K\} < \frac{\varepsilon}{n^2} .$$

Cette inégalité implique

$$\sup\{\|\pi_n(g)\xi_n - \xi_n\| : g \in K_n\} < \frac{\varepsilon}{n} .$$

Par suite la somme orthogonale $\pi = \oplus_{n \geq 1} \pi_n$ possède presque des vecteurs invariants. Le groupe G ayant la propriété (T), il existe $\eta = (\eta_n)_{n \geq 1}$ avec

$\pi(G)\eta = \eta$. On choisit un entier $n \geq 1$ avec $\eta_n \neq 0$. Alors $\eta_n \in \mathcal{H}_n$ est invariant par $\pi_n(G)$, en contradiction avec le choix de π_n.

L'assertion (ii) résulte de l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) de la proposition 14.
□

Dans la première assertion de la proposition précédente, on peut affirmer de plus qu'il existe un vecteur invariant proche d'un vecteur unité (ε, K)-invariant donné. On obtient ainsi l'énoncé suivant.

16.- Proposition. Soit G un groupe de Kazhdan engendré par une partie compacte K et soit δ un nombre tel que $0 < \delta \leq 2$. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ avec la propriété suivante: pour toute représentation $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ qui possède un vecteur unité (ε, K)-invariant $\xi \in \mathcal{H}$, il existe un vecteur unité $\eta \in \mathcal{H}$ invariant par G tel que $\|\eta - \xi\| < \delta$ (en particulier $\|\pi(g)\xi - \xi\| < 2\delta$ pour tout $g \in G$.

Preuve (d'après une idée de M. Burger). Soit α un nombre strictement positif tel que toute représentation de G possédant un vecteur unité (α, K)-invariant possède aussi un vecteur unité invariant (proposition 15). On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\delta$. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation possédant des vecteurs unité (ε, K)-invariants. Notons $\mathcal{H}_0$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des vecteurs invariants par G et $\mathcal{H}_1$ son complément orthogonal; ainsi $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ par hypothèse sur α. On écrit $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$ la décomposition d'un vecteur dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Soit $\xi \in \mathcal{H}$ un vecteur unité (ε, K)-invariant. Si $\xi_1 = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on a

$$\left\|\pi(g)\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} - \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}\right\| = \frac{1}{\|\xi_1\|}\|\pi(g)\xi - \xi\| < \frac{\varepsilon}{\|\xi_1\|}$$

pour tout $g \in K$. Comme $\mathcal{H}_1$ n'a pas de vecteur invariant non nul, on a

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi_1\|} > \alpha \quad \text{donc} \quad \frac{\delta}{2} > \|\xi_1\| \ .$$

Notons que $\xi_0 \neq 0$, et posons $\eta = \frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\eta - \xi\| &\leq \|\eta - \xi_0\| + \|\xi - \xi_0\| = 1 - \|\xi_0\| + \|\xi - \xi_0\| \\ &\leq 2\|\xi - \xi_0\| = 2\|\xi_1\| < \delta \end{aligned}$$

et la preuve est achevée. $\square$

17.- Problème ouvert. Les notations étant celles de la proposition 15, il serait intéressant de connaître des estimations pour ε dans des cas particuliers. Exemples faciles: si G est le groupe cyclique d'ordre n et si K est réduit à un générateur, le plus grand nombre possible est donné par $\varepsilon = 2\sin(\pi/n)$. Si G est fini et si $G = K$, alors $\varepsilon \geq \sqrt{2}$; voir l'exemple 5.ii ci-dessus. Si $G = \langle a,b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1\rangle$ est le groupe diédral d'ordre $2n$ et si $K = \{a,b\}$, on obtient $\varepsilon = 2\sin(\pi/2n)$.

Parmi les rares travaux que nous connaissons pouvant conduire à des estimations de ε pour des groupes infinis, mentionnons la thèse de M. Burger (voir la proposition 1 de [Bu1]) et l'appendice au présent travail.

Voici une variation sur le même thème, abordée dans cet appendice. On considère le groupe $G = SL_3(\mathbb{Z})$ et l'ensemble générateur K formé (par exemple) des 12 matrices qui diffèrent de 1 par un seul coefficient non diagonal valant ± 1. On demande d'estimer le plus grand nombre $\varepsilon_f > 0$ ayant la propriété suivante: toute représentation de dimension finie $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ qui possède un vecteur (ε_f, K)-invariant possède aussi un vecteur invariant. On sait qu'une telle représentation se factorise par un quotient fini de $SL_3(\mathbb{Z})$ — voir par exemple [Ste].

18.- Propriété relative [Ma4]. Soient G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants (par G) possède des vecteurs non nuls invariants par H.

(ii) Il existe un voisinage V de π_0 (notation du n°14) dans $\widetilde{G}$ tel que toute représentation dans V ait des vecteurs non nuls invariants par H.

(iii) Il existe un voisinage V de π_0 dans le dual $\widehat{G}$ de G tel que toute représentation dans V soit constante sur H(i.e. vérifie $\pi(h) = 1$ pour tout $h \in H$).

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que la paire (G,H) possède la *propriété* (T). Margulis a tiré parti de cette notion dans [Ma1] et [Ma4]. Pour des exemples non banals de paires (G,H) qui possèdent la propriété (T), voir ci-dessous le n°2.2 et la remarque 2.9.v.

CHAPITRE 2
PRINCIPAUX EXEMPLES: GROUPES DE LIE

Dans ce chapitre, nous montrons d'abord que $SL_n(\mathbb{R})$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$. Nous indiquons ensuite comment on peut montrer qu'il en est de même des groupes de Lie simples de rangs réels ≥ 2 à centres finis, comment on peut remplacer le corps des réels par un corps local quelconque, et comment on peut omettre l'hypothèse de finitude des centres.

2.a. LE CAS DE $SL_n(\mathbb{R})$

Le premier lemme exploite la remarque suivante. Soient $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation, H un sous-groupe fermé de G et $\xi \in \mathcal{H}$ un vecteur invariant par H. Alors le *coefficient* $\varphi : G \to \mathbb{C}$ défini par $\varphi(g) = \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$ est une fonction bi-H-invariante, car $\varphi(hgh') = \langle \pi(h^{-1})\xi | \pi(g)\pi(h')\xi \rangle = \varphi(g)$ pour $g \in G$ et $h, h' \in H$.

Notons 1_n la matrice identique n-fois-n, et N_{n-1} le sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ est un vecteur colonne. Nous identifions $SL_{n-1}(\mathbb{R})$ avec son image dans $SL_n(\mathbb{R})$ par le plongement $S \mapsto \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.- Lemme. Soit π une représentation de $SL_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$. Si ξ est un vecteur de $\mathcal{H}_\pi$ invariant par N_{n-1}, alors ξ est invariant par $SL_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Supposons d'abord $n = 2$. On considère le coefficient φ défini par $\varphi(g) = \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$. Il suffit de montrer que φ est une fonction constante: en effet, si $\pi(g)\xi \neq \xi$ pour un élément g de $SL_2(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{Re}\varphi(g) < \varphi(1)$. La preuve qui suit est celle du théorème 2.4.2 de [Zim].

Le vecteur ξ étant fixe par N_1, la fonction φ est bi-N_1-invariante. Le groupe N_1 est l'isotropie du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour l'action canonique de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$, donc $SL_2(\mathbb{R})/N_1$ s'identifie à $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. On peut ainsi considérer φ comme une fonction sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, constante sur les orbites de N_1. Or celles-ci sont les points du premier axe de $\mathbb{R}^2$ (sauf 0) et les autres droites de $\mathbb{R}^2$

parallèles à cet axe. La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}^2 - 0$, il en résulte qu'elle est constante sur le premier axe de $\mathbb{R}^2$ privé de 0. Mais cet axe épointé est l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par le sous-groupe triangulaire supérieur P de $SL_2(\mathbb{R})$. Donc φ est P-invariante, et même bi-P-invariante puisque c'est un coefficient de représentation.

Le groupe P est l'isotropie du point à l'infini pour l'action canonique de $SL_2(\mathbb{R})$ dans $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, et on peut aussi considérer φ comme une fonction sur $P^1(\mathbb{R})$ constante sur les orbites de P. Or l'orbite de 0 dans $P^1(\mathbb{R})$ est dense (c'est $\mathbb{R} = P^1(\mathbb{R}) - \{\infty\}$), donc la fonction continue φ est constante.

Supposons ensuite $n \geq 3$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, on définit un plongement h_i de $SL_2(\mathbb{R})$ dans $SL_n(\mathbb{R})$ par

$$h_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1_{n-i-2} & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

et on a $h_i(SL_2(\mathbb{R})) \cap N_{n-1} = h_i(N_1)$. Si ξ est fixé par N_{n-1}, il l'est par chaque $h_i(N_1)$, donc par chaque $h_i(SL_2(\mathbb{R}))$ vu l'argument précédent. Le lemme résulte de ce que les $h_i(SL_2(\mathbb{R}))$ engendrent $SL_n(\mathbb{R})$. □

2.- Proposition. La paire $(\mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n-1})$ possède la propriété relative de la définition 1.18 pour tout entier $n \geq 3$.

La preuve de cette proposition utilise la notion de fonction de type positif, sur laquelle nous revenons en détail au chapitre 5.a. Ici, rappelons simplement ceci: soient G un groupe localement compact et $\varphi : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que φ est de *type positif* si, pour tout entier $m \geq 1$, pour tous $g_1, \ldots, g_m \in G$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m} \overline{\lambda_i} \lambda_j \varphi(g_i^{-1} g_j) \geq 0 \ .$$

Si π est une représentation unitaire de G et si ξ est un vecteur de $\mathcal{H}_\pi$, il est clair que la fonction

$$g \longmapsto \langle \xi | \pi(g) \xi \rangle$$

est de type positif. Réciproquement, soit φ une fonction de type positif sur G; une construction due à Gelfand, Naimark et Segal — et dite construction GNS

— montre qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$, une représentation unitaire π_φ de G sur $\mathcal{H}_\varphi$ et un vecteur $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ tels que

$$\varphi(g) = \langle \xi_\varphi | \pi_\varphi(g)\xi_\varphi \rangle$$

pour tout $g \in G$; de plus le sous-espace de $\mathcal{H}_\varphi$ engendré par $\pi_\varphi(G)\xi_\varphi$ est partout dense.

3.- Preuve de la proposition 2. Cette preuve, sur une idée de Furstenberg, nous a été montrée par M. Burger; nous la divisons en trois pas. Voir le théorème 7.3.9 de [Zim] pour une autre preuve.

ler pas. Soit π une représentation de $G = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R})$ possédant presque des vecteurs invariants. Soit $(K_m)_{m\geq 1}$ une suite croissante de parties compactes de G recouvrant G. On choisit pour tout $m \geq 1$ un vecteur unité $\xi_m \in \mathcal{H}_\pi$ qui est $(\frac{1}{m}, K_m)$-invariant. De l'égalité

$$\|\xi_m - \pi(g)\xi_m\|^2 = 2 - 2\mathrm{Re}\,\langle \xi_m | \pi(g)\xi_m \rangle \ ,$$

il résulte que la suite de fonctions

$$g \longmapsto \mathrm{Re}\,\langle \xi_m | \pi(g)\xi_m \rangle \qquad (m \geq 1)$$

converge vers 1 uniformément sur tout compact de G. Comme

$$|\langle \xi_m | \pi(g)\xi_m \rangle| \ \leq \ 1 \quad \text{pour tout} \quad g \in G \ ,$$

on voit que la suite de fonctions de type positif

$$\varphi_m : g \longmapsto \langle \xi_m | \pi(g)\xi_m \rangle \qquad (m \geq 1)$$

converge aussi vers 1 uniformément sur tout compact de G.

Considérons la restriction de φ_m au sous-groupe abélien fermé $H = \mathbb{R}^{n-1}$ de G. Comme $\varphi_m|H$ est de type positif sur $\mathbb{R}^{n-1}$, un théorème de Bochner (voir par exemple l'exercice 11.14 de [Rud]) fournit une mesure de probabilité μ_m sur le dual $\widehat{\mathbb{R}^{n-1}}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont la transformée de Fourier est $\varphi_m|H$. Dans la suite, nous choisissons une identification (non canonique) entre $\mathbb{R}^{n-1}$ et son dual $\widehat{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Montrons qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\mu_m(\{0\}) \neq 0$. Pour cela, supposons par l'absurde que $\mu_m(\{0\}) = 0$ pour tout $m \geq 1$. On peut alors considérer chaque μ_m comme une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$. Soit $S \in SL_{n-1}(\mathbb{R})$ et soit S^t la matrice transposée. Comme la suite de fonctions sur $\mathbb{R}^{n-1}$

$$x \longmapsto \varphi_m(x) - \varphi_m(S^t x) \qquad (m \geq 1)$$

tend vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^{n-1}$, la suite des transformées de Fourier inverses, c'est-à-dire la suite de mesures (non positives) sur $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$

$$(\mu_m - S_\star \mu_m)_{m \geq 1}$$

tend faiblement vers 0.

Notons $P^{n-2}(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension $n-2$ et $p : \mathbb{R}^{n-1} - \{0\} \to P^{n-2}(\mathbb{R})$ la projection canonique . Alors $(p_\star \mu_m)_{m \geq 1}$ est une suite de mesures de probabilité sur $P^{n-2}(\mathbb{R})$, et la suite $(p_\star \mu_m - S_\star p_\star \mu_m)_{m \geq 1}$ tend faiblement vers 0. Or l'espace des mesures de probabilité sur $P^{n-2}(\mathbb{R})$ est faiblement compact. Quitte à passer à une sous-suite, on peut donc supposer que la suite $(p_\star \mu_m)_{m \geq 1}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité ν sur $P^{n-2}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, ν est invariante par $SL_{n-1}(\mathbb{R})$. Mais il est bien connu qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $P^{n-2}(\mathbb{R})$ invariante par $SL_{n-1}(\mathbb{R})$. (C'est ici qu'on utilise l'inégalité $n \geq 3$.) On a ainsi obtenu la contradiction annoncée.

2e pas. Nous rassemblons ici quelques faits sur la construction GNS que nous utilisons au troisième pas; ils sont établis à la proposition 5.9. On se donne un sous-groupe fermé H d'un groupe localement compact G.

(a) Si φ, ψ, χ sont des fonctions de type positif sur G telles que $\varphi = \psi + \chi$, alors π_ψ est une sous-représentation de π_φ.

(b) Si φ est une fonction constante strictement positive, alors π_φ est la représentation unité de dimension 1.

(c) Si φ est une fonction de type positif sur G, alors la représentation $\pi_{\varphi|H}$ de H est une sous-représentation de la restriction à H de π_φ.

(d) Soit π une représentation de G, soit $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ et soit φ la fonction de type positif définie par $\varphi(g) = \langle \xi | \pi(g) \xi \rangle$. Alors π_φ est une sous-représentation de π.

3e pas: conclusion. On reprend les notations du premier pas et on choisit un entier $m \geq 1$ tel que $c_m = \mu_m(\{0\}) > 0$. On écrit $\mu_m = c_m \delta_0 + \mu'_m$ où δ_0 désigne la mesure de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^{n-1}$ et où μ'_m désigne une mesure positive sur $\mathbb{R}^{n-1}$ qui ne charge pas $\{0\}$. Par transformée de Fourier inverse, on a

$$\varphi_m | \mathbb{R}^{n-1} = c_m + \varphi'_m$$

où φ'_m est une fonction de type positif sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Les faits énumérés au deuxième pas, appliqués dans l'ordre, montrent que la représentation unité de dimension 1 de $\mathbb{R}^{n-1}$ est une sous-représentation de la restriction de π à $\mathbb{R}^{n-1}$. En d'autres termes, π possède des vecteurs non nuls invariants par $\mathbb{R}^{n-1}$. $\square$

4.- Théorème. Le groupe $SL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Kazhdan pour tout entier $n \geq 3$.

Preuve. Identifions le produit semi-direct $\mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R})$ à son image dans $SL_n(\mathbb{R})$ par le plongement

$$\alpha \begin{cases} \mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_n(\mathbb{R}) \\ \qquad (x, S) \qquad \longmapsto \begin{pmatrix} S & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(on pense à x comme à un vecteur colonne).

Soit π une représentation de $SL_n(\mathbb{R})$ qui possède presque des vecteurs invariants. Il en est a fortiori de même de la restriction de π à $\mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{R})$. La proposition 2 montre qu'il existe dans $\mathcal{H}_\pi$ des vecteurs non nuls invariants par $N_{n-1} = \alpha(\mathbb{R}^{n-1})$, et le lemme 1 qu'il existe dans $\mathcal{H}_\pi$ des vecteurs non nuls invariants par $SL_n(\mathbb{R})$ tout entier. $\square$

2.b. AUTRES GROUPES DE LIE SIMPLES À CENTRES FINIS

Expliquons brièvement comment on peut étendre le théorème 4 à de tels groupes. Convenons qu'un groupe G est *uniformément engendré* par deux sous-groupes H, H' s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que tout élément de G peut s'écrire $g = h_1 h'_1 h_2 h'_2 \dots h_N h'_N$ avec $h_i \in H$ et $h'_i \in H'$. Dans son article original, Kazhdan démontre le lemme suivant (théorème 4 de [DK]), dont nous donnons une preuve en 3.16.

5.- Lemme. Si le groupe localement compact G est uniformément engendré par deux sous-groupes fermés H, H' ayant la propriété (T), alors G a la propriété (T).

On sait qu'un système de racines de rang ≥ 3 qui est irréductible possède un sous-système isomorphe à A_2. On en déduit qu'un groupe de Lie réel connexe simple G à centre fini de rang réel ≥ 3 et de décomposition de Cartan $G = KAK$ est uniformément engendré par un sous-groupe compact maximal K et un sous-groupe localement isomorphe à $SL_3(\mathbb{R})$; voir [DK]. Kazhdan en déduit qu'un tel groupe G possède la propriété (T).

Peu après, Delaroche-Kirillov [DK] et Vaserstein [Vas] ont indépendamment remarqué que le raisonnement précédent s'étend aux groupes algébriques simples de rang réel ≥ 2, à condition qu'on montre séparément que $Sp_4(\mathbb{R})$ a la propriété (T). La raison en est qu'un système de racines irréductible de rang ≥ 2 possède un sous-système isomorphe à A_2 ou à C_2. Le second cas se traite comme suit.

6.- Le cas de $Sp_4(\mathbb{R})$. Rappelons que $Sp_4(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices 4-fois-4 sur $\mathbb{R}$ qui préservent la forme bilinéaire alternée de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$. On introduit les sous-groupes

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{R}) \ ; \ A \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ et } A^tB = B^tA \right\}$$
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & B \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tB = B \right\}$$

de $Sp_4(\mathbb{R})$. En fait $H = N \rtimes GL_2(\mathbb{R})$, pour l'action usuelle $B \to AB^tA$ de $A \in GL_2(\mathbb{R})$ sur l'espace N des matrices symétriques.

On montre d'une part que, si π est une représentation de $Sp_4(\mathbb{R})$ ayant un vecteur non nul ξ invariant par N, alors ξ est invariant par $Sp_4(\mathbb{R})$.

On montre d'autre part que la paire (H, N) a la propriété (T). Ce dernier point requiert une modification du premier pas du n°3 ci-dessus. On construit d'abord comme au n°3 une mesure de probabilité sur l'espace projectif associé à N qui est invariante par $GL_2(\mathbb{R})$. On utilise ensuite un nouvel ingrédient, qui est le lemme suivant, dû à Furstenberg (voir le corollaire 3.2.2 dans [Zim]).

Lemme. On se donne un entier $n \geq 2$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui préserve une mesure de probabilité sur l'espace projectif $P^{n-1}(\mathbb{R})$. On suppose que l'action sur $\mathbb{R}^n$ de tout sous-groupe d'indice fini de G est irréductible. Alors l'image de G dans $PGL_n(\mathbb{R})$ est relativement compacte.

7.- Passage aux groupes algébriques simples de rang déployé ≥ 2 sur un corps local. Dans son article original [Kaz], Kazhdan considère un groupe comme SL_3 non seulement sur les réels, mais plus généralement sur un corps local $\mathbb{F}$. Soit plus précisément G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple défini et de rang déployé ≥ 3 sur $\mathbb{F}$.

Dans le cas de SL_n, on se convainc sans peine que le lemme 1 s'adapte à $\mathbb{F}$. Pour généraliser la proposition 2, il faut remarquer que le théorème de Bochner est valable pour tout groupe localement compact abélien. (Voir [Gu3], théorème 2.4; sous cette forme, le résultat est dû à Weil.) Notons aussi que le dual $\widehat{\mathbb{F}^{n-1}}$ de $\mathbb{F}^{n-1}$ s'identifie (non canoniquement) à $\mathbb{F}^{n-1}$ [Wei].

Pour un groupe G quelconque de rang déployé ≥ 2 sur $\mathbb{F}$, le seul point non classique dans le cas non archimédien est l'existence d'une décomposition de Cartan $G = KAK$. Mais cette décomposition a été établie par Bruhat et Tits: voir la proposition 4.4.3 de [BT].

L'observation de Delaroche-Kirillov et Vaserstein pour traiter le cas des groupes de rang déployé ≥ 2 reste valable. On doit montrer séparément que $Sp_4(\mathbb{F})$ est un groupe de Kazhdan. On peut reprendre l'argument du n°6 ci-dessus, car le lemme de Furstenberg est vrai sur un corps local quelconque. (Voir le corollaire 3.2.2 dans [Zim]; la restriction de Zimmer à un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique nulle n'est pas sérieuse.)

En résumé, le théorème de Kazhdan amendé par Delaroche-Kirillov et Vaserstein s'énonce comme suit.

8.- Théorème. Soit $\mathbb{F}$ un corps local et soit G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple défini et de rang déployé ≥ 2 sur $\mathbb{F}$. Alors G a la propriété (T).

9.- Remarques. (i) Le théorème 8 ne s'applique pas à $SL_3(\mathbb{Q})$, comme nous l'avons déjà noté à la remarque 1.12. Le lecteur attentif aura remarqué l'usage essentiel fait de la topologie non discrète de $\mathbb{R}$, notamment dans la preuve du lemme 1.

(ii) Soit à nouveau $\mathbb{F}$ un corps local, et soit maintenant G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple de rang déployé 1 sur $\mathbb{F}$. Nous verrons aux chapitres 3 et 6 que G n'a pas la propriété (T) si $\mathbb{F}$ n'est ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$. En revanche, si $\mathbb{F}$ contient $\mathbb{R}$, la situation est plus compliquée: les groupes en question sont (à isomorphisme local près)

$$SO_0(1,n) \quad \text{avec } n \geq 2; \qquad SU(1,n) \quad \text{avec } n \geq 2;$$
$$Sp(1,n) \quad \text{avec } n \geq 2; \qquad F_{4(-20)}$$

(ces groupes sont définis au chapitre 6). Nous verrons plus loin que $SO_0(1,n)$ et $SU(1,n)$ n'ont pas la propriété (T). Mais Kostant a montré que $Sp(1,n)$ et $F_{4(-20)}$ l'ont (voir le chapitre 9).

(iii) Il existe une autre preuve du théorème 8, apparemment due à Zimmer (théorème 7.4.2 de [Zim]), qui utilise le théorème d'annulation des coefficients de Howe-Moore (théorèmes 5.2 de [HM] et 2.2.20 de [Zim]). On utilise la théorie des systèmes de racines pour montrer que le groupe G du théorème 8 contient un produit semi-direct $\mathbb{F}^n \rtimes SL_2(\mathbb{F})$ relatif à une représentation de $SL_2(\mathbb{F})$ sur $\mathbb{F}^n$ sans vecteur invariant non nul. On montre comme à la proposition 2 et au lemme 6 que la paire $(\mathbb{F}^n \rtimes SL_2(\mathbb{F}), \mathbb{F}^n)$ possède la propriété (T) relative (voir aussi le lemme 1 de [Ma4]). A fortiori $(G, \mathbb{F}^n)$ la possède aussi. On suppose alors (ab absurdo) que G possède une représentation π sans vecteur invariant non nul ayant presque des vecteurs invariants. Alors la restriction $\pi|\mathbb{F}^n$ n'a pas non plus de vecteur invariant non nul (s'il en existait un, alors le coefficient correspondant $g \longrightarrow \langle \xi | \pi(g) \xi \rangle$ ne s'annulerait pas à l'infini, contrairement au théorème d'annulation des coefficients). Mais ceci est absurde puisque $(G, \mathbb{F}^n)$ possède la propriété (T).

(iv) Rappelons du n°1.14 qu'un groupe G possède la propriété (T) si et seulement si π_0 est un point isolé du dual unitaire $\widehat{G}$ de G. Cowling a introduit le *dual uniformément borné* de G: c'est l'espace topologique $\widehat{G}_{ub}$ des (classes d'équivalence de) représentations irréductibles, non nécessairement unitaires mais uniformément bornées, de G dans des espaces de Hilbert. On sait que $\widehat{G} = \widehat{G}_{ub}$ si G est moyennable [Di1], mais on peut avoir $\widehat{G} \neq \widehat{G}_{ub}$ (c'est par exemple le cas si $G = GL_2(\mathbb{R})$, voir [KS]). Cowling a montré le résultat suivant, qui rétablit l'équilibre entre le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et les autres cas (corollaire 2.3.4 de [Cg1] et théorème 7.1 de [Cg2]).

Proposition. Soit G un groupe de Lie simple réel connexe, non compact et de centre fini. Alors π_0 est un point isolé de $\widehat{G}_{ub}$ si et seulement si le rang réel de G est ≥ 2.

(v) En plus d'une preuve de la proposition 2, les arguments du numéro 3 fournissent de nombreux autres exemples de paires (G, G_0) possédant la propriété (T) relative, et même mieux. Soit en effet V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local; on note $\widehat{V}$ le dual de V. Soit H un sous-groupe de $GL(V)$ qui est fermé pour la topologie localement compacte, et tel qu'il n'existe aucune mesure de probabilité sur l'espace projectif $P(\widehat{V})$ qui soit H-invariante. (Exemple: $H = SL_2(\mathbb{Z})$ dans $GL_2(\mathbb{R})$.) On pose $G = V \rtimes H$.

Proposition. Avec les notations ci-dessus, la paire (G, V) possède la propriété (T). Mieux: soit π une représentation de G telle que la restriction de π à H possède presque des vecteurs invariants; alors il existe des vecteurs non nuls de $\mathcal{H}_\pi$ invariants par V.

Preuve. Il suffit de montrer la seconde assertion. On considère d'abord comme au numéro 3 une suite $(\xi_m)_{m\geq 1}$ de vecteurs unité de $\mathcal{H}_\pi$ telle que la suite des fonctions

$$\begin{cases} H \longrightarrow & \mathbb{R} \\ S \longmapsto & \|\xi_m - \pi(S)\xi_m\| \end{cases}$$

tende vers 0 uniformément sur tout compact de H. On note μ_m la mesure de probabilité sur $\widehat{V}$ dont la transformée de Fourier est la fonction de type positif $v \mapsto \langle \xi_m | \pi(v)\xi_m \rangle$ sur V.

Soit $S \in H$. Il s'agit de montrer que la suite de mesures $(\mu_m - S_*\mu_m)_{m\geq 1}$ sur $\widehat{V}$ tend faiblement vers 0; en d'autres termes, si B est un borélien de $\widehat{V}$, il faut montrer que $\lim_{m\to\infty} |\mu_m(S^{-1}B) - \mu_m(B)| = 0$. Le théorème spectral montre qu'il existe pour tout borélien A de $\widehat{V}$ un projecteur $P(A)$ de $\mathcal{H}_\pi$ tel que $\mu_m(A) = \langle \xi_m | P(A)\xi_m \rangle$. Comme G est un produit semi-direct, $P(S^{-1}B) = \pi(S^{-1})P(B)\pi(S)$. On a donc

$$\begin{aligned} |\mu_m(S^{-1}B) - \mu_m(B)| &= |\langle \xi_m | P(S^{-1}B)\xi_m \rangle - \langle \xi_m | P(B)\xi_m \rangle| \\ &\leq |\langle \pi(S)\xi_m | P(B)(\pi(S)\xi_m - \xi_m) \rangle| + |\langle \pi(S)\xi_m - \xi_m | P(B)\xi_m \rangle| \\ &\leq 2\|\pi(S)\xi_m - \xi_m\| \end{aligned}$$

qui tend vers 0 si m tend vers l'infini.

On montre alors comme au n°3 qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que μ_m charge l'origine de $\widehat{V}$. Donc $P(\{0\}) \neq 0$. Mais $P(\{0\})$ est précisément le projecteur de $\mathcal{H}_\pi$ sur le sous-espace des vecteurs fixes par V. □

Il n'y a pas que des groupes semi-simples parmi les groupes de Kazhdan. Les premiers exemples non réductifs ont été obtenus par S.P. Wang (théorème 4.3 de [Wa2] et 7.4.4 de [Zim]):

10.- Proposition. Pour $n \geq 3$, le produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes SL_n(\mathbb{R})$ possède la propriété (T).

Preuve. On pose $G = \mathbb{R}^n \rtimes SL_n(\mathbb{R})$. Soit π une représentation de G possédant presque des vecteurs invariants. Le théorème 4 montre qu'il existe un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ invariant par $SL_n(\mathbb{R})$; notons $\varphi : G \to \mathbb{C}$ le coefficient défini par $\varphi(g) = \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$. On a $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(x)$ pour tous $g \in SL_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$; comme l'action de $SL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ possède une orbite dense, il en résulte que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que ξ est invariant par $\mathbb{R}^n$. Le vecteur ξ est donc invariant par G tout entier. $\square$

Le même argument s'applique à $(\mathbb{R}^n \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^n) \rtimes SL_n(\mathbb{R})$, où $SL_n(\mathbb{R})$ agit par la diagonale de l'action standard sur la somme de p copies de $\mathbb{R}^n$, pour autant que $p < n$. (Une telle action possède une orbite dense, formée des p-uples de vecteurs linéairement indépendants.)

2.c. PROPRIÉTÉ (T) ET REVÊTEMENTS

Pour les groupes de Lie réels, la propriété (T) est invariante relativement aux isomorphismes locaux à noyaux finis (proposition 1.9). Par suite le théorème 8 montre que tout groupe de Lie réel connexe simple de rang ≥ 2 et de centre fini est un groupe de Kazhdan. Nous allons montrer que l'hypothèse sur la finitude du centre est superflue.

11.- Proposition (Serre). Soit G un groupe localement compact. Supposons que G est engendré par une partie compacte K, et qu'il existe un sous-groupe fermé C du centre de G tel que G/C a la propriété (T). Notons $\widehat{G}_1$ la partie ouverte de $\widehat{G}$ formée des représentations irréductibles de degrés strictement supérieurs à 1. Alors la représentation unité π_0 de G n'appartient pas à l'adhérence de $\widehat{G}_1$ dans $\widehat{G}$.

Preuve. Soit $\overline{K}$ l'image de K dans G/C. C'est une partie compacte qui engendre le groupe de Kazhdan G/C. La proposition 1.15 montre qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que toute représentation de G/C ayant des vecteurs unité $(\varepsilon, \overline{K})$-invariants possède des vecteurs invariants non nuls. On va montrer qu'aucune représentation $\pi \in \widehat{G}_1$ ne possède de vecteurs unité $(\frac{\varepsilon}{2}, K)$-invariants. (Notons que l'ensemble des représentations $\pi \in \widehat{G}$ possédant des vecteurs unité $(\frac{\varepsilon}{2}, K)$-invariants est un voisinage ouvert de π_0 dans $\widehat{G}$.)

Soit $\pi \in \widehat{G}_1$. On considère l'espace $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}_\pi)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}_\pi$; c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(S,T) \longmapsto Tr(S^\star T) ,$$

qui est bien défini car le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur à trace. On définit une représentation unitaire $Ad\pi$ de G sur $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}_\pi)$ par

$$Ad\pi(g)(S) = \pi(g)S\pi(g^{-1})$$

pour tous $g \in G$ et $S \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_\pi)$. Mais π est irréductible; pour tout $g \in C$, l'opérateur $\pi(g)$ est donc scalaire et $Ad\pi(g) = 1$. En d'autres termes la représentation $Ad\pi$ se factorise à travers G/C.

Soit ξ un vecteur unité de $\mathcal{H}_\pi$. On note $p_\xi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_\pi)$ le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}_\pi$ sur $\mathbb{C}\xi$. Soient ξ et η des vecteurs unité de $\mathcal{H}_\pi$. On vérifie aisément que

$$\|p_\xi - p_\eta\|^2 = 2 - 2|\langle\xi|\eta\rangle|^2 .$$

Comme on a

$$\|\xi - \eta\|^2 \geq 2 - 2|\langle\xi|\eta\rangle| ,$$

il vient

$$\begin{aligned}\|p_\xi - p_\eta\|^2 &\leq 2 - 2\Big(1 - \frac{1}{2}\|\xi - \eta\|^2\Big)^2 \\ &= 2\|\xi - \eta\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi - \eta\|^4 \\ &\leq 2\|\xi - \eta\|^2\end{aligned}$$

donc

$$\|p_\xi - p_\eta\| \leq \sqrt{2}\|\xi - \eta\| .$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un vecteur unité ξ qui soit $(\frac{\varepsilon}{2}, K)$-invariant pour π. L'inégalité précédente montre que p_ξ est $(\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, \overline{K})$-invariant pour $Ad\pi$. Par hypothèse sur ε, ceci implique que $Ad\pi$ contient des vecteurs invariants non nuls, c'est-à-dire qu'il existe des opérateurs de Hilbert-Schmidt non nuls dans le commutant de π. Si π est de dimension infinie on a déjà obtenu une contradiction, car le commutant de π est réduit aux scalaires (lemme de Schur).

Supposons donc de plus que π est de dimension finie $n \geq 2$. Notons $\mathcal{L}_0^2(\mathcal{H}_\pi)$ l'espace des opérateurs de trace nulle sur $\mathcal{H}_\pi$. Si ξ est un vecteur unité de $\mathcal{H}_\pi$, on pose $p_\xi^0 = p_\xi - \frac{1}{n} \in \mathcal{L}_0^2(\mathcal{H}_\pi)$ et on vérifie que $\|p_\xi^0\|^2 = 1 - \frac{1}{n}$. Posons encore $c_n = (1 - \frac{1}{n})^{-1/2}$, de sorte que $c_n p_\xi^0$ est un vecteur unité dans $\mathcal{L}_0^2(\mathcal{H}_\pi)$. Si ξ et η sont deux vecteurs unité dans $\mathcal{H}_\pi$, on a

$$\begin{aligned}\|c_n p_\xi^0 - c_n p_\eta^0\| &= c_n \|p_\xi - p_\eta\| \leq c_n \sqrt{2} \|\xi - \eta\| \\ &\leq 2\|\xi - \eta\|\end{aligned}$$

car $n \geq 2$ implique $c_n \leq \sqrt{2}$. Si ξ est comme plus haut un vecteur unité $(\frac{\varepsilon}{2}, K)$-invariant pour π, on voit que $c_n p_\xi^0$ est un vecteur unité $(\varepsilon, \overline{K})$-invariant pour la restriction de $Ad\pi$ à $\mathcal{L}_0^2(\mathcal{H}_\pi)$. Comme précédemment, il y a une contradiction, car $\mathcal{L}_0^2(\mathcal{H}_\pi)$ ne contient pas de vecteur non nul invariant pour $Ad\pi$. □

12.- Théorème (Serre). Soit G un groupe localement compact engendré par une partie compacte. On suppose que

(i) il existe un sous-groupe fermé C du centre de G tel que G/C a la propriété (T),

(ii) l'abélianisé séparé $G/\overline{[G,G]}$ de G est compact.

Alors G a lui-même la propriété (T).

Preuve. Soit $(\pi_i)_{i \in I}$ une suite de représentations irréductibles de G qui converge vers la représentation unité π_0. D'après la proposition 11, ces représentations sont de dimension 1 et se factorisent donc à travers le groupe abélien $G/\overline{[G,G]}$ dès que i est assez grand. Mais le groupe compact $G/\overline{[G,G]}$ a la propriété (T), donc $\pi_i = \pi_0$ pour i assez grand. □

13.- Corollaire. Tout groupe de Lie réel simple connexe de rang déployé ≥ 2 est un groupe de Kazhdan.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des théorèmes 8 et 12. QED.

14.- Exemples. Le corollaire 13 montre qu'il y a des groupes de Kazhdan à centres infinis.

Soit en effet G la composante connexe du groupe des isométries d'un espace symétrique hermitien irréductible non compact de rang ≥ 2. Autrement dit, soit G un groupe de Lie réel connexe à centre banal dont l'algèbre de Lie apparaît dans la liste suivante (notations de [Hel], sauf l'algèbre $\underline{sp}(t, \mathbb{R})$ de Helgason, notée ici $\underline{sp}(2t, \mathbb{R})$):

$\underline{su}(p,q)$ avec $q \geq p \geq 2$

$\underline{so}(2,r)$ avec $r \geq 3$

$\underline{so}^\star(2s)$ avec $s \geq 4$

$\underline{sp}(2t,\mathbb{R})$ avec $t \geq 2$

$\underline{e}_{6(-14)}$

$\underline{e}_{7(-25)}$.

(On a des répétitions: $\underline{so}(2,3) \approx \underline{sp}(4,\mathbb{R})$, $\underline{so}(2,4) \approx \underline{su}(2,2)$ et $\underline{so}^\star(8) \approx \underline{so}(2,6)$.) Alors le revêtement universel $\widetilde{G} \to G$ est cyclique infini, et $\widetilde{G}$ est un groupe de Kazhdan par le corollaire 13. Notons que $\widetilde{G}$ n'est pas un groupe linéaire, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun homomorphisme continu injectif de $\widetilde{G}$ dans un groupe $GL_N(\mathbb{C})$, même pour N très grand.

Montrons qu'il existe aussi des groupes de Kazhdan avec centres isomorphes à $\mathbb{R}$. Soit G un groupe de Lie réel connexe à centre banal de la liste ci-dessus et soit K un sous-groupe compact maximal de G. L'action du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G sur lui-même par automorphismes intérieurs se factorise en une action $G \to Aut(\widetilde{G})$. La restriction de cette action à K fournit un produit semi-direct $\widetilde{G} \rtimes K$ qui est l'exemple annoncé. Comme $\widetilde{G}$ a la propriété (T), la proposition 1.9.i montre que $\widetilde{G} \rtimes K$ l'a aussi. On a d'autre part le lemme d'algèbre élémentaire suivant (dont nous laissons la preuve au lecteur):

Lemme. Soient H, N deux groupes et $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$ une action de H sur N. Le centre du produit semi-direct $N \rtimes H$ défini par α est formé des couples (n,k) tels que

(i) k est dans le centre de H,

(ii) $\alpha_k(m) = n^{-1}mn$ pour tout $m \in N$,

(iii) $\alpha_h(n) = n$ pour tout $h \in H$.

Revenons à $\widetilde{G} \rtimes K$. Son centre est donc formé des couples $(\widetilde{g}, k)$ tels que

(i) k est dans le centre de K,

(ii) $p(\widetilde{g})k = 1$, où $p : \widetilde{G} \to G$ désigne la projection de revêtement.

(La condition (iii) du lemme est alors automatiquement vérifiée.) Comme le centre de K est un cercle et comme p est un revêtement cyclique infini, le centre de $\widetilde{G} \rtimes K$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 3
PRINCIPAUX EXEMPLES: GROUPES DISCRETS

Ce chapitre est divisé en quatre parties dont l'objet commun est la description d'exemples. La première et la troisième sont respectivement consacrées aux questions de savoir quand la propriété (T) passe aux sous-groupes et aux sur-groupes. La seconde est un intermède géométrique qui a son intérêt propre, et que nous utilisons dans les preuves de la troisième partie. La quatrième expose des exemples dus à Serre et Gromov.

3.a. SOUS-GROUPES DE KAZHDAN D'UN GROUPE DE KAZHDAN

Toutes les preuves que nous connaissons qui montrent qu'un certain groupe discret infini — par exemple $SL_3(\mathbb{Z})$ — est un groupe de Kazhdan utilisent le résultat d'hérédité du théorème 4, avant lequel nous rappelons un cas particulier de la "continuité de l'induction" (proposition 7.3.7 de [Zim]).

1.- Définition. Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe localement compact G. Rappelons que G/H possède une mesure invariante par G si et seulement si la restriction à H de la fonction module sur G est la fonction module sur H (chapitre I de [Rag]). On dit que H est de *covolume fini* dans G s'il existe une mesure G-invariante finie sur G/H.

2.- Rappel sur l'induction. Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G et π une représentation de H. Pour simplifier, nous supposons de plus H de covolume fini dans G. (Sans cette hypothèse, il faudrait introduire dans la suite des dérivées de Radon-Nykodim.) Soit μ une mesure de probabilité sur G/H invariante par G.

Soit $\mathcal{L}$ l'espace des classes de fonctions mesurables $f : G \to \mathcal{H}_\pi$ telles que

$$f(gh) = \pi(h^{-1})f(g) \qquad \text{pour tout } h \in H \text{ et presque tout } g \in G \ ,$$

classes modulo la relation "$f_1 \sim f_2$ si $f_1(g) = f_2(g)$ pour presque tout $g \in G$". Comme π est unitaire, la (classe de la) fonction réelle $g \longmapsto \|f(g)\|^2$ se factorise en une (classe de) fonction réelle sur G/H, que nous notons (abusivement) $x \longmapsto \|f(x)\|^2$. Soit $\mathcal{K}$ le sous-espace de $\mathcal{L}$ formé des fonctions f telles que

$$\int_{G/H} \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty \ .$$

Alors $\mathcal{K}$ est un espace de Hilbert. L'action à gauche naturelle de G sur $\mathcal{K}$ est une représentation (unitaire et fortement continue) qui est la *représentation de G induite par la représentation π de H* et qu'on note $Ind_H^G \pi$.

3.- Lemme. On conserve les notations du numéro précédent et on suppose de plus que π possède presque des vecteurs invariants. Alors $Ind_H^G \pi$ possède presque des vecteurs invariants.

Preuve. Notons $p : G \to G/H$ la projection canonique. Soit $s : G/H \to G$ une section borélienne de p qui est localement bornée, c'est-à-dire telle que $s(Y)$ est relativement compact dans G pour tout compact Y de G/H. (Pour l'existence d'une telle section, voir le lemme I.5.1 de [Par].) On introduit la fonction

$$r \quad \begin{cases} G \longrightarrow H \\ g \longmapsto s(p(g))^{-1}g \end{cases}$$

telle que $r(gh) = r(g)h$ pour tous $g \in G$ et $h \in H$. On introduit aussi le cocycle

$$\alpha \quad \begin{cases} G \times (G/H) \longrightarrow \qquad H \\ (g, x) \qquad \longmapsto s(x)^{-1}g^{-1}s(gx) \end{cases}$$

tel que $\alpha(g_1, p(g_2)) = r(g_2)r(g_1g_2)^{-1}$ pour tous $g_1, g_2 \in G$.

Considérons un compact K de G, un nombre $\varepsilon > 0$ et un compact Y de G/H tel que $\mu(Y \triangle kY) \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\mu(Y)$ pour tout $k \in K$, où $\triangle$ désigne la différence symétrique. La section s étant localement bornée, il existe un compact L de H tel que $\alpha(K^{-1} \times Y) \subset L$. Par hypothèse sur π, il existe un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ qui est $(\frac{\varepsilon}{2}, L)$-invariant. On définit une fonction $f : G \to \mathcal{H}_\pi$ par

$$f(g) = \begin{cases} \mu(Y)^{-1/2}\pi(r(g)^{-1})\xi & \text{si } p(g) \in Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est évidemment un vecteur unité de $\mathcal{K}$. Montrons que f est (ε, K)-invariant.

Soient $k \in K$ et $g \in G$. Si $p(g) \in Y \cap kY$, on a

$$\begin{aligned}\|f(k^{-1}g) - f(g)\| &= \|\mu(Y)^{-1/2}\{\pi(r(k^{-1}g)^{-1})\xi - \pi(r(g)^{-1})\xi\}\| \\ &= \|\mu(Y)^{-1/2}\pi(r(g)^{-1})\{\pi(\alpha(k^{-1}, p(g))) - 1\}\xi\| \\ &\leq \mu(Y)^{-1/2} \sup_{h \in L} \|\pi(h)\xi - \xi\| < \mu(Y)^{-1/2}\frac{\varepsilon}{2} .\end{aligned}$$

Si $p(g) \in Y$ et $p(g) \notin kY$, on a

$$\|f(k^{-1}g) - f(g)\| = \| - \mu(Y)^{-1/2}\pi(r(g)^{-1})\xi\| = \mu(Y)^{-1/2} .$$

Si $p(g) \notin Y$ et $p(g) \in kY$, on de même

$$\|f(k^{-1}g) - f(g)\| = \mu(Y)^{-1/2} .$$

Enfin, si $p(g) \notin Y \cup kY$, on a $f(k^{-1}g) - f(g) = 0$. Par suite

$$\|(Ind_H^G\pi)(k)f - f\|^2 < \frac{\mu(Y \cap kY)}{\mu(Y)}\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\mu(Y \triangle kY)}{\mu(Y)} < \varepsilon^2 ,$$

et f est bien (ε, K)-invariant. □

4.- Théorème. Soient G un groupe de Kazhdan et H un sous-groupe fermé de G de covolume fini. Alors H est un groupe de Kazhdan.

Preuve. Soit π une représentation de H qui contient presque des vecteurs invariants. Le lemme 3 montre que $Ind_H^G\pi$ contient presque des vecteurs invariants. Comme G est un groupe de Kazhdan, il existe un vecteur unité f_0 invariant par G dans l'espace de la représentation $Ind_H^G\pi$. Ce vecteur f_0 est une fonction mesurable de G dans $\mathcal{H}_\pi$ telle que

$$\begin{aligned}&f_0(xh) = \pi(h^{-1})f_0(x) && \text{pour tout } h \in H, \text{ pour presque tout } x \in G \\ &f_0(gx) = f_0(x) && \text{pour tout } g \in G, \text{ pour presque tout } x \in G .\end{aligned}$$

La seconde de ces relations et une version rudimentaire du théorème de Fubini impliquent qu'il existe $x_0 \in G$ tel que

$$f_0(g) = f_0(x_0) \quad \text{pour presque tout } g \in G .$$

Posons $\xi = f_0(x_0)$, qui est un vecteur non nul de $\mathcal{H}_\pi$. Soit $h \in H$. On a d'une part

$$f_0(xh) = \xi \qquad \text{pour presque tout } x \in G \ ;$$

d'autre part, l'une des relations précédentes s'écrit

$$f_0(xh) = \pi(h^{-1})\xi \qquad \text{pour presque tout } x \in G \ .$$

En comparant, on obtient

$$\pi(h^{-1})\xi = \xi \ .$$

Mais h est quelconque dans H, donc $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ est un vecteur non nul invariant par H. □

5.- Corollaire. (i) Soit Γ un *réseau* (c'est-à-dire un sous-groupe discret de covolume fini) dans un groupe algébrique simple de rang déployé ≥ 2 sur un corps local. Alors Γ est un groupe de Kazhdan. En particulier $SL_n(\mathbb{Z})$ est un groupe de Kazhdan si $n \geq 3$.

(ii) Le groupe $\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ est un groupe de Kazhdan si $n \geq 3$.

Preuve. Cela résulte immédiatement du théorème 2.8, de la proposition 2.10 et du théorème 4 ci-dessus. □

Notons que, si le groupe G du théorème 4 est un groupe de Lie réel connexe simple de centre fini, le théorème de densité de Borel (théorème 3.2.5 de [Zim]) montre que les sous-groupes fermés propres de covolumes finis de G sont précisément les réseaux de G.

Le théorème 4 est aussi utile à montrer que certains groupes n'ont pas la propriété (T). En voici quelques échantillons.

6.- Proposition. Les groupes suivants n'ont pas la propriété (T):

(i) $SL_2(\mathbb{F})$ et $PSL_2(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est un corps local,

(ii) $SL_2(\mathbb{Z})$ et $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Preuve. Il suffit de vérifier que les groupes de l'énoncé possèdent des sous-groupes discrets de covolumes finis qui n'ont pas la propriété (T).

(i) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on peut identifier $PSL_2(\mathbb{R})$ au groupe des isométries hyperboliques du demi-plan de Poincaré P préservant l'orientation. Soit Γ le sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ engendré par les transformations $z \mapsto z+2$ et $z \mapsto -\frac{1}{z}$.

Un théorème classique de Poincaré montre que Γ a pour domaine fondamental le triangle hyperbolique idéal

$$D = \{z \in P : |\mathrm{Re}\, z| < 1 \quad \text{et } |z| > 1\}$$

et que Γ est isomorphe au produit libre de $\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par suite Γ est un réseau dans $PSL_2(\mathbb{R})$. Il n'a pas la propriété (T) car il possède un quotient cyclique infini.

Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on sait que $PSL_2(\mathbb{C})$ possède un réseau Γ qui est isomorphe au groupe de l'entrelac borroméen (et un autre isomorphe au groupe du noeud à quatre croisements). Voir [Ril], [Wie], ainsi que les numéros 1.6 et 4.3 de [Thu]. Comme l'abélianisé de Γ est infini, Γ n'a pas la propriété (T).

Si $\mathbb{F}$ n'est ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$, alors $PSL_2(\mathbb{F})$ possède un sous-groupe libre non abélien cocompact. Voir l'alinéa II.1.5 de [Ser], ainsi que [Iha].

Notons enfin que, vu que $PSL_2(\mathbb{F})$ n'a pas la propriété (T), le groupe $SL_2(\mathbb{F})$ ne l'a pas non plus (proposition 1.9).

Nous donnons une autre preuve de l'assertion (i) au chapitre 6.

(ii) Le sous-groupe $\Gamma \approx \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de $PSL_2(\mathbb{R})$ introduit en (i) est un sous-groupe d'indice fini de $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui n'a pas la propriété (T), donc $SL_2(\mathbb{Z})$ ne l'a pas non plus. □

Le résultat suivant est utilisé ci-dessous au chapitre 7. Il est indépendamment dû à Margulis [Ma2] et Sullivan [Sul].

7.- Proposition. Le groupe $SO(n)$ contient un sous-groupe dénombrable dense ayant la propriété (T) lorsque $n \geq 5$. (Pour $n \leq 4$, voir la proposition 6.26.)

Preuve. Considérons la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 - \sqrt{2}\,(x_{n-1}^2 + x_n^2)$$

Son groupe orthogonal spécial $SO(q)$ est isomorphe à $SO(n-2,2)$ qui est simple et de rang réel 2 pour $n \geq 5$. (Attention à $SO(2,2)$, dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\underline{sl}_2(\mathbb{R}) \times \underline{sl}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire à un produit de deux algèbres de rang 1). Donc $SO(q)$ a la propriété (T) par le théorème 2.8.

Considérons ensuite le corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, son anneau des entiers

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2};\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

et l'élément non banal σ du groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ défini par

$$\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}\ .$$

Posons $\Gamma = SO(q) \cap GL_n(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$. L'application

$$\begin{cases} \Gamma \longrightarrow SO(q) \times SO(\sigma q) \\ \gamma \longmapsto (\gamma, \sigma\gamma) \end{cases}$$

est un plongement dont l'image est discrète de covolume fini (proposition 6.1.3 de [Zim]). La forme σq est définie positive car

$$\sigma q(x) = \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 + \sqrt{2}\ (x_{n-1}^2 + x_n^2)\ .$$

Par suite le groupe $SO(\sigma q)$ est compact, donc $SO(q) \times SO(\sigma q)$ est un groupe de Kazhdan (exemple 1.5.ii et proposition 1.9.ii). Le théorème 4 montre donc que Γ possède la propriété (T).

Il est clair que l'application

$$\begin{cases} \Gamma \longrightarrow SO(\sigma q) \simeq SO(n) \\ \gamma \longmapsto \sigma\gamma \end{cases}$$

est injective. Pour montrer que son image est dense, on peut procéder comme suit. Pour $1 \leq i \leq n-2$ et $n-1 \leq j \leq n$, on note $q^{(ij)}$ la restriction de q au plan des coordonnées x_i et x_j, et $\Gamma^{(ij)} = \Gamma \cap SO(q^{(ij)})$. Comme précédemment, $\Gamma^{(ij)}$ est un réseau dans $SO(q^{(ij)}) \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; en particulier $\Gamma^{(ij)}$ contient une copie de $\mathbb{Z}$. Comme $SO(\sigma q^{(ij)})$ est isomorphe à $SO(2)$, l'injection

$$\begin{cases} \Gamma^{(ij)} \longrightarrow SO(\sigma q^{(ij)}) \\ \gamma \qquad \longmapsto \sigma\gamma \end{cases}$$

est à image dense. Donc la fermeture de l'image de Γ dans $SO(\sigma q)$ contient les sous-groupes à un paramètre associés aux plans x_i, x_j. Il est facile de voir (par exemple en travaillant dans l'algèbre de Lie de $SO(n)$) que ces sous-groupes à un paramètre engendrent un sous-groupe dense de $SO(\sigma q)$. $\square$

3.b. CENTRE D'UNE PARTIE BORNÉE DANS UN ESPACE MÉTRIQUE OÙ L'INÉGALITÉ DE LA MÉDIANE EST VRAIE

Soit X un espace métrique complet. On désigne par $|xy|$ la distance entre deux points x, y de X. On suppose que X satisfait aux deux conditions suivantes:

(i) Pour tous $x, y \in X$, il existe un unique point $m \in X$ tel que $|xm| = |my| = \frac{1}{2}|xy|$; on dit que m est le *milieu du segment* $[x, y]$.

(ii) Soient a, b, c trois points de X; notons m le milieu de $[b, c]$. Alors on a *l'inégalité de la médiane*

$$2|am|^2 + \frac{1}{2}|bc|^2 \leq |ab|^2 + |ac|^2 .$$

Le lemme qui suit est dû à Serre. Il implique un résultat de point fixe de Bruhat et Tits (proposition 6 ci-dessous et lemme 2.3.2 de [BT]).

8.- Lemme du centre. Soit X un espace métrique complet satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ci-dessus. Soit A une partie bornée non vide de X. Pour tout $x \in X$, on pose $\varrho(x) = \sup_{a \in A} |xa|$. Alors il existe un unique point de X réalisant le minimum de la fonction $\varrho : X \to \mathbb{R}_+$.

En d'autres termes, parmi toutes les boules fermées de X qui contiennent A, il en existe une et une seule de rayon minimum. Son centre s'appelle le *centre* de A.

Preuve. Posons $r = \inf_{x \in X} \varrho(x)$. Montrons d'abord qu'on a

$$(*) \qquad \frac{1}{2}|xy|^2 \leq \varrho(x)^2 + \varrho(y)^2 - 2r^2$$

pour tous $x, y \in X$. Pour cela, considérons le milieu m de xy. Pour tout $a \in A$, l'inégalité de la médiane donne

$$\frac{1}{2}|xy|^2 \leq |ax|^2 + |ay|^2 - 2|am|^2 \leq \varrho(x)^2 + \varrho(y)^2 - 2|am|^2 .$$

Comme $\sup_{a \in A} |am| = \varrho(m)$, cela entraîne

$$\frac{1}{2}|xy|^2 \leq \varrho(x)^2 + \varrho(y)^2 - 2\varrho(m)^2 ,$$

d'où $(*)$ puisque $\varrho(m) \geq r$.

On choisit alors une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de X telle que $r = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n)$. La formule $(*)$ montre que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. La limite de cette suite est le centre cherché.

La même formule $(*)$ montre évidemment l'unicité d'un tel centre. QED.

9.- Proposition (Bruhat-Tits). Soit X un espace métrique complet où l'inégalité de la médiane est vraie (conditions (i) et (ii) ci-dessus) et soit G un groupe d'isométries de X ayant une orbite bornée. Alors G a un point fixe dans X.

Preuve. Le centre d'une orbite bornée est évidemment fixe par G. (La preuve originale de [BT] est différente.) □

10.- Exemples. Parmi les espaces métriques complets pour lesquels l'inégalité de la médiane est vérifiée, on trouve:

(i) Les espaces de Hilbert, où on a même l'égalité (voir [Pap], livre VII, proposition 122).

(ii) Les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle non positive ([BT], 3.2.5, et [BGS], théorèmes 1.4 et 2.1).

(iii) Les immeubles de Bruhat-Tits ([BT], 3.2.1).

(iv) Les arbres, et plus généralement les $\mathbb{R}$-arbres (voir le chapitre 6 ci-dessous).

(v) Les espaces satisfaisant $CAT(0)$ au sens de Gromov (remarque 2.4.C de [Gro]).

11.- Corollaire. Soit π un homomorphisme d'un groupe G dans le groupe unitaire $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. S'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}$ tels que $\mathrm{Re}\,\langle \xi | \pi(g)\xi \rangle \geq \varepsilon$ pour tout $g \in G$, alors il existe dans $\mathcal{H}$ un vecteur non nul invariant par $\pi(G)$.

Preuve. L'orbite $A = \pi(G)\xi$ de ξ est une partie bornée non vide de $\mathcal{H}$. Elle possède donc un centre η qui est invariant par $\pi(G)$, et il s'agit de montrer que $\eta \neq 0$.

La plus petite boule centrée à l'origine et contenant A est de rayon 1. Vu le lemme 8, il suffit d'exhiber une boule de rayon strictement inférieur à 1 qui contienne A. Or, en posant $\zeta = \varepsilon\xi$, on a pour tout $g \in G$

$$\|\zeta - \pi(g)\xi\|^2 = \varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon \mathrm{Re}\,\langle\xi|\pi(g)\xi\rangle \quad \leq 1 - \varepsilon^2 \ ,$$

de sorte que la boule de centre ζ et de rayon $(1-\varepsilon^2)^{1/2}$ contient A. (Remarque: il serait inutile ici de supposer G localement compact et π fortement continu.) □

3.c. A PROPOS D'UN THÉORÈME DE WANG

S.P. Wang a montré que la réciproque du théorème 4 est aussi vraie: soit H un sous-groupe fermé de covolume fini d'un groupe G; si H a la propriété (T), alors G l'a aussi (voir le théorème 3.7 de [Wa2] et le théorème 3.9 de [Va1]). Nous montrons ci-dessous un résultat un peu moins fort:

12.- Proposition. Soit H un sous-groupe fermé cocompact d'un groupe localement compact G. Si H a la propriété (T) alors G l'a aussi.

13.- Remarque. Cette proposition constitue bien un cas particulier du résultat de Wang; en d'autres termes le groupe de Kazhdan cocompact H est bien de covolume fini dans G. En effet, la proposition 1.7 montre d'abord que H est unimodulaire, et ensuite que la restriction à H de la fonction modulaire de G est aussi constante. Par suite, G/H admet une mesure G-invariante, et celle-ci est finie car G/H est compact.

14.- Preuve de la proposition 12. On considère une partie compacte J de G telle que $1 \in J$ et $G = JH$, ainsi qu'une partie compacte K de H qui engendre H et telle que $1 \in K$. On se donne un nombre δ tel que $0 < \delta \leq 2$. La proposition 1.16 montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute représentation ϱ de H possédant un vecteur unité (ε, K)-invariant ζ, il existe un vecteur unité $\eta \in \mathcal{H}_\varrho$ invariant par H tel que $\|\eta - \zeta\| < \delta$, et a fortiori tel que $\|\varrho(h)\zeta - \zeta\| < 2\delta$ pour tout $h \in H$.

Soit π une représentation de G qui contient presque des vecteurs invariants. Il existe un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ qui est (ε, JK)-invariant. Pour tout $g \in G$, on écrit $g = jh$ avec $j \in J$ et $h \in H$, puis on calcule

$$\begin{aligned} |1 - \mathrm{Re}\,\langle\xi|\pi(g)\xi\rangle| &\leq |1 - \mathrm{Re}\,\langle\xi|\pi(j)\xi\rangle| + |\mathrm{Re}\,\langle\xi|\pi(j)(\pi(h)\xi - \xi)\rangle| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\pi(j)\xi - \xi\|^2 + \|\pi(h)\xi - \xi\| \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\delta \ . \end{aligned}$$

Pour δ et ε convenables, ceci implique

$$\inf_{g \in G} \mathrm{Re}\,\langle \xi | \pi(g)\xi \rangle > 0$$

et le corollaire 11 montre que π a des vecteurs invariants non nuls. Donc G est un groupe de Kazhdan. □

15.- Corollaire. Soit H un sous-groupe d'indice fini d'un groupe discret G. Alors H est un groupe de Kazhdan si et seulement si G l'est.

Preuve. C'est un cas particulier du théorème 4 et de la proposition 12. □

16.- Démonstration du lemme 2.5. Soit N un entier naturel tel que tout $g \in G$ peut s'écrire

$$g = h_1 h'_1 h_2 h'_2 \dots h_N h'_N$$

($h_i \in H, h'_j \in H'$). Soit K [resp. K'] une partie compacte de H [resp. H'] qui engendre H [resp. H']. Considérons des nombres δ, ε tels que $0 < \delta^2 < 1/8N^2$ et $\varepsilon > 0$, avec ε tel que toute représentation de H [resp. de H'] ayant un vecteur unité ζ[resp. ζ'] qui est (ε, K)-invariant [resp. (ε, K')-invariant] ait aussi un vecteur unité invariant δ-proche de ζ [resp. ζ']; pour ceci, voir la proposition 1.16. Cette même proposition montre que, si π est une représentation de G ayant presque des vecteurs invariants, il existe un vecteur unité $xi \in \mathcal{H}_\pi$ tel que

$$\|\pi(h)\xi - \xi\| < 2\delta$$

pour tout $h \in H \cup H'$. On a donc

$$\|\pi(g)\xi - \xi\| < 4N\delta$$

pour tout $g \in G$. Donc

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi | \pi(g)\xi \rangle > 1 - 8N^2\delta^2$$

pour tout $g \in G$, et π a des vecteurs invariants non nuls par le corollaire 11. □

3.d. EXEMPLES DE SERRE ET DE GROMOV

Les méthodes exposées jusqu'ici sont limitées quant à la variété des exemples de groupes de Kazhdan dénombrables qu'elles permettent de mettre en évidence. Ainsi, le corollaire 5 ci-dessus ne concerne qu'une famille dénombrable d'exemples , dont chacun est un groupe de présentation finie à centre fini.

Pour terminer ce chapitre, nous exposons d'abord un procédé de Serre qui construit des groupes de Kazhdan dénombrables à centres infinis. Puis nous évoquons l'approche de Gromov pour produire des groupes de Kazhdan dénombrables en quantité non dénombrable — en particulier des groupes qui ne sont pas de présentation finie.

17.- Proposition (Serre). Soit Γ un groupe discret ayant la propriété (T), et soient $x_1, \ldots, x_r$ des éléments de $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Soit Γ_x l'extension centrale de Γ par $\mathbb{Z}^r$ définie par $(x_1, \ldots, x_r)$. Alors Γ_x a la propriété (T).

Preuve. On applique le théorème 2.12 au groupe $G = \Gamma_x$ avec sous-groupe central $C = \mathbb{Z}^r$ et quotient $G/C = \Gamma$.

Vérifions que l'abélianisé $\Gamma_x/[\Gamma_x, \Gamma_x]$ est fini. On adopte les notations usuelles de la cohomologie des groupes, et on considère $\mathbb{Q}$ comme module trivial pour les groupes $\mathbb{Z}^r, \Gamma$ et Γ_x. On sait associer à l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \longrightarrow \Gamma_x \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

une suite exacte

$$H^1(\Gamma, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(\Gamma_x, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\ \delta\ } H^2(\Gamma, \mathbb{Q}) \ .$$

Voir le théorème VI.8.1 de [HiS]. Or $H^1(\Gamma, \mathbb{Q}) = \{0\}$ par la proposition 1.7.iv et δ est injectif par hypothèse sur les x_i. Donc $H^1(\Gamma_x, \mathbb{Q}) = \{0\}$. Comme Γ_x est de type fini, cela signifie que $\Gamma_x/[\Gamma_x, \Gamma_x]$ est fini. □

18.- Exemples. Soit G un groupe de Lie réel connexe simple sans centre, de rang réel ≥ 2, tel que l'espace symétrique G/K est hermitien, où K désigne un sous-groupe compact maximal de G; l'algèbre de Lie de G apparaît donc dans la liste des exemples 2.14. Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de G tel que la variété $M = \Gamma\backslash G/K$ soit compacte [Bor]. Comme M

est kählérienne, l'espace vectoriel $H^2(M,\mathbb{C})$ n'est pas réduit à zéro, donc le groupe $H^2(M,\mathbb{Z})$ contient un sous-groupe abélien libre non réduit à zéro. Mais $H^2(M,\mathbb{Z})$ est isomorphe à $H^2(\Gamma,\mathbb{Z})$ puisque le revêtement universel G/K de M est contractile. On peut donc appliquer la proposition 17, qui fournit des exemples de groupes de Kazhdan dénombrables à centres infinis. (On trouve de nombreux résultats sur les espaces de cohomologie de Γ au chapitre VII de [BW].)

19.- Sur les groupes hyperboliques. Pour la fin de ce chapitre, nous nous référons au travail de Gromov sur les "groupes hyperboliques" [Gro]. Des très nombreuses idées de ce livre, ne mentionnons que les quelques points ci-dessous.

Rappelons qu'un espace métrique X est dit géodésique si toute paire de points $x, y \in X$ à distance d peut être jointe par un plongement isométrique du segment $[0,d]$ de la droite réelle. Etant donné un nombre $K \leq 0$, on sait définir une propriété d'un espace géodésique d'être à *courbure* $\leq K$: on impose le résultat du théorème de comparaison de Alexandrov et Toponogov (comparaison d'un triangle géodésique dans une variété riemannienne de courbure $\leq K$ et d'un triangle convenable dans une variété de courbure constante K). On sait par ailleurs généraliser la notion de variété riemannienne en celle d'orbifold: une orbifold est un espace qui est localement donné comme quotient d'une variété riemannienne par un groupe discret d'isométries. On peut définir de même un *orbispace* X de courbure $\leq K$ comme un espace avec données locales X_v/Γ_v, où X_v est un espace géodésique de courbure $\leq K$ et où Γ_v est un groupe fini d'isométries de X_v. Il y a pour ces espaces (au moins dans le "cas rigide") des notions naturelles de revêtement universel et de groupe fondamental. Dans les bons cas ($K < 0$ et géodésiques prolongeables), le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est un exemple de groupe hyperbolique (notion que nous ne définissons pas ici, mais qui généralise celle de groupe fondamental d'une variété close à courbure < 0).

Soit V_1 un espace hyperbolique compact de type quaternionien, c'est-à-dire une variété compacte $V_1 = K\backslash Sp(1,q)/\Gamma$ avec $q \geq 2$, où K désigne un sous-groupe compact maximal de $Sp(1,q)$ et où Γ désigne un sous-groupe discret cocompact sans torsion de $Sp(1,q)$. Alors $\Gamma = \pi_1(V_1)$ est un groupe de Kazhdan (théorème 4 ci-dessus, et chapitre 9).

Gromov définit par "découpages et recollages" une suite $(V_k)_{k\geq 1}$ d'orbispaces à courbure négative avec les propriétés suivantes. D'abord $\pi_1(V_{k+1})$ est un quotient de $\pi_1(V_k)$ pour tout $k \geq 1$. Ensuite tout élément $\gamma \in \Gamma$ a une image dans $\pi_1(V_k)$ qui est d'ordre fini pour k assez grand. Enfin les V_k ont une "limite" V_∞ à courbure non positive, et le groupe $\pi_1(V_\infty)$, qui est un quotient de Γ, est encore un groupe infini.

Plus précisément, il résulte du corollaire 5.5.E de [Gro] qu'on a le résultat suivant (même si la preuve de [Gro] est, pour le moins, elliptique).

20.- Théorème. Soit Γ un sous-groupe sans torsion, discret et cocompact dans $Sp(1,q)$, avec $q \geq 2$. Il existe une suite infinie $(m_j)_{j\geq 1}$ d'entiers positifs avec la propriété suivante:

Pour toute suite $(n_j)_{j\geq 1}$ d'entiers telle que $n_j \geq m_j$ pour $j \geq 1$, il existe un quotient infini $\overline{\Gamma}$ de Γ et des sous-groupes $\overline{\Gamma}_j \subset \overline{\Gamma}$ avec

(1) $\overline{\Gamma}_j = \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$ pour $j \geq 1$,

(2) $\gamma\overline{\Gamma}_j\gamma^{-1} \cap \overline{\Gamma}_k = \{1\}$ pour tous $\gamma \in \overline{\Gamma}$ et $j \neq k$,

(3) tout sous-groupe propre de $\overline{\Gamma}$ est conjugué dans $\overline{\Gamma}$ à un sous-groupe de l'un des $\overline{\Gamma}_j$.

En particulier $\overline{\Gamma}$ est un groupe de torsion, et deux groupes $\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}'$ associés à deux suites $(n_j)_{j\geq 1}$, $(n'_j)_{j\geq 1}$ strictement croissantes et distinctes ne sont pas isomorphes.

21.- Corollaire. (i) Il existe un nombre non dénombrable de groupes discrets de Kazhdan dénombrables.

(ii) Il existe des groupes discrets de Kazhdan qui ne sont pas de présentation finie.

(iii) Il existe des groupes discrets de Kazhdan qui ne sont pas linéaires en caractéristique 0.

Preuve. L'assertion (i) résulte du théorème 9, et (ii) de ce qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de groupes de présentation finie.

Pour l'assertion (iii), on remarque que les exemples de Gromov sont non moyennables par (1.5.i); comme ce sont des groupes de torsion, ils ne contiennent pas de copie du groupe libre sur deux générateurs. Mais Tits a montré (voir [Ti4]) qu'un groupe linéaire en caractéristique 0 qui est non moyennable contient une copie du groupe libre sur deux générateurs. □

CHAPITRE 4

DÉFINITION COHOMOLOGIQUE

DE LA PROPRIÉTÉ (T)

Dans ce chapitre, nous montrons le résultat de P. Delorme et A. Guichardet selon lequel, pour un groupe localement compact, la propriété (T) est équivalente à une propriété de point fixe pour les actions affines.

Pour une partie importante des chapitres 4 et 5, il serait artificiel d'imposer des hypothèses de compacité locale; on y considère donc un *groupe topologique* G, a priori sans restriction. Lorsqu'il y a lieu de supposer G localement compact (notamment aux numéros 4.7, 4.9, 4.18, 5.11 et 5.20), alors G est aussi supposé à base dénombrable, conformément à nos conventions générales adoptées en début de chapitre 1.

Il nous est souvent commode de considérer des *espaces de Hilbert réels*. Nous réservons le terme de *représentation orthogonale* d'un groupe topologique G à une action de G par isométries linéaires d'un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$, l'action $G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ étant toujours supposée continue. Nous utilisons le terme de *représentation unitaire* dans le cas complexe. (Nous ne discutons pas ici, pour les groupes non localement compacts, du problème de l'existence de telles représentations distinctes de la représentation unité [Bak].)

4.a. PROPRIÉTÉ (FH) ET PROPRIÉTÉ (T)

1.- Définitions. Un *espace de Hilbert affine* (réel ou complexe) est un espace homogène principal $\mathcal{H}$ sous l'action d'un espace de Hilbert (respectivement réel ou complexe) $\mathcal{H}^0$ qui est l'espace des *translations* de $\mathcal{H}$. Une *action affine* d'un groupe topologique G sur un tel espace $\mathcal{H}$ est un homomorphisme α de G dans le groupe $Is(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application

$$\begin{cases} G \times \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ (g,\xi) & \longmapsto \alpha(g)\xi \end{cases}$$

est continue.

2.- Actions affines et représentations. Tout homomorphisme continu d'un groupe topologique G dans le groupe des translations $\mathcal{H}^0$ d'un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ fournit une action affine de G sur $\mathcal{H}$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine. On note $\mathcal{U}(\mathcal{H}^0)$ le groupe des isométries linéaires de $\mathcal{H}^0$; c'est le groupe *orthogonal* ou unitaire de $\mathcal{H}^0$, selon que $\mathcal{H}$ est réel ou complexe. Le choix d'une origine $0 \in \mathcal{H}$ fournit une identification de $\mathcal{H}^0$ avec $\mathcal{H}$, ainsi qu'une décomposition en produit semi-direct

$$Is(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^0 \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{H}^0) .$$

Soit $\alpha : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^0)$ une représentation orthogonale ou unitaire de G. En conjuguant α dans $Is(\mathcal{H})$ par une translation, on obtient une action affine de G sur $\mathcal{H}$. Ce procédé fournit précisément les actions affines qui admettent un point fixe. Ces dernières sont aussi caractérisées par le lemme suivant.

3.- Lemme. Soit α une action affine d'un groupe topologique sur un espace de Hilbert affine. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) α possède un point fixe,

(ii) toute orbite de α est bornée,

(iii) α possède une orbite bornée.

Preuve. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont évidentes. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte de la proposition 3.9, car le centre d'une orbite bornée est un point fixe (où "centre" est pris au sens du lemme 3.8). □

4.- Cohomologie. Soit G un groupe topologique. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine; on choisit une origine $0 \in \mathcal{H}$ comme ci-dessus au numéro 2, dont on reprend les notations.

Soit $\alpha : G \to Is(\mathcal{H})$ une action affine. Sa composée avec la projection canonique $Is(\mathcal{H}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^0)$ est une représentation orthogonale ou unitaire π de G. Pour tout $g \in G$, l'isométrie $\alpha(g)$ s'écrit donc comme la composée de l'isométrie linéaire $\pi(g)$ et d'une translation $b(g)$:

$$\alpha(g) = b(g) + \pi(g) .$$

En exprimant que α est un homomorphisme, on obtient la relation

$$(*) \qquad b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h) \quad \text{pour tous } g, h \in G .$$

Réciproquement, si $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^0)$ est une représentation et si $b : G \to \mathcal{H}^0$ est une application continue vérifiant (*), la formule $\alpha(g) = b(g) + \pi(g)$ définit une action affine de G sur $\mathcal{H}$.

Dans le cas particulier où l'action α est conjuguée à π par une translation de vecteur ξ, c'est-à-dire où

$$\alpha(g) : \eta \longmapsto -\xi + \pi(g)(\xi + \eta) \ ,$$

on obtient la relation

$$(**) \qquad b(g) = \pi(g)\xi - \xi \quad \text{pour tout } g \in G \ .$$

Il est évident que (**) implique (*).

Définitions. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^0)$ une représentation et soit $b : G \to \mathcal{H}^0$ une application continue. On dit que b est un *cocycle* par rapport à π si la relation (*) ci-dessus est vérifiée; on note $Z^1(G, \pi)$ l'espace vectoriel de ces cocycles (espace vectoriel réel ou complexe selon que $\mathcal{H}$ est réel ou complexe). On dit que b est un *cobord* par rapport à π s'il existe de plus un vecteur $\xi \in \mathcal{H}^0$ tel que la relation (**) est vérifiée; on note $B^1(G, \pi)$ le sous-espace de $Z^1(G, \pi)$ formé des cobords.

Le *premier espace de cohomologie de G à valeurs* dans π est le quotient $H^1(G, \pi)$ de $Z^1(G, \pi)$ par $B^1(G, \pi)$. Pour une introduction moins sommaire à ces espaces, voir par exemple [Gu1], [Gu2], [Gu4].

5.- Remarque. Tout cocycle b de G par rapport à π peut s'écrire $b(g) = \widetilde{\alpha}(g)\xi - \xi$ où $\widetilde{\alpha}$ est une représentation linéaire *non* isométrique dans $\mathcal{H}^0 \times \mathbb{F}$ (où $\mathbb{F}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le contexte) dont la restriction à $\mathcal{H}^0$ coïncide avec π. Il suffit en effet de poser

$$\widetilde{\alpha}(g)(\eta, \lambda) = (\pi(g)\eta + \lambda b(g), \lambda)$$

(où $g \in G$, $\eta \in \mathcal{H}^0$, $\lambda \in \mathbb{F}$) et

$$\xi = (0, 1) \in \mathcal{H}^0 \times \mathbb{F} \ .$$

Les cocycles cohomologues à b sont alors précisément les cocycles de la forme $g \longmapsto \widetilde{\alpha}(g)\xi' - \xi'$ avec $\xi' \in \mathcal{H}^0 \times \{1\}$.

6.- Définition (Serre). Un groupe topologique G possède la *propriété* (FH) si toute action affine de G sur un espace de Hilbert affine réel ou complexe possède un point fixe.

7.- Théorème. Soit G un groupe topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) G possède la propriété (FH).

(ii) Pour toute représentation orthogonale ou unitaire π de G, l'espace $H^1(G,\pi)$ est réduit à $\{0\}$.

(iii) Pour toute représentation orthogonale ou unitaire π de G, tout cocycle par rapport à π qui est continu est borné en tant que fonction sur G.

Si de plus G est localement compact, ces propriétés sont équivalentes à

(iv) G possède la propriété (T).

8.- Remarques. (a) L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résultent des définitions. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte du lemme 3, car l'image d'un cocycle $b \in Z^1(G,\pi)$ est l'orbite de 0 pour l'action affine que définissent π et b. L'importance du théorème 7 tient donc à l'équivalence des conditions (i) à (iii) avec (iv). Ci-dessous, nous montrons d'abord l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv), due à Guichardet [Gu4], et ensuite l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i), due à Delorme [Del].

(b) Le lien entre les propriétés (T) et (FH) a été observé dès 1974 par S.P. Wang [Wa1]. Celui-ci démontre en effet que toute action affine d'un groupe de Kazhdan G sur un espace de Hilbert affine de dimension *finie* possède un point fixe. Son argument est élémentaire: notons Is_n le groupe des isométries affines de l'espace de Hilbert (réel ou complexe) de dimension n, et considérons un homomorphisme continu $\alpha : G \to Is_n$. Comme Is_n est moyennable, la proposition 1.7 montre que $K = \overline{\alpha(G)}$ est compact. Les vecteurs de la forme $\int_K k(\xi)dk$ sont fixes par K, et donc aussi par $\alpha(G)$.

Nous ignorons s'il est possible de généraliser l'argument de Wang au cas d'un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ de dimension infinie, en tirant parti de ce que le groupe *non* localement compact $Is(\mathcal{H})$ est moyennable [Har].

(c) Dans la condition (ii), le groupe G agit via π par isométries d'un espace de *Hilbert*. Notons qu'on ne peut *pas* généraliser aux actions par isométries sur un espace de Banach.

En effet, soit G un groupe dénombrable de difféomorphismes d'une variété riemannienne compacte X, soit $\mathcal{C}(X)$ l'espace de Banach (pour la norme de la convergence uniforme) des fonctions numériques continues sur X, et soit π la représentation naturelle de G dans $\mathcal{C}(X)$. Notons μ la mesure finie sur X associée à la structure riemannienne. Pour tout $g \in G$, la mesure $g\mu$ est de la forme $e^{c(g)}\mu$, où $c(g) \in \mathcal{C}(X)$ est le logarithme de la valeur absolue du jacobien du difféomorphisme g^{-1} de X. Les règles usuelles de dérivation montrent que $g \mapsto c(g)$ est un cocycle continu dans $Z^1(G,\pi)$. Si $H^1(G,\pi) = \{0\}$, il existe une mesure de probabilité invariante par G dans la classe de μ. Or il existe des exemples avec G de Kazhdan sans telle mesure: c'est le cas de l'action naturelle de $SL_3(\mathbb{Z})$ sur le plan projectif réel. Pour un exemple de ce type, on a par conséquent $H^1(G,\pi) \neq \{0\}$.

9.- Preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 7. Soient G un groupe localement compact et π une représentation orthogonale ou unitaire de G. On munit l'espace vectoriel $Z^1(G,\pi)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G. Ainsi l'espace des cocycles $Z^1(G,\pi)$ est un espace de Fréchet, c'est-à-dire un espace vectoriel topologique métrisable et complet. (Ce n'est un espace de Fréchet que parce que nous avons supposé G à base dénombrable; c'est l'un des rares points où cette hypothèse est utilisée.) On munit $H^1(G,\pi)$ de la topologie quotient. Il n'y a bien sûr aucune raison de croire en général que $B^1(G,\pi)$ soit fermé dans $Z^1(G,\pi)$ et que $H^1(G,\pi)$ soit séparé. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) résulte du lemme suivant.

Lemme (Guichardet). Soient G un groupe localement compact et π une représentation orthogonale ou unitaire de G qui possède presque des vecteurs invariants. Si $H^1(G,\pi)$ est séparé, alors π possède des vecteurs invariants non nuls.

Preuve. Supposons que π ne possède aucun vecteur invariant non nul, et montrons que $H^1(G,\pi)$ n'est pas séparé.

Considérons l'application linéaire $\beta : \mathcal{H}_\pi \rightarrow Z^1(G,\pi)$ définie par $\beta(\xi)(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tous $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ et $g \in G$. Elle est injective par hypothèse sur π et son image est l'espace $B^1(G,\pi)$ des cobords. Vérifions que l'application β est continue. Pour toute semi-norme ν définissant la topologie de $Z^1(G,\pi)$, il faut trouver une constante $c \geq 0$ telle que $\nu(\beta(\xi)) \leq c\|\xi\|$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$. Mais ν est de la forme

$$\nu(b) = \sup_{g\in K} \|b(g)\| \qquad \text{pour tout } b \in Z^1(G,\pi)$$

où K est une partie compacte de G, et on peut donc poser $c = 2$.

Comme π possède presque des vecteurs invariants, il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs unité dans $\mathcal{H}_\pi$ telle que la suite de fonctions

$$\{g \longmapsto \pi(g)\xi_n - \xi_n\}_{n\geq 1}$$

tende vers zéro uniformément sur tout compact de G. L'application

$$\beta^{-1} : B^1(G,\pi) \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$$

n'est donc pas continue. Dès lors $B^1(G,\pi)$ n'est pas fermé dans $Z^1(G,\pi)$: sinon $B^1(G,\pi)$ serait un espace de Fréchet et le théorème du graphe fermé impliquerait que l'inverse β^{-1} de l'application continue bijective β serait aussi une application continue. Il en résulte que l'espace $H^1(G,\pi)$ n'est pas séparé. $\square$

Ce lemme montre qu'on peut ajouter aux propriétés du théorème 7 une propriété supplémentaire (lorsque G est localement compact):

(ii') Pour toute représentation orthogonale ou unitaire π de G, l'espace $H^1(G,\pi)$ est séparé.

4.b. LA FAMILLE $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$ ASSOCIÉE À UN ESPACE DE HILBERT AFFINE

La fin de ce chapitre 4 est consacrée à la preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) du théorème 7. Nous suivons dès le numéro 13 une stratégie suggérée par J-P. Serre.

10.- Définitions. Soit G un groupe topologique. On dit que G possède la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$ si toute action affine de G sur un espace de Hilbert affine réel possède un point fixe.

Lorsque G est localement compact, on dit que G possède la propriété $(T)_{\mathbb{R}}$ si toute représentation orthogonale de G possédant presque des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls.

11.- Lemme. (i) Un groupe topologique G qui possède la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$ possède aussi la propriété (FH).

(ii) Un groupe localement compact G qui possède la propriété (T) possède aussi la propriété $(T)_{\mathbb{R}}$.

Preuve. (i) Soit α une action affine de G sur un espace de Hilbert affine complexe $\mathcal{H}$. Alors G agit aussi affinement sur l'espace réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ sous-jacent à $\mathcal{H}$. Si G possède la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$, il existe un point $\xi \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ fixe par G. Ce point peut aussi être vu dans $\mathcal{H}$, donc ξ est fixe pour α.

(ii) Soient $\mathcal{H}^0$ un espace de Hilbert réel et $\alpha : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^0)$ une représentation orthogonale de G possédant presque des vecteurs invariants. On définit l'espace complexe $\mathcal{H}^0_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et la représentation unitaire $\pi_{\mathbb{C}} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^0_{\mathbb{C}})$ par $\pi_{\mathbb{C}}(g) = \pi(g) \otimes id$, et il est évident que $\pi_{\mathbb{C}}$ possède presque des vecteurs invariants. Si G possède la propriété (T), il existe dans $\mathcal{H}^0_{\mathbb{C}}$ un vecteur non nul invariant de la forme

$$\xi = \xi_1 \otimes 1 + \xi_2 \otimes i$$

avec ξ_1 et ξ_2 dans $\mathcal{H}^0$. Les vecteurs ξ_1 et ξ_2 sont invariants par π, et l'un d'entre eux au moins n'est pas nul. □

12.- Remarque et convention. L'intérêt des définitions 10 et du lemme 11 est de ramener la preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$(i) du théorème 7, c'est-à-dire $(T) \Rightarrow (FH)$, à celle de $(T)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (FH)_{\mathbb{R}}$. Jusqu'à la fin du chapitre, nous ne considérons plus que des *espaces de Hilbert réels* et des représentations *orthogonales.*

Avant la preuve proprement dite de l'implication $(T)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (FH)_{\mathbb{R}}$, nous exposons une construction associant à un espace de Hilbert *affine* $\mathcal{H}$ une famille $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$ d'espaces *vectoriels.*

13.- Proposition. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine et t un nombre réel strictement positif. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}_t$ et une application continue

$$\gamma_t : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H}_t \\ \xi & \longmapsto \xi_t \end{cases}$$

dont l'image engendre topologiquement $\mathcal{H}_t$, tels que

$$\langle \xi_t | \eta_t \rangle = \exp(-t\|\xi - \eta\|^2)$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. La paire $(\mathcal{H}_t, \gamma_t)$ est déterminée à isomorphisme unique près par ces conditions. En particulier, étant donné un groupe topologique G et une action affine α de G sur $\mathcal{H}$, il existe une représentation orthogonale π_t de G dans $\mathcal{H}_t$ telle que

$$(\alpha(g)\xi)_t = \pi_t(g)(\xi_t)$$

pour tous $g \in G$ et $\xi \in \mathcal{H}$.

Preuve. Cette proposition résulte immédiatement des constructions de type GNS exposées au chapitre 5 (voir le n°5.10). Nous en donnons ici une autre preuve, basée sur la notion d'exponentielle d'un espace de Hilbert (voir le chapitre 2 de [Gu1]). Nous sollicitons l'indulgence des puristes qui nous reprocheront le point de départ vectoriel (plutôt qu'affine) de cette preuve.

Choisissons une origine $0 \in \mathcal{H}$ et identifions $\mathcal{H}$ à l'espace $\mathcal{H}^0$ de ses translations (voir le n°2). Pour tout entier $n \geq 0$, notons $(\mathcal{H}^0)^{\otimes n}$ l'espace de Hilbert produit tensoriel de n copies de $\mathcal{H}^0$ et posons

$$\mathrm{EXP}\,\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathcal{H}^0)^{\otimes n}$$

(la somme directe est hilbertienne). Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, posons

$$\begin{aligned}\mathrm{EXP}\,\xi &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1/2}\xi^{\otimes n} \\ &= 1 \,\oplus\, \xi \,\oplus\, \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\otimes\xi \,\oplus\, \frac{1}{\sqrt{3!}}\xi\otimes\xi\otimes\xi \,\oplus\, \cdots\end{aligned}$$

Alors

$$\langle \mathrm{EXP}\,\xi \,|\, \mathrm{EXP}\,\eta\rangle = \exp\langle\xi|\eta\rangle$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Pour tout $t > 0$ et pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, posons

$$\xi_t = \exp(-t\|\xi\|^2)\,\mathrm{EXP}(\sqrt{2t}\,\xi)$$

On a

$$\begin{aligned}\langle\xi_t|\eta_t\rangle &= \exp(-t\|\xi\|^2 - t\|\eta\|^2)\exp(2t\langle\xi|\eta\rangle) \\ &= \exp(-t\|\xi-\eta\|^2)\ .\end{aligned}$$

En particulier, ξ_t est un vecteur unité pour tous $\xi \in \mathcal{H}$ et $t > 0$. On définit $\mathcal{H}_t$ comme étant le sous-espace fermé de $\mathrm{EXP}\,\mathcal{H}$ engendré par les ξ_t avec $\xi \in \mathcal{H}$.

Si $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sont des points distincts de $\mathcal{H}$, on montre que les vecteurs $(\xi_1)_t, \ldots, (\xi_m)_t$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{H}_t$. (Proposition 2.2 de [Gu1]; l'hypothèse $t > 0$ est ici cruciale.)

Soient $(\mathcal{H}'_t, \gamma'_t)$ et $(\mathcal{H}''_t, \gamma''_t)$ deux paires vérifiant les conditions de l'énoncé; on écrit $\xi'_t = \gamma'_t(\xi)$ et $\xi''_t = \gamma''_t(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. D'une part, il est clair qu'il existe au plus un isomorphisme $U : \mathcal{H}'_t \to \mathcal{H}''_t$ tel que $U(\xi'_t) = \xi''_t$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. D'autre part, on a

$$\langle\xi'_t|\eta'_t\rangle = \exp(-t\|\xi-\eta\|^2) = \langle\xi''_t|\eta''_t\rangle$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, de sorte que $\xi'_t \mapsto \xi''_t$ s'étend en un isomorphisme de $\mathcal{H}'_t$ sur $\mathcal{H}''_t$. □

14.- Lemme. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine et $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de $\mathcal{H}$ tendant vers l'infini (c'est-à-dire telle que $\lim_{n\to\infty}\|\xi_n - \xi\| = \infty$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$). On considère un nombre $t > 0$ et l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_t$ de la proposition 13. Alors

$$\lim_{n\to\infty}\langle(\xi_n)_t|\eta\rangle = 0$$

pour tout $\eta \in \mathcal{H}_t$; en d'autres termes, la suite de n-ième terme $(\xi_n)_t$ tend faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}_t$.

Preuve. Considérons un nombre $\varepsilon > 0$ et un vecteur $\eta \in \mathcal{H}_t$. Il existe un entier $m \geq 1$, des points $\eta_1, \ldots, \eta_m$ de $\mathcal{H}$ et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que

$$\|\eta - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\eta_i)_t\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation $\|(\xi_n)_t\| = 1$ pour tout $n \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\langle(\xi_n)_t|\eta\rangle\right| &\leq \left|\langle(\xi_n)_t|\eta - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\eta_i)_t\rangle\right| + \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \; \left|\langle(\xi_n)_t|(\eta_i)_t\rangle\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \exp(-t\|\xi_n - \eta_i\|^2) \ . \end{aligned}$$

Comme $(\xi_n)_{n\geq 1}$ tend vers l'infini dans $\mathcal{H}$, on a bien $\left|\langle(\xi_n)_t|\eta\rangle\right| \leq \varepsilon$ pour n assez grand. □

15.- Proposition. Soit α une action affine d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$, soit t un nombre réel strictement positif, et soient $\mathcal{H}_t$ et π_t comme à la proposition 13. Pour que l'action α possède un point fixe, il faut et il suffit que la représentation π_t possède des vecteurs invariants non nuls.

Preuve. Si ξ est un point de $\mathcal{H}$ fixe par α, alors ξ_t est un vecteur unité de $\mathcal{H}_t$ invariant par π_t.

Pour la suffisance, supposons que la représentation π_t possède un vecteur invariant non nul $\eta \in \mathcal{H}_t$. Supposons par l'absurde que l'action α n'ait pas de point fixe; nous allons aboutir à une contradiction. Soit $\xi \in \mathcal{H}$. L'orbite $\alpha(G)\xi$ n'étant pas bornée (lemme 3), il existe une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de G telle que la suite $(\alpha(g_n)\xi)_{n\geq 1}$ tende vers l'infini dans $\mathcal{H}$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \langle(\alpha(g_n)\xi)_t|\eta\rangle && \text{par le lemme 14} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle\pi_t(g_n)\xi_t|\eta\rangle && \text{par définition de } \pi_t \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle\xi_t|\pi_t(g_n^{-1})\eta\rangle && \text{par orthogonalité de } \pi_t \\ &= \langle\xi_t|\eta\rangle && \text{par invariance de } \eta \ . \end{aligned}$$

Le vecteur non nul $\eta \in \mathcal{H}_t$ est donc orthogonal à ξ_t pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{H}_t$ est topologiquement engendré par les ξ_t. □

16.- Lemme. On reprend les notations de la proposition 13. On considère une partie bornée A de l'espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ et son image A_t par l'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_t$. Alors A_t est bornée pour tout $t > 0$, et $\lim_{t \to 0} \operatorname{diam}(A_t) = 0$.

Preuve. Pour tous $\xi, \eta \in A$, on a

$$\begin{aligned} \|\xi_t - \eta_t\|^2 &= 2\{1 - \exp[-t\|\xi - \eta\|^2]\} \\ &\leq 2\{1 - \exp[-t(\operatorname{diam} A)^2]\} \ . \end{aligned}$$

Par suite

$$(\operatorname{diam}(A_t))^2 \leq 2\{1 - \exp[-t(\operatorname{diam} A)^2]\} \ .$$

□

Si on avait tenu à définir $\mathcal{H}_t$ pour $t = 0$, les formules de la preuve de la proposition 13 nous auraient conduit à poser $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$ et $\xi_0 = 1$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. On peut donc comprendre le lemme 16 comme un énoncé de continuité pour la famille $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$ qui "se contracte" sur $\mathbb{R}$ quand t tend vers 0.

17.- Proposition. Soit α une action affine d'un groupe localement compact G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ et soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers 0. On écrit ici $\mathcal{H}_n$ l'espace de Hilbert noté $\mathcal{H}_{t_n}$ à la proposition 13, et π_n la représentation orthogonale de G correspondante.

Alors la représentation $\bigoplus_{n \geq 1} \pi_n$ de G dans $\bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{H}_n$ possède presque des vecteurs invariants.

Preuve. Etant donné $\xi \in \mathcal{H}$ et $n \geq 1$, on écrit ci-dessous ξ_n au lieu de ξ_{t_n}.

On considère un nombre $\varepsilon > 0$ et une partie compacte $K \subset G$; on suppose que K contient l'élément unité. Soit $\xi \in \mathcal{H}$. Le lemme 16 montre qu'il existe un entier m tel que $\operatorname{diam}[(\alpha(K)\xi)_m] < \varepsilon$. Le vecteur unité $\xi_m \in \mathcal{H}_m$ est alors (ε, K)-invariant pour π_m, car

$$\begin{aligned} \|\pi_m(g)\xi_m - \xi_m\| &= \|(\alpha(g)\xi)_m - \xi_m\| \\ &\leq \operatorname{diam}[(\alpha(K)\xi)_m] < \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $g \in K$. Comme π_m est une sous-représentation de $\bigoplus_{n \geq 1} \pi_n$, ceci achève la preuve. □

Proposition 18. Soit G un groupe localement compact. Si G possède la propriété $(T)_{\mathbb{R}}$ de la définition 10, alors G possède aussi la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$.

Preuve. Soit α une action affine de G sur un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}$. On choisit une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs tendant vers 0. La proposition 17 montre que la représentation orthogonale $\pi = \bigoplus_{n\geq 1} \pi_n$ de G possède presque des vecteurs invariants. Si G possède la propriété $(T)_{\mathbb{R}}$, cette représentation possède un vecteur invariant $\eta \neq 0$. Soit m un entier tel que la composante $\eta_m \in \mathcal{H}_m$ de η ne soit pas nulle. Alors η_m est un vecteur invariant non nul pour π_m. Il résulte de la proposition 15 que l'action α possède un point fixe. □

Ceci achève la preuve du théorème 7 (voir la remarque 12). Notons que les propositions 17 et 18 restent vraies pour un groupe topologique non nécessairement localement compact si on convient d'étendre à ce cas la définition 10 (propriété $(T)_{\mathbb{R}}$) et la définition 1.1 (posséder presque des vecteurs invariants).

COMPLÉMENT AU §3.c.

19.- Corollaire (Wang). Soit H un sous-groupe fermé de covolume fini d'un groupe localement compact G. Si H a la propriété (T), alors G l'a aussi.

Preuve. Notons μ une mesure de probabilité G-invariante sur l'espace homogène $X = G/H$. Soit α une action affine de G sur un espace de Hilbert. Il suffit de vérifier que α possède un point fixe. Comme H possède la propriété (FH), la restriction de α à H possède un point fixe ξ. Pour tout $x \in X$, on peut définir ξ_x comme étant le vecteur $\alpha(g)\xi$, où $g \in G$ est un représentant de x. Montrons que la fonction $x \longmapsto \xi_x$ est bornée.

Soit ν l'image de μ par $x \longmapsto \xi_x$; soit B une boule de centre ξ et de rayon assez grand pour que $\nu(B) > 0$. Si la fonction $x \longmapsto \xi_x$ n'était pas bornée, il existerait une suite $(g_j)_{j\geq 1}$ dans G telle que les boules $B_j = \alpha(g_j)B$ soient disjointes deux à deux; par G-invariance de ν, on aurait $\nu(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = n\nu(B) > 1$ pour n assez grand, ce qui est absurde.

On peut donc définir le vecteur $\int_x \xi_x d\mu(x)$, et on vérifie qu'il est fixe par $\alpha(G)$. Nous remercions E. Ghys et S.G. Dani, qui ont respectivement vu une erreur dans une première rédaction de cette preuve, et fourni la correction. □

CHAPITRE 5

PROPRIÉTÉ (T), FONCTIONS DE TYPE POSITIF ET FONCTIONS CONDITIONNELLEMENT DE TYPE NÉGATIF

Dans ce chapitre, nous donnons d'autres caractérisations de la propriété (T); elles complètent le théorème 4.7. Les principaux résultats sont ici les théorèmes 11 et 20.

De même qu'au chapitre 4, les groupes topologiques considérés ne sont *pas* automatiquement supposés être localement compacts. La lettre X désigne en général un espace topologique. Rappelons qu'un *noyau* sur X est une fonction continue à valeurs scalaires sur $X \times X$.

5.a. NOYAUX DE TYPE POSITIF

1.- Définition. Un noyau $\Phi : X \times X \to \mathbb{C}$ est de *type positif* si, pour tout entier $n \geq 1$, pour tous points $x_1, \ldots, x_n \in X$ et pour tous nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j \Phi(x_i, x_j) \geq 0 .$$

Notons qu'un tel noyau est hermitien. Soient en effet x_1 et x_2 deux points de X. La condition de positivité avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ implique que $\Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_1)$ est réel, avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = i$ que $i\Phi(x_1, x_2) - i\Phi(x_2, x_1)$ est réel. On a donc nécessairement l'identité

$$\Phi(x_2, x_1) = \overline{\Phi(x_1, x_2)}$$

que certains auteurs incorporent à la définition.

Un noyau réel $\Phi : X \times X \to \mathbb{R}$ est de type positif s'il vérifie la condition ci-dessus avec des λ_i réels *et* s'il est symétrique, c'est-à-dire si $\Phi(x_2, x_1) = \Phi(x_1, x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in X$.

2.- Exemples. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. Le noyau

$$\begin{cases} \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle \end{cases}$$

est évidemment de type positif. Par suite, si $\eta : X \to \mathcal{H}$ est une application continue, le noyau Φ défini sur X par $\Phi(x,y) = \langle \eta(x) | \eta(y) \rangle$ est de type positif. Nous allons voir que cet exemple est universel, en suivant le §3.1 de [Gu1].

Signalons aussi l'exemple explicite qui apparaît plus bas au numéro 10.

3.- Proposition. Soit Φ un noyau de type positif sur X. Il existe un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}_\Phi$ et une application continue $\eta_\Phi : X \to \mathcal{H}_\Phi$ tels que $\mathcal{H}_\Phi$ est topologiquement engendré par l'image de η_Φ et tels que

$$\Phi(x,y) = \langle \eta_\Phi(x) | \eta_\Phi(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in X$. La paire $(\mathcal{H}_\Phi, \eta_\Phi)$ est déterminée à isomorphisme unique près par ces deux conditions. En particulier, si un groupe topologique G agit continûment sur X en préservant Φ, il existe une représentation unitaire π_Φ de G sur $\mathcal{H}_\Phi$ telle que

$$\eta_\Phi(gx) = \pi_\Phi(g)\eta_\Phi(x)$$

pour tous $g \in G$ et $x \in X$.

Preuve. On utilise une construction du type GNS (Gelfand-Naimark-Segal). Soit V l'espace vectoriel des fonctions $X \to \mathbb{C}$ à supports finis. On définit une forme hermitienne positive (non nécessairement définie positive!) sur V par

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \sum_{x,y \in X} \overline{f_1(x)}\, f_2(y) \Phi(x,y)$$

et une application $\eta : X \to V$ qui applique un point de X sur sa fonction caractéristique. Soit $\mathcal{H}_\Phi$ l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V, et soit η_Φ la composition de η avec la projection canonique de V dans $\mathcal{H}_\Phi$; l'application η_Φ est continue parce que le noyau Φ est continu. La paire $(\mathcal{H}_\Phi, \eta_\Phi)$ vérifie les deux conditions de l'énoncé.

Soient $(\mathcal{H}_1, \eta_1)$ et $(\mathcal{H}_2, \eta_2)$ deux paires vérifiant ces conditions. Il est clair qu'il y a au plus un isomorphisme de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ qui entrelace η_1 et η_2. D'autre part les égalités

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_1(x_i) \Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i}\, \lambda_j \Phi(x_i, x_j) = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_2(x_i) \Big\|^2$$

montrent qu'on obtient un tel isomorphisme $\alpha : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ en posant

$$\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_1(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_2(x_i)$$

pour tout choix d'un entier $n \geq 1$, de points $x_1, \ldots, x_n \in X$ et de nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Pour une variante de cette construction où V est remplacé par un espace de fonctions continues, voir par exemple le n°3.3.1 de [BCR]. $\square$

4.- Remarques. (a) Dans l'énoncé de la proposition précédente, supposons de plus que le groupe G agit transitivement sur X. Alors, pour tout $x_0 \in X$, le vecteur $\eta_\Phi(x_0)$ est *cyclique* pour π_Φ; autrement dit, le plus petit sous-espace fermé invariant par G et contenant $\eta_\Phi(x_0)$ est $\mathcal{H}_\Phi$ tout entier.

(b) La première assertion du corollaire suivant est due à Schur (Satz VII de [Sch]).

5.- Corollaire. (i) Soient Φ_1 et Φ_2 deux noyaux de type positif sur l'espace X. Le produit ponctuel

$$\Phi_1\Phi_2 : (x,y) \longmapsto \Phi_1(x,y)\Phi_2(x,y)$$

est encore de type positif.

(ii) Soit Φ un noyau de type positif sur X tel que $|\Phi(x,y)| < 1$ pour tous $x, y \in X$. Alors le noyau

$$(x,y) \longmapsto \{1 - \Phi(x,y)\}^{-t}$$

est de type positif pour tout nombre réel $t \geq 0$.

Preuve. (i) La proposition 3 montre qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}_j$ et une application continue $\eta_j : X \to \mathcal{H}_j$ tels que $\Phi_j(x,y) = \langle \eta_j(x) | \eta_j(y) \rangle$ pour tous $x, y \in X$ (où $j = 1,2$). Soit $\eta : X \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ l'application continue définie par $\eta(x) = \eta_1(x) \otimes \eta_2(x)$. L'assertion (i) résulte de ce que

$$\Phi_1(x,y)\Phi_2(x,y) = \langle \eta(x) | \eta(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in X$.

(ii) L'ensemble des noyaux de type positif sur X est un cône convexe dans l'espace des fonctions continues de $X \times X$ dans $\mathbb{C}$, cône qui est fermé pour la topologie de la convergence simple. L'assertion (ii) résulte donc de (i) et de ce que la série

$$1 + t\Phi + \frac{t(t+1)}{2!}\Phi^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Phi^3 + \ldots$$

converge simplement vers $(1-\Phi)^{-t}$. □

6.- Définition. Une *fonction de type positif* sur un groupe topologique G est une fonction continue $\varphi : G \to \mathbb{C}$ telle que le noyau

$$\begin{cases} G \times G & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ (g,h) & \longmapsto \quad \varphi(g^{-1}h) \end{cases}$$

est de type positif.

7.- Exemples. Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace X en préservant un noyau Φ de type positif et soit x_0 un point de X. La fonction définie sur G par $\varphi(g) = \Phi(x_0, gx_0)$ est de type positif.

Soient $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation unitaire de G et ξ un vecteur de $\mathcal{H}$. La fonction définie sur G par $\varphi(g) = \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$ est de type positif. La proposition 3 montre que cet exemple est universel. De plus, en exploitant la remarque 4, on arrive à l'énoncé suivant, déjà donné dans les préliminaires à la preuve de la proposition 2.2.

8.- Proposition. Soit φ une fonction de type positif sur un groupe topologique G. Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\varphi$, une représentation unitaire π_φ de G sur $\mathcal{H}_\varphi$ et un vecteur $\xi_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ cyclique pour π_φ (au sens de la remarque 4) tels que

$$\varphi(g) = \langle \xi_\varphi | \pi_\varphi(g)\xi_\varphi \rangle$$

pour tout $g \in G$. Le triple $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ est déterminé à isomorphisme unique près par ces conditions.

Voici la justification du deuxième pas du n°2.3.

9.- Proposition. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe fermé de G.

(a) Si φ, ψ, χ sont des fonctions de type positif sur G telles que $\varphi = \psi + \chi$, alors π_ψ est une sous-représentation de π_φ.

(b) Si φ est une fonction constante strictement positive, alors π_φ est la représentation unité de dimension 1.

(c) Si φ est une fonction de type positif sur G, alors la représentation $\pi_{\varphi|H}$ de H est une sous-représentation de la restriction à H de π_φ.

(d) Soit π une représentation de G, soit $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ et soit φ la fonction de type positif définie par $\varphi(g) = \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$. Alors π_φ est une sous-représentation de π.

Preuve. (a) Etant donné un entier $n \geq 1$, des éléments $g_1, \ldots, g_n \in G$ et des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_\psi(g_i)\xi_\psi \Big\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i} \lambda_j \psi(g_i^{-1} g_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i} \lambda_j \varphi(g_i^{-1} g_j) = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_\varphi(g_i)\xi_\varphi \Big\|^2 \end{aligned}$$

où l'inégalité résulte de ce que χ est de type positif. Ceci montre que l'application linéaire définie par

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_\varphi(g_i)\xi_\varphi \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_\psi(g_i)\xi_\psi$$

s'étend en un opérateur continu surjectif $A : \mathcal{H}_\varphi \to \mathcal{H}_\psi$ qui entrelace les représentations π_φ et π_ψ. L'orthogonal $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ du noyau de A est donc un sous-espace invariant de $\mathcal{H}_\varphi$ sur lequel G agit par une représentation équivalente à π_ψ.

L'assertion (b) résulte de la preuve de la proposition 3. L'assertion (c) est un cas particulier de (d), car $\varphi|H$ est un coefficient de la restriction de π_φ à H.

(d) L'assertion d'unicité de la proposition 8 montre que la représentation de G sur le sous-espace fermé de $\mathcal{H}_\pi$ engendré par $\pi(G)\xi$ est équivalente à la représentation π_φ. □

10.- Autre preuve de la proposition 4.13. Notons d'abord que la proposition 3 et sa preuve valent aussi dans le contexte réel.

Plus précisément, soit Φ un noyau réel de type positif sur X. Il existe un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\Phi$ et une application continue $\eta_\Phi : X \to \mathcal{H}_\Phi$ tels que $\mathcal{H}_\Phi$ est topologiquement engendré par l'image de η_Φ et tels que $\Phi(x,y) = \langle \eta_\Phi(x) | \eta_\Phi(y) \rangle$ pour tous $x, y \in X$. La paire $(\mathcal{H}_\Phi, \eta_\Phi)$ est déterminée à isomorphisme unique près par ces conditions. En particulier, si un groupe topologique G agit continûment sur X en préservant Φ, il existe une représentation orthogonale π_Φ de G sur $\mathcal{H}_\Phi$ telle que $\eta_\Phi(gx) = \pi_\Phi(g)\eta_\Phi(x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$.

La proposition 4.13 résulte immédiatement de ce qui précède à condition qu'on montre que, si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert affine réel, alors le noyau réel

$$\begin{cases} \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) & \longmapsto \quad \exp(-t\|\xi - \eta\|^2) \end{cases}$$

est de type positif. En choisissant une origine $0 \in \mathcal{H}$, on réduit le problème à celui de montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{H}^0 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto \quad \exp(-t\|\xi\|^2) \end{cases}$$

est de type positif sur le groupe additif de $\mathcal{H}^0$. Ce groupe n'est pas localement compact si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie. Cependant, comme chacune des inégalités de la définition 1 ne fait intervenir qu'un nombre fini de points du groupe, on ne restreint pas la généralité de ce qui suit en supposant $\mathcal{H}^0$ de dimension finie, donc en identifiant $\mathcal{H}^0$ à un espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On identifie de plus $\mathbb{R}^n$ à son dual.

La fonction φ est la transformée de Fourier de la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \sqrt{\dfrac{\pi}{4t}} \exp\left(- \dfrac{\|x\|^2}{4t} \right) \end{cases}$$

qui est positive. Or on vérifie aisément que la transformée de Fourier d'une fonction positive est de type positif. (C'est une partie banale du théorème de Bochner, déjà utilisé au numéro 2.3.) Donc φ est bien de type positif. $\square$

Il est temps d'arriver au lien entre fonctions de type positif et propriété (T):

11.- Théorème. Soit G un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) G possède la propriété (T).

(ii) Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de type positif sur G normalisées par $\varphi_n(1) = 1$. Si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction constante 1 uniformément sur tout compact de G, alors $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1 uniformément sur G.

Preuve. Montrons d'abord l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite satisfaisant les hypothèses de (ii). Pour tout $n \geq 1$, la proposition 8 montre qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}_n$, une représentation unitaire π_n de G dans $\mathcal{H}_n$ et un vecteur unité $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ tels que

$$\varphi_n(g) = \langle \xi_n | \pi_n(g)\xi_n \rangle$$

pour tout $g \in G$.

Soit K une partie compacte de G qui engendre G (théorème 1.11). Soit $\delta > 0$, et soit $\varepsilon > 0$ comme à la proposition 1.16: pour toute représentation π de G possédant un vecteur unité (ε, K)-invariant $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, il existe donc un vecteur unité $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ invariant par G tel que $\|\eta - \xi\| < \delta$. Si n est assez grand, on a

$$\|\pi_n(k)\xi_n - \xi_n\|^2 = 2\Big(1 - \mathrm{Re}\,\langle \xi_n | \pi_n(k)\xi_n \rangle\Big) < \varepsilon^2$$

pour tout $k \in K$, de sorte qu'il existe un vecteur unité G-invariant $\eta_n \in \mathcal{H}_n$ tel que $\|\eta_n - \xi_n\| < \delta$. Comme le coefficient $g \mapsto \langle \eta_n | \pi(g)\eta_n \rangle$ est la fonction constante de valeur 1, la condition $\|\eta_n - \xi_n\| < \delta$ implique

$$\sup_{g\in G} |1 - \varphi_n(g)| < 2\delta \ .$$

Comme δ est arbitraire, ceci achève la preuve.

Montrons l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ une suite de parties compactes de G qui recouvrent G. Soit π une représentation de G qui possède des vecteurs invariants. Pour tout $n \geq 1$, il existe un vecteur unité $\xi_n \in \mathcal{H}_\pi$ qui est $(\frac{1}{n}, K_n)$-invariant. Posons

$$\varphi_n(g) = \langle \xi_n | \pi(g)\xi_n \rangle$$

pour tout $g \in G$ et tout $n \geq 1$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1 uniformément sur tout compact de G. Comme $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur G, on a

$$\operatorname*{Inf}_{g\in G} \mathrm{Re}\,\langle \xi_n | \pi(g)\xi_n \rangle \geq \frac{1}{2}$$

dès que n est assez grand. Le corollaire 3.11 montre donc qu'il existe dans $\mathcal{H}_\pi$ un vecteur non nul invariant par G. □

5.b. NOYAUX CONDITIONNELLEMENT DE TYPE NÉGATIF

12.- Définitions. Un noyau réel $\Psi : X \times X \to \mathbb{R}$ est *conditionnellement de type négatif* si

(a) Ψ est nul sur la diagonale,

(b) Ψ est symétrique,

(c) pour tout entier $n \geq 2$, pour tous points $x_1, \ldots, x_n \in X$ et pour tous nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \Psi(x_i, x_j) \leq 0 .$$

Une *fonction réelle conditionnellement de type négatif* sur un groupe topologique G est une fonction continue $\psi : G \to \mathbb{R}$ telle que le noyau $(g,h) \mapsto \psi(g^{-1}h)$ sur G est conditionnellement de type négatif. (La terminologie standard — hélas — omet l'adverbe "conditionnellement".)

Pour les noyaux et les fonctions à valeurs complexes, voir le numéro 17 ci-dessous.

13.- Exemples. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine réel. Le noyau

$$\begin{cases} \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi_1, \xi_2) \longmapsto \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \end{cases}$$

est conditionnellement de type négatif. Pour le vérifier, on se donne une origine $0 \in \mathcal{H}$, des points $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de $\mathcal{H}$, des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de somme nulle, et on considère l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \|\xi_i - \xi_j\|^2 = -2\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i\|^2$$

où la somme des $\lambda_i \xi_i$ est calculée dans $\mathcal{H}^0$.

Par suite, si $\eta : X \to \mathcal{H}$ est une application continue, le noyau Ψ défini sur X par $\Psi(x,y) = \|\eta(x) - \eta(y)\|^2$ est conditionnellement de type négatif.

En particulier, si α est une action affine d'un groupe topologique G sur $\mathcal{H}$ et si ξ est un point de $\mathcal{H}$, la fonction $\psi : G \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(g) = \|\alpha(g)\xi - \xi\|^2$ est conditionnellement de type négatif. Choisissons une origine $0 \in \mathcal{H}$ et écrivons $\alpha(g) = b(g) + \pi(g)$ comme au numéro 4.4; particularisons encore au cas où $\xi = 0$. Alors $g \mapsto \|b(g)\|^2$ est une fonction conditionnellement de type négatif sur G.

Nous allons voir que ces exemples sont universels, en suivant le §4.2 de [Gu1].

Signalons aussi l'exemple explicite qui apparaît plus bas à la remarque 15.

Convenons qu'une partie S d'un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}$ *engendre topologiquement* $\mathcal{H}$ s'il n'existe aucun sous-espace affine fermé propre de $\mathcal{H}$ contenant S, ou de manière équivalente si l'espace vectoriel $\mathcal{H}^0$ des translations de $\mathcal{H}$ est topologiquement engendré par l'ensemble des différences $\xi_1 - \xi_2$ avec $\xi_1, \xi_2 \in S$.

14.- Proposition. (i) Soit Ψ un noyau conditionnellement de type négatif sur X. Il existe un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}_\Psi$ et une application continue $\eta_\Psi : X \to \mathcal{H}_\Psi$ tels que $\mathcal{H}_\Psi$ est topologiquement engendré par l'image de η_Ψ et tels que

$$\Psi(x,y) = \|\eta_\Psi(x) - \eta_\Psi(y)\|^2$$

pour tous $x, y \in X$. La paire $(\mathcal{H}_\Psi, \eta_\Psi)$ est déterminée à isomorphisme unique près par ces deux conditions.

(ii) Soit G un groupe topologique agissant continûment sur X en préservant un noyau Ψ conditionnellement de type négatif. Il existe une action affine α_Ψ de G sur $\mathcal{H}_\Psi$ telle que

$$\eta_\Psi(gx) = \alpha_\Psi(g)\eta_\Psi(x)$$

pour tous $g \in G$ et $x \in X$.

(iii) Soit ψ une fonction conditionnellement de type négatif sur un groupe topologique G. Il existe un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi^0$, une représentation orthogonale π_ψ de G sur $\mathcal{H}^0_\psi$ et un cocycle b_ψ par rapport à π_ψ tels que $\mathcal{H}^0_\psi$ soit topologiquement engendré par l'image de b_ψ et tels que

$$\psi(g) = \|b_\psi(g)\|^2$$

pour tout $g \in G$. Le triple $(\mathcal{H}^0_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ est déterminé à isomorphisme unique près par ces conditions.

Preuve. Montrons l'assertion (i). Soit W^0 l'espace vectoriel des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ à supports finis et de masse totale nulle, c'est-à-dire telles que $\sum_{x\in X} f(x) = 0$. On définit une forme bilinéaire symétrique positive sur W^0 par

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{x,y\in X} f_1(x) f_2(y) \Psi(x,y) \ .$$

Soit W l'espace affine des fonctions $h : X \to \mathbb{R}$ à supports finis et de masse totale un. On définit un écart sur W par

$$(h_1, h_2) \longmapsto \langle h_1 - h_2 | h_1 - h_2 \rangle^{1/2} \ .$$

On définit encore une application $\eta : X \to W$ qui applique un point de X sur sa fonction caractéristique.

En séparant et complétant W, on obtient un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}_\Psi$, et on note η_Ψ la composition de η et de la projection canonique de W dans $\mathcal{H}_\Psi$. L'application η_Ψ est fortement continue parce que le noyau Ψ est continu. La paire $(\mathcal{H}_\Psi, \eta_\Psi)$ vérifie les deux conditions de l'énoncé.

Soient $(\mathcal{H}_1, \eta_1)$ et $(\mathcal{H}_2, \eta_2)$ deux paires vérifiant ces conditions. Il est clair qu'il y a au plus un isomorphisme isométrique affine de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ qui entrelace η_1 et η_2. On obtient un tel isomorphisme en posant

$$\alpha\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_1(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_2(x_i)$$

pour tout choix d'un entier n, de points $x_1, \ldots, x_n \in X$ et de nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de somme nulle. Pour vérifier que ces formules définissent un isomorphisme convenable $\alpha : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, il suffit de choisir un point base $x_0 \in X$ et de vérifier que

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \big(\eta_1(x_i) - \eta_1(x_0)\big) \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \big(\eta_2(x_i) - \eta_2(x_0)\big) \Big\| \ .$$

Or, si on utilise l'identité

$$\langle \xi | \xi' \rangle = \frac{1}{2}\Big(\|\xi\|^2 + \|\xi'\|^2 - \|\xi - \xi'\|^2 \Big)$$

où ξ et ξ' sont des vecteurs d'un espace de Hilbert réel, on obtient bien

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(\eta_1(x_i) - \eta_1(x_0) \big) \Big\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \big\{ \Psi(x_i, x_0) + \Psi(x_j, x_0) - \Psi(x_i, x_j) \big\} \\ &= \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(\eta_2(x_i) - \eta_2(x_0) \big) \Big\|^2 , \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (i).

Les assertions (ii) et (iii) sont des cas particuliers de l'assertion (i). □

15.- Remarques. (a) Soient X un G-espace et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}$. Une application continue $\eta : X \to \mathcal{H}$ telle que $\|\eta(x) - \eta(y)\| = \|\eta(gx) - \eta(gy)\|$ pour tous $x, y \in X$ et $g \in G$ s'appelle parfois une *hélice* (voir le §1 de [FH]). La proposition 14.ii montre que tout noyau conditionnellement de type négatif sur X qui est invariant par G provient d'une hélice.

La terminologie rappelle l'exemple suivant. On considère deux constantes positives r, h et le noyau $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\Psi(x, y) = 4r^2 \sin^2 \frac{x - y}{2} + h^2 (x - y)^2 .$$

Alors Ψ est conditionnellement de type négatif, et associé à l'hélice

$$\eta \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto \quad (r \cos x, r \sin x, hx) \end{cases}$$

de rayon r et de pas h.

(b) La preuve de la proposition 14 montre que, si Ψ est un noyau conditionnellement de type négatif sur X et si x_0 est un point base de X, alors le noyau réel

$$(x, y) \longmapsto \Psi(x, x_0) + \Psi(x_0, y) - \Psi(x, y)$$

est de type positif sur X.

Un théorème de Schoenberg (1938) montre un autre lien important entre noyaux de type positif et noyaux conditionnellement de type négatif. Voir le théorème suivant, ainsi que le §4.1 de [Gul] ou le §3.2 de [BCR].

16.- Théorème (Schoenberg). Soit $\Psi : X \times X \to \mathbb{R}$ un noyau nul sur la diagonale. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Ψ est conditionnellement de type négatif.

(ii) Pour tout nombre réel $t > 0$, le noyau réel $e^{-t\Psi}$ est de type positif.

Soient en particulier G un groupe topologique et $\psi : G \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en 1. Alors ψ est conditionnellement de type négatif si et seulement si $e^{-t\psi}$ est de type positif pour tout $t > 0$.

Preuve. Montrons d'abord (i) $\Rightarrow$ (ii). La proposition 14 montre qu'il existe un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}$ et une application continue $\eta : X \to \mathcal{H}$ tels que

$$\Psi(x, y) = \|\eta(x) - \eta(y)\|^2$$

pour tous $x, y \in X$. Il résulte alors du numéro 10 (ou de la proposition 4.13) que le noyau $\exp(-t\Psi)$ est de type positif.

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (i). Rappelons d'abord qu'un noyau réel de type positif est symétrique (par définition). Notons ensuite que, si $e^{-t\Psi}$ est de type positif, alors $-e^{-t\Psi}$ et $1 - e^{-t\Psi}$ sont conditionnellement de type négatif. De plus

$$\Psi(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ 1 - \exp\left[-t\Psi(x, y)\right] \right\}$$

pour tous $x, y \in X$. On conclut en remarquant que l'ensemble des noyaux conditionnellement de type négatif sur X est un cône convexe dans l'espace des fonctions continues de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$, cône qui est fermé pour la topologie de la convergence simple. $\square$

17.- Noyaux complexes. La définition 12 apparaît (entre autres) chez Faraut et Harzallah [FH]. L'extension aux noyaux complexes se formule comme suit (définition 4.2 de [Gul]): Un noyau $\Psi : X \times X \to \mathbb{C}$ est conditionnellement de type négatif s'il est hermitien et si, pour tout choix d'un entier $n \geq 2$, de points $x_1, \ldots, x_n \in X$ et de nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de somme nulle, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j \Psi(x_i, x_j) \leq 0 \ .$$

L'analogue complexe du théorème de Schoenberg reste vrai: une fonction continue $\Psi : X \times X \to \mathbb{C}$ est un noyau conditionnellement de type négatif si et seulement si $e^{-t\Psi}$ est de type positif pour tout $t > 0$. (Voir le §4.1 de [Gu1].) On en déduit en particulier que, si Ψ est conditionnellement de type négatif, il en est de même de $1 - e^{-t\Psi}$ pour tout $t > 0$.

18.- Proposition. Soit $\Psi : X \times X \to \mathbb{C}$ un noyau complexe conditionnellement de type négatif. Alors la formule

$$\Psi_0(x,y) = \mathrm{Re}\left\{\left[\Psi(x,y) - \frac{1}{2}\Psi(x,x) - \frac{1}{2}\Psi(y,y)\right]^{1/2}\right\}$$

définit sur X un noyau réel conditionnellement de type négatif.

Preuve. Notons d'abord qu'un noyau complexe sur l'espace à deux points s'identifie à une matrice complexe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On vérifie sans peine que ce noyau est conditionnellement de type négatif si et seulement si a et d sont réels, b et c conjugués, et $a + d \leq 2\mathrm{Re}\, b$. Il en résulte que le noyau Ψ_2 défini sur X par

$$\Psi_2(x,y) = \Psi(x,y) - \frac{1}{2}\Psi(x,x) - \frac{1}{2}\Psi(y,y)$$

est conditionnellement de type négatif et vérifie de plus $\mathrm{Re}\,\Psi_2(x,y) \geq 0$ pour tous $x, y \in X$. On peut donc définir un noyau Ψ_1 sur X par $\Psi_1(x,y) = \Psi_2(x,y)^{\frac{1}{2}}$, où la racine désigne toujours la détermination principale.

L'ensemble des noyaux complexes sur X qui sont conditionnellement de type négatif est un cône convexe dans l'espace des fonctions continues $X \times X \to \mathbb{C}$, et ce cône est fermé pour la topologie de la convergence simple. Il résulte alors de la formule

$$z^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty (1 - e^{-tz})\, t^{-3/2}\, dt \qquad (z \in \mathbb{C} \text{ et } \mathrm{Re}\, z \geq 0)$$

que Ψ_1 est conditionnellement de type négatif. Il en est évidemment de même de $\overline{\Psi_1}$, et donc aussi de $\Psi_0 = \frac{1}{2}(\Psi_1 + \overline{\Psi_1})$. □

Nous retiendrons pour la suite le cas particulier suivant.

19.- Corollaire. Soient G un groupe topologique et $\psi : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Si la fonction ψ (c'est-à-dire le noyau $(g,h) \mapsto \psi(g^{-1}h)$)

est conditionnellement de type négatif au sens du numéro 17, alors la fonction

$$\psi_0 \ : \ g \longmapsto \mathrm{Re}\left\{[\psi(g) - \psi(1)]^{1/2}\right\}$$

est conditionnellement de type négatif au sens de la définition 12.

De plus ψ et ψ_0 sont en même temps bornées ou non sur G.

Preuve. Il reste à montrer que, si ψ_0 est bornée, alors ψ l'est aussi. Pour tout $g \in G$, on a $\mathrm{Re}\,[\psi(g) - \psi(1)] \geq 0$, de sorte que l'argument de $[\psi(g) - \psi(1)]^{\frac{1}{2}}$ est dans $[-\pi/4, \pi/4]$, et donc que

$$\left| [\psi(g) - \psi(1)]^{1/2} \right| \leq \sqrt{2}\,\psi_0(g) \ ,$$

ce qui achève la preuve. □

Voici enfin le lien entre fonctions conditionnellement de type négatif et propriété (T):

20.- Théorème. Soit G un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) G possède la propriété (T).

(ii) Toute fonction conditionnellement de type négatif sur G est bornée.

Preuve. Le corollaire 19 montre qu'on peut comprendre au choix (ii) au sens réel ou complexe. Pour la preuve, choisissons le sens réel. Les numéros 13 et 14.iii montrent que la propriété (ii) est équivalente à

(ii') tout cocycle par rapport à toute représentation orthogonale sur G est borné,

et cette propriété est équivalente à la propriété $(FH)_{\mathbb{R}}$ de la définition 4.10 (voir la remarque 4.8). L'équivalence des propriétés $(FH)_{\mathbb{R}}$ et (T) résulte du lemme 4.11 et du théorème 4.7. □

21.- Remarque. Comme le théorème 4.7, le théorème ci-dessus a été obtenu en 1977 par Delorme [Del] et Guichardet [Gu4]. Une forme faible en avait déjà été dégagée en 1974 par Faraut et Harzallah dans un travail sur les fonctions sphériques (section 5.1 de [FH]). Le théorème 20 a été retrouvé en 1981, avec une autre preuve, par Akemann et Walter [AW]. Les corollaires géométriques du chapitre 6 résultent de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de ce théorème.

CHAPITRE 6
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

Dans ce chapitre, nous énumérons des conséquences géométriques du théorème 5.20. Le thème principal est l'existence de sévères restrictions à certaines actions de groupes de Kazhdan sur diverses classes d'espaces: arbres, $\mathbb{R}$-arbres, complexes de Coxeter, espaces hyperboliques réels et complexes.

6.a. ARBRES

1.- Définition. Un *arbre* est un complexe simplicial de dimension 1 qui est connexe, simplement connexe et orienté.

Pour de belles illustrations, voir les arbres de Serre [Ser]. Notons toutefois que, ici et contrairement à [Ser], deux sommets voisins d'un arbre sont liés par *une* arête orientée, et non deux arêtes inverses l'une de l'autre.

Etant donné un arbre Γ, nous désignons par Δ^0_Γ l'ensemble des sommets de Γ, par Δ^1_Γ celui de ses arêtes, et par $d_\Gamma : \Delta^0_\Gamma \times \Delta^0_\Gamma \to \mathbb{N}$ la distance qui compte le nombre d'arêtes entre deux sommets. Nous écrivons aussi Δ^0, Δ^1 et d chaque fois qu'il est possible de ne pas préciser Γ.

La proposition suivante est le lemme 2.3 de [JV]. Elle a été inspirée par la preuve de Haagerup [Ha] que la longueur des mots est une fonction conditionnellement de type négatif sur un groupe libre.

2.- Proposition. Pour tout arbre Γ, la fonction d est un noyau de type négatif sur Δ^0.

Preuve. Soit W^0 l'espace vectoriel des fonctions $f : \Delta^0 \to \mathbb{R}$ à supports finis et de masse totale nulle. On munit W^0 d'une forme bilinéaire symétrique:

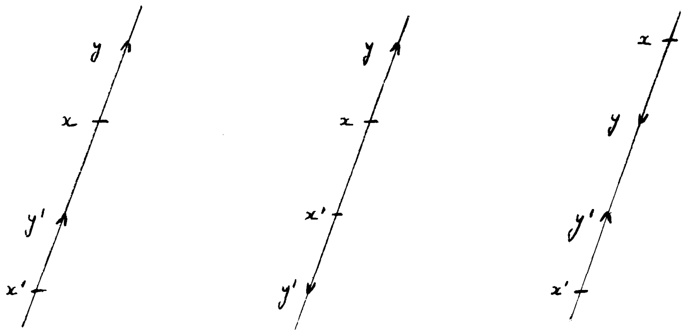
$$\langle f_1 | f_2 \rangle = - \sum_{x,y \in \Delta^0} \overline{f_1(x)} f_2(y) d(x,y)$$

(comparer avec la preuve de la proposition 5.14).

Pour vérifier que c'est un produit scalaire, on considère la base de W^0 formée des fonctions $2^{-1/2}(\delta_x - \delta_y)$, où (x,y) parcourt l'ensemble Δ^1 des arêtes de Γ et où δ_x désigne la fonction caractéristique de x, et il suffit de vérifier que cette base est orthonormale. On a par définition

$$\langle 2^{-1/2}(\delta_x - \delta_y) | 2^{-1/2}(\delta_{x'} - \delta_{y'}) \rangle = -\frac{1}{2}\{d(x,x') - d(x,y') - d(y,x') + d(y,y')\} \; .$$

D'abord, il est évident que $2^{-1/2}(\delta_x - \delta_y)$ est de norme 1 pour tout $(x,y) \in \Delta^1$. Ensuite, si (x,y) et (x',y') sont deux arêtes distinctes de Γ, il y a trois cas de figures possibles selon que les arêtes sont cohérentes, divergentes ou convergentes:



On vérifie dans chaque cas que $\langle \delta_x - \delta_y | \delta_{x'} - \delta_{y'} \rangle = 0$.

Ainsi W^0 est un espace préhilbertien réel. De plus, on a $d(x,y) = \|2^{-1/2}(\delta_x - \delta_y)\|^2$ pour tous $x \in \Delta^0$ et $y \in \Delta^0$. Par suite le noyau d est bien de type négatif (voir 5.13). □

La définition suivante est encore due à Serre (n°1.6.1 de [Ser]). Une *action* d'un groupe G sur un arbre Γ est une action de G par automorphismes simpliciaux respectant l'orientation de Γ. Si de plus G est muni d'une topologie non discrète, on suppose en outre que le groupe d'isotropie de chaque sommet est un sous-groupe ouvert (et donc fermé) de G.

3.- Définition. Un groupe topologique G possède la *propriété* (FA) si toute action de G sur un arbre possède un point fixe.

Au numéro 1.6.6 de [Ser], Serre montre que certains groupes, dont $SL_n(\mathbb{Z})$ si $n \geq 3$ et $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ si $n \geq 2$, ont la propriété (FA). Plus généralement, tout groupe de Kazhdan a la propriété (FA); c'est ce qu'ont montré Alperin [Alp] et Watatani [Wat], après que Margulis l'ait établi pour les réseaux dans les groupes de Lie simples de rang réel ≥ 2 (Théorème 3 de [Ma3]).

4.- Proposition. Un groupe localement compact G qui a la propriété (T) a aussi la propriété (FA).

Preuve. Soit Γ un arbre sur lequel le groupe de Kazhdan G agit et soit $x_0 \in \Delta^0$ un sommet de Γ. Le théorème 5.20 et la proposition 2 ci-dessus impliquent que la fonction

$$\begin{cases} G \longrightarrow \mathbb{N} \\ g \longmapsto d(x_0, gx_0) \end{cases}$$

est bornée, c'est-à-dire que l'orbite de x_0 est bornée. On en déduit l'existence d'un point fixe soit par le lemme du centre 3.8, soit par l'argument suivant ([Ser],§1.4.3, proposition 19).

Notons Γ_0 le sous-arbre engendré par l'orbite de x_0. C'est un arbre invariant par G dont nous notons N le diamètre, fini. On définit par récurrence une suite Γ_j de sous-arbres de Γ_0, où Γ_j est obtenu à partir de Γ_{j-1} en supprimant les sommets terminaux et les arêtes qui les contiennent ($j = 1, 2, \ldots, [\frac{N-1}{2}]$). Le diamètre de Γ_1 est $N-2$, celui de Γ_2 est $N-4, \ldots$, et le dernier des Γ_j a un ou deux sommets. Chaque Γ_j étant invariant par G, le ou les sommets du dernier Γ_j sont invariants par G. $\square$

5.- Exemples. Les exemples suivants montrent que la réciproque de la proposition 4 n'est pas vraie.

(i) Considérons le groupe de Schwarz défini par deux générateurs a, b et trois relations $a^A = b^B = (ab)^C = 1$, où A, B, C sont des entiers ≥ 2. Ce groupe a la propriété (FA): voir le n°I.6.3.5 de [Ser]. Si $A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} \leq 1$, ce groupe est infini et n'a pas la propriété (T), car il contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe au groupe fondamental d'une surface close orientable de genre ≥ 1 (voir les numéros 1.8 et 3.15).

(ii) Plus généralement, soit (W, S) un système de Coxeter avec ensemble générateur S fini tel que l'ordre de ss' soit fini pour tous $s, s' \in S$. On sait que W a la propriété (FA), voir l'exercice I.6.5.3 de [Ser]. On sait aussi que W n'a pas la propriété (T) si W est infini: c'est un résultat de Bozejko, Januskiewicz et Spatzier [BJS] repris ci-dessous (corollaire 16).

(iii) On considère un entier rationnel $D > 1$ sans facteur carré. On sait que $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{D}])$ a la propriété (FA): c'est mentionné au n°I.6.6 de [Ser], et c'est aussi un cas particulier de résultats de Margulis [Ma3]. Mais ce groupe n'a pas la propriété (T). En effet, notons σ l'élément non banal du groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ sur $\mathbb{Q}$, et considérons l'injection

$$\begin{cases} SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) & \longrightarrow & SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}) \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma, \sigma\gamma) \end{cases}$$

Son image est un réseau, donc $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{D}])$ n'a pas la propriété (T); voir les numéros 3.6.i, 1.9.ii et 3.4.

Signalons encore que $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$ et $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}])$ ont la propriété (FA) sans avoir la propriété (T), et que $SL_2(\mathbb{A})$ n'a ni la propriété (FA) ni la propriété (T) lorsque $\mathbb{A}$ est l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire autre que $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Voir les numéros I.6.5 et I.6.6 de [Ser].

La proposition 2 permet de vérifier que de nombreux groupes n'ont pas la propriété (T), à savoir les groupes possédant une action sans point fixe sur un arbre bien choisi. C'est par exemple le cas des produits amalgamés non triviaux (théorème 7 du §I.4 de [Ser]), des extensions à la Higman-Neumann-Neumann non triviales (idem, remarque 2), et des groupes fuchsiens non co-compacts (corollaire 4.4 de [JV]). Notons aussi l'énoncé suivant (voir le corollaire 3.5.i).

6.- Corollaire. Soit G un groupe de Lie réel simple de rang réel ≥ 2 et soit Γ un réseau de G. Alors Γ n'est pas un produit amalgamé de deux sous-groupes de manière non banale.

Ce corollaire a été obtenu par Margulis comme conséquence de résultats beaucoup plus généraux (proposition 1 et théorème 1 de [Ma3]). Margulis montre essentiellement ceci: soit G le produit d'un nombre fini de groupes $G_i(\mathbb{F}_i)$, où G_i est un groupe algébrique simple sur un corps local $\mathbb{F}_i$; toute décomposition d'un réseau Γ de G en produit amalgamé est induite par une décomposition de G en produit amalgamé de sous-groupes ouverts (c'est le théorème 2 de [Ma3]). La preuve de ce fait et celle de la superrigidité (chap. 5 de [Zim]) utilisent des idées semblables.

7.- Corollaire. Soit G un groupe algébrique simple de rang déployé 1 sur un corps local $\mathbb{F}$ qui n'est ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$ — par exemple $G = SL_2(\mathbb{D})$ avec $\mathbb{D}$ une algèbre centrale simple sur $\mathbb{F}$ qui est une algèbre à division. Alors

(i) G n'a pas la propriété (T),

(ii) si H est un groupe de Kazhdan, l'image de tout homomorphisme continu de H dans G est relativement compacte.

Preuve. On sait que l'immeuble de Bruhat-Tits de G est un arbre sur lequel G agit naturellement, et que les stabilisateurs des sommets sont précisément les sous-groupes compacts maximaux de G. Voir [Ti3], ou le n°1.7 du chap. II de [Ser] si $G = SL_2(\mathbb{D})$. Le corollaire 7 résulte donc immédiatement de la proposition 4. □

Nous verrons au corollaire 23 ci-dessous dans quelle mesure le résultat reste vrai si $\mathbb{F}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On doit à Zimmer une tout autre preuve de l'assertion (ii): voir le corollaire 19 de [Zi2]. Lorsque H est un réseau dans un groupe de Lie réel simple de rang ≥ 2, l'assertion (ii) est un cas très particulier du théorème de superrigidité de Margulis.

6.b. ARBRES RÉELS

Soit X un espace métrique. Un *arc* dans X est un sous-ensemble de X homéomorphe à un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Un *segment* dans X est un sous-ensemble de X isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$.

8.- Définition. Un $\mathbb{R}$-*arbre* est un espace métrique X satisfaisant la condition suivante:

pour toute paire de points $x, y \in X$, il existe un unique arc $A \subset X$ d'extrémités x et y, et A est un segment fermé.

On note $[x, y]$ le segment d'extrémités x, y.

On vérifie qu'un arbre au sens ordinaire (définition 1) est un $\mathbb{R}$-arbre (le théorème II.1.9 de [MS] offre un énoncé plus précis). Mais il existe des $\mathbb{R}$-arbres qui ne sont aucunement des arbres ordinaires; par exemple, si Γ est le groupe fondamental d'une surface close de genre $g \geq 2$, il existe un $\mathbb{R}$-arbre sur lequel Γ agit librement [Sha].

Le résultat suivant a été noté par plusieurs personnes (dont R. Alperin, M. Bozejko [Boz], S. Gersten, A. Hoare, J-P. Serre, les auteurs, ...).

9.- Proposition. Soit X un $\mathbb{R}$-arbre. La distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est un noyau de type négatif.

Preuve. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des points de X. Notons Y le plus petit sous-$\mathbb{R}$-arbre de X contenant ces points:

$$Y = \bigcup_{1 \le i,j \le n} [x_i, x_j] \; .$$

Il est facile de voir que le $\mathbb{R}$-arbre Y est régulier au sens de Wang [Wan]. Mieux: il existe une partie finie S de Y, contenant les x_i (et en particulier les points terminaux de Y) ainsi que les points de branchement de Y (définitions 2.3.2 et 2.3.3 de [Wan]). Il en résulte que Y est un complexe simplicial simplement connexe de dimension 1 (théorème 2.3.5 de [Wan]). La seule différence d'avec un arbre ordinaire est que la distance entre deux sommets n'est pas forcément un entier. Mais on dispose de la notion d'arête: étant donnés deux sommets distincts $x, y \in S$, le segment $[x, y]$ est une arête si $S \cap]x, y[$ est vide.

Pour montrer que d est de type négatif sur X, il suffit de vérifier que la restriction de d à S est de type négatif (pour tout choix de points $x_1, \ldots, x_n$ comme ci-dessus). On imite pour cela la preuve de la proposition 2. Le seul détail à modifier est le suivant: pour vérifier qu'on définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel W^0 des fonctions $f : S \to \mathbb{R}$ de masse nulle par la formule

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = - \sum_{x,y \in S} \overline{f_1(x)}\, f_2(y) d(x, y)$$

on vérifie que les fonctions $\delta_x - \delta_y$, où $[x, y]$ parcourt les arêtes de Y, forment une base orthogonale (non nécessairement orthonormale) de l'espace W^0 (qui est de dimension finie). □

Dans la ligne des définitions 4.6 et 6.3, il est naturel de poser la définition 10 et de croire à la proposition 11 suivantes.

10.- Définition. Un groupe topologique G possède la propriété $(F\mathbb{R}A)$ si toute action continue de G par isométries sur un $\mathbb{R}$-arbre complet possède un point fixe.

Rappelons que la complétion d'un $\mathbb{R}$-arbre est encore un $\mathbb{R}$-arbre (corollaire 11.1.10 de [MS]).

11.- Proposition. Un groupe de Kazhdan a la propriété $(F\mathbb{R}A)$.

Preuve. Soit G un groupe de Kazhdan agissant par isométries sur un $\mathbb{R}$-arbre complet X et soit x_0 un point de base de X. La proposition 9 et le théorème 5.20 montrent que l'orbite Gx_0 est bornée. On achève grâce au lemme du centre 3.8. □

12.- Remarques. (i) Les groupes de Schwarz et les groupes de Coxeter décrits aux exemples 5 ci-dessus ont la propriété $(F\mathbb{R}A)$, les arguments étant les mêmes que pour (FA), mais n'ont pas la propriété (T).

(ii) Il est évident que la propriété $(F\mathbb{R}A)$ implique la propriété (FA). Nous ne connaissons pas d'exemple de groupe qui ait la propriété (FA) sans avoir la propriété $(F\mathbb{R}A)$.

6.c. COMPLEXES DE COXETER

13.- Définitions. Soit (W,S) un système de Coxeter, l'ensemble générateur S du groupe W étant fini.

On associe à (W,S) son *complexe de Coxeter* qui est le complexe simplicial Δ défini de la manière suivante. Pour toute partie propre (éventuellement vide) I de S, notons W_I le sous-groupe de W engendré par I. Pour tout entier $k \in \{0,1,\ldots,|S|-1\}$, l'ensemble des *$k$-simplexes* de Δ (ou facettes de rang $k+1$ dans la terminologie de Tits) est la réunion disjointe

$$\coprod W/W_I \qquad \text{(réunion sur } I \subset S,\ I \neq S \text{ avec } |I| = |S|-k-1).$$

Les simplexes de dimension maximale (dimension $|S|-1$ ou rang $|S|$) sont les *chambres* de Δ; elles sont en bijection avec W. Tout simplexe de Δ est une partie de W; on convient que le simplexe γW_I *contient* le simplexe δW_J si le sous-ensemble γW_I de W est contenu (sic) dans δW_J. Une *cloison* d'une chambre C est un simplexe de codimension 1 contenu dans C.

Deux chambres sont *mitoyennes* si elles ont une cloison commune. Une *galerie* de longueur n est une suite $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ de $n+1$ chambres, avec C_{i-1} et C_i mitoyennes pour $i = 1,2,\ldots,n$, et C_0, C_1 sont les *extrémités* de cette galerie. On montre que deux chambres de Δ sont toujours reliées par une galerie (proposition 1.4.1 de [Ti2]). On définit alors la *distance* $d(C,C')$ entre deux chambres C et C' comme le minimum des longueurs des galeries d'extrémités C et C', et on vérifie que l'ensemble $\mathrm{Cham}(\Delta)$ des chambres de Δ est ainsi muni d'une structure d'espace métrique.

On voit facilement que Δ est un *complexe mince*, c'est-à-dire que toute cloison de Δ est contenue dans exactement deux chambres de Δ. Un endomorphisme φ de Δ est un endomorphisme de l'ensemble sous-jacent W qui envoie toute chambre C de Δ sur une chambre, et dont la restriction $C \to \varphi(C)$ est un isomorphisme de complexes. Un *pliage* est un endomorphisme φ tel que $\varphi^2 = \varphi$ et tel que toute chambre C de Δ soit l'image de 0 ou 2 chambres. L'image d'un pliage est une *racine* de Δ. On note $\mathrm{Rac}(\Delta)$ l'ensemble des racines de Δ.

Les résultats suivants sont dus à Bozejko, Januskiewicz et Spatzier [BJS].

14.- Proposition. Avec les notations ci-dessus, la distance d sur $\mathrm{Cham}(\Delta)$ est un noyau de type négatif.

Preuve. Pour toute racine $R \in \mathrm{Rac}(\Delta)$, désignons par $\chi_R : \mathrm{Cham}(\Delta) \to \{0,1\}$ la fonction définie par $\chi_R(C) = 1$ si $C \subset R$ et $\chi_R(C) = 0$ sinon. La proposition 2.22 de [Ti2] montre que

$$d(C,C') = \sum_{R \in \mathrm{Rac}(\Delta)} \chi_R(C)(1 - \chi_R(C'))$$

pour $C, C' \in \mathrm{Cham}(\Delta)$, et la proposition 14 en est une conséquence immédiate. □

15.- Corollaire. Si $\ell(w)$ désigne la longueur d'un élément w du groupe W relativement au système de générateurs S, la fonction $\ell : W \to \mathbb{R}$ est de type négatif.

Preuve. Cela résulte du corollaire 2.13 de [Ti2], qui montre que $\ell(w) = d(C, w(C))$ pour toute chambre C de Δ. □

16.- Corollaire. (i) Un groupe de Coxeter infini n'est pas un groupe de Kazhdan.

(ii) Soient G un groupe de Kazhdan, W un groupe de Coxeter et $\varphi : G \to W$ un homomorphisme continu. L'image $\varphi(G)$ est finie.

Preuve. Cela résulte de la proposition 1.6 et du théorème 5.20. □

6.d. ESPACES HYPERBOLIQUES

On désigne par $\mathbb{F}$ l'un des corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (quaternions), et par $\mathbb{F}_1^*$ le groupe multiplicatif des éléments de module 1 dans $\mathbb{F}$. Sur $\mathbb{F}^{n+1}$ vu comme espace vectoriel à droite sur $\mathbb{F}$, on considère la forme hermitienne

$$[x,y] = \overline{x_0}\, y_0 - \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i \ .$$

Le groupe $\mathbb{F}_1^*$ agit à droite sur l'ensemble V_n des vecteurs $x \in \mathbb{F}^{n+1}$ tels que $[x,x] = 1$.

17.- Définitions. *L'espace hyperbolique* $H_n(\mathbb{F})$ de dimension n sur $\mathbb{F}$ est le quotient de V_n par l'action à droite de $\mathbb{F}_1^*$. Le groupe des isométries de la forme $[\ ,\ ]$ sur $\mathbb{F}^{n+1}$ se note

$$\begin{array}{ll} O(1,n) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ U(1,n) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ Sp(1,n) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{H}\ . \end{array}$$

On pose

$$\begin{aligned} SO(1,n) &= O(1,n) \cap SL_{n+1}(\mathbb{R}) \\ SU(1,n) &= U(1,n) \cap SL_{n+1}(\mathbb{C}) \\ SO_0(1,n) &= \text{ composante connexe de } SO(1,n)\ . \end{aligned}$$

Pour la géométrie des espaces hyperboliques, nous renvoyons (par exemple) à [CG] ou [Eps].

18.- Remarques. (i) Le groupe $Sp(1,n)$ est parfait, et il n'y a donc pas lieu de distinguer comme $SO(1,n)$ et $O(1,n)$, ou $SU(1,n)$ et $U(1,n)$. Le groupe $SO(1,n)$ a deux composantes connexes, alors que $SU(1,n)$ et $Sp(1,n)$ sont connexes.

(ii) Soit G l'un des groupes $SO_0(1,n)$, $SU(1,n)$, $Sp(1,n)$. Notons K le stabilisateur dans G du point $(1,0,\ldots,0)$ de l'espace $\mathbb{F}^{n+1}$ correspondant, de sorte que $H_n(\mathbb{F})$ s'identifie à G/K. Alors K est un sous-groupe compact maximal de G, et K est le groupe

$$\begin{array}{ll} SO(n) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ S(U(1) \times U(n)) = (U(1) \times U(n)) \cap SL_{n+1}(\mathbb{C}) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ Sp(1) \times Sp(n) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{H}\ . \end{array}$$

(iii) Il est aussi possible de définir le plan hyperbolique $H_2(\mathbb{C}ay)$ sur l'algèbre alternative (non associative) $\mathbb{C}ay$ des *octaves de Cayley*. Une construction élégante de ce plan a été donnée par Tits [Ti1]: c'est l'ensemble des points intérieurs d'une polarité hyperbolique dans le plan projectif $P_2(\mathbb{C}ay)$. Le groupe des isométries de ce plan est le groupe exceptionnel $F_{4(-20)}$, de dimension 52 (la forme de Killing est de signature -20), et le stabilisateur d'un point est un sous-groupe compact maximal de $F_{4(-20)}$ isomorphe à Spin(9), de dimension 36.

(iv) A isomorphisme local près, la liste des groupes de Lie réels connexes presque simples de rang réel 1 est

$$\begin{array}{llll} SO_0(1,n) & SU(1,n) & Sp(1,n) & n \geq 2 \\ F_{4(-20)} . & & & \end{array}$$

D'autre part $SO_0(1,2)$ et $SO_0(1,4)$ sont respectivement localement isomorphes à $SU(1,1)$ et $Sp(1,1)$.

La liste des espaces riemanniens symétriques de type non compact et de rang 1 est donnée par les $H_n(\mathbb{F})$ et $H_2(\mathbb{C}ay)$; voir le chapitre X de [Hel], édition de 1978.

19.- Lemme. On reprend les notations des définitions 18. Soient $x, y \in V_n$. On a $|[x,y]| \geq 1$, avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{F}_1^*$ tel que $y = x\lambda$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} 1 &= \left(|x_0|^2 - \sum |x_i|^2\right)\left(|y_0|^2 - \sum |y_i|^2\right) \\ &\leq \left(|x_0|^2 - \sum |x_i|^2\right)\left(|y_0|^2 - \sum |y_i|^2\right) + \left(|x_0|\sqrt{\sum |y_i|^2} - |y_0|\sqrt{\sum |x_i|^2}\right)^2 \\ &= \left(|x_0|\,|y_0| - \sqrt{\sum |x_i|^2}\,\sqrt{\sum |y_i|^2}\right)^2 \\ &\leq \left(|x_0|\,|y_0| - |\textstyle\sum \overline{x_i}\, y_i|\right)^2 && \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq |\overline{x_0}\, y_0 - \textstyle\sum \overline{x_i}\, y_i|^2 && \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &= |\,[x,y]\,|^2 . \end{aligned}$$

On vérifie aisément la condition d'égalité. □

Dans la définition suivante, nous commettons l'abus de désigner par la même lettre un vecteur de V_n et son image dans $H_n(\mathbb{F})$.

20.- Définition. La distance hyperbolique $d(x,y)$ entre deux points x et y de $H_n(\mathbb{F})$ est donnée par

$$ch\ d(x,y) = |\ [x,y]\ |$$

La formule a un sens vu le lemme 19; elle définit bien une distance: voir par exemple le §19 de [Mos].

Le résultat suivant est dû à Faraut et Harzallah (proposition 7.3 de [FH]).

21.- Théorème. Le noyau $\log ch\ d$ est conditionnellement de type négatif sur $H_n(\mathbb{F})$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Preuve. Grâce au théorème de Schoenberg (5.16), il suffit de montrer que le noyau $(x,y) \to |\,[x,y]\,|^{-t} = (ch\ d(x,y))^{-t}$ est de type positif pour tout nombre réel $t \geq 0$. Comme

$$|\,[x,y]\,|^{-t} = |x_0|^{-t}\,|y_0|^{-t}\,|1 - (\overline{x_o}\,y_0)^{-1}\textstyle\sum \overline{x_i}\,y_i|^{-t}$$

et comme le noyau $(x,y) \to |x_0|^{-t}|y_0|^{-t}$ est évidemment de type positif, le théorème de Schur (5.5.i) implique qu'il suffit de montrer que le noyau

$$\Phi(x,y) = |1 - (\overline{x_0}\,y_0)^{-1} \sum \overline{x_i}\,y_i|^{-t}$$

est de type positif pour $t \geq 0$.

Introduisons le noyau

$$\Phi_0(x,y) = (\overline{x_0}\,y_0)^{-1} \sum \overline{x_i}\,y_i\ .$$

Il est évident que Φ_0 est de type positif, et on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left|\Phi_0(x,y)\right| &\leq \frac{1}{|x_0 y_0|}\ \sqrt{\textstyle\sum |x_i|^2}\ \sqrt{\textstyle\sum |y_i|^2} \\ &= \frac{1}{|x_0 y_0|}\ \sqrt{|x_0|^2 - 1}\ \sqrt{|y_0|^2 - 1}\ <\ 1\ . \end{aligned}$$

Le corollaire 5.5.ii montre donc que le noyau

$$(x,y) \to (1 - \Phi_0(x,y))^{-t/2}$$

est de type positif; de même pour le noyau

$$(x,y) \to (1 - \overline{\Phi_0(x,y)}\,)^{-t/2}\ .$$

Le produit de ces deux noyaux, qui est Φ, est donc de type positif par le théorème de Schur.

Notons qu'on a utilisé l'hypothèse $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ou $\mathbb{F} \neq \mathbb{H}$, d'abord pour définir Φ_0, ensuite en invoquant le corollaire 5.5.ii. Notons aussi que les noyaux introduits dans cette preuve ne sont *pas* tous invariants par isométries. □

Dans la ligne de la définition 10, nous proposons encore la

22.- Définition. Un groupe topologique G possède la propriété $(FHyp\mathbb{C})$ si toute action continue de G par isométries d'un espace hyperbolique réel ou complexe possède un point fixe.

23.- Corollaire. (i) Tout groupe de Kazhdan a la propriété $(FHyp\mathbb{C})$.

(ii) Les groupes $SO_0(1,n)$ et $SU(1,n)$ n'ont pas la propriété (T).

(iii) Soit G un groupe de Kazhdan. Toute image continue de G dans $SO_0(1,n)$ ou $SU(1,n)$ est relativement compacte.

Preuve. L'assertion (i) se montre comme les propositions 4, 11 et le corollaire 16. L'assertion (ii) est alors évidente. Enfin (iii) résulte de ce que les sous-groupes compacts maximaux de $SO_0(1,n)$ et $SU(1,n)$ sont précisément les stabilisateurs des points dans l'espace hyperbolique correspondant. □

24.- Exemple (Serre). La réciproque du corollaire 23.i n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant d'un groupe qui a la propriété $(FHyp\mathbb{C})$, mais qui n'a ni la propriété (T) ni même la propriété (FA). Nous reproduisons ici un passage d'une lettre de J-P. Serre (juillet 1988).

"Soit $\mathbb{D}$ un corps de quaternions sur $\mathbb{Q}$, et soit Σ l'ensemble des places de $\mathbb{Q}$ ramifiées dans $\mathbb{D}$. On suppose $\infty \in \Sigma$, de sorte que $\mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ est le corps des quaternions usuels sur $\mathbb{R}$. Soit G le groupe des éléments de $\mathbb{D}^*$ de norme réduite 1, vu comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ (forme "tordue" de SL_2); le groupe $G_{\mathbb{R}}$ est compact (isomorphe à $SU(2)$). Soit d'autre part S un ensemble fini de nombres premiers, avec $S \cap \Sigma = \emptyset$ et $\mathrm{Card}(S) \geq 2$. Soit Γ un sous-groupe S-arithmétique de $G_{\mathbb{Q}}$. Un tel groupe fournit le contre-exemple cherché. En effet:

a) Si $p \in S$, le groupe local $G_p = G_{\mathbb{Q}_p}$ est isomorphe à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, et les propriétés connues des groupes S-arithmétiques entraînent que l'image de Γ dans G_p est *dense*. En particulier, Γ ne fixe aucun point de l'arbre correspondant; il n'a donc pas la propriété FA, ni non plus T. (D'ailleurs, le quotient $\prod_{p\in S} G_p/\Gamma$ est compact; c'est une autre façon de voir que Γ n'a pas la propriété T.)

b) Du fait que Γ est un sous-groupe irréductible du produit $\prod_{p\in S} G_p$, lequel est de rang total ≥ 2, on peut appliquer les théorèmes de superrigidité de Margulis. Tout homomorphisme de Γ dans un groupe hyperbolique (ou plus généralement un groupe algébrique réel) provient — quitte à se restreindre à un sous-groupe d'indice fini — d'un homomorphisme de $G_{\mathbb{R}}$ dans ce groupe. Comme $G_{\mathbb{R}}$ est compact, on voit bien que l'image de Γ est relativement compacte. Donc Γ a la propriété $FHyp\mathbb{C}$ (et même mieux).

Remarque — Si l'on prend S tel que $\mathrm{Card}(S) = 2$, et si on suppose Γ sans torsion, on peut montrer que Γ est un amalgame de deux groupes libres (amalgamés suivant un sous-groupe d'indice fini)."

25.- Remarques. (a) Les assertions (ii) et (iii) du corollaire 23 fournissent des analogues archimédiens du corollaire 7, car $SL_2(\mathbb{R})$ est localement isomorphe à $SO_0(1,2)$ et $SL_2(\mathbb{C})$ à $SO_0(1,3)$. On peut même ajouter à cette paire un groupe $SL_2(\mathbb{H})$, aussi noté $SU^*(4)$, qui est localement isomorphe à $SO_0(1,5)$. Pour une autre preuve de (iii), voir le corollaire 20 de [Zi2].

(b) Lorsque le groupe G de l'assertion (iii) est un réseau dans un groupe de Lie réel simple de rang ≥ 2, l'assertion résulte aussi du théorème de superrigidité de Margulis (théorème 5.1.2 de [Zim]).

La proposition 3.7 montre que $SO(n)$ contient un sous-groupe de Kazhdan dénombrable dense dès que $n \geq 5$. Au contraire $SO(n)$ ne contient pas de tel groupe si $n \leq 4$. C'est ce que montre le dernier résultat de ce chapitre, dû à Zimmer [Zi2]; il précise le corollaire 23.iii.

26.- Proposition. Tout sous-groupe dénombrable de $SO(n)$ qui a la propriété (T) est un groupe fini si $n \leq 4$.

Preuve. Le cas $n = 2$ est banal (proposition 1.7.iv); le cas $n = 4$ se ramène au cas $n=3$, car $SO(4)$ est un revêtement double de $SO(3) \times SO(3)$. Le cas de $SO(3)$ est équivalent à celui de $SU(2)$. On considère donc un sous-groupe de Kazhdan Γ de $SU(2)$, et il s'agit de montrer que Γ est fini si Γ est dénombrable.

1er pas. On peut supposer que l'action de Γ sur $\mathbb{C}^2$ est irréductible. Si ce n'était pas le cas, Γ serait contenu dans un tore de $SU(2)$, et on serait ramené au cas $n=2$.

2e pas. Les valeurs propres des éléments de Γ sont des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$. En effet, soient γ_0 un élément de Γ et λ une valeur propre de γ_0. Notons $\mathbb{K}$ le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par λ et par les coefficients d'une partie génératrice finie de Γ, de sorte que $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{K})$. Si λ n'est pas une racine de l'unité, il résulte d'un lemme de Tits ([Ti4], lemma 4.1) qu'il existe un corps local $\mathbb{K}'$ et un homomorphisme $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ tels que $|\sigma(\lambda)| \neq 1$ (si $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, cette assertion est prouvée dans [Wei], IV 8; si λ est transcendant, on peut prendre $\mathbb{K}' = \mathbb{C}$ et pour σ un automorphisme sauvage de $\mathbb{C}$ tel que $|\sigma(\lambda)| \neq 1$). Alors l'image de l'homomorphisme

$$\begin{cases} \Gamma & \longrightarrow \quad SL_2(\mathbb{K}') \\ \gamma & \longmapsto \quad \sigma(\gamma) \end{cases}$$

n'est pas relativement compacte, ce qui contredit le corollaire 23 si $\mathbb{K}'$ est archimédien, et le corollaire 7 si $\mathbb{K}'$ ne l'est pas. Le deuxième pas a comme conséquence immédiate que Γ est un groupe de torsion.

3e pas. L'ensemble $Tr\Gamma$ des traces des éléments de Γ est fini. En effet, si $\gamma \in \Gamma$, les valeurs propres de γ sont des racines de l'unité qui vérifient une équation quadratique sur $\mathbb{K}$ (à savoir $\det(\gamma - \lambda 1) \doteq 0$). Un autre lemme de Tits ([Ti4], lemma 2.3) assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles racines de l'unité.

4e pas. Pour conclure que Γ est fini, on utilise un théorème de Burnside (voir par exemple [Ba], Cor.1.3): comme Γ est irréductible sur $\mathbb{C}^2$ (1er pas) et que $Tr\Gamma$ est fini (3e pas), Γ lui-même est fini. □

Notons que nous aurions pu conclure après le deuxième pas en utilisant le théorème de l'alternative de Tits [Ti4], que nous avions déjà utilisé au corollaire 21 du chapitre 3: puisque Γ est un groupe de torsion, Γ ne contient pas de groupe libre, donc Γ est presque résoluble, donc moyennable, et 1.5.i permet de conclure. Nous avons opté pour une démonstration un peu plus longue mais plus élémentaire, qui a aussi l'avantage de montrer que la proposition 26 et le résultat de Tits reposent sur les mêmes lemmes.

CHAPITRE 7
LE PROBLÈME DE RUZIEWICZ

Le problème est de savoir s'il existe sur une sphère une mesure finiment additive invariante par rotations autre que la mesure de Lebesgue. Dans ce numéro, on suppose que les espaces boréliens sont tous *standard* et que les mesures sont toutes *positives et finies.*

1.- Définitions. Soit μ une mesure sur un espace borélien $(X, \mathcal{B})$. L'espace $M = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ des fonctions complexes sur X qui sont $\mathcal{B}$-mesurables et μ-essentiellement bornées (fonctions modulo l'égalité μ-presque partout) est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|f\| = \operatorname*{sup\,ess}_{x \in X} |f(x)| = \operatorname{Inf}\Big\{c > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > c\} = 0\Big\} .$$

Une forme linéaire $\Phi : M \to \mathbb{C}$ est *positive* si $\Phi(f) \geq 0$ lorsque $f(x) \geq 0$ pour μ-presque tout $x \in X$. On vérifie qu'une telle forme est toujours continue: $|\Phi(f)| \leq \Phi(\chi_X)\|f\|$, où χ_X désigne la fonction caractéristique de X. On désigne par M_+^* le cône des formes linéaires positives sur M. On appelle *état* sur M une forme $\Phi \in M_+^*$ qui prend la valeur 1 sur la fonction caractéristique de X.

Une forme $\Phi \in M_+^*$ définit une application finiment additive

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{B} & \longrightarrow \quad [0, \Phi(\chi_X)] \\ B & \longmapsto \quad \Phi(\chi_B) \end{cases}$$

Certains auteurs disent que φ est une *charge* sur $(X, \mathcal{B})$, et une *moyenne* lorsque de plus $\varphi(X) = 1$. Réciproquement, toute application $\varphi : \mathcal{B} \to [0, c]$ telle que

$$\begin{aligned} &\varphi(B) = 0 && \text{si } \mu(B) = 0 \\ &\varphi(X) = c && \\ &\varphi(B_1 \amalg B_2) = \varphi(B_1) + \varphi(B_2) && \text{si } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ avec } B_1 \cap B_2 = \emptyset \end{aligned}$$

provient d'une forme Φ comme ci-dessus (voir par exemple [HeS], théorème 20.35). Nous commettons ci-dessous l'abus consistant à confondre Φ et φ.

Supposons de plus qu'un groupe G agit sur $(X, \mathcal{B})$ par isomorphismes boréliens préservant la mesure μ. (Nous n'imposons aucune condition de continuité sur l'action, même si G n'est pas dénombrable.) Alors G agit naturellement sur M et M_+^*. Par exemple la forme positive

$$\mu \begin{cases} M & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ f & \longmapsto \quad \int_X f d\mu \end{cases}$$

est invariante par G.

2.- La mesure de Lebesgue sur les sphères. Considérons un entier $n \geq 2$, la sphère unité S^{n-1} de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la σ-algèbre $\mathcal{B}$ des boréliens de S^{n-1}, la *mesure de Lebesgue* normalisée λ sur $(S^{n-1}, \mathcal{B})$, et enfin l'action canonique du groupe des rotations $SO(n)$ sur $(S^{n-1}, \mathcal{B}, \lambda)$.

Dans ses "Leçons sur l'intégration" de 1904, H. Lebesgue a essentiellement montré que λ est l'unique mesure sur S^{n-1} qui soit invariante par les rotations [Leb]. On peut évidemment aussi voir λ comme étant définie sur la σ-algèbre $\mathcal{L}$ des parties de S^{n-1} qui sont mesurables au sens de Lebesgue. Toutefois, en 1914, F. Hausdorff a montré qu'on ne peut pas étendre λ en une moyenne invariante par rotations définie sur toutes les parties de S^{n-1} si $n \geq 3$ [Hau]. Puis S. Ruziewicz a demandé si λ était unique en tant que moyenne sur $(S^{n-1}, \mathcal{L})$ invariante par rotations. En 1923, S. Banach fournit une réponse négative pour $n = 2$; mais la question reste alors ouverte pour $n \geq 3$ [Ban].

3.- Boréliens et mesurables au sens de Lebesgue. A priori, il y a trois problèmes distincts d'unicité pour la mesure de Lebesgue λ vue comme moyenne invariante sur S^{n-1}, lorsque $n \geq 3$: l'un sur $(S^{n-1}, \mathcal{B})$, le second sur $(S^{n-1}, \mathcal{L})$, le troisième sur $M = \mathcal{L}^\infty(S^{n-1}, \mathcal{B}, \lambda) = \mathcal{L}^\infty(S^{n-1}, \mathcal{L}, \lambda)$. En fait les deux derniers problèmes sont équivalents pour les raisons suivantes. D'une part un état Ψ sur M invariant par rotations fournit évidemment une moyenne invariante sur $(S^{n-1}, \mathcal{L})$. D'autre part une moyenne invariante φ sur $(S^{n-1}, \mathcal{L})$ s'annule sur les ensembles négligeables en vertu du lemme suivant qui est dû à Tarski (voir les 5 dernières lignes de [Tar]), de sorte que φ définit un état invariant sur M (voir le numéro 1 ci-dessus).

Lemme (Tarski). Soit $\varphi : \mathcal{L} \to [0,1]$ une moyenne définie sur les parties de la sphère S^{n-1} mesurables au sens de Lebesgue, invariante par rotations. Si $n \geq 3$ alors $\varphi(N) = 0$ pour tout ensemble négligeable $N \in \mathcal{L}$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier naturel m avec $\frac{1}{m} < \varepsilon$, et un nombre réel $r > 0$ tels qu'il existe m boules $B_1, \ldots, B_m$ de rayon r deux à deux disjointes dans S^{n-1}. Par invariance et additivité de φ, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(B_i) \leq 1$$

d'où $\varphi(B_i) < \varepsilon$. L'existence de sous-groupes libres non abéliens dans $SO(n)$ implique un "paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski" qui peut se formuler comme suit: il existe un entier k, des partitions

$$S^{n-1} = \coprod_{1 \leq j \leq k} A_j$$

$$B_1 = \coprod_{1 \leq j \leq k} B_{1,j}$$

et des rotations $g_1, \ldots, g_k$ avec $g_j(A_j) = B_{1,j}$ pour $j = 1, \ldots, k$ (voir [HaS] ou [Wag]).

Si N est négligeable, alors $N_j = N \cap A_j$ et $g_j(N_j)$ sont mesurables au sens de Lebesgue (même si A_j ne l'est pas !), de sorte que

$$\varphi(N) = \sum_{1 \leq j \leq k} \varphi(N_j) = \sum_{1 \leq j \leq k} \varphi(g_j(N_j)) \leq \varphi(B_1) < \varepsilon .$$

Comme ε est arbitraire, $\varphi(N)$ est nul, comme désiré. □

Le premier des trois problèmes d'unicité mentionnés plus haut n'est apparemment *pas* équivalent aux suivants. En fait, on a le

Problème de Marczewski: Existe-t-il une moyenne μ définie sur les boréliens de S^{n-1} ($n \geq 3$) qui soit invariante par rotations et nulle sur les ensembles maigres ?

On sait que la réponse est positive pour $n = 2$; voir [Myc]. Le problème de Marczewski est lié à un problème connu de la théorie des AW^*-algèbres [BMW].

4.- Théorème (Rosenblatt, Margulis, Sullivan). Pour $n \geq 5$ la mesure de Lebesgue est la seule moyenne sur $(S^{n-1}, \mathcal{L})$ qui est invariante par les rotations.

Ce résultat est dû indépendamment à Margulis [Ma2] et Sullivan [Sul], qui utilisent tous deux un résultat partiel de Rosenblatt [JR], [Ros]. Avant d'en donner la preuve, nous définissons deux types de formes positives et nous établissons quelques résultats préliminaires.

5.- Formes positives normales et singulières. Soient à nouveau $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et M comme au numéro 1. Une forme $\Phi \in M_+^*$ est dite *normale* si $\lim_{j\to\infty} \Phi(f_j) = \Phi(f)$ pour toute suite positive croissante $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ de M qui converge point par point vers une fonction $f \in M$, c'est-à-dire si la moyenne associée

$$\begin{cases} \mathcal{B} \longrightarrow [0, \Phi(\chi_X)] \\ B \longmapsto \Phi(\chi_B) \end{cases}$$

est une mesure σ-finie. Nous désignons par M_*^+ la partie de M_+^* constituée par les formes normales.

Pour toute forme $\Phi \in M_+^*$, posons

$$\nu_\Phi(B) = \operatorname{Inf}\left\{ \sum_j \Phi(B_j) \ : \ B = \coprod_j B_j \ \text{ est une } \mathcal{B}\text{-partition dénombrable} \right\}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$. C'est un exercice facile de vérifier que ν_Φ est une mesure σ-additive: on montre d'abord que ν_Φ est σ-sous-additive (voir par exemple la preuve du théorème A de la section 10 dans [Hal]), puis que ν_Φ est additive, enfin que ν_Φ est σ-additive.

On dit qu'une forme positive $\Phi \in M_+^*$ est *singulière* si $\nu_\Phi = 0$. Toute forme $\Phi \in M_+^*$ possède une *décomposition canonique* $\Phi = \nu + \sigma$, avec $\nu = \nu_\Phi$ normale et $\sigma = \Phi - \nu_\Phi$ singulière. Si de plus Φ est invariante par un groupe G comme au numéro 1, alors ν et σ le sont aussi. Notons que la mesure ν_Φ est absolument continue par rapport à μ.

6.- Lemme. Soit Φ une forme positive singulière sur $M = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. On suppose que μ majore Φ au sens suivant: il existe une constante $c > 0$ telle que $c\mu(B) \geq \Phi(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Alors $\Phi = 0$.

Preuve. Un théorème du type Radon-Nykodim dû à I. Segal montre que, pour toute forme $\Phi \in M_+^*$, singulière ou non, majorée par μ au sens de l'énoncé, il existe une unique fonction $a \in M$ avec $a(x) \geq 0$ pour μ-presque tout $x \in X$ telle que

$$\Phi(f) = \int_X f(x)a(x)d\mu(x) \qquad \text{pour tout } f \in M \ .$$

Voir la proposition 3.3.5 de [Ped]. Par suite Φ est absolument continue par rapport à μ, avec dérivée de Radon-Nykodim a. Si de plus Φ est singulière, alors $a = 0$ presque partout, donc $\Phi = 0$. $\square$

7.- Lemme. Soit $\Phi \in M_+^*$ une forme singulière. Pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$ avec $\mu(B) > 0$, il existe un borélien $B' \subset B$ avec $\mu(B') > 0$ et $\Phi(B') = 0$.

Preuve. Soit B comme dans l'énoncé. L'assertion étant banale si $\Phi(B) = 0$, supposons au contraire $\Phi(B) > 0$. Choisissons une constante $c > 0$ telle que $c\mu(B) > \Phi(B)$.

On peut imaginer que l'idée de Rosenblatt pour la preuve de la proposition 1.1 de [Ros] est la suivante: définir B' comme le complémentaire dans B d'un élément maximal (pour l'inclusion) dans l'ensemble des sous-boréliens $A \subset B$ vérifiant $c\mu(A) \leq \Phi(A)$. En procédant naïvement, on se heurte à des difficultés pour estimer la mesure — ou plutôt la mesure extérieure — de $\cup A_j$, où $(A_j)_{j\in J}$ est une famille de boréliens en général non dénombrable. Mais on peut néanmoins exploiter cette idée comme suit.

Pour tout borélien $A \subset X$, notons p_A l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique χ_A sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Ainsi p_A est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur un sous-espace fermé $\mathcal{H}_A$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des projecteurs de $\mathcal{H}$ de la forme p_A, où A est un sous-borélien de B vérifiant $c\mu(A) \leq \Phi(A)$. On ordonne $\mathcal{F}$ par $p_A \leq p_{A'}$ si $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_{A'}$. Alors $\mathcal{F}$ est inductif.

Soit en effet $(A_j)_{j\in J}$ une famille de sous-boréliens de B vérifiant $c\mu(A_j) \leq \Phi(A_j)$, et telle que la famille $(p_{A_j})_{j\in J}$ soit totalement ordonnée. Notons $\mathcal{H}_\omega$ l'adhérence dans $\mathcal{H}$ de la réunion des $\mathcal{H}_{A_j}$, et p_ω le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_\omega$. Alors p_ω est un projecteur dans l'algèbre de von Neumann $M = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, et il existe un borélien $A_\omega \subset X$ tel que $p_\omega = p_{A_\omega}$. Comme $\mathcal{H}_\omega \subset \mathcal{H}_B$, on peut supposer $A_\omega \subset B$. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est inductif, il reste à vérifier que $c\mu(A_\omega) \leq \Phi(A_\omega)$. Mais la forme linéaire $\mu \in M_+^*$ est normale. Par suite

$$c\mu(A_\omega) = \sup c\mu(A_j) \leq \sup \Phi(A_j) \leq \Phi(A_\omega)$$

où la dernière inégalité résulte de la positivité de Φ.

Vu le lemme de Zorn, il existe donc un borélien $A' \subset B$ tel que $c\mu(A') \leq \Phi(A')$, et tel que le projecteur $p_{A'}$ soit maximal dans $\mathcal{F}$. Posons $B' = B - A'$.

De l'inégalité $c\mu(B) > \Phi(B)$ résulte que $p_B \notin \mathcal{F}$, donc aussi que $\mu(B') >$

0. Pour tout borélien $C \subset B'$ avec $\mu(C) > 0$, on a $c\mu(C) > \Phi(C)$ par maximalité de $p_{A'}$. Il résulte donc du lemme 6 que $\Phi(B') = 0$. □

8.- Proposition. Les notations étant comme aux numéros 1 et 5, soit $\Phi \in M_+^*$ une forme positive singulière sur $M = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. Il existe une suite croissante $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ de boréliens de X avec $\Phi(B_j) = 0$ pour tout $j \geq 1$ et $\lim_{j \to \infty} \mu(X - B_j) = 0$.

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble (non vide en vertu du lemme 7) des boréliens $B \subset X$ tels que $\mu(B) \neq 0$ et $\Phi(B) = 0$. Posons

$$m = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}\} .$$

Choisissons une suite $(B'_j)_{j \geq 1}$ de $\mathcal{F}$ avec

$$m = \sup\{\mu(B'_j) : j \geq 1\} .$$

Posons $B_j = \bigcup_{1 \leq i \leq j} B'_i$ pour tout $j \geq 1$ et $B_\infty = \bigcup_{j \geq 1} B_j$, de sorte qu'on a aussi

$$m = \lim_{j \to \infty} \mu(B_j) = \mu(B_\infty) .$$

Il suffit de montrer qu'on a $m = \mu(X)$.

Si on avait $m < \mu(X)$, le lemme précédent montrerait qu'il existe un borélien $B' \subset X - B_\infty$ avec $B' \in \mathcal{F}$. On aurait donc $B_j \cup B' \in \mathcal{F}$ et $\mu(B_\infty \cup B') > m$, ce qui est absurde. Donc $m = \mu(X)$. □

9.- Moyennes singulières et vecteurs presqu'invariants. En conservant toujours les mêmes notations, considérons de plus dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'hyperplan fermé $\mathcal{H}_0$ des fonctions f telles que $\int_X f d\mu = 0$. Si un groupe G agit comme plus haut sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$, il agit aussi naturellement sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$.

Supposons de plus que l'action de G est *ergodique*, c'est-à-dire telle que tout borélien $B \in \mathcal{B}$ invariant par G satisfait $\mu(B) = 0$ ou $\mu(X - B) = 0$, ou encore telle que la représentation de G dans $\mathcal{H}_0$ ne possède pas de vecteur invariant. (Pour l'équivalence, voir le corollaire 2.2.17 de [Zim].)

Proposition (Rosenblatt). On suppose que G est dénombrable et agit ergodiquement sur l'espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$. S'il existe une moyenne $\Phi : M = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathbb{C}$ invariante par G et distincte de μ, alors la représentation de G dans $\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu) : \int_X f d\mu = 0\}$ possède presque des vecteurs invariants.

Preuve. Voyons d'abord qu'on ne restreint pas la généralité de la preuve en supposant Φ singulière. Soit $\Phi = \nu + \sigma$ la décomposition canonique de Φ — voir le numéro 5. Alors ν est une mesure sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ invariante par G et absolument continue par rapport à μ. La dérivée de Radon-Nykodim $\frac{d\nu}{d\mu}$ est donc une fonction mesurable sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et invariante par G. L'hypothèse d'ergodicité implique que cette fonction est une constante. Il existe donc $c \in [0, 1]$ avec $\nu = c\mu$. Comme $\Phi \neq \mu$, il existe un borélien $B \subset X$ avec $\Phi(B) \neq \mu(B)$. Quitte à remplacer B par $X - B$, on peut supposer $\Phi(B) < \mu(B)$, et a fortiori $\nu(B) < \mu(B)$. Par suite $c < 1$ et $\sigma \neq 0$. Quitte à remplacer Φ par un multiple de σ, on peut donc supposer que la moyenne donnée est singulière.

Posons $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) : f \geq 0 \text{ et } \int f d\mu = 1\}$. Un argument standard qui utilise le théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe une suite généralisée $(f_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{P}$ qui converge vers Φ au sens où $\lim_i \int f f_i d\mu = \Phi(f)$ pour tout $f \in M$ (voir la proposition 7.2.3 de [Zim]). On fait subir à la suite $(f_i)_{i \in I}$ les modifications suivantes.

Soit d'abord B un borélien de X avec $\Phi(B) = 0$ et $\mu(B) \geq 1/2$ (proposition 8). On a $0 = \Phi(B) = \lim_i \int_B f_i d\mu$, de sorte que $f_i \neq 0$ sur $X - B$ pour i assez grand, et on peut supposer $f_i \neq 0$ sur $X - B$ pour tout i. On note f_i^1 la fonction de $\mathcal{P}$ qui est nulle sur B et égale à un multiple convenable de f_i sur $X - B$. Alors $(f_i^1)_{i \in I}$ converge encore vers Φ au sens précédent.

Comme la moyenne Φ est invariante par G, la suite $(f_i^1)_{i \in I}$ est faiblement asymptotiquement invariante:

$$\lim_i \int_X f(gf_i^1 - f_i^1) d\mu = 0 \qquad \text{pour tous } f \in M \text{ et } g \in G .$$

Un argument de Namioka, qui repose encore sur le théorème de Hahn-Banach, montre qu'il existe une suite $(f_i^2)_{i \in I}$ de $\mathcal{P}$ qui converge toujours vers Φ au sens précédent et qui est fortement asymptotiquement invariante:

$$\lim_i \|gf_i^2 - f_i^2\|_1 = 0 \qquad \text{pour tout } g \in G$$

où la norme est calculée dans $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Pour les détails, voir la preuve du théorème 7.1.8 de [Zim].

Posons $f_i^3 = (f_i^2)^{1/2}$ pour tout $i \in I$. Alors f_i^3 est un vecteur de norme 1 dans $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, et $\lim_i \|gf_i^3 - f_i^3\|_2 = 0$ pour tout $g \in G$.

Soit enfin f_i^4 la projection orthogonale de f_i^3 sur l'hyperplan $\mathcal{H}_0$ d'équation $\int_X f d\mu = 0$ dans $\mathcal{H}$. Comme $f_i^3 = 0$ sur le borélien B de mesure $\mu(B) \geq 1/2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $\|f_i^4\|_2^2 \geq \frac{3}{4}$ pour tout $i \in I$. Comme $\lim_i \|gf_i^4 - f_i^4\|_2 = 0$ pour tout $g \in G$, la preuve est achevée. □

Preuve du théorème 4. Si $n \geq 5$, nous savons par la proposition 3.7 que le groupe $SO(n)$ contient un sous-groupe dénombrable G qui est dense et qui a la propriété (T). Comme G est dense dans $SO(n)$ qui est transitif sur S^{n-1}, le groupe G est ergodique sur S^{n-1} (lemme 2.2.13 de [Zim]), donc G n'a pas de vecteur invariant dans $\mathcal{H}_0$. Comme G a la propriété (T), le théorème 4 résulte de la proposition 9. □

Vu la proposition 6.26, il n'est pas possible d'adapter la preuve ci-dessus du théorème 4 aux cas $n = 3$ et $n = 4$. Mais le résultat, lui, reste vrai [Dri]:

10.- Théorème (Drinfel'd). Si $n = 3$ ou $n = 4$, la mesure de Lebesgue est la seule moyenne sur $(S^{n-1}, \mathcal{L})$ qui est invariante par rotations.

11.- Remarques. (i) A. Lubotzky, R. Phillips et P. Sarnak ont donné une "preuve explicite" du théorème 10; voir [LPS1], ainsi que [CV].

(ii) Le problème de Ruziewicz s'énonce aussi pour les espaces euclidiens: la mesure de Lebesgue est-elle unique en tant que mesure finiment additive sur les ensembles mesurables au sens de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ qui soit invariante par les déplacements et normalisée sur le cube unité ? La réponse pour $n \leq 2$ est négative [Ban]. Les arguments de la preuve du théorème 4 montrent qu'elle est positive pour $n \geq 5$. Des arguments plus fins dus à Margulis, également basés sur la propriété (T), montrent qu'elle est encore positive pour $n \geq 3$ [Ma4].

(iii) On considère un groupe dénombrable G, et les actions de G qui sont ergodiques et qui préservent les mesures sur des espaces de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sans atome. En utilisant un raffinement de la proposition 9 [Ros], ainsi qu'un résultat de Connes et Weiss [CW], K. Schmidt [Sc2] a montré qu'il y a équivalence entre

(a) le groupe G a la propriété (T) de Kazhdan,

(b) tout G-espace comme ci-dessus possède une unique moyenne invariante.

(Ce résultat a été généralisé par M. Choda [Cha].) Le même travail de Schmidt montre qu'il y a aussi équivalence entre

(c) le groupe G est moyennable,

(d) tout G-espace comme ci-dessus possède plusieurs moyennes invariantes.

En revanche, si G n'est ni moyennable ni de Kazhdan, par exemple si $G = SL_2(\mathbb{Z})$, il peut exister un G-espace avec une seule moyenne invariante et un autre G-espace avec plusieurs moyennes invariantes [Sc1], [Sc2]. Notons enfin que, chaque fois qu'il n'y a pas unicité, le cardinal de l'ensemble des moyennes invariantes sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est non dénombrable [Cho].

CHAPITRE 8

UN PROBLÈME DE CENTRAUX TÉLÉPHONIQUES

Margulis a découvert en 1973 une application originale de la propriété (T). Comme nous l'exposons dans ce chapitre, il s'agit de la solution d'un problème de théorie des graphes important en théorie des circuits et en programmation (voir [Rou]). Tous les *graphes* qui apparaissent ici sont supposés être non vides, *finis, connexes* et *sans boucle* (i.e. sans arête à extrémités confondues). Dans un graphe orienté, appelons *émetteur* un sommet qui est origine de certaines arêtes et qui n'est extrémité d'aucune, et définissons de même la notion de *récepteur.* Un *connecteur uniforme* est un graphe biparti orienté ayant un nombre pair $2n$ de sommets répartis en n émetteurs et n récepteurs.

1.- Définition [Ma1]. Soient c, α des nombres réels avec $c > 1$ et $0 < \alpha < 1$. Un (c, α)*-concentrateur* est un connecteur uniforme à $2n$ sommets qui possède la propriété suivante:

pour toute partie non vide X de l'ensemble des émetteurs vérifiant $\frac{|X|}{n} \leq \alpha$, l'ensemble $N(X)$ des récepteurs connectés à au moins un émetteur de X vérifie
$$\frac{|N(X)|}{|X|} \geq c\ .$$

Pour qu'un (c, α)-concentrateur puisse exister, il faut évidemment que
$$\alpha \geq \frac{1}{n} \text{ et } c \leq \frac{n}{\alpha n - 1} \approx \frac{1}{\alpha}\ .$$

L'idée qu'on peut avoir d'un (c, α)-concentrateur à $2n$ sommets est celle d'un réseau téléphonique dont chacun des n abonnés est représenté à la fois par un émetteur et un récepteur. Les arêtes du graphe représentent les lignes. On demande que tout ensemble X suffisamment petit d'émetteurs soit connecté à un ensemble $N(X)$ relativement assez grand de récepteurs, et plus précisément que tout X dont la densité vérifie $\frac{|X|}{n} \leq \alpha$ soit connecté à $N(X)$ tel que $\frac{|N(X)|}{|X|} \geq c$. Si α est fixé, la qualité d'un (c, α)-concentrateur est donc d'autant meilleure que c est grand. Le graphe biparti complet $K_{n,n}$ qui possède n émetteurs, n récepteurs et n^2 arêtes, est un exemple de $(1/\alpha, \alpha)$-concentrateur pour tout α avec $0 < \alpha < 1$. Mais c'est un exemple coûteux lorsque n est grand, car les arêtes sont (par exemple) en cuivre et le cuivre est cher.

En fait, étant donné c et α avec $0 < \alpha < 1$ et $1 < c < 1/\alpha$, on cherche à construire une suite $(G_j)_{j\geq 1}$ de (c,α)-concentrateurs telle qu'il existe une constante k avec les propriétés suivantes. D'abord le nombre $2n_i$ des sommets de G_i tend vers l'infini avec i, ensuite le nombre d'arêtes de G_i est majoré par kn_i pour tout i (voir le n°1.3 de [Ma1]).

L'existence d'une telle suite se montre assez aisément ([Pin], [Bas]) par des méthodes "probabilistes" basées sur des arguments de comptage: c, α et k étant fixés, on estime la proportion parmi tous les connecteurs uniformes à $2n$ sommets de ceux qui ne possèdent *pas* les propriétés décrites plus haut; pour n assez grand, on montre que cette proportion est strictement inférieure à 1. (On montre même que la proportion des "bons" graphes tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Voir [Rou] 11.3 pour un exemple de telle preuve.) L'inconvénient de la méthode est d'être irrémédiablement non constructive.

Nous allons d'abord indiquer comment Margulis [Ma1] a construit explicitement une suite $(G_i)_{i\geq 1}$ avec les propriétés ci-dessus en utilisant la propriété (T) de la paire $(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}),\ \mathbb{Z}^2)$, puis comment Alon et Milman [AM] construisent d'autres suites $(G_i)_{i\geq 1}$ en utilisant la propriété (T) de $SL_n(\mathbb{Z})$ pour $n \geq 3$. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est utile de disposer de la notion suivante (implicite chez Margulis).

2.- Définition (Gabber et Galil [GG]). Soient n, k des entiers positifs et d un nombre réel positif. Un (n,k,d)-*extenseur* est un connecteur uniforme à $2n$ sommets et au plus kn arêtes qui possède la propriété suivante:

pour toute partie non vide X de l'ensemble des émetteurs, on a

$$\frac{|N(X)|}{|X|} \geq 1 + d\left(1 - \frac{|X|}{n}\right) .$$

Pour qu'un (n,k,d)-extenseur puisse exister, il faut évidemment que

$$d \leq \frac{\frac{n}{n-1} - 1}{1 - \frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} .$$

3.- Conséquence immédiate des définitions. Un connecteur uniforme à $2n$ sommets et au plus kn arêtes est un (n,k,d)-extenseur si et seulement si c'est un $(1 + d(1-\alpha), \alpha)$-concentrateur pour tout α avec $0 < \alpha < 1$.

4.- Théorème (th. 2.3 de [Ma1]). Pour tout entier $m \geq 2$, soit (E_m, R_m, A_m) le connecteur uniforme défini comme suit. L'ensemble E_m des émetteurs et l'ensemble R_m des récepteurs sont $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$. L'ensemble A_m des arêtes connecte chaque émetteur $(x, y) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ aux cinq récepteurs

$$(x\,,\,y) \qquad (x{+}1\,,\,y) \qquad (x\,,\,y{+}1) \qquad (x\,,\,x{+}y) \qquad (-y\,,\,x)\ .$$

Alors il existe une constante $d > 0$ telle que (E_m, R_m, A_m) soit un $(m^2, 5, d)$-extenseur pour tout $m \geq 2$.

Pour la démonstration, on introduit quatre permutations affines de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire quatre éléments du groupe $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= (x{+}1\,,\,y) \qquad & g_2(x,y) &= (x\,,\,y{+}1) \\ g_3(x,y) &= (x\,,\,x{+}y) \qquad & g_4(x,y) &= (-y\,,\,x)\ . \end{aligned}$$

5.- Lemme. Le groupe $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Preuve. Les translations g_1, g_2 engendrent $\mathbb{Z}^2$ et les transformations $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$; voir par exemple le §VII.1 de [Se2]. □

6.- Lemme. La paire $(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$ possède la propriété (T) de la définition 1.18.

Preuve. Posons $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R})$. Soit π une représentation de $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ possédant presque des vecteurs invariants. Par le lemme 3.3, la représentation $\sigma = Ind_H^G \pi$ de G possède presque des vecteurs invariants; elle possède donc des vecteurs $\mathbb{R}^2$-invariants non nuls par la proposition 2.2. Notons $\mathcal{K}$ le sous-espace non nul des vecteurs $\mathbb{R}^2$-invariants dans l'espace de la représentation σ. Comme $\mathbb{R}^2$ est normal dans G, ce sous-espace $\mathcal{K}$ est invariant par G. Comme G est un groupe de Lie, le sous-espace $\mathcal{K}^\infty$ des vecteurs lisses de $\mathcal{K}$ est dense dans $\mathcal{K}$ (voir plus bas le n°9.4). On choisit un vecteur non nul $f_0 \in \mathcal{K}^\infty$.

D'après la description de σ donnée en 3.2, ce vecteur f_0 est a priori une fonction mesurable de G dans $\mathcal{H}_\pi$ telle que

$$f_0(xh) = \pi(h^{-1}) f_0(x) \qquad \text{pour tout } h \in H \text{ et presque tout } x \in G$$

$$f_0(gx) = f_0(x) \qquad \text{pour tout } g \in \mathbb{R}^2 \text{ et presque tout } x \in G\ .$$

Mais comme $f_0 \in \mathcal{K}^\infty$, on montre que f_0 est une fonction différentiable de G dans $\mathcal{H}_\pi$ (voir le corollaire III.7.9 de [BW]), de sorte que les deux égalités ci-dessus sont vraies pour tout $x \in G$.

Soit $x_0 \in G$ tel que $f_0(x_0) \neq 0$. Vérifions que le vecteur non nul $\xi = f_0(x_0) \in \mathcal{H}_\pi$ est invariant par $\mathbb{Z}^2$. Soit $h \in \mathbb{Z}^2$. On a

$$\pi(h^{-1})\xi = f_0(x_0 h) = f_0\big((x_0 h x_0^{-1})x_0\big) = \xi \ ,$$

où la dernière égalité résulte encore de la normalité de $\mathbb{R}^2$ dans G. □

Vu la caractérisation 1.18.ii de la propriété (T) relative et la définition de la topologie de Fell sur $\widetilde{H}$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une partie finie K de H tels que toute représentation π de H ayant des vecteurs (ε, K)-invariants par H a des vecteurs invariants par $\mathbb{Z}^2$. On en déduit le résultat suivant.

7.- Proposition. Il existe une constante $d > 0$ telle que, pour toute représentation σ de H sans vecteur non nul invariant par $\mathbb{Z}^2$ et pour tout vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\sigma$, il existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ avec

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi | \sigma(g_i)\xi \rangle \leq 1 - d \ .$$

Preuve. Soient ε et K comme plus haut. Vu ce qui précède, il existe $g \in K$ avec $\|\sigma(g)\xi - \xi\| \geq \varepsilon$. Le lemme 5 montre qu'il existe un entier N tel que tout élément de K s'écrive comme un mot de longueur au plus N en $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Il existe donc au moins un indice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\|\sigma(g_i)\xi - \xi\| \geq \frac{\varepsilon}{N}$, ce qui s'écrit aussi

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi | \sigma(g_i)\xi \rangle \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2N^2} \ .$$

Par suite $d = \frac{\varepsilon^2}{2N^2}$ convient. □

On considère l'orthogonal $\mathcal{H}_m$ des fonctions constantes dans l'espace de Hilbert $\ell^2((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2)$. Le groupe H agit de manière naturelle sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$. On note σ_m la représentation associée de H dans $\mathcal{H}_m$.

8.- Proposition. On conserve les notations de la proposition 7. Pour tout vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_m$, il existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi | \sigma_m(g_i)\xi \rangle \leq 1 - d \ .$$

Preuve. Vu la proposition 7, il suffit de vérifier que $\mathcal{H}_m$ n'a pas de vecteur non nul invariant par $\mathbb{Z}^2$. Mais ceci est immédiat, car $\mathbb{Z}^2$ agit transitivement sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$. □

9.- Preuve du théorème 4. Soit X une partie non vide et non pleine de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$. On associe à X une fonction $\xi_X \in \mathcal{H}_m$ en posant

$$\xi_X(x) = \begin{cases} m^2 - |X| & \text{si } x \in X \\ -|X| & \text{sinon.} \end{cases}$$

La proposition 8 montre que

$$\langle \xi_X | \sigma_m(g_i)\xi_X \rangle \leq (1-d)\|\xi_X\|^2$$

pour un indice i au moins.

Un calcul direct montre que

$$\|\xi_X\|^2 = m^2|X|(m^2 - |X|)$$
$$\langle \xi_X | \sigma_m(g_i)\xi_X \rangle = m^2(m^2|X \cap g_iX| - |X|^2) .$$

Par suite

$$m^2|X \cap g_iX| - |X|^2 \leq (1-d)|X|(m^2 - |X|)$$

ou encore

$$|X \cap g_iX| \leq |X|\Big(1 - d + d\frac{|X|}{m^2}\Big)$$

et

$$|X \cup g_iX| = 2|X| - |X \cap g_iX| \geq |X|\Big(1 + d(1 - \frac{|X|}{m^2})\Big) .$$

On considère désormais X comme un ensemble d'émetteurs. Alors

$$N(X) = X \cup g_1X \cup g_2X \cup g_3X \cup g_4X$$

et

$$|N(X)| \geq |X \cup g_iX| \geq |X|\Big(1 + d(1 - \frac{|X|}{m^2})\Big) ,$$

ce qui achève la preuve. □

La qualité d'un (n, k, d)-extenseur est d'autant meilleure que d est grand. Or Margulis écrit dans [Ma1] qu'il est malheureusement incapable d'estimer

d. On peut attribuer cela au fait que la propriété (T) décrit qualitativement des phénomènes sans les préciser quantitativement (voir le problème 1.17 et l'appendice). En 1981, Gabber et Galil [GG] ont modifié la construction de Margulis et ont obtenu des estimations explicites pour d. Ils travaillent avec d'autres permutations affines de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$:

$$\begin{array}{ll} h_1(x,y) = (x\,,\, x+y) & h_2(x,y) = (x\,,\, x+y+1) \\ h_3(x,y) = (x+y\,,\, y) & h_4(x,y) = (x+y+1\,,\, y)\ . \end{array}$$

En utilisant l'analyse harmonique relative au dual T^2 du groupe $\mathbb{Z}^2$, ils obtiennent pour tout entier m un $(m^2, 5, \frac{2-\sqrt{3}}{4})$-extenseur (théorème 2 de [GG]). Ils esquissent aussi une construction de $(m^2, 7, \frac{2-\sqrt{3}}{2})$-extenseur qui fait intervenir les permutations

$$\begin{array}{ll} j_1(x,y) = (x\,,\, y+2x) & j_2(x,y) = (x\,,\, y+2x+1) \\ j_3(x,y) = (x\,,\, y+2x+2) & j_4(x,y) = (x+2y\,,\, y) \\ j_5(x,y) = (x+2y+1\,,\, y) & j_6(x,y) = (x+2y+2\,,\, y) \end{array}$$

de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$. En 1984, Alon et Milman [AM2] ont montré qu'en ajoutant les six permutations $j_1^{-1}, j_2^{-1}, \ldots, j_6^{-1}$, on obtient un $(m^2, 13, c)$-extenseur avec

$$c = 8d_0[2d_0 + 1 + (4d_0^2 + 1)^{1/2}]^{-1} = 0,465\ldots$$

et $d_0 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

****

Une autre idée intéressante, introduite par Alon et Milman [AM] en 1985, relie les qualités d'extension d'un graphe aux valeurs propres d'un certain laplacien combinatoire.

On considère plus précisément un graphe avec ensemble de sommets Δ^0 et ensemble d'arêtes Δ^1. On choisit (provisoirement — voir plus bas) une orientation qui associe à chaque arête $b \in \Delta^1$ son origine $o(b)$ et son extrémité $e(b)$. L'opérateur de cobord simplicial $d : \ell^2(\Delta^0) \to \ell^2(\Delta^1)$ est alors défini par $(df)(b) = f(e(b)) - f(o(b))$ pour $f \in \ell^2(\Delta^0)$ et $b \in \Delta^1$. La matrice

$(d_{x,b})_{x\in\Delta^0, b\in\Delta^1}$ de d dans les bases canoniques de $\ell^2(\Delta^0)$ et $\ell^2(\Delta^1)$ n'est autre que la matrice d'incidence du graphe orienté:

$$d_{x,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = e(b) \\ -1 & \text{si } x = o(b) \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En reprenant une idée que nous croyons due à Eckmann [Eck], on définit le *laplacien combinatoire* $\Delta = d^*d$ du graphe considéré. Ce laplacien ne dépend *pas* du choix de l'orientation, comme il résulte de la formule

$$\Delta f(x) = v(x)f(x) - \sum_{y \text{ voisin de } x} f(y) \qquad f \in \ell^2(\Delta^0), x \in \Delta^0$$

où $v(x)$ désigne le nombre de voisins de x. Il est évident que le spectre de Δ est fini, positif, et contient 0 (avec multiplicité 1 car le graphe est connexe). On s'intéresse ici à la plus petite valeur propre non nulle λ_1 de Δ.

10.- Définition [AM]. Soient n, k des entiers positifs et ε un nombre réel positif. Un (n, k, ε)-*agrandisseur* est un graphe à n sommets dans lequel chaque sommet possède k voisins et dont la première valeur propre satisfait $\lambda_1 \geq \varepsilon$.

11.- Définition. Soit G un graphe d'ensemble de sommets Δ^0 et d'ensemble d'arêtes Δ^1. Le *revêtement double* de G est le connecteur uniforme dont l'ensemble des émetteurs et l'ensemble des récepteurs sont deux copies de Δ^0, et où un émetteur x est connecté à un récepteur y si et seulement si $x = y$ ou $(x, y) \in \Delta^1$.

L'intérêt de ces notions pour le présent chapitre est démontré par le résultat suivant, pour la preuve duquel nous renvoyons au théorème 4.3 de [AM].

12. Théorème. Le revêtement double d'un (n, k, ε)-agrandisseur est un $(n, k+1, \frac{4\varepsilon}{k+4\varepsilon})$-extenseur.

La construction d'une famille de $(n_i, k+1, d)$-extenseurs avec $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$ est donc ramenée à celle d'une famille de (n_i, k, ε)-agrandisseurs avec ε convenable. Nous indiquons ci-dessous comment Alon et Milman résolvent ce dernier problème (voir la fin du §3 et le théorème 4.9 de [AM]). Rappelons d'abord ce qu'est le *graphe de Cayley* $\Gamma(H,S)$ associé à un groupe fini H et un ensemble S de générateurs de H satisfaisant $1 \notin S$ et $S^{-1} = S$: c'est un graphe dont l'ensemble des sommets est H, et dans lequel deux sommets $x, y \in H$ sont liés par une arête si et seulement si $xy^{-1} \in S$. (C'est un graphe connexe car S engendre H.)

13.- Théorème. Soient G un groupe de Kazhdan infini dénombrable et S un ensemble fini de générateurs de S satisfaisant $1 \notin S$ et $S = S^{-1}$. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ avec la propriété suivante:

pour tout homomorphisme surjectif $\varphi : G \to H$ avec H un groupe fini et $\varphi|(S \cup \{1\}) \ : \ S \cup \{1\} \to H$ injectif, le graphe de Cayley $\Gamma(H, \varphi(S))$ est un $(|H|, |S|, \varepsilon)$-agrandisseur.

Preuve. Vu la proposition 1.15, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ avec la propriété suivante: pour toute représentation π de G sans vecteur invariant et pour tout vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, il existe un générateur $s \in S$ avec

$$\mathrm{Re}\,\langle \xi | \pi(s)\xi \rangle \leq 1 - \varepsilon \ .$$

Etant donné $\varphi : G \to H$ comme dans l'énoncé, considérons la représentation régulière gauche λ_H de H, et notons σ la sous-représentation de λ_H définie par l'orthogonal $\mathcal{H}$ des fonctions constantes dans $\ell^2(H)$. Comme G agit transitivement sur H par multiplication à gauche, la représentation $\sigma\varphi$ de G dans $\mathcal{H}$ n'a pas de vecteur invariant non nul. Il existe donc pour tout vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}$ un générateur $h \in \varphi(S)$ tel que

$$(*) \qquad \mathrm{Re}\,\langle \xi | \xi - \sigma(h)\xi \rangle \geq \varepsilon \ .$$

Considérons le laplacien combinatoire Δ du graphe de Cayley $\Gamma(H, \varphi(S))$ et la formule déjà écrite avant la définition 10, qu'on peut lire maintenant sous la forme

$$\Delta = \sum_{h \in \varphi(S)} (1 - \sigma(h)) \ .$$

Notons S_2 l'ensemble des involutions ($s^2 = 1$) dans S et $S_0 = S - S_2$. Choisissons un domaine fondamental S_1 pour l'action libre du groupe à deux éléments sur S_0 par $s \to s^{-1}$. On a

$$\Delta = \sum_{h \in \varphi(S_2)} (1 - \sigma(h)) + 2 \sum_{h \in \varphi(S_1)} (1 - \mathrm{Re}\,\sigma(h)) \ .$$

Cette expression a l'avantage de ne faire apparaître que des opérateurs positifs. Pour tout vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}$, le nombre $\langle \xi | \Delta \xi \rangle$ s'écrit donc comme somme de nombres positifs dont l'un est le terme de gauche de l'inégalité (*). Par suite

$$\langle \xi | \Delta \xi \rangle \geq \varepsilon \|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \, .$$

En particulier la plus petite valeur propre de Δ sur $\mathcal{H}$ satisfait $\lambda_1 \geq \varepsilon$. □

Pour illustrer le théorème 13, on peut poser $G = SL_n(\mathbb{Z})$, avec $n \geq 3$. Si $j = (-1)^{n+1}$, les matrices

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

engendrent G (voir [New], page 107). On pose $S = \{s_1, s_2, s_1^{-1}, s_2^{-1}\}$. Pour tout entier $i \geq 2$, on considère le quotient $SL_n(\mathbb{Z}/i\mathbb{Z})$ de G, et on note n_i son ordre. Le théorème 13 fournit donc une suite de $(n_i, 4, \varepsilon)$-agrandisseurs. Ceci illustre aussi l'intérêt d'estimer le nombre ε_f introduit au problème 1.17.

****

Nous terminons ce chapitre en mentionnant quelques résultats complémentaires sur les graphes "très connexes" (mais ce ne sont plus des résultats directement liés à la propriété de Kazhdan). Voir aussi [Bie]. L'usage d'un réseau téléphonique en forme de concentrateur ou d'extenseur peut être décevant pour une partie X d'abonnés-émetteurs, car le réseau n'assure que la grosseur de l'ensemble $N(X)$ des récepteurs connectés à X, et tant pis pour X si $N(X)$ ne contient pas ses interlocuteurs préférés. Voici un modèle pour des réseaux moins décevants (de ce point de vue au moins).

14.- Définition. Soient n et k deux entiers positifs. Un (n,k)-*superconcentrateur* est un graphe orienté acyclique avec n émetteurs, n récepteurs et au plus kn arêtes qui possède la propriété suivante:

pour tout entier r avec $1 \leq r \leq n$, tout ensemble de r émetteurs est connecté à tout ensemble de r récepteurs par r chemins disjoints.

Notons que le nombre des sommets d'un (n, k)-superconcentrateur est en général $> 2n$.

L'entier k de la définition est la *densité* du superconcentrateur, et la qualité de celui-ci est d'autant meilleure que sa densité est petite. On trouve des détails et des références sur les superconcentrateurs dans [GG] et [Rou]. Pour la construction auquel l'énoncé suivant fait allusion et pour la preuve de l'énoncé, voir le théorème 3 de [GG].

15.- Proposition. On considère un nombre entier $p \geq 2$. Il existe une construction explicite qui, à tout $\left(n, k, \frac{2}{p-1}\right)$-extenseur avec n un carré parfait, associe un $(n, (2k+3)p+1)$-superconcentrateur.

Nous avons déjà mentionné la famille de $\left(m^2, 5, \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$-extenseurs construite par Gabber et Galil. Comme $\frac{2-\sqrt{3}}{4} < \frac{2}{29}$, la proposition 15 lui fait correspondre une famille de superconcentrateurs de densités majorées par 404. De même, la seconde famille de $\left(m^2, 7, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$-extenseurs mentionnée plus haut permet à Gabber et Galil de construire une famille de superconcentrateurs de densités majorées par 273. La famille de $(m^2, 13, c)$-extenseurs construite par Alon et Milman [AM2] fournit une densité inférieure à 175. Dans la suite de records successifs dont nous avons eu connaissance, le dernier en date est détenu par Lubotzky, Philips et Sarnak [LPS2] pour une densité de 58. L'idée de départ pour leur construction est de considérer un nombre premier p et l'arbre du groupe $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$, qui est l'arbre homogène de degré $p+1$ décrit au chapitre 2 de [Ser]. Les quotients de cet arbre par des sous-groupes discrets cocompacts convenables de $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ sont des graphes finis avec les propriétés désirées.

CHAPITRE 9
Sp(1,n) EST UN GROUPE DE KAZHDAN (n≥ 2)

L'objectif de ce chapitre est la preuve du résultat de Kostant énoncé dans le titre [Ko1]. Les résultats de Kostant sont en fait beaucoup plus précis, puisqu'ils classent les fonctions sphériques définies positives sur les groupes de Lie réels simples de centres finis et de rang réel 1. Mais cette classification fait appel à une grosse machinerie de Harish-Chandra et ses successeurs (voir en fin de chapitre la discussion sur les preuves de Kostant et autres). Dans le cas de $Sp(1,n)$, il nous a donc paru intéressant de donner une démonstration ne visant que le résultat du titre, et limitant autant que possible (?) les invocations à la théorie fine des représentations.

La preuve qui suit réorganise les arguments de la "preuve cohomologique" de Borel et Wallach ([BW], proposition 7.8 du chapitre II et théorème 5.2 du chapitre V). La propriété (T) pour $Sp(1,n)$ avec $n \geq 2$ résulte immédiatement des deux théorèmes suivants, avant les énoncés desquels nous introduisons quelques notations.

1.- Notations. Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe non compact de centre fini. Soit $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ une décomposition de Cartan de son algèbre de Lie (voir [He1], III.7). On rappelle qu'il existe un automorphisme involutif θ de $\underline{g}$ dont l'algèbre des points fixes est l'algèbre $\underline{k}$ d'un sous-groupe compact maximal K de G, et on pose $\underline{p} = \{X \in \underline{g} : \theta X = -X\}$. La forme de Killing B sur $\underline{g}$ est définie négative sur $\underline{k}$ et définie positive sur $\underline{p}$ (voir [He1], III.7.4). On peut donc choisir une base $(X_i)_{1\leq i\leq k}$ de $\underline{k}$ et une base $(Y_j)_{1\leq j\leq p}$ de $\underline{p}$ telles que

$$B(X_i, X_j) = -\delta_{ij} \qquad 1 \leq i,j \leq k$$
$$B(Y_i, Y_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i,j \leq p\ .$$

On définit les opérateurs de Casimir de K et de G

$$\Omega_K = - \sum_{1\leq i\leq k} X_i^2$$
$$\Omega_G = \Omega_K + \sum_{1\leq j\leq p} Y_j^2$$

qui sont respectivement dans le centre de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\underline{k})$ de $\underline{k}$ et dans celui de $\mathcal{U}(\underline{g})$; voir par exemple la proposition 8.6 de [Kn].

Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. On note $\mathcal{H}_{\pi,(K)}$ ou $\mathcal{H}_{(K)}$ l'espace des *vecteurs K-finis*, c'est-à-dire des vecteurs $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ tels que l'espace vectoriel engendré par $\pi(K)\xi$ est de dimension finie. On sait que $\mathcal{H}_{(K)}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\pi$ qui est aussi un module sur K, sur $\underline{g}$ et sur son algèbre enveloppante; de plus, si π est irréductible, la multiplicité dans $\mathcal{H}_{(K)}$ d'une représentation irréductible de K est toujours finie (théorème 8.1 de [Kn]). Donc, l'espace $\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{(K)})$ qui apparaît dans les théorèmes 2 et 3 est de dimension finie; c'est l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\underline{p}_{\mathbb{C}} = \underline{p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathcal{H}_{(K)}$ qui sont équivariantes par K, où K agit par la représentation adjointe sur $\underline{p}_{\mathbb{C}}$ et par π sur $\mathcal{H}_{(K)}$.

Lorsque π est de plus irréductible, il résulte du lemme de Schur que l'opérateur $\pi(\Omega_G)$ sur $\mathcal{H}_{(K)}$ est un multiple scalaire de l'identité ([Kn], 8.14). Rappelons enfin que $\widehat{G}$ désigne le dual unitaire de G, comme au n°1.13.

2.- Théorème A. Si $G = Sp(1,n)$ avec $n \geq 2$, il n'existe aucune représentation $\pi \in \widehat{G}$ telle qu'on ait simultanément $\pi(\Omega_G) = 0$ et $\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\pi,(K)}) \neq 0$.

3.- Théorème B (Delorme). Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini. Si G n'a pas la propriété (T), il existe $\pi \in \widehat{G}$ avec $\pi(\Omega_G) = 0$ et $\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\pi,(K)}) \neq 0$.

4.- Premier commentaire cohomologique. Le théorème A possède une bonne interprétation cohomologique: si $G = Sp(1,n)$ avec $n \geq 2$ alors $H^1(G,\pi) = 0$ pour tout $\pi \in \widehat{G}$. Bien que ce ne soit pas utile aux preuves ci-dessous des théorèmes A et B, justifions brièvement cette interprétation.

Soit π une représentation unitaire d'un groupe de Lie G. On note $\mathcal{H}_\pi^\infty$ l'espace des *vecteurs lisses* de π, c'est-à-dire des vecteurs $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ tels que l'application $g \to \pi(g)\xi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; c'est un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\pi$ qui est stable par G et qui est aussi un module sur $\underline{g}$. De même qu'on définit $H^1(G,\pi)$ à l'aide des cocycles continus de G dans $\mathcal{H}_\pi$, on définit un espace $H^1_{\mathrm{diff}}(G,\pi)$ à l'aide des cocycles $G \to \mathcal{H}_\pi^\infty$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'application naturelle $H^1_{\mathrm{diff}}(G,\pi) \to H^1(G,\pi)$ est évidemment injective, et aussi surjective pour la raison suivante. Soit $b \in Z^1(G,\pi)$; on peut écrire $b(g) = \widetilde{\alpha}(g)\xi - \xi$ comme en 4.5; on peut alors régulariser ξ, obtenir ainsi un vecteur ξ', définir $b'(g) = \widetilde{\alpha}(g)\xi' - \xi'$, et vérifier que $b' \in Z^1_{\mathrm{diff}}(G,\pi)$ est cohomologue à b (comparer avec la proposition III.1.6 de [Gu2] ou le §IX.5 de [BW]).

Supposons G connexe, choisissons un sous-groupe compact maximal K de G, et notons $\Omega^q(G/K, \mathcal{H}_\pi^\infty)^G$ l'espace des q-formes différentielles sur G/K à valeurs dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$ qui sont invariantes par G. Si d désigne la différentielle extérieure, $(\Omega^*(G/K, \mathcal{H}_\pi^\infty)^G, d)$ est un complexe dont la cohomologie se note $H^*(\underline{g}, \underline{k}, \mathcal{H}_\pi^\infty)$. C'est un théorème de van Est qu'il existe un isomorphisme

$$H^1_{\text{diff}}(G, \pi) \sim H^1(\underline{g}, \underline{k}, \mathcal{H}_\pi^\infty) \ .$$

Voir le corollaire III.7.2 de [Gu2] ou le corollaire IX.5.6 de [BW].

Supposons de plus G semi-simple de centre fini. Par évaluation à l'origine, l'espace $\Omega^q(G/K, \mathcal{H}_\pi^\infty)^G$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_\pi^\infty)$, qui n'est autre que $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\pi,(K)})$ vu la définition des vecteurs K-finis. La représentation π étant unitaire, on peut munir $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda^q \underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{(K)})$ d'un produit scalaire (n°II.2.2 de [BW]), donc définir un adjoint d^* de d et un *laplacien* $\Delta = dd^* + d^*d$. On a un résultat de "type Hodge" selon lequel les espaces de cohomologie $H^q(\underline{g}, \underline{k}, \mathcal{H}_\pi^\infty)$ sont isomorphes à des espaces de q-formes Δ-harmoniques. On montre enfin que $\Delta = -\widetilde{\pi}(\Omega_G)$, où $\widetilde{\pi}$ est la représentation de $\underline{g}$ sur $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{(K)})$ définie par l'action banale sur $\Lambda^q \underline{p}_{\mathbb{C}}$ et par π sur les vecteurs K-finis (théorème II.2.5 de [BW]). Si π est irréductible, $\widetilde{\pi}(\Omega_G)$ est scalaire et on a donc

$$\begin{aligned} H^q(\underline{g}, \underline{k}, \mathcal{H}_\pi^\infty) &= 0 && \text{si } \widetilde{\pi}(\Omega_G) \neq 0 \\ H^q(\underline{g}, \underline{k}, \mathcal{H}_\pi^\infty) &= \mathrm{Hom}_K(\Lambda^q \underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{(K)}) && \text{si } \widetilde{\pi}(\Omega_G) = 0 \ . \end{aligned}$$

Lorsque $G = Sp(1,n)$ avec $n \geq 2$, le théorème A équivaut donc à l'annulation de $H^1(G, \pi)$ pour tout $\pi \in \widehat{G}$.

5.- Second commentaire cohomologique. D'après le théorème 4.7, la propriété (T) pour G est équivalente à l'annulation de $H^1(G, \pi)$ pour *toute* représentation unitaire π de G, non nécessairement irréductible. On pourrait songer à décomposer une représentation unitaire π quelconque en intégrale directe de représentations irréductibles. Mais $H^1(G, -)$ se comporte mal vis-à-vis des intégrales directes. En effet, soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace borélien standard; soit $(\pi_x)_{x \in X}$ un champ mesurable de représentations de G, irréductibles et telles que $H^1(G, \pi_x) = 0$ pour μ-presque tous les points x de X; et soit π l'intégrale directe de ce champ; il n'est en général pas vrai que $H^1(G, \pi) = 0$ (bien qu'il soit vrai que $B^1(G, \pi)$ est dense dans $Z^1(G, \pi)$: voir la proposition III.2.6 de [Gu2]).

Donnons un exemple très simple du mauvais comportement décrit ci-dessus, avec pour G le groupe $\mathbb{Z}$ et pour π la représentation régulière $\lambda_{\mathbb{Z}}$. Soit ξ la fonction caractéristique de $\mathbb{N}$; alors $b(n) = \lambda_{\mathbb{Z}}(n)\xi - \xi$ définit un cocycle dans $Z^1(\mathbb{Z}, \lambda_{\mathbb{Z}})$ qui n'est pas borné, donc qui n'est pas un cobord; ainsi $H^1(\mathbb{Z}, \lambda_{\mathbb{Z}}) \neq 0$. Mais on vérifie facilement que $H^1(\mathbb{Z}, \chi) = 0$ pour presque tout caractère de $\mathbb{Z}$ (en fait pour tout caractère $\chi : \mathbb{Z} \to U(1)$ qui n'est pas le caractère unité).

Il existe même des groupes n'ayant pas la propriété (T) et dont les espaces H^1 sont nuls pour toute représentation irréductible. Considérons en effet un groupe infini dénombrable Γ, abélien et de torsion, tel que l'image de tout caractère $\chi : \Gamma \to U(1)$ soit finie — par exemple le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\mathbb{N})}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui appliquent presque tous les entiers sur l'élément neutre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que $H^1(\Gamma, \chi) = 0$ pour tout $\chi \in \widehat{\Gamma}$, et Γ n'est évidemment pas de Kazhdan.

Néanmoins, ce genre de comportement n'apparaît pas avec les groupes de Lie réels semi-simples connexes de centres finis. En effet, le théorème B montre que, si un groupe G de ce type n'a pas la propriété (T), alors il existe $\pi \in \widehat{G}$ avec $H^1(G, \pi) \neq 0$.

9.a. PREUVE DU THÉORÈME A.

Dans les numéros 6 à 14 ci-dessous, G désigne un groupe de Lie réel semi-simple connexe non compact de centre fini. On conserve les notations introduites au n°1. On désigne par $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ d'un espace vectoriel réel V.

On suppose pour simplifier que le sous-groupe compact maximal K de G a même rang que G, ce qui implique que le second facteur de la décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ a une dimension p qui est paire.

6.- Spineurs. La forme de Killing B fait de $\underline{p}$ un espace euclidien réel. Notons S *l'espace des spineurs* de $\underline{p}$. C'est un espace vectoriel complexe de dimension $2^{p/2}$. Il est donné avec une application $\mathbb{R}$-linéaire $c : \underline{p} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ telle que $c(Y)^2 = -B(Y, Y)$ pour tout $Y \in \underline{p}$, et S est muni d'un produit scalaire pour lequel les opérateurs $c(Y)$ sont anti-auto-adjoints.

Relativement à la base $(Y_j)_{i \leq j \leq p}$ de $\underline{p}$, notons $E_{i,j}$ le système standard d'unités matricielles. Alors $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq p}$ est une base de l'algèbre de

Lie $\underline{so}(\underline{p})$ du groupe orthogonal de $(\underline{p}, B)$. On définit un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\sigma : \underline{so}(\underline{p})_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$$

en posant $\sigma(E_{i,j} - E_{j,i}) = -\frac{1}{2}c(Y_i)c(Y_j)$. Notons $\underline{h}$ l'algèbre de Lie du tore maximal standard de $\underline{so}(\underline{p})$, engendrée par les $h_j = E_{2j-1,2j} - E_{2j,2j-1}$, et $(\lambda_j)_{1\leq j\leq p/2}$ la base de $\underline{h}^*$ duale de $(h_j)_{1\leq j\leq p/2}$. Les poids de la représentation $\sigma|\underline{h}_{\mathbb{C}}$ sont les

$$\frac{i}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \ldots \pm \lambda_{p/2}) \ ;$$

ils sont en nombre $2^{p/2}$ et sont sans multiplicité. Ceci se vérifie par exemple comme suit.

Comme l'espace $\underline{p}$ est de dimension réelle paire, on peut le munir d'une structure complexe en posant

$$\begin{aligned} iY_{2j-1} &= Y_{2j} \\ iY_{2j} &= -Y_{2j-1} \end{aligned} \qquad 1 \leq j \leq p/2 \ .$$

Notons $\underline{p}/\mathbb{C}$ l'espace vectoriel complexe de dimension $p/2$ ainsi obtenu. On prend alors pour modèle de S l'algèbre extérieure $\Lambda_{\mathbb{C}}(\underline{p}/\mathbb{C})$ et on définit

$$c(Y) = i(\mathrm{ext}(Y) + \mathrm{int}(Y))$$

pour tout $Y \in \underline{p}/\mathbb{C}$. Si $I = (i_1, \ldots, i_q)$ est une suite croissante dans $\{1, 2, \ldots, p/2\}$, on note Y_I le vecteur $Y_{2i_1-1} \wedge \ldots \wedge Y_{2i_q-1} \in \Lambda_{\mathbb{C}}(p/\mathbb{C})$. On vérifie alors que

$$\sigma(h_j)Y_I = \begin{cases} \frac{i}{2}\, Y_I & \text{si } j \text{ n'apparaît pas dans } I \\ -\frac{i}{2}\, Y_I & \text{si } j \text{ apparaît dans } I \end{cases}$$

et on trouve bien la liste ci-dessus pour les poids de $\sigma|\underline{h}_{\mathbb{C}}$.

7.- Systèmes de racines. Soit T un tore maximal de K et soit $\underline{t}$ son algèbre de Lie. Comme G et K ont même rang, $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ est une algèbre de Cartan à la fois dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ et dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$. Notons ad [respectivement $ad_{\underline{k}}$, $ad_{\underline{p}}$] la représentation adjointe de $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ sur $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ [resp. $\underline{k}_{\mathbb{C}}, \underline{p}_{\mathbb{C}}$]. Vu l'invariance de la forme de Killing par ad, on a $ad_{\underline{p}}(\underline{k}_{\mathbb{C}}) \subset \underline{so}(\underline{p})_{\mathbb{C}}$. On peut donc supposer les choix de $T \subset K$ et de $\underline{h} \subset \underline{so}(\underline{p})$ tels que $ad_{\underline{p}}(\underline{t}_{\mathbb{C}}) \subset \underline{h}_{\mathbb{C}}$.

Soit $\Phi \subset \underline{t}^*_{\mathbb{C}}$ le système de racines obtenu en diagonalisant ad sur $\underline{t}_{\mathbb{C}}$. Alors $\Phi = \Phi_c \amalg \Phi_n$ (réunion disjointe): d'une part les *racines compactes* Φ_c correspondant aux espaces propres de $\mathrm{ad}_{\underline{k}}(\underline{t}_{\mathbb{C}})$ dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$, de sorte que Φ_c est le système de racines de la paire $(\underline{k}_{\mathbb{C}}, \underline{t}_{\mathbb{C}})$. D'autre part les *racines non compactes* Φ_n correspondant aux espaces propres dans $\underline{p}_{\mathbb{C}}$, de sorte que Φ_n contient les p racines $\pm\mu_j$, où μ_j est la composition de $i\lambda_j$ avec $\mathrm{ad}_{\underline{p}}|\underline{t}$ pour $j = 1, \ldots, p/2$. (Les $\pm i\lambda_j$ sont précisément les poids de $\underline{h}$ sur $\underline{p}_{\mathbb{C}}$.) Notons s la représentation de $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ sur S obtenue en composant

$$s \ : \ \underline{k}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\ \mathrm{ad}_{\underline{p}}\ } \underline{so}(\underline{p})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S) \ .$$

Les poids de la représentation $s|\underline{t}_{\mathbb{C}}$ sont les

$$\frac{1}{2}(\pm\mu_1 \pm \mu_2 \pm \ldots \pm \mu_{p/2})$$

et sont sans multiplicité.

On choisit un *ordre* sur Φ tel que le poids

$$\varrho_n = 1/2 \sum_{1 \leq j \leq p/2} \mu_j$$

soit dominant (i.e tel que les racines μ_j soient positives). Cet ordre correspond à une chambre $\overline{C}_G$ de Φ. Alors $\Phi_c^+ = \Phi^+ \cap \Phi_c$ définit un ordre pour le système Φ_c, correspondant à une chambre $\overline{C}_K$ de Φ_c (les barres indiquent que nous considérons des chambres fermées). On pose comme d'habitude

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \ , \qquad \varrho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_c^+} \alpha$$

et on a $\varrho = \varrho_c + \varrho_n$.

Soit W le *groupe de Weyl* du système Φ. Soit W_c le groupe de Weyl de Φ_c, qui est un sous-groupe de W. Comme W [respectivement W_c] est transitif sur les chambres de Φ [resp. de Φ_c], l'ensemble

$$W_1 = \{w \in W : w\overline{C}_G \subset \overline{C}_K\}$$

est un système de représentants pour $W_c \backslash W$.

Rappelons qu'il y a correspondance bijective entre l'ensemble des poids du système Φ_c qui sont dominants, c'est-à-dire dans $\overline{C}_K$ (l'ensemble P_{++} de Bourbaki [BL']) et l'ensemble des représentations irréductibles de dimensions finies de $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ (à équivalence près). Nous notons τ_λ la représentation de $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ associée à un poids dominant $\lambda \in \overline{C}_K$.

Rappelons enfin que la forme de Killing permet de définir canoniquement la longueur $\langle \lambda, \lambda \rangle$ d'un poids de Φ, et que cette longueur est strictement positive si λ n'est pas nul (voir par exemple le n°8.5 de [Hum]).

Notons B une base du système de racines Φ associée à l'ordre Φ^+; B est donc l'ensemble des racines simples de Φ^+.

8.- Lemme: Pour $\beta \in \Phi^+$, on a

$$\langle \varrho - \beta, \varrho - \beta \rangle \leq \langle \varrho, \varrho \rangle$$

avec égalité si et seulement si β est une racine simple.

Preuve. Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on introduit la racine inverse

$$\check{\alpha} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} .$$

Alors $\check{\Phi}$ est un système de racines dont $\check{B}$ est une base. De plus, si $\beta \in \Phi^+$, alors (voir [BL'], chap. VI, corollaire du n°1.10) $\langle \varrho, \check{\beta} \rangle$ est la somme des coordonnées de $\check{\beta}$ sur la base $\check{B}$; c'est donc un entier strictement positif (car β est une racine positive), et $\langle \varrho, \check{\beta} \rangle = 1$ si et seulement si β est une racine simple. On conclut en remarquant que $\langle \varrho, \check{\beta} \rangle \geq 1$ est équivalent à $2\langle \varrho, \beta \rangle \geq \langle \beta, \beta \rangle$, donc aussi à $\langle \varrho, \varrho \rangle \geq \langle \varrho - \beta, \varrho - \beta \rangle$, et de même pour les inégalités strictes. □

9.- Lemme. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\text{(i)} \qquad s = \bigoplus_{w \in W_1} \tau_{w\varrho - \varrho_c} ;$$

$$\text{(ii)} \qquad s(\Omega_K) = \langle \varrho, \varrho \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle .$$

Preuve. (D'après Atiyah et Schmid, voir (A.11) dans [AS].) On décompose l'espace S en somme directe $S^+ \oplus S^-$ de deux $\underline{k}$-modules appelés *spineurs* *positifs* et *négatifs.* Dans le modèle $S = \Lambda_{\mathbb{C}}(\underline{p}/\mathbb{C})$ du n°6, on prend $S^+ = \Lambda_{\mathbb{C}}^{\mathrm{pair}}(\underline{p}/\mathbb{C})$ et $S^- = \Lambda_{\mathbb{C}}^{\mathrm{impair}}(\underline{p}/\mathbb{C})$. Les poids de la représentation s de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ sur S^+ [respectivement S^-] sont les $\frac{1}{2}(\pm\mu_1 \pm \mu_2 \pm \ldots \pm \mu_{p/2})$ avec un nombre pair [resp. impair] de signes négatifs. Quitte à passer à un revêtement double de K, on peut supposer que l'action de $\underline{k}$ sur S dérive d'une action de K. (Si $G = Sp(1,n)$, il n'y a aucun revêtement à considérer car K est simplement connexe.) On obtient ainsi deux représentations s^+ et s^- de K dans S^+ et S^-.

Le caractère $\mathrm{ch}(s^+ - s^-)$ de la représentation virtuelle $s^+ - s^-$ de K est par définition

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(s^+ - s^-) &= (Trs^+ - Trs^-)|T \\ &= \sum \exp\Big(1/2\sum_{j=1}^{p/2}(-1)^{\alpha(j)}\mu_j\Big) - \sum \exp\Big(1/2\sum_{j=1}^{p/2}(-1)^{\alpha(j)}\mu_j\Big)\end{aligned}$$

où la première [respectivement seconde] somme non précisée contient $2^{\frac{p}{2}-1}$ termes, et porte sur tous les $(\alpha(1), \ldots, \alpha(p/2)) \in \{0,1\}^{p/2}$ avec $\sum_{j=1}^{p/2} \alpha(j)$ pair [resp. impair]. On peut donc aussi écrire

$$\mathrm{ch}(s^+ - s^-) = \prod_{j=1}^{p/2}(e^{\mu_j/2} - e^{-\mu_j/2}) .$$

Or $\{\mu_1, \ldots, \mu_{p/2}\}$ est le complémentaire $\Phi^+ \cap \Phi_n$ de Φ_c^+ dans Φ^+. Par suite

$$\mathrm{ch}(s^+ - s^-) = \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha\in\Phi_c^+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})} .$$

Rappelons la *formule du dénominateur de Weyl* ([BL'], chapitre VI,§3, n° 3, proposition 2):

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)e^{w\varrho}$$

$$\prod_{\alpha\in\Phi_c^+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w\in W_c} \varepsilon(w)e^{w\varrho_c}$$

où $\varepsilon(w)$ est le déterminant de w agissant sur $i\underline{t}^*$. Comme W_1 est un système de représentants pour $W_c \backslash W$, on a

$$\mathrm{ch}(s^+ - s^-) = \frac{\sum_{w_1 \in W_1} \varepsilon(w_1) \sum_{w \in W_c} \varepsilon(w) e^{ww_1 \varrho}}{\sum_{w \in W_c} \varepsilon(w) e^{w \varrho_c}}$$

Par la *formule des caractères de Weyl*, on a d'autre part

$$\mathrm{ch}(\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c}) = \frac{\sum_{w \in W_c} \varepsilon(w) e^{ww_1 \varrho}}{\sum_{w \in W_c} \varepsilon(w) e^{w \varrho_c}}$$

et par suite

$$\mathrm{ch}(s^+ - s^-) = \sum_{w_1 \in W_1} \varepsilon(w_1) \mathrm{ch}(\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c}) \ .$$

Les ensembles de poids du tore maximal T de K sur S^+ et S^- sont disjoints, comme nous l'avons déjà noté au début de cette preuve. Par suite $\mathrm{Hom}_K(S^+, S^-) = 0$, et il n'y a aucune annulation dans l'égalité $\mathrm{ch}(s^+ - s^-) = \mathrm{ch}(s^+) - \mathrm{ch}(s^-)$. La dernière formule pour $\mathrm{ch}(s^+ - s^-)$ implique donc aussi

$$\mathrm{ch}(s^+ + s^-) = \sum_{w_1 \in W_1} \mathrm{ch}(\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c})$$

et l'assertion (i) en résulte.

Pour tout poids dominant $\lambda \in \overline{C}_K$, on a

$$\tau_\lambda(\Omega_K) = \langle \lambda + \varrho_c, \lambda + \varrho_c \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle \ .$$

(Voir les indications pour l'exercice 4 du n°23 de [Hum].) La forme $\langle , \rangle$ sur $\underline{t}^*_{\mathbb{C}}$ étant invariante par le groupe W tout entier (pas seulement par W_c), on a donc

$$\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c}(\Omega_K) = \langle \varrho, \varrho \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle$$

pour tout $w_1 \in W_1$. Cette dernière expression étant indépendante de w_1, il résulte de (i) que $s(\Omega_K)$ est donné par la même formule, d'où (ii). □

10.- Opérateur de Dirac. Soit π une représentation unitaire de G. L'*opérateur de Dirac* associé à π est l'opérateur

$$D = \sum_{j=1}^{p} \pi(Y_j) \otimes c(Y_j)$$

agissant sur l'espace $\mathcal{H}_{\pi,(K)} \otimes S$.

La terminologie se justifie par le cas où π est la représentation régulière λ_G de G. Considérons dans ce cas le sous-espace $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ de $\mathcal{H}_{\lambda_G} = \mathcal{L}^2(G)$ des fonctions lisses à rapports compacts (cet espace contient strictement l'espace des vecteurs K-finis: voir le lemme 8.6.14 de [Wal]). Au lieu de $\mathcal{H}_{\pi,(K)} \otimes S$, on considère le sous-espace Γ de $\mathcal{C}_c^\infty(G) \otimes S$ formé des fonctions lisses à supports compacts $f : G \to S$ telles que $f(gk) = s(k^{-1})f(g)$ pour tous $g \in G$ et $k \in K$, c'est-à-dire l'espace Γ des sections lisses à supports compacts du fibré des spineurs sur G/K. L'opérateur défini sur Γ par la même formule que ci-dessus est l'opérateur de Dirac usuel.

Revenons au cas général, où D opère sur $\mathcal{H}_{\pi,(K)} \otimes S$. On trouve le résultat suivant dans [AS], appendice (A.13) et dans [BW], lemme II.6.11.

11.- Lemme (Parthasarathy). (i) Sur l'espace préhilbertien $\mathcal{H}_{\pi,(K)} \otimes S$, l'opérateur D est symétrique.

(ii) On a $D^2 = -\pi(\Omega_G) \otimes 1 + (\pi \otimes s)(\Omega_K) - \langle \varrho, \varrho \rangle + \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle$.

Preuve. L'assertion (i) est banale car $\pi(Y_j)$ est antisymétrique sur $\mathcal{H}_{\pi,(K)}$ et $c(Y_j)$ est anti-auto-adjoint sur S pour $j = 1, \ldots, p$.

Pour (ii), on calcule $D^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq p} \pi(Y_i)\pi(Y_j) \otimes c(Y_i)c(Y_j)$. On a $c(Y_j)^2 = -1$ et $c(Y_i)c(Y_j) + c(Y_j)c(Y_i) = 0$ si $i \neq j$, donc

$$D^2 = -\sum_{j=1}^{p} \pi(Y_j)^2 \otimes 1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi([Y_i, Y_j]) \otimes c(Y_i)c(Y_j) \ .$$

Le premier terme de cette somme est égal à $-\pi(\Omega_G) \otimes 1 + \pi(\Omega_K) \otimes 1$ par définition des opérateurs de Casimir. Considérons le second terme. La forme B est définie négative sur $\underline{k}$; comme $[Y_i, Y_j] \in \underline{k}$, on peut écrire

$$[Y_i, Y_j] = -\sum_{\ell=1}^{k} B([Y_i, Y_j], X_\ell) X_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} B([X_\ell, Y_j], Y_i) X_\ell \ .$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\pi([Y_i,Y_j])\otimes c(Y_i)c(Y_j)=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j,\ell}B([X_\ell,Y_j],Y_i)\pi(X_\ell)\otimes c(Y_i)c(Y_j)\ .$$

Reprenons les notations des numéros 6 et 7. Pour tout $X\in\underline{k}$, l'opérateur $ad_{\underline{p}}(X)$ est dans $\underline{so}(\underline{p})$ et s'écrit comme combinaison linéaire des $E_{i,j}-E_{j,i}$. Un calcul de routine montre que

$$ad_{\underline{p}}(X)=\sum_{i<j}B([X,Y_j],Y_i)(E_{i,j}-E_{j,i})\ .$$

Par définition de la représentation $s=\sigma(ad_{\underline{p}})$, on a

$$(1)\qquad \begin{aligned} s(X)&=-1/2\sum_{i<j}B([X,Y_j],Y_i)c(Y_i)c(Y_j)\\ &=-1/4\sum_{i\neq j}B([X,Y_j],Y_i)c(Y_i)c(Y_j)\ .\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}(\pi\otimes s)(X^2)&=(\pi(X)\otimes 1+1\otimes s(X))^2\\ &=\pi(X^2)\otimes 1+2\pi(X)\otimes s(X)+1\otimes s(X^2)\ .\end{aligned}$$

Par définition de $\Omega_K=-\sum_\ell X_\ell^2$, ceci implique

$$(2)\qquad (\pi\otimes s)(\Omega_K)=\pi(\Omega_K)\otimes 1-2\sum_\ell \pi(X_\ell)\otimes s(X_\ell)+1\otimes s(\Omega_K).$$

En utilisant d'abord (1) puis (2), on obtient

$$\begin{aligned}1/2\sum_{i,j}\pi([Y_i,Y_j])\otimes c(Y_i)c(Y_j)&=-2\sum_\ell \pi(X_\ell)\otimes s(X_\ell)\\ &=(\pi\otimes s)(\Omega_K)-\pi(\Omega_K)\otimes 1-1\otimes s(\Omega_K)\end{aligned}$$

et enfin

$$D^2=-\pi(\Omega_G)\otimes 1+(\pi\otimes s)(\Omega_K)-1\otimes s(\Omega_K)\ .$$

L'assertion (ii) résulte alors du lemme 9. □

12.- Proposition. Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe non compact de centre fini possédant un sous-groupe compact maximal K de même rang. Soit π une représentation unitaire de G telle que $\pi(\Omega_G) = 0$. Alors

$$(\pi \otimes s)(\Omega_K) \geq \langle \varrho, \varrho \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle$$

sur $\mathcal{H}_{\pi,(K)} \otimes S$.

Preuve. L'assertion (i) du lemme 11 montre que D^2 est un opérateur positif sur $\mathcal{H}_{\pi,(K)} \otimes S$ et la proposition résulte de l'assertion (ii). □

13.- Hypothèses supplémentaires sur G. La représentation adjointe de $\underline{k}$ sur l'espace réel $\underline{p}$ est irréductible, car le sous-groupe compact K de G est maximal (proposition VIII.5.1 de [Hel]). La représentation $ad_{\underline{p}}$ de $\underline{k}$ sur $\underline{p}_{\mathbb{C}}$ a donc une ou deux composantes irréductibles. Nous supposons désormais que $ad_{\underline{p}}$ est irréductible, c'est-à-dire que le commutant de $ad_{\underline{p}}(\underline{k})$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\underline{p})$ est $\mathbb{R}$, non pas les complexes ou les quaternions. (C'est équivalent de supposer que le centre de K est discret, ou que l'espace symétrique G/K n'est pas hermitien; voir [Hel], ch.VIII, Théorème 6.1).

Le lemme suivant est un cas particulier du lemme II.7.7 de [BW]. Avant de l'énoncer, remarquons ceci: les poids de la représentation $ad_{\underline{p}}|\underline{t}_{\mathbb{C}}$ constituent la partie Φ_n du système de racines Φ; en particulier, si $\mu \in \overline{C}_K$ désigne le poids dominant du $\underline{k}$-module $\underline{p}_{\mathbb{C}}$, on a $\mu \in \Phi_n \cap \Phi^+$.

14.- Lemme. Soient W_1 et ϱ_c comme au n°7, et μ comme ci-dessus. On suppose qu'il existe $w_1 \in W_1$ tel que

(1.1) $w_1\varrho - \varrho_c - \mu$ est dominant pour Φ_c^+,

(1.2) μ est une racine non simple pour $w_1\Phi^+$.

Alors il n'existe aucune représentation irréductible $\pi \in \widehat{G}$ telle que

(2.1) $\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\pi,(K)}) \neq 0$,

(2.2) $\pi(\Omega_G) = 0$.

Preuve. On suppose qu'il existe $\pi \in \widehat{G}$ satisfaisant (2.1) et (2.2), et on va aboutir à une absurdité.

La représentation de K dans $\mathcal{H}_{\pi,(K)}$ contient $\tau_\mu = \underline{p}_{\mathbb{C}}$ par l'hypothèse

(2.1). Donc $\pi \otimes s$ contient $\sum_{w \in W_1} \tau_\mu \otimes \tau_{w\varrho - \varrho_c}$, et en particulier $\tau_\mu \otimes \tau_{w_1 \varrho - \varrho_c}$, par le lemme 9.

Comme Φ_n est l'ensemble des poids de $\tau_\mu = \underline{p}_{\mathbb{C}}$, le plus bas poids de τ_μ est $-\mu$. Ce fait et l'hypothèse (1.1) impliquent que $\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c - \mu}$ apparaît dans $\tau_\mu \otimes \tau_{w_1 \varrho - \varrho_c}$: voir les indications pour le problème IV.17 de [Kn]. Donc $\pi \otimes s$ contient $\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c - \mu}$.

Nous avons déjà rappelé (fin de la preuve du lemme 9) que

$$\tau_{w_1 \varrho - \varrho_c - \mu}(\Omega_K) = \langle w_1 \varrho - \mu, w_1 \varrho - \mu \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle \ .$$

Il résulte donc de (2.2) et de la proposition 11 que

$$\langle w_1 \varrho - \mu, w_1 \varrho - \mu \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle \geq \langle \varrho, \varrho \rangle - \langle \varrho_c, \varrho_c \rangle$$

c'est-à-dire que

$$\langle w_1 \varrho - \mu, w_1 \varrho - \mu \rangle \geq \langle w_1 \varrho, w_1 \varrho \rangle \ .$$

D'autre part μ est une racine positive de $w_1 \Phi$, de sorte que

$$\langle w_1 \varrho - \mu, w_1 \varrho - \mu \rangle \leq \langle w_1 \varrho, w_1 \varrho \rangle \ .$$

Il y a donc égalité, de sorte que μ doit être simple pour $w_1 \Phi^+$, d'après le lemme 8. La comparaison avec (1.2) montre qu'il y a absurdité. □

15.- Preuve du théorème A. Soit $G = Sp(1,n)$ avec $n \geq 2$. Le groupe $K = Sp(1) \times Sp(n)$ est compact maximal dans G; le rang de K, qui est $n+1$, est donc égal à celui de G. On peut identifier $\underline{p}$ à $\mathbb{H}^n$, où $\mathbb{H}$ désigne l'algèbre des quaternions. Etant donné

$$q \in Sp(1) \qquad m \in Sp(n) \qquad X \in \mathbb{H}^n$$

on a $\mathrm{Ad}(q,m)X = mX\overline{q}$. Par suite le commutant de $\mathrm{Ad}(K)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)$ est $\mathbb{R}$, et l'hypothèse du n°13 est vérifiée. Il suffit de vérifier aussi que le lemme 14 s'applique.

Le système de racines de $(\underline{g}_{\mathbb{C}}, \underline{t}_{\mathbb{C}})$ est du type C_{n+1}, et nous adoptons les notations de Bourbaki ([BL'], chapitre VI, planche III). On note $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on a

$$\Phi = \{\pm 2\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n+1} \cup \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq n+1} \ .$$

La base de Φ^+ est formée de

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},\ \alpha_{n+1} = 2\varepsilon_{n+1}$$

et la demi-somme des racines positives est

$$\varrho = \sum_{i=1}^{n+1} (n+2-i)\varepsilon_i \ .$$

On a d'autre part le système de racines (réductible)

$$\Phi_c = \{\pm 2\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n+1} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{2 \leq i < j \leq n+1} \ .$$

Une base de $\Phi_c^+ = \Phi_c \cap \Phi^+$ est formée de

$$2\varepsilon_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$$

et la demi-somme correspondante est

$$\varrho_c = \varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n+1} (n+2-i)\varepsilon_i \ .$$

Par suite $\Phi_n^+ = \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_i\}_{2 \leq i \leq n+1}$, et le poids dominant μ du $\underline{k}$-module $\underline{p}_{\mathbb{C}}$ est donné par $\mu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (voir le n°13).

Considérons la racine non compacte α_1. La réflexion correspondante $s_1 \in W$ est donnée par

$$s_1(X) = X - (X_1 - X_2)\alpha_1 \quad \text{pour tout} \quad X = (X_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \ .$$

Notons que $s_1(\varrho) = \varrho - \alpha_1$ car α_1 est une racine simple. Les racines simples de $s_1\Phi^+$ sont

$$-\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1} \ .$$

Les relations

$$2\varepsilon_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\sum_{i=3}^{n} \alpha_i + \alpha_{n+1}$$

$$\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1$$

montrent que $s_1 \in W_1$. L'égalité

$$\mu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 - \alpha_1$$

montre que μ est une racine de $s_1\Phi^+$ qui n'est pas simple, donc l 'hypothèse (1.2) du lemme 13 est vérifiée. On a

$$s_1\varrho - \varrho_c - \mu = (\varrho - \varrho_c) - \alpha_1 - \mu = n\varepsilon_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (n-2)\varepsilon_1$$

Comme $n \geq 2$ le poids $(n-2)\varepsilon_1$ est dans la chambre

$$\overline{C}_K = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} : X_1 \geq 0 \text{ et } X_2 \geq X_3 \geq \ldots \geq X_{n+1} \geq 0\} .$$

L'hypothèse (1.1) du lemme 14 est donc aussi vérifiée. □

16.- Cas du groupe exceptionnel de rang réel un. Les mêmes arguments montrent que le théorème A vaut aussi pour le groupe exceptionnel $G = F_{4(-20)}$; nous renvoyons à la proposition II.7.8 de [BW] pour les détails d'adaptation du n°15. Il résulte donc du théorème B que $F_{4(-20)}$ est un groupe de Kazhdan.

9.b. Preuve du Théorème B.

Pour entreprendre la preuve du théorème B, il faut disposer de résultats généraux sur les fonctions sphériques; nous les rappelons aux n°18 à 27 ci-dessous. On y désigne à nouveau par G un groupe de Lie réel semi-simple connexe non compact de centre fini et par K un sous-groupe compact maximal de G. Contrairement à nos conventions générales, nous considérons ici des représentations *non unitaires* de G dans des espaces de Hilbert complexes.

Savoir si G a la propriété (T), c'est savoir si la représentation triviale est isolée dans le dual unitaire $\widehat{G}$ (voir le n°1.14). Un premier lemme montre qu'il suffit pour cela de connaître le sous-espace de $\widehat{G}$ défini par les représentations ayant des vecteurs non nuls fixés par K.

17.- Lemme. Soient H un groupe localement compact et L un sous-groupe compact de H. Notons $\widehat{H}_L$ l'espace des classes de représentations unitaires irréductibles de H qui possèdent des vecteurs invariants non nuls par L. Le groupe H est de Kazhdan si et seulement si la représentation unité de H est un point isolé de $\widehat{H}_L$.

Preuve. Il suffit de remarquer que $\widehat{H}_L$ est ouvert dans A, comme le montre la preuve de l'exemple 1.5.ii. □

18.- Définitions. Soit G comme ci-dessus. Une représentation (non nécessairement unitaire) π de G est dite *sphérique* si elle possède des vecteurs invariants par K.

Une fonction continue (non nécessairement de type positif) $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est dite *sphérique* si $\varphi(1) = 1$ et si

$$\int_K \varphi(xky)dk = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tous $x, y \in G$.

Il existe de nombreuses définitions équivalentes des fonctions sphériques [Va2].

Le lemme 17 justifie l'étude du *dual unitaire sphérique* $\widehat{G}_K$, qui est la "partie sphérique" de $\widehat{G}$. Le résultat qui suit montre que cette étude est aussi celle des fonctions sphériques qui sont de type positif (définition 5.6).

19.- Théorème. (i) Soit π une représentation unitaire irréductible sphérique de G et soit $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ un vecteur unité invariant par K. Alors tout vecteur de $\mathcal{H}_\pi$ invariant par K est proportionnel à ξ, et la fonction de type positif

$$\varphi : g \longrightarrow \langle \xi | \pi(g)\xi \rangle$$

est sphérique.

(ii) Soit φ une fonction sphérique de type positif sur G. Alors la représentation associée à φ par la construction GNS (proposition 5.8) est irréductible et sphérique.

Preuve: voir [He2], théorème IV.3.4. □

20.- Décomposition d'Iwasawa et parabolique minimal. Pour comprendre l'ensemble des fonctions sphériques de type positif sur G, il faut d'abord comprendre l'ensemble de toutes les fonctions sphériques, qui est connu grâce aux travaux de Harish-Chandra. Avant d'énoncer les résultats, rappelons les faits suivants.

On se donne comme au n°1 une décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$. On choisit dans $\underline{p}$ un sous-espace $\underline{a}$ qui est maximal pour la propriété d'être une sous-algèbre de $\underline{g}$; alors $\underline{a}$ est une algèbre abélienne, car $[\underline{p}, \underline{p}] \subset \underline{k}$. Si $\underline{a}^*$ désigne le dual de $\underline{a}$, on pose

$$\underline{m} = \{X \in \underline{k} : [X, \underline{a}] = 0\}$$

et

$$\Sigma = \{\alpha \in \underline{a}^* : \alpha \neq 0 \text{ et } g^\alpha \neq 0\}$$

où

$$g^\alpha = \{X \in \underline{g} : [H, X] = \alpha(H)X \text{ pour tout } H \in \underline{a}\} .$$

Le sous-ensemble Σ de $\underline{a}^*$ est le système des *racines restreintes*; c'est un système de racines qui n'est en général pas réduit. On a une décomposition radicielle

$$\underline{g} = \underline{a} \oplus \underline{m} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \underline{g}^\alpha \right) .$$

On choisit dans $\underline{a}^*$ un *ordre* qui induit une partition $\Sigma = \Sigma^+ \amalg (-\Sigma^+)$ et on pose

$$\underline{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \underline{g}^\alpha .$$

Alors $\underline{n}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\underline{g}$ et on obtient la *décomposition d'Iwasawa* de $\underline{g}$:

$$\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n} .$$

Les sous-groupes analytiques A et N de G correspondant à $\underline{a}$ et $\underline{n}$ sont alors fermés et simplement connexes. On obtient la décomposition d'Iwasawa "globale"

$$G = KAN .$$

Pour tout ceci, voir par exemple le chapitre VI de [He1] ou la section 7.4 de [Wal].

Introduisons le centralisateur

$$M = \{k \in K : \mathrm{Ad}(k)(H) = H \text{ pour tout } H \in \underline{a}\}$$

et le normalisateur

$$M' = \{k \in K : \mathrm{Ad}(k)(\underline{a}) \subset \underline{a}\}$$

de $\underline{a}$ dans K. Alors M est un sous-groupe de K d'algèbre de Lie $\underline{m}$, et c'est un sous-groupe normal d'indice fini dans M'. Le quotient $W = M'/M$ s'identifie au *groupe de Weyl* du système de racines Σ. (Voir le théorème VII 2.12 de [He1], ou la section 7.5 de [Wal]; il faut distinguer ce groupe du groupe de Weyl introduit au n°7!) Enfin le sous-groupe

$$P = MAN$$

est un *sous-groupe parabolique minimal* de G.

21.- Série principale sphérique. Rappelons que A est isomorphe au groupe vectoriel $\underline{a}$. Par suite toute forme linéaire $\nu \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}}$ dans le dual complexe de $\underline{a}$ définit un caractère

$$e^{\nu} \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ a & \longmapsto & \exp(\nu(\operatorname{Log} a)) \end{cases}$$

de A, parfois noté $\exp(\nu)$. Comme M centralise A et comme MA normalise N, la composition de la projection

$$\begin{cases} P & \longrightarrow & A \\ man & \longmapsto & a \end{cases}$$

avec e^{ν} est un caractère de P qu'on note encore e^{ν}.

On appelle *série principale sphérique non unitaire* de G l'ensemble des représentations $\pi_{\nu} = Ind_P^G(e^{\nu})$, où ν décrit $\underline{a}^*_{\mathbb{C}}$.

Décrivons π_{ν}, d'abord selon le modèle dit de *l'image induite* (voir le n°3.2). L'espace $\mathcal{H}_{\nu}$ est la complétion de l'espace des fonctions continues $\xi : G \to \mathbb{C}$ telles que

$$\xi(gman) = \Delta_P(a)^{-1/2} \exp(-\nu(\operatorname{Log} a))\xi(g)$$

pour tous $g \in G$ et $man \in P$. La complétion est relative au produit scalaire

$$\langle \xi | \eta \rangle = \int_K \overline{\xi(k)}\ \eta(k) dk\ .$$

Le groupe P n'est pas unimodulaire, et Δ_P désigne sa fonction module. Comme $P = MA \rtimes N$ est un produit semi-direct de deux groupes unimodulaires, $\Delta_P(man)$ n'est autre que le jacobien de l'action de ma sur N. Le groupe M étant compact, la définition de N implique qu'on a

$$\Delta_P(man) = \exp(2\varrho_{\Sigma}(\operatorname{Log} a))$$

où $\varrho_\Sigma \in \underline{a}^*$ est la demi-somme

$$\varrho_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} (\dim \underline{g}^\alpha)\alpha \ .$$

Le groupe G opère sur les fonctions ξ par translations à gauche.

Il y a aussi *l'image compacte* pour π_ν. Une fonction continue $\xi \in \mathcal{H}_\nu$ satisfait en particulier $\xi(km) = \xi(k)$ pour tous $k \in K$ et $m \in M$. Comme $G/P = K/M$, on a un isomorphisme de restriction $\mathcal{H}_\nu \to \mathcal{L}^2(K/M)$ pour tout $\nu \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}}$. On peut ainsi considérer que toutes les représentations π_ν opèrent sur le même espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(K/M)$. L'action de G est plus compliquée à écrire que dans l'image induite (voir par exemple le chapitre VII de [Kn]).

La restriction à K de π_ν s'identifie à la représentation quasi-régulière de K sur $\mathcal{L}^2(K/M)$. En particulier, l'espace des vecteurs invariants par K est de dimension 1; il est engendré par l'unique fonction $\xi_\nu \in \mathcal{H}_\nu$ dont la restriction à K est la constante 1. La fonction φ_ν définie sur G par

$$\varphi_\nu(g) = \langle \xi_\nu | \pi_\nu(g) \xi_\nu \rangle$$

est sphérique, et on a la classification de Harish-Chandra (voir le théorème IV.4.3 de [He2]):

22.- Théorème. Toute fonction sphérique sur G est de la forme φ_ν avec $\nu \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}}$. De plus, étant donnés ν et λ dans $\underline{a}^*_{\mathbb{C}}$, on a $\varphi_\nu = \varphi_\lambda$ si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $\nu = w\lambda$.

Nous utilisons plus bas deux résultats de Wallach sur la série principale sphérique non unitaire:

23.- Proposition. (i) Considérons dans $\underline{a}^*$ la chambre de Weyl ouverte $\underline{a}^*_+$ correspondant à l'ordre choisi ($\Sigma^+ \subset \Sigma$). Si $\mathrm{Re}(\nu) \in \underline{a}^*_+$, alors ξ_ν est un vecteur cyclique de π_ν.

(ii) Pour tout $\nu \in \underline{a}^*_{\mathbb{C}}$, il existe dans $\mathcal{H}_\nu$ une suite finie

$$\mathcal{H}_\nu = \mathcal{H}_0 \supsetneqq \mathcal{H}_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq \mathcal{H}_{k+1} = 0$$

telle que $\mathcal{H}_i$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_\nu$ invariant par $\pi_\nu(G)$, et la représentation de G sur $\mathcal{H}_i/\mathcal{H}_{i+1}$ induite par π_ν est irréductible pour $i = 0, 1, \ldots, k$.

Preuve. Pour (i), voir la proposition 8.13.6 de [Wal] ou le théorème 8 de [Ko1]. Pour (ii), voir le théorème 8.13.3 de [Wal]. □

24.- Conditions nécessaires pour qu'une fonction sphérique soit de type positif. A tout $\nu \in i\underline{a}^*$ correspond un caractère e^ν de P qui est unitaire, donc la représentation π_ν est unitaire et la fonction sphérique φ_ν est de type positif.

Mais il existe d'autres valeurs de ν pour lesquelles φ_ν est de type positif. C'est par exemple le cas de $\nu = -\varrho_\Sigma$, car alors $\xi_{-\varrho_\Sigma}$ est la fonction constante de valeur 1 sur G tout entier, de sorte que $\varphi_{-\varrho_\Sigma}(g) = 1$ pour tout $g \in G$. Notons qu'il existe $w \in W$ tel que $w\varrho_\Sigma = -\varrho_\Sigma$ (voir [BL'], chap.6, §1, n°5, remarque 4); le théorème 22 montre donc que $\varphi_{\varrho_\Sigma} = \varphi_{-\varrho_\Sigma} = 1$.

C'est un problème en général ouvert que de déterminer les ν pour lesquels les fonctions φ_ν sont de type positif. (C'est un problème résolu par Kostant [Ko1] lorsque G est de rang réel un.) Toutefois, il y a deux conditions nécessaires évidentes pour que la fonction φ_ν soit de type positif, elle doit être *bornée*, et elle doit être *hermitienne*, i.e. telle que $\overline{\varphi_\nu(g^{-1})} = \varphi_\nu(g)$ pour tout $g \in G$. On connaît les caractérisations suivantes:

25.- Théorème. (i) La fonction sphérique φ_ν est bornée si et seulement si ν appartient au tube $i\underline{a}^* + \mathrm{Conv}(W\varrho_\Sigma)$, où Conv désigne l'enveloppe convexe et où $W\varrho_\Sigma$ désigne l'orbite de ϱ_Σ par le groupe de Weyl.

(ii) La fonction sphérique φ_ν est hermitienne si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $w\nu = -\overline{\nu}$.

Preuve. Pour (i), voir le théorème IV.8.1 de [He2] ou la proposition 14 de [Va2]. Pour (ii), voir la proposition 3 de [Ko1] ou le corollaire 11 de [Va2]. □

26.- Lemme. Soit f une fonction continue à support compact sur G. Alors

$$\lim_{\substack{\nu \to \infty \\ \nu \in i\underline{a}^*}} \int_G f(g)\varphi_\nu(g)\,dg = 0 \,.$$

Preuve. Comme φ_ν est K-bi-invariante (c'est-à-dire invariante par les translations gauches et droites de K), on peut supposer que f l'est également, quitte à remplacer f par la fonction

$$g \longrightarrow \int_K \int_K f(k_1 g k_2) dk_1 dk_2 \ .$$

On a alors, pour $\nu \in i\underline{a}^*$

$$\int_G f(g)\varphi_\nu(g)dg = \widehat{F_f}(-i\nu)$$

où F_f est la fonction à support compact sur $\underline{a}$ donnée par

$$F_f(H) = e^{-\varrho_\Sigma(H)} \int_N f(\exp(H)n)dn$$

(voir [Va2], formule (5)). Il résulte des propriétés classiques de la transformée de Fourier sur l'espace euclidien $\underline{a}$ que

$$\lim_{\substack{\nu \to \infty \\ \nu \in i\underline{a}^*}} \widehat{F_f}(-i\nu) = 0$$

(lemme de Riemann-Lebesgue). □

27.- Lemme. Soit π une représentation irréductible sphérique de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec vecteur ξ invariant par $\pi(K)$ et soit $\varphi : g \to \langle\xi|\pi(g)\xi\rangle$ la fonction sphérique associée. Soit $\mathcal{E}'(G)$ l'espace des distributions à supports compacts sur G et soit V le sous-espace vectoriel $\pi(\mathcal{E}'(G))\xi$ de $\mathcal{H}$.

(i) V est un espace invariant par G qui contient l'espace $\mathcal{H}_{(K)}$ des vecteurs K-finis.

(ii) Si la fonction φ est de type positif, il existe un produit scalaire G-invariant sur V.

Preuve. (i) Il est évident que V est invariant par G. D'autre part l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\underline{g})$ s'identifie aux distributions de $\mathcal{E}'(G)$ de support l'origine, et $\pi(\mathcal{U}(\underline{g}))\xi$ est précisément $\mathcal{H}_{(K)}$, d'après la preuve du théorème 4.5.iii au chapitre IV de [He2].

(ii) Notons $\mathcal{H}'$ et π' l'espace de Hilbert et la représentation unitaire de G associés par la construction GNS à la fonction sphérique de type positif φ, comme au chapitre 5. L'application

$$E \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \pi(\mathcal{E}'(G))\xi & \longrightarrow & \pi'(\mathcal{E}'(G))\delta_1 \subset \mathcal{H}' \\ S * \xi = \int_G \pi(g)\xi \, dS(g) & \longmapsto & S * \delta_1 \end{array} \right.$$

est un opérateur d'entrelacement entre les restrictions de π et π' aux sous-espaces considérés. En effet, E est bien défini et injectif car on a successivement

$$\begin{aligned}
S * \delta_1 = 0 &\iff \langle \delta_x | S \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } x \in G \\
&\iff \int_G \varphi(x^{-1}g)dS(g) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in G \\
&\iff \int_G \langle \pi(x^{-1})^* \xi | \pi(g)\xi \rangle dS(g) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in G \\
&\iff \langle \pi(x^{-1})^* \xi | S * \xi \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } x \in G \\
&\iff S * \xi = 0
\end{aligned}$$

où la dernière implication résulte de ce que la représentation $g \to \pi(g^{-1})^*$ de G dans $\mathcal{H}$ est irréductible. L'affirmation (ii) résulte de l'existence de E. □

Notons qu'il y a d'autres moyens de s'assurer qu'il existe un sous-espace de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_{(K)}$ et qui possède un produit scalaire G-invariant. On peut par exemple prendre l'espace $\mathcal{H}^\omega$ des *vecteurs analytiques* de $\mathcal{H}$. En effet, comme φ est de type positif, $\mathcal{H}_{(K)}$ est infinitésimalement unitarisable, donc il existe une représentation unitaire π_u de G dans un espace $\mathcal{H}_u$ avec les mêmes vecteurs K-finis que $\mathcal{H}$ (Harish-Chandra [HC]); par suite les espaces $\mathcal{H}^\omega$ et $\mathcal{H}_u^\omega$ sont isomorphes en vertu d'un théorème de Schmid sur la globalisation minimale d'un module de Harish-Chandra [SC].

28.- Preuve du théorème B. Soit G comme dans le théorème B. Grâce à la proposition 1.9 et au théorème 2.8, on peut supposer que G est simple et de rang réel 1. Ainsi $\underline{a}^*_{\mathbb{C}}$ s'identifie à $\mathbb{C}$, et le groupe de Weyl est le groupe à deux éléments agissant sur $\underline{a}^*_{\mathbb{C}}$ par $\nu \to \pm\nu$. Nous allons montrer en quatre pas qu'il existe $\check{\pi} \in \widehat{G}$ avec $\check{\pi}(\Omega_G) = 0$ et

$$\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\check{\pi},(K)}) \neq 0 \ .$$

i) *Une famille de représentations* π_n. Par hypothèse, G n'est pas un groupe de Kazhdan. Le théorème 19 montre donc qu'il existe une suite $(\varphi_{\nu_n})_{n \geq 1}$ de fonctions sphériques de type positif qui convergent vers la fonction constante 1 uniformément sur tout compact de G. Par le théorème 25, on a $\nu_n \in i\mathbb{R}^+ \cup [0, \varrho_\Sigma]$. En appliquant le lemme 26 avec pour f une fonction continue à support compact d'intégrale 1, on voit que la partie imaginaire de ν_n reste bornée. On peut donc supposer que la suite ν_n converge. Du théorème 22 et de l'égalité $\varphi_{\varrho_\Sigma} = 1$ (voir le n° 24), on déduit que la limite de la suite ν_n est nécessairement ϱ_Σ. Ci-dessous, nous écrivons $\pi_n, \mathcal{H}_n, \varphi_n$ et ξ_n au lieu de $\pi_{\nu_n}, \mathcal{H}_{\nu_n}, \varphi_{\nu_n}$ et ξ_{ν_n} (voir le n°21).

On sait par la proposition 23 qu'il existe un sous-espace $\mathcal{K}_n$ de $\mathcal{H}_n$ qui est $\pi_n(G)$-invariant, et tel que la représentation $\check{\pi}_n$ induite par π_n sur le quotient $\mathcal{H}_n/\mathcal{K}_n$ est irréductible. Cette représentation $\check{\pi}_n$ est sphérique, sinon on aurait $\xi_n \in \mathcal{K}_n$, contrairement à la proposition 23.i. Notons $\xi \to \check{\xi}$ la projection canonique de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_n/\mathcal{K}_n$. Il résulte du lemme 27 qu'il existe un produit scalaire G-invariant sur $\check{\pi}_n(\mathcal{E}'(G))\check{\xi}_n$, et on peut définir une forme hermitienne positive β_n sur $\pi_n(\mathcal{E}'(G))\xi_n \subset \mathcal{H}_n$ par $\beta_n(\xi, \eta) = \langle \check{\xi} | \check{\eta} \rangle$. La forme β_n est $\pi_n(G)$-invariante; elle n'est en général pas définie positive, mais sa restriction à l'espace des vecteurs K-finis dans l'orthogonal $\mathcal{K}_n^\perp$ de $\mathcal{K}_n$ dans $\mathcal{H}_n$ est définie positive.

ii) *Les opérateurs* A_n: Définissons l'application

$$\alpha_n \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{K}_n^\perp) \otimes \underline{p}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{K}_n^\perp \\ S \otimes Y & \longmapsto & S(Y) \end{array} \right. .$$

Vérifions que $\alpha_n \neq 0$. Si α_n était nulle, l'espace $\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_n/\mathcal{K}_n)$ serait nul. Or on peut définir

$$T_n \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{p}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{H}_n/\mathcal{K}_n \\ Y & \longmapsto & \check{\pi}_n(Y)\check{\xi}_n \end{array} \right.$$

qui est une application K-équivariante. On aurait donc $\check{\pi}_n(\underline{p}_{\mathbb{C}})\check{\xi}_n = 0$. Mais $\check{\pi}_n(\underline{k}_{\mathbb{C}})\check{\xi}_n = 0$ puisque ξ_n est $\pi_n(K)$-invariant, et on aurait aussi $\check{\pi}_n(\underline{g}_{\mathbb{C}})\check{\xi}_n = 0$. D'où enfin $\pi_n(\underline{g})\xi_n \subset \mathcal{K}_n$, qui serait en contradiction avec la proposition 23.i.

Lorsque n varie, les différents sous-espaces $\mathrm{Im}\,(\alpha_n)$ de $\mathcal{H}_n = \mathcal{L}^2(K/M)$ sont contenus dans un même sous-espace de dimension finie, à savoir l'image de l'application

$$\alpha \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}^2(K/M)) \otimes \underline{p}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{L}^2(K/M) \\ S \otimes Y & \longmapsto & S(Y) \end{array} \right. .$$

Définissons un opérateur positif A_n sur $\pi_n(\mathcal{E}'(G))\xi_n$ par

$$\beta_n(\xi, \eta) = \langle A_n \xi | \eta \rangle \ .$$

La forme β_n étant $\pi_n(G)$-invariante, on a $\pi_n(g)^* A_n \pi_n(g) = A_n$ pour tout $g \in G$. En particulier, pour tout $k \in K$, l'opérateur A_n commute à $\pi_n(k)$. Vu que l'image de α_n est invariante par $\pi_n(K)$, cette image est invariante par A_n. D'autre part, $\mathrm{Im}\,(\alpha_n)$ est dans l'espace des vecteurs K-finis de $\mathcal{K}_n^\perp$, de sorte que A_n est défini positif sur $\mathrm{Im}\,(\alpha_n)$. Il existe donc un vecteur unité $\omega_n \in \mathrm{Im}\,(\alpha_n)$ qui est vecteur propre de A_n pour une valeur propre $\lambda_n > 0$.

(iii) *La fonction de type positif* ψ. On définit des fonctions ψ'_n et ψ_n sur G par

$$\psi'_n(g) = \beta_n(\omega_n, \pi_n(g)\omega_n)$$
$$\psi_n(g) = \langle \omega_n | \pi_n(g)\omega_n \rangle \ .$$

La fonction ψ'_n est de type positif, car β_n est positive et $\pi_n(G)$-invariante. Or on a

$$\psi'_n(g) = \langle A_n\omega_n | \pi_n(g)\omega_n \rangle = \lambda_n \langle \omega_n | \pi_n(g)\omega_n \rangle \ .$$

Donc la fonction ψ_n est de type positif.

Les vecteurs ω_n sont dans la sphère-unité de l'espace de dimension finie $Im(\alpha)$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer qu'ils convergent vers un vecteur-unité $\omega \in \mathrm{Im}\,(\alpha)$. La suite $(\psi_n)_{n\geq 1}$ converge alors uniformément sur tout compact de G vers la fonction ψ définie par

$$\psi(g) = \langle \omega | \pi_{\varrho_\Sigma}(g)\omega \rangle \ .$$

Et ψ est encore de type positif: voir la preuve du corollaire 5.5.ii.

iv) *La représentation* $\check{\pi}$: La proposition 23.ii montre qu'il existe une paire $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ de sous-espaces fermés de $\mathcal{H}_{\varrho_\Sigma}$ qui sont invariants par $\pi_{\varrho_\Sigma}(G)$, tels que la représentation $\check{\pi}$ induite par π_{ϱ_Σ} sur $\mathcal{K}/\mathcal{K}'$ est irréductible, et tels que $\omega \in \mathcal{K} - \mathcal{K}'$. Si $\check{\omega}$ est l'image de ω dans $\mathcal{K}/\mathcal{K}'$, on a aussi

$$\psi(g) = \langle \check{\omega} | \check{\pi}(g)\check{\omega} \rangle \quad \text{pour tout } g \in G \ .$$

Comme ψ est définie positive, $\check{\pi}$ est unitarisable: l'argument est le même qu'au lemme 27.ii. En d'autres termes, $\check{\pi}$ définit un élément de $\widehat{G}$.

Par construction, ω est dans l'image de α, donc $\check{\omega}$ est dans l'image d'une application de $\mathrm{Hom}_K(\underline{p}_{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{\check{\pi},(K)})$, et ce dernier espace n'est pas nul.

Reste à vérifier que $\check{\pi}(\Omega_G) = 0$. Les fonctions sphériques de type positif φ_n convergent uniformément sur tout compact vers la fonction constante 1, et les représentations associées π_n convergent vers la représentation unité π_0. Par définition de $\breve{\pi}$, les coefficients de $\breve{\pi}$ sont limites uniformes sur tout compact de coefficients de π_n. Par suite $(\pi_n)_{n\geq 1}$ tend aussi vers $\breve{\pi}$ (qui n'est pas séparée de π_0). Or un lemme de Bernat et Dixmier (voir la proposition 2.2 de [BK]) montre que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma(\Omega_G) \end{array} \right.$$

est continue. Par suite $\breve{\pi}(\Omega_G) = \pi_0(\Omega_G) = 0$. □

29.- Compléments. La preuve ci-dessus montre donc que $\breve{\pi}$ n'est pas séparé de π_0 dans $\widehat{G}$. C'est un fait général dû à Vershik et Karpushev [VK]: si G est un groupe localement compact et si $\pi \in \widehat{G}$ satisfait $H^1(G, \mathcal{H}_\pi) \neq 0$, alors π et π_0 ne sont pas séparés dans $\widehat{G}$.

La preuve originale de Kostant ([Ko1] et [Ko2]) détermine, pour un groupe de rang réel un, toutes les fonctions sphériques qui sont de type positif. D'après le théorème 25, ce résultat équivaut à la détermination des $\nu \in [0, \varrho_\Sigma]$ pour lesquels les fonctions φ_ν sont de type positif.

Théorème. Soit G un groupe de Lie réel simple connexe de centre fini et de rang réel 1. Pour $\nu \in [0, \varrho_\Sigma]$, la fonction sphérique φ_ν est de type positif si et seulement si $\nu \in [0, \nu_0]$, où

(i) $\nu_0 = \varrho_\Sigma$ si Σ^+ est réduit à une racine

(ii) $\nu_0 = \dfrac{2 + \dim_{\mathbb{R}} \underline{g}^\alpha}{2\dim_{\mathbb{R}} \underline{g}^{2\alpha} + \dim_{\mathbb{R}} \underline{g}^\alpha} \, \varrho_\Sigma$ si $\Sigma^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$.

En particulier, on a

$$\nu_0 = \varrho_\Sigma \quad \text{si } G = SO(1,n) \text{ ou } G = SU(1,n)$$

(ce qui remontre le corollaire 23.ii du chapitre 6),

$$\nu_0 = \frac{2n-1}{2n+1} \varrho_\Sigma \quad \text{si } G = Sp(1,n) \quad \text{avec } n \geq 2 \ ,$$
$$\nu_0 = \frac{5}{11} \varrho_\Sigma \qquad \text{si } G = F_{4(-20)} \ .$$

30.- Remarques sur les autres preuves. Nous connaissons trois démonstrations du théorème 29; chacune d'entre elles montre en particulier que $Sp(1,n)$ a la propriété (T) pour $n \geq 2$.

La preuve originale [Ko1] est purement algébrique. Kostant identifie les fonctions sphériques avec les *modules sphériques* sur l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\underline{g})$, et examine quand ceux-ci peuvent être munis d'une forme hermitienne positive relativement à laquelle $\underline{g}$ agit par opérateurs anti-symétriques. Voir aussi l'exposition de Schiffmann [S].

Plus tard, Flensted-Jensen et Koornwinder ont donné une première preuve analytique [FJK]. Elle combine l'analyse harmonique sur les espaces K/M vus comme espaces riemanniens symétriques de type compact, et l'expression des fonctions sphériques sur G en termes de fonctions spéciales dites *fonctions de Jacobi*. La détermination des fonctions sphériques qui sont de type positif est ramenée à des inégalités connues (?) sur les fonctions de Jacobi.

Une seconde démonstration analytique est due à Cowling [Cg2]. Il introduit les *opérateurs d'entrelacement* de Knapp et Stein (voir le chapitre VII de [Kn]). Un résultat de Knapp et Stein montre que π_ν est unitarisable si et seulement si un certain opérateur d'entrelacement est semi-défini (théorème XVI.6 de [Kn]). On peut réaliser cet opérateur comme agissant sur l'espace $\mathcal{L}^2(V)$, où $V = \theta(N)$, avec N le groupe nilpotent de la décomposition d'Iwasawa. Cowling achève sa preuve en utilisant quelques résultats fins d'analyse harmonique sur le *groupe nilpotent* V.

CHAPITRE 10
ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

Vers la fin des années 1970, A. Connes a reconnu la pertinence de la propriété (T) dans le domaine des algèbres d'opérateurs. Par exemple, dans [Co3] et [Ska], l'étude des algèbres de groupes de Kazhdan a permis de résoudre des problèmes d'algèbres d'opérateurs dont certains remontent aux articles originaux de Murray et von Neumann. Mentionnons aussi les nouveaux exemples d'opérateurs bornés découverts par Voiculescu [Voi]. Par ailleurs, la propriété (T) se formule bien pour les algèbres de von Neumann, et se révèle être un remarquable outil d'investigation. Le but du présent chapitre est de poser très brièvement quelques repères, mais nous renvoyons à [Pop] pour un panorama beaucoup plus complet, ainsi qu'à [Moo] pour la propriété (T) dans le contexte des relations d'équivalence mesurées.

On suppose que les algèbres de von Neumann apparaissant ici sont toutes de *type dénombrable.*

1.- Définitions. Soient M et N deux algèbres de von Neumann. Une *correspondance* de M à N est un bimodule hilbertien normal pour M et N, c'est-à-dire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'une action normale à gauche de M et d'une action normale à droite de N qui commute à l'action de M. On peut donc écrire une expression du type $a\xi b$ avec $a \in M$, $\xi \in \mathcal{H}$, $b \in N$.

Deux correspondances sont *équivalentes* si elles le sont en tant que bimodules. La notion évidente de *somme directe* passe aux classes d'équivalence.

2.- L'exemple standard. Notons $B(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Rappelons qu'une *conjugaison* de $\mathcal{H}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ satisfaisant $J^2 = id$, $J(i\xi) = -iJ(\xi)$ et $\langle J\xi|\eta\rangle = \langle J\eta|\xi\rangle$ pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Une représentation normale π d'une algèbre de von Neumann M dans $\mathcal{H}$ est dite *standard* s'il existe une conjugaison J de $\mathcal{H}$ telle que

$$\begin{cases} M \longrightarrow B(\mathcal{H}) \\ a \longmapsto J\pi(a^*)J \end{cases}$$

soit un isomorphisme de M sur le commutant $\mathrm{End}_M(\mathcal{H})$. La théorie de Tomita-Takesaki permet de montrer que toute algèbre de von Neumann possède une représentation standard; voir par exemple [SZ], section 10.15. L'espace

$\mathcal{H}$ d'une représentation standard de M définit naturellement la *correspondance identique* de M à M.

Par exemple, si M est l'algèbre de von Neumann $W^*(\Gamma)$ d'un groupe discret Γ, on retrouve l'espace $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma)$ vu comme bimodule sur $W^*(\Gamma)$ grâce aux représentations régulières gauche et droite. (Ici J est donné par $J\xi(g) = \overline{\xi(g^{-1})}$.)

3.- Définitions. Un *coefficient* d'une correspondance $\mathcal{H}$ de M à N est une forme bilinéaire

$$\begin{cases} M \times N \longrightarrow \mathbb{C} \\ (a,b) \longmapsto \langle \xi | a\eta b \rangle \end{cases}$$

avec $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. On dit que l'algèbre de von Neumann M a la *propriété* (T) si toute correspondance $\mathcal{H}$ de M à M qui est proche de la correspondance identique la contient comme sommant direct. "Proche" doit se comprendre comme suit: étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, des coefficients $(a,b) \to \langle \xi_i | a\xi_j b \rangle$ avec $i,j = 1,\ldots,n$ de la correspondance identique, ainsi que des éléments $a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q \in M$, il existe $\eta_1,\ldots,\eta_n \in \mathcal{H}$ avec

$$\left| \langle \eta_i | a_r \eta_j b_s \rangle - \langle \xi_i | a_r \xi_j b_s \rangle \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \begin{cases} i,j = i,\ldots,n \\ r = 1,\ldots p \\ s = 1,\ldots,q \end{cases} .$$

Cette définition est due à A. Connes et V. Jones [CJ]. Dans le cas où M est un facteur de type II_1, elle est équivalente à la définition antérieure de [Co4]. Sa première justification est fournie par le théorème 2 de [CJ]:

4.- Théorème. Soit Γ un groupe discret dont l'algèbre de von Neumann $W^*(\Gamma)$ est un facteur. Alors $W^*(\Gamma)$ a la propriété (T) si et seulement si Γ l'a.

5.- Remarque. On peut aussi caractériser la propriété (T) d'un groupe localement compact G en termes de sa C^*-algèbre ([Va1] et [AW]). En effet, soient $C^*(G)''$ l'algèbre de von Neumann enveloppante de la C^*-algèbre maximale de G, et $p_0 \in C^*(G)''$ le support central de la représentation unité de G (définition 3.8.1 de [Ped]). Alors G a la propriété (T) si et seulement si $p_0 \in C^*(G)$.

Si G est un groupe de Kazhdan non compact, notons de plus que l'image de p_0 dans la C^*-algèbre réduite de G est nulle (car G n'est pas moyennable).

Comme la classe de p_0 engendre un groupe cyclique infini dans la K-théorie $K_0C^*(G)$, il en résulte que G n'est pas K-moyennable.

6.- Automorphismes extérieurs. Soit M une algèbre de von Neumann. Le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ des $*$-automorphismes de M est un groupe polonais pour la topologie de la convergence simple en norme dans le prédual M_* de M (voir 2.23 et 2.25 dans [Str]). Le sous-groupe normal $\mathrm{Int}(M)$ des automorphismes intérieurs n'est en général pas fermé dans $\mathrm{Aut}(M)$, et par suite le groupe $\mathrm{Out}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M)$ des automorphismes extérieurs n'est en général pas séparé.

Soit par exemple $M = W^*(\Gamma)$ un facteur de type II_1 défini par un groupe dénombrable Γ. Alors $\mathrm{Int}(M)$ est dense dans $\mathrm{Aut}(M)$ si Γ est moyennable. D'autre part $\mathrm{Int}(M)$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(M)$ si et seulement si Γ n'a pas la propriété (Γ) de Murray et von Neumann. Voir le corollaire 3.8 de [Co1] pour l'équivalence, et [BH] pour des exemples. En particulier, si Γ est un groupe de Kazhdan tel que $M = W^*(\Gamma)$ soit un facteur, alors $\mathrm{Int}(M)$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(M)$ et $\mathrm{Out}(M)$ est séparé. Mais on a mieux ([Co3], et proposition 1 de [CJ]).

7.- Proposition. Si M est une algèbre de von Neumann ayant la propriété (T), alors $\mathrm{Int}(M)$ est un sous-groupe ouvert du groupe polonais $\mathrm{Aut}(M)$, et par suite $\mathrm{Out}(M)$ est dénombrable.

8.- Le groupe fondamental. Soit M un facteur de type II_1. Choisissons une trace normale fidèle semi-finie τ sur le produit tensoriel de M par "le" facteur F_∞ de type I_∞. Le *module* d'un automorphisme θ de $M \otimes F_\infty$ est le nombre réel $\lambda > 0$ tel que $\tau(\theta(a)) = \lambda\tau(a)$ pour tout $a \in M \otimes F_\infty$. Le *groupe fondamental* de M est le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ formé des modules des automorphismes de $M \otimes F_\infty$. Jusqu'en 1970, les seuls exemples calculables de groupes fondamentaux donnaient toujours $\mathbb{R}_+^*$ tout entier (c'est par exemple le cas si M est moyennable).

Tout $\theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(M \otimes F_\infty)$ de module λ définit un automorphisme $\theta_\lambda \otimes \theta_\lambda^{-1} \in \mathrm{Aut}(M \otimes M \otimes F_\infty)$ de module 1. Or c'est un "lemme classique" (lemme 3.11 de [Co2]) que, pour tout automorphisme φ de module 1 de $M \otimes M \otimes F_\infty$, il existe un automorphisme ψ de $M \otimes M$ tel que $\psi \otimes 1$ soit conjugué à φ modulo les automorphismes intérieurs. On peut donc associer à $\theta_\lambda \otimes \theta_\lambda^{-1}$ un élément bien défini α_λ de $\mathrm{Out}(M \otimes M)$. Si $\lambda \neq \lambda'$ alors $\theta_\lambda \otimes \theta_{\lambda'}^{-1} \notin \mathrm{Int}(M \otimes M \otimes F_\infty)$ et $\alpha_\lambda \neq \alpha_{\lambda'}$. On a donc un homomorphisme injectif $\lambda \to \alpha_\lambda$ du groupe fondamental de M dans $\mathrm{Out}(M \otimes M)$. Si M a la propriété (T), alors $M \otimes M$ l'a aussi (corollaire 2.5 de [Ana]), et la proposition 6 implique donc:

9.- Corollaire [Co3]. Il existe des facteurs de type II_1 avec groupe fondamental dénombrable.

Ce corollaire fournit une preuve très rapide de l'existence d'une infinité non dénombrable de facteurs de type II_1 non isomorphes deux à deux [McD]. En effet, soit M un facteur de type II_1. Notons G' l'ensemble des nombres réels $\lambda \in]0,1]$ tels qu'il existe un projecteur $e \in M$ de dimension λ pour lequel l'algèbre réduite M_e soit isomorphe à M, et notons G l'ensemble des nombres $\lambda > 0$ avec λ ou λ^{-1} dans G'. Alors G est le groupe fondamental de M (voir 25.7 dans [Str]). Supposons désormais M à groupe fondamental G dénombrable, et choisissons une famille non dénombrable $\mathcal{E}$ de projecteurs de M telle que les dimensions $\dim(e)$ définissent des classes de $\mathbb{R}_+^*/G$ distinctes deux à deux lorsque e décrit $\mathcal{E}$. Alors les algèbres réduites $(M_e)_{e\in\mathcal{E}}$ sont des facteurs de type II_1 non isomorphes deux à deux.

10.- Rigidité. Soient G_1 et G_2 deux groupes de Lie réels connexes simples non compacts et sans centre. Pour $j = 1, 2$, soit Γ_j un réseau de G_j et soit M_j le facteur de type II_1 associé à Γ_j. Si G_1 et G_2 ont la propriété (T), la *rigidité* de Margulis suggère que M_1 et M_2 sont isomorphes si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes, c'est-à-dire si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont conjugués dans un même groupe $G_1 = G_2$. (C'est même une conjecture de A. Connes lorsque G_1 et G_2 sont simples de rangs réels au moins deux.) Cette rigidité n'étant qu'une conjecture, citons les résultats suivants.

Proposition. Soit M un facteur de type II_1 ayant la propriété (T).

(1) Soit F_n le groupe libre non abélien à $n \geq 2$ générateurs. Alors M n'est isomorphe à aucun sous-facteur de $W^*(F_n)$.

(2) Soit $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ une suite de sous-facteurs de M telle que $\cup M_j$ soit fortement dense dans M. Alors $M_j = M$ pour j assez grand.

Preuve. Pour l'assertion (1), voir le corollaire 4 de [CJ]. Nous ne connaissons pas la preuve de l'assertion (2); voir néanmoins [Co4], le théorème 3 de [CJ], ainsi que [Ron] et [Bio]. □

D'autre part, Haagerup et Cowling ont montré le résultat de rigidité suivant:

Proposition. (i) Soient Γ un réseau dans $Sp(n,1)$ et Γ' un réseau dans $Sp(n',1)$ avec $2 \leq n < n'$. Alors il n'existe aucun plongement de $W^*(\Gamma')$ dans $W^*(\Gamma)$.

(ii) Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie réels simples connexes à centres triviaux avec G_1 de rang réel 1 et G_2 de rang réel ≥ 2; soit Γ_j un réseau dans $G_j (j = 1, 2)$. Alors il n'existe aucun plongement de $W^*(\Gamma_2)$ dans $W^*(\Gamma_1)$.

Preuve. voir le §6 de [CH]. $\square$

QUESTIONS

Nous rassemblons ici quelques questions ouvertes, au moins pour nous. Certaines ont déjà été évoquées dans les chapitres précédents.

1.- Calcul de constantes de Kazhdan. (Voir le problème 1.17 et l'appendice de M. Burger.)

2.- Exemples sans groupes de Lie. Nous ne connaissons aucun exemple de preuve qu'un groupe non compact possède la propriété (T) qui ne fasse pas un usage essentiel de la théorie des groupes semi-simples et de leurs représentations. Les deux questions suivantes constituent donc le début d'une liste allongeable à volonté.

(i) Le groupe de Burnside $B(2,p)$ est le quotient du groupe libre non abélien F_2 à deux générateurs par les relations $\{g^p = 1;\ g \in F_2\}$. Si p est impair et assez grand, on sait que $B(2,p)$ n'est pas moyennable [Ady]; a-t-il la propriété (T) ? Signalons que, comme tous les groupes de torsion de type fini, $B(2,p)$ a la propriété (FA) de la définition 6.3 (voir l'exemple I.6.3.1 de [Ser]).

(ii) Soit Γ le groupe de R.J. Thompson, qui est un groupe simple infini de présentation finie, et qui apparaît comme un "sous-groupe arithmétique" du groupe des difféomorphismes du cercle. E. Ghys et V. Sergiescu [GS] ont déjà demandé si Γ a la propriété (T).

3.- (E. Ghys) — La propriété (T) est-elle métrique ? Soit Γ un groupe de type fini. A tout ensemble fini S de générateurs de Γ, on associe une distance d_S sur Γ pour laquelle $d_S(g,h)$ est la *longueur du mot* $g^{-1}h$, c'est-à-dire la longueur minimum d'une suite $(s_1,\ldots,s_n)$ de $S \cup S^{-1}$ telle que $s_1 s_2 \ldots s_n = g^{-1}h$.

On dit que deux espaces métriques (X,d) et (Y,d) sont *quasi-isométriques* s'il existe deux applications $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to X$ et des constantes $\lambda > 0$, $\varepsilon \geq 0$ telles que

$$d(\varphi(x),\varphi(x')) \leq \lambda d(x,x') + \varepsilon$$
$$d(\psi(y),\psi(y')) \leq \lambda d(y,y') + \varepsilon$$
$$d(\psi\varphi(x),x) \leq \varepsilon$$
$$d(\varphi\psi(y),y) \leq \varepsilon$$

pour tous $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$. Exemple: si Γ est un groupe avec deux systèmes finis S et T de générateurs, les espaces métriques associés (Γ, d_S) et (Γ, d_T) sont quasi-isométriques (comme on le vérifie en choisissant $\varphi = \psi = id_\Gamma$).

Une propriété des groupes de type fini est dite *métrique* si elle est conservée par quasi-isométrie [GrV]. Exemples: être de présentation finie, être une extension finie de $\mathbb{Z}$, être presqu'abélien, presque nilpotent, presque libre. La propriété (T) fournit-elle aussi un exemple ?

4.- (C. Pittet). Est-il vrai que tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe discret ayant la propriété (T)?

5.- (F. Paulin). Existe-t-il un groupe Γ ayant la propriété (T) tel que $\mathrm{Out}(\Gamma)$ est infini, c'est-à-dire tel que le quotient du groupe des automorphismes de Γ par le groupe des automorphismes intérieurs de Γ est un groupe infini?

6.- Cas de $Sp(n,1)$, avec $n \geq 2$. Montrer que ce groupe a la propriété (T) sans utiliser la classification des représentations sphériques unitaires.

APPENDICE par M. BURGER
CONSTANTES DE KAZHDAN POUR $SL_3(\mathbb{Z})$

Le but de cet appendice est d'annoncer une précision quantitative à la propriété (T) pour $SL_3(\mathbb{Z})$. Les preuves font l'objet d'une rédaction séparée [Bu2]. Rappelons que la propriété (T) est équivalente à l'assertion suivante (proposition 1.15):

soit S un ensemble fini de générateurs de $SL_3(\mathbb{Z})$; alors il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute représentation unitaire π de $SL_3(\mathbb{Z})$ sans vecteur invariant non nul,

$$(*) \qquad \max_{\gamma \in S} \|\pi(\gamma)\xi - \xi\| \geq \varepsilon \|\xi\|$$

pour tout vecteur ξ de l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π.

Le résultat principal ci-dessous explicite des exemples de couples (S, ε) vérifiant la condition $(*)$ pour les représentations de permutation.

a. LA PAIRE $(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$

Nous avons d'abord besoin de préciser quantitativement la propriété (T) relative de la paire $(H, \mathbb{Z}^2)$, où $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ est le produit semi-direct défini par l'action naturelle de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}^2$; voir les numéros 1.17, 2.2 et 8.6. Pour énoncer le résultat, nous introduisons l'invariant suivant.

Soit F une partie de $SL_2(\mathbb{Z})$. On pose

$$\alpha(F) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^1} \sup_{B \subset P^1(\mathbb{R})} \sup_{\gamma \in F} |\mu(\gamma B) - \mu(B)|$$

où $\mathcal{M}^1$ est l'espace des mesures de probabilité sur la droite projective réelle $P^1(\mathbb{R})$ et où B parcourt l'ensemble des boréliens de $P^1(\mathbb{R})$. Alors $\alpha(F)$ est nul si et seulement si le groupe engendré par F préserve une mesure de probabilité sur $P^1(\mathbb{R})$, ce qui a lieu si et seulement si ce groupe est virtuellement cyclique.

Exemples. On pose

$$n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\alpha(F) \geq \frac{1}{4}$ si $F = \{n, \overline{n}\}$ et que $\alpha(F) = \frac{1}{2}$ si $F = \{n^2, \overline{n}^2\}$.

Enfin, étant donné une partie F de $SL_2(\mathbb{Z})$ et un domaine fondamental mesurable D pour l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on leur associe dans $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ la partie

$$(**) \qquad P = \{(x,\gamma) \in H : m([x + \gamma(D)] \cap D) \neq 0 \text{ et } \gamma \in F\}$$

où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Avec ces notations, on a la :

Proposition 1. Pour toute représentation unitaire π de $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ sans vecteur $\mathbb{Z}^2$-invariant non nul, on a

$$\sup_{s \in P} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \geq 2\big(1 - \sqrt{1 - \alpha(F)^2}\big)\, \|\xi\|^2$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$.

Exemples. (1) Si $F = \{n, \overline{n}\}$ et $D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, alors

$$P = \bigcup_{j=-1,0,1} \left\{ \left(\begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}, n \right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}, \overline{n} \right) \right\}$$

et donc

$$\max_{s \in P} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \geq \frac{1}{2(4 + \sqrt{15})} \|\xi\|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{H}_\pi .$$

(2) Si $F = \{n^2, \overline{n}^2\}$ et D comme dans l'exemple (1), alors

$$P = \bigcup_{j=-1,0,1} \left\{ \left(\begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}, n^2 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}, \overline{n}^2 \right) \right\}$$

et donc

$$\max_{s \in P} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \geq (2 - \sqrt{3})\|\xi\|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{H}_\pi .$$

(3) Si $F = \{n^2, \overline{n}^2\}$ et $D = (0,1)^2$, alors

$$P = \bigcup_{j=0,1,2} \left\{ \left(\begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}, n^2 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix}, \overline{n}^2 \right) \right\} .$$

Soit m un entier, $m \geq 2$. Alors H agit par permutations sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$, d'où comme au chapitre 8 une représentation σ_m de H dans l'espace $\mathcal{H}_m$ qui est l'orthogonal des fonctions constantes dans $\mathcal{L}^2((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2)$. La représentation σ_m n'ayant pas de vecteur $\mathbb{Z}^2$-invariant non nul, on a

$$\max_{s \in P} \|\sigma_m(s)\xi - \xi\|^2 \geq (2 - \sqrt{3}) \|\xi\|^2$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_m$. On obtient ainsi les exemples de $(m^2, 7, \frac{2-\sqrt{3}}{2})$-extenseurs de Gabber et Galil [GG] déjà mentionnés après le numéro 8.9.

b. LES RÉSULTATS POUR LE GROUPE $SL_3(\mathbb{Z})$

Nous considérons les sous-groupes suivants de $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \ : \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \right\} ,$$

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \right\} ,$$

$$A_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \ : \ {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\} .$$

Ainsi R normalise A_+ et A_-. Les groupes RA_+ et RA_- sont isomorphes à $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ via des isomorphismes définis par

$$\varphi_+ \begin{pmatrix} & g & & x \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, g)$$

$$\varphi_- \begin{pmatrix} & g & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ & {}^t x & & 1 \end{pmatrix} = (-{}^t g^{-1} x, \ {}^t g^{-1})$$

où $x \in \mathbb{Z}^2$ et $g \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Construction de S. Soient F une partie de $SL_2(\mathbb{Z})$ et D un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$; on définit $P \subset \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ par (**) comme plus haut. On pose $S_\pm = \varphi_\pm^{-1}(P)$ et $S = S_+ \cup S_-$.

Exemples. (1) Si $F = \{n, \overline{n}\}$ et $D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, alors S est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & j \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (j = -1, 0, 1)$$

et des inverses de leurs transposées ($|S| = 12$).

(2) Si $F = \{n^2, \overline{n}^2\}$ et $D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, alors S est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & j \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (j = -1, 0, 1)$$

et des inverses de leurs transposées.

Remarquons que les sous-groupes A_+ et A_- engendrent $SL_3(\mathbb{Z})$. Si π est une représentation unitaire de $SL_3(\mathbb{Z})$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, on définit $\mathcal{V}_+$ comme étant le sous-espace de $\mathcal{H}_\pi$ des vecteurs A_+-invariants, et de même pour $\mathcal{V}_-$. Si ni $\mathcal{V}_+$ ni $\mathcal{V}_-$ n'est réduit à $\{0\}$, on définit le "cosinus de leur angle" comme étant

$$\beta_\pi = \sup_{\eta_+ \in \mathcal{V}_+ \text{ et } \eta_- \in \mathcal{V}_-} \frac{\operatorname{Re} \langle \eta_+ | \eta_- \rangle}{\|\eta_+\| \, \|\eta_-\|} \, .$$

Avec ces définitions et ces notations, notre résultat principal s'énonce comme suit.

Théorème. Soit π une représentation unitaire de $SL_3(\mathbb{Z})$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$.

(i) Si $\mathcal{V}_+ \neq \{0\}$ et $\mathcal{V}_- \neq \{0\}$, on a

$$\sup_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \;\geq\; \left\{ 2 - 2\sqrt{1 - \left[\frac{\alpha(F)(1-\beta_\pi)}{2}\right]^2} \right\} \|\xi\|^2$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$.

(ii) Si $\mathcal{V}_+ = \{0\}$ ou si $\mathcal{V}_- = \{0\}$, on a

$$\sup_{s\in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \geq \left\{2 - 2\sqrt{1-\alpha(F)^2}\right\} \|\xi\|^2$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$.

Remarque. L'assertion (ii) résulte immédiatement de la proposition 1.

Dans le cas où π est de dimension finie, nous savons majorer β_π comme suit. Dans ce cas, on sait [Ste] qu'il existe un entier $N \geq 2$ tel que π se factorise à travers $\Gamma(N)$, où

$$\Gamma(N) = \left\{\gamma \in SL_3(\mathbb{Z}) \ : \ \gamma \equiv \mathrm{Id}(\mathrm{mod} N)\right\} .$$

Définissons N_π comme le plus petit entier pour lequel π a cette propriété.

Proposition 2. Soit π une représentation unitaire irréductible de $SL_3(\mathbb{Z})$ de dimension finie, distincte de la représentation unité. Alors

$$\beta_\pi \leq \frac{1}{\sqrt{n_\pi}}$$

où n_π est le produit des facteurs premiers distincts de N_π.

On obtient donc que, si π est une représentation irréductible unitaire non triviale de dimension finie de $SL(3,\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{H}_\pi$ et si S est l'ensemble défini dans l'exemple (2), alors

$$\max_{s\in S} \frac{\|\pi(s)\xi - \xi\|}{\|\xi\|} \geq \left\{2 - 2\sqrt{1 - \left[\frac{1-\sqrt{n_\pi}^{\,-1}}{4}\right]^2}\right\}^{1/2}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$. Remarquons que le membre de droite excède toujours

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n_\pi}}\right) .$$

On peut aussi obtenir des estimations pour certaines représentations de dimension infinie:

Proposition 3. Soit Γ un sous-groupe d'indice infini dans $SL(3,\mathbb{Z})$ et soit π la représentation régulière de $SL(3,\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{L}^2(SL(3,\mathbb{Z})/\Gamma)$. Alors $\beta_\pi = 0$. En particulier on a

$$\max_{s\in S} \frac{\|\pi(s)\xi - \xi\|}{\|\xi\|} \geq \frac{1}{\left[8+2\sqrt{15}\right]^{1/2}} > \frac{1}{4}$$

où S est l'ensemble défini dans l'exemple (2).

Exemple. Soit ϱ une représentation irréductible non triviale de $SL(3,\mathbb{R})$ dans un espace vectoriel réel V de dimension finie n. Choisissons une base de V telle que $\varrho(SL(3,\mathbb{Z})) \subset SL(n,\mathbb{Z})$. On obtient ainsi une action (ergodique) de $SL(3,\mathbb{Z})$ sur le tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et une représentation unitaire de $SL(3,\mathbb{Z})$ dans

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(T^n) \ : \ \int_{T^n} f(x)dm(x) = 0 \right\}$$

qui, via transformation de Fourier, est équivalente à une somme de représentations du type considéré à la proposition 3. On en déduit que

$$\max_{\gamma\in S} \|f\circ\varrho(\gamma) - f\|_2 \geq \frac{1}{\left[8+2\sqrt{15}\right]^{1/2}} \|f\|_2$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2(T^n)$ telle que $\int_{T^n} f(x)dm(x) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ady] S.I. Adyan, *Random walks on free periodic groups*, Math. U.S.S.R. Izvestiya **21**-3 (1983), 425-434.

[AW] C.A. Akemann et M.E. Walter, *Unbounded negative definite functions*, Canad. J. Math. **33** (1981), 862-871.

[AM] N. Alon et V.D. Milman, λ_1, *Isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators*, Journ. Combin. Theory, Ser.B, **38** (1985), 73-88.

[AM2] N. Alon et V.D. Milman, *Eigenvalues, expanders and superconcentrators*, Proc. 25th. Ann. Sympos. on Foundations of Computer Science (Florida, 1984), 320-322.

[Alp] R. Alperin, *Locally compact groups acting on trees and property T*, Mh. Math. **93** (1982), 261-265.

[Ana] C. Anantharaman-Delaroche, *On Connes' property T for von Neumann algebras*, Math. Japon., **32** (1987), 337-355.

[AS] M. Atiyah et W. Schmid, *A geometric construction of the discrete series for semi-simple Lie groups*, Invent. Math. **42** (1977), 1-62.

[BGS] W. Ballmann, M. Gromov et V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Birkhäuser, 1985.

[Ban] S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. **4** (1923), 7-33. Oeuvres I, pp. 66-89 et 318-322.

[Bak] W. Banaszczyk, *On the existence of commutative Banach-Lie groups which do not admit continuous unitary representations*, Coll. Math. **52** (1987), 113-118.

[BR] A.O. Barut et R. Raczka, *The theory of group representations and applications*, PWN-Polish scientific Publishers, Warszawa, 1980.

[Ba] H. Bass, *Groups of integral representation type*, Pacific J. Math. **86** (1980), 15-51.

[Bas] L.A. Bassalygo, *Asymptotically optimal switching circuits*, Problems Inform. Transmission **17**(3) (1981), 206-211.

[BH] E. Bédos et P. de la Harpe, *Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples*, l'Enseignement Math. **32** (1986), 139-157.

[BK] M.E.B. Bekka et E. Kaniuth, *Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation*, J. reine angew. Math. **385** (1988), 203-220.

[BCR] C. Berg, J.P.R. Christensen et P. Ressel, *Harmonic Analysis on semigroups*, Springer, 1984.

[Bie] F. Bien, *Constructions of telephone networks by group representations*, Notices Amer. Math. Soc. **36**-1 (1989), 5-22.

[Bio] J. Bion-Nadal, *Von Neumann subalgebras of a type II_1 factor: correspondances and property (T)*, à paraître au J. Operator Theory.

[Bor] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111-122.

[BW] A. Borel et N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1980.

[BTG] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, 1971; *Topologie générale*, chap. 5 à 10, Hermann, 1974.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 5 à 7, Masson, 1985.

[BI] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. 7 à 8, Hermann, 1963.

[BLi] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 2 et 3, Hermann, 1972.

[BL'] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5, 6, Hermann, 1968.

[Boz] M. Bozejko, *Positive definite kernels, length functions on groups and noncommutative von Neumann inequality*, Prépublication, Université de Wroclaw, 1987.

[BJS] M. Bozejko, T. Januszkiewicz et R.T. Spatzier, *Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan's property*, J. Operator Theory **19** (1988), 63-67.

[BT] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Publ. Math. IHES **41** (1972), 5-252.

[BMW] L.J. Bunce et J.D. Maitland Wright, *On Sullivan's invariant measure problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 870-874.

[Bu1] M. Burger, *Spectre du laplacien, graphes et topologie de Fell*, Comment. Math. Helvetici **63** (1988), 226-252.

[Bu2] M. Burger, *Kazhdan constants for $SL(3, \mathbb{Z})$*, Prépublication, I.H.E.S., 1989.

[CG] S.S. Chen et L. Greenberg, *Hyperbolic spaces.* In "Contributions to Analysis" édité par L.V. Ahlfors et al. (Academic Press, 1974), 49-87.

[Cha] M. Choda, *Normality of invariant states under strongly ergodic actions*, Math. Japon. **27** (1982), 293-300.

[Cho] C. Chou, *Ergodic group actions with nonunique invariant means*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 647-650.

[Clo] L. Clozel, *Progrès récents vers la classification du dual unitaire des groupes réductifs réels*, Sém. Bourbaki, 39ème année, 1986-87, N°681, juin 1987.

[CV] Y. Colin de Verdière, *Distribution de points sur une sphère (d'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)*, Sém. Bourbaki, 41ème année, 1988-89, N°703, novembre 1988.

[Co1] A. Connes, *Almost periodic states and factors of type III_1*, Journ. Funct. Anal. **16** (1974), 415-445.

[Co2] A. Connes, *A factor not anti-isomorphic to itself*, Ann. of Math. **101** (1975), 536-554.

[Co3] A. Connes, *A factor of type II_1 with countable fundamental group*, J. Operator Theory **4** (1980), 151-153.

[Co4] A. Connes, *Classification des facteurs*, Proc. Symp. Pure Math. **38**-2 (Amer. Math. Soc., 1982), 43-109.

[CJ] A. Connes et V. Jones, *Property T for von Neumann algebras*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 57-62.

[CW] A. Connes et B. Weiss, *Property T and asymptotically invariant sequences*, Israel J. Math. **37** (1980), 209-210.

[Cg1] M. Cowling, *Sur les coefficients des représentations des groupes de Lie simples*, in "Analyse harmonique sur les groupes de Lie II", Springer Lect. Notes in Math. **739** (1979), 132-178.

[Cg2] M. Cowling, *Unitary and uniformly bounded representations of some simple Lie groups*, in "Harmonic Analysis and Group Representations, C.I.M.E. 1980" (Liguori Napoli, 1982), 49-128.

[CH] M. Cowling et U. Haagerup, *Completely bounded multipliers of the*

Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one, prépublication, Univ. of New South Wales, 1987.

[DK] C. Delaroche et A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*, Sém. Bourbaki, 20ème année, 1967-68, n°343, juin 1968.

[Del] P. Delorme, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus et représentations*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 281-336.

[Di1] J. Dixmier, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*, Acta Sci. Math. (Szeged), **12** (1950), 213-227.

[Dix] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, 2ème édition, Gauthier-Villars, 1969.

[Dri] V.G. Drinfel'd, *Finitely additive measures on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations*, Funct. An. and its Appl.**18** (1984), 245-246.

[Eck] B. Eckmann, *Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques*, Bull. Soc. Vaud. Sc. nat. **63**, 264 (1945), 67-78.

[Eps] D.B.A. Epstein, *Complex hyperbolic geometry*, in "Analytical and geometric aspects of hyperbolic space", édité par D.B.A. Epstein (Cambridge Univ. Press, 1987), 93-111.

[FH] J. Faraut et K. Harzallah, *Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène*, Ann. Inst. Fourier **24**-3 (1974), 171-217.

[Fe1] J.M.G. Fell, *The dual spaces of C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 365-403.

[Fe2] J.M.G. Fell, *Weak containment and induced representations of groups*, Canad. J. Math. **14** (1962), 237-268.

[FJK] M. Flensted-Jensen et T.H. Koornwinder, *Positive-definite spherical functions on a non-compact, rank one symmetric space*, in "Analyse Harmonique sur les groupes de Lie II", Springer Lect. Notes in Math. **739** (1979), 249-282.

[GG] O. Gabber et Z. Galil, *Explicit construction of linear-sized superconcentrators*, Journ. Comp. and Syst. Sci. **22** (1981), 407-420.

[Gar] H. Garland, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups*, Ann. Math. **97** (1973), 375-423. Voir aussi les actes du congrès international de Vancouver (1974).

[GS] E. Ghys et V. Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 185-239.

[GH] T. Giordano et P. de la Harpe, *Groupes de tresses, propriété (T) et moyennabilité intérieure*, manuscrit.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", édité par S.M. Gersten (Springer, 1987), 75-263.

[GrV] M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, Proc. Intern. Congr. Math. (Varsovie, 1983), 385-392.

[Gu1] A. Guichardet, *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Springer Lecture Notes in Math. **261** (1972).

[Gu2] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Cedic-F. Nathan, 1980.

[Gu3] A. Guichardet, *Analyse harmonique commutative*, Monographie univ. de math. n°26, Dunod, 1968.

[Gu4] A. Guichardet, *Étude de la 1-cohomologie et de la topologie du dual pour les groupes de Lie à radical abélien*, Math. Ann. **228** (1977), 215-232.

[Ha] U. Haagerup, *An example of a non-nuclear C^*-algebra which has the metric approximation property*, Invent. Math. **50** (1979), 279-293.

[Hal] P.R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, 1950.

[HC] Harish-Chandra, *Representations of semi-simple Lie groups I, II, III*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 185-243; **76** (1954), 26-65 et 234-253. Oeuvres I, 390-509.

[Har] P. de la Harpe, *Moyennabilité du groupe unitaire et propriété P de Schwartz des algèbres de von Neumann*, Springer Lect. Notes in Math. **725** (1979), 220-227.

[HaS] P. de la Harpe et G. Skandalis, *Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales*, L'Enseignement Math. **32** (1986), 121-138.

[Hau] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, 1914.

[Hel] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic

Press, 1962; *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[He2] S. Helgason, *Groups and geometric analysis (Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions)*, Academic Press, 1984.

[HeS] E. Hewitt et K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965.

[HiS] J.P. Hilton et U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Springer, 1971.

[Hoc] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, 1965.

[HM] R.E. Howe et C.C. Moore, *Asymptotic properties of unitary representations*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 72-96.

[Hum] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer, 1972.

[Iha] Y. Ihara, *Discrete subgroups of $PSL(2, k_p)$*, Proc. Symp. Pure Math. IX, Boulder (Amer. Math. Soc., 1966), 272-278. Voir aussi: *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219-235.

[JV] P. Julg et A. Valette, *K-theoretic amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, and the action on the associated tree*, J. Funct. Anal. **58** (1984), 194-215.

[JR] A. del Junco et J. Rosenblatt, *Counterexamples in ergodic theory and number theory*, Math. Ann. **245** (1979), 185-197.

[Kaz] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. and its Appl. **1** (1967), 63-65.

[Kn] A.W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups (an overview based on examples)*, Princeton Univ. Press, 1986.

[Ko1] B. Kostant, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 627-642.

[Ko2] B. Kostant, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, in "Lie groups and their representations", édité par I.M. Gelfand, Kaido, 1975, 231-329.

[KS] R.A. Kunze et E.M. Stein, *Uniformly bounded representations and* *harmonic analysis of the* 2×2 *real unimodular group*, Amer. J. Math. **82** (1960), 1-62.

[Leb] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904.

[LPS1] A. Lubotzky, R. Phillips et P. Sarnak, *Hecke operators and distributing points on the sphere I*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1987), 149-186.

[LPS2] A. Lubotzky, R. Phillips et P. Sarnak, *Ramanujan conjecture and explicit constructions of expanders and super-concentrators*, prépublication, 1986.

[Ma1] G.A. Margulis, *Explicit constructions of concentrators*, Problems Inform. Transmission **9**-4 (1973), 325-332.

[Ma2] G.A. Margulis, *Some remarks on invariant means*, Mh. Math. **90** (1980), 233-235.

[Ma3] G.A. Margulis, *On the decomposition of discrete subgroups into amalgams*, Selecta Math. Sov. **1** (1981), 197-213.

[Ma4] G.A. Margulis, *Finitely-additive invariant measures on Euclidean spaces*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), 383-396.

[McD] D. McDuff, *Uncountably many* II_1*-factors*, Ann. of Math. **90** (1969), 372-377.

[Moo] C.C. Moore, *Ergodic theory and von Neumann algebras*, Proc. Symp. Pure Math. **38**-2 (Amer. Math. Soc., 1982), 179-226.

[MS] J.W. Morgan et P.B. Shalen, *Valuations, trees and degenerations of hyperbolic structures*, I, Ann. of Math. **120** (1984), 401-476.

[Mos] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton Univ. Press, 1973.

[Myc] J. Mycielski, *Finitely additive invariant measures* I, Coll. math. **42** (1979), 309-318.

[New] M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, 1972.

[Pap] Pappus d'Alexandrie, *Collection Mathématique*, Trad. par P. Ver Eecke, Desclée-de Brouwer (Bruges, 1933).

[Par] K.R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, 1967.

[Ped] G.K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, 1979.

[Pin] M. Pinsker, *On the complexity of a concentrator*, 7th Intern. Teletraffic Conf. (Stockholm, 1973), 318/1-318/4.

[Pop] S. Popa, *Correspondances*, version préliminaire, 1986.

[Rag] M.S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, 1979.

[Ril] R. Riley, *An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures*, Lecture Notes in Math. **722** (Springer 1979), 99-133.

[Rob] A. Robert, *Des adèles: pourquoi?*, L'Enseignement Math. **20** (1974), 133-145.

[Ron] A.G. Robertson, *Strong non-amenability of II_1-factors with property T*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 51-53.

[Ros] J. Rosenblatt, *Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 623-636.

[Rou] A. Rouault, *Superconcentrateurs*, prépublication, Univ. d'Orsay, 1987.

[Rud] W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw Hill, 1973.

[S] G. Schiffmann, *Travaux de Kostant sur la série principale*, in "Analyse Harmonique sur les groupes de Lie II", Springer Lect. Notes in Math. **739** (1979), 460-510.

[SC] W. Schmid, *Boundary value problems for group invariant differential equations*, Actes du colloque "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui (Lyon, 1984)", Astérisque, n° hors série, 1985, 311-321.

[Sc1] K. Schmidt, *Asymptotically invariant sequences and an action of $SL(2,\mathbb{Z})$ on the 2-sphere*, Israel J. Math. **37** (1980), 193-208.

[Sc2] K. Schmidt, *Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981), 223-236.

[Sch] I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen*, J. reine angew. Math. 140 (1911), 1-29.

[Ser] J-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46** (Soc. Math. France, 1977).

[Se2] J-P. Serre, *Cours d'Arithmétique*, Collection Sup, Presses Univ. France, 1970.

[Sha] P.B. Shalen, *Dendrology of groups: an introduction*, in "Essays in group theory", édité par S.M. Gersten (Springer, 1987), 265-319.

[Ska] G. Skandalis, *Une notion de nucléarité en K-théorie*, K-Theory **1** (1988), 549-573.

[Ste] R. Steinberg, *Some consequences of the elementary relations in SL_n*, Contemporary Math. **45** (1985), 335-350.

[Str] S. Stratila, *Modular theory in operator algebras*, Abacus Press, 1981.

[SZ] S. Stratila et L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras*, Ed. Academiei & Abacus Press, 1979.

[Sul] D. Sullivan, *For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) **4** (1981), 121-123.

[Tad] M. Tadic, *Topology of unitary dual of nonarchimedean $GL(n)$*, Duke Math. J. **55** (1987), 385-422.

[Tar] A. Tarski, *Algebraische Fassung des Massproblems*, Fund. Math. **31** (1938), 47-66.

[Thu] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Notes de cours (Princeton, 1978/79).

[Ti1] J. Tits, *Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels*, Bull. Acad. Roy. de Belgique (Classe des Sciences) **39** (1953), 309-329.

[Ti2] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lect. Notes in Math. **386** (1974).

[Ti3] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (Amer. Math. Soc., 1979), 29-69.

[Ti4] J. Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250-270.

[Va1] A. Valette, *Minimal projections, integrable representations and property (T)*, Arch. Math. **43** (1984), 397-406.

[Va2] A. Valette, *A global approach to spherical functions on rank 1 symmetric spaces*, Nieuw Arch. voor Wisk. **(4)5** (1987), 33-52.

[Vas] L.N. Vaserstein, *Groups having the property* (T), Funct. Anal. and its Appl. **2** (1968), 174.

[VK] A.M. Vershik et S.I. Karpuhev, *Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity, and conditionally positive definite functions*, Math. USSR Sbornik **47** (1984), 513-526.

[Voi] D. Voiculescu, *Property T and approximation of operators*, prépublication, Berkeley 1988.

[Wag] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[Wal] N.R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, 1973.

[Wa1] S.P. Wang, *On the first cohomology group of discrete groups with property* (T), Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 621-624.

[Wa2] S.P. Wang, *On isolated points in the dual spaces of locally compact groups*, Math. Ann. **218** (1975), 19-34.

[Wan] X. Wang, *On the* C^**-algebras of foliations in the plane*, Springer Lect. Notes in Math. **1257** (1987).

[Wat] Y. Watatani, *Property* (T) *of Kazhdan implies property* (FA) *of Serre*, Math. Japon. **27** (1981), 97-103.

[Wei] A. Weil, *Basic number theory*, Springer, 1967.

[Wie] N. Wielenberg, *The structure of certain subgroups of the Picard group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **84** (1978), 427-436.

[Zim] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser, 1984.

[Zi2] R.J. Zimmer, *Kazhdan groups acting on compact manifolds*, Invent. Math. **75** (1984), 425-436.

INDEX TERMINOLOGIQUE

(Les numéros renvoient aux pages.)

INDEX DE QUELQUES GROUPES

Pierre de la Harpe
Section de mathématiques
C.P. 240
1211 Genève 24

Alain Valette
Institut de mathématiques
Chantemerle 20
2000 Neuchâtel

Marc Burger
Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
4051 Basel

RÉSUMÉ

Un groupe localement compact G a la propriété (T) de Kazhdan si la représentation unité de G définit un point dans le dual unitaire $\widehat{G}$ qui est isolé pour la topologie de Fell. Cette propriété a plusieurs conséquences sur la structure de G, telle que d'être compactement engendré. La plupart des exemples connus de groupes ayant la propriété (T), tels que $SL_3(\mathbb{R})$ et $SL_3(\mathbb{Z})$, sont en relation étroite avec les groupes de Lie simples de rangs déployés au moins deux et avec leurs réseaux. Nous exposons ceci dans les chapitres 1 à 3. Les exemples $Sp(1,n)$ de rang réel un (avec $n \geq 2$), dus à Kostant et plus délicats à montrer, font l'objet du chapitre 9.

La propriété (T) est équivalente à une propriété de point fixe pour les actions isométriques sur des espaces de Hilbert affines, ainsi qu'à plusieurs conditions sur les fonctions de types positif et négatif, dues à Guichardet et Delorme (chapitres 4 et 5). Nous exposons aussi plusieurs applications de la propriété (T) à diverses actions de groupes (chapitre 6), à des problèmes de mesures finiment additives sur les sphères (chapitre 7, résultats de Rosenblatt, Margulis et Sullivan), et à des graphes expansifs (chapitre 8, résultats de Margulis). Un dernier chapitre 10 indique brièvement quelques liens intéressants avec les algèbres d'opérateurs.

ABSTRACT

A locally compact group G has property (T) of Kazhdan if the unit representation of G is an isolated point of the unitary dual $\widehat{G}$ with respect to the Fell topology. This property has several consequences on the structure of G, such as that of being compactly generated. Most of the known examples of groups with property (T), such as $SL_3(\mathbb{R})$ and $SL_3(\mathbb{Z})$, are linked up with simple Lie groups having split rank at least two and with their lattices. These facts are exposed in Chapters 1 to 3. The examples $Sp(1, n)$ of real rank one (with $n \geq 2$), due to Kostant and more delicate to establish, are given in Chapter 9.

Property (T) is equivalent to a fixed point property for isometric actions on affine Hilbert spaces, as well as to various conditions on functions of positive and negative type, due to Guichardet and Delorme (Chapters 4 and 5). We show several applications of property (T) concerning actions of groups on various spaces (Chapter 6), problems about finitely additive measures on spheres (Chapter 7, results of Rosenblatt, Margulis and Sullivan), and expanding graphs (Chapter 8, results of Margulis). Finally, Chapter 10 indicates briefly fruitful connections with operator algebras.