Astérisque

J. L. WALDSPURGER

Intégrales orbitales sphériques pour $GL(N)$ sur un corps p-adique

Astérisque, tome 171-172 (1989), p. 279-337

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__171-172__279_0>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 171-172 (1989), p. 279-337.

INTÉGRALES ORBITALES SPHÉRIQUES POUR GL(N) SUR UN CORPS p-ADIQUE

par J.L.WALDSPURGER

Introduction.

Soient $G=GL(n,F)$ où F est un corps local non archimédien, $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre de Hecke de G, i.e l'algèbre des fonctions sur G à support compact, biinvariantes par le sous-groupe K des éléments de G à coordonnées entières. L'isomorphisme de Satake identifie $\mathcal{H}(G)$ à l'algèbre des polynômes en les variables q^{s_i}, q^{-s_i}, $i = 1, \ldots, n$, invariants par permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$, où $s_i \in \mathbb{C}$, et q est le nombre d'éléments du corps résiduel de F. Notons $f \to \tilde{f}$ cet isomorphisme. Soit maintenant $\gamma \in G$ un élément elliptique régulier. L'application

$$f \to I(f,\gamma) = \int_{G/Z(G)} f(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

où $Z(G)$ est le centre de G, définit une forme linéaire sur $\mathcal{H}(G)$. Il existe donc une distribution $D(s,\gamma)$ définie disons sur l'ensemble $\Sigma = \left[\mathbb{R} \Big/ \left(\frac{2\pi i}{\log q}\right) \mathbb{Z}\right]^n$ telle que

$$I(f,\gamma) = \int_\Sigma \tilde{f}(s)D(s,\gamma)\, ds$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(G)$. On se propose ici d'étudier $D(s,\gamma)$. En fait on va plutôt fixer une fonction φ sur G localement constante à support compact inclus dans l'ensemble des éléments elliptique réguliers, poser

$$I(f,\varphi) = \int_G I(f,\gamma)\varphi(\gamma)\, d\gamma \ ;$$

il existe alors une distribution $D(s,\varphi)$ telle que

$$I(f,\varphi) = \int_\Sigma \tilde{f}(s)D(s,\varphi)\, ds.$$

C'est cette distribution qu'on étudie.

Arthur a introduit une fonction $R(s,\varphi)$ définie comme suit. Pour tout $s \in \mathbb{C}^n$ il y a une représentation sphérique $\pi(s,.)$ de G. On peut réaliser ces représentations dans un même espace K . Notons W l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Pour tout $w \in W$, il y a un opérateur (normalisé) $I(w,s) \in \mathrm{End}(K)$ qui entrelace les représentations $\pi(s,.)$ et $\pi(ws,.)$. Pour $\mu \in \mathbb{C}^n$, posons

$$\Theta_w(\mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{i=1}^{n-1} (\mu_{w^{-1}i} - \mu_{w^{-1}(i+1)}).$$

Pour $s,\mu \in (i\mathbb{R})^n$, μ "général", posons

$$R(s,\varphi,\mu) = \mathrm{Trace}\left[\sum_{w\in W} I(w^{-1},ws) I(w,s+\mu)\pi(s,\varphi)\Theta_w(\mu)^{-1}\right].$$

Arthur a montré que cette fonction se prolonge en une fonction C^∞ sur $(i\mathbb{R})^n \times (i\mathbb{R})^n$. Il pose alors $R(s,\varphi) = R(s,\varphi,0)$. Notre résultat est qu'il existe une constante explicite τ telle que

$$D(s,\varphi) = \tau R(s,\varphi)$$

pour tout $s \in \Sigma$.

L'idée de la démonstration est d'introduire un point T dans l'algèbre de Lie du tore diagonal de G, de définir convenablement un sous-ensemble compact $G(T) \subset G/Z(G)$, qui devient de plus en plus grand quand T tend vers l'infini, et d'étudier.

$$I(T,f,\varphi) = \int_{G(T)\times G} f(g^{-1}\gamma g)\varphi(\gamma)\, d\gamma\, dg.$$

On fera ensuite tendre T vers l'infini. On a une formule d'inversion

$$f(g) = \int_\Sigma \widetilde{f}(s)\omega(s,g)\, d\mu(s),$$

où $\omega(s,.)$ est la fonction sphérique associée à $\pi(s,.)$ et $d\mu$ est la mesure de Plancherel ([M] th.5.2.1). On est alors ramené à étudier des intégrales

$$\int_{G(T)\times G} \omega(s,g^{-1}\gamma g)\ \varphi(\gamma)\, d\gamma\, dg.$$

Celles-là se calculent en utilisant les méthodes de troncature développées par Arthur. Les résultats de Casselman sur le développement à l'infini des coefficients des représentations de G jouent un rôle technique mais essentiel. Nos intégrales apparaissent maintenant comme des analogues locales (simplifiées)de produits scalaires de séries d'Eisenstein tronquées. On n'a plus qu'à recopier indignement Arthur ([A3]).

Cette démonstration se trouve dans la partie II de l'article.

On peut se faire une idée de la forme de cette fonction $D(s,\varphi)$ en utilisant une démonstration récente due à Clozel d'une conjecture de Howe. Il résulte de cette démonstration que pour $\gamma \in K$ (disons elliptique régulier), la forme linéaire $f \to I(f,\gamma)$ sur $\mathcal{H}(G)$ est combinaison linéaire des intégrales orbitales unipotentes. Comme celles-ci s'explicitent aisément, on en déduit une forme générale de $D(s,\varphi)$, en supposant le support de φ inclus dans K (cf. proposition III 3).

Cela permet d'obtenir une expression des germes de Shalika en un point $\gamma \in K$, elliptique régulier, en termes de résidus de fonctions $R(s,\varphi)$, φ étant la fonction caractéristique d'un petit voisinage de γ. Arthur a trouvé la méthode pour exprimer ces résidus sous une forme (relativement...) simple ([A1]). Notre formule finale est la proposition III 5. Malgré sa simplicité formelle, son utilité pratique semble limitée.

Cet article est une nouvelle version de deux articles antérieurs (non publiés) intitulés "A propos des intégrales orbitales pour GL(N)" et "Un exemple de germe de Shalika pour GL(n)".

I. NOTATIONS, PRÉLIMINAIRES.

1. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\underline{\omega}$ une uniformisante, q le nombre d'éléments du corps résiduel, $n_1,\dots, n_r$ des entiers positifs, $n = n_1 +\dots+ n_r$, $G = GL(n_1,F) \times\dots\times GL(n_r,F)$ (à partir du §II.5, on supposera $r = 1$, $G = GL(n,F)$), A le tore diagonal de G, B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, $K = GL(n_1,\mathcal{O}) \times\dots\times GL(n_r,\mathcal{O})$. On pose $\mathrm{rg}\ G = (n_1-1) +\dots+ (n_r-1)$. Posons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^n$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$, munissons $\mathfrak{a}$ du produit scalaire évident. Si a $a = (a_1,\dots, a_n) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, on note $\underline{\omega}^a$ l'élément de A de composantes diagonales $\underline{\omega}^{a_1},\dots, \underline{\omega}^{a_n}$. Si $\underline{a} \in A$ a pour composantes $\underline{a}_1,\dots, \underline{a}_n$, on note $h(\underline{a})=(a_1,\dots, a_n)$ l'élément de $\mathfrak{a}_Z$ tel que $|\underline{a}_i| = q^{-a_i}$ pour $i=1,\dots, n$.

On ne considerera que des sous-groupes paraboliques de G contenant A. Un tel sous-groupe P possède un unique sous-groupe de Lévi M_P contenant A. On ne considerera que de tels sous-groupes de Lévi. Soit M un tel sous-groupe. On note M° l'intersection des noyaux des valeurs absolues des caractères rationnels de M, $\mathfrak{a}_M$, resp. $\mathfrak{a}^M$, le sous-espace de $\mathfrak{a}$ engendré par les $a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$ tels que $\underline{\omega}^a$ appartienne au centre de M, resp. à M°, $\mathfrak{a}_M^G = \mathfrak{a}_M \cap \mathfrak{a}^G$. Posons $\mathfrak{a}_{M,\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_M \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^M = \mathfrak{a}^M \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Pour $a \in \mathfrak{a}$, on note a_M, resp. a^M, la composante de a sur $\mathfrak{a}_M$, resp. $\mathfrak{a}^M$. Notons Σ_M (simplement Σ si $M=A$) l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_M$ dans l'algèbre de Lie de G. On identifie Σ_M à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_M$. Si M est standard, i.e. si MB est un sous-groupe parabolique de G, on note Δ_M l'ensemble des racines simples (simplement Δ si $M=A$), $\hat{\Delta}_M$ la base de $\mathfrak{a}_M$ duale de Δ_M, et pour $\alpha \in \Delta_M$, $\hat{\alpha}$ l'élément de $\hat{\Delta}_M$ qui lui correspond. On note R le réseau dans $\mathfrak{a}^G$ engendré par les $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}$, i.e. l'ensemble des $a \in \mathfrak{a}^G$ tels que $< \alpha,a > \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. On note τ_M, resp. $\hat{\tau}_M$ la fonction caractéristique des $a \in \mathfrak{a}$ (ou $\mathfrak{a}_M$) tels que $< \alpha,a >> 0$, resp. $< \hat{\alpha},a >> 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_M$. On note $\mathcal{P}(M)$, resp. $\mathcal{F}(M)$, l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de Lévi M, resp. contenant M, $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi contenant M.

Soit P un sous-groupe parabolique de G. On note N_P le radical unipotent de P, ρ_P la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre de Lie de N_P. On note simplement $N=N_B$, $\rho=\rho_B$. On note W le groupe de Weyl attaché à A.

Le cas échéant, tous les objets définis ci-dessus seront indicés par la lettre

G placée en exposant (à la notable exception de $\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}^G$ a été défini et est $\neq \mathfrak{a}$).

On munit K de la mesure de Haar de masse totale 1 et, pour tout sous-groupe parabolique P de G, M_P, resp. N_P, resp. le centre A_P de M_P, de la mesure de Haar pour laquelle la mesure de $M_P \cap K$, resp. $N_P \cap K$, resp. $A_P \cap K$ est 1.

On note G_e l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G.

On pose $\eta = \dfrac{2\pi i}{\log q}$.

2. Posons $\mathcal{X} = \mathbb{C}[X_1,\ldots, X_n, X_1^{-1},\ldots, X_n^{-1}]$ et soit $\mathcal{Z}$ une algèbre commutative munie d'une structure de $\mathcal{X}$-module. On note $\mathcal{K}_X^{\mathcal{Z}}$ l'espace des fonctions localement constantes $u : G \to \mathcal{Z}$ telles que

$$u(\underline{a}ng) = q^{-\langle\rho, h(\underline{a})\rangle} X^{h(\underline{a})} u(g)$$

pour tout $\underline{a} \in A$, $n \in N$, $g \in G$, où, pour $a = (a_1,\ldots, a_n) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, on pose $X^a = X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n}$. Soit $\pi(X)$ la représentation de G dans $\mathcal{K}_X^{\mathcal{Z}}$ par translations à droite. Soit $\mathcal{K}^{\mathcal{Z}}$ l'espace des fonctions localement constantes $u : B \cap K \backslash K \to \mathcal{Z}$. Par restriction à K, on peut identifier $\mathcal{K}_X^{\mathcal{Z}}$ et $\mathcal{K}^{\mathcal{Z}}$, et $\pi(X)$ à une représentation de G dans $\mathcal{K}^{\mathcal{Z}}$. C'est ce qu'on fera. Soit δ un automorphisme de $\mathcal{X}$. On peut tordre par δ la structure de $\mathcal{X}$-module de $\mathcal{Z}$ et obtenir de nouveaux objets qu'on note $\mathcal{K}_{\delta X}^{\mathcal{Z}}$, $\pi(\delta X)$. Par exemple on définit $\mathcal{K}_{X^{-1}}^{\mathcal{Z}}$, $\pi(X^{-1})$, et pour $w \in W$, $\mathcal{K}_{wX}^{\mathcal{Z}}$, $\pi(wX)$. L'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{Z}}$ est muni de la forme bilinéaire symétrique

$$\langle u_1,u_2 \rangle = \int_K u_1(k)u_2(k)\, dk$$

pour $u_1,u_2 \in \mathcal{K}^{\mathcal{Z}}$. Cette forme met en dualité les représentations $\pi(X)$ et $\pi(X^{-1})$. On note 1_K la fonction caractéristique de K et ω_X la fonction sphérique sur G

$$\omega_X(g) = \langle \pi(X,g)1_K, 1_K \rangle .$$

Soit $w \in W$. On a un opérateur d'entrelacement

$$\tilde{I}(w,X) : \mathcal{K}_X^{\mathcal{Z}} \to \mathcal{K}_{wX}^{\mathcal{Z}}$$

défini par la formule

$$\widetilde{I}(w,X)u(g) = \ell^n(w,X) \int_{wNw^{-1} \cap N \backslash N} u(w^{-1}ng)\, dn,$$

pour $u \in K_X^Z$, $g \in G$, où

$$\ell^n(w,X) = \prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0,w\alpha<0} (1-X^\alpha).$$

Quand pour tout $\alpha \in \Sigma$, $1-q^{-1}X^\alpha$ est inversible dans Z, on peut plutôt utiliser l'opérateur $I(w,X) = \ell_d(w,X)^{-1}\, \widetilde{I}(w,X)$, où

$$\ell_d(w,X) = \prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0,w\alpha<0} (1-q^{-1}X^\alpha).$$

On pose de plus

$$\ell(w,X) = \ell^n(w,X)\ell_d(w,X)^{-1}$$

Les opérateurs ci-dessus vérifient les relations

$$I(w,X)1_K = 1_K,\ I(ww',X) = I(w,w'X)I(w',X)$$

pour tous $w,w' \in W$. Les relations concernant les opérateurs $\widetilde{I}(w,X)$ s'en déduisent. Tous ces opérateurs peuvent être considérés comme des endomorphismes de K^Z.

Soit $s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. Munissons $z = \mathbb{C}$ de la structure de X-module définie par $X_i \to q^{-s_i}$. On note danc ce cas K_s, K, $\pi(s)$, etc... les objets notés ci-dessus K_X^Z, K^Z, $\pi(X)$ etc.. C'est très abusif mais on espère que cela ne crée pas de confusion.

3. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, notons $c(\ell)$ le produit de $q^{-\ell^2}$ par le nombre d'éléments de $GL(\ell,\mathbb{F}_q)$. On a $c(\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} (1-q^{-j})$. Posons $c^G = c(n_1)\ldots c(n_r)$.

Soit Z comme ci-dessus, M un sous-groupe de Lévi de G, $\gamma \in K$ un élément tel que $\gamma(M \cap B)\gamma^{-1} \subset B$. On peut définir un opérateur

$$R(M,\gamma) : K^{Z,G} \to K^{Z,M}$$

par $R(M,\gamma)u(k) = u(\gamma k)$ pour tous $u \in K^{Z,G}$, $k \in K^M$. Si M est standard, on note $W(M)$ l'ensemble des $w \in W$ de longueur minimale dans leur classe $W^M w$. Ils forment un système de représentants de $W^M \backslash W$. Enfin on note w^G l'élément de plus grande longueur de W.

Lemme 1.3.1. Soient P un sous-groupe parabolique standard, M son sous-groupe de Lévi, $u_1, u_2 \in K^Z$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la propriété suivante soit vérifiée. Soit $a \in \mathfrak{a}_{\mathbf{Z}}$ tel que pour tout $\alpha \in \Sigma^G - \Sigma^M$, $\alpha > 0$, on ait $<\alpha, a>> N$. Alors on a l'égalité

$$\gamma(X) <\pi(X,\underline{\omega}^a)u_1, u_2>^G = \sum_{w \in W(M)} q^{-<\rho_P, a>} \gamma(M,w,X) <\pi^M(wX,\underline{\omega}^a) \circ R(M,1) \circ \tilde{I}(w,X)u_1,$$

$$R(M, w^G w^M) \circ \tilde{I}(w^G w^M w, X^{-1})u_2>^M,$$

où

$$\gamma(M,w,X) = c^M(c^G)^{-1} \Big(\prod_{\alpha \in \Sigma^G, \alpha<0, w\alpha>0} (-X^\alpha) \Big) \Big(\prod_{\alpha \in \Sigma^M, \alpha<0} (1-(wX)^\alpha) \Big),$$

et

$$\gamma(X) = \gamma(G,1,X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^G, \alpha<0} (1-X^\alpha).$$

Démonstration. On se ramène d'abord à $Z = X$. On peut alors localiser et se ramener à $Z = \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$. On peut alors utiliser les opérateurs $I(w,X)$. Un calcul rapide nous ramène à démontrer l'assertion analogue où on remplace l'égalité par

$$(1) \quad <\pi(X,\underline{\omega}^a)u_1, u_2>^G = \sum_{w \in W(M)} q^{-<\rho_P, a>} \gamma'(M,w,X) <\pi^M(wX,\underline{\omega}^a) \circ R(M,1) \circ I(w,X)u_1,$$

$$R(M, w^G w^M) \circ I(w^G w^M w, X^{-1})u_2>^M,$$

où

$$\gamma'(M,w,X) = c^M(c^G)^{-1} \prod_{\alpha \in \Sigma^G - \Sigma^M, \alpha<0} (1-q^{-1}(wX)^\alpha)^{-1}(1-(wX)^\alpha)^{-1}.$$

On vérifie que pour $w \in W$, l'expression $\gamma'(M,w,X)$ comme le produit scalaire intervenant dans la somme ci-dessus ne dépendent que de la classe $W^M w$. On peut donc si on veut sommer sur $w \in W^M \backslash W$.

D'après [BZ] §2.11, le module de Jacquet normalisé $\pi^G(X)_{N_P}$ est composé des représentations $\pi^M(wX)$ pour $w \in W(M)$. Concrètement posons $K = (K^{Z,M})^{W(M)}$, munissons K de la représentation $\pi' = \bigoplus_{w \in W(M)} \pi^M(wX)$ de M. L'application

$$\begin{aligned} j : \mathcal{K}^{Z,G} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ u &\longrightarrow \bigoplus_{w\in W(M)} R(M,1)\circ I(w,X)u \end{aligned}$$

se factorise par le module de Jacquet et réalise l'isomorphisme $\pi^G(X)_{N_P} \cong \pi'$. De même, si on note $\bar{P}$ le sous-groupe parabolique opposé à P, l'application

$$\begin{aligned} \bar{j} : \mathcal{K}^{Z,G} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ u &\longrightarrow \bigoplus_{w\in W(M)} R(M,w^G w^M)\circ I(w^G w^M w,X^{-1})u \end{aligned}$$

réalise l'isomorphisme $\pi^G(X^{-1})_{N_{\bar{P}}} \cong \pi'$, où $\pi'' = \bigoplus_{w\in W(M)} \pi^M(wX^{-1})$.

D'après Casselman ([Ca] §4.2) il existe donc un produit scalaire $<\ ,\ >^\circ$ (à valeurs dans Z) sur $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ invariant par la représentation $\pi'\otimes\pi''$ tel que pour tous $u_1,u_2\in\mathcal{K}^{Z,G}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ vérifiant la propriété : soit $a\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, supposons $<\alpha,a>> N$ pour tout $\alpha\in\Sigma^G-\Sigma^M$, $\alpha>0$, alors on a l'égalité

$$< \pi(X,\underline{\omega}^a)u_1,u_2 >^G = q^{-<\rho_P,a>} < \pi^M(X,\underline{\omega}^a)\circ j(u_1),\bar{j}(u_2)>^\circ .$$

L'espace des produits scalaires invariants sur $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ se décrit aisément. On voit qu'il existe pour tout $w\in W(M)$ un élément $\gamma'(M,w,X)\in Z$ tels que

$$< u',u'' >^\circ = \sum_{w\in W(M)} \gamma'(M,w,X) < u'_w,u''_w >^M ,$$

pour tous $u' = \bigoplus_{w\in W(M)} u'_w, u'' = \bigoplus_{w\in W(M)} u''_w$ appartenant à $\mathcal{K}$. On en déduit l'égalité (1). Il reste à déterminer les constantes.

Soient I le groupe d'Iwahori usuel (triangulaire supérieur) et 1_I sa fonction caractéristique.

Lemme I.3.2. Soit $w\in W$. On a l'égalité

$$R(M,w^G w^M)\circ I(w^G w^M w,X)1_{I^G} = \begin{cases} q^{-\dim N_P}\,\ell(w^G w^M,X)1_{I^M}, & \text{si } w=1, \\ 0, & \text{si } w\notin W^M. \end{cases}$$

Admettons provisoirement ce lemme. Appliquons l'égalité (1) pour $u_2=1_{I^G}$. Le membre de droite vaut

$$(2)\quad q^{-<\rho_P,a>}\gamma'(M,1,X)q^{-\dim N_P}\,\ell(w^G w^M,X^{-1}) < \pi^M(X,\underline{\omega}^a)\circ R(M,1)u_1,1_{I^M} >^M .$$

Notons $u_{1,X}$ l'élément de K_X^Z associé à u_1. Le membre de gauche de l'égalité (1) vaut

(3) $\int_{K^G} u_{1,X}(k\underline{\omega}^a) 1_{I^G}(k)\, dk.$

On a la décomposition $I^G = N^+ I^M N^-$, où $N^+ = N_P \cap I^G$, $N^- = N_{\overline{P}} \cap I^G$. Munissons ici N^+ et N^- de mesures de masse totale 1. L'expression (3) vaut donc

$$c \int_{N^+ \times I^M \times N^-} u_{1,X}(n^+ k n^- \underline{\omega}^a)\, dn^-\, dk\, dn^+,$$

où $c = [K^G : I^G]^{-1} [K^M : I^M]$. Le terme n^+ disparait par invariance à gauche de $u_{1,X}$. Par hypothèse sur a, quitte à supposer l'entier N assez grand, $\underline{\omega}^{-a} n^- \underline{\omega}^a$ est dans un voisinage suffisamment petit de 1. Le terme en n^- disparait donc par constance locale de $u_{1,X}$. Il reste

$$c \int_{I^M} u_{1,X}(k\underline{\omega}^a)\, dk = c \int_{K^M} u_{1,X}(k\underline{\omega}^a) 1_{I^M}(k)\, dk$$

(4) $$= c\, q^{-\langle \rho_P, a\rangle} \langle \pi^M(X, \underline{\omega}^a) \circ R(M,1) u_1, 1_{I^M} \rangle .$$

En comparant les formules (2) et (4), on obtient

$$\gamma'(M,1,X) = q^{\dim N_P}\, c\ell(w^G w^M, X^{-1})^{-1}$$

qu'on calcule aisément.

Soient $w' \in W$, $u_1, u_2 \in K^{Z,G}$. On a

$$\langle \pi(X, \underline{\omega}^a) u_1, u_2 \rangle^G = \langle I(w',X) \circ \pi(X, \underline{\omega}^a) u_1, I(w', X^{-1}) u_2 \rangle^G$$

$$= \langle \pi(w'X, \underline{\omega}^a) \circ I(w',X) u_1, I(w', X^{-1}) u_2 \rangle^G.$$

C'est un terme du même type que le terme initial : on a remplacé u_2 par $I(w',X)u_1$, u_2 par $I(w',X^{-1})u_2$ et X par w'X. On a donc une égalité

$$\langle \pi(w'X, \underline{\omega}^a) \circ I(w',X) u_1, I(w',X^{-1}) u_2 \rangle^G = \sum_{w \in W^M \backslash W^G} q^{-\langle \rho_P, a\rangle} \gamma'(M,w,w'X) \langle \pi^M(ww'X, \underline{\omega}^a) \circ$$
$$R(M,1) \circ I(w,w'X) \circ I(w',X) u_1, R(M, w^G w^M) \circ I(w^G w^M w, w'X^{-1}) \circ I(w', X^{-1}) u_2 \rangle^M.$$

Remplaçons w par ww'^{-1}. On obtient

$$<\pi(X,\underline{\omega}^a)u_1,u_2>^G = \sum_{w\in W^M\backslash W} q^{-<\rho_P,a>} \gamma'(M,ww'^{-1},w'X)<\pi^M(wX,\underline{\omega}^a)\circ R(M,1)\circ I(w,X)u_1,$$

$$R(M,w^Gw^M)\circ I(w^Gw^M)\circ(w^Gw^Mw,X^{-1})u_2>^M.$$

En comparant avec la formule (1), on obtient

$$\gamma'(M,ww'^{-1}, w'X) = \gamma'(M,w,X),$$

pour tout $w\in W$, d'où $\gamma'(M,w,X) = \gamma'(M,1,wX)$, ce qui achève le calcul de $\gamma'(M,w,X)$.□

Démonstration du lemme 1.3.2. Posons $u=1_{I^G}$, soit u_X la fonction de K_X^Z qui lui correspond, posons $u'=R(M,w^Gw^M)\circ I(w^Gw^Mw,X)u$, $w°=w^Gw^M$ et $w'=w^Gw^Mw$. Alors pour $k\in K^M$

$$u'(k) = \ell(w',X)\int_{w'Nw'^{-1}\cap N\backslash N} u_X(w'^{-1}nw°k)\, dn.$$

Pour que le terme dans l'intégrale soit non nul, on doit avoir $w'^{-1}nw°k\in BI^G$, i.e.

(5) $$w'^{-1}nw°k(w°)^{-1} \in BI^G(w°)^{-1}.$$

Soit P' le sous-groupe parabolique standard de Lévi $M'=w°M(w°)^{-1}$. Alors $nw°k(w°)^{-1} \in P'$. De plus $I^G(w°)^{-1} \subset B(w°)^{-1}P'$. D'après la décomposition de Bruhat-Tits, la relation (5) implique donc $w'^{-1} \in (w°)^{-1}W^{M'}$, i.e. $w\in W^M$. D'où $u'=0$ si $w\notin W^M$. Supposons maintenant $w=1$. Alors $w'=w°$ et

$$u'(k) = \ell(w°,X)\int_{N_{\bar{P}}} u_X(nk)\, dn.$$

Soit $n\in N_{\bar{P}}$. Si $u_X(nk) \neq 0$, il existe $k' \in I^G$ tel que $nkk' \in B$. Il existe $n^+ \in N^+$, $n^- \in N^-$, $k'' \in I^M$ (cf. la démonstration précédente) tels que $k' = n^-k''n^+$. D'où $n(kn^-k^{-1})kk'' \in B$. Mais $n(kn^-k^{-1}) \in N_{\bar{P}}$, et $kk'' \in M$. On en déduit $n(kn^-k^{-1}) = 1$ et $kk''\in M\cap B=B^M$. D'où $n\in N^-$ et $k\in B^MI^M\cap K^M=I^M$. Réciproquement si $n\in N^-$ et $k\in I^M$, on a $u_X(nk)=1$. D'où

$$u'(k) = \begin{cases} 0, \text{ si } k \notin I^M, \\ \text{mes}(N^-)\ \ell(w°,X), \text{ si } k \in I^M, \end{cases}$$

et l'égalité de l'énoncé. □

4. Soient $C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions sur G à valeurs complexes, locale-

ment constantes, à support compact, $\mathcal{H}(G)$ le sous-espace des fonctions biinvariantes par K. Soient $f \in C_c^\infty(G)$, P un sous-groupe parabolique de G. On définit une fonction f^P sur M_P par

$$f^P(m) = \delta_P(m)^{1/2} \int_{K\times N_P} f(k^{-1}mnk)\, dn\, dk,$$

pour $m \in M_P$, où δ_P est la fonction module usuelle. On a $f^P \in C_c^\infty(M_P)$ et, si $f \in \mathcal{H}(G)$, $f^P \in \mathcal{H}(M_P)$. Soit X^W le sous-espace des éléments de X invariants par W. Pour $f \in \mathcal{H}(G)$, on définit $p_f(X) \in X$ par

$$p_f(X) = \sum_{a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}} f^B(\underline{\omega}^a) X^a.$$

L'application $f \to p_f$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(G)$ sur X^W. Soit $s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On pose $\tilde{f}(s) = p_f(q^{-s})$ avec une notation évidente. On a la formule d'inversion

$$f^B(\underline{\omega}^a) = \eta^{-n} \int q^{\langle s,a\rangle} \tilde{f}(s)\, ds$$

pour tout $a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, où on intègre sur $s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ un réel quelconque fixé, et modulo $\eta\, \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Dans la suite, on notera simplement $\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma}$ une telle intégrale.

On a la formule d'inversion beaucoup plus difficile

$$f(g) = d^G \eta^{-n} \int_{\mathrm{Re}(s)=0} \tilde{f}(s)\, \omega_s(g)\, \ell^G(s)\, ds,$$

([M] §5.1.2) où

$$d^G = c^G (n_1! \dots n_r!)^{-1} (1-q^{-1})^{-n},$$

$$\ell^G(s) = \sum_{\alpha \in \Sigma^G} (1-q^{-\langle s,\alpha\rangle})(1-q^{-1-\langle s,\alpha\rangle})^{-1}.$$

II. <u>LES INTÉGRALES ORBITALES</u>.

1. Soit $T \in \mathfrak{a}$. Posons $d(T) = \inf\{\langle\alpha,T\rangle\ ;\ \alpha \in \Delta\}$. On suppose $d(T) > 0$. On note $\mathbb{Z}$ le sous-espace diagonal de $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$. On pose

$$\mathfrak{a}(T) = \{a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\ ;\ \langle\alpha,a\rangle \geq 0,\ \langle\hat{\alpha},a-T\rangle \leq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta\},$$

et $\bar{\mathfrak{a}}(T) = (\mathfrak{a}(T)+\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. Plus généralement, soit D un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_G$ stable par $\mathbb{Z}$. On pose

$$\mathfrak{a}(D,T) = \{a\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\ ;\ a\in\mathfrak{a}(T)\ \text{et}\ a_G\in D\},$$

et $\bar{\mathfrak{a}}(D,T)=(\mathfrak{a}(D,T)+\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. On pose aussi

$$\mathfrak{a}'(D,T) = \{a\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\ ;\ <\hat{\alpha},a-T> > 0\ \text{pour tout}\ \alpha\in\Delta,\ \text{et}\ a_G\in D\},$$

et $\bar{\mathfrak{a}}'(D,T)=(\mathfrak{a}'(D,T)+\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. On note $Z(G)$ le sous-ensemble des éléments de A de composantes diagonales égales (c'est abusif car ce n'est le centre de G que si $G=GL(n,F)$). On note $G(T)$, resp. $G(D,T)$, l'image dans $G/Z(G)$ de

$$\bigcup_{a\in\mathfrak{a}(T)} K\underline{\omega}^a K,\ \text{resp.}\ \bigcup_{a\in\mathfrak{a}(D,T)} K\underline{\omega}^a K.$$

Posons comme en I.2 $\mathcal{X}=\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,X_1^{-1},\dots,X_n^{-1}]$, introduisons $\mathcal{Y}=\mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_n,Y_1^{-1},\dots,Y_n^{-1}]$, et $\mathcal{Z}=\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/I$, où I est l'idéal engendré par $X_1\dots X_n-Y_1\dots Y_n$. L'algèbre $\mathcal{Z}$ est un $\mathcal{X},\mathcal{Y}$-module. Posons $\mathcal{D}=\{[(m,\dots,m),(-m,\dots,-m)]\ ;\ m\in\mathbb{Z}\}\subset\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Un élément z, ou $z(X,Y)$, de $\mathcal{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$z = \sum_{(k,\ell)\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}} c_{k\ell}(z)X^kY^\ell,$$

avec $c_{k\ell}(z)\in\mathbb{C}$. Soient $S\subset(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$ un ensemble fini et $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Posons

$$V(S,\varepsilon) = \{z\in\mathcal{Z}\ ;\ \text{pour tous}\ (k,\ell)\in S,\ |c_{k\ell}(z)|<\varepsilon\}.$$

On munit $\mathcal{Z}$ de la topologie pour laquelle les ensembles $V(S,\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinage de 0. Autrement dit, on plonge $\mathcal{Z}$ dans son dual grâce à la forme bilinéaire

$$< z_1,z_2 > = c_{00}(z_1z_2),$$

et on munit $\mathcal{Z}$ de la topologie induite par la topologie faible du dual.

Attention : le produit n'est pas continu pour cette topologie. Par contre soient S un ensemble fini, $S\subset(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$, et $\mathcal{Z}_S$ l'ensemble des $z\in\mathcal{Z}$ tels que $c_{k\ell}(z)=0$ pour $(k,\ell)\notin S$. Munissons $\mathcal{Z}_S$ de la topologie induite. Alors le produit $\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}_S\to\mathcal{Z}$ est continu.

Remarquons que le produit $W\times W$ agit naturellement dans $\mathcal{Z}$.

2. Fixons T et D vérifiant les conditions de II.I. Nous supposerons de plus que D/Z est relativement compact dans $\mathfrak{a}_G/Z$. Posons

$$S(D,T,X,Y) = \sum_{a\in\overline{\mathfrak{a}'}(D,T)} \gamma(YX^{-1})X^aY^{-a}$$

(cf. lemme I.3.1 pour la définition de γ). Remarquons que pour $a\in\mathcal{D}$, $X^aY^{-a}=1$.

<u>Lemme II.2.1.</u> <u>La série</u> $S(D,T,X,Y)$ <u>est sommable dans</u> $\mathcal{Z}$.

<u>Démonstration.</u> Posons $Z_{\mathbb{Z}} = Z \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. La projection de $\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathfrak{a}_G/Z_{\mathbb{Z}}$ est un fermé discret. Comme D/Z est relativement compact dans $\mathfrak{a}_G/Z$, $D/Z_{\mathbb{Z}}$ l'est dans $\mathfrak{a}_G/Z_{\mathbb{Z}}$. L'intersection de la projection de $\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$ et de $D/Z_{\mathbb{Z}}$ est donc finie. Soit B un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$ se projetant bijectivement sur cette intersection. Alors B est fini et pour tout $b\in B$, l'ensemble des $a\in\mathfrak{a}'(D,T)$ ayant même projection que b est égal à l'ensemble des $a=b+a'+a''$, avec $a'\in\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$, $< \hat{\alpha},a'+b-T >> 0$ pour tout $\alpha\in\Delta$, et $a''\in Z_{\mathbb{Z}}$. D'où

$$S(D,T,X,Y) = \sum_{b\in B} X^bY^{-b} \sum_{a'\in\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}} \hat{\tau}(a'+b-T)\gamma(YX^{-1})X^{a'}Y^{-a'}$$

Fixons $b\in B$. Un élément de $\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$ s'écrit $a' = \sum_{\alpha\in\Delta} a'_\alpha\alpha$, avec $a'_\alpha\in\mathbb{Z}$. La condition $\hat{\tau}(a'+b-T)=1$ s'écrit $a'_\alpha > c_\alpha = < \hat{\alpha},T-b >$. Remarquons que γ s'écrit

$$\gamma = \gamma' \prod_{\alpha\in\Delta} (1-X^\alpha Y^{-\alpha}),$$

avec $\gamma'\in\mathcal{Z}$. Il suffit donc de démontrer la sommabilité de

$$\sum \Big[\prod_{\alpha\in\Delta} (1-X^\alpha Y^{-\alpha})\Big] X^{a'}Y^{-a'}$$

où on somme sur $a' = \sum_{\alpha\in\Delta} a'_\alpha\alpha$, $a'_\alpha\in\mathbb{Z}$, $a'_\alpha>c_\alpha$. On est immédiatement ramené à démontrer que pour tout $\alpha\in\Delta$, la série

$$\sum_{a\in\mathbb{Z},a>c} (1-X^\alpha Y^{-\alpha})X^{a\alpha}Y^{-a\alpha}$$

est sommable, ce qui est clair.□

Pour $i=0,\ldots, n-1$, posons $b(i)=(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ avec i termes égaux à 1.

<u>Lemme II.2.2.</u> <u>Supposons</u> $G=GL(n,F)$ <u>et</u> $D=Z$. <u>Il existe une application</u> $f : \{0,\ldots, n-1\} \to \mathfrak{a}^G_Z$ <u>telle que la propriété suivante soit vérifiée</u>. <u>Soit</u> $T\in\mathfrak{a}^G_Z$ <u>supposons</u> $d(T)>0$. <u>Alors</u>

$$S(Z,T,X,Y) = \sum_{i=0}^{n-1} (XY^{-1})^{f(i)+b(i)+T} \sum_{\alpha\in\Sigma-\Delta,\alpha>0} (1-X^{\alpha}Y^{-\alpha}).$$

Dans la suite on posera $e(i)=f(i)+b(i)$ pour $i=0,\ldots, n-1$.

Démonstration. Reprenons la démonstration précédente. On peut prendre $B = \{b(i)\ ;\ i = 0,\ldots, n-1\}$. Alors

$$S(Z,T,X,Y) = \sum_{i=0}^{n-1} (XY^{-1})^{b(i)} \sum_{a\in\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}} \hat{\tau}(a+b(i)-T)\gamma(YX^{-1})X^{a}Y^{-a}.$$

Pour $j=1,\ldots, n-1$, notons α_j la j-ième racine simple habituelle. Pour $a\in\mathfrak{a}^G$, posons $a = \sum_{j=1}^{n-1} a_j\alpha_j$. Les conditions $a\in\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$, $\hat{\tau}(a+b(i)-T)=1$ s'écrivent

(1) $a_j\in\mathbb{Z}$ pour tout j ;

(2) pour tout $j \geqslant i$, $a_j + \frac{i(n-j)}{n} - < \hat{\alpha}_j,T > \ > 0$;

(3) pour tout $j < i$, $a_j + \frac{j(n-i)}{n} - < \hat{\alpha}_j,T > \ > 0$.

Posons

$$f(i,j) = \begin{cases} \text{partie entière de } < \hat{\alpha}_j,T > - \frac{i(n-j)}{n} + 1, \text{ si } j \geqslant i. \\ \text{partie entière de } < \hat{\alpha}_j,T > - \frac{j(n-i)}{n} + 1, \text{ si } j < i. \end{cases}$$

Alors

$$S(Z,T,X,Y) = \left[\prod_{\alpha\in\Sigma-\Delta,\alpha>0} (1-X^{\alpha}Y^{-\alpha})\right]\sum_{i=0}^{n-1} (XY^{-1})^{b(i)} \prod_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{a\in\mathbb{Z},a\geqslant f(i,j)} (XY^{-1})^{a\alpha_j}(1-(XY^{-1})\alpha_j)\right]$$

La série intérieure vaut

$$(XY^{-1})^{f(i,j)\alpha_j},$$

d'où

$$S(Z,T,X,Y) = \prod_{\alpha\in\Sigma-\Delta,\alpha>o} (1-X^{\alpha}Y^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} (XY^{-1})^{f(i,T)+b(i)},$$

où $f(i,T) = \sum_j f(i,j)\alpha_j$. Comme $T\in\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$, on a $< \hat{\alpha}_j,T > \in \mathbb{Z}$ pour tout j, d'où $f(i,T)=T+f(i)$, avec un élément $f(i) \in \mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$ indépendant de T. D'où la formule de l'énoncé. □

3. Soient maintenant $T, U \in \mathfrak{a}$, supposons $d(U-T) \geqslant 0$, $d(T) > 0$. Pour un sous-groupe de Lévi standard M de G, notons $\nu(M,T,U)$ la fonction caractéristique des $a \in \mathfrak{a}$ tels que

$$< \alpha, a^M > \geqslant 0,\ < \hat{\alpha}, a^M > \leqslant < \hat{\alpha}, T^M > \text{ , pour tout } \alpha \in \Delta^M,$$

$$< \alpha, a_M > \, > \, < \alpha, T_M > \text{ , } < \hat{\alpha}, a_M > \leqslant < \hat{\alpha}, U_M >, \text{ pour tous } \alpha \in \Delta^G - \Delta^M.$$

<u>Lemme II.3</u>. <u>On a l'égalité</u>

$$\nu(G,U,U) = \sum_{M \subset G} \nu(M,T,U),$$

<u>sommé sur les sous-groupes de Lévi standards de G</u>.

<u>Démonstration</u>. Notons $\underline{\tau}$ et $\hat{\underline{\tau}}$ les fonctions obtenues quand on remplace dans les définitions de τ et $\hat{\tau}$, les inégalités strictes par les inégalités larges. Pour $a \in \mathfrak{a}$ et $M \subset G$, posons $\Gamma^M(a,T) = \tau^M(a)\hat{\underline{\tau}}^M(T-a)$ ([L] §1). Soit $\varepsilon \in \mathfrak{a}$, $d(\varepsilon) > 0$. D'après [L] §1, on a l'égalité $\sum_{M \subset G} \Gamma^M(a+\varepsilon, T+\varepsilon)\tau_M(a-T) = \tau(a+\varepsilon)$.
Multiplions cette égalité par $\underline{\tau}(a)\hat{\underline{\tau}}(U-a)$. On obtient

$$\sum_{M \subset G} \nu'(M,T,U)(a) = \nu'(U)(a),$$

où

$$\nu'(U)(a) = \underline{\tau}(a)\hat{\underline{\tau}}(U-a)\tau(a+\varepsilon),$$

$$\nu'(M,T,U)(a) = \underline{\tau}(a)\hat{\underline{\tau}}(U-a)\Gamma^M(a+\varepsilon, T+\varepsilon)\tau_M(a-T).$$

Evidemment $\underline{\tau}(a)\tau(a+\varepsilon) = \underline{\tau}(a)$, d'où $\nu'(U) = \nu(G,U,U)$. Nous allons montrer que pour tout M, $\nu'(M,T,U) = \nu(M,T,U)$. Le lemme en résultera. La fonction $\nu'(M,T,U)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $a \in \mathfrak{a}$ tels que

$$< \alpha, a^M > \geqslant 0,\ < \hat{\alpha}, a^M > \leqslant < \hat{\alpha}, T^M >,\ < \hat{\alpha}, a > \leqslant < \hat{\alpha}, U > \text{ , pour tous } \alpha \in \Delta^M,$$

$$< \alpha, a > \geqslant 0,\ < \alpha, a_M > \, > \, < \alpha, T_M >,\ < \hat{\alpha}, a_M > \leqslant < \hat{\alpha}, U_M > \text{ , pour tous } \alpha \in \Delta^G - \Delta^M.$$

Cet ensemble est inclus dans celui qui définit $\nu(M,T,U)$. Il faut montrer l'inclusion opposée, i.e. supposons $\nu(M,T,U)(a) = 1$, il faut montrer

(1) $\quad < \hat{\alpha}, a > \leqslant < \hat{\alpha}, U >$, pour tous $\alpha \in \Delta^M$,

(2) $\quad < \alpha, a > \geqslant 0$, pour tous $\alpha \in \Delta^G - \Delta^M$.

Soit $\alpha\in\Delta^M$. Ecrivons

$$\hat{\alpha} = \sum_{\beta\in\Delta^M} c(\beta,\alpha)\beta + \sum_{\beta\in\Delta^G-\Delta^M} c(\beta,\alpha)\hat{\beta},$$

avec des coefficients $c(\beta,\alpha)\in\mathbb{R}$. Montrons que $c(\beta,\alpha) \geqslant 0$ pour tout β. Soit $\beta\in\Delta^M$. On a $< \hat{\alpha}^M,\beta > = < \hat{\alpha},\beta > \geqslant 0$. Ainsi qu'il est bien connu cela implique $< \hat{\alpha}^M,\hat{\beta}^M > \geqslant 0$ pour tout $\beta\in\Delta^M$ (l'ensemble $\{\hat{\beta}^M ; \beta\in\Delta^M\}$ étant dual de Δ^M). D'où $c(\beta,\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\beta\in\Delta^M$. Soit $\gamma\in\Delta^G-\Delta^M$. On a $< \hat{\alpha},\gamma > = 0$, i.e.

$$c(\gamma,\alpha) + \sum_{\beta\in\Delta^M} c(\beta,\alpha) < \beta,\gamma > = 0.$$

Mais $c(\beta,\alpha) \geqslant 0$ et $< \beta,\gamma > \leqslant 0$ pour tout $\beta\in\Delta^M$, d'où $c(\gamma,\alpha) \geqslant 0$.

Alors

$$< \hat{\alpha},a-U > = < \hat{\alpha},a^M-U^M > + \sum_{\beta\in\Delta^G-\Delta^M} c(\beta,\alpha) < \hat{\beta},a_M-U_M > .$$

D'après ce qu'on vient de voir et par hypothèse sur a, la somme en β est $\leqslant 0$. De plus $< \hat{\alpha},a^M > \leqslant < \hat{\alpha},T^M >$. Donc

$$< \hat{\alpha},a-U > \leqslant < \hat{\alpha},T^M-U^M > = \sum_{\beta\in\Delta^M} c(\beta,\alpha) < \beta,T-U > .$$

D'après ce qu'on vient de voir et l'hypothèse $d(U-T) \geqslant 0$, ce dernier terme est $\leqslant 0$. D'où $< \hat{\alpha},a > \leqslant < \hat{\alpha},U >$ et la relation (1).

Soit maintenant $\alpha\in\Delta^G-\Delta^M$. Ecrivons

$$a-T = (a-T)_M + \sum_{\beta\in\Delta^M} c(\beta)\beta,$$

où $c(\beta) = <\hat{\beta},a^M-T^M>$. On a $c(\beta) \leqslant 0$. Comme $<\alpha,\beta> \leqslant 0$ pour tout $\beta\in\Delta^M$, on en déduit

$$< \alpha,a-T > \geqslant < \alpha,a_M-T_M > > 0.$$

Comme $< \alpha,T > \geqslant 0$, on obtient $< \alpha,a > > 0$ et la relation (2), ce qui achève la démonstration. □

4. Soient G comme en I.1, D,T comme en II.1. Pour $a\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, $u', u''\in K^Z$, posons $j_a(X,Y,u',u'') = \int_{K\underline{\omega}^a K} < \pi(X,g)1_K,u' > < \pi(Y^{-1},g)1_K,u'' > dg.$

Posons

$$J(D,T,X,Y,u',u") = \sum_{a\in\overline{\mathfrak{a}}(D,T)} j_a(X,Y,u',u").$$

Comme D/Z est relativement compact, cette somme est finie. Posons

$$\gamma(X,Y) = \prod_{w\in W} \gamma(XwY^{-1})$$

(cf. 1.3 pour la définition de γ). Remarquons que pour tous $w', w"\in W$, le rapport $\gamma(X,Y)/\gamma(w'X^{-1}w"Y)$ appartient à $\mathbb{Z}$. Pour $w\in W$, posons

$$\delta(w,X) = \prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0,w\alpha>0} (-X^{-\alpha})(1-q^{-1}X^{\alpha}).$$

<u>Proposition II.4</u>. <u>Soient</u> $u', u"\in K^Z$. <u>Il existe</u> $t>0$ <u>tel que</u>, <u>si</u> $d(T)>t$, <u>on ait</u> <u>l'égalité</u>

$$P(X,Y)J(D,T,X,Y,u',u") = \sum_{w',w"\in W} P(D,T,X,Y,w',w")\langle\tilde{I}(w',X^{-1})u',\tilde{I}(w",Y)u"\rangle,$$

<u>où</u>

$$P(X,Y) = \gamma(X,Y)\gamma(X)\gamma(Y^{-1}),$$

<u>et pour</u> $w',w"\in W$,

$$P(D,T,X,Y,w',w") = (c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n(-1)^{\mathrm{rg}\,G}\delta(w',X)\delta(w",Y^{-1})\frac{\gamma(X,Y)}{\gamma(w^Gw'X^{-1}w^Gw"Y)}$$

$$S(D,T,w^Gw'X,w^Gw"Y).$$

(cf. I.3) pour la définition de c^G ; w^G est l'élément de W de plus grande longueur).

<u>Démonstration</u>. (a) Supposons $\mathrm{rg}(G)=0$, i.e. G est un tore. Pour $a\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, on a

$$j_a(X,Y,u',u") = \int_K X^a u'(k)Y^{-a}u"(k)\,dk = X^aY^{-a}\langle u',u"\rangle.$$

De plus, comme $\mathfrak{a}^G = \{0\}$, on a $\overline{\mathfrak{a}}(D,T) = \overline{\mathfrak{a}}'(D,T)$, d'où

$$J(D,T,X,Y,u',u") = \langle u',u"\rangle \sum_{a\in\overline{\mathfrak{a}}'(D,T)} X^aY^{-a} = \langle u',u"\rangle S(D,T,X,Y).$$

C'est l'égalité de l'énoncé.

(b) Supposons $\mathrm{rg}(G)>0$. Par récurrence, on suppose la proposition vraie pour tout sous-groupe de Lévi propre de G. Soit $U\in\mathfrak{a}$, supposons $d(U-T)\geqslant 0$.

Soit M un sous-groupe de Lévi standard de G. Notons $\xi(M,D,T,U)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $a\in\mathfrak{a}$ tels que

$a_G\in D$,

$<\alpha,a^M> \geqslant 0$, $<\hat{\alpha},a^M> \leqslant <\hat{\alpha},T^M>$, pour tous $\alpha\in\Delta^M$,

$<\alpha,a_M> > <\alpha,T_M>$, $<\hat{\alpha},a_M> \leqslant <\hat{\alpha},U_M>$, pour tous $\alpha\in\Delta^G-\Delta^M$.

Pour M=G et T=U, cet ensemble n'est autre que $\mathfrak{a}(D,U)$. Par ailleurs, le lemme II.3 implique l'égalité

$$\xi(G,D,U,U) = \sum_{M\subset G} \xi(M,D,T,U).$$

Posons $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{Z}} = (\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}+Z)/Z$. Alors

$$P(X,Y)J(D,U,X,Y,u',u") = \sum_{a\in\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{Z}}} \xi(G,D,U,U)(a)j_a(X,Y,u',u")P(X,Y) = \sum_{M\subset G} J(M),$$

où

$$J(M) = \sum_{a\in\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{Z}}} P(X,Y)\xi(M,D,T,U)(a)j_a(X,Y,u',u").$$

(c) Pour M=G, on $\xi(G,D,T,U)=\xi(G,D,T,T)$, d'où l'égalité

$$J(G) = P(X,Y)J(D,T,X,Y,u',u").$$

(d) Soit M un Lévi standard de G. Supposons $rg(M)<rg(G)$. Nous voulons calculer $J(M)$. Soit $a\in\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{Z}}$. On a l'égalité

$$j_a(X,Y,u',u") = mes(K\underline{\omega}^aK) \int_K <\pi(X,\underline{\omega}^a)1_K,\pi(k)u'><\pi(Y^{-1},\underline{\omega}^a)1_K,\pi(k)u"> dk,$$

où on pose $\pi = \pi(X)_{|K}$ (cette représentation ne dépend pas de X). Supposons $\xi(M,D,T,U)(a)=1$. Soit $\alpha\in\Sigma^G-\Sigma^M$, $\alpha>0$. Il existe $\beta\in\Delta^G-\Delta^M$, telle que $\alpha-\beta$ soit une racine positive. Alors $<\alpha,a> \geqslant <\beta,a>$. Il résulte de la démonstration du lemme II.3 que $<\beta,a> \geqslant <\beta,T>$. D'où $<\alpha,a> \geqslant d(T)$. Comme les vecteurs $\pi(k)u'$, $\pi(k)u"$ parcourent un ensemble fini, il existe donc $t_1>0$ tel que si $d(T)>t_1$, les produits scalaires intervenant dans l'égalité ci-dessus soient calculés par le lemme I.3.1. On obtient l'égalité

$$\gamma(X)\gamma(Y^{-1})j_a(X,Y,u',u")=mes(K\underline{\omega}^aK) \sum_{w',w"\in W(M)} q^{-2<\rho_P,a>} \gamma(M,w',X)\gamma(M,w",Y^{-1})$$

$$\int_K H(w',X,u',k)H(w'',Y^{-1},u'',k)\,dk$$

où P est le sous-groupe parabolique standard de Lévi M et pour $u \in K^Z$, $w \in W$,

$H(w,X,u,k) = \langle \pi^M(wX,\underline{\omega}^a) \circ R(M,1) \circ \tilde{I}(w,X) 1_K, R(M,w^G w^M) \circ \tilde{I}(w^G w^M w, X^{-1}) \circ \pi(k) u \rangle^M$.

Remarquons que $R(M,1) \circ \tilde{I}(w,X) 1_K = \ell_d(w,X) 1_{K^M}$ (cf.I.2). Posons

$$u(w,k) = R(M,w^G w^M) \circ \tilde{I}(w^G w^M w, X^{-1}) \circ \pi(k) u.$$

Alors

$$H(w',X,u',k)H(w'',Y^{-1},u'',k) = \ell_d(w',X)\ell_d(w'',Y^{-1}) \quad \langle \pi^M(w',X,\underline{\omega}^a) 1_{K^M}, u'(w',k)\rangle^M$$
$$\langle \pi^M(w''Y^{-1},\underline{\omega}^a) 1_{K^M}, u''(w'',k)\rangle^M.$$

Il est clair que si $h \in K^M$, on a $u(w,hk) = \pi^M(h) u(w,k)$. D'où

$$\int_{K^M} H(w',X,u',hk)H(w'',Y^{-1},u'',hk)\,dh = \ell_d(w',X)\ell_d(w'',Y^{-1}) (\text{mes } K^M \underline{\omega}^a K^M)^{-1}$$

$$\int_{K^M \underline{\omega}^a K^M} \langle \pi^M(w'X,g) 1_{K^M}, u'(w',k)\rangle^M \langle \pi^M(w''Y^{-1},g) 1_{K^M}, u''(w'',k)\rangle^M \,dg$$

$$= (\text{mes } K^M \underline{\omega}^a K^M)^{-1} \ \ell_d(w',X)\ell_d(w'',Y^{-1}) j_a^M(w',X,w''Y,u'(w',k),u''(w'',k)).$$

On calcule aisément

$$(\text{mes } K\underline{\omega}^a K)(\text{mes } K^M \underline{\omega}^a K^M)^{-1} q^{-2\langle \rho_P, a\rangle} \gamma(M,w',X)\gamma(M,w'',Y^{-1})\ell_d(w',X)\ell_d(w'',Y^{-1}) =$$

$$c^M (c^G)^{-1} \gamma^M(w'X)\gamma^M(w''Y^{-1})\gamma_1(w',X)\gamma_1(w'',Y^{-1}),$$

$$\gamma_1(w,X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^G, \alpha > 0, w\alpha < 0} (-X^{-\alpha})(1-q^{-1}X^{\alpha}).$$

D'où l'égalité

$$\gamma(X)\gamma(Y^{-1}) j_a(X,Y,u',u'') = c^M(c^G)^{-1} \sum_{w',w'' \in W(M)} \gamma_1(w',X)\gamma_1(w'',Y^{-1}) \int_K \gamma^M(w'X)\gamma^M(w''Y^{-1})$$
$$j_a^M(w'X,w''Y,u'(w',k),u''(w'',k))\ dk$$

On en déduit l'égalité

$$J(M) = \gamma(X,Y) c^M (c^G)^{-1} \sum_{w',w'' \in W(M)} \gamma_1(w',X)\gamma_1(w'',Y^{-1})\gamma^M(w'X)\gamma^M(w''Y^{-1})$$

$$\int_K \sum_{a\in\bar{\mathfrak{a}}\mathbb{Z}} \xi(M,D,T,U)(a) j_a^M(w'X,w''Y,u'(w',k),u''(w'',k))\ dk.$$

Notons $D_M(T,U)$ l'ensemble des $a\in\mathfrak{a}_M$ tels que $a_G\in D$, $\langle\alpha,a-T\rangle > 0$ et $\langle\hat{\alpha},a-U\rangle \leqslant 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^G-\Delta^M$. On a alors l'égalité

$$\xi(M,D,T,U) = \xi^M(M,D_M(T,U),T,T).$$

La série en a dans l'expression ci-dessus vaut donc $J^M(D_M(T,U),T,w'X,w''Y,$ $u'(w',k),u''(w'',k))$. On obtient

$$(1)\quad J(M) = c^M(c^G)^{-1} \sum_{w',w''\in W(M)} \gamma_1(w',X)\gamma_1(w'',Y^{-1}) \frac{\gamma(X,Y)}{\gamma^M(w'X,w''Y)} \int_K P^M(w'X,w''Y)$$

$$J^M(D_M(T,U),T,w'X,w''Y,u'(w',k),u''(w'',k))\ dk.$$

On peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour calculer l'expression dans l'intégrale. Si $d(T)>t_2$, où t_2 ne dépend que de $u'(w',k)$ et $u''(w'',k)$, et donc en définitive que de u' et u", l'expression dans l'intégrale vaut

$$(2)\quad \sum_{\sigma',\sigma''\in W^M} P^M(D_M(T,U),T,w'X,w''Y,\sigma',\sigma'')\langle\tilde{I}(\sigma',w'X^{-1})u'(w',k),\tilde{I}(\sigma'',w''Y)u''(w'',k)\rangle^M .$$

Pour $w\in W(M)$, $\sigma\in W^M$, $u\in K^Z$ et $k\in K$, on calcule aisément

$$\tilde{I}(\sigma,wX^{-1})u(w,k) = R(M,w^Gw^M)\circ\pi(k)\circ\tilde{I}(v,X^{-1})u$$

où $v=w^Gw^M\sigma w$ (les facteurs de normalisation se compensent). Maintenant

$$\int_K \langle R(M,w^Gw^M)\circ\pi(k)\circ\tilde{I}(v',X^{-1})u',R(M,w^Gw^M)\circ\pi(k)\circ\tilde{I}(v'',Y)u''\rangle^M\ dk =$$

$$\int_{K\times K^M} \tilde{I}(v',X^{-1})u'(w^Gw^Mhk)\ \tilde{I}(v'',Y)u''(w^Gw^Mhk)\ dh\ dk =$$

$$(3)\qquad \langle\tilde{I}(v',X^{-1})u',\ \tilde{I}(v'',Y)u''\rangle^G.$$

En réunissant (1), (2) et (3), on obtient

$$J(M) = \sum_{v',v''\in W} Q(M,v',v'')\langle\tilde{I}(v',X^{-1})u',\ \tilde{I}(v'',Y)u''\rangle^G ,$$

où

$$Q(M,v',v'') = c^M(c^G)^{-1}\gamma_1(w',X)\gamma_1(w'',Y^{-1}) \frac{\gamma(X,Y)}{\gamma^M(w'X,w''Y)} P^M(D_M(T,U),T,w'X,w''Y,\sigma',\sigma''),$$

où w', σ', resp. w", σ", vérifient

$$v' = w^G w^M \sigma' w', \quad w" = w^G w^M \sigma" w"$$

(ils sont bien sûr uniques puisque w', w"$\in$W(M)). On calcule

$$Q(M,v',v") = (c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n\,\delta(v',x)\,\delta(w",Y^{-1})\,\frac{\gamma(X,Y)}{\gamma^M(w^G v' X^{-1}\; w^G v" Y)}\,(-1)^{\mathrm{rg}\,M}$$

$$S^M(D_M(T,U),T,w^G v' X, w^G v" Y).$$

(e) Réunissons les résultats de (b), (c) et (d). On obtient

$$(4)\quad P(X,Y)J(D,U,X,Y,u',u") = P(X,Y)J(D,T,X,Y,u',u") + \sum_{v',v"\in W}$$

$$< \tilde{I}(v',X^{-1})u', \tilde{I}(v",Y)u" >^G \sum_{M\subsetneq G} Q(M,v',v").$$

D'après l'expression ci-dessus de Q(M,v',v"), et la définition des séries S^M, on obtient

$$(5)\quad \sum_{M\subsetneq G} Q(M,v',v") = (c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n\delta(v',X)\delta(v",Y^{-1}) \sum_{a\in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}} \gamma(X,Y) w^G v' X^a w^G v" Y^{-a}$$

$$\sum_{M\subsetneq G} (-1)^{\mathrm{rg}\,M}\chi(M)(a),$$

où $\chi(M)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $a\in\mathfrak{a}$ tels que

$a_G\in D$,

$< \alpha, a_M - T_M \gg 0$, $< \hat{\alpha}, a_M - U_M > \leqslant 0$, pour $\alpha\in\Delta^G-\Delta^M$,

$< \hat{\alpha}, a^M - T^M \gg 0$ pour tout $\alpha\in\Delta^M$.

Autrement dit, si on note 1_D la fonction caractéristique de D dans $\mathfrak{a}_G$, on a

$$\chi(M)(a) = 1_D(a_G)\Gamma_M^G(a-T,U-T)\hat{\tau}^M(a-T),$$

où $\Gamma_M^G(a',T') = \tau_M^G(a'-T')\hat{\underline{\tau}}(T'-a')$. D'après [L] §1, on a l'égalité

$$\sum_{M\subsetneq G} (-1)^{\mathrm{rg}\,M}\chi(M)(a) = 1_D(a_G)(-1)^{\mathrm{rg}\,G}[\hat{\tau}^G(a-U)-\hat{\tau}^G(a-T)].$$

Mais la fonction $a\mapsto 1_D(a_G)\hat{\tau}^G(a-U)$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{a}'(D,U)$. On obtient alors

$$\sum_{a\in\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{Z}}} \gamma(X,Y) w^G v' X^a w^G v'' Y^{-a} \sum_{M\subsetneq G} (-1)^{\mathrm{rg}\, M} \chi(M)(a) = (-1)^{\mathrm{rg}\, G} \frac{\gamma(X,Y)}{\gamma(w^G v'' Y\ w^G v' X^{-1})}$$

$$[\, S(D,U,w^G v' X, w^G v'' Y) - S(D,T,w^G v' X, w^G v'' Y)\,] .$$

Grâce à (5), on obtient alors

$$(6) \qquad \sum_{M\subsetneq G} Q(M,v',v'') = P(D,U,X,Y,v',v'') - P(D,T,X,Y,v',v'') .$$

Notons $\Delta(D,T,X,Y,u',u'')$ la différence entre le premier et le second membre de l'énoncé. Les relations (4) et (6) impliquent

$$\Delta(D,U,X,Y,u',u'') = \Delta(D,T,X,Y,u',u'') .$$

Cela pour $d(U-T) \geqslant 0$ et $d(T) > t$, où t ne dépend que de u' et u''. On en déduit que $\Delta(D,T,X,Y,u',u'')$ est indépendant de T quand $d(T) > t$. Notons $\Delta(D,X,Y,u',u'')$ cette valeur "limite".

(f) Lemme II.4. Soient $u',u''\in K^Z$, $g\in G^\circ$. On a l'égalité

$$\Delta(D,X,Y,\pi(X^{-1},g)u',\pi(Y,g)u'') = \Delta(D,X,Y,u',u'') .$$

Démonstration. Notons Δ_1, resp. Δ_2, le membre de gauche, resp. de droite, de l'égalité de l'énoncé. Soit $(k,\ell) \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$. Nous voulons montrer que $c_{k\ell}(\Delta_1) = c_{k\ell}(\Delta_2)$ (cf.II.1). Il existe $t_1>0$ tel que si $d(T)>t_1$, on a

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta_1 = \Delta(D,T,X,Y,\pi(X^{-1},g)u',\pi(Y,g)u'') . \\ \Delta_2 = \Delta(D,T,X,Y,u',u'') . \end{cases}$$

Soient $w',w''\in W$, posons $P(w',w'') = P(D,T,X,Y,w',w'') < \tilde{I}(w',X^{-1})u', \tilde{I}(w'',Y)u'' >$. D'après les définitions de tous ces termes, il existe un ensemble fini $S\subset (\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$ tel que $c_{k\ell}(P(w',w''))=0$ sauf s'il existe $(k',\ell')\in S$ tel que $\tau(w^G w'(k+k')-T)=1$, $\tau(w^G w''(\ell+\ell')-T)=1$. Mais (k,ℓ) étant fixé, il est clair que cette condition ne peut pas être vérifiée si $d(T)$ est assez grand. Il existe donc $t_2>0$ tel que si $d(T)>t_2$, on ait $c_{k\ell}(P(w',w''))=0$ pour tous w', $w''\in W$. Supposons $t_2>t_1$. Il résulte de (7) et de la définition de la fonction Δ que pour $d(T)>t_2$, on a $c_{k\ell}(\Delta_2)=c_{k\ell}(P(X,Y)J_2)$, où $J_2=J(D,T,X,Y,u',u'')$. On montre de même qu'il existe $t_3>0$ tel que si $d(T)>t_3$, on a $c_{k\ell}(\Delta_1)=c_{k\ell}(P(X,Y)J_1)$, où $J_1 = J(D,T,X,Y,\pi(X^{-1},g)u',\pi(Y,g)u")$. Par définition

$$J_2 = \int_{G(D,T)} < \pi(X,h)1_K,u' >< \pi(Y^{-1},h)1_K,u" > dh$$

(cf. II.1 pour la définition de $G(D,T)$),

$$J_1 = \int_{G(D,T)} < \pi(X,h)1_K,\ \pi(X^{-1},g)u' > < \pi(Y^{-1},h)1_K,\ \pi(Y,g)u" > dh,$$

$$= \int_{G(D,T)} < \pi(X,g^{-1}h)1_K,u' > < \pi(Y^{-1},g^{-1}h)1_K,u" > dh$$

$$= \int_{g^{-1}G(D,T)} < \pi(X,h)1_K,u' > < \pi(Y^{-1},h)1_K,u" > dh.$$

Psons $\Gamma_1 = g^{-1}G(D,T) - (g^{-1}G(D,T) \cap G(D,T))$, $\Gamma_2 = G(D,T) - (g^{-1}G(D,T) \cap G(D,T))$ et pour $i=1,2$

$$L_i = \int_{\Gamma_i} < \pi(X,h)1_K,u' > < \pi(Y^{-1},h)1_K,u" > dh.$$

Supposons démontrée l'assertion

(8) il existe $t' > 0$ tel que si $d(T) > t'$, on a $c_{k\ell}(P(X,Y)L_i) = 0$ pour $i = 1,2$.

Prenons alors T tel que $d(T) > \sup(t_2,t_3,t')$. Alors

$$c_{k\ell}(\Delta_1-\Delta_2) = c_{k\ell}(P(X,Y)(J_1-J_2)).$$

Mais $J_1-J_2 = L_1-L_2$, d'où $c_{k\ell}(P(X,Y)(J_1-J_2)) = c_{k\ell}(P(X,Y)(L_1-L_2)) = 0$, et $c_{k\ell}(\Delta_1) = c_{k\ell}(\Delta_2)$ ce qu'on voulait démontrer.

Il reste à démontrer (8). On va d'abord montrer

(9) il existe $t>0$ tel que si $d(T) > t$, pour tout $a \in \mathfrak{a}$ vérifiant $\underline{\tau}(a) = 1$, $\hat{\underline{\tau}}(T-a) = 0$, et tout $h \in K\underline{\omega}^a K$, on a l'égalité

$$c_{k\ell}(P(X,Y) < \pi(X,h)1_K,u' > < \pi(Y^{-1},h)1_K,u" > = 0$$

Quitte à modifier u' et $u"$ par des éléments de K, ce qui est loisible, on peut supposer $h = \underline{\omega}^a$. Soit donc a vérifiant $\underline{\tau}(a) = 1$, $\hat{\underline{\tau}}(T-a) = 0$. Appliquons le lemme II.3 avec $d(U)$ tendant vers l'infini. On a $\nu(G,U,U)(a) = 1$, mais $\nu(G,T,U)(a) = 0$. Il existe donc $M \subset G$, $M \neq G$ tel que $\nu(M,T,U)(a) = 1$. Comme au (d), on obtient une égalité entre

$$P(X,Y) < \pi(X,\underline{\omega}^a)1_K,u' > < \pi(Y^{-1},\underline{\omega}^a)1_K,u'' >$$

et une somme

$$\sum_{w',w''\in W} z(w',w'')q^{-2<\rho_P,a>} <\pi^M(w'X,\underline{\omega}^a)1_{K^M},u'(w')>^M <\pi^M(w''Y^{-1},\underline{\omega}^a)1_{K^M},u''(w'')>^M$$

où $z(w',w'')\in\mathcal{Z}$, $u'(w')\in K^{Z,M}$ sont indépendants de a ; cela pourvu que d(T) soit plus grand qu'un nombre ne dépendant que de u' et u". Considérons un terme $<\pi^M(X,\underline{\omega}^a)1_{K^M},u>^M$, avec $u\in K^{Z,M}$. Par définition de π^M, il existe un ensemble fini $S\subset(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$ tel que pour tous $(k',\ell')\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$, on ait $c_{k'\ell'}(<\pi^M(X,\underline{\omega}^a)1_{K^M},u>^M)=0$ sauf s'il existe $(k'',\ell'')\in S$ tel que $\ell'=\ell''$, $k'_M=a_M+k''_M$. On en déduit qu'il existe un ensemble fini $S\subset(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})/\mathcal{D}$ tel que $c_{k\ell}(P(X,Y)\ <\pi(X,\underline{\omega}^a)1_K,u'>\ <\pi(Y^{-1},\underline{\omega}^a)1_K,u''>)=0$ sauf s'il existe $(k',\ell')\in S$, $w',w''\in W$ tels que

$$k_M=w'^{-1}a_M+k'_M,\ \ell_M=-w''^{-1}a_M+\ell'_M.$$

Comme $M\neq G$, $\Delta^G\neq\Delta^M$. Soit $\alpha\in\Delta^G-\Delta^M$. Comme $\nu(M,T,U)(a)=1$, on a $<\alpha,a_M>><\alpha,T_M>$. On vérifie que $<\alpha,T_M>\gg<\alpha,T>$. Alors $<\alpha,a_M>>d(T)$ et la relation ci-dessus implique

$$<\alpha,w'k_M-w'k'_M>>d(T),$$

$$<\alpha,-w''\ell_M+w''\ell'_M>>d(T).$$

Evidemment si d(T) est assez grand ces conditions ne sont pas vérifiées, et on a bien l'égalité affirmée en (9).

Fixons $T°\in\mathfrak{a}$, $d(T°)>t$, où t est comme en (9). Il existe $t'>0$ tel que si $d(T)>t'$, on ait

(10) $\quad d(T-T°)>0,$

(11) $\quad gG(T°)\subset G(T).$

Supposons $d(T)>t'$, soit $h\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$, a tel que $\underline{\tau}(a)=1$ et $h\in K\underline{\omega}^aK$. Montrons qu'on a

(12) $\quad \hat{\underline{\tau}}(T°-a)=0.$

Supposons au contraire $\hat{\underline{\tau}}(T°-a)=1$. Alors $h\in G(T°)$. D'après (10), on a $h\in G(T)$; d'après (11), on a $gh\in G(T)$. Soit a' tel que $\underline{\tau}(a')=1$ et $gh\in K\underline{\omega}^{a'}K$. Comme $g\in G°$, on a $a'_G=a_G$. Comme $h\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$, on a $h\in G(D,T)$ ou $gh\in G(D,T)$ et en particulier $a_G(=a'_G)\in D$.

Les conditions $a_G \in D$, $h \in G(T)$, resp. $a'_G \in D$, $gh \in G(T)$, impliquent $h \in G(D,T)$, resp. $gh \in G(D,T)$. Donc $h \in G(D,T) \cap g^{-1}G(D,T)$. Mais cet ensemble est disjoint de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. contradiction.

Maintenant (9), (12) et la définition des L_i montrent que pour $d(T) > t'$, on a $c_{k\ell}(P(X,Y)L_i) = 0$ pour $i = 1,2$; i.e. on a démontré (8) et le lemme. □

(g) Soit $B : K^Z \times K^Z \to Z$ une application Z-bilinéaire. Supposons que

$$B(\pi(X^{-1},g)u', \pi(Y,g)u") = B(u',u")$$

pour tous $u', u" \in K^Z$ et $g \in G^\circ$. Si $B \neq 0$, il résulte de la classification des représentations du groupe linéaire qu'il existe $w \in W$ tel que $X^\alpha = (wY)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Mais l'idéal des relations entre X et Y est engendré par $X_1 \dots X_n - Y_1 \dots Y_n$. Il ne contient aucune des relations ci-dessus (remarquons que $\Delta \neq \emptyset$ car on a supposé $rg(G) \geqslant 1$). Contradiction. Donc $B=0$. On applique cela à l'application $B(u',u") = \Delta(D,X,Y,u',u")$. Donc $\Delta(D,X,Y,u',u") = 0$ pour tous $u',u"$, i.e. pour tous $u',u"$, il existe $t > 0$ tel que si $d(T) > t$, on a $\Delta(D,T,X,Y,u',u") = 0$. C'est l'énoncé de la proposition II.4. □

5. Nous supposerons désormais $G = GL(n,F)$, $D = Z$, $T \in \mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$. Soient $s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in C^\infty_c(G)$. Posons

$$I(T,s,\varphi) = \int_{G(T)\times G} \omega_s(g^{-1}hg)\varphi(h)\, dh\, dg,$$

$$\gamma(s) = \prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0} (1-q^{<\alpha,s>}) \quad (=\gamma(q^{-s}) \text{ avec la notation de I.3}) ;$$

$$\delta(s) = \prod_{\alpha\in\Sigma,\alpha>0} (1-q^{-<\alpha,s>-1}),$$

$$\tilde{\theta}(s) = \prod_{\alpha\in\Delta} (1-q^{-<\alpha,s>}) ;$$

pour $\sigma, w \in W$ et $s' \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$

$$r_1^\sigma(w,s,s',\varphi) = \mathrm{Trace}\,[\,I(w^{-1},ws)I(w\sigma,s')\,\pi(s,\varphi)]$$

(ces opérateurs agissent tous dans K),

$$r_2^\sigma(w,s,s')=(c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n(-1)^{\mathrm{rg}\, G}\Big[\prod_{\alpha>0,w\alpha>0}(-q^{<\alpha,s>})\Big]\Big[\prod_{\alpha>0,w\sigma\alpha>0}(-q^{-<\alpha,s'>})\Big]$$

$$\delta(ws)\delta(-w\sigma s')\sum_{i=0}^{n-1} q^{<\sigma s'-s,w^{-1}w^G e(i)>},$$

$$r_3^\sigma(T,w,s,s')=q^{<\sigma s'-s,w^{-1}w^G T>}$$

Posons

$$q^\sigma(T,w,s,s',\varphi)=r_1^\sigma(w,s,s'\varphi)\ r_2^\sigma(w,s,s')\ r_3^\sigma(T,w,s,s').$$

Proposition II.5. Soit $\varphi\in C_c^\infty(G)$. Il existe $t>0$ tel que si $T\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^G$ et si $d(T)>t$, alors pour tout $s\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, le nombre de droite de l'égalité ci-dessous est défini et on a l'égalité

$$\gamma(s)\gamma(-s)I(T,s,\varphi)=\lim_{s'\to s}\sum_{\sigma\in W}\sum_{w\in W} q^\sigma(T,w,s,s',\varphi)\ \tilde\theta(w(\sigma s'-s))^{-1}.$$

Démonstration. Pour $u',u''\in K$, posons

$$J(T,s,u',u'')=\int_{G(T)}<\pi(s,g)1_K,u'>\ <\pi(-s,g)1_K,u''>\ dg.$$

On peut calculer $J(T,s,u',u'')$ en remplaçant X par q^{-s}, Y par $q^{-s'}$ dans $J(Z,T,X,Y,u',u'')$ puis en faisant tendre s' vers s. Mais $J(Z,T,X,Y,u',u'')$ est calculée par la proposition II.4 et le lemme II.2.2. Le membre de droite de l'égalité de la propistion II.4 contient une somme en w', $w''\in W$. On la remplace par une somme en $\sigma,w\in W$, en posant $w'=w$, $w''=w\sigma$. De plus on remplace les opérateurs $\tilde I$ par les opérateurs normalisés I. On utilise enfin le fait que l'opérateur adjoint de $I(w,-s)$ est $I(w^{-1},ws)$. On obtient tous calculs faits

$$(1)\quad \gamma(s)\gamma(-s)J(T,s,u',u'')=\lim_{s'\to s}\sum_{\sigma\in W}\sum_{w\in W} q^\sigma(T,w,s,s',u',u'')\tilde\theta(w(\sigma s'-s))^{-1},$$

où

$$q^\sigma(T,w,s,s',u',u'')=r_2^\sigma(w,s,s')r_3^\sigma(T,w,s,s')<u',I(w^{-1},ws)I(w\sigma,s')u''>$$

Cela pour $d(T)$ supérieur à un nombre ne dépendant que de u' et u''. Fixons une base orthonomée $\{u_i;i\in I\}$ de K. Pour g, $h\in G$, on a

$$\omega_s(g^{-1}hg)=<\pi(s,g^{-1}hg)1_K,1_K>=<\pi(s,h)\ \pi(s,g)1_K,\pi(-s,g)1_K>.$$

En écrivant

$$\pi(s,g)1_K = \sum_{i\in I} <\pi(s,g)1_K,u_i> u_i \ ,$$

et de même pour $\pi(-s,g)1_K$, on obtient

$$\omega_s(g^{-1}hg) = \sum_{i,j\in I} <\pi(s,g)1_K,u_i> <\pi(s,h)u_i,u_j> <\pi(-s,g)1_K,u_j> \ .$$

D'où

$$I(T,s,\varphi) = \sum_{i,j\in I} \int_{G(T)} <\pi(s,g)1_K,u_i> <\pi(-s,g)1_K,u_j> \, dg \int_G <\pi(s,h)u_i,u_j> \varphi(h) \, dh$$

$$(2) \qquad = \sum_{i,j\in I} J(T,s,u_i,u_j) <\pi(s,\varphi)u_i,u_j>.$$

Comme φ est localement constante il existe un sous-espace K_1, resp. K_2, de dimension finie, resp. de codimension finie, tel que $\pi(s,\varphi)K \subset K_1$, resp. $\pi(s,\varphi)K_2=\{0\}$ pour tout $s\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. En choisissant convenablement la base orthonormée $\{u_i\}$, l'ensemble des couples $(i,j)\in I\times I$ tels que $<\pi(s,\varphi)u_i,u_j> \neq 0$ est fini. Il existe alors $t>0$ tel que pour $d(T)>t$ et pour (i,j) l'un de ces couples, $J(T,s,u_i,u_j)$ soit calculé par la formule (1). Remplaçons $J(T,s,u_i,u_j)$ par sa valeur dans la formule (2). En remarquant que

$$\sum_{i,j\in I} < u_i, I(w^{-1},ws)I(w\sigma,s')u_j > < \pi(s,\varphi)u_i,u_j > = \mathrm{Trace}\,[\, I(w^{-1},ws)I(w\sigma,s')\pi(s,\varphi)]$$

on obtient l'égalité de l'énoncé. □

6. Modifions nos notations. Pour $P\in\mathcal{P}(A)$, notons K_P l'espace des fonctions localement constantes sur $K\cap P\backslash K$, à valeurs complexes. Pour $s\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, on peut prolonger $u\in K_P$ en une fonction $u_s : G \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$u_s(\underline{a}ng) = q^{-<\rho_P+s,h(\underline{a})>} u_s(g)$$

pour tous $g\in G$, $\underline{a}\in A$, $n\in N_P$. Pour $g\in G$, on note $\pi_P(s,g)$ l'opérateur de K_P défini par $[\pi_P(s,g)u](k)=u_s(kg)$ pour tous $u\in K_P$, $k\in K$. Si $\varphi\in C_c^\infty(G)$ on définit de même $\pi_P(s,\varphi)$. Soient $P,P'\in\mathcal{P}(A)$, $w\in W$, $s\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On définit un opérateur d'entrelacement $I_{P'|P}(w,s):K_P \to K_{P'}$ par

$$[\, I_{P'|P}(w,s)u](k)=\ell_{P'|P}(w,s)\int_{wN_Pw^{-1}\cap N_{P'}\backslash N_{P'}} u_s(w^{-1}nk)\, dn$$

pour tous $u\in K_{P'}$, $k\in K$, où $\ell_{P'|P}(w,s)$ est le facteur de normalisation tel que $I_{P'|P}(w,s)1_K=1_K$ ([A1] §1,2). On notera simplement $I_{P'|P}(s)=I_{P'|P}(1,s)$.

Fixons $\varphi\in C_c^\infty(G)$, $s\in i\mathfrak{a}$. Pour $P\in\mathcal{P}(A)$, on définit une fonction $R_P(s,\varphi,.)$ sur $i\mathfrak{a}$ par

$$R_P(s,\varphi,\mu) = \text{Trace}\,[\,I_{B|P}(s)I_{P|B}(s+\mu)\pi_B(s,\varphi)]$$

pour $\mu\in i\mathfrak{a}$ (l'opérateur entre crochets est un endomorphisme de K_B). Plus généralement, soit L un sous-groupe de Lévi de G, $\sigma\in W^L$, supposons vérifiée la condition

(★) $\sigma s-s\in\eta R$

(cf.I.1 pour les définitions de η et R). Pour $P\in\mathcal{P}(L)$, on définit une fonction $R_P(s,\varphi,\sigma,.)$ sur $i\mathfrak{a}_L$ par

$$R_P(s,\varphi,\sigma,\mu) = \text{Trace}\,[\,I_{B|P'}(s)I_{P'|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)]$$

pour $\mu\in i\mathfrak{a}_L$, où P' est un parabolique minimal inclus dans P. L'opérateur ci-dessus ne dépend pas du choix de P': si P" est un autre parabolique vérifiant les mêmes conditions que P', on a

$I_{B|P''}(s)I_{P''|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)=I_{B|P'}(s)I_{P'|P''}(s)I_{P''|P'}(\sigma(s+\mu))I_{P'|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)$.

Or l'opérateur $I_{P'|P''}(s')$, pour $s'\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, ne dépend que des $q^{\langle\alpha,s'\rangle}$, pour $\alpha\in\Sigma^L$. Pour $\alpha\in\Sigma^L$, on a $\langle\alpha,\sigma\mu\rangle=0$ car $\sigma\mu=\mu\in i\mathfrak{a}_L$, et $\langle\alpha,\sigma s\rangle=\langle\alpha,s\rangle \bmod \eta\,\mathbb{Z}$ car $\sigma s-s\in R$. D'où $I_{P''|P'}(\sigma(s+\mu))=I_{P''|P'}(s)$ et les termes dépendant de P" dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus disparaissent. On obtient l'égalité cherchée.

Un raisonnement analogue montre que les fonctions $R_P(s,\varphi,\sigma,.)$, $P\in\mathcal{P}(L)$, forment une (G,L)-famille, i.e. $R_P(s,\varphi,\sigma,.)$ est C^∞ sur $i\mathfrak{a}_L$ et si P et P' sont deux éléments adjacents de $\mathcal{P}(L)$, si $\alpha\in\Sigma_L$ est l'une des deux racines (l'autre est $-\alpha$) séparant P et P', si $\mu\in i\mathfrak{a}_L$ vérifie $\langle\alpha,\mu\rangle=0$, alors $R_P(s,\varphi,\sigma,\mu)=R_{P'}(s,\varphi,\sigma,\mu)$ (cf. [A2] §6). Soient Q un sous-groupe parabolique de G, de Lévi M, L' un sous-groupe de Lévi de M. On suppose $L\subset L'\subset M$. On déduit de notre (G,L)-famille une (M,L')-famille $\{R_P^Q(s,\varphi,\sigma,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}^M(L')\}$. Rappelons que de toute (M,L')-famille

$\{c_P;P\in\mathcal{P}^M(L')\}$, on déduit une fonction $c_{L'}$ sur $i\mathfrak{a}_{L'}$ ([A2] lemme 6.2). En particulier on a des fonctions $R^G_L(s,\varphi,\sigma,.)$, $R^G_A(s,\varphi,.)$. On pose

$$R^G_L(s,\varphi,\sigma) = R^G_L(s,\varphi,\sigma,0) \text{ et } R^G_A(s,\varphi) = R^G_A(s,\varphi,0).$$

Rappelons qu'on note G_e l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G.

Lemme II.6. Soient $\varphi\in C^\infty_c(G)$, $s\in i\mathfrak{a}$, L un sous-groupe de Lévi de G, $\sigma\in W^L$, supposons vérifiée la condition (★). Soient Q un sous-groupe parabolique de G de Lévi M, L' un sous-groupe de Lévi de M. On suppose $L \subset L'$. Soient $\{d_P;P\in\mathcal{P}^M(L')\}$ une (M,L')-famille, $\{c^Q_P=d_PR^Q_P(s,\varphi,\sigma,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}^M(L')\}$ la famille produit. Supposons $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset G_e$. Alors

(a) si $(Q,L') \neq (G,L)$, $c^Q_{L'}(0) = 0$;

(b) si $(Q,L') = (G,L)$, $c^G_L(0) = dR^G_L(s,\varphi,\sigma)$, où d est la valeur commune $d_P(0)$ pour $P\in\mathcal{P}(L)$.

Démonstration. (1) Montrons d'abord : si $Q\neq G$, $R^Q_{L'}(s,\varphi,\sigma)=0$. Le groupe B intervient dans la définition de R_P. Mais le même raisonnement qu'en [A2] §7 montre que $R^Q_{L'}(s,\varphi,\sigma)$ est indépendant du choix de ce sous-groupe de Borel. Quitte à changer B, on peut supposer Q, L' et L standards. Il résulte alors des définitions que pour tout $P'\in\mathcal{P}(A)$ avec $P' \subset Q$, et $\mu\in i\mathfrak{a}$, il existe une distribution D sur Q, invariante à droite par $B \cap K$ telle que pour tous $u\in K_B$, $k\in K$, on ait la relation

$$[I_{B|P'}(s)I_{P'|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)u](k) = \int_K u(k')\int_Q \varphi(k^{-1}qk')D(q)\,dq\,dk'.$$

D'où

$$\mathrm{Trace}\,[I_{B|P'}(s)I_{P'|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)] = \int_K\int_Q \varphi(k^{-1}qk)D(q)dq\,dk.$$

Mais pour $q\in Q$ et $k\in K$, $k^{-1}qk$ n'est jamais elliptique donc $\varphi(k^{-1}qk)=0$ et la trace ci-dessus est nulle. A fortiori $R^Q_{L'}(s,\varphi,\sigma)=0$.

(2) Supposons $(Q,L')=(G,L)$, soit M' un sous-groupe de Lévi de G, avec $M'\supset L$. Pour tout $\alpha\in\Sigma_L$, soit $d_\alpha:i\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction C^∞. Supposons

(i) $d_\alpha(0) = 1$ pour tout $\alpha\in\Sigma_L$;

(ii) $d'_\alpha(0) = 1$ pour tout $\alpha\in\Sigma^{M'}_L$;

(iii) $d'_\alpha(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_L - \Sigma_L^{M'}$.

Supposons la famille $\{d_P\}$ définie par

$$d_P(\mu) = \Pi\, d_\alpha\,(<\alpha,\mu>)$$

le produit étant pris sur les $\alpha \in \Sigma_L$ positives pour P (cf.[A3] §7). Soit Q" un sous-groupe parabolique de G, de Lévi M", avec M"⊃ L. D'après [A3] corollaire 7.4, on a une égalité

$$d_L^{Q''}(0) = \sum_{\Phi} d_\Phi \prod_{\alpha\in\Phi} d'_\alpha(0),$$

où les d_Φ sont des réels > 0 et Φ parcourt les sous-ensembles de $\Sigma_L^{M''}$ qui sont des bases de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_L^{M''}$. Déjà $d_L^{Q''}(0)$ ne dépend que de M". On peut poser $d_L^{M''}(0) = d_L^{Q''}(0)$. D'après (ii) et (iii), on a

$$\prod_{\alpha\in\Phi} d'_\alpha(0) = \begin{cases} 0, \text{ si } \Phi \subset \Sigma_L^{M'} \\ 1, \text{ si } \Phi \subset \Sigma_L^{M'} \end{cases}.$$

On en déduit que $d_L^{M''}(0) \neq 0$ si et seulement si M"⊂ M'. Appliquons le lemme 6.3 de [A2]. On obtient

$$c_L^G(0) = \sum_{Q''\in\mathcal{F}(L)} R_L^{Q''}(s,\varphi,\sigma)\, d'_{Q''}(0)$$

(la fonction $d'_{Q''}$ est celle définie par Arthur et non pas une dérivée). D'après le (1) tous les termes nont nuls sauf le terme pour Q"=G. On a $d'_G(0)=1$, d'où

$$c_L^G(0) = R_L^G(s,\varphi,\sigma).$$

Appliquons maintenant le corollaire 6.5 de [A2]. On a

$$c_L^G(0) = \sum_{M''\in\mathcal{L}(L)} d_L^{M''}(0) R_{M''}^G(s,\varphi,\sigma),$$

$$= R_L^G(s,\varphi,\sigma) + \sum_{M''\in\mathcal{L}(L),\, M''\neq L} d_L^{M''}(0) R_{M''}^G(s,\varphi,\sigma).$$

En comparant avec l'égalité précédente, on obtient que la somme ci-dessus en M"≠L est nulle. D'après le calcul de $d_L^{M''}(0)$, on obtient une relation

$$R_{M'}^G(s,\varphi,\sigma) = \sum_{L\subsetneq M''\subsetneq M'} d_{M''M'} R_{M''}^G(s,\varphi,\sigma).$$

En raisonnant par récurrence sur le rang de M', on obtient $R_{M'}^G(s,\varphi,\sigma)=0$ pour tout sous-groupe de Lévi $M'\neq L$.

(3) Le lemme résulte de (1), (2) et de l'égalité

$$c^Q_{L'}(0) = \sum_{Q'\in F(L'),Q'\subset Q} R^{Q'}_{L'}(s,\varphi,\sigma)d'_{Q'}(0)$$

([A2] lemme 6.3). □

7. Soit $P\in P(A)$. Il existe un unique $w_P\in W$ tel que $P=w_P^{-1}B$. Pour $\mu\in i\mathfrak{a}$ on pose $\tilde{\theta}_P(\mu)=\tilde{\theta}(w_P\mu)$. On définit θ_B sur $i\mathfrak{a}$ par

$$\theta_B(\mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{\alpha\in\Delta} <\mu,\alpha>,$$

et θ_P par $\theta_P(\mu) = \theta_B(w_P\mu)$.

Pour tout $P\in P(A)$, donnons-nous une fonction $\tilde{c}_P$ sur $i\mathfrak{a}$, qui soit C^∞. Supposons que si P_1 et P_2 sont adjacents, si $\alpha\in\Sigma$ est l'une des deux racines séparant P_1 et P_2, et si $\mu\in i\mathfrak{a}$ vérifie $<\alpha,\mu>\in\eta\, Z$, alors $\tilde{c}_{P_1}(\mu)=\tilde{c}_{P_2}(\mu)$. On dit alors que $\{\tilde{c}_P;P\in P(A)\}$ est une $(G,A)^\sim$-famille. Pour μ général, posons

$$\tilde{c}_A(\mu) = \sum_{P\in P(A)} \tilde{c}_P(\mu)\tilde{\theta}_P(\mu)^{-1}.$$

On se propose d'étudier la fonction $\tilde{c}_A$.

<u>Lemme II.7.1.</u> <u>Il existe une fonction</u> $u_B\in C^\infty_c(i\mathfrak{a}/i\mathfrak{a}_G)$ <u>telle que</u>

(a) <u>pour tout</u> $\mu\in i\mathfrak{a}$, <u>on a l'égalité</u>

$$\sum_{r\in R} u_B(\mu+\eta r)\theta_B(\mu+\eta r)^{-1} = \tilde{\theta}_B(\mu)^{-1} ;$$

(b) <u>soit</u> $r\in R$. <u>Si</u> ηr <u>appartient au support de</u> u_B, <u>alors</u> $r=0$.

<u>Démonstration</u>. La fonction $\tilde{\theta}_B$ est invariante par $i\mathfrak{a}_G+R$. Soit

$$U = \{a\in\mathfrak{a}^G ; |<\alpha,a>|<3/4 \text{ pour tout } \alpha\in\Delta\}.$$

C'est un ouvert qui s'envoie surjectivement sur $\mathfrak{a}^G/R$. Grâce à une partition de l'unité, il existe une fonction u'_B sur $i\mathfrak{a}^G \simeq i\mathfrak{a}/i\mathfrak{a}_G$, C^∞ et à support dans ηU, telle que pour tout $\mu\in i\mathfrak{a}$, on ait

$$\sum_{r\in R} u'_B(\mu+\eta r) = 1.$$

La fonction d'une variable réelle : $x \to \eta x(1-q^{\eta x})^{-1}$ est C^{∞} sur l'ouvert $\{x; |x|<3/4\}$. On en déduit que la fonction $\theta_B\tilde{\theta}_B^{-1}$ est C^{∞} sur ηU. Posons $u_B=u'_B\theta_B\tilde{\theta}_B^{-1}$. Alors u_B vérifie les conditions du lemme. □

Fixons une telle fonction u_B. Pour $P\in\mathcal{P}(A)$, définissons u_P par $u_P(\mu)=u_B(w_P\mu)$. Soit $\{c_P;P\in\mathcal{P}(A)\}$ une $(G,A)^{\sim}$-famille. Pour $r\in R$ et $P\in\mathcal{P}(A)$, définissons une fonction c_P^r sur $i\mathfrak{a}$ par $c_P^r(\mu)=\tilde{c}_P(\mu-\eta r)u_P(\mu)$. La famille $\{c_P^r;P\in\mathcal{P}(A)\}$ est une (G,A)-famille. On peut introduire la fonction c_A^r :

$$c_A^r(\mu) = \sum_{P\in\mathcal{P}(A)} c_P^r(\mu)\theta_P(\mu)^{-1} ,$$

qui est C^{∞} ([A2] lemme 6.2). Il existe un sous-ensemble U de $i\mathfrak{a}$ compact mod $i\mathfrak{a}_G$ tel que c_A^r soit à support dans U pour tout r. Pour $\mu\in i\mathfrak{a}$, la série

$$\sum_{r\in R} c_A^r(\mu+\eta r)$$

n'a donc qu'un nombre fini de termes non nuls (uniformément quand μ reste dans un compact).

<u>Lemme II.7.2.</u> <u>Pour tout</u> $\mu\in i\mathfrak{a}$, <u>on a l'égalité</u>

$$\tilde{c}_A(\mu) = \sum_{r\in R} c_A^r(\mu+\eta r).$$

<u>En particulier</u> $\tilde{c}_A$ <u>est</u> C^{∞}.

<u>Démonstration</u>. Par définition le membre de droite vaut

$$\sum_{r\in R}\sum_{P\in\mathcal{P}(A)} \tilde{c}_P(\mu)u_P(\mu+\eta r)\theta_P(\mu+\eta r)^{-1}$$

Comme R est invariant par W, on déduit du lemme II.7.1 que pour tout $P\in\mathcal{P}(A)$

$$\sum_{r\in R} u_P(\mu+\eta r)\theta_P(\mu+\eta r)^{-1}=\tilde{\theta}_P(\mu)^{-1},$$

d'où le résultat. □

8. Fixons $\varphi\in C_c^{\infty}(G)$, $\sigma\in W$, $s\in i\mathfrak{a}$. Pour $P\in\mathcal{P}(A)$ et $\mu\in i\mathfrak{a}$, posons

$$\tilde{\gamma}_P(\sigma,s,\mu) = q^{\sigma}(T,w_P,s,\sigma^{-1}(s+\mu),\varphi).$$

On vérifie comme dans [A2] §7 que ces fonctions forment une $(G,A)^{\sim}$-famille. La fonction $\tilde{\gamma}_A(\sigma,s,.)$ est donc C^{∞} sur $i\mathfrak{a}$. En remplaçant μ par $\sigma s'-s$, on en déduit que le membre de gauche ci-dessous existe, et qu'on a l'égalité

(1) $$\lim_{s'\to s} \sum_{w\in W} q^{\sigma}(T,w,s,s',\varphi)\tilde{\theta}(w(\sigma s'-s))^{-1} = \tilde{\gamma}_A(\sigma,s,\sigma s-s).$$

Soit L le sous-groupe de Lévi (non standard en général) tel que $\mathfrak{a}_L = \{a\in\mathfrak{a} ; \sigma a=a\}$. Pour $\mu\in i\mathfrak{a}$, notons $s(\mu)$, $s'(\mu)\in i\mathfrak{a}$ les points tels que

$$s(\mu)_L = s_L, \quad (\sigma-1)s(\mu)^L = \mu^L,$$

$$s'(\mu) = \sigma^{-1}(\mu+s(\mu)) = s+\mu_L$$

(remarquons que $\sigma-1$ est inversible sur $\mathfrak{a}^L$). Pour $P\in\mathcal{P}(A)$, posons

$$\tilde{c}_P(\sigma,s_L,\mu) = q^{\sigma}(T,w_P,s(\mu),s'(\mu),\varphi).$$

On vérifie comme dans [A3] §2 que ces fonctions forment une $(G,A)^{\sim}$-famille. Donc $\tilde{c}_A(\sigma,s_L,.)$ est C^{∞} sur $i\mathfrak{a}$. Supposons s général, soit $\zeta\in i\mathfrak{a}_L$ général, posons $\mu=\zeta+(\sigma-1)s$. Alors $\tilde{\theta}_P(\mu) \neq 0$, donc

$$\tilde{c}_A(\sigma,s_L,\mu) = \sum_{P\in\mathcal{P}(A)} \tilde{c}_P(\sigma,s_L,\mu)\tilde{\theta}_P(\mu)^{-1}.$$

On a $s(\mu)=s$, d'où

$$\tilde{c}_P(\sigma,s_L,\mu) = q^{\sigma}(T,w,s,\sigma^{-1}(s+\mu),\varphi) = \tilde{\gamma}_P(\sigma,s,\mu),$$

d'où $\tilde{c}_A(\sigma,s_L,\mu)=\tilde{\gamma}_A(\sigma,s,\mu)$. Faisons tendre ζ vers 0. On obtient $\tilde{c}_A(\sigma,s_L,\sigma s-s)=\tilde{\gamma}_A(\sigma,s,\sigma s-s)$. Cela est vrai pour s général. Mais en vertu des définitions, ces fonctions sont polynômiales en q^{s_i}, $i=1,\ldots, n$. Donc l'égalité se prolonge. Jointe à (1), elle démontre le

Lemme II.8. On a l'égalité

$$\lim_{s'\to s} \sum_{w\in W} q^{\sigma}(T,w,s,s',\varphi)\tilde{\theta}(w(\sigma s'-s))^{-1}=\tilde{c}_A(\sigma,s_L,\sigma s-s). \square$$

9. Disons que T tend fortement vers l'infini quand d(T) tend vers l'infini et que T reste dans le domaine

$$d(T) = \inf\{\langle\alpha,T\rangle ; \alpha\in\Delta\} \geqslant (1/2)\sup\{\langle\alpha,T\rangle ; \alpha\in\Delta\}.$$

Soit $d\in\mathbb{N}$, $d \geqslant 1$. Pour $m=(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\rho \in(d^{-1}R)/R$, on peut définir une fonction $Q_{m,\rho} : \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^G \to \mathbb{C}$ par

$$Q_{m,\rho}(T) = T_1^{m_1}\ldots T_n^{m_n}\, q^{\eta\langle\rho,T\rangle}.$$

Il est facile de voir que ces fonctions sont linéairement indépendantes.

Notons q_d l'espace engendré par ces fonctions. On vérifie que si $q\in q_d$ tend vers 0 quand T tend fortement vers l'infini, alors q=0.

Proposition II.9. Supposons $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset G_e$. Soit Φ une fonction C^∞ sur $i\mathfrak{a}/\eta\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Il existe $d\geqslant 1$ et $Q\in q_d$ tels que

$$Q-\int_{i\mathfrak{a}/\eta\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}}\Phi(s)\tilde{c}_A(\sigma,s_L,\sigma s-s)\,ds$$

tende vers 0 quand $T\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^G$ tend fortement vers l'infini. Ecrivons $Q=\sum_{m,\rho}a_{m,\rho}Q_{m,\rho}$, sommé sur $m\in\mathbb{N}^n$, $\rho\in(d^{-1}R)/R$. Posons $Q_0=\sum_m a_{m,0}Q_{m,0}$. Alors

$$Q_0=\begin{cases}0, & \text{si } \sigma\neq 1,\\ \tau\int_{i\mathfrak{a}/\eta\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}}\delta(s)\delta(-s)\Phi(s)R_A^G(s,\varphi)\,ds, & \text{si } \sigma=1,\end{cases}$$

où

$$\tau=(c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n(-1)^{n-1}n\frac{1}{\sqrt{n}}(\log q)^{1-n}.$$

D'après l'énoncé les remarques précédant l'énoncé, Q est unique.

Démonstration. (a) Posons

$$I=\int_{i\mathfrak{a}/\eta\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}}\Phi(s)c_A(\sigma,s_L,\sigma s-s)\,ds.$$

On peut remplacer le domaine d'intégration par $i\mathfrak{a}/\eta(\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}+\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^L)$, à condition de multiplier l'expression par $[\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}:\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}+\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^L]^{-1}$. Posons $b=(\sigma-1)\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^L$. C'est un réseau de $\mathfrak{a}^L$. On peut effectuer le changement de variable $s\to(\lambda,\mu)\in i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}\times i\mathfrak{a}^L/\eta b$, avec $\lambda=s_L$, $\mu=\sigma s-s$. En posant $\Phi(\lambda,\mu)=\Phi(s)$ pour s correspondant à (λ,μ), on obtient

$$I=\tau_1\int_{(i\mathfrak{a}^L/\eta b)\times(i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}})}\Phi(\lambda,\mu)\tilde{c}_A(\sigma,\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu,$$

où $\tau_1=[\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}:\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}+b]^{-1}$. Fixons $\lambda\in i\mathfrak{a}_L$. Pour tout $r\in R$, on déduit de la $(G,A)^\sim$-famille $\{\tilde{c}_P(\sigma,\lambda,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}(A)\}$ une (G,A)-famille $\{c_P^r(\sigma,\lambda,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}(A)\}$ (cf.II.7). Comme fonction de μ, $\tilde{c}_P(\sigma,\lambda,\mu)$ est invariante par $\eta[b+\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}]$, en particulier par ηb. Donc $c_P^r(\sigma,\lambda,.)$ ne dépend que de l'image de r dans R/b et d'après le lemme II.7.2, on a

$$\tilde{c}_A(\sigma,\lambda,\mu)=\sum_{r\in R/b}\ \sum_{b\in b}c_A^r(\sigma,\lambda,\mu+\eta r+\eta b).$$

D'où l'égalité

$$I = \tau_1 \sum_{r\in R/b} \int_{i\mathfrak{a}^L\times(i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}})} \Phi(\lambda,\mu)c_A^r(\sigma,\lambda,\mu+\eta r)\, d\lambda\, d\mu.$$

Comme il existe $U \subset i\mathfrak{a}$, compact mod $i\mathfrak{a}_G$, tel que pour tout r, $c_A^r(\sigma,\lambda,.)$ soit à support dans U, il existe un ensemble $R' \subset R$, fini, tel qu'on puisse remplacer R/b par R' dans la somme ci-dessus. L'ensemble R' est indépendant de T. Pour la même raison, on peut choisir deux ensembles $U_1 \subset U_2 \subset i\mathfrak{a}$ ouverts relativement compacts, suffisamment grands, et remplacer Φ par une fonction Φ' telle que

$$\Phi'(\lambda,\mu) = \begin{cases} \Phi(\lambda,\mu), \text{ si } \mu\in U_1, \\ 0, \text{ si } \mu\notin U_2. \end{cases}$$

Pour $P\in\mathcal{P}(A)$, $s_L\in i\mathfrak{a}_L$, $\mu\in i\mathfrak{a}$, posons

$$\tilde{d}_P(s_L,\mu) = r_1^\sigma(w_P,s(\mu),s'(\mu),\varphi)r_2^\sigma(w_P,s(\mu),s'(\mu))$$

avec les notations de II.6, et

$$e_P(T,\mu) = \tilde{e}_P(T,\mu) = r_3^\sigma(T,w_P,s(\mu),s'(\mu)) = q^{\langle\mu,w_P^{-1}w^G T\rangle}$$

Ce sont des $(G,A)^\sim$-familles et $\tilde{c}_P(\sigma,s_L,\mu) = \tilde{d}_P(s_L,\mu)\tilde{e}_P(T,\mu)$. Remarquons que $\tilde{e}_P(T,.)$ est invariant par R puisque $T\in\mathfrak{a}^G_{\mathbb{Z}}$. On voit alors que pour tous $r\in R$, $\lambda\in i\mathfrak{a}_L$, $\mu\in i\mathfrak{a}$, on a

$$c_P^r(\sigma,\lambda,\mu) = d_P^r(\lambda,\mu)e_P(T,\mu).$$

D'après [A2] lemme 6.3, on a alors l'égalité

$$c_A^r(\sigma,\lambda,\mu) = \sum_{S\in F(A)} e_A^S(T,\mu)\,(d^r)'_S(\lambda,\mu).$$

D'où

$$(1)\quad I = \tau_1 \sum_{r\in R'} \sum_{S\in F(A)} \int_{i\mathfrak{a}^L\times(i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}})} \Phi'(\lambda,\mu)\,(d^r)'_S(\lambda,\mu+\eta r)e_A^S(T,\mu+\eta r)\, d\lambda\, d\mu.$$

(b) Soit $S\in F(A)$, notons M son sous-groupe de Lévi. Notons $\chi^S(T,.)$ la fonction caractéristique de l'enveloppe convexe dans $\mathfrak{a}^G$ de l'ensemble des points $-w_P^{-1}w^G T(\log q)$, pour $P\in\mathcal{P}(A)$, $P \subset S$, $Y_S(T)$ la projection commune de ces points dans $\mathfrak{a}_M$. Pour tout $\mu\in i\mathfrak{a}$, on a l'égalité

$$e_A^S(T,\mu) = \int_{Y_S(T)+\mathfrak{a}^M} \chi^S(T,a) e^{-\langle\mu,a\rangle}\, da$$

([A3] §3.1). L'intégrale intervenant dans l'expression (1) correspondant à un couple (r,S) est donc égale à

$$(2) \qquad \int_{Y_S(T)+\mathfrak{a}^M} \chi^S(T,a)\ \Phi_S^r(a)\ da,$$

où

$$\Phi_S^r(a) = \int_{i\mathfrak{a}^L\times(i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,Z})} \Phi'(\lambda,\mu)\,(d^r)'_S(\lambda,\mu+\eta r)\, e^{-\langle\mu+\eta r,a\rangle}\, d\lambda\, d\mu.$$

La fonction Φ_S^r n'est pas invariante par $\mathfrak{a}_L$ à cause du terme $e^{-\langle\eta r,a\rangle}$, mais sa valeur absolue l'est. Comme Φ' est à support compact en μ, $|\Phi_S^r|$ est de Schwartz sur $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_L$. On peut alors utiliser le raisonnement de [A3] §4. On obtient

- si $M \not\supset L$, l'expression (2) tend vers 0 quand T tend fortement vers l'infini ;
- si $M \supset L$, la différence entre l'expression (2) et

$$\int_{Y_S(T)+\mathfrak{a}_L^M} \int_{\mathfrak{a}^L} \chi_L^S(T,a_L)\,\Phi_S^r(a_L+a^L)\ da^L\ da_L$$

tend vers 0 quand T tend fortement vers l'infini.

On a

$$\int_{\mathfrak{a}^L} \Phi_S^r(a_L+a^L)\ da^L = (2\pi i)^{\mathrm{rg}\ L} e^{-\langle\eta r,a_L\rangle} \int_{i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}} \Phi'(\lambda,-\eta r^L)\,(d^r)'_S(\lambda,\eta r_L)\ d\lambda$$

et

$$\int_{Y_S(T)+\mathfrak{a}_L^M} e^{-\langle\eta r,a_L\rangle}\ \chi_L^S(T,a_L)\ da_L = e_L^S(T,\eta r_L).$$

Posons alors $\tau_2=\tau_1(2\pi i)^{\mathrm{rg}\ L}$ et

$$(3) \quad Q = \tau_2 \sum_{r\in R'} \int_{i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}} \Phi'(\lambda,-\eta r^L) \sum_{S\in\mathcal{F}(L)} e_L^S(T,\eta r_L)\,(d^r)'_S(\lambda,\eta r_L)\ d\lambda.$$

On a montré que $Q-I$ tend vers 0 quand $T\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^G$ tend fortement vers l'infini.

(c) Soit $S\in\mathcal{F}(L)$, $\mu\in\mathfrak{a}_L$. On peut calculer $e_L^S(T,\mu)$ de la façon suivante. Fixons $U\in\mathfrak{a}_L$, général. Alors

$$e_L^S(T,\mu) = \lim_{u\to 0} \sum_{P\in\mathcal{P}^S(L)} q^{-\langle \mu-uU, w_P^{-1}w^G T\rangle} \theta_P(\mu-uU)^{-1},$$

où $u\in\mathbb{R}$ et w_P est n'importe quel élément de W tel que $w_P^{-1}B \subset P$ (cf. [A2] §2 pour la définition de θ_P). La fonction $u \to \theta_P(\mu-uU)^{-1}$ a en général un pôle en u=0. Soit α le plus grand des ordres de ces pôles. Alors $u^\alpha\theta_P(\mu+uU)^{-1}$ est C^∞ en u=0. On peut effectuer un développement de Taylor et on obtient

$$e_L^S(T,\mu) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \sum_{P\in\mathcal{P}^S(L)} \frac{d^\beta}{du^\beta} \left(q^{-\langle \mu-uU, w_P^{-1}w^G T\rangle}\right)_{u=0} \frac{d^{\alpha-\beta}}{du^{\alpha-\beta}} \left(u^\alpha \theta_P(\mu-uU)^{-1}\right) u=0.$$

Mais

$$\frac{d^\beta}{du^\beta}\left(q^{-\langle \mu-uU, w_P^{-1}w^G T\rangle}\right)_{u=0} = (\log q)^\beta \langle U, w_P^{-1}w^G T\rangle^\beta q^{-\langle w^G w_P \mu, T\rangle}.$$

On peut donc écrire

$$(4)\quad e_L^S(T,\mu) = \sum_{P\in\mathcal{P}^S(L)} q^{-\langle w^G w_P\mu, T\rangle} Q_P(\mu,T),$$

où $Q_P(\mu,T)$ est polynomiale en T.

Il existe $d\in\mathbb{N}$, $d \geqslant 1$, tel que $r_L\in d^{-1}R$ pour tout $r\in R$. L'égalité ci-dessus montre que la fonction de T $e_L^S(T,\eta r_L)$ appartient à $\mathcal{Q}_d$. Dans la relation (3), seuls ces termes dépendent de T. Donc $Q\in\mathcal{Q}_d$.

(d) Ecrivons $Q = \sum_{m,\rho} a_{m,\rho} Q_{m,\rho}$. D'après la relation (4), le terme $e_L^S(T,\eta r_L)$ ne contribue à un coefficient $a_{m,0}$ que s'il existe $P\in\mathcal{P}^S(L)$ tel que $w^G w_P r_L\in R$. Mais R est stable par W et cette relation équivaut à $r_L\in R$. Réciproquement si $r_L\in R$, $e_L^S(T,\eta r_L)$ est combinaison linéaire de fonctions $Q_{m,0}$. Posons $R'' = \{r\in R' \,;\, r_L\in R\}$. Alors

$$Q_0 = \tau_2 \sum_{r\in R''} \int_{i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}} \Phi'(\lambda,-\eta r^L) \sum_{S\in\mathcal{F}(L)} e_L^S(T,\eta r_L)(d^r)'_S(\lambda,\eta r_L)\, d\lambda.$$

La somme en S n'est autre que $c_L^r(\sigma,\lambda,\eta r_L)$. Comme R" est fini, en prenant U_1 assez grand, on a $\Phi'(\lambda,-\eta r^L) = \Phi(\lambda,-\eta r^L)$ pour tout $r\in R''$, $\lambda\in i\mathfrak{a}_L$. D'où

$$(5)\quad Q_0 = \tau_2 \sum_{r\in R''} \int_{i\mathfrak{a}_L/\eta\mathfrak{a}_{L,\mathbb{Z}}} \Phi(\lambda,-\eta r^L) c_L^r(\lambda,\eta r_L)\, d\lambda.$$

Soit $r\in R''$. Par définition

(6) $c_L^r(\sigma,\lambda,\eta r_L) = \lim_{\mu\to 0} \sum_{P\in\mathcal{P}(L)} \gamma_P(\eta r_L+\mu)u_P(\eta r_L+\mu)\theta_P(\eta r_L+\mu)^{-1}$,

pour $\mu\in i\mathfrak{a}_L$, où $\gamma_P(\mu)$ et $u_P(\mu)$ sont définis de la façon suivante : on choisit $P'\in\mathcal{P}(\Lambda)$ avec $P'\subset P$, on pose

$$\gamma_P(\mu) = \tilde{c}_{P'}(\sigma,\lambda,\mu-\eta r), u_P(\mu) = u_{P'}(\mu).$$

(7) Je dis que si $r_L\neq 0$, $c_L^r(\sigma,\lambda,\eta r_L)=0$. En effet pour $P\in\mathcal{P}(L)$ et P' comme ci-dessus, $u_P(\eta r_L+\mu) = u_B(w_{P'}(\eta r_L+\mu))$. Comme $r_L\in R$, on a $w_{P'}r_L\in R$. Comme $r_L\neq 0$, $\eta w_{P'}r_L$ n'appartient pas au support de u_B, donc $u_B(w_{P'}(\eta r_L+\mu))=0$ si μ est assez petit. D'où notre assertion.

Supposons donc $r_L=0$. Par définition, pour $P\in\mathcal{P}(L)$, $\mu\in i\mathfrak{a}_L$, on a

$$\gamma_P(\mu) = q^\sigma(T,w_{P'},s,s',\varphi),$$

i.e.

(8) $\gamma_P(\mu) = r_1^\sigma(w_{P'},s,s',\varphi)r_2^\sigma(w_{P'},s,s')\ r_3^\sigma(T,w_{P'},s,s')$,

où P' est comme ci-dessus, $s_L=\lambda$, $(\sigma-1)s^L=\eta r$, $s'=s+\mu$. Remarquons que $\sigma s'=s'+\eta r$, d'où $\langle\alpha,\sigma s'\rangle=\langle\alpha,s'\rangle \bmod \eta\mathbb{Z}$ pour tout $\alpha\in\Sigma$. Pour $\xi\in i\mathfrak{a}$, posons

$$d_{P'}(s,\xi)=(c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n(-1)^{\mathrm{rg}\,G}\left[\prod_{\alpha<0,\sigma\alpha>0}(-q^{\langle\alpha,s\rangle})\right]\left[\prod_{\alpha>0,w\alpha>0}q^{-\langle\alpha,\xi\rangle}\right]\delta(ws)$$

$$\delta(-w(s+\xi))\sum_{i=0}^{n-1} q^{\langle w\xi+w\eta r,w^G(e(i)+T)\rangle},$$

où $w=w_{P'}$; et $e_{P'}(s,\xi)=d_{P'}(s,\xi)u_{P'}(\xi)$. On a l'égalité

(9) $r_2^\sigma(w_{P'},s,s')r_3^\sigma(T,w_{P'},s,s')=d_{P'}(s,\mu)$,

dont on laisse la démonstration au lecteur (on n'utilisera la valeur précise de $d_{P'}(s,\mu)$ que pour $\sigma=w=1$, auquel cas le calcul est facile).

La famille $\{e_{P'}(s,.)\ ;\ P'\in\mathcal{P}(A)\}$ est une (G,A)-famille, dont on déduit une (G,L)-famille $\{e_P(s,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}(L)\}$. Introduisons la (G,L) famille $\{R_P(s,\varphi,\sigma,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}(L)\}$ (cf.II.6), et la famille produit $f_P(s,\varphi,\sigma,.)=e_P(s,.)R_P(s,\varphi,\sigma,.)$. Il résulte de (6), (8) et (9) que

$$c_L^r(\sigma,\lambda,0) = f_L(s,\varphi,\sigma,0).$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset G_e$, on peut appliquer le lemme II.6. On obtient

(10) $$c_L^r(\sigma,\lambda,0) = eR_L^G(s,\varphi,\sigma),$$

où $e = e_{P'}(s,0) = d_{P'}(s,0)u_{P'}(0)$ pour un quelconque $P' \in \mathcal{P}(A)$ tel que LP' soit un sous-groupe parabolique de G. Je dis que

(11) si $r_L = 0$ et $r \notin \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, on a $c_L^r(\sigma,\lambda,0) = 0$.

En effet $d_{P'}(s,0)$ contient en facteur l'expression

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{\langle w\eta r, w^G(e(i)+T)\rangle}$$

où $w = w_{P'}$. Comme $wr \in R$, on a $q^{\langle w\eta r,a\rangle}=1$ si $a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^G$. D'après les définitions (lemme II.2.2) la somme ci-dessus est donc égale à

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{\langle w\eta r, b(i)\rangle}.$$

On peut écrire $wr = \underline{z}+r'$, avec $\underline{z} = (z,\dots,z) \in \mathfrak{a}_G$ et $r' \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. On a $\langle r',b(i)\rangle \in \mathbb{Z}$ et $\langle \underline{z},b(i)\rangle = iz$. La somme ci-dessus devient

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^{\eta iz}$$

(on a bien sûr $nz \in \mathbb{Z}$). Cette somme s'annule si $z \notin \mathbb{Z}$, i.e. si $wr \notin \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, i.e. si $r \notin \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Donc si $r \notin \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$, $d_{P'}(s,0) = 0$, d'où $e = 0$ et l'assertion.

Remarque. C'est le seul point dans notre calcul où intervienne vraiment le fait qu'on travaille avec $GL(n,F)$ et non pas avec $SL(n,F)$.

Supposons maintenant $r_L=0$ et $r \in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Je dis qu'alors la (G,L)-famille $\{R_P(s,\varphi,\sigma,.)\ ;\ P \in \mathcal{P}(L)\}$ n'est autre que la famille déduite de la (G,A)-famille $\{R_{P'}(s,\varphi,.)\ ;\ P' \in \mathcal{P}(A)\}$. Soient en effet $P \in \mathcal{P}(L)$, $P' \in \mathcal{P}(A)$ avec $P' \subset P$, et $\mu \in i\mathfrak{a}_L$. On a $R_P(s,\varphi,\sigma,\mu) = \mathrm{Trace}\,[\,I_{B|P'}(s)I_{P'|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)]$

$$= \mathrm{Trace}\,[\,I_{B|P'}(s)I_{P'|B}(\sigma(s+\mu))I_{B|B}(\sigma,s+\mu)\pi_B(s,\varphi)]\,.$$

On a $\sigma(s+\mu) \equiv s+\mu \bmod \eta R$, d'où $I_{P'|B}(\sigma(s+\mu)) = I_{P'|B}(s+\mu)$. L'opérateur $I_{B|B}(\sigma,s+\mu)$

entrelace les représentations $\pi_B(s+\mu)$ et $\pi_B(\sigma(s+\mu))$. Mais comme $r\in a_{\mathbb{Z}}$, $\sigma(s+\mu) \equiv s+\mu \bmod \eta\, a_{\mathbb{Z}}$, et $\pi_B(\sigma(s+\mu)) = \pi_B(s+\mu)$. Comme cette représentation est irréductible, car $s+\mu\in ia$, $I_{B|B}(\sigma,s+\mu)$ est donc une homothétie. Comme $I_{B|B}(\sigma,s+\mu)1_K = 1_K$, c'est l'identité. Alors

$$R_P(s,\varphi,\sigma,\mu) = \mathrm{Trace}\,[\,I_{B|P'}(s)I_{P'|B}(s+\mu)\pi_B(s,\varphi)]$$

$$= R_{P'}(s,\varphi,\mu)$$

comme on le voulait. Alors $R_L^G(s,\varphi,\sigma) = R_L^G(s,\varphi)$. Ce terme est nul si $L\neq A$ (lemme II.6). Si $L=A$, (10) devient

$$c_A^r(\sigma,\lambda,0) = e_B(s,0)R_A^G(s,\varphi).$$

Remarquons que si $L=A$, on a $\sigma=1$; la condition $r_L=0$ équivaut à $r=0$; de plus $s=\lambda$. D'après (7), (11) et ces derniers résultats, l'égalité (5) devient

$$Q_0 = 0 \text{ si } L\neq A,$$

$$Q_0 = \tau_2 \int_{ia/\eta a_{\mathbb{Z}}} \Phi(s)e_B(s,0)R_A^G(s,\varphi,0)\,ds, \text{ si } L=A.$$

Comme $\tau_2=1$ pour $L=A$, et

$$e_B(s,0) = (c^G)^{-1}(1-q^{-1})^n(-1)^{n-1}n\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,(\log q)^{1-n}\delta(s)\delta(-s) = \tau\delta(s)\delta(-s),$$

on obtient la proposition. □

10. Soient $f,\varphi\in C_c^\infty(G)$, supposons $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset G_e$. On pose

$$I(f,\varphi) = \int_{G/Z(G)\times G} f(g^{-1}hg)\varphi(h)\,dh\,dg.$$

Cette intégrale est convergente.

<u>Théorème</u>. <u>Soient</u> $f\in\mathcal{H}(G)$, $\varphi\in C_c^\infty(G)$. <u>Supposons</u> $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset G_e$. <u>Alors on a l'égalité</u>

$$I(f,\varphi) = \tau'\int_{\mathrm{Re}(s)=0} f(s)R_A^G(s,\varphi)\,ds,$$

<u>où</u> $\tau' = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\log(q)\,(2\pi i)^{-n}$.

<u>Démonstration</u>. Soit $h\in G_e$. Il existe un voisinage V_h de h et un compact C_h de $G/Z(G)$ tels que si $h'\in V_h$, $g\in G/Z(G)$ vérifient $g^{-1}h'g\in\mathrm{Supp}(f)$, alors $g\in C_h$. Par compacité du support de φ, il existe donc un compact C de $G/Z(G)$ tel que si $h\in G$,

$g\in G/Z(G)$ vérifient $f(g^{-1}hg)\varphi(h)\neq 0$, alors $g\in C$. Soit $T\in \mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^{G}$. Si $d(T)$ est assez grand, $C\subset G(T)$. Dans ce cas

$$I(f,\varphi) = \int_{G(T)\times G} f(g^{-1}hg)\varphi(h)\,dh\,dg$$

$$= d^G\,\eta^{-n} \int_{G(T)\times G} \varphi(h) \int_{Re(s)=0} \tilde{f}(s)\,\ell^G(s)\,\omega_s(g^{-1}hg)\,ds\,dh\,dg.$$

L'intégration est en fait prise sur un compact. On peut permuter les intégrales, d'où

$$I(f,\varphi) = d^G\,\eta^{-n} \int_{Re(s)=0} \tilde{f}(s)\,\ell^G(s)\,I(T,s,\varphi)\,ds.$$

Remarquons que $\ell^G(s)=\gamma(s)\gamma(-s)\delta(s)^{-1}\delta(-s)^{-1}$. Posons $\Phi(s)=\tilde{f}(s)\delta(s)^{-1}\delta(-s)^{-1}$. C'est une fonction C^∞ sur $i\mathfrak{a}$. On a

$$I(f,\varphi) = d^G\eta^{-n} \int_{Re(s)=0} \Phi(s)\gamma(s)\gamma(-s)I(T,s,\varphi)ds$$

$$= d^G\eta^{-n} \sum_{\sigma\in W} \int_{Re(s)=0} \Phi(s)\tilde{c}_A(\sigma,s_L,\sigma s-s)\,ds,$$

d'après la proposition II.5 et le lemme II.8, et avec les notations de ce lemme. Pour chaque $\sigma\in W$, soient Q^σ et d^σ les termes dont l'existence est assurée par la proposition II.9. D'après cette proposition et l'égalité ci-dessus,

$$I(f,\varphi)-d^G\eta^{-n} \sum_{\sigma\in W} Q^\sigma$$

tend vers 0 quand $T\in\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}^{G}$ tend fortement vers l'infini. Cette fonction appartient à q_d, où d est le pgcd des d^σ ($I(f,\varphi)$ est constante comme fonction de T et les constantes appartiennent à q_d). Comme on l'a déjà remarqué, cela implique qu'elle est nulle. A fortiori sa projection sur l'espace engendré par les $Q_{m,0}$, pour $m\in\mathbb{N}^n$, est nulle, i.e.

$$I(f,\varphi)=d^G\eta^{-n} \sum_{\sigma\in W} Q_0^\sigma\ ,$$

i.e. grâce à II.9

$$I(f,\varphi) = d^G\eta^{-n}\tau \int_{Re(s)=0} \delta(s)\delta(-s)\Phi(s)R_A^G(s,\varphi)\,ds.$$

Comme $\delta(s)\delta(-s)\Phi(s)=f(s)$, on obtient la formule de l'énoncé. □

III. UNE FORMULE POUR LES GERMES DE SHALIKA.

1. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments unipotents de G. Soient $U\in\mathcal{U}$, $u\in U$, notons $Z^G(u)$ le centralisateur de u dans G, munissons $Z^G(u)\backslash G$ d'une mesure invariante à droite. On peut définir une forme linéaire I_u sur $C_c^\infty(G)$ par

$$I_u f = \int_{Z^G(u)\backslash G} f(g^{-1}ug)\, dg.$$

Soit P un sous-groupe parabolique de G tel que $U \cap N_P$ soit Zariski-dense dans N_P, i.e. U soit l'orbite de Richardson de P. Il en existe. On sait qu'il existe une constante $c(u,P)\in\mathbb{C}$ telle que $I_u f = c(u,P)f^P(1)$ pour toute $f\in C_c^\infty(G)$. Pour $f=1_K$, $f^P(1) = 1$ est indépendant de P, donc $c(u,P)$ l'est aussi. On peut donc normaliser l'intégrale orbitale, i.e. définir une formule linéaire I_U sur $C_c^\infty(G)$ par $I_U f=f^P(1)$ pour n'importe quel P vérifiant la condition ci-dessus. Choisissons un tel P, soit M son Lévi. Pour $s\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, posons

$$\ell^U(s) = d^M|W^G|^{-1} \sum_{w\in W^G} \ell^M(ws).$$

Ce terme est indépendant du choix de P.

Lemme III.1.1. Pour toute $f\in\mathcal{H}(G)$, on a l'égalité

$$I_U f = \eta^{-n} \int_{Re(s)=0} \tilde{f}(s)\ell^U(s)\, ds.$$

Démonstration. D'après la formule d'inversion de I.4 appliquée à M,

$$f^P(1) = d^M\eta^{-n} \int_{Re(s)=0} \widetilde{f^P}(s)\ell^M(s)\, ds.$$

Or $\widetilde{f^P}(s) = \tilde{f}(s)$ pour tout s, d'où

$$f^P(1) = d^M \eta^{-n} \int_{Re(s)=0} \tilde{f}(s)\ell^M(s)\, ds.$$

Comme $\tilde{f}$ est invariante par W^G, on peut remplacer s par ws effectuer la moyenne sur $w\in W^G$. □

Soit L un sous-groupe de Lévi standard, disons $L \simeq GL(\ell_1,F)\times\ldots\times GL(\ell_t,F)$. Notons σ^L l'élément

$((1-\ell_1)/2,(1-\ell_1)/2+1,\ldots,(\ell_1-1)/2,(1-\ell_2)/2,(1-\ell_2)/2+1,\ldots,(\ell_2-1)/2,\ldots)$

de $\mathfrak{a}^L$, et σ_L l'élément

$((1+\ell_1)/2,\ldots\ldots\ldots\ldots,(1+\ell_1)/2,(1+\ell_2)/2,\ldots\ldots\ldots\ldots,(1+\ell_2)/2,\ldots)$

de $\mathfrak{a}_L$. Posons $St_W(L) = \{w\in W^G \,;\, wL = L\}$.

<u>Lemme III.1.2.</u> <u>Soit</u> U <u>une orbite unipotente de</u> G.

(a) <u>Soit</u> $s_L \in \mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$ <u>un élément en position générale. Alors la fonction sur</u> $\mathfrak{a}^L_{\mathbb{C}}$ <u>définie par</u> $s^L \to \ell^L(s^L)^{-1}\ell^U(s^L+s_L)$ <u>est holomorphe en</u> $s^L=\sigma^L$.

Notons $\ell_1^U(s_L)$ sa valeur en $s^L=\sigma^L$.

(b) <u>La fonction</u> ℓ_1^U <u>est holomorphe en</u> $s_L=\sigma_L$. <u>Sa valeur en</u> $s_L=\sigma_L$ <u>est</u>

$$d^L|W^G|^{-1}|St_W(L)|$$

<u>si</u> U <u>est l'orbite de Richardson d'un sous-groupe parabolique de Lévi</u> L,0 <u>sinon</u>.

<u>Remarques</u>. (1) Le (a) signifie précisément qu'il existe un ouvert dense de $\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$ tel que la propriété soit vraie pour s_L dans cet ouvert.

(2) Tous les sous-groupes paraboliques de Lévi L ont même orbite de Richardson.

<u>Démonstration</u>. Considérons d'abord un sous-groupe de Lévi M et la fonction

$$\ell^M_{s_L}(s^L) = \ell^L(s^L)^{-1}\ell^M(s^L+s_L).$$

Son dénominateur ne contient que des termes $1-q^{-\langle s,\alpha\rangle-1}$ où $\alpha\in\Sigma^G-\Sigma^L$, ou $1-q^{-\langle s,\alpha\rangle}$ pour $\alpha\in\Sigma^L$. Un tel terme ne s'annule pas en σ^L+s_L quand s_L est général. Donc $\ell^M_{s_L}$ est holomorphe en $s^L=\sigma^L$. Cette fonction contient au numérateur le produit des termes $1-q^{-\langle s,\alpha\rangle-1}$ pour $\alpha\in\Sigma^L-(\Sigma^M\cap\Sigma^L)$. Si α est une racine simple de L, i.e. $\alpha\in\Delta^L$, ce terme s'annule en $s^L=\sigma^L$. Donc $\ell^M_{s_L}(\sigma^L)=0$ sauf si $\Delta^L\subset\Sigma^M\cap\Sigma^L$. Cette condition implique $L\subset M$. Posons $\ell_1^M(s_L) = \ell^M_{s_L}(\sigma^L)$. On a donc

$$\ell_1^M(s_L) = 0 \text{ si } L \not\subset M.$$

Supposons maintenant $L\subset M$. On vérifie qu'on peut trouver $w\in W^G$ tel que wM, wL soient standards et $w\alpha>0$ pour tout $\alpha\in\Delta^L$; i.e. on peut supposer M standard. Supposons pour simplifier $M=GL(\ell,F)$, $L=GL(\ell_1,F)\times\ldots\times GL(\ell_t,F)$, notons $I_1,\ldots, I_t$ les intervalles $\{1,\ldots,\ell_1\},\ldots,\{\ell_1+\ldots+\ell_{t-1}+1,\ldots,\ell_1+\ldots+\ell_t\}$. Alors

$$\ell_1^M(s_L) = \prod_{\alpha\in\Sigma^M-\Sigma^L} (1-q^{-<s,\alpha>})(1-q^{-<s,\alpha>-1})^{-1}$$

$$= \prod_{\alpha\; \Sigma^M-\Sigma^L,\alpha>0} (1-q^{-<s,\alpha>})(1-q^{<s,\alpha>})(1-q^{-<s,\alpha>-1})^{-1}(1-q^{<s,\alpha>-1})^{-1} ,$$

où $s = \sigma^L+s_L$, i.e.

$$\ell_1^M(s_L) = \prod_{a,b\in\{1,\dots t\},a<b} \; \prod_{j\in I_b} \frac{(1-q^{s_i-s_j})(1-q^{s_j-s_i})}{(1-q^{s_i-s_j-1})(1-q^{s_j-s_i-1})} .$$

Pour $a,b\in\{1,\dots,t\}$, posons $s_{ab}=(s_L)_i-(s_L)_j$ où i, resp. j, est un élément quelconque de I_a, resp. I_b. Quant j parcourt I_b, $(\sigma^L)_j$ parcourt l'ensemble $\{(1-\ell_b)/2,\dots,(\ell_b-1)/2\}$. Le produit en j dans l'expression ci-dessus vaut donc

$$\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\delta})}$$

où $\alpha=s_{ab}+(\sigma^L)_i+(\ell_b-1)/2$, $\beta=s_{ab}-(\sigma^L)_i+(\ell_b-1)/2$, $\gamma=s_{ab}+(\sigma^L)_i-(\ell_b-1)/2-1$,

$\delta=-s_{ab}-(\sigma^L)_i+(1-\ell_b)/2-1$, ou encore

$$q^{\ell_b}\,\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma+1})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+1})}$$

Quant i parcourt I_a, $(\sigma^L)_i$ parcourt l'ensemble $\{(1-\ell_a/2,\dots,(\ell_a-1)/2\}$. Le produit en i des termes ci-dessus vaut donc

$$q^{\ell_a\ell_b}\,\frac{(1-q^{\alpha'})(1-q^{\beta'})}{(1-q^{\gamma'})(1-q^{\delta'})}$$

où $\alpha'=s_{ab}+(\ell_b-\ell_a)/2$, $\beta'=s_{ab}+(\ell_a-\ell_b)/2$, $\gamma'=s_{ab}-(\ell_a+\ell_b)/2$, $\delta'=s_{ab}+(\ell_a+\ell_b)/2$.

En particulier les pôles ℓ_1^M sont situés sur les hyperplans $s_{ab}=\pm(\ell_a+\ell_b)/2$. Comme σ_L n'appartient à aucun de ces hyperplans, ℓ_1^M est holomorphe en σ_L. Pour $s_L=\sigma_L$, on a $s_{ab}=(\ell_a-\ell_b)/2$. Alors $\alpha'=0$, $1-q^{\alpha'}=0$ et $\ell_1^M(\sigma_L)=0$ sauf si le produit en (a,b) est vide, i.e. L=M. Dans ce dernier cas on a bien sûr $\ell_1^L(\sigma_L)=1$. Les assertions du lemme se déduisent immédiatement de ces résultats. □

<u>Corollaire III.1.</u> <u>Les formes linéaires</u> I_U <u>sur</u> $\mathcal{H}(G)$, <u>pour</u> $U\in\mathcal{U}$, <u>sont linéairement indépendantes</u>.

<u>Démonstration</u>. D'après le lemme III.1.1, et les rappels concernant l'isomorphisme

de Satake, l'assertion équivaut à l'indépendance linéaire des fonctions méromorphes ℓ^U. Celle-là résulte du lemme III.1.2. □

2. Notons G^{reg} l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G. Soit $t \in G^{reg}$. Notons T son centralisateur dans G, fixons une mesure invariante sur $T\backslash G$. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on pose

$$\phi_f(t) = \int_{T\backslash G} f(g^{-1}tg)\, dg.$$

Dans le cas où $t \in G_e$, on supposera la mesure sur $T\backslash G$ telle qu'on puisse dans la formule ci-dessus remplacer $T\backslash G$ par $Z\backslash G$, la mesure sur ce dernier ensemble étant normalisée comme en I.1. En général, on choisira la mesure sur $T\backslash G$ telle que la fonction ϕ_f soit localement constante sur G^{reg}.

<u>Proposition III.2.</u> <u>Il existe un ensemble</u> $\{\Gamma_U\ ;\ U \in \mathcal{U}\}$ <u>de fonctions sur</u> $K \cap G^{reg}$ <u>uniquement déterminé, tel que pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ <u>et tout</u> $t \in K \cap G^{reg}$, <u>on ait</u> <u>l'égalité</u>

$$\phi_f(t) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \Gamma_U(t) J_U f.$$

Cette proposition résulte des travaux de Clozel [Cl]. Cf.[W] pour la preuve de l'existence des fonctions Γ_U. Leur unicité résulte du corollaire III.1. □

3. <u>Proposition III.3.</u> <u>Soit</u> $\varphi \in C_c^\infty(G)$. <u>Supposons</u> $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset G_e \cap K$. <u>Pour tout</u> $U \in \mathcal{U}$, <u>il existe</u> $r_U(\varphi) \in \mathbb{C}$ <u>tel que pour tout</u> $s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, <u>on ait l'égalité</u>

$$R_A^G(s,\varphi) = \sum_{U \in \mathcal{U}} r_U(\varphi)\, \ell^U(s).$$

<u>Démonstration</u>. Soit $f \in \mathcal{H}(G)$. On a l'égalité

$$I(f,\varphi) = \int_G \varphi(h)\, \Phi_f^G(h)\, dh.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset G_e \cap K$, il résulte de la proposition III.2 que $I(f,\varphi)=0$ si $J_U f=0$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Donc pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $a_U(\varphi) \in \mathbb{C}$ tel que

$$I(f,\varphi) = \sum_{U \in \mathcal{U}} a_U(\varphi) J_U f$$

pour toute $f \in \mathcal{H}(G)$, i.e. d'après le lemme III.1.1

$$I(f,\varphi) = \eta^{-n} \int_{\mathrm{Re}(s)=0} \sum_{U \in \mathcal{U}} a_U(\varphi)\, \ell^U(s)\, \tilde{f}(s)\, ds$$

En comparant avec l'énoncé du théorème, on voit qu'il existe des coefficients $r_U(\varphi)$ tels que, en posant $\Phi(s) = R_A^G(s,\varphi) - \sum_{U\in\mathcal{U}} r_U(\varphi)\ell^U(s)$, on ait

(1) $$\int_{\mathrm{Re}(s)=0} \Phi(s)\tilde{f}(s)\, ds = 0$$

pour toute $f\in\mathcal{H}(G)$. La fonction Φ est C^∞ sur $i\mathfrak{a}/\eta\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}$. Supposons démontré que $R_A^G(.,\varphi)$ est invariante par W. Comme les fonctions ℓ^U le sont, Φ l'est aussi. Comme f décrit les polynômes en q^{s_i} invariants par W, quand f décrit $\mathcal{H}(G)$, la relation (1) implique alors $\Phi=0$.

Il reste à démontrer que $R_A^G(s,\varphi) = R_A^G(ws,\varphi)$ pour tous $s\in i\mathfrak{a}$, $w\in W$. $P\in\mathcal{P}(A)$, $\mu\in i\mathfrak{a}$, un calcul formel montre que

$$\text{Trace}\,[\,I_{B|P}(ws)I_{P|B}(ws+\mu)\pi_B(ws,\varphi)] = \text{Trace}\,[\,I_{w^{-1}B|w^{-1}P}(s)I_{w^{-1}P|w^{-1}B}(s+w^{-1}\mu)\,\pi_{w^{-1}B}(s,\varphi)]\,.$$

De plus $\theta_P(\mu) = \theta_{w^{-1}P}(w^{-1}\mu)$. D'où

$$\begin{aligned} R_A^G(ws,\varphi,\mu) &= \sum_{P\in\mathcal{P}(A)} \text{Trace}\,[\,I_{B|P}(ws)I_{P|B}(ws+\mu)\pi_B(ws,\varphi)]\,\theta_P(\mu)^{-1} \\ &= \sum_{P\in\mathcal{P}(A)} \text{Trace}\,[\,I_{w^{-1}B|P}(s)I_{P|w^{-1}B}(s+w^{-1}\mu)\,\pi_{w^{-1}B}(s,\varphi)]\,\theta_P(w^{-1}\mu)^{-1} \\ &= \overline{R}_A^G(s,\varphi,w^{-1}\mu), \end{aligned}$$

où $\overline{R}$ est défini de façon analogue à R, en remplaçant B par $w^{-1}B$. D'où

$$R_A^G(ws,\varphi,0) = \overline{R}_A^G(s,\varphi,0)\,.$$

On a déjà remarqué que $\overline{R}_A^G(s,\varphi,0) = R_A^G(s,\varphi,0)$ ([A2] §7). Cela achève la démonstration. □

Il ne semble pas évident de démontrer directement la proposition. Le seul cas accessible (pour l'auteur) est celui de GL(2). On a alors, pour $\mu\in i\mathfrak{a}$

$$R_A^G(s,\varphi,\mu) = \frac{\sqrt{2}}{\langle\alpha,\mu\rangle}\,\text{Trace}\,[\,\pi(s,\varphi)] + \frac{-\sqrt{2}}{\langle\alpha,\mu\rangle}\,\text{Trace}\,[\,I(w,ws)I(w,s+\mu)\pi(s,\varphi)]$$

où w est le seul élément non trivial de W et α l'unique racine > 0. Le premier terme est nul car $\text{Supp}(\varphi)\subset G_e$. Comme $\text{Supp}(\varphi)\subset K$, $\pi(s,\varphi)$ est indépendant de s, on peut le noter $\pi(\varphi)$. Posons $I(t)=I(w,\frac{t\alpha}{2})$ pour $t\in\mathbb{C}$. On obtient

$$R_A^G(s,\varphi,\mu) = \frac{-\sqrt{2}}{\langle\alpha,\mu\rangle} \text{ Trace } [I(-\langle\alpha,s\rangle)I(\langle\alpha,s+\mu\rangle)\pi(\varphi)] .$$

On a le lemme bizarre :

<u>Lemme III.3.</u> <u>Pour</u> $u,t\in\mathbb{C}$, <u>on a l'égalité</u>

$$I(t)\circ I(u) = A(t,u)I(1) + B(t,u)I(t+u),$$

<u>où</u>

$$A(t,u)=(1+q^{-1})(1-q^{-t})(1-q^{-u})(1-q^{-(t+u)})(1-q^{-1-t})^{-1}(1-q^{-1-u})^{-1}(1-q^{1-(t+u)})^{-1},$$

$$B(t,u)=-q^{-1}(1-q^{1-u})(1-q^{1-t})(1-q^{-1-(t+u)})(1-q^{-1-u})^{-1}(1-q^{-1-t})^{-1}(1-q^{1-(t+u)})^{-1}.$$

La démonstration n'est qu'un simple calcul. □

Remarquons que $I(1)$ n'est autre que la projection orthogonale sur 1_K. On déduit de ce lemme une relation de la forme

$$R_A^G(s,\varphi,\mu) = e(s,x) \text{ Trace } [I(1)\pi(\varphi)] + \frac{f(s,x)}{x} \text{ Trace } [I(x)\pi(\varphi)]$$

où $x = \langle\alpha,\mu\rangle$ et $e(s,x)$, $f(s,x)$ sont C^∞ en $x=0$. Puis

$$R_A^G(s,\varphi)=e(s) \text{ Trace } [I(1)\pi(\varphi)]+f'(s) \text{ Trace } [I(0)\pi(\varphi)]+f(s) \text{ Trace } [I'(0)\pi(\varphi)],$$

où $e(s)=e(s,0)$, $f'(s) = \left[\frac{d}{dx} f(s,x)\right]_{x=0}$, $f(s)=f(s,0)$. Mais $I(0)=id_K$ et

Trace $[I(0)\pi(\varphi)]=0$. D'où

(2) $R_A^G(s,\varphi)=e(s) \text{ Trace } [I(1)\pi(\varphi)]+f(s) \text{ Trace } [I'(0)\pi(\varphi)]$.

Il est facile d'expliciter

$$e(s) = \frac{2\sqrt{2}}{q-1}\log(q)\,\ell^1(s),$$

$$f(s) = -\sqrt{2}\,\ell^U(s),$$

où ici ℓ^1, resp. ℓ^U, correspondent à l'orbite unipotente triviale, resp. non triviale. La relation (2) redémontre la proposition dans ce cas.

4. Soit L un sous-groupe de Lévi standard de G, disons $L\simeq GL(\ell_1,F)\times\dots GL(\ell_t,F)$. Pour $g=(g_1,\dots,g_t)\in L$, notons $h_L(g)$ l'élément

$$(\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{\ell_1},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{\ell_2},a_3,\dots)$$

de $\mathfrak{a}_L$, où pour $i\in\{1,\dots,t\}$, $a_i\in\mathbb{Q}$ vérifie $|\det g_i|=q^{-\ell_i a_i}$. Pour $P\in\mathcal{P}(L)$, notons

$\mathcal{K}_P$ l'espace des fonctions localement constantes sur $K \cap P\backslash K$, à valeurs complexes. Pour $s \in \mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$, ont peut prolonger $u \in \mathcal{K}_P$ en une fonction $u_s : G \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$u_s(\ell ng) = q^{-<\rho_P+s,h_L(\ell)>} u_s(g)$$

pour tous $g \in G$, $\ell \in L$, $n \in N_P$. Notons $\mathrm{Ind}_P^G(s)$ l'espace de ces fonctions u_s. Les opérateurs suivants sont définis sur $\mathcal{K}_P$ mais il sera parfois utile de les considérer comme définis sur $\mathrm{Ind}_P^G(s)$. Pour $g \in G$, on note $\pi_P(s,g)$ l'opérateur de $\mathcal{K}_P$ défini par $[\pi_P(s,g)(u)](k) = u_s(kg)$ pour tous $u \in \mathcal{K}_P$, $k \in K$. Si $\varphi \in C_c^\infty(G)$, on définit de même $\pi_P(s,\varphi)$. Soient $P, P' \in \mathcal{P}(L)$ et $s \in \mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$. On définit un opérateur d'entrelacement $I_{P'|P}(s) : \mathcal{K}_P \to \mathcal{K}_{P'}$, par

$$[I_{P'|P}(s)u](k) = \ell_{P'|P}(s) \int_{N_P \cap N_{P'}\backslash N_{P'}} u_s(nk)\, dn$$

pour tous $u \in \mathcal{K}_P$, $k \in K$, où $\ell_{P'|P}(s)$ est le facteur de normalisation tel que $I_{P'|P}(s)1_K = 1_K$. Ce facteur se calcule de la façon suivante. Posons $B(P) = (B \cap L)N_P$, $B(P') = (B \cap L)N_{P'}$. On a $B(P), B(P') \in \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{K}_P \subset \mathcal{K}_{B(P)}$, $\mathcal{K}_{P'} \subset \mathcal{K}_{B(P')}$ et $\pi_P(s,.)$, resp. $\pi_{P'}(s,.)$, apparait comme sous-représentation de $\pi_{B(P)}(s+\sigma^L,.)$, resp. $\pi_{B(P')}(s+\sigma^L,.)$ (cf.III.1 pour la définition de σ^L). On doit alors avoir

$$I_{P'|P}(s) = I_{B(P')|B(P)}(s+\sigma^L)\big|_{\mathcal{K}_P},$$

et on en déduit

$$\ell_{P'|P}(s) = \ell_{B(P')|B(P)}(s+\sigma^L) = \prod_{\alpha \in D(P,P')} (1-q^{-<s+\sigma^L,\alpha>})(1-q^{-1-<s+\sigma^L,\alpha>})^{-1}$$

où $D(P,P')$ est l'ensemble des $\alpha \in \Sigma^G$ tels que $\alpha >_{B(P)} 0$ et $\alpha <_{B(P')} 0$, ce qui équivaut à $\alpha >_P 0$ et $\alpha <_{P'} 0$ (pour un parabolique Q de G, avec $A \subset Q$, et pour une racine $\alpha \in \Sigma^G$, on note $\alpha >_Q 0$, resp. $\alpha <_Q 0$, si α, resp. $-\alpha$, intervient dans l'algèbre de Lie de N_Q) On pose

$$\tilde{I}_{P'|P}(s) = \Big[\prod_{\alpha \in D(P,P')} (1-q^{-1-<s+\sigma^L,\alpha>})\Big]\, I_{P'|P}(s).$$

On vérifie que si $s=(s_1,\dots,s_n)$ et $u \in \mathcal{K}_P$, l'élément $\tilde{I}_{P'|P}(s)u$ est polynomial en en $q^{s_1}, q^{-s_1}, \dots, q^{s_n}, q^{-s_n}$.

Notons $P^\circ(L)$, ou simplement P°, le sous-groupe de Borel de G pour lequel les racines positives sont

$$\{\alpha\in\Sigma^G-\Sigma^L\ ;\ \alpha>0\}\cup\{\alpha\in\Sigma^L\ ;\ \alpha<0\}.$$

Le sous-groupe parabolique standard de Lévi L est $LB(=LP^\circ)$. Notons

$$i_L : \mathcal{K}_{LB}\to\mathcal{K}_{P^\circ},\ i'_L : \mathcal{K}_{LB}\to\mathcal{K}_B$$

les injections naturelles et

$$e_L : \mathcal{K}_{P^\circ}\to\mathcal{K}_{LB},\ e'_L : \mathcal{K}_B\to\mathcal{K}_{LB}$$

les projections orthogonales. On a par exemple

$$(e_Lf)(k) = \int_{K^L} f(hk)\ dh$$

pour tous $f\in\mathcal{K}_{P^\circ}$, $k\in K$.

<u>Lemme III.4.1.</u> <u>Soit</u> $s_L\in\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$, <u>posons</u> $s=\sigma^L+s_L$. <u>On a l'égalité</u>

$$I_{B|P^\circ}(s) = i'_L\circ e_L.$$

<u>Démonstration</u>. L'opérateur $I_{B|P^\circ}(s)$ est induit à partir d'un opérateur

$$I^L_{B\cap L|P^\circ\cap L}(\sigma^L) : \mathrm{Ind}^L_{P^\circ\cap L}(\sigma^L)\to\mathrm{Ind}^L_{B\cap L}(\sigma^L).$$

On est ramené au cas L=G. Il est bien connu dans ce cas que $I_{B|P^\circ}(\sigma^G)$ a pour image l'unique sous-module irréductible de $\mathrm{Ind}^G_B(\sigma^G)$, qui est de dimension 1, et qui correspond à $i'_L(\mathcal{K}_{LB})$ quand on identifie $\mathrm{Ind}^G_B(\sigma^G)$ à $\mathcal{K}_B$. De plus $I_{B|P^\circ}(s)$ commute à l'action de K. Donc les deux opérateurs de l'énoncé sont proportionnels. En comparant leurs valeurs sur la fonction 1_K, on obtient leur égalité. □

Pour $s\in\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$, $\mu\in i\mathfrak{a}_L$, $P\in\mathcal{P}(L)$ et $\varphi\in C^\infty_c(G)$, posons

$$R_P(L,s,\varphi,\mu) = \mathrm{Trace}\,[\,I_{LB|P}(s)I_{P|LB}(s+\mu)\pi_{LB}(s,\varphi)]$$

L'ensemble des fonctions $R_P(L,s,\varphi,.)$ pour $P\in\mathcal{P}(L)$ est une (G,L)-famille ([A2] §6).

<u>Remarques</u>. (1) Pour L=A, les fonctions $R_P(A,s,\varphi,.)$ sont celles notées $R_P(s,\varphi,.)$ en II.6.

(2) La (G,L)-famille $\{R_P(L,s,\varphi,.)\}$ ne doit pas être confondue avec la (G,L)-famille déduite de la (G,A)-famille $\{R_P(A,s,\varphi,.)\ ;\ P\in\mathcal{P}(A)\}$.

On peut introduire la fonction $R_L(L,s,\varphi,\mu)$, puis $R_L(L,s,\varphi) = R_L(L,s,\varphi,0)$.

Lemme III.4.2. Soient $\{d_P\ ;\ P\in\mathcal{P}(L)\}$ une (G,L)-famille, $\{c_P = d_P R_P(L,s,\varphi,.)\ ; P\in\mathcal{P}(L)\}$ la famille produit, c_L la fonction déduite de cette dernière famille, d la valeur commune $d_P(0)$ pour $P\in\mathcal{P}(L)$. Supposons $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset G_e$. Alors on a l'égalité

$$c_L(0) = dR_L(L,s,\varphi).$$

La démonstration est analogue à celle du lemme II.6. □

Pour $s\in\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$, $\mu\in i\mathfrak{a}_L$, $P,P'\in\mathcal{P}(L)$, posons

$$j_{P'|P}(s,\mu) = \prod_{\alpha\in D(P,P')} (1-q^{-1-\langle s+\mu+\sigma^L,\alpha\rangle})(1-q^{-1-\langle s+\sigma^L,\alpha\rangle})^{-1}.$$

L'ensemble des fonctions $j_{P|LB}(s,.)$ pour $P\in\mathcal{P}(L)$ est une (G,L)-famille. Pour $P\in\mathcal{P}(L)$, on pose

$$\tilde{R}_P(L,s,\varphi,\mu) = j_{P|LB}(s,\mu)R_P(L,s,\varphi,\mu).$$

Cela définit la (G,L)-famille produit. Remarquons qu'on a l'égalité

$$\tilde{R}_P(L,s,\varphi,\mu) = \left[\prod_{\alpha\in\underline{D}(P,LB)} (1-q^{-1-\langle s+\sigma^L,\alpha\rangle})^{-1}\right] \mathrm{Trace}\left[\tilde{I}_{LB|P}(s)\tilde{I}_{P|LB}(s+\mu)\pi_{LB}(s,\varphi)\right],$$

où $\underline{D}(P,LB) = D(P,LB)\cup D(LB,P)$.

Proposition III.4. Soient L un sous-groupe de Lévi standard de G, $L\simeq GL(\ell_1,F)\times\ldots\times GL(\ell_t,F)$, et $\varphi\in C_c^\infty(G)$. Supposons $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset G_e$. Soit $s_L\in\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$ un élément en position générale. Alors la fonction sur $\mathfrak{a}^L_{\mathbb{C}}$ définie par

$$s^L \to \ell^L(s^L)^{-1}R_A(A,s^L+s_L,\varphi)$$

est holomorphe en $s^L = \sigma^L$. Sa valeur en ce point est égale à $\gamma R_L(L,s_L,\varphi)$, où

$$\gamma = (\ell_1\ldots\ell_t)^{1/2}(-\log q)^{n-t}(1-q)^{-n}\prod_{k=1}^{t}\left[q^{-\ell_k(\ell_k-1)/2}(1-q^{\ell_k})\right]$$

La démonstration suivante est due à Arthur. Il nous semble plus simple de l'adapter au cas particulier qui nous intéresse que de déduire notre énoncé de l'énoncé de Arthur ([A1] proposition 9.1).

Démonstration. Pour $s^L\in\mathfrak{a}^L_{\mathbb{C}}$, posons $s=s^L+s_L$. D'après les définitions précédant l'énoncé et le lemme 1.2, on a

$$R_A(A,s,\varphi) = \tilde{R}_A(A,s,\varphi).$$

Soit ν un point $i\mathfrak{a}$, en position générale. Pour une fonction f définie sur un sous-ensemble V de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ stable par translation par $i\mathfrak{a}$, et pour $m\in\mathbb{N}$, $\mu\in V$, posons

$$(\partial^m f)(\mu) = \left[\frac{d^m}{dx^m} f(\mu+x\nu)\right]_{x=0}.$$

D'après [A2] §6.5, on a

$$R_A(A,s,\varphi) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{P\in\mathcal{P}(A)} \partial^{n-1} R_P(L,s,\varphi,0)\,\theta_P(\nu)^{-1},$$

où encore

$$\tilde{R}_A(A,s,\varphi) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{P\in\mathcal{P}(A)} \left[\prod_{\alpha\in\underline{D}(P,B)} (1-q^{-1-<s,\alpha>})^{-1}\right] \text{Trace}\left[\tilde{I}_{B|P}(s)\,\partial^{n-1}\tilde{I}_{P|B}(s)\right.$$

$$\left.\pi_B(s,\varphi)\right]\theta_P(\nu)^{-1}.$$

Les opérateurs $\tilde{I}$ sont polynomiaux en $q^{s_1}, q^{-s_1}, \ldots, q^{s_n}, q^{-s_n}$, si $s=(s_1,\ldots,s_n)$. A fortiori ils sont holomorphes. L'holomorphie de $\ell^L(s^L)^{-1}\tilde{R}_A(A,s^L+s_L,\varphi)$ est donc controlée par celle des fonctions

$$\ell^L(s^L)^{-1} \prod_{\alpha\in\underline{D}(P,B)} (1-q^{-1-<s,\alpha>})^{-1}$$

$$= \left[\prod_{\alpha\in\Sigma^L} (1-q^{-<s^L,\alpha>})^{-1}\right] \left[\prod_{\alpha\in E(P)} (1-q^{-1-<s^L,\alpha>})\right] \left[\prod_{\alpha\in E'(P)} (1-q^{-1-<s,\alpha>})^{-1}\right],$$

où

$$E(P) = \{\alpha\in\Sigma^L; \alpha>_B 0,\ \alpha>_P 0\} \cup \{\alpha\in\Sigma^L; \alpha<_B 0, \alpha<_P 0\},$$

$$E'(P) = \{\alpha\in\Sigma^G; \alpha\notin\Sigma^L,\ \alpha>_B 0,\ \alpha<_P 0\} \cup \{\alpha\in\Sigma^G; \alpha\notin\Sigma^L, \alpha<_B 0, \alpha>_P 0\}.$$

Le premier produit n'a pas de pôle en $s^L=\sigma^L$. Le second non plus, évidemment. Le troisième produit porte sur des $\alpha\notin\Sigma^L$. Pour un tel α, $<s_L,\alpha>$ n'est pas identiquement nul. Alors pour s_L général, ce dernier produit n'a pas de pôle en $s^L=\sigma^L$. D'où la première assertion de l'énoncé. Pour s_L général posons maintenant $s^L=\sigma^L$. On a $<\sigma^L,\alpha>=-1$ pour toute racine simple dans Σ^L. Le deuxième produit ci-dessus est donc nul seulement si ces racines n'appartiennent pas à E(P), i.e. si elles sont toutes $<_P 0$. Posons $P^\circ=P^\circ(L)$. Introduisons la distance $d(P,P')$ usuelle entre sous-groupes de Borel. La condition précédente équivaut à

(1) $$d(P,B) = d(P,P^\circ) + d(P^\circ,B).$$

Notons $\mathcal{P}'$ l'ensemble des $P\in\mathcal{P}(A)$ vérifiant cette condition. Alors la valeur $r(s_L)$ de la fonction $\ell^L(s^L)^{-1}R_A(A,s^L+s_L,\varphi)$ en $s^L=\sigma^L$ est égale à

(2) $$r(s_L) = \gamma_1 \sum_{P\in\mathcal{P}'} r_P(s_L)\ \text{Trace}\left[\tilde{I}_{B|P}(s)\partial^{n-1}\ \tilde{I}_{P|B}(s)\pi_B(s,\varphi)\right]\ \theta_P(\nu)^{-1}.$$

où $s = \sigma^L + s_L$,

$$\gamma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{\alpha\in\Sigma^L} (1-q^{-<\sigma^L,\alpha>})^{-1} ,$$

et

$$r_P(s_L) = \left[\prod_{\alpha\in E(P)} (1-q^{-1-<\sigma^L,\alpha>})\right]\left[\prod_{\alpha\in E'(P)} (1-q^{-1-<\sigma^L+s_L,\alpha>})^{-1}\right].$$

Fixons $P\in\mathcal{P}'$. On vérifie grâce à la relation (1) les égalités

$$\tilde{I}_{B|P}(s) = \tilde{I}_{B|P^\circ}(s)\tilde{I}_{P^\circ|P}(s),\ \tilde{I}_{P|B}(s) = \tilde{I}_{P|P^\circ}(s)\tilde{I}_{P^\circ|B}(s).$$

On obtient d'abord

$$\text{Trace}\left[\tilde{I}_{B|P}(s)\partial^{n-1}\tilde{I}_{P|B}(s)\pi_B(s,\varphi)\right] = \text{Trace}\left[\tilde{I}_{B|P^\circ}(s)\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\partial^{n-1}\tilde{I}_{P|B}(s)\pi_B(s,\varphi)\right]$$

$$= \text{Trace}\left[\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\partial^{n-1}\tilde{I}_{P|B}(s)\pi_B(s,\varphi)\tilde{I}_{B|P^\circ}(s)\right]$$

$$= \text{Trace}\left[\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\partial^{n-1}\tilde{I}_{P|B}(s)\tilde{I}_{B|P^\circ}(s)\pi_{P^\circ}(s,\varphi)\right].$$

En développant la dérivée selon la formule usuelle, on obtient

(3) $$\text{Trace}\left[I_{B|P}(s)\partial^{n-1}I_{P|B}(s)\pi_B(s,\varphi)\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-i}{i} T_P(i),$$

où

$$T_P(i) = \text{Trace}\left[\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\partial^{n-1-i}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s)\partial^{i}\tilde{I}_{P^\circ|B}(s)\tilde{I}_{B|P^\circ}(s)\pi_{P^\circ}(s,\varphi)\right].$$

<u>Lemme III.4.3.</u> (a) <u>Pour</u> $i=0,\dots,n-t-1$, <u>on a</u> $\partial^i\tilde{I}_{P^\circ|B}(s)\tilde{I}_{B|P^\circ}(s) = 0$.

(b) <u>On a l'égalité</u>

$$\partial^{n-t}\tilde{I}_{P^\circ|B}(s)\tilde{I}_{B|P^\circ}(s) = \gamma_2 i_L\circ e_L,$$

où

$$\gamma_2 = (n-t)!(\log q)^{n-t}\left[\prod_{\alpha\in\Delta^L}<\nu,\alpha>\right]\prod_{\alpha\in\Sigma^L-\Delta^L}(1-q^{-1-<\sigma^L,\alpha>}).$$

Rappelons que Δ^L est l'ensemble des racines simples de L.

<u>Démonstration</u>. Pour $j=1,\ldots,t$, notons $L(j)$ le sous-groupe de Lévi de L (et de G) des éléments $(g_1,\ldots, g_t)$ de L tels que g_j appartienne au sous-tore diagonal de $GL(\ell_j,F)$. Posons $P^\circ(j)=P^\circ(L(j))$. Soit $s'\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$. On a l'égalité

$$\tilde{I}_{P^\circ|B}(s')\tilde{I}_{B|P^\circ}(s) = \prod_{j=1}^{t} \tilde{I}_{P^\circ|P^\circ(j)}(s')\tilde{I}_{P^\circ(j)|P^\circ}(s),$$

le produit étant pris dans n'importe quel ordre. Par la formule usuelle de dérivation d'un produit, on obtient

$$\partial^i\tilde{I}_{P^\circ|B}(s)\tilde{I}_{B|P^\circ}(s) = \sum_{i_1+\ldots+i_t=i} \frac{i!}{i_1!\ldots i_t!} \prod_{j=1}^{t} \partial^{i_j}\tilde{I}_{P^\circ|P^\circ(j)}(s)\tilde{I}_{P^\circ(j)|P^\circ}(s)$$

On est ramené à considérer séparément chaque bloc $GL(\ell_j,F)$, i.e. au cas L=G. Supposons donc L=G. D'après le lemme 1.1, $\tilde{I}_{B|P^\circ}(\sigma^G)$ est proportionnel à $i'_G\circ e_G$. Pour $s'\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ l'image de l'opérateur $\tilde{I}_{P^\circ|B}(s')\circ i'_G$ est contenue dans celle de i_G, i.e. dans $\mathbb{C}1_K$. Il existe donc $\gamma(i)\in\mathbb{C}$ tel que

$$\partial^i\tilde{I}_{P^\circ|B}(\sigma^G)\tilde{I}_{B|P^\circ}(\sigma^G) = \gamma(i)i_G\circ e_G.$$

Et $\gamma(i)$ est déterminé par la relation

$$\partial^i\tilde{I}_{P^\circ|B}(\sigma^G)\tilde{I}_{B|P^\circ}(\sigma^G)1_K = \gamma(i)1_K,$$

i.e.

$$\left[\frac{d^i}{dx^i} \tilde{I}_{P^\circ|B}(\sigma^G+x\nu)\tilde{I}_{B|P^\circ}(\sigma^G)1_K\right]_{x=0} = \gamma(i)1_K.$$

On calcule

$$\tilde{I}_{P^\circ|B}(\sigma^G+\nu)\tilde{I}_{B|P^\circ}(\sigma^G)1_K = \left[\prod_{\alpha>0} (1-q^{-1+\langle\sigma^G,\alpha\rangle})(1-q^{-1-\langle\sigma^G+x\nu,\alpha\rangle})\right] 1_K ,$$

d'où

$$\gamma(i) = \left[\prod_{\alpha>0} (1-q^{-1+\langle\sigma^G,\alpha\rangle})\right] \left[\frac{d^i}{dx^i} \prod_{\alpha>0} (1-q^{-1-\langle\sigma^G+x\nu,\alpha\rangle})\right]_{x=0}.$$

Mais $1-q^{-1-\langle\sigma^G,\alpha\rangle}=0$ pour toute racine simple $\alpha\in\Delta^G$. Pour que l'expression ci-dessus soit non nulle, tous ces termes doivent donc être dérivés, ce qui implique $i \geqslant n-1$. En $i=n-1$, on obtient

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \prod_{\alpha>0} (1-q^{-1-<\sigma^G+x\nu,\alpha>})\right]_{x=0} = (n-1)! \left[\prod_{\alpha>0,\alpha\notin\Delta^G} (1-q^{-1-<\sigma^G,\alpha>})\right]$$

$$\prod_{\alpha\in\Delta^G} \left[\frac{d}{dx} (1-q^{-1-<\sigma^G+x\nu,\alpha>})\right]_{x=0} .$$

Pour $\alpha\in\Delta^G$, on a $-1-<\sigma^G,\alpha> = 0$ et

$$\left[\frac{d}{dx} (1-q^{-1-<\sigma^G+x\nu,\alpha>})\right]_{x=0} = <\nu,\alpha> \log q.$$

En regroupant nos trois dernières formules, on obtient l'expression (b). □

Poursuivons la démonstration de la proposition. Multiplions l'expression (3) par $\theta_P(\nu)^{-1}$. Supposons $\nu = y\nu^L+\nu_L$, où ν^L, resp. ν_L, est un point général fixé de $i\mathfrak{a}^L$, resp. $i\mathfrak{a}_L$, et $Y\in\mathbb{R}$, $y>0$. Faisons tendre y vers 0. On calcule aisément

$$\lim_{y\to 0} \partial^{n-1-i}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s) = \partial'^{n-1-i}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s),$$

où pour toute fonction f définie sur un sous-ensemble V de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ stable par translation par $i\mathfrak{a}_L$ et pour $\mu\in V$, $j\in\mathbb{N}$, on pose

$$(\partial'^j f)(\mu) = \left[\frac{d^j}{dx^j} f(\mu+x\nu_L)\right]_{x=0}.$$

On a

$$\partial^i\tilde{I}_{P^\circ|B}(s) = y^i\partial_1^i\tilde{I}_{P^\circ|B}(s),$$

où ∂_1^i est l'opérateur analogue à ∂^i, relatif au point $\nu_1 = \nu^L+\nu_L$. Enfin $\theta_P(\nu)^{-1}$ a un pôle d'ordre $|\Delta_P\cap\Sigma^L|$ en $y=0$, où Δ_P est l'ensemble des racines simples relativement à P. D'où

$$\lim_{y\to 0} T_P(i)\theta_P(\nu)^{-1} = 0, \text{ si } i>|\Delta_P\cap \Sigma^L|.$$

Remarquons que $|\Delta_P \cap \Sigma^L| \leq n-t$. Posons $\mathcal{P}'' = \{P\in\mathcal{P}' \ ; \ |\Delta_P \cap \Sigma^L| = n-t\}$. D'après ce qui précède et le lemme III.4.3(a), on obtient

$$(4) \qquad \lim_{y\to 0} \mathrm{Trace}\left[\tilde{I}_{B|P}(s)\partial^{n-1}\tilde{I}_{P|B}(s)\pi_B(s,\varphi)\right] \theta_P(\nu)^{-1} =$$

$$\begin{cases} 0, \text{ si } P\notin\mathcal{P}'' , \\ \binom{n-1}{n-t} \lim_{y\to 0} T_P(n-t)\theta_P(\nu)^{-1}, \text{ si } P\in\mathcal{P}''. \end{cases}$$

Pour $P\in\mathcal{P}''$, on a $\Delta_P \cap \Sigma^L = \{-\alpha \; ; \; \alpha\in\Delta^L\}$. On voit que l'application $\mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(A)$ qui a $Q\in\mathcal{P}(L)$ associe $P^\circ(Q) = (P^\circ \cap L)N_Q$, est une bijection de $\mathcal{P}(L)$ sur $\mathcal{P}''$. Fixons maintenant $Q\in\mathcal{P}(L)$ et supposons $P=P^\circ(Q)$. On a

$$\theta_P(\nu)^{-1} = \mathrm{mes}(\mathfrak{a}^G/\mathbb{Z}(\Delta_P)) \prod_{\alpha\in\Delta_P} \langle\alpha, y\nu^L+\nu_L\rangle^{-1},$$

où $\mathbb{Z}(\Delta_P)$ est le réseau de $\mathfrak{a}^G$ engendré par Δ_P, d'où

$$\lim_{y\to 0} y^{n-t}\theta_P(\nu)^{-1} = \mathrm{mes}(\mathfrak{a}^G/\mathbb{Z}(\Delta_P))(-1)^{n-t}\left[\prod_{\alpha\in\Delta^L}\langle\alpha,\nu^L\rangle^{-1}\right]\left[\prod_{\alpha\in\Delta_P-\{-\Delta^L\}}\langle\alpha,\nu_L\rangle^{-1}\right]$$

$$= (-1)^{n-t}\left[\prod_{\alpha\in\Delta^L}\langle\alpha,\nu^L\rangle^{-1}\right]\mathrm{mes}(\mathfrak{a}^G/\mathbb{Z}(\Delta_P))\,\mathrm{mes}(\mathfrak{a}_L^G/\mathbb{Z}(\Delta_Q))^{-1}\theta_Q(\nu_L)^{-1} \; ,$$

où $\mathbb{Z}(\Delta_Q)$ est le réseau de $\mathfrak{a}_L^G$ engendré par Δ_Q i.e. par les projections α_L des $\alpha\in\Delta_P-\{-\Delta^L\}$. On voit que le quotient des mesures est égal à $\mathrm{mes}(\mathfrak{a}^L/\mathbb{Z}(\Delta^L))$, i.e. à $(\ell_1\ldots\ell_t)^{1/2}$. Avec le (b) du lemme III.4.3, on conclut

$$(5) \qquad \lim_{y\to 0} T_P(n-t)\theta_P(\nu)^{-1} = (n-t)!(-\log q)^{n-t}(\ell_1\ldots\ell_t)^{1/2}\left[\prod_{\alpha\in\Sigma^L-\Delta^L}\right.$$

$$\left.(1-q^{-1-\langle\sigma^L,\alpha\rangle})\right]\mathrm{Trace}\left[\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s)i_L e_L \pi_{P^\circ}(s,\varphi)\right]\theta_Q(\nu_L)^{-1}.$$

Soient $s'_L\in\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$ et $s'=\sigma^L+s'_L$. D'après le lemme III.4.1, il existe une application $\varepsilon_L : \mathrm{Ind}_{P^\circ}^G(s') \to \mathrm{Ind}_{LB}^G(s'_L)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$(6) \qquad \begin{tikzcd}
K_B \arrow[rr] & & \mathrm{Ind}_B^G(s') & \\
& K_{LB} \arrow[ul, "i_L"'] \arrow[rr] & & \mathrm{Ind}_{LB}^G(s'_L) \arrow[ul] \\
K_{P^\circ} \arrow[uu, "I_{B|P^\circ}(s')"] \arrow[ur, "e_L"] \arrow[rr] & & \mathrm{Ind}_{P^\circ}^G(s') \arrow[uu] \arrow[ur, "\varepsilon_L"'] &
\end{tikzcd}$$

On a un diagramme analogue en remplaçant P° par P, B par $B(Q)$ et LB par Q.

Enfin on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}_B^G(s') \arrow[rr, "\tilde{I}_{B(Q)|B}(s')"] & & \mathrm{Ind}_{B(Q)}^G(s') & \\
& \mathrm{Ind}_{LB}^G(s'_L) \arrow[ul] \arrow[rr, "\tilde{I}_{Q|LB}(s'_L)"] & & \mathrm{Ind}_Q^G(s'_L) \arrow[ul] \\
\mathrm{Ind}_{P^\circ}^G(s') \arrow[uu, "I_{B|P^\circ}(s')"] \arrow[ur, "\varepsilon_L"] \arrow[rr, "\tilde{I}_{P|P^\circ}(s')"] & & \mathrm{Ind}_P^G(s') \arrow[uu] \arrow[ur, "\varepsilon_{L,P}"'] &
\end{tikzcd}$$

(la condition (1) permet d'utiliser ici indifféremment I ou $\tilde{I}$). Comme le rectangle et le parallélogramme du haut sont commutatifs, celui du bas l'est aussi. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_{LB} \arrow[r, "\tilde{I}_{Q|LB}(s'_L)"] & K_Q \\ K_{P^\circ} \arrow[u, "e_L"] \arrow[r, "\tilde{I}_{P|P^\circ}(s')"'] & K_P \arrow[u, "e_{L,P}"'] \end{tikzcd}$$

où $e_{L,P}$ est la projection orthogonale. On peut dériver ce diagramme en $s'_L=s_L$ dans la direction de ν_L. On peut ensuite composer le diagramme obtenu avec un diagramme analogue obtenu en inversant les rôles de P et P°. On obtient alors la relation

$$e_L\,\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\;\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s) = \tilde{I}_{LB|Q}(s_L)\;\partial'^{\,t-1}I_{Q|LB}(s_L)e_L.$$

En composant avec i_L, et puisque e_Li_L est l'identité de K_{LB}, on obtient

$$e_L\,\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\;\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s)i_L = \tilde{I}_{LB|Q}(s_L)\;\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{Q|LB}(s_L).$$

Par ailleurs d'après (6), on a l'égalité

$$e_L\pi_{P^\circ}(s,\varphi) = \pi_{LB}(s_L,\varphi)e_L.$$

De ces deux égalités et de l'invariance de la trace, on déduit

$$(7)\quad \mathrm{Trace}\left[\tilde{I}_{P^\circ|P}(s)\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{P|P^\circ}(s)i_Le_L\pi_{P^\circ}(s,\varphi)\right] = \mathrm{Trace}\left[\tilde{I}_{LB|Q}(s_L)\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{Q|LB}(s_L)\,\pi_{LB}(s_L,\varphi)\right].$$

De (2), (4), (5) et (7), on déduit l'égalité

$$r(s_L) = \gamma_3 \sum_{Q\in P(L)} t_Q(s_L)\;\mathrm{Trace}\left[\tilde{I}_{LB|Q}(s_L)\partial'^{\,t-1}\tilde{I}_{Q|LB}(s_L)\pi_{LB}(s_L,\varphi)\right]\theta_Q(\nu_L)^{-1},$$

où

$$t_Q(s_L) = \prod_{\alpha\in \underline{D}(Q,LB)} (1-q^{-1-\langle\sigma^L+s_L,\alpha\rangle})^{-1},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{(t-1)!}(\ell_1\dots\ell_t)^{1/2}(-\log q)^{n-t}\left[\prod_{\alpha\in\Sigma^L-\Delta^L}(1-q^{-1-\langle\sigma^L,\alpha\rangle})\right]\left[\prod_{\alpha\in\Sigma^L}(1-q^{\langle\sigma^L,\alpha\rangle})^{-1}\right]$$

En inversant les calculs du début de la démonstration, on obtient alors

$$r(s_L) = (t-1)!\gamma_3\tilde{R}_L(L,s_L,\varphi),$$

ou encore, d'après le lemme III.4.2

(8) $$r(s_L) = (t-1)!\gamma_3 R_L(L,s_L,\varphi).$$

On calcule aisément le produit figurant dans la définition de γ_3. C'est le produit des termes correspondant à chaque bloc $GL(\ell_i,F)$. On est ramené au cas $L=G$. Alors

$$\left[\prod_{\alpha\in\Sigma-\Delta}(1-q^{-1-<\sigma^G,\alpha>})\right]\left[\prod_{\alpha\in\Sigma}(1-q^{<\sigma^G,\alpha>})^{-1}\right] = \left[\prod_{1\leq i<i+1<j\leq n}(1-q^{-1-i+j})\right]$$

$$\left[\prod_{1\leq i<j\leq n}(1-q^{-1-j+i})(1-q^{-i+j})^{-1}(1-q^{i-j})^{-1}\right]$$

$$= (1-q^{-n})(1-q^{1-n})\dots(1-q^{-2})(1-q^{-1})^{1-n}(1-q)^{-1}(1-q^2)^{-1}\dots(1-q^{n-1})^{-1}$$

$$= (1-q)^{-n}(1-q^n)q^{-n(n-1)/2}.$$

On calcule alors $(t-1)!\gamma_3$ et (8) devient l'égalité de l'énoncé. □

5. Soient $U\in\mathcal{U}$, P un sous-groupe parabolique standard de G, de Lévi $L\simeq GL(\ell_1,F)\times\dots\times GL(\ell_t,F)$. Supposons que U est l'orbite de Richardson de P. Posons

$$\gamma_U = (-1)^{n-1}\ell_1!\dots\ell_t!(n\ell_1\dots\ell_t)^{1/2}(\log q)^{1-t}|St_W(L)|^{-1}\prod_{k=1}^{t}\left[q^{\ell_k(1-\ell_k)/2}c(\ell_k-1)^{-1}\right].$$

On vérifie que ce terme ne dépend pas du choix de L (tous ces choix sont conjugués). Pour tout ouvert compact $V\subset G$, notons 1_V la fonction caractéristique de V.

<u>Proposition III.5.</u> <u>Soient</u> $U\in\mathcal{U}$, L <u>comme ci-dessus et</u> $x\in G_e\cap K$. <u>Soit</u> V <u>un voisinage ouvert compact de</u> x <u>dans</u> G. <u>Si</u> V <u>est assez petit, on a l'égalité</u>

$$\Gamma_U(x) = \gamma_U(\text{mes } V)^{-1}R_L(L,\sigma_L,1_V).$$

<u>Démonstration</u>. Pour tout $U'\in\mathcal{U}$, le germe $\Gamma_{U'}$ est localement constant. Cela résulte de la formule qui définit les germes, de l'indépendance des formes linéaires $I_{U'}$, et de la constance locale des intégrales orbitales. Soient $x\in G_e\cap K$, V un voisinage de x dans $G_e\cap K$ tel que $\Gamma_{U'}$ soit constant sur V pour tout $U'\in\mathcal{U}$. On a alors

$$I(f,h) = \sum_{U'\in U}\Gamma_{U'}(x)I_{U'}(f)$$

pour tous $h \in V$, $f \in \mathcal{H}(G)$, d'où

$$(\text{mes } V)^{-1} \int_G I(f,h) 1_V(h)\, dh = \sum_{U' \in \mathcal{U}} \Gamma_{U'}(x) I_{U'}(f).$$

Avec les notations du théorème II.10 et de la proposition III., le membre de gauche est égal à

$$\tau'(\text{mes } V)^{-1} \int_{Re(s)=0} \tilde{f}(s) \sum_{U' \in \mathcal{U}} r_{U'}(1_V) \ell^{U'}(s) ds.$$

D'après le lemme III.1.1, le membre de droite vaut

$$\eta^{-n} \int_{Re(s)=0} \tilde{f}(s) \sum_{U' \in \mathcal{U}} \Gamma_{U'}(x) \ell^{U'}(s) ds.$$

On en déduit facilement l'égalité

(1) $\qquad \Gamma_U(x) = \eta^n \tau'(\text{mes } V)^{-1} r_U(1_V).$

On calcule $r_U(1_V)$ de la façon suivante. Soit s_L un point général de $\mathfrak{a}_{L,\mathbb{C}}$. Notons $r(s_L)$ la valeur en $s^L = \sigma^L$ de la fonction $\ell^L(s^L)^{-1} R_A(A, s^L + s_L, 1_V)$. D'après la proposition on a

$$r(s_L) = \gamma\, R_L(L, s_L, 1_V).$$

D'après la proposition III.3 et le lemme III.1.2, on a

$$r(s_L) = \sum_{U' \in \mathcal{U}} r_{U'}(1_V) \ell_1^{U'}(s_L).$$

D'après ce dernier lemme, au point $s_L = \sigma_L$, on obtient

$$r(\sigma_L) = r_U(1_V) d^L |W^G|^{-1} |St_W(L)|.$$

D'où

(2) $\qquad r_U(1_V) = \gamma |W^G| (d^L |St_W(L)|)^{-1} R_L(L, \sigma_L, 1_V).$

L'égalité de l'énoncé résulte de (1),(2) et de l'explicitation des constantes. □

Exemple. Pour $U = \{0\}$, on a $L=G=GL(n,F)$. La représentation $\pi_G(\sigma_G,.)$ est la représentation $|\det(.)|^{(n+1)/2}$. Pour $V \subset K$, on a donc

$$R_G(G, \sigma_G, 1_V) = \text{mes } V.$$

Alors $\Gamma_{\{0\}}(x) = \gamma_{\{0\}} = (-1)^{n-1} n q^{n(n-1)/2} c(n-1)^{-1}$. On retrouve le résultat de Rogawski (pour $GL(n)$)([R]).

BIBLIOGRAPHIE

[A1] J. ARTHUR, Intertwining operators and residues I. Weighted characters preprint.

[A2] J. ARTHUR, The trace formula in invariant form, Annals of Math. 114 (1981), 1-74.

[A3] J. ARTHUR, On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : explicit formula, Amer. J. of Math. 104 (1982) 1289-1336.

[BZ] I.N.BERNSTEIN, A.V.ZELEVINSKI, Induced representations of reductive $\mathcal{P}$-adic groups, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 10 (1977) 441-472.

[Ca] W. CASSELMAN, Introduction to the theory of admissible representations of $\mathcal{P}$-adic reductive groups, preprint.

[Cl] L. CLOZEL, Orbital integrals on p-adic groups. A proof of the Howe conjecture, preprint.

[K] D. KAZHDAN, Cuspidal geometry of p-adic groups, J. d'Analyse Math. 47 (1986), 1-36.

[L] J.P.LABESSE, Some formal properties of the terms in the trace formula, in Morning seminar on trace formula, lecture 13.

[M] I.G.MACDONALD, Spherical functions on a group of p-adic type, Publ. of the Ramanujan Institute, Madras 1971.

[R] J.ROGAWSKI, An application of the building to orbital integrals, Comp. Math. 42 (1981), 417-423.

[W] J.L.WALDSPURGER, Sur les germes de Shalika pour le groupe linéaire, prépublication 1987.

J.L. WALDSPURGER
Université PARIS VII
UFR de Mathématiques
Tour 45/55 - 5ème étage
2, Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
F R A N C E