JOSÉ PANTOJA

JORGE SOTO-ANDRADE

Groupes de Grassmann-Heisenberg et représentations de Weil généralisées pour SL_n, n pair

Astérisque, tome 168 (1988), p. 167-189

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1988__168__167_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 168 (1988), p.167-189.

GROUPES DE GRASSMANN-HEISENBERG ET REPRÉSENTATIONS DE WEIL GÉNÉRALISÉES POUR SL_n , n PAIR

José PANTOJA (1) et Jorge SOTO-ANDRADE (2)

0. Introduction.

Les représentations de WEIL des groupes symplectiques Sp_{2m} (sur un corps local ou fini k) ont l'importance que l'on sait dans plusieurs domaines de la mathématique et la physique mathématique, allant de la théorie des nombres jusqu'à la théorie quantique des champs (cf. [1] et [8], par exemple).

La construction originelle de A. WEIL [22] s'appuyait sur le fait que le groupe Sp_{2m} agit par automorphismes sur le groupe de HEISENBERG $\mathcal{H}_m$ à m degrés de liberté, et donc sur son dual unitaire. Comme le théorème de STONE-von NEUMANN caractérise par son caractère central, non trivial, chaque représentation unitaire irréductible non-unidimensionnelle σ de $\mathcal{H}_m$ (dite représentation de SCHRÖDINGER de $\mathcal{H}_m$) et que l'action de Sp_{2m} fixe le centre de $\mathcal{H}_m$ point par point, on en déduit qu'elle fixe aussi le type d'isomorphie de σ . Ceci fournit des opérateurs d'entrelacement inversibles ρ_g $(g \in Sp_{2m})$ dans l'espace de σ , qui définissent la représentation (projective, en général) de WEIL de Sp_{2m} .

En regardant $Sp_2 = SL_2$ comme le point de bifurcation des séries des Sp_{2m} et des SL_n, nous cherchons dans ce travail à étendre aux groupes SL_n la construction de A. WEIL appliquée au cas de SL_2 .

Nous introduisons, à cette fin, des analogues d'ordre supérieur du groupe $\mathcal{H}_1$ (des "super-groupes" de HEISENBERG, au sens figuré) que l'on appellera groupes de GRASSMANN-HEISENBERG, et qui sont définis comme suit.

Le groupe de GRASSMANN-HEISENBERG associé à un espace vectoriel V de dimension finie n sur le corps de base k (car $k \neq 2$) , est le sous-groupe unipotent

----

(1) soutenu partiellement par le FONDECYT, la DICYT-Universidad de Valparaîso (Projet UV-7) et le PNUD-UNESCO (CHI-84-004).

(2) soutenu partiellement par le FONDECYT, le DTI-Universidad de Chile (Projet E-2587) et le PNUD-UNESCO (CHI-84-004).

$U(V) = 1 \oplus \bigoplus_{i\geq 1} \Lambda^i V$ du groupe multiplicatif $(\Lambda V)^\times$ de l'algèbre de GRASSMANN (ou algèbre extérieure) ΛV de V. Si $\dim V = 2$, le groupe $U(V)$ n'est autre que le groupe de HEISENBERG $\mathcal{H}_1$, associé à la forme symplectique déterminant du plan V, et notre construction redonnera alors les représentations de WEIL classiques de $SL_2(k)$.

Bien entendu, $GL(V)$ agit naturellement par automorphismes dans $U(V)$ et son sous-groupe $SL(V)$ fixe le sous-groupe central $1 \oplus \Lambda^n V$, point par point.

Au n° 2.2 (th. 1), nous donnons une décomposition "géométrique" de $U(V)$ en produit semi-direct à facteur distingué commutatif, qui permet d'appliquer la "machine de MACKEY" bien connue [13], pour décrire ses représentations unitaires irréductibles et essayer d'obtenir un analogue du théorème de STONE-von NEUMANN classique [10]. On ne trouve cependant des représentations de SCHRÖDINGER généralisées $\sigma^{\ell,c}$ ($\ell \triangleleft V$, $\dim \ell = 1$, $c \in k^\times$) satisfaisantes, dont le type d'isomorphie c sera fixé par l'action de $SL(V)$, <u>que pour</u> n <u>pair</u> (n° 3.4, th. 2).

Dans ce cas, en supposant en plus k fini, pour alléger l'exposé de complications analytiques, on construit à l'instar de [10], des opérateurs d'entrelacement canoniques $T_{\ell',\ell}$ de $\sigma^{\ell,c}$ dans $\sigma^{\ell',c}$ et l'on calcule le multiplicateur μ_c correspondant (n° 3.5, prop. 8 et 9). On en tire les opérateurs de WEIL généralisés $\rho_g^c := T_{\ell,g(\ell)} \circ \tau_g$ dans l'espace $E(\sigma^{\ell,c})$ de $\sigma^{\ell,c}$, entrelaçant $\sigma^{\ell,c} \circ g^{-1}$ et $\sigma^{\ell,c}$ (où $\tau_g = ? \circ g^{-1}$ entrelace $\sigma^{\ell,c} \circ g^{-1}$ et $\sigma^{g(\ell),c}$), dont on calcule aussi le cocycle associé (n° 4.1, th. 3).

On trouve ainsi une représentation de $SL(V) \simeq SL_n(k)$, de dimension $q^{2^{n-2}}$ (où q désigne le cardinal de k), qui est une vraie représentation pour $n \geq 4$ et coïncide avec la représentation de WEIL projective classique de $SL_2(k)$ pour $n = 2$ (dont on sait d'ailleurs [6] que le cocycle est cohomologiquement trivial pour un corps de base fini).

Au numéro 4.2, nous calculons explicitement les opérateurs ρ_g^c pour des générateurs g de $SL(V)$. Enfin, au numéro 4.3, nous indiquons une première décomposition de ρ^c, suivant un groupe commutatif d'automorphismes.

Nous reviendrons ailleurs sur le cas d'un corps de base local, sur les rapports de notre construction avec la théorie des couples réductifs duaux de R. HOWE (cf. [2], [5], [6], [7], [8]) et la méthode des orbites, sur des variantes "géometriques" de notre méthode (dans le sens de [19]), qui fournissent des représentations de WEIL généralisées aussi bien pour n impair, ainsi que sur la décomposition générale de ces représentations.

Parmi d'autres approches au problème de construction de représentations de WEIL généralisées, spécialement pour les groupes SL_n ou GL_n $(n \geq 3)$, on peut encore citer [3], [4], [9], [12], [15], [16], [18], [20], [23]. Il serait intéressant d'éclaircir les rapports entre certaines de ces approches et la nôtre, et aussi d'exploiter du point de vue de la théorie des fonctions spéciales l'existence de nos modèles de WEIL généralisés pour des représentations de nature géométrique (comme cela a éte fait, par exemple, dans le cas de la série principale de GL_2, dont les modèles de WEIL fournissent le Lemme de BARNES pour la fonction Γ, cf. [11] et [14]).

Nous tenons enfin à remercier P. CARTIER et A. GUICHARDET pour des suggestions et des discussions utiles pendant juin-juillet 1987, ainsi que le Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, où le second auteur a séjourné pendant cette période.

1. Notations et conventions.

1.1. Si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps k, on note $\Lambda V = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i V$ son algèbre de GRASSMANN (ou algèbre extérieure). On écrira les éléments ω de ΛV sous la forme $\omega = \omega_o + \omega_1 + \ldots + \omega_n = \omega_+ + \omega_-$, avec $\omega_i \in \Lambda^i V$ et $\omega_+ = \sum_{i \text{ pair}} \omega_i$, $\omega_- = \sum_{i \text{ impair}} \omega_i$. On pose, en outre,

$$(1) \qquad \Lambda_+ V = \bigoplus_{i \text{ pair}} \Lambda^i V \quad , \quad \Lambda_- V = \bigoplus_{i \text{ impair}} \Lambda^i V \quad ,$$

$$(2) \qquad \Lambda' V = \bigoplus_{i \geq 1} \Lambda^i V \quad , \quad \Lambda'_+ V = \bigoplus_{\substack{i \text{ pair} \\ i \geq 2}} \Lambda^i V \; .$$

On notera simplement ω^m la m-ième puissance extérieure de $\omega \in \Lambda V$. Enfin, on identifiera, comme d'habitude, k à $k.1 = \Lambda^o V$.

1.2. On note en géneral A^+ (resp $A^\times$) le groupe additif (resp. multiplicatif) d'un anneau A. On désigne par $\hat{C}$ le groupe des caractères (unitaires) d'un groupe commutatif C.

Si π est une représentation d'un groupe G, on note $E(\pi)$ l'espace de π.

Nous réalisons toujours nos representations induites dans leurs modèles de MACKEY (droits). Ainsi, par exemple, si α est une représentation unidimensionelle d'un sous-groupe H du groupe fini G, la représentation induite $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G} \alpha$ sera réalisée dans l'espace de toutes les fonctions complexes f sur G telles que $f(hg) = \alpha(h)f(g)$ $(h \in H,\ g \in G)$, muni de l'action regulière droite $f \mapsto f(?g)$ /

Pour un ensemble fini X, on pose $L^2(X) = L^2(X,\mu)$, où μ désigne la mesure de dénombrement sur X.

2. Groupes de GRASSMANN-HEISENBERG $U(V)$.

2.1. Préliminaires. Dans toute la suite, k désigne un corps de caractéristique différente de 2 et V un espace vectoriel de dimension finie n sur k.

PROPOSITION 1. *Le groupe multiplicatif $(\Lambda V)^\times$ de ΛV se décompose en produit direct sous la forme*

$$(\Lambda V)^\times = k^\times(1 + \Lambda' V) \qquad \text{(cf. (2))};$$

son centre Z est égal à $k^\times(1 + \Lambda'_+ V)$ pour n pair et à $k^\times(1 + \Lambda'_+ V + \Lambda^n V)$ pour n impair.

Démonstration. Clairement, pour que $\omega \in \Lambda V$ soit inversible il faut que $\omega_o \neq 0$. Réciproquement, si $\omega_o \neq 0$ alors $\omega = \omega_o(1 - \xi)$ avec $\xi \in \Lambda' V$. On a donc $\xi^{n+1} = 0$ et, par conséquent,

$$(1 - \xi)^{-1} = 1 + \xi + \xi \wedge \xi + \ldots + \xi^n ,$$

d'où la décomposition annoncée. L'assertion sur Z est immédiate.

C.Q.F.D.

DEFINITION 1. *On appelle groupe de GRASSMANN-HEISENBERG (ou encore, groupe de HEISENBERG généralisé) associé à l'espace vectoriel V sur k, et l'on note $U(V)$, le sous-groupe $1 + \Lambda' V$ de $(\Lambda V)^\times$.*

REMARQUE. Notons en général $\mathcal{H}(E,A)$ le groupe de HEISENBERG classique associé à un espace vectoriel E muni d'une forme symplectique non-dégénérée A sur k. On a donc $\mathcal{H}(E,A) = E \times k$ avec la loi de composition

$$(3) \qquad (x,r)\cdot(y,s) = (x + y,\ r + s + A(x,y)) \qquad (x,y \in E,\ r,s \in k).$$

Si $\dim V = 2$, on voit aussitôt que

$$U(V) \simeq \mathcal{H}(V,\det).$$

2.2. Structure de $U(V)$. Le lemme suivant sera utile pour décrire l'action par conjugaison de $U(V)$ sur lui-même.

LEMME 1. Pour $\omega,\zeta \in \Lambda V$ on a

i) $\omega \wedge \zeta - \zeta \wedge \omega = 2\omega_- \wedge \zeta_-$;

ii) $\omega^m = \omega_+^m + m\omega_+^{m-1} \wedge \omega_-$;

iii) $\omega_- \wedge \omega^m = \omega_- \wedge \omega_+^m$;

iv) $\omega_- \wedge (1-\omega)^{-1} = \omega_- \wedge (1-\omega_+)^{-1}$ $\qquad (\omega \notin 1 \oplus \Lambda' V)$.

Démonstration: La formule i) est immédiate. On établit ii) par récurrence, tenant compte que $\omega_+ \in Z$ et que $\omega_- \wedge \omega_- = 0$. Les formules iii) et iv) s'ensuivent alors aussitôt.

C.Q.F.D.

REMARQUE. Il découle du lemme 1 i) que le groupe $U(V)$ est nilpotent de longueur 2, puisque $U(V)/Z'$ est commutatif, où Z' désigne le centre $U(V) \cap Z$ de $U(V)$.

PROPOSITION 2. Pour $\xi,\eta \in \Lambda' V$, on a

$$\begin{aligned}(1-\eta) \wedge (1+\xi) \wedge (1-\eta)^{-1} &= 1 + \xi + 2\xi_- \wedge \eta_- \wedge (1 + \eta_+ + \eta_+^2 + \dots)\\
&= 1 + \xi_1 + (\xi_2 + 2\xi_1 \wedge \eta_1) + \xi_3 +\\
&+ (\xi_4 + 2\xi_3 \wedge \eta_1 + 2\xi_1 \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 +\\
&+ 2\xi_1 \wedge \eta_3) + \xi_5 + (\xi_6 + 2\xi_5 \wedge \eta_1 +\\
&+ 2\xi_3 \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 + 2\xi_3 \wedge \eta_3 +\\
&+ 2\xi_1 \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_2 + 2\xi_1 \wedge \eta_1 \wedge \eta_4 +\\
&+ 2\xi_1 \wedge \eta_3 \wedge \eta_2 + 2\xi_1 \wedge \eta_5) + \xi_7 + \dots\end{aligned}$$

Démonstration. On a, en se servant du lemme 1,

$$\begin{aligned}(1-\eta) \wedge (1+\xi) \wedge (1-\eta)^{-1} &= 1 + (1-\eta) \wedge \xi \wedge (1 + \eta + \eta^2 + \dots)\\
&= 1 + \xi + (\xi \wedge \eta - \eta \wedge \xi) \wedge (1 + \eta + \eta^2 + \dots)\\
&= 1 + \xi + 2\xi_- \wedge \eta_- \wedge (1 + \eta_+ + \eta_+^2 + \dots) ,\end{aligned}$$

d'où l'expression explicite indiquée.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 1. <u>Donnons nous une décomposition</u> $V = \ell \oplus H$, <u>où</u> $\dim \ell = 1 = \operatorname{codim} H$. <u>Posons</u>

$$U^{\ell}(V) := 1 \oplus (\ell \wedge \Lambda V) = 1 \oplus (\ell \wedge \Lambda H) .$$

<u>Alors on a la décomposition en produit semidirect</u>

$$U(V) = U^{\ell}(V) \rtimes U(H) ,$$

<u>où le facteur distingué</u> $U^{\ell}(V)$ <u>est commutatif et isomorphe au groupe additif</u> $(\Lambda H)^+$.

<u>Démonstration</u>: Il est clair que

$$(\Lambda' V) = \bigoplus_{i \geq 1} \Lambda^i(\ell \oplus H) = \bigoplus_{i \geq 1} [(\ell \wedge \Lambda^{i-1}H) \oplus \Lambda^i H] = (\ell \wedge \Lambda H) \oplus \Lambda' H .$$

Comme

$$1 \oplus (\ell \wedge \Lambda H) \oplus \Lambda' H = [1 \oplus (\ell \wedge \Lambda H)] \wedge [1 \oplus \Lambda' H] ,$$

il s'ensuit que

$$U(V) = U^{\ell}(V) \wedge U(H) .$$

D'autre part la proposition 2 montre aussitôt que $U^{\ell}(V)$ est distingué dans $U(V)$. Notons que pour $\xi, \eta \in \ell \wedge (\Lambda V)$, on a $(1 + \xi) \wedge (1 + \eta) = 1 + \xi + \eta$, d'où la commutativité de $U^{\ell}(V)$. Enfin, un générateur e_{ℓ} de la droite $\ell \lhd V$ étant choisi, en définit un isomorphisme ϕ du groupe additif $(\Lambda H)^+$ sur $U^{\ell}(V)$ par $\phi(\zeta) = 1 + e_{\ell} \wedge \zeta$.

C.Q.F.D.

REMARQUE. L'action par conjugaison de $U(H)$ dans $U^{\ell}(V)$ se transporte à $(\Lambda H)^+$, via ϕ , à l'aide de la formule

$$(4) \qquad (1 - \eta) \wedge (1 + e_{\ell} \wedge \zeta) \wedge (1 - \eta)^{-1} = 1 + e_{\ell} \wedge [(1 - \eta + 2\eta_-) \wedge \wedge \zeta \wedge (1 - \eta)^{-1}] ,$$

pour $\eta \in \Lambda' H$, $\zeta \in \Lambda H$.

D'après le th.1 les représentations irréductibles de $U(V)$ peuvent être décrites à l'aide de la "machine de MACKEY" [13], au moins si k est un corps local ou fini. Nous nous servirons de ce procédé pour construire des représentations de SCHRÖDINGER généralisées pour $U(V)$.

2.3. L'action de $U(H)$ sur les caractères de $U^{\ell}(V)$. Dans la suite, ou supposera que k est un corps local ou fini. On fixe un élément de volume $e_V \in \Lambda^n V$ et l'on choisit, en plus, un élément de volume $e_H \in \Lambda^{n-1} H$ de manière que $e_{\ell} \wedge e_H = e_V$. Nous décrivons tout d'abord les caractères de $U^{\ell}(V)$.

PROPOSITION 3. Soit ψ un caractère (unitaire) non-trivial du groupe additif k^+, fixé une fois pour toutes. Pour chaque $\omega \in \Lambda H$, désignons par ψ_V^{ω} le caractère de $U^{\ell}(V)$ défini par $\psi_V^{\omega}(1 + \xi) = \psi_V(\xi \wedge \omega)$ $(1 + \xi \in U^{\ell}(V))$. Alors

$$\psi_V^{\omega}(1 + e_{\ell} \wedge \zeta) = \psi_H(\zeta \wedge \omega) \qquad (\zeta \in \Lambda H)$$

et l'application $\omega \mapsto \psi_V^{\omega}$ est un isomorphisme du groupe additif $(\Lambda H)^+$ sur le groupe $(U^{\ell}(V))^\wedge$ des caractères (unitaires) de $U^{\ell}(V)$.

Démonstration: Comme l'application $\phi : \zeta \mapsto 1 + e_{\ell} \wedge \zeta$ est un isomorphisme du groupe additif $(\Lambda H)^+$ sur le groupe $U^{\ell}(V)$, la proposition résulte aussitôt de la mise en dualité

$$(\zeta,\omega) \mapsto \psi_H(\zeta \wedge \omega) \ \left(= \ \psi((\zeta \wedge \omega)_n / e_H) \right)$$

du groupe additif vectoriel $(\Lambda H)^+$ avec lui-même (cf. [21]).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4. Pour $1 - \eta \in U(H)$, notons $(\psi_V^{\omega})^{1-\eta}$ le caractère conjugué de ψ_V^{ω} par $1 - \eta$, défini par

$$(\psi_V^{\omega})^{1-\eta}\,(1 + \xi) = \psi_V^{\omega}((1 - \eta) \wedge (1 + \xi) \wedge (1 - \eta)^{-1}) \qquad (1 + \xi \in U^{\ell}(V)).$$

Alors on a

i) si n est pair,

$$(\psi_V^{\omega})^{1-\eta} = \psi_V^{\omega + 2\eta_- \wedge (1-\eta_+)^{-1} \wedge \omega_+} \ ;$$

ii) si n est impair,

$$(\psi_V^\omega)^{1-\eta} = \psi_V^{\omega+2\eta_-\wedge(1-\eta_+)^{-1}\wedge\omega_-} .$$

Démonstration: En ramenant le calcul à ΛH, à l'aide de (4), on trouve, quels que soient $\omega,\zeta \in \Lambda H$, $\eta \in \Lambda' H$,

$$\begin{aligned}(1-\eta_+ + \eta_-)\wedge\zeta\wedge(1-\eta)^{-1}\wedge\omega &= [\zeta_+\wedge(1-\eta_+ +\eta_-) + \zeta_-\wedge(1-\eta_+ - \eta_-)]\wedge \\ &\quad \wedge(1-\eta)^{-1}\wedge\omega \\ &= [\zeta_+\wedge(1+2\eta_-\wedge(1-\eta_+)^{-1}) + \zeta_-]\wedge\omega ,\end{aligned}$$

en se servant du lemme 1 iv). En tenant compte des parités, on obtient alors aussitôt que, pour n pair,

$$((1-\eta_+ + \eta_-)\wedge\zeta\wedge(1-\eta)^{-1}\wedge\omega)_{n-1} = (\zeta_+\wedge\omega'_- + \zeta_-\wedge\omega'_+)_{n-1} ,$$

où $\omega'_- = \omega_- + 2\eta_-\wedge(1-\eta_+)^{-1}\wedge\omega_+$ et $\omega'_+ = \omega_+$; et pour n impair,

$$((1-\eta_+ + \eta_-)\wedge\zeta\wedge(1-\eta)^{-1}\wedge\omega)_{n-1} = (\zeta_+\wedge\omega'_+ + \zeta_-\wedge\omega'_-)_{n-1} ,$$

où $\omega'_+ = \omega_+ + 2\eta_-\wedge(1-\eta_+)^{-1}\wedge\omega_-$ et $\omega'_- = \omega_-$.

La proposition s'ensuit.

C.Q.F.D.

REMARQUE. Dans le cas où n est pair, en tenant compte du fait qu'alors $(\zeta\wedge\omega)_{n-1} = (\omega\wedge\zeta)_{n-1}$, on trouve tout de suite que

$$(\psi_V^\omega)^{1-\eta} = \psi_V^{(1-\eta)^{-1}\wedge\omega\wedge(1-\eta+2\eta_-)} ,$$

expression équivalente à ii) ci-dessus.

DEFINITION 2. <u>Nous dirons qu'un caractère de</u> $U^\ell(V)$ <u>est générique, ou est en position générale, si son stabilisateur dans</u> $U(H)$ <u>est minimal, autrement dit s'il est réduit au centralisateur</u> $U(H)\cap Z = 1 \oplus \Lambda'_+ H$ <u>de</u> $U^\ell(V)$ <u>dans</u> $U(H)$.

PROPOSITION 5. <u>Pour</u> $\omega \in \Lambda H$, <u>on a</u>

i) $\mathrm{Stab}_{U(H)}\, \psi_V^\omega = \{1+\eta \in U(H) \mid \eta_-\wedge\omega_+ = 0\}$ (n pair);

ii) $\mathrm{Stab}_{U(H)}\, \psi_V^\omega = \{1+\eta \in U(H) \mid \eta_-\wedge\omega_- = 0\}$ (n impair) .

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la prop. 4.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. i) Si n est impair, le groupe $U^{\ell}(V)$ n'admet pas de caractères génériques.

ii) Si n est pair, pour que le caractère ψ_V^{ω} $(\omega \in \Lambda H)$ de $U^{\ell}(V)$ soit générique il faut et il suffit que $\omega_o \neq 0$. (c'est-à-dire que ω soit inversible dans ΛH) .

iii) Si n est pair, pour que deux caractères génériques ψ_V^{ω} et ψ_V^{ζ} appartiennent à la même $U(H)$-orbite, il faut et il suffit que $\omega_+ = \zeta_+$ $(\omega, \zeta \in \Lambda H)$.

3. Représentations de SCHRÖDINGER généralisées de $U(V)$.

3.1. Notations. Soit $V = \ell \oplus H$ une décomposition de V avec $\dim \ell = 1$. En plus des notations des paragraphes précédents, nous posons

(5) $$U^{\ell} := U^{\ell}(V)$$

(6) $$U(V)_+ := 1 \oplus \Lambda_+^{\prime} V \ , \qquad U(V)_- := 1 \oplus \Lambda_- V \qquad \text{(cf. (1) et (2))},$$

(7) $$U(H)_{\pm} := U(H) \cap U(V)_{\pm} \ ,$$

(8) $$U_{\pm}^{\ell} := U^{\ell} \cap U(V)_{\pm} \ .$$

Notons que si n est pair, alors $U(V)_+$ coïncide avec le centre Z' de $U(V)$.

3.2. Préliminaires.

LEMME 2. Soient H et K deux hyperplans distincts, supplémentaires de ℓ dans V . Alors on a

$$(U(H)_+ \wedge U(K)_+) \cap U_+^{\ell} = 1 + \ell \wedge (\Lambda_- H \cap K) \ .$$

Démonstration. Écrivons

$$H = H \cap K \oplus \ell' \quad , \qquad K = H \cap K \oplus \ell'' \ .$$

Alors $V = (H \cap K) \oplus \ell' \oplus \ell''$ et $\ell' \oplus \ell'' = \ell \oplus \ell'' = \ell' \oplus \ell$. Fixons un générateur v' (resp. v'') de ℓ' (resp. ℓ'') . La droite ℓ est alors engendrée par $v' + sv''$ pour un $s \in k^{\times}$ convenable. On peut ainsi écrire les éléments

$1 + \eta \in U(H)_+$, $1 + \zeta \in U(K)_+$ comme suit

$$1 + \eta = 1 + \eta^+ + v' \wedge \eta^- \quad , \quad 1 + \zeta = 1 + \zeta^+ + v'' \wedge \zeta^- \, ,$$

où $\eta^\pm, \zeta^\pm \in \Lambda_\pm(H \cap K)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}(1 + \eta) \wedge (1 + \zeta) &= 1 + \eta + \zeta + \eta \wedge \zeta \\ &= (1 + \eta^+) \wedge (1 + \zeta^+) + v' \wedge \eta^- \wedge (1 + \zeta^+) + \\ &\quad + v'' \wedge \zeta^- \wedge (1 + \eta^+) + v' \wedge v'' \wedge \zeta^- \wedge \eta^- \, .\end{aligned}$$

Comme un élément $1 + \omega \in U^\ell_+$ s'écrit

$$1 + \omega = 1 + (v' + sv'') \wedge \omega^- = 1 + v' \wedge \omega^- + v'' \wedge (s\omega^-) \, ,$$

où $\omega^- \in \Lambda_- V$, on voit tout d'abord que la condition $(1 + \eta) \wedge (1 + \zeta) \in U^\ell_+$ équivaut à la conjonction des conditions suivantes

i) $(1 + \eta^+) \wedge (1 + \zeta^+) = 1$,

ii) $\eta^- \wedge (1 + \zeta^+) = \omega^-$,

iii) $\zeta^- \wedge (1 + \eta^+) = s\omega^-$,

iv) $\zeta^- \wedge \eta^- = 0$,

dont la dernière découle des précédentes, car $\zeta^- \wedge \eta^- = s\omega^- \wedge \omega^-$ d'après i), ii) et iii) et ω^- est impair. Il est ainsi clair que $(1 + \eta) \wedge (1 + \zeta) \in U^\ell_+ = 1 \oplus \ell \wedge (\Lambda_- V)$ entraîne en fait $(1 + \eta) \wedge (1 + \zeta) \in 1 \oplus \ell \wedge (\Lambda_- H \cap K)$. Réciproquement, $1 + \omega \in 1 + \ell \wedge (\Lambda_- H \cap K)$ étant donné, on voit aussitôt que $1 + \omega = (1 + \eta) \wedge (1 + \zeta)$, avec $\eta^+ \in \Lambda_+(H \cap K)$ arbitraire, ζ^+ donné par $1 + \zeta^+ = (1 + \eta^+)^{-1} \in U(H \cap K)_+$ et

$$\eta^- = \omega^- \wedge (1 + \eta^+) \quad , \quad \zeta^- = s\omega^- \wedge (1 + \eta^+)^{-1} \, .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. <u>On a</u> $\xi_n = 0$ <u>pour tout</u> $\xi \in (U(H)_+ \wedge U(K)_+) \cap U^\ell_+$.

COROLLAIRE 2. <u>Si</u>

$$(1 + \xi) \wedge (1 + \eta) = (1 + \xi') \wedge (1 + \zeta)$$

<u>pour</u> $1 + \xi$, $1 + \xi' \in U^\ell_+$, $1 + \eta \in U(H)_+$, $1 + \zeta \in U(K)_+$, <u>alors nécessairement</u>

$\xi_n = \xi'_n$.

COROLLAIRE 3. Pour $\omega_o \in \Lambda^o V$, le caractère $\psi_V^{\omega_o} \otimes 1_H$ de $U^\ell \times U(H)_+ =$ $= U^\ell U(V)_+$, défini par

$$(\psi_V^{\omega_o} \otimes 1_H)((1+\xi) \wedge (1+\eta)) := \psi_V^{\omega_o}(1+\xi) = \psi_V(\omega_o \xi)$$

$(1 + \xi \in U^\ell \ , \ 1 + \eta \in U(H)_+)$, ne dépend pas du choix du supplémentaire H de ℓ dans V . Nous le désignerons donc simplement par $\psi_V^{\omega_o} \otimes 1$.

3.3. Définition des représentations de SCHRÖDINGER généralisées. Nous nos plaçons dorénavant dans le cas où il existe des caractères génériques pour U^ℓ , à savoir le cas où la dimension n de V est paire. D'autre part, nous nous restreindrons aussi, pour abréger l'exposé, au cas où k est un corps fini à q éléments (q impair), bien que notre construction, basée sur la Machine de MACKEY, s'applique aussi bien dans le cas d'un corps k local, au prix de quelques complications techniques.

Soit donc $\ell \lhd V$, $\dim \ell = 1$, et $c \in \Lambda^o V = k$, $c \neq 0$. Rappelons que l'on a fixé un caractère non trivial ψ de k^+ . D'après le cor. à la prop. 5, le caractère $\psi_V^c : 1 + \xi \mapsto \psi_V(c\xi)$ de U^ℓ est générique et son stabilisateur dans $U(V)$ est donc $U^\ell U(V)_+ = U^\ell Z'$. Comme dans le cor. 3 au lemme 2, notons $\psi_V^c \otimes 1$ le prolongement de ψ_V^c à $U^\ell Z'$ défini à l'aide d'un supplémentaire quelconque H de ℓ dans V . Nous venons de voir (loc. cit.) que ce prolongement ne dépend pas du choix de H .

DEFINITION 3. On appelle représentation de SCHRÖDINGER généralisée de $U(V)$, associée a la droite $\ell \lhd V$ et au paramètre $c \in k^\times$, la représentation induite

$$\sigma^{\ell,c} := \operatorname*{Ind}_{U_\ell Z' \uparrow U(V)} \psi_V^c \otimes 1 ,$$

realisée dans son modèle de MACKEY.

D'après la machine de MACKEY [13] et le corollaire à la proposition 5, on a aussitôt la

PROPOSITION 6. La représentation de SCHRÖDINGER généralisée $\sigma^{\ell,c}$ de $U(V)$ est irréductible, quels que soient $\ell \lhd V$, $\dim \ell = 1$ et $c \in k^\times$. En outre, on a $\sigma^{\ell,c} \simeq \sigma^{\ell,c'}$ seulement si $c = c'$ $(c,c' \in k^\times)$.

Nous donnons maintenant une description explicite de la représentation $\sigma^{\ell,c}$.

PROPOSITION 7. <u>Soit</u> H <u>un supplémentaire de</u> ℓ <u>dans</u> V . <u>Alors la représentation</u> $\sigma^{\ell,c}$ <u>se réalise dans l'espace</u> $L^2(\Lambda_-H)$, <u>de dimension</u> $q^{2^{n-2}}$, <u>par les formules suivantes, pour</u> $f \in L^2(\Lambda_-H)$, $\omega_- \in \Lambda_-H$,

i) $\sigma_{1+\eta_+} = \mathrm{Id}$ $\qquad (1 + \eta_+ \in U(H)_+)$;

ii) $(\sigma_{1+\eta_-} f)(\omega_-) = f(\omega_- + \eta_-)$ $\qquad (1 + \eta_- \in U(H)_-)$;

iii) $\sigma_{1+\xi_+} = \psi_V^c(\xi_+)\mathrm{Id}$ $\qquad (1 + \xi_+ \in U_+^{\ell})$;

iv) $(\sigma_{1+\xi_-} f)(\omega_-) = \psi_V^c(2\omega_- \wedge \xi_-)f(\omega_-)$ $\qquad (1 + \xi_- \in U_-^{\ell})$.

<u>Démonstration</u>: L'espace $E(\sigma^{\ell,c})$ de la représentation induite $\sigma^{\ell,c}$, réalisée dans son modèle de MACKEY droit, s'identifie à $L^2(U^{\ell}Z' \backslash U(V))$. Mais le supplémentaire H de ℓ dans V étant choisi, le quotient $U^{\ell}Z' \backslash U(V)$ s'identifie à $U(H)_+ \backslash U(H)$, c'est-à-dire à l'espace $U(H)_-$, ou encore à Λ_-H , dont la dimension sur k est 2^{n-2} . Un calcul facile dans le modèle de MACKEY de $\sigma^{\ell,c}$ établit alors aussitôt les formules i) à iv).

C.Q.F.D.

3.4. <u>Opérateurs d'entrelacement canoniques et théorème de STONE-von NEUMANN généralisé</u>. Nous voulons établir un analogue du théorème de STONE-von NEUMANN classique en prouvant que le type d'isomorphie de $\sigma^{\ell,c}$ ne dépend que de c . Nous introduisons pour cela des opérateurs d'entrelacement canoniques entre $\sigma^{\ell,c}$ et $\sigma^{\ell',c}$, à l'instar de [10].

DEFINITION 4. <u>Pour chaque paire de droites distinctes</u> ℓ,ℓ' <u>de</u> V , <u>on pose</u>

$$(T_{\ell',\ell}\, f)(h) = q^{-d(n)/2} \sum_{u \in U^{\ell'}Z'/U^{\ell'}Z' \cap U^{\ell}Z'} (\psi_V^c \otimes 1)(u^{-1})f(uh)$$

<u>quels que soient</u> $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, $h \in U(V)$, <u>où</u> $d(n) = 2^{n-3}$ (<u>resp.</u> $2^{n-2} = 1$) <u>si</u> $n \geq 4$ (<u>resp.</u> $n = 2$) , <u>et</u> q <u>désigne le cardinal de</u> k . <u>Bien entendu, on pose en plus</u> $T_{\ell,\ell} = \mathrm{Id}$.

REMARQUES. i) On a

$$(9) \qquad (T_{\ell',\ell}\, f)(h) = q^{-d(n)/2} \sum_{u \in U_-^{\ell'}/U_-^{\ell'} \cap U_-^{\ell}} f(uh) \ ,$$

quels que soient $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, $h \in U(V)$, puisque $\xi_n = 0$ pour tout $1 + \xi \in U_-^{\ell'}$.

Notons en outre que, pour $\ell \neq \ell'$, on a

$$U_-^{\ell'} \cap U_-^{\ell} = 1 \oplus \ell \wedge \ell' \wedge \Lambda_- N \ ,$$

où N est un supplémentaire de $\ell \oplus \ell'$ dans V . Il s'ensuit que

$$U_-^{\ell'}/U_-^{\ell'} \cap U_-^{\ell} \simeq 1 \oplus \ell' \wedge \Lambda_+ N \ . \tag{10}$$

D'ailleurs, $d(n) = \dim \Lambda_+ N$ quel que soit n .

ii) $T_{\ell',\ell}$ est clairement un opérateur d'entrelacement de $\sigma^{\ell,c}$ dans $\sigma^{\ell',c}$. Nous montrons ci-dessous que c'est un isomorphisme.

THÉORÈME 2. <u>Quelles que soient les droites vectorielles</u> $\ell,\ell' \lhd V$, <u>l'opérateur d'entrelacement</u> $T_{\ell',\ell}$ <u>est un isomorphisme de</u> $\sigma^{\ell,c}$ <u>sur</u> $\sigma^{\ell',c}$, <u>d'inverse</u> $T_{\ell,\ell'}$. <u>Le type d'isomorphie de la représentation</u> $\sigma^{\ell,c}$ <u>ne dépend donc que de</u> $c \in k^{\times}$ <u>et se lit dans la restriction</u> ψ^c <u>du caractère central de</u> $\sigma^{\ell,c}$ <u>au sous-groupe</u> $1 \oplus \Lambda^n V$.

<u>Démonstration</u>: Soient $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, $1 + \omega \in U(V)$. Supposons $\ell \neq \ell'$ et écrivons $V = \ell \oplus \ell' \oplus N$. Alors on a

$$[(T_{\ell,\ell'} \circ T_{\ell',\ell})(f)](1 + \omega) = q^{-d(n)} \sum_{\xi,\xi'} f((1 + \xi') \wedge (1 + \xi) \wedge (1 + \omega)) \ ,$$

où ξ (resp. ξ') parcourt $\ell \wedge \Lambda_+ N$ (resp. $\ell' \wedge \Lambda_+ N$) . Or comme $\xi,\xi' \in \Lambda_- V$ on a $(1 + \xi') \wedge (1 + \xi) = (1 + \xi + 2\xi' \wedge \xi) \wedge (1 + \xi')$ et donc, puisque $f \in E(\sigma^{\ell,c})$,

$$\begin{aligned}(T_{\ell,\ell'} \circ T_{\ell',\ell} f)(1 + \omega) &= q^{-d(n)} \sum_{\xi' \in \ell' \wedge \Lambda_+ N} \Big(\sum_{\xi \in \ell \wedge \Lambda_+ N} \psi_V^c(2\xi' \wedge \xi)\Big) \cdot \\ &\qquad \cdot f((1 + \xi') \wedge (1 + \omega)) \\ &= q^{-d(n)} \sum_{\xi' \in \ell' \wedge \Lambda_+ N} (q^{d(n)} \delta_{\xi',0}) f((1 + \xi') \wedge (1 + \omega)) \\ &= f(1 + \omega)\end{aligned}$$

(car $d(n) = \dim \Lambda_+ N$) . Enfin, il est clair que le caractère central de $\sigma^{\ell,c}$ est $1 + \zeta \mapsto \psi_V^c(\zeta)$ $(\zeta \in \Lambda_+ V)$, d'où la dernière assertion.

C.Q.F.D.

3.5. Le multiplicateur associé aux opérateurs d'entrelacement canoniques.

PROPOSITION 8. Soient ℓ, ℓ', ℓ'' trois droites vectorielles dans V, distinctes deux à deux. Alors on a

$$T_{\ell'',\ell'} \circ T_{\ell',\ell} = \mu_c(\ell'',\ell',\ell) T_{\ell'',\ell} \quad ,$$

avec

i) $\mu_c(\ell'',\ell',\ell) := 1$ si $\dim(\ell + \ell' + \ell'') = 3$,

ii) $\mu_c(\ell'',\ell',\ell) := q^{-d(n)/2} \sum_{\xi \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)} \psi_V^c(\xi' \wedge \xi'')$ si $\ell \lhd \ell' \oplus \ell''$,

où N désigne un supplémentaire quelconque de $\ell' \oplus \ell''$ dans V, où on a posé $d(n) = \dim \Lambda_+ N$ (égal à 2^{n-3} si $n \geq 4$ et à 1 si $n = 2$) et où l'on note ξ' (resp. ξ'') la projection de ξ dans $\ell' \wedge (\Lambda_+ N)$ (resp. $\ell'' \wedge (\Lambda_+ N)$) le long de $\ell'' \wedge (\Lambda_+ N)$ (resp. $\ell' \wedge (\Lambda_+ N)$).

Démonstration: Pour $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, $1 + \omega \in U(V)$, arbitraires, posons $S := (T_{\ell,\ell''} \circ T_{\ell'',\ell'} \circ T_{\ell',\ell} f)(1 + \omega)$.

i) Supposons tout d'abord que ℓ n'appartienne pas au plan vectoriel engendré par ℓ' et ℓ''. Notons M un supplémentaire de $\ell \oplus \ell' \oplus \ell''$ dans V. On a alors les identifications

$$U_-^{\ell'}/U_-^{\ell'} \cap U_-^{\ell} = 1 \oplus \ell' \wedge (\Lambda_+ M) \oplus \ell' \wedge \ell'' \wedge (\Lambda_- M) ,$$

$$U_-^{\ell''}/U_-^{\ell''} \cap U_-^{\ell'} = 1 \oplus \ell'' \wedge (\Lambda_+ M) \oplus \ell'' \wedge \ell \wedge (\Lambda_- M) ,$$

$$U_-^{\ell}/U_-^{\ell} \cap U_-^{\ell''} = 1 \oplus \ell \wedge (\Lambda_+ M) \oplus \ell \wedge \ell' \wedge (\Lambda_- M) .$$

Par conséquent,

$$S = q^{-3d(n)/2} \sum_{\xi',\xi'',\xi} f((1 + \xi') \wedge (1 + \xi'') \wedge (1 + \xi) \wedge (1 + \omega)) ,$$

où ξ' (resp. ξ'' ; resp. ξ) parcourt $\ell' \wedge (\Lambda_+ M) \oplus \ell' \wedge \ell'' \wedge (\Lambda_- M)$ (resp. $\ell'' \wedge (\Lambda_+ M) \oplus \ell'' \wedge \ell \wedge (\Lambda_- M)$; resp. $\ell \wedge (\Lambda_+ M) \oplus \ell \wedge \ell' \wedge (\Lambda_- M)$). Comme

$$(1 + \xi') \wedge (1 + \xi'') \wedge (1 + \xi) = (1 + \xi + 2(\xi' + \xi'') \wedge \xi) \wedge (1 + \xi') \wedge (1 + \xi'')$$

et $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, il s'ensuit que

$$S = q^{-3d(n)/2} \sum_{\xi',\xi''} (\sum_{\xi} \psi_V^c((\xi' + \xi'') \wedge \xi) f((1 + \xi') \wedge (1 + \xi'') \wedge (1 + \omega))$$

(où ξ' (resp. ξ'' ; resp. ξ) parcourt le sous-espace indiqué ci-dessus). Or, en choisissant un générateur v (resp. v' ; resp. v'') dans ℓ (resp. ℓ' ; resp. ℓ'') et en écrivant

$$\xi = v \wedge \zeta_+ + v \wedge v' \wedge \zeta_- , \quad \xi' = v' \wedge \zeta'_+ + v' \wedge v'' \wedge \zeta'_- ,$$

$$\xi'' = v'' \wedge \zeta''_+ + v'' \wedge v \wedge \zeta''_- ,$$

avec $\zeta_\pm$ (resp. $\zeta'_\pm$; resp. $\zeta''_\pm$) dans $\Lambda_\pm M$, on trouve

$$(\xi' + \xi'') \wedge \xi = v' \wedge v \wedge \zeta_+ \wedge \zeta'_+ + v'' \wedge v \wedge \zeta_+ \wedge \zeta''_+ + (v \wedge v' \wedge v'') \wedge$$
$$\wedge (\zeta_- \wedge \zeta''_+ + \zeta_+ \wedge \zeta'_-) .$$

Il s'ensuit que $((\xi' + \xi'') \wedge \xi)_n = 0$ pour tout ξ équivaut à $\xi' = v' \wedge \zeta'_+$ et $\xi'' = v'' \wedge v \wedge \zeta''_-$, avec $\zeta'_+ \in \Lambda_+ M$ et $\zeta''_- \in \Lambda_- M$ arbitraires. Par conséquent

$$S = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta'_+, \zeta''_-} f((1 + v'' \wedge v \wedge \zeta''_- + 2v' \wedge v'' \wedge v \wedge \zeta'_+ \wedge \zeta''_-) \wedge$$
$$\wedge (1 + v' \wedge \zeta'_+) \wedge (1 + \omega))$$

(où ζ'_+ parcourt $\Lambda_+ M$ et ζ''_- parcourt $\Lambda_- M$) . Comme $(v'' \wedge v \wedge \zeta''_-)_n = 0$ pour tout $\zeta''_- \in \Lambda_- M$, on obtient

$$S = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta'_+ \in \Lambda_+ M} \left\{ \sum_{\zeta''_- \in \Lambda_- M} \psi^c_V(2v \wedge v' \wedge v'' \wedge \zeta'_+ \wedge \zeta''_-) \right\} \cdot$$
$$\cdot f((1 + v' \wedge \zeta'_+) \wedge (1 + \omega)) ,$$

d'où $S = f(1 + \omega)$, comme voulu.

ii) Supposons maintenant $\ell \lhd \ell' \oplus \ell''$ et notons N un supplémentaire de $\ell' \oplus \ell''$ dans V . On a alors

$$S = q^{-3d(n)/2} \sum_{\xi', \xi''} \sum_{\xi} \psi^c_V((\xi' + \xi) \wedge \xi) f((1 + \xi') \wedge (1 + \xi) \wedge (1 + \omega)) ,$$

où ξ' (resp. ξ'' ; resp. ξ) parcourt le sous-espace $\ell' \wedge (\Lambda_+ N)$ (resp. $\ell'' \wedge (\Lambda_+ N)$; resp. $\ell \wedge (\Lambda_+ N)$) . Comme $((\xi' + \xi'') \wedge \xi)_n = 0$ pour tout $\xi \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)$ signifie $\xi' + \xi'' \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)$, on en tire que

$$S = q^{-d(n)/2} \sum_{\xi', \xi''} f((1 + \xi' + \xi'' + \xi' \wedge \xi'')(1 + \omega)) ,$$

où la sommation du membre de droite porte sur les $\xi' \in \ell' \wedge (\Lambda_+ N)$ et $\xi'' \in \ell'' \wedge (\Lambda_+ N)$ tels que $\xi' + \xi'' \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)$. Il en découle que

$$S = q^{-d(n)/2} [\sum_{\xi \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)} \psi_V^c(\xi' \wedge \xi'')] f(1 + \omega) ,$$

où l'on a décomposé chaque $\xi \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)$ sous la forme $\xi = \xi' + \xi''$, avec $\xi' \in \ell' \wedge (\Lambda_+ N)$, $\xi'' \in \ell'' \wedge (\Lambda_+ N)$.

C.Q.F.D.

Nous voulons maintenant calculer explicitement la valeur du multiplicateur μ_c , qui s'averera être une somme de GAUSS quadratique dans le cas intéressant, où les trois droites ℓ, ℓ', ℓ'' sont coplanaires. Nous gardons ci-dessous les notations de la prop. 8.

PROPOSITION 9. Supposons $\ell \lhd \ell' \oplus \ell''$. Choisissons un générateur v' (resp. v'') de ℓ' (resp. ℓ'') de façon que $v' \wedge v'' \wedge e_N = e_V$. Soit $t \in k^\times$ tel que ℓ soit engendrée par $v' + tv''$. Alors

$$\mu_c(\ell'', \ell', \ell) = 1 \qquad \text{si} \quad n \geq 4 ,$$

et

$$\mu_c(\ell'', \ell', \ell) = q^{-1/2} G(\psi^{ct}) \qquad \text{si} \quad n = 2 ,$$

où l'on note $G(\psi^{ct})$ la somme de GAUSS classique $\sum_{r \in k} \psi(ctr^2)$.

Démonstration: Tout élément $\xi \in \ell \wedge (\Lambda_+ N)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\xi = \xi'' + \xi''$ avec $\xi' = v' \wedge \zeta$, $\xi'' = tv'' \wedge \zeta$, où $\zeta \in \Lambda_+ N$. On a donc

$$(\xi' \wedge \xi'')_n = tv' \wedge v'' \wedge (\zeta \wedge \zeta)_{n-2} ,$$

mais $Q : \zeta \mapsto (\zeta \wedge \zeta)_{n-2} / e_N$ est clairement une forme quadratique hyperbolique non-dégénéreé sur $\Lambda_+ N$ si $n \geq 4$. Comme $\mu_c(\ell'', \ell', \ell)$ n'est autre que la somme de GAUSS quadratique normalisée $q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta \in \Lambda_+ N} \psi(ctQ(\zeta))$, on a bien $\mu_c(\ell'', \ell', \ell) = 1$. Si $n = 2$, alors $(\zeta \wedge \zeta)_{n-2} = \zeta_o \wedge \zeta_o = \zeta_o^2 \in \Lambda^o N = k$ et l'on retrouve une somme de GAUSS classique, de valeur absolue $q^{1/2}$, à savoir

$$\mu_c(\ell'', \ell', \ell) = \sum_{r \in k} \psi_V(ctr^2 v' \wedge v'') = \sum_{r \in k} \psi(ctr^2) = G(\psi^{ct}) .$$

C.Q.F.D.

4. Construction des représentations de WEIL généralisées.

4.1. Définition des opérateurs de WEIL généralisés. Notons que, comme dans le cas classique, le groupe $G := SL(V)$ agit par automorphismes dans le groupe $U(V)$, par

$$(11) \qquad g.(1+\omega) := \Lambda g(1+\omega) = 1 + (\Lambda g)(\omega) \qquad (g \in G\ ,\ 1+\omega \in U(V))\ .$$

Bien entendu, cette action de G passe au dual unitaire de $U(V)$ et fixera le type d'isomorphie de chaque représentation de SCHRÖDINGER généralisée $\sigma^{\ell,c}$, puisque $\Lambda^n g = \mathrm{Id}$ quel que soit $g \in G$ (cf. th. 2). On en tirera, pour chaque $g \in G$, un opérateur d'entrelacement inversible ρ^c_g dans $E(\sigma^{\ell,c})$, définissant ainsi la représentation de WEIL généralisée ρ^c de G, associée au paramètre $c \in k^\times$.

PROPOSITION 10. Pour chaque $g \in G$, on définit un isomorphisme τ_g de $\sigma^{\ell,c} \circ g^{-1}$ sur $\sigma^{g(\ell),c}$, en posant

$$\tau_g f = f \circ g^{-1} \qquad (f \in E(\sigma^{\ell,c})\ ,\ g \in G)\ .$$

Démonstration: On a, pour $g \in G$, $h \in U(V)$, $f \in E(\sigma^{\ell,c})$,

$$[\tau_g \circ (\sigma^{\ell,c}_{g^{-1}(h)})](f) = (\sigma^{\ell,c}_{g^{-1}(h)} f) \circ g^{-1} = f(g^{-1}(?)g^{-1}(h))$$
$$= (\tau_g f)(?h)\ .$$

En plus, quel que soit $u \in U^{\ell}Z'$, on a

$$(\tau_g f)(g(u)h) = f(ug^{-1}(h)) = (\psi^c_V \otimes 1)(u)(\tau_g f)(h) = (\psi^c_V \otimes 1)(g(u))(\tau_g f)(h)\ ,$$

puisque $\Lambda^n g = \mathrm{Id}$. Enfin, on a $g(U^{\ell}Z') = \Lambda g(U^{\ell}Z') = U^{g(\ell)}Z'$.

C.Q.F.D.

Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 3. Quelles que soient les droites vectorielles ℓ et ℓ' dans V, on a

$$\tau_g \circ T_{\ell',\ell} = T_{g(\ell'),g(\ell)} \circ \tau_g \qquad (g \in G)\ .$$

THÉORÈME 3. Les opérateurs $\rho^c_g := T_{\ell,g(\ell)} \circ \tau_g$ $(g \in G)$ dans l'espace $E(\sigma^{\ell,c})$ de la représentation de SCHRÖDINGER $\sigma^{\ell,c}$ de $U(V)$ définissent une représentation projective ρ^c de $G = SL(V)$, de dimension $q^{2^{n-2}}$, et de cocycle

$\nu_c(g,g') = \mu_c(\ell, g(\ell), gg'(\ell))$ $(g,g' \in G)$, (cf. prop. 8). Si $n \geq 4$, le cocycle ν_c est identiquement égal à 1 et ρ^c est une vraie représentation de G . Si $n = 2$, le cocycle ν_c est donné par la prop. 9. La représentation ρ^c sera appelée représentation de WEIL généralisée de G , associé au paramètre $c \in k^\times$.

Démonstration. A l'aide du lemme 3 et des prop. 8 et 10, on trouve, quels que soient $g,g' \in G$,

$$\begin{aligned}\rho^c_g \circ \rho^c_{g'} &= T_{\ell,g(\ell)} \circ \tau_g \circ T_{\ell,g'(\ell)} \circ \tau_{g'} \\ &= T_{\ell,g(\ell)} \circ T_{g(\ell),gg'(\ell)} \circ \tau_{gg'} \\ &= \mu_c(\ell,g(\ell),gg'(\ell))T_{\ell,gg'(\ell)} \circ \tau_{gg'} \\ &= \mu_c(\ell,g(\ell),gg'(\ell))\rho^c_{gg'} \ .\end{aligned}$$

Le reste est clair, d'après la prop. 9.

C.Q.F.D.

REMARQUE

Pour $n = 2$, on sait [6] que dans le cas d'un corps de base fini, le cocycle ν_c est cohomologiquement trivial et que l'on est donc aussi ramené à une vraie représentation de $SL(V)$.

4.2. Forme explicite des opérateurs de WEIL généralisés.

Fixons une décomposition $V = \ell \oplus H$, avec $\dim \ell = 1$, et aussi $c \in k^\times$. Rappelons que l'on identifie l'espace $E(\sigma^{\ell,c})$ de ρ^c à $L^2(U(H)_-)$ ou encore à $L^2(\Lambda_- H)$ (n° 3.3, prop. 7).

Nous décrivons ensuite l'action suivant ρ^c d'un ensemble de générateurs de G . Posons

(12) $$P = \mathrm{Stab}_G \ell \quad , \quad L = (\mathrm{Stab}_G \ell) \cap (\mathrm{Stab}_G H) \ .$$

Pour tout $g \in L$, $f \in E(\sigma^{\ell,c}) = L^2(U(H)_-)$, on a

(13) $$(\rho^c_g f)(1+\eta) = f(g^{-1}\cdot(1+\eta)) = f(1 + \Lambda g^{-1}(\eta)) \qquad (\eta \in \Lambda_- H) \ ,$$

ou encore, avec l'identification indiquée,

(14) $$(\rho^c_g f)(\eta) = f(\Lambda g^{-1}(\eta)) \qquad (\eta \in \Lambda_- H) \ .$$

Remarquons que le sous-groupe P est engendré par L et les éléments unipotents

(15) $$u_\theta = I + \theta ,$$

où $I := \mathrm{Id}_V$ et où θ parcourt l'espace $\mathrm{Nil}_2(V,\ell)$ des endomorphismes ϕ de V tels que $\mathrm{Im}\,\phi = \ell$ et $\phi \circ \phi = 0$.

On a, par définition, pour $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, $\eta \in \Lambda_- H$,

$$\begin{aligned}(\rho^c_{u_\theta} f)(1 + \eta) &= f(1 + \Lambda(I - \theta)(\eta)) \\ &= f(1 + (I - d_\theta)(\eta)) ,\end{aligned}$$

où d_θ désigne l'unique prolongement de $\theta \in \mathrm{End}(V)$ en une dérivation de l'algèbre ΛV , définie par $d_\theta(1) = 0$ et

(16) $$\begin{aligned} d_\theta(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = \theta(v_1) \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m + v_1 \wedge \theta(v_2) \wedge \dots \wedge v_m + \dots + \\ + v_1 \wedge \dots \wedge v_{m-1} \wedge \theta(v_m)\end{aligned}$$

sur les éléments décomposables $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ de $\Lambda(V)$ $(1 \leq m \leq n)$. Or, comme $1 + d_\theta(\omega) \in U^\ell$, quel que soit $\omega \in \Lambda V$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(\rho^c_{u_\theta} f)(1 + \eta) &= f(1 + \eta - d_\theta(\theta)) \\ &= f((1 - d_\theta(\eta) + d_\theta(\eta) \wedge \eta) \wedge (1 + \eta)) \\ &= \psi^c_V(d_\theta(\eta) \wedge \eta) f(1 + \eta) ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec l'identification en vigueur,

(17) $$(\rho^c_{u_\theta} f)(\eta) = \psi^c_V(d_\theta(\eta) \wedge \eta) f(\eta) \qquad (\eta \in \Lambda_- H) .$$

Enfin, décomposons $H = \ell' \oplus M$, où $\dim \ell' = 1$ et notons w un élément de WEYL qui échange ℓ et ℓ' et fixe M . Pour fixer les idées, si e_1 (resp. e_2 ; resp. $e_3, \dots, e_n$) est une base de ℓ (resp. ℓ' ; resp. M) , on peut prendre $w(e_1) = -e_2$, $w(e_2) = e_1$ et $w(e_i) = e_i$ $(3 \leq i \leq n)$. Comme $G = P \cup PwP$, il ne reste qu'à traiter ρ^c_w pour achever la description explicite de ρ^c sur un ensemble générateur de G .

Or on a, pour $f \in E(\sigma^{\ell,c})$, $\eta = e_2 \wedge \omega_+ + \omega_- \in \Lambda_- H$ (où $\omega_\pm \in \Lambda_\pm M$) ,

$$(\rho_w^c f)(1+\eta) = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta_+\in\Lambda_+M} (f\circ w^{-1})((1+e_1\wedge\zeta_+)(1+e_2\wedge\omega_++\omega_-))$$
$$= q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta_+\in\Lambda_+M} f((1+e_2\wedge\zeta_+)\wedge(1-e_1\wedge\omega_+\wedge(1-\omega_-))\wedge(1+\omega_-))$$
$$= q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta_+\in\Lambda_+M} f((1-e_1\wedge\omega_+\wedge(1-\omega_-)+2e_1\wedge e_2\wedge\zeta_+\wedge\omega_+)\wedge$$
$$\wedge(1+e_2\wedge\zeta_+)\wedge(1+\omega_-))$$
$$= q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta_+\in\Lambda_+M} \psi_V^c(2e_1\wedge e_2\wedge\zeta_+\wedge\omega_+)f((1+e_2\wedge\zeta_+\wedge\omega_-)\wedge$$
$$\wedge(1+e_2\wedge\zeta_++\omega_-))$$
$$= q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta_+\in\Lambda_+M} \psi_V^c(2e_1\wedge e_2\wedge\zeta_+\wedge\omega_+)f(1+e_2\wedge\zeta_++\omega_-)\ .$$

Autrement dit, on a

$$(18)\quad (\rho_w^c f)(\eta) = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta_+\in\Lambda_+M} \psi_M^c(2\zeta_+\wedge\omega_+)f(e_2\wedge\zeta_++\omega_-)$$

(où $\eta = e_2\wedge\omega_++\omega_-\in e_2\wedge\Lambda_+M\oplus\Lambda_-M=\Lambda_-H$) , ou encore, si l'on note η' (resp. η'') la composante $e_2\wedge\omega_+$ (resp. ω_-) de η dans $\ell'\wedge\Lambda_+M$ (resp. Λ_-M) ,

$$(19)\quad (\rho_w^c f)(\eta) = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta\in\ell\wedge\Lambda_+M} \psi_V^c(2\zeta\wedge\eta')f(\Lambda w^{-1}\zeta+\eta'')\ ,$$

formule qui étend la transformée de Fourier usuelle (cas $n = 2$) .

Nous résumons notre description dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4. <u>Si l'on identifie à</u> $L^2(\Lambda_-H)$ <u>l'espace de la représentation de WEIL généralisée</u> ρ^c <u>de</u> G , <u>celle-ci est décrite comme suit sur un ensemble générateur de</u> $G = SL(V)$ (<u>cf. notations ci-dessus</u>). <u>Quels que soient</u> $f\in L^2(\Lambda_-H)$ <u>et</u> $\eta\in\Lambda_-H$, <u>on a</u>

i) $\rho_g^c f = f\circ(\Lambda g^{-1})$ $\qquad (g\in L)$;

ii) $(\rho_{u_\theta}^c f)(\eta) = \psi_V^c((d_\theta\eta)\wedge\eta)f(\eta)$ $\qquad (\theta\in Nil_2(V,\ell))$;

iii) $(\rho_w^c f)(\eta) = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta\in\ell\wedge\Lambda_+M} \psi_V^c(2\zeta\wedge\eta')f(\Lambda w^{-1}(\zeta)+\eta'')$,

<u>où l'on a décomposé</u> $\eta\in\Lambda_-H=\ell'\wedge\Lambda_+M\oplus\Lambda_-M$ <u>sous la forme</u> $\eta=\eta'+\eta''$, <u>avec</u> $\eta'\in\ell'\wedge\Lambda_+M$, $\eta''\in\Lambda_-M$.

REMARQUE. Si l'on prend $\theta(e_2) = be_1$ $(b \in k)$ et $\theta(e_j) = 0$ pour tout $j \neq 2)$, la formule ii) du théorème devient

$$(19) \qquad (\rho^c_u\, f)(\eta) = \psi^c_M(b\eta^+ \wedge \eta^+)f(\eta) \qquad (\eta \in \Lambda_- H) ,$$

où l'on a écrit $\eta = e_2 \wedge \eta^+ + \eta^-$, avec $\eta^\pm \in \Lambda_\pm M$.

COROLLAIRE 1 (*Expression des opérateurs de WEIL généralisés en coordonnées*). *Choisissons une base* $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *de* V , *adaptée à la décomposition* $V = \ell \oplus \ell' \oplus M$, *c'est-à-dire* $\ell = \langle e_1 \rangle$, $\ell' = \langle e_2 \rangle$, $M = \langle e_3, \dots, e_n \rangle$, $H = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$. *Posons* $[r,s] = \{r, r+1, \dots, s\}$ *et* $[r] = [1,r]$, *pour* $r,s \in \mathbb{N}$, $r,s \geq 1$. *Notons* $P_-[2,n]$ *l'ensemble des parties de* $[2,n]$ *à un nombre impair d'éléments. Pour* $i \in S \subset P_-[2,n]$, *posons* $\varepsilon_S(i) = 1$ (*resp.* -1) *si* i *a un nombre pair (resp. impair) de prédécesseurs dans* S . *Pour* $\eta \in \Lambda_- H$ *nous noterons* $\{y_S\}_{S \subset P_-[2,n]}$ *ses composantes par rapport à la base naturelle* $\{e_S\}_{S \in P_-[2,n]}$ *de* $\Lambda_- H$, *déduite de* $\mathcal{B}$.

Alors les formules ii) *et* iii) *du th. 4 (dont nous gardons les notations) se re-écrivent comme suit.*

$$\text{ii)'} \quad (\rho^c_{u_\theta}\, f)(\eta) = \psi^c_V \Big(\sum_{i=2}^{n} b_i \sum_{i \in S} \varepsilon_S(i) y_S y_{S'-\{1\}\cup\{i\}} \Big) f(\eta) ,$$

où $b_i e_1 := \theta(e_i)$ $(2 \leq i \leq n)$, *l'indice* S *parcourt* $P_-[2,n]$ *et* S' *désigne le complémentaire de* S *dans* $[n]$.

$$\text{iii)'} \quad (\rho^c_w f)(\eta) = q^{-d(n)/2} \sum_{\zeta \in \ell' \wedge \Lambda_+ M} \psi^c_V \Big(2 \sum_{\substack{S \in P_-[2,n] \\ 2 \in S}} y_S z_{S'-\{1\}\cup\{2\}} \Big) f(\zeta + \eta'') ,$$

où l'on note $\{z_S\}_{S \in P_-[2,n]}$ *les coordonnées de* ζ *par rapport à la base* $\{e_S\}_{S \in P_-[2,n]}$ *de* $\Lambda_- H$.

PROPOSITION 11. *Le type d'isomorphie de* ρ^c *ne dépend en général que de la classe de* c *modulo carrés dans* $k^\times$, *mais si* $n = 4m$, *il ne dépend ni de* $c \in k^\times$, *ni du choix du caractère non trivial* ψ *de* k^+ .

Démonstration: Il est immédiat, d'après les formules i) à iii) du théorème, qu'en composant avec l'homothétie de rapport $t \in k^\times$ dans $\Lambda_- H$, on établit un isomorphisme de ρ^c sur ρ^{ct^2} , quel que soit n . Mais si $n = 4m$, ces mêmes formules montrent qu'en composant chaque $f \in L^2(\Lambda_- H)$ avec l'endomorphisme

$\eta \mapsto t_1\eta_1 + t_3\eta_3 + \ldots + t_{n-1}\eta_{n-1}$ de Λ_-H , où $t_i t_{n-i} = r \in k^\times$ $(1 \leq i \leq n-1$, i impair), on établit un isomorphisme de ρ^c avec ρ^{rc} ; comme tout caractère non trivial de k^+ est de la forme ψ^c , pour $c \in k^\times$, convenable, notre dernière assertion en découle aussitôt.

C.Q.F.D.

4.3. Automorphismes des représentations de WEIL généralisées.

Notons $[n-1]_-$ l'ensemble $\{1,3, \ldots, n-1\}$ des entiers impairs compris entre 1 et $n-1$. Désignons par $I(k^\times)$ le groupe des $t = (t_i)_{i\in[n-1]_-}$ tels que $t_i t_{n-i} = 1$ quel que soit $i \in [n-1]_-$. Alors $I(k^\times) \simeq (k^\times)^m$ (resp. $(k^\times)^m \times \{\pm 1\}$) si $n = 4m$ (resp. $n = 4m+2$) . Pour $t \in I(k^\times)$, posons

$$h_t(\eta) = \sum_{i\in[n-1]_-} t_i\eta_i \qquad (\eta \in \Lambda_-H) .$$

La proposition suivante est alors immédiate.

PROPOSITION 12. Les opérateurs γ_t $(t \in I(k^\times))$ dans $E(\sigma^{\ell,c}) = L^2(\Lambda_-H)$, définis par $\gamma_t(f) = f \circ h_t$ $(f \in L^2(\Lambda_-H))$ forment un groupe commutatif Γ d'opérateurs d'entrelacement de ρ^c , isomorphe à $I(k^\times)$.

On a donc une première décomposition

$$L^2(\Lambda_-H) = \bigoplus_{\alpha\in I(k^\times)^\wedge} W_\alpha , \tag{20}$$

de ρ^c , où W_α consiste des $f \in L^2(\Lambda_-H)$ telles que $\gamma_t(f) = \alpha(t)f$ $(t \in I(k^\times))$. Notons que l'on peut espérer que les composantes W_α soient (génériquement) irréductibles, comme c'est le cas pour $n = 2$, seulement pour n assez petit, vu les dimensions des représentations en jeu. Nous reviendrons ailleurs sur ce problème...

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTIER, P., Quantum mechanical commutation relations and theta functions, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, p. 361-383.

[2] GELBART, S., Examples of dual reductive pairs, Automorphic Forms, Representations, and L-Functions, Part I, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 287-296.

[3] GÉRARDIN, P., Weil Representations Associated to Finite Fields, J. Algebra, 46 (1977), p. 54-101.

[4] GONCHAROV, A.B., Construction of the Weil representations of certain simple Lie algebras, Funkts. Anal. Prilozhen., 16 (1982), n° 2, p. 70-71.

[5] HOWE, R., Invariant Theory and Duality for Classical Groups over finite fields, preprint.

[6] HOWE, R., On the character of Weil's representation. Trans. Amer. Soc. 177 (1973), p. 287-298.

[7] HOWE, R., θ-series and Invariant theory, Automorphic Forms, Representations and L-Functions, Part I, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 275-285.

[8] HOWE, R., Dual pairs in Physics: Harmonic Oscillators, Photons, Electrons and Singletons, Lectures in App. Math., vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1985, p. 179-207.

[9] KUBOTA, T., On a generalized Weil type representation, Alg. Number Theory, Kyoto, 1976, p. 117-128.

[10] LION, G., VERGNE, M., The Weil representation, Maslov Index and Theta series, Progress in Maths., vol. 6, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.

[11] Li, W., SOTO-ANDRADE, J., Barnes'identities and representations of $GL(2)$. I, Finite field case, J. reine angew. Mathematik, 344 (1983), p. 171-179.

[12] LIPSMAN, R.L., On the existence of a generalized Weil representation, Non-Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Lecture Notes in Math., vol. 1020, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[13] MACKEY, G.W., Unitary group representations in physics, probability and number theory, Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978.

[14] PRADO, H., Répresentations de $GL(2,\mathbb{R})$ et identités de type Barnes pour la fonction Γ, C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, 300 (1985), p. 97-100.

[15] RAWNSLEY, J., STERNBERG, S., On the representation associated to the minimal coadjoint orbit of $SL(3,\mathbb{R})$, Amer. J. Math., 104 (1982), p. 1153-1180.

[16] RUBENTHALER, H., SCHIFFMANN, G., Triplet de WEIL associé à un polynôme homogène et à un espace préhomogène, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 305 (1987), p. 407-410.

[17] SOTO-ANDRADE, J., Représentations de certains groupes symplectiques, Bull. Soc. Math. France, Mém. 55-56 (1978), 334 p.

[18] SOTO-ANDRADE, J., Sur la construction des représentations des groupes classiques, Analysis, Geometry and Probability, M. Dekker, New York, 1985, p. 121-146.

[19] SOTO-ANDRADE, J., Geometrical GEL'FAND Models, Tensor Quotients and WEIL representations, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1987, p. 305-316.

[20] TORASSO, P., Quantification géométrique, opérateurs d'entrelacement et représentations unitaires de $SL_3(\mathbb{R})$, Acta Math. 150 (1983), p. 153-242.

[21] WEIL, A., Basic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1962.

[22] WEIL, A., Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964), p. 143-211.

[23] YAMAZAKI, T., On a generalization of the Fourier Transformation, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 25 (1978), p. 237-252.

José PANTOJA
Inst. Mat. y Física. Univ. Valparaíso
Casilla 1470. Valparaiso. CHILI.

Jorge SOTO-ANDRADE
Depto. Mat. Univ. Chile
Casilla 653, Santiago.
CHILI