ANDRÉ UNTERBERGER

Analyse harmonique et analyse pseudo-différentielle du cône de lumière André Unterberger

Astérisque, tome 156 (1987)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__156__1_0>

156 ASTÉRISQUE

1987

ANALYSE HARMONIQUE ET ANALYSE PSEUDO-DIFFÉRENTIELLE DU CÔNE DE LUMIÈRE

André UNTERBERGER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification (1985) : primary : 35 S 05, 58 G 15, 81 D 07
secondary : 22 E 43, 32 M 15, 53 C 35, 58 G 35,
81 D 30, 81 M 05.

A la mémoire de

Charles Goulaouic

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Considérons le domaine C de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ constitué des points $x = (x_o, x_*)$ tels que $x_o > |x_*|$: c'est un espace symétrique pour une structure riemannienne invariante aussi bien par les homothéties que par les transformations de Lorentz. De plus, le tube complexe $\Pi = C + i\mathbb{R}^{n+1}$ est lui-même un espace symétrique, à savoir le domaine BD I(q=2) de la classification d'E. Cartan.

A cette géométrie très riche est adaptée une théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur C, qui est l'objet de la présente monographie.

Les méthodes employées sont le fruit d'une assez longue élaboration ([42] à [48]) : l'analyse harmonique et la théorie de la quantification y jouent un rôle important.

VUE D'ENSEMBLE ET MODE D'EMPLOI

Trois objectifs ont été à l'origine de ce travail. Il s'agit pour commencer, en séparant les aspects fondamentaux de l'analyse pseudo-différentielle classique de ses aspects particuliers liés au choix d'une certaine règle de quantification (calcul de Weyl), de concevoir l'esprit et les méthodes d'une future théorie générale de la quantification : à n'en pas douter, les réflexes issus d'une pratique constante des relations d'incertitude d'Heisenberg doivent ici céder le pas à une utilisation systématique des méthodes de l'analyse harmonique non commutative (espaces symétriques, théorie des représentations). Le deuxième but est d'étudier assez complètement la quantification naturelle d'un domaine classique : il s'agit d'apprécier sur un modèle local important de variété avec singularité la contribution que l'analyse pseudo-différentielle intrinsèque de ce domaine est susceptible d'apporter à la compréhension des problèmes aux limites posés dans ce domaine. Enfin, le choix du cône de lumière n'est pas fortuit : outre le fait que le domaine de Cartan BD I(q=2) n'est que de rang 2, ce qui rend certains calculs moins inhumains (voir [53]), les groupes et représentations de groupes qui interviennent ici sont bien sûr liés à la relativité; la mécanique quantique relativiste comprend la troisième application visée par le présent travail.

Le lecteur qui désire avant tout s'informer sur les méthodes d'analyse harmonique mises en jeu, et sur la structure du calcul de Fuchs, aura avantage à parcourir l'introduction, puis les sections 1,2,3,17,18 avant de poursuivre éventuellement. Il n'est pas indispensable qu'il se sente motivé par la première partie de cette introduction, destinée à situer le calcul de Fuchs par rapport à l'analyse pseudo-différentielle classique.

A l'opposé, si les problèmes aux limites sont absents de ce travail (mais nous espérons y revenir ailleurs), le calcul symbolique a été suffisamment développé pour ce qui concerne l'analyse <u>interne</u> du domaine C (espaces de Sobolev, opérateurs elliptiques); le cas du domaine mixte $\mathcal{M}$, décrit dans les sections 15 et 16, est le plus maniable. Dans le cas du demi-espace (étudié également, par d'autres méthodes, par plusieurs auteurs), nous avons éclairci le lien avec le calcul totalement caractéristique de Melrose [29] .

La section 19 comprend une application des méthodes utilisées dans ce travail à l'analyse microlocale sur $\mathbb{R}^n$, et une introduction au calcul de Klein-Gordon, sorte de restriction du calcul de Fuchs du cône. La relation du calcul de Klein-Gordon au calcul de Weyl est analogue à celle de la mécanique relativiste à la mécanique classique. Ce calcul est développé dans des articles en cours [49], [51] et constitue à notre avis, tant par lui-même que par ses généralisations possibles, la plus prometteuse des applications du présent travail.

Notre lecteur préféré est celui qui s'intéresse aux opérateurs pseudo-différentiels pour eux-mêmes : cet ouvrage lui est principalement destiné.

L'ANALYSE PSEUDODIFFÉRENTIELLE

L'analyse pseudo-différentielle, on le sait, associe des opérateurs agissant sur les fonctions définies sur un domaine M à des fonctions (les symboles) définies sur un <u>espace de phase</u> :celui-ci est en général l'espace cotangent T^*M. L'efficacité de cette analyse tient à la grande variété des opérateurs que l'on peut produire de cette façon, à la précision des estimations obtenues quant à la continuité de ces opérateurs, enfin à la facilité d'emploi des formules asymptotiques exprimant la composition des symboles. Elle est à l'origine du concept de front d'onde (ou spectre singulier) d'une distribution sur M, auquel de nombreux énoncés d'E.D.P. doivent leur élégance.

Les actions et représentations de groupes sont l'ingrédient essentiel, quoique le plus souvent non explicite, de l'analyse pseudo-différentielle. Ainsi, lorsque $M = \mathbb{R}^n$, le groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ (et son groupe dual, agissant sur les transformées de Fourier) joue-t-il un rôle dans la définition même de la règle usuelle de correspondance entre symboles et opérateurs ; dans le cas d'une variété ouverte M, l'action (locale) de ce groupe dépend du système de coordonnées choisi, mais reste néanmoins essentielle. Plus récemment, en particulier à la suite des travaux de J. Leray [27], l'importance du groupe symplectique est apparue en pleine lumière. Enfin, le groupe des homothéties sur les fibres de l'espace cotangent intervient (à un titre différent, car aucune représentation ne lui est associée) dans la définition du front d'onde.

Les problèmes aux limites se posent sur des domaines M dont la géométrie locale (au voisinage des points de ∂M) est décrite de façon naturelle au moyen de groupes locaux distincts de ceux considérés plus haut. Les méthodes de microlocalisation doivent nécessairement refléter cet état de fait. C'est ainsi que R.B. Melrose a montré dans [29] tout l'intérêt qu'il y a, dans le cas d'une variété à bord M, à remplacer l'espace cotangent T^*M par l'espace cotangent <u>comprimé</u> $\tilde{T}^*M$, qui diffère du premier au voisinage de ∂M. Les symboles vivant sur $\tilde{T}^*M$ sont ceux des opérateurs pseudo-différentiels <u>totalement caractéristiques</u> . On décrit facilement ce que sont les opérateurs différentiels parmi ceux-ci : ce sont ceux de l'algèbre engendrée par les champs de vecteurs C^∞ sur M qui sont tangents à ∂M aux points de M. A l'analyse pseudo-différentielle totalement caractéristique sur M est attachée une notion spécifique de front d'onde.

D'autres problèmes aux limites classiques et naturels se posent sur des domaines dont la frontière ne saurait elle-même être une variété C^∞. C'est ainsi qu'une quantité de travaux ont été consacrés à des problèmes sur des variétés à coins où à singularités coniques (on pourra voir par exemple P. Bolley, M. Dauge et J. Camus [6], J. Cheeger et M. Taylor [12], M. Dauge [15], Pham The Lai [30], M. Rouleux [34], B.W. Schulze [35]). Par ailleurs, les problèmes mixtes ont des domaines, dans l'espace-temps, du type d'un demi-cylindre. Notre ambition est de montrer sur l'exemple du cône C (mais la présente introduction suggérera un choix plus vaste de modèles locaux) qu'il est possible de développer une analyse pseudo-différentielle exactement adaptée à la géométrie du cône : celle-ci est d'une richesse considérable, puisque le groupe de Lorentz, complété par les homothéties, y opère. Deux sous-produits de cette analyse concerneront les cas où M est un demi-espace (c'est aussi le modèle local de la théorie de R.B. Melrose), ou bien le demi-cylindre basé sur une boule de $\mathbb{R}^n$.

Avant de donner des indications sur les résultats et méthodes, rappelons, pour faciliter la discussion ultérieure, que dans le calcul des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$ deux sortes (au moins) de symboles s'imposent à notre attention. Les symboles <u>classiques</u> sont des fonctions $f(x,\xi)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifient les inégalités

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|},$$

où la constante m s'appelle l'ordre du symbole f ; les symboles <u>de Calderon-Vaillancourt</u> (ils furent en effet étudiés pour la première fois par ces auteurs [11]) sont caractérisés par des inégalités similaires, l'exposant $m-|\beta|$ étant remplacé par m. Ces derniers sont bien entendu plus généraux que les symboles classiques, et ils présentent une grande utilité technique. Observons que la nature des symboles de Calderon-Vaillancourt est liée à la structure de groupe additif de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et que celle des symboles classiques dépend en outre de la structure vectorielle du second facteur de ce produit. A ce titre, les symboles de la première espèce se généralisent de façon naturelle à tous les cas où l'espace de phase (la variété sur laquelle vivent les symboles, quelle qu'elle soit) est un espace riemannien homogène ; les symboles classiques se laissent définir dès que l'espace de phase a en outre une structure de fibré vectoriel. Dans le cas du cône C, nous étudierons les opérateurs correspondant à ces deux types de symboles. Insistons sur le fait que la partie difficile de ce travail concernera l'étude des opérateurs de Calderon-Vaillancourt : les propriétés asymptotiques spécifiques au calcul des opérateurs classiques se déduiront sans peine de là. Enfin, une espèce encore plus particulière de symboles est bien adaptée aux propriétés de traces : elle est essentiellement celle de symbole totalement caractéristique de R.B. Melrose.

Une très brève description de l'analyse pseudo-différentielle du demi-espace $M = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ montrera tout de suite les différences entre l'analyse pseudo-différentielle développée ici et celle développée, en vue des problèmes aux limites, par d'autres auteurs (L. Boutet de Monvel [9], R.B. Melrose [29]). Le groupe le plus naturel opérant sur ce domaine est le produit direct du groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ par le groupe $\mathbb{R}_*^+$ des homothéties opérant sur le premier facteur. Désignant par (s,x) ou (t,y) le point courant de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$, et par (σ,ξ) ou (τ,η) la variable duale, nous associons au symbole $f(s,x;\sigma,\xi)$ l'opérateur $Q(f)$ sur $L^2(M, ds\, dx)$ défini par

$$(Q(f)u)(s,x) = \int f((st)^{\frac{1}{2}}, \frac{x+y}{2}\,;\tau,\eta)$$

$$\exp 2i\pi[(s-t)\tau+\langle x-y,\eta\rangle]u(t,y)dt\, dy\, d\tau d\eta.$$

La seule différence, mais elle est essentielle, avec le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$, est que l'on a remplacé $\frac{s+t}{2}$ par $(st)^{\frac{1}{2}}$: notons bien sûr, pour prévenir toute confusion, que $e^{2i\pi(s-t)\tau}$ n'a pas été remplacé par $(\frac{s}{t})^{2i\pi\tau}$, sans quoi ce calcul ne serait qu'une version déguisée par difféomorphisme du calcul de Weyl ! Au contraire, le présent calcul est lié non seulement à la géométrie intrinsèque de M, mais également au plongement de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Les symboles de Calderon-Vaillancourt d'ordre O sont caractérisés par les inégalités

$$|(s\frac{\partial}{\partial s})^j (s^{-1}\frac{\partial}{\partial\sigma})^k (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial\xi})^\beta f(s,x;\sigma,\xi)| \leqslant C_{jk\alpha\beta} \ :$$

ils conduisent dans ce calcul à des opérateurs bornés sur $L^2(M)$. Les différences entre ce calcul et celui obtenu par une restriction convenable du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$ s'estompent à mesure que l'on renforce les hypothèses sur les symboles f : il en est ainsi, en particulier, si l'on se limite à l'utilisation des symboles totalement caractéristiques de Melrose ; les opérateurs correspondants rentrent en effet dans notre calcul, mais l'hypothèse de lacunarité sur les symboles n'a plus ici de raison d'être.

LES RÉSULTATS

Le cône C est un espace riemannien homogène sous l'action du groupe $G_o = \mathbb{R}_*^+ \times SO_o(1,n)$, où le groupe $SO_o(1,n)$ désigne la composante neutre du groupe de Lorentz : munissant C du point de base $\omega = (1,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on l'identifie à $\mathbb{R}_*^+ \times (SO_o(1,n)/SO(n))$. C'est également un espace symétrique : la symétrie géodésique autour de ω est l'application S_ω telle que

$$S_\omega(x_o,x_*) = (x_o^2-|x_*|^2)^{-1}(x_o,-x_*),$$

et l'homogénéité permet d'expliciter sans peine la symétrie S_y autout de n'importe quel point $y \in C$. Désignant par dm(y) la mesure sur C (unique à un coefficient près) invariante sous l'action de G_o, on introduit l'espace de Hilbert $H = L^2(C,dm)$. Pour tout $y \in C$, la transformation σ_y de H définie par $(\sigma_y u)(t) = u(S_y t)$ est une transformation unitaire de H.

On aura noté que la définition de σ_y ne dépend que de de la géométrie intrinsèque de C. Au contraire, la réalisation de C comme ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ intervient dans la définition suivante : pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, la transformation unitaire τ_η de H est définie par

$$(\tau_\eta u)(t) = u(t)e^{2i\pi\langle\eta,t\rangle} .$$

Il est convenable d'interpréter l'espace des couples (y,η) comme l'espace cotangent $T^*(C)$. Le calcul de Fuchs des opérateurs pseudo-différentiels sur C est alors défini comme la règle de correspondance $f \mapsto Op(f)$ qui à toute fonction f sommable sur $T^*(C)$

(un <u>symbole</u>) associe l'opérateur Op(f) sur H tel que

$$\mathrm{Op}(f) = 2^{n+1} \iint f(y,\eta)\ \tau_\eta \sigma_y \tau_\eta^{-1}\ dy\, d\eta .$$

Si l'on effectue une construction analogue en partant (au lieu de C) de la demi droite $\mathbb{R}_*^+$ plongée dans $\mathbb{R}$, on obtient une théorie [48] dans laquelle les équations différentielles ordinaires du type de Fuchs occupent la place réservée, dans la théorie sur $\mathbb{R}^n$, aux équations elliptiques : c'est ce qui explique la terminologie adoptée.

La définition du calcul de Fuchs offre d'emblée un certain nombre de satisfactions formelles. Ainsi, l'action géométrique de G_o dans C conduit à une représentation unitaire de ce groupe dans H ; armé en outre des transformations τ_η, on obtient une représentation unitaire V dans H d'un certain produit semi-direct G de G_o par le groupe additif $\mathbb{R}^{n+1}$. Ce groupe G peut être identifié à un groupe de transformations affines de $T^*(C) = C \times \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$; dans le cas où $n = 3$, C est le cône du futur de la relativité, et G contient le groupe de Poincaré. On vérifie alors sans peine une formule de <u>covariance</u>, qui exprime la cohérence entre la règle de correspondance Op, la représentation de G dans H et l'action géométrique de G sur $T^*(C)$.

Ce travail est consacré pour l'essentiel à l'examen des questions fondamentales propres à rendre le calcul de Fuchs utilisable au même titre que l'est, sur $\mathbb{R}^n$, le calcul de Weyl des opérateurs pseudo-différentiels. Appelons <u>symbole de poids</u> 1 toute fonction f de classe C^∞ sur $T^*(C) = C \times \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant ce qui suit : pour tout opérateur D^α de dérivation au point $(\omega, 0) \in T^*(C)$, la fonction $\gamma \mapsto (D\ (f \circ \gamma))(\omega, 0)$ est bornée sur le groupe G.

Le théorème 10.3 montrera que l'opérateur Op(f) attaché à un symbole de poids 1 est borné sur H. Ce théorème est pour le calcul de Fuchs l'analogue de ce qu'est le théorème de Calderon-Vaillancourt (corollaire 1.1) pour le calcul de Weyl : sa démonstration mettra en oeuvre des moyens importants. L'espace de phase $T^*(C)$ ayant une structure de fibré vectoriel, la notion de symbole polynomial d'ordre m entier $\geqslant 0$ y prend un sens : il convient bien entendu de restreindre (tenant compte de la structure riemannienne de C) le comportement d'un tel symbole lorsque y s'approche de ∂C. Comme dans le cas du calcul pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^n$, on parvient à la notion de <u>sym-</u>

bole classique d'ordre m, où m est un nombre réel quelconque, en renonçant au comportement polynomial au profit de conditions de croissance bien connues : les dérivations par rapport à la variable η améliorent le comportement, ce qui fait que la notion de symbole de poids 1 est plus générale que celle de symbole classique d'ordre O. Nous établirons, pour le cas des symboles classiques, la validité asymptotique d'une série exprimant le symbole de la composition $Op(f) \circ Op(g)$ de deux opérateurs. Les deux premiers termes n'y sont pas distincts des termes correspondants de la formule analogue du calcul de Weyl, et le crochet de Poisson joue en particulier le même rôle, ce qui étend au calcul de Fuchs la signification des opérateurs elliptiques et du front d'onde d'une part, du hamiltonien d'autre part.

LES MÉTHODES

Le calcul de Fuchs sur C a une structure plus complexe que le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$, qui est le reflet de la plus grande complexité de son groupe de covariance (rappelons que celui-ci contient le groupe G de transformations affines de $T^*(C)$ introduit plus haut). Aussi a-t-il été nécessaire de développer des méthodes intrinsèques et d'une grande économie. C'est pourquoi le lecteur ne trouvera ici rien de l'arsenal traditionnel avec lequel il est peut-être familier : découpage de symboles, intégrations par parties répétées, développements de Taylor sous la formule intégrale de composition des symboles. Nous avons inséré (section 1) un traitement du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$ par nos méthodes. On peut y voir que les faits essentiels de l'analyse pseudo-différentielle sur $\mathbb{R}^n$ sont des corollaires immédiats d'une certaine caractérisation (théorème 1.1) des opérateurs ayant des symboles de poids donné : en outre la preuve du théorème 1.1 est très facile. Dans le calcul de Fuchs sur C, ce plan subsistera, avec la différence que la preuve de l'analogue du théorème 1.1 (les théorèmes 9.9 et 11.4) nécessitera des développements considérables.

La première tâche consiste à construire sur l'espace de phase une structure complexe dont les éléments du groupe G soient des automorphismes. Le tube complexe $\Pi = C + i\mathbb{R}^{n+1}$ répond à la question. Il est préférable, pour des raisons de clarté, de ne pas l'identifier à

$T^*(C)$: cependant les actions de G sur Π et sur $T^*(C)$ sont équivalentes sous un entrelacement défini en (2.22). L'espace Π est le domaine classique BD I, que l'on peut regarder comme l'espace homogène $SO_o(2,n+1)/SO(2)\times SO(n+1)$. Soit $\lambda > \max(0,n-1)$: le cas $n=0$ n'est pas exclu de nos considérations et correspond à $C = \mathbb{R}_*^+$. La transformation de Laplace permet d'identifier l'espace des fonctions u sur C de carré sommable pour la mesure $(y_o^2-|y_*|^2)^{-\lambda/2}dy$ à un espace de fonctions holomorphes sur Π . Il en résulte une représentation unitaire irréductible dans H_λ du groupe $\Gamma = SO_o(2,n+1)$ des automorphismes de la structure complexe de Π . On a ainsi donné une construction de la série discrète holomorphe de représentations de Γ (voir K.I. Gross et R.A. Kunze [19], H. Rossi et M. Vergne [32]): comme on ne fait pas d'hypothèse arithmétique sur λ on n'obtient que des représentations projectives en général, ce qui importe peu pour notre propos. On notera aussi que $H = H_{n+1}$. Le bénéfice principal pour le calcul de Fuchs est d'avoir réalisé H_λ comme un espace de fonctions possédant un noyau reproduisant, ce qui permet d'associer d'une façon canonique à tout point $X \in \Pi$ un élément φ_X^λ de l'espace H_λ : en composant avec l'isométrie naturelle de H_λ sur H, on obtient pour tout X un élément ψ_X^λ de H.Comme on peut voir que la restriction au groupe $G \subset \Gamma$ de la représentation (extraite de la série discrète) est, à équivalence près, indépendante de λ , on voit que l'on a, pour tout $\lambda \in G$, la relation

$$V(\gamma)\psi_X^\lambda = \psi_{[\gamma]X}^\lambda$$

si l'on désigne par V la représentation déjà citée de G dans H, et par $[\gamma]$ l'automorphisme de Π attaché à γ . Soit $d\mu$ la mesure invariante de Π : il existe une constante $k_\lambda > 0$ telle qu'on ait

$$\int_\Pi (u,\psi_X^\lambda)(\psi_X^\lambda,v)\,d\mu(X) = k_\lambda (u,v)$$

quelles que soient u et v appartenant à H. Cette formule peut s'interpréter comme fournissant une <u>résolution de l'identité</u> sur H, i.e. une décomposition de l'identité comme superposition des opérateurs de projection sur les fonctions ψ_X^λ ; les physiciens appelleraient volontiers ces fonctions des états cohérents.

Par des arguments hilbertiens que nous avions déjà utilisés dans [44] pour le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$, toute l'analyse d'un opérateur A est alors ramenée à l'examen des produits scalaires $(A\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)$ lorsque X et X' sont deux points de Π. Soit d la distance riemannienne sur l'espace Π. Le théorème fondamental du calcul de Fuchs consiste à caractériser les opérateurs A = Op(f), où f est un symbole de poids 1, comme ceux pour lesquels $(A\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)$ est majoré par n'importe quelle puissance de exp-d(X,X'). Le théorème (théorèmes 9.9 et 11.4) a un énoncé un peu plus laborieux, parce qu'il faut faire varier λ, et que d'autres poids doivent également être considérés.

Il nous reste enfin à expliquer, car là est toute la difficulté, par quel moyen on estime ces produits scalaires. On commence par expliciter la <u>fonction de Wigner</u> $W(\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)$: nous entendons par là la fonction sur $T^*(C)$ qui permet d'écrire pour tout symbole f (raisonnable) l'identité

$$(Op(f)\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda) = \int_{T^*(C)} f(Y) W(\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)(Y)dY$$

avec $Y = (y,\eta)$ et $dY = dy\, d\eta$. Le théorème 7.3 fournit la fonction de Wigner sous la forme d'une intégrale simple que l'on ne peut pas réduire davantage, sauf si n = 0, auquel cas elle s'exprime grâce à la fonction de Bessel K_o.

Ensuite, il faut majorer la fonction de Wigner. La difficulté ne réside pas dans l'examen de la fonction spéciale de rang 2" qui y intervient, mais dans l'obtention d'une certaine inégalité géométrique. Posons

$$r(X) = X_o^2 - X_1^2 - \ldots - X_n^2$$

si $X \in \Pi$, et

$$\rho(X,X') = \langle X,\bar{X}'\rangle + (r(X))^{\frac{1}{2}}(r(\bar{X}'))^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit alors de montrer qu'il existe deux nombres positifs ε et N tels que, quels que soient X et $X' \in \Pi$, on ait

$$\mathrm{Re}\,[(\rho(X,X'))^{\frac{1}{2}}] \geqslant \varepsilon |X|^{\frac{1}{2}} |X'|^{\frac{1}{2}} \exp(-N\, d(X,X')).$$

Cette inégalité (théorème 8.11) ne sera obtenue qu'au prix d'un grand nombre de lemmes, et les sections 5 et 8 sont entièrement consacrées à sa démonstration.

L'estimation de l'intégrale qui permet de calculer $(Op(f)\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)$ obtenue à la suite de ces inégalités n'est pas encore satisfaisante, et il faut améliorer les puissances de exp d(X,X') qui y interviennent. Profitant de la différentiabilité du symbole f, on y parvient grâce à une intégration par parties, la seule de toute la théorie. On établit en effet (lemme 9.5) l'existence d'un opérateur B_λ permettant d'écrire l'identité

$$B_\lambda W(\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda) = \frac{r(X+\bar{X}')}{4(r(\mathrm{Re}\, X)r(\mathrm{Re}\, X'))^{\frac{1}{2}}} \; W(\psi_X^{\lambda+2}, \psi_{X'}^{\lambda+2})$$

et l'on note que le facteur apparent au second membre est du même ordre que exp d(X,X'). Ce point méritait d'être signalé car il montre bien le rôle important joué par les fonctions ψ_X^λ, bien que ces fonctions (ainsi que λ) ne soient pas apparues dans la <u>définition</u> du calcul de Fuchs. On notera que l'opérateur B_λ n'est pas un opérateur différentiel , mais un opérateur pseudo-différentiel sur $T^*(C)$ dont il faut encore établir la continuité sur des espaces de symboles appropriés. Ceci ne présente pas de difficulté particulière, et conclut ce résumé des méthodes employées.

PERSPECTIVES

Il paraît assuré que tout ce programme doit pouvoir être développé dans tous les cas où Π est remplacé par un espace hermitien du type d'un tube complexe, C étant remplacé par la base de ce tube: parmi ces espaces Π , certains domaines classiques (I. Piatetskii-Chapiro [31]) sont les plus intéressants. Le seul point qui paraît redoutable dans le cas général concerne l'établissement de l'inégalité géométrique cruciale qui permet de majorer la fonction de Wigner.

Le lecteur aura sans doute observé que peu de structure (la structure d'espace symétrique de C, et le plongement de C dans un espace numérique) a été nécessaire pour définir le calcul de Fuchs et établir la covariance de celui-ci à l'égard d'actions convenables de G. En revanche, une structure très riche (la structure hermitienne de Π) a été nécessaire pour établir la continuité des opérateurs dontles symboles sont de poids 1. Enfin, compte tenu de ce dernier résultat, l'existence de développements asymptotiques reflète le simple fait que les opérateurs différentiels ont des symboles polynomiaux par rapport à η. Notre propos dans le reste de cette introduction est de situer le calcul de Fuchs parmi les calculs covariants que l'on obtient facilement par diverses généralisations du calcul de Weyl, et d'expliquer ainsi les raisons de son succès.

Il y a au moins trois façons d'interpréter la formule qui définit le calcul de Weyl $f \mapsto Op_W(f)$ des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$, suivant que l'on privilégie les opérations de symétrie ou celles de translation. Comme nous allons le voir, elles conduisent à des généralisations différentes.

Pour tout $Y = (y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et toute distribution u sur $\mathbb{R}^n$, posons

$$(\tau_Y u)(x) = u(x-y) \exp 2i\pi <x- \frac{y}{2} ,\eta>.$$

On peut écrire $\tau_Y = \exp 2i\pi[<\eta,q>-<y,p>]$ si $q = x$ et $p = (2i\pi)^{-1}\partial/\partial x$ désignent les opérateurs de position et d'impulsion habituels en physique. Les opérateurs τ_Y engendrent une version du groupe d'Heisenberg, mais on peut aussi regarder τ comme une représentation projective du groupe additif $\mathbb{R}^{2n}$. La propriété caractéristique du calcul de Weyl est que τ_Y est l'image par Op_W du symbole

$$(x,\xi) \mapsto \exp 2i\pi[<\eta,x>-<y,\xi>] .$$

Si l'on définit la forme symplectique $[\ ,\ ]$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$[(x,\xi),(y,\eta)] = -<x,\eta>+<y,\xi>$$

et que, pour toute distribution f sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on pose

$$(\mathcal{G}f)(X) = 2^n \int f(Y)e^{-4i\pi [X,Y]}dY,$$

on parvient à la relation

$$Op_W(f) = 2^n \int (\mathcal{G}f)(Y)\,\tau_{2Y}dY$$

qui exprime l'opérateur de symbole f comme superposition des opérateurs "de translation" τ_Y : ce dernier qualificatif est justifié par la relation de covariance

$$\tau_Y Op_W(f)\tau_Y^{-1} = Op_W(X \mapsto f(X-Y)).$$

Cette construction peut dans une large mesure, grâce à la théorie de

Kirillov, être généralisée au cas où le groupe d'Heisenberg est remplacé par un groupe nilpotent général ou même un groupe résoluble de type exponentiel. Les aspects formels de ces généralisations ont été étudiés par divers auteurs, parmi lesquels R. Howe ([23], [24]). En revanche, aucune de ces généralisations n'a été développée au point de fournir un calcul utilisable des opérateurs, et nous avons des raisons sérieuses de croire qu'il ne peut y exister en général de théorème satisfaisant (analogue à celui de Calderon-Vaillancourt) concernant la continuité des opérateurs. Il reste bien entendu que la théorie de Kirillov est par ailleurs un instrument irremplaçable dans la classification des représentations de groupes.

Une autre façon de percevoir la règle de correspondance Op_W consiste à introduire, pour tout $Y = (y,\eta)$, l'opérateur unitaire <u>de symétrie</u> σ_Y tel que

$$(\sigma_Y u)(x) = u\,(2y-x)e^{4i\pi\langle x-y,\eta\rangle}.$$

On a $\sigma_Y = \tau_{2Y}\sigma_o$, et la terminologie est justifiée par les relations $\sigma_Y^2 = I$ et

$$\sigma_Y\, Op_W(f)\sigma_Y = Op_W(X \mapsto f(2Y-X)).$$

On a enfin la formule

$$Op_W(f) = 2^n\int f(Y)\sigma_Y dY$$

qui exprime $Op_W(f)$ comme somme d'opérateurs de symétrie. Il est clair que cette formule est également susceptible d'être généralisée : il suffit d'y remplacer l'espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par un espace hermitien symétrique Π quelconque, la série discrète holomorphe des représentations du groupe des automorphismes de Π fournissant un espace de Hilbert H_λ et des opérateurs unitaires σ_Y attachés aux points de Π : en exigeant que σ_Y soit en outre autoadjoint et dépende continûment de Y, on peut se contenter d'une représentation projective ; l'indice λ repère la représentation choisie dans la série considérée. Nous avons introduit ce calcul dans [45] et poursuivi son étude dans [52] et [53], en collaboration avec J. Unterberger, dans les cas où Π est le demi-plan de Poincaré, ou le domaine $C+i\mathbb{R}^{n+1}$ qui joue un rôle important dans le présent travail. On pourra consulter [47] si l'on souhaite comparer ce calcul (appelons-le <u>le calcul</u> H_λ) à une généralisation, due à F.A.Berezin

([4],[5]),du calcul de Wick bien connu des physiciens. Dans le calcul H_λ associé à $\Pi = \mathbb{C}+i\mathbb{R}^{n+1}$, on a, si λ est assez grand, un analogue du théorème 1.1 et par suite un théorème satisfaisant concernant la continuité (sur H_λ) des opérateurs. Les symboles de poids 1 se définissent ici comme les fonctions C^∞ sur Π qui restent bornées après application d'un élément quelconque de l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur Π (laquelle est engendrée par deux opérateurs d'ordre 2 et 4 respectivement). Au moins dans le cas où $n = 0$, on peut expliciter la formule intégrale représentant la composition des symboles, mais il n'existe aucun développement asymptotique acceptable pour exprimer celle-ci. La raison en est d'ailleurs claire, si l'on se refère à ce qui a été dit plus haut. En effet, le groupe des automorphismes de Π ne conserve pas la structure de fibré vectoriel de cet espace, ce qui prive la théorie d'une notion raisonnable de symbole classique. En ce sens, le calcul H_λ ne constitue pas un instrument complet d'étude des opérateurs, tout au moins dans l'esprit des méthodes asymptotiques traditionnelles. Son utilité est davantage liée à son rôle dans le calcul de Fuchs et dans d'autres questions d'analyse harmonique ([46],[47]).

Si, toujours dans le cas du calcul de Weyl, on note pour simplifier σ_y(resp. τ_η) l'opérateur précédemment noté $\sigma_{y,o}$(resp. $\tau_{o,\eta}$), on vérifie de suite la relation

$$\tau_\eta \sigma_y \tau_\eta^{-1} = \sigma_{y,\eta} .$$

Une généralisation de cette formule conduit alors au calcul de Fuchs étudié dans ce travail. On remarquera qu'à ce titre le calcul de Fuchs occupe une position intermédiaire entre le calcul de Kirillov et le calcul H_λ, puisque les symétries et les translations y interviennent.

Ainsi qu'on pourra le voir dans la section 17, le groupe complet de covariance du calcul de Fuchs est une <u>contraction</u> (i.e. une version dégénérée, certaines constantes de structure de l'algèbre de Lie étant remplacées par zéro) du groupe $SO_o(2,n+1)$ de covariance du calcul H_λ, et le calcul de Fuchs apparaît comme la limite de ce dernier quand $\lambda \to \infty$. C'est ce qui explique le rôle joué dans le calcul de Fuchs par la géométrie, si riche de structure, du domaine Π : on pourra voir là, plus généralement, un nouveau témoignage du rôle de l'analyse complexe dans les questions de quantification.

Nous donnerons cependant, dans la section 18 , un aperçu du calcul de Fuchs sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: l'aspect le plus nouveau de ce calcul, par rapport à ce qui précède, consiste en l'absence de structure complexe sur le domaine symétrique Π qui lui est naturellement attaché.

RELATIVITÉ

L'espace $L^2(C,dm)$ est une somme continue d'espaces de Hilbert de mesures portées par les divers hyperboloïdes de masse. Si l'on effectue la restriction du calcul de Fuchs du cône à un seul de ces hyperboloïdes et que l'on conjugue le calcul obtenu par la transformation de Fourier, on obtient un calcul symbolique des opérateurs agissant sur un espace de solutions d'une équation de Klein-Gordon. Ce développement a fait l'objet de travaux [49], [51] entrepris postérieurement à une première rédaction du présent travail :la section 19 comprend une brève introduction à l'analyse de Klein-Gordon. On peut d'ailleurs, et nous le ferons, dresser un parallèle complet entre le calcul de Weyl et celui de Klein-Gordon, les groupes de covariance qui se correspondent étant celui de Galilée et celui de Poincaré : les équations d'évolution, de Schrödinger ou de Klein-Gordon suivant le cas, jouent dans ce schéma commun un rôle déterminant. Enfin, si les gaussiennes sont naturellement associées au calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$, une famille (ψ_Z) de fonctions de Bessel présente le même aspect relativement au calcul de Klein-Gordon. Ces fonctions ψ_Z sont intimement liées aux résolutions de l'identité utilisées dans tout le présent travail, et conduisent à une description très simple du front d'onde C^∞ classique des distributions sur $\mathbb{R}^n$. L'analyse relativiste des opérateurs sur $\mathbb{R}^n$ fondée sur le calcul de Klein-Gordon est l'objet de travaux en cours, et fait bien entendu le plus large appel aux méthodes développées ici.

Le travail de dactylographie considérable a été effectué par Madame Rousseaux : qu'elle veuille bien, pour le soin et la compétence qu'elle y a apportés, trouver ici l'expression de notre reconnaissance.

I - UNE COURTE VISITE AUX OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SUR $\mathbb{R}^n$

Le but de cette section est de familiariser le lecteur, dans le cadre bien connu du calcul de Weyl des opérateurs pseudo-différentiels, avec les méthodes que nous emploierons tout au long de ce travail. Nous espérons également, par cette courte présentation de la théorie classique, le convaincre que les difficultés techniques qui ne manqueront pas d'apparaître plus loin sont liées non à une quelconque faiblesse des méthodes, mais à la complexité intrinsèque du modèle étudié.

Rappelons que la formule

$$(1.1) \qquad \mathrm{Op}(a)u(x) = \iint a\left(\frac{x+y}{2},\eta\right) e^{2i\pi\langle x-y,\eta\rangle} u(y)\, dy\, d\eta$$

permet d'associer à toute distribution $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu $\mathrm{Op}(a)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Soit φ la fonction gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$, définie par $\varphi(t) = 2^{n/4} e^{-\pi|t|^2}$; faisant agir le groupe d'Heisenberg on définit également, pour tout $X = (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la fonction

$$\varphi_X(t) = \varphi(t-x) \exp 2i\pi \langle t-\frac{x}{2},\xi\rangle .$$

Une application de la formule de Parseval fournit, quelles que soient les fonctions u et $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la relation

$$(1.2) \qquad (u,v) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (u,\varphi_X)(\varphi_X,v)\, dX.$$

En observant que celle-ci reste valable si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on remarque alors qu'il suffit pour que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^n)$ que l'on ait $\int |(u,\varphi_X)|^2\, dX < \infty$. On vérifie également que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int (1+|X|^2)^k |(u,\varphi_X)|^2 dX$ est finie. Le plus simple pour obtenir ce résultat est d'écrire certaines identités relatives aux opérateurs de création et d'annihilation: le lecteur pourra trouver les détails dans les lemmes 7.4 et 7.5 de [44].

Définissons la forme symplectique $[\ ,\ ]$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$[(x,\xi),(x',\xi')] = -\langle x,\xi'\rangle + \langle x',\xi\rangle.$$

Pour tout symbole $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et tout couple (X,X') de points de $\mathbb{R}^{2n}$, on a alors, ainsi que le montre un calcul purement formel,

(1.3) $$(\mathrm{Op}(a)\varphi_X,\varphi_{X'}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(Y)W_{X,X'}(Y)\,dY$$

si l'on définit la <u>fonction de Wigner</u> $W_{X,X'}$ de φ_X et $\varphi_{X'}$ par

(1.4) $$W_{X,X'}(Y) = 2^n e^{-i\pi[X,X']} e^{2i\pi[Y,X'-X]} \exp -2\pi\left|Y-\frac{X+X'}{2}\right|^2.$$

Appelons <u>fonction-poids</u> sur $\mathbb{R}^{2n}$ toute fonction $m>0$ vérifiant, pour un couple de constantes C_1 et N_1, l'inégalité

$$m(X) \le C_1\, m(X')\,[1+|X-X'|^2]^{N_1}$$

quels que soient X et $X' \in \mathbb{R}^{2n}$. Une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ sera appelée <u>un symbole de poids</u> m si pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ la fonction $m^{-1}D^\alpha a$ est bornée sur $\mathbb{R}^{2n}$.

THÉORÈME 1.1 <u>Soit</u> $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$: <u>c'est un symbole de poids</u> m <u>si et seulement si</u>, <u>pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$, <u>il existe</u> $C>0$ <u>telle que l'on ait</u>

(1.5) $$|(\mathrm{Op}(a)\varphi_X,\varphi_{X'})| \le C(1+|X-X'|^2)^{-k}\, m\left(\frac{X+X'}{2}\right)$$

<u>quels que soient</u> X <u>et</u> $X' \in \mathbb{R}^{2n}$.

<u>Preuve</u>. Partant de (1.3) et (1.4) et intégrant par parties à l'aide de la formule

$$(1-(4\pi^2)^{-1}\Delta_Y)e^{2i\pi[Y,X-X']} = (1+|X-X'|^2)e^{2i\pi[Y,X-X']},$$

on obtient la nécessité de l'inégalité indiquée. Une conséquence de (1.2) est la relation

(1.6) $$(\mathrm{Op}(a)u,v) = \iint (\mathrm{Op}(a)\varphi_X,\varphi_{X'})(u,\varphi_X)(\varphi_{X'},v)\,dX\,dX'$$

valable pour $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, u et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: celle-ci exprime $\mathrm{Op}(a)$ comme une intégrale d'opérateurs de rang un $u \mapsto (u,\varphi_X)\varphi_{X'}$. Or on vérifie que le symbole d'un tel opérateur n'est autre que la fonction de Wigner $W_{X',X}$: il en résulte l'identité

(1.7) $$a(Y) = \iint (\mathrm{Op}(a)\varphi_X,\varphi_{X'})W_{X',X}(Y)\,dX\,dX',$$

d'où l'on déduit aussitôt (se servant aussi de (1.4)) que a est un symbole de poids m si les inégalités (1.5) sont vérifiées.

COROLLAIRE 1.2. <u>Soit</u> a <u>un symbole de poids</u> m : <u>alors</u> Op(a) <u>est un opérateur continu de</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ <u>dans</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. <u>Si de plus</u> m = 1, Op(a) <u>se prolonge en un opérateur continu de</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>dans</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. C'est une conséquence de (1.6),(1.2) et des caractérisations des espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$ vues plus haut.

COROLLAIRE 1.3. <u>Soient</u> a_1 <u>et</u> a_2 <u>deux symboles de poids</u> m_1 et m_2 <u>respectivement</u> : <u>le symbole</u> $a_1 \circ a_2$ <u>de</u> $\mathrm{Op}(a_1)\mathrm{Op}(a_2)$ <u>est alors un symbole de poids</u> $m_1 m_2$.

<u>Preuve</u>. Avec $A_j = \mathrm{Op}(a_j)$, on écrit

$$(A_1 A_2 \varphi_X, \varphi_{X'}) = (A_2 \varphi_X, A_1^* \varphi_{X'}) = \int (A_2 \varphi_X, \varphi_Z)(A_1 \varphi_Z, \varphi_{X'})\, dZ$$

et l'on applique le théorème 1.1.

Rappelons que pour tout nombre réel μ on appelle symbole classique d'ordre μ tout symbole $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant les inégalités

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \quad (1+|\xi|)^{\mu-|\beta|} .$$

Pour tout $k \geq 1$ et tout $X^o \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, un développement de Taylor par rapport à ξ, centré en ξ^o, permet d'écrire

$$a(X) = (T_{X^o}^{k-1} a)(X) + (R_{X^o}^k a)(X) \tag{1.8}$$

où $T_{X^o}^{k-1} a$ est le symbole d'un opérateur différentiel, et où le symbole $R_{X^o}^k a$ est de poids $(1+|\xi|)^{\mu-k}(1+|\xi-\xi^o|)^k$: en outre cette dernière assertion est valable d'une façon uniforme par rapport à X^o. Soient a_1 et a_2 deux symboles classiques d'ordres μ_1 et μ_2 respectivement. En appliquant trois fois le corollaire 1.2, on voit que le symbole

$$X^o \longmapsto (a_1 \circ a_2)(X^o) - (T_{X^o}^{k-1} a_1 \circ T_{X^o}^{k-1} a_2)(X^o)$$

est de poids $(1+|\xi|)^{\mu_1+\mu_2-k}$. En d'autres termes le développement (qui n'est qu'un exercice d'algèbre élémentaire) de la composition de deux symboles d'opérateurs différentiels reste valable en un sens <u>asymptotique</u> (i.e. avec reste d'ordre tendant vers $-\infty$) dans le cas de deux symboles classiques quelconques.

Le lecteur au courant des méthodes habituelles de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels aura peut-être noté dans la présentation qui précède les simplifications suivantes: on n'intègre par parties qu'une seule fois dans toute la théorie, après quoi il n'y a plus d'intégrale oscillante à considérer; en outre, aucun développement de Taylor sous un signe intégral n'est requis dans l'étude de la composition des symboles, laquelle est basée sur une idée différente. Si ces simplifications peuvent, dans le cas du calcul de Weyl, être considérées comme un ornement, voire un exercice de style, elles joueront dans l'étude, considérablement plus complexe, du calcul de Fuchs des opérateurs sur un cône, un rôle déterminant.

Il est très commode, pour étudier une classe d'opérateurs pseudo-différentiels, de décomposer ceux-ci comme superpositions d'opérateurs de rang un sous la forme

$$Au = \int (u,\varphi_X)\,\psi_X\,dX\ ,$$

où (φ_X) et (ψ_X) sont deux familles de fonctions dépendant de X. C'est une méthode que nous avons introduite dans [43] et n'avons cessé d'utiliser depuis cette date : contrairement à la démonstration originale de Calderon-Vaillancourt [11] qui a servi de modèle à la plupart des auteurs, elle n'oblige pas en effet à utiliser la formule de composition des symboles. Or, cette dernière peut être compliquée (ce sera le cas dans le présent travail) ou même inconnue, en particulier dans les calculs symboliques obtenus par la quantification des espaces hermitiens symétriques ([53],[54]). Dans le calcul symbolique sur $\mathbb{R}^n$ associé à une métrique symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$ (cf [41] ou Hörmander [21]), cette méthode marche lorsque $g = g^\sigma$ avec les notations de Hörmander et que g vérifie une hypothèse plus faible que celle d'être tempérée. Elle conduit en outre à des généralisations de la résolution de l'identité (1.2) liées à la métrique symplectique [42]. L'utilisation de symboles de poids (plutôt que d'ordres) donnés est due à Beals [2] : elle est naturelle et simplifie même, on l'a vu, l'étude des symboles classiques. Signalons que Coifman et Meyer [13] ont introduit également une méthode d'étude des opérateurs pseudo-différentiels indépendante de celle de Calderon-Vaillancourt : elle est cependant liée à des classes de symboles dont la géométrie est particulière.

La première caractérisation de classes d'opérateurs pseudo-différentiels est due à Beals [3]: elle repose, pour la classe la plus simple, sur les propriétés de continuité des opérateurs que l'on obtient par commutation itérée de l'opérateur examiné avec les opérateurs (x_j) ou $\partial/\partial x_k$. Cette caractérisation, de même que la nôtre, rend immédiat le fait que la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels est encore un opérateur pseudo-différentiel ; la nôtre dispense en outre d'en prouver la continuité, puisque celle-ci en résulte.

II - LE CÔNE C, SON ESPACE COTANGENT D ET LE TUBE COMPLEXE Π .

Soit $r(X) = X_0^2 - X_1^2 - \ldots - X_n^2$ si $X \in \mathbb{C}^{n+1}$: la matrice de cette forme quadratique est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \quad .$$

Nous utiliserons constamment, sans référence, l'identité

$$r(X+X') = r(X)+r(X')+2\langle X, JX'\rangle. \tag{2.1}$$

Le cône C, objet de notre étude, est défini par

$$C = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y_0 > 0,\ r(y) > 0\}.$$

Lorsque n = 3, c'est le cône du futur de la théorie de la relativité; pour n = 0, c'est une demi-droite. Il sera également fait un usage constant, sans référence, de l'inégalité élémentaire

$$\langle y, Jy'\rangle \geqslant (r(y)r(y'))^{1/2} \tag{2.2}$$

valable si $y \in C$, $y' \in C$. Le groupe de Lorentz $O(1,n)$ est constitué des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui conservent la forme quadratique r; la composante connexe de I dans $O(1,n)$ est le groupe de Lorentz restreint $SO_0(1,n)$. L'appartenance d'une matrice Λ à $O(1,n)$ est caractérisée par l'égalité $\Lambda'^{-1} J = J\Lambda$, où Λ' désigne la matrice transposée de Λ. Le groupe $SO_0(1,n)$ opère sur $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par son action linéaire, en préservant le feuilletage par les hyperboloïdes de masse $r(y)$ = constante; pour tout $a>0$, l'homothétie $y \mapsto ay$ opère également dans C, ce qui conduit à considérer le produit direct

(2.3) $$G_o = \mathbb{R}_*^+ \times SO_o(1,n) \ ,$$

identifié à un ensemble de matrices par l'application $(a,\Lambda) \mapsto a\Lambda$.
Pour toute matrice $M \in G_o$, on pose

(2.4) $$|M| = (\det M)^{1/(n+1)}$$

de sorte que

(2.5) $$M'J = |M|^2 J M^{-1}.$$

Egalement, il faut noter que $r(My) = |M|^2 r(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Soit $\omega = (1,0,\ldots,0) \in C$: alors, pour tout $M \in G_o$, on a $M\omega = \omega$ si et seulement si $M \in \{1\} \times SO(n)$, le sous-groupe de $SO_o(1,n)$ (compact maximal) constitué des rotations en les n dernières variables. En conséquence, on a $M\omega = M_1\omega$ si et seulement si $MM' = M_1M_1'$. On peut identifier C au produit $\mathbb{R}_*^+ \times (SO_o(1,n)/SO(n))$, où le second facteur (un hyperboloïde de masse) est comme on sait un espace symétrique de rang un. La structure riemannienne G_o-invariante de C telle que $ds^2 = |dy|^2$ au-dessus de $y = \omega$ est donnée par

(2.6) $$ds^2 = (r(y))^{-2}[2\langle Jy,dy\rangle^2 - r(y)r(dy)] \ :$$

le plus simple pour s'en convaincre est de vérifier directement l'invariance du ds^2 ainsi défini par le groupe de Lorentz et par les homothéties. La mesure G_o-invariante sur C associée est donnée par

(2.7) $$dm(y) = (r(y))^{-\frac{1}{2}(n+1)} dy.$$

Pour tout $y \in C$, posons

(2.8) $$Sy = \frac{Jy}{r(y)}.$$

Il est immédiat que si $z = Sy$, alors $Sz = y$ et $r(z) = r(y)^{-1}$. Dans de nombreux calculs, il sera commode d'utiliser les symboles

(2.9) $$\{j\} = 1 \text{ si } j = 0, \ -1 \text{ si } j = 1,2,\ldots,n.$$

Alors

$$(2.10)\qquad dz_j = \{j\}[\frac{dy_j}{r(y)} - 2y_j \frac{<Jy,dy>}{(r(y))^2}],$$

d'où $r(dz) = r(y)^{-2}r(dy)$ et $<Jz,dz> = -r(y)^{-2}<Jy,dy>$. Finalement, S préserve la structure riemannienne de C, et comme (2.10) se réduit à $dz = -dy$ au point $y = \omega$, il en résulte que S est la symétrie géodésique de C autour de ω.

Si y est un point arbitraire de C, la symétrie S_y autour de y est définie par $S_y = MSM^{-1}$ avec $M \in G_o$ tel que $y = M\omega$: il est en effet immédiat que cette définition ne dépend pas du choix de M. Pour calculer effectivement S_y, on note que la matrice MJM^{-1} agit comme l'identité sur la droite vectorielle engendrée par y, et comme $-I$ sur l'hyperplan $\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : <Jy,z> = 0\}$: par suite

$$(2.11)\qquad MJM^{-1}x = -x + \frac{2<x, Jy>}{r(y)}y$$

et

$$(2.12)\qquad S_y x = -\frac{r(y)}{r(x)}x + \frac{2<x,Jy>}{r(x)}y$$

pour tout $x \in C$. Il sera important plus loin d'avoir une formule explicite pour le milieu géodésique y" de $y \in C$ et $y' \in C$, c'est-à-dire le point y" caractérisé par $S_{y''}y = y'$.
Posons

$$(2.13)\qquad \mathrm{mil}(y,y') = 2^{-\frac{1}{2}}[<y,Jy'> + (r(y)r(y'))^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}[(r(y'))^{\frac{1}{2}}y + (r(y))^{\frac{1}{2}}y'].$$

A l'aide de (2.1), on vérifie aisément que $r(\mathrm{mil}(y,y')) = (r(y)r(y'))^{1/2}$, d'où finalement $y'' = \mathrm{mil}(y,y')$.

Nous identifierons l'espace cotangent $T^*(C)$ à $D = C \times \mathbb{R}^{n+1}$ par l'application naturelle $(y, \Sigma\eta_j dy_j) \mapsto (y,\eta)$. L'action naturelle de $M \in G_o$ dans D est alors donnée par

$$(2.14)\qquad M.(y,\eta) = (My, M'^{-1}\eta)$$

et la mesure invariante sur D est simplement la mesure de Lebesgue $dy\, d\eta$. D'après (2.10), la formule

(2.15) $$\tilde{S}(y,\eta) = \left(\frac{Jy}{r(y)}\ ,\ r(y)J\eta - 2\langle y,\eta\rangle y\right)$$

étend à D, comme il se doit pour un espace cotangent, l'action de la symétrie S sur C. Si $y = M\omega$, on a $S_y = MSM^{-1} = MM'S$ comme il résulte de (2.5): alors (2.11) montre que MM' peut être défini par

(2.16) $$MM't = -\ r(y)Jt + 2\langle y,t\rangle y$$

et l'on peut écrire également

(2.17) $$\tilde{S}(y,\eta) = (Sy,\ -\ MM'\eta).$$

Finalement, faisant intervenir les translations en la variable η, on peut faire opérer sur D un produit semi-direct $G = G_o \times \mathbb{R}^{n+1}$ par

(2.18) $$(M,b).(y,\eta) = (My, M'^{-1}\eta + Jb).$$

La structure de groupe de G est donnée par

(2.19) $$(M_1,b_1)(M,b) = (M_1M, JM_1'^{-1}Jb + b_1)\ .$$

Le groupe Γ_c (lire "Γ contracté" : voir section 17) de transformations de D engendré par G et par $\tilde{S}$ apparaîtra comme le groupe de covariance du calcul de Fuchs des opérateurs sur le cône C.

Il y a avantage à munir l'espace D de la structure riemannienne définie par

(2.20) $$ds^2 = (r(y))^{-2}[2\langle Jy,dy\rangle^2 - r(y)r(dy)] + 2\langle y,d\eta\rangle^2 - r(y)r(d\eta).$$

Au-dessus de $y = \omega$, on a simplement $ds^2 = |dy|^2 + |d\eta|^2$, et (2.14) montre l'invariance de cette structure par le groupe G : on observera cependant que (bien que, par sa définition même, elle conserve la forme symplectique canonique de $D = T^*(C)$) la transformation $\tilde{S}$ ne préserve pas cette structure riemannienne. C'est pourquoi les classes de symboles (fonctions sur D) que nous serons amenés à introduire plus loin seront invariantes seulement par le groupe G, non par le groupe de covariance complet Γ_c. Il y a une situation tout à fait comparable dans le calcul de Weyl des opérateurs sur $\mathbb{R}^n$, où l'analyse requiert l'introduction d'une certaine norme symplectique (qui peut être la norme canonique) sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: or celle-ci ne peut être invariante par tout le groupe symplectique, puisque celui-ci contient des transformations non orthogonales.

Le troisième et dernier domaine qui jouera un rôle fondamental dans ce travail est le tube complexe

$$\Pi = C+i\,\mathbb{R}^{n+1} = \{X = x+i\xi \in \mathbb{C}^{n+1} : x \in C\}.$$

C'est un domaine de Cartan pour le groupe $\Gamma = SO_o(2,n+1)$, composante connexe de l'identité dans le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{n+3}$ qui conservent la forme quadratique non dégénérée de signature $(2,n+1)$. Le domaine Π est une variété kählérienne et un espace symétrique de rang 2 : dans [53] , nous en avons donné une description détaillée, basée en partie sur les travaux de I.I. Piatetsky-Chapiro [31] et ceux de S. Helgason [20] ; la section 5 en donnera une paramétrisation commode. En attendant, rappelons ([53], section 2) que des automorphismes de Π attachés à des éléments particuliers de Γ sont les suivants :
1) les transformations $X \mapsto X+ib$ avec $b \in \mathbb{R}^{n+1}$; 2) les transformations $X \mapsto aX$ avec $a>0$; 3) les transformations $X \mapsto \Lambda X$ avec $\Lambda \in SO_o(1,n)$. En fait le groupe des transformations de Π qui correspond à Γ est engendré par celles de type 1,2,3 et par la symétrie Σ définie par $\Sigma X = r(X)^{-1}JX$. A l'élément $(M,b) \in G = G_o \times \mathbb{R}^{n+1}$, on peut donc associer la transformation $[M,b]$ de Π définie par

$$[M,b]\,X = JM'^{-1}JX-ib. \tag{2.21}$$

On peut noter immédiatement que cette action de G sur Π et l'action (2.18) de G sur D sont équivalentes sous l'entrelacement $\tau : \Pi \to D$ défini par

$$\tau(x+i\xi) = \left(\frac{x}{r(x)}, -J\xi\right). \tag{2.22}$$

En effet, une vérification de routine conduit à la relation

$$\tau([M,b]\,X) = \left(\frac{Mx}{r(x)}, -M'^{-1}J\xi + Jb\right) = (M,b)\,.\,\tau(X). \tag{2.23}$$

Il n'y aurait cependant que des désavantages à identifier D et Π , car les difféomorphismes $\tilde{S}$ (sur D) et Σ (sur Π) ne sont en rien équivalents. Un calcul Γ-covariant des opérateurs sur C (le calcul H_λ), basé sur l'emploi de Π comme espace de phase, a été proposé dans [53]. L'objet du présent travail est d'étudier le calcul de Fuchs Γ_c-covariant basé sur l'emploi de D comme espace de phase. Comme il a été mentionné dans l'introduction, Γ_c peut être considéré comme une contraction du groupe Γ. La structure riemannienne Γ-invariante sur Π est définie par

$$(2.24)\quad ds^2=(r(x))^{-2}[2<Jx,dx>^2-r(x)r(dx)+2<Jx,d\xi>^2-r(x)r(d\xi)]$$

de sorte que τ est une isométrie. Insistons cependant sur le fait que cette structure riemannienne a un statut tout à fait intrinsèque sur Π , non sur D où, si ce n'était pour les applications que nous avons en vue, d'autres choix auraient été également possibles. La mesure Γ-invariante sur Π est

$$(2.25)\qquad d\underline{m}(X)=r(x)^{-(n+1)}dx\ d\xi .$$

Lorsque n=0, Π est le demi-plan de Poincaré, Γ = PSL(2,$\mathbb{R}$) est doublement transitif sur Π et le seul Γ-invariant des paires (X,X') de points de Π est leur distance (hyperbolique) ou, si l'on préfère

$$(2.26)\qquad \mathrm{ch}^2\,\frac{d(X,X')}{2}=\frac{|X+\bar{X}'|^2}{4xx'} .$$

Lorsque $n\geqslant 1$, Π est de rang 2 et l'on a deux invariants ([53], section 2), à savoir

$$(2.27)\qquad \delta_+(X,X')=\frac{|r(X+\bar{X}')|}{4(r(x)r(x'))^{1/2}}$$

et

$$\delta_-(X,X')=\frac{|r(X-X')|}{4(r(x)r(x'))^{1/2}} .$$

On a $\delta_{\pm}(\gamma X,\gamma X')=\delta_{\pm}(X,X')$ pour tout $\gamma\in\Gamma$ et en particulier $\delta_{\pm}(\underline{\omega},\gamma X)$ $=\delta_{\pm}(\underline{\omega},X)$ si $\gamma\in SO(2)\times SO(n+1)$, le sous-groupe compact maximal de Γ qui fixe $\underline{\omega}=\omega+i0$. Rappelons [53] que l'on a

$$(2.28)\qquad \delta_+(X,X')\geqslant\delta_-(X,X')$$

pour tout couple (X,X') de points de Π .

En vue du développement du calcul de Fuchs, il sera nécessaire, dans les sections 5 et 8, d'établir un petit nombre d'inégalités géométriques difficiles concernant l'espace Π.

III - REPRÉSENTATIONS, SYMÉTRIES ET DÉFINITION DU CALCUL DE FUCHS.

L'espace de Hilbert H est l'espace $L^2(C,dm)$ constitué des (classes de) fonctions u sur C telles que

(3.1) $$\|u\|^2=\int_C |u(t)|^2 dm(t) < \infty$$

avec $dm(t)=r(t)^{-\frac{n+1}{2}}dt$. On a $H = H_{n+1}$ si,plus généralement, on définit H_λ par la norme

(3.2) $$\|u\|_\lambda^2=\int_C |u(t)|^2 r(t)^{-\lambda/2}dt.$$

Comme il a été montré dans [53] , et comme il résulte de faits généraux sur les séries discrètes holomorphes de représentations (H.Rossi et M.Vergne [32],[33]), une certaine représentation unitaire projective V_λ de $\Gamma = SO_o(2,n+1)$ dans H_λ peut être définie si $\lambda > \max(0,n-1)$: on l'obtient en identifiant, grâce à la transformation de Laplace, H_λ à un espace $\mathcal{H}_\lambda$ de fonctions antiholomorphes sur Π , et en faisant agir Γ dans $\mathcal{H}_\lambda$ de la façon naturelle qui convient à un groupe d'automorphismes de la structure complexe de Π. Il se trouve que la restriction de V_λ à $G \subset \Gamma$ est, à équivalence près, indépendante de λ : comme, dans ce travail, c'est le groupe G qui nous intéresse plutôt que Γ , contentons-nous de décrire directement cette dernière (et très simple) représentation.

DÉFINITION 3.1. Pour tout $(M,b) \in G=G_o\times \mathbb{R}^{n+1}$, $V(M,b)$ est la transformation unitaire de H définie par

$$(V(M,b)u)(t)=u(M^{-1}t)e^{2i\pi<Jt,b>}.$$

Remarque. On vérifie que

$$V(M_1,b_1)V(M,b)=V(M_1M,JM_1'^{-1}Jb+b_1)$$

(i.e. V est une représentation), et l'invariance de la mesure dm par le groupe G_o montre que c'est une représentation unitaire.

Dans [53] , prop. 2.2, nous avons défini, pour tout $X \in \Pi$, la fonction φ_X^λ sur C par

$$(3.3) \qquad \varphi_X^\lambda(t) = c_\lambda\, r(x)^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)} \, (r(t))^{\lambda/2} e^{-2\pi<Jt,X>}$$

avec

$$(3.4) \qquad c_\lambda = 2^{\lambda+n+1} \pi^{\frac{1}{2}(\lambda+1)+\frac{n}{4}} \left[\frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2}+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)\,\Gamma(\frac{\lambda}{2}+1)} \right]^{1/2} .$$

On a $|\varphi_X^\lambda|_\lambda = 1$ si $\lambda > 0$; si de plus $\lambda > n-1$, on a en outre (se rappelant la définition (2.25) de $d\underline{m}$) la formule intégrale

$$(3.5) \qquad \int_\Pi |(u,\varphi_X^\lambda)_\lambda|^2 d\underline{m}(X) = (2\pi)^{n+1} \frac{2}{\lambda} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda-n+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+n+1))} \|u\|_\lambda^2$$

pour tout $u \in H_\lambda$. En conséquence les fonctions φ_X^{n+1} forment un système total dans l'espace $H = H_{n+1}$. Comme G_o opère transitivement sur C, la définition 3.1 montre par ailleurs que la représentation V est irréductible.

DÉFINITION 3.2. <u>Soit</u> ω_λ <u>l'isométrie de</u> H <u>sur</u> H_λ <u>définie par</u>

$$(\omega_\lambda u)(t) = r(t)^{\frac{1}{4}(\lambda-n-1)} u(t).$$

<u>On posera alors</u> $\psi_X^\lambda = \omega_\lambda^{-1} \varphi_X^\lambda$, <u>en d'autres termes</u>

$$\psi_X^\lambda(t) = c_\lambda\, (r(x)r(t))^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)} e^{-2\pi<Jt,X>}$$

<u>où</u> c_λ <u>a été explicité en</u> (3.4).

<u>Remarque</u>. On a $\|\psi_X^\lambda\| = 1$, les normes non affectées d'indices étant prises au sens de H.

PROPOSITION 3.3. <u>Pour tout</u> $\lambda > \max(0,n-1)$, <u>tout point</u> $X \in \Pi$ <u>et tout</u> $(M,b) \in G$, <u>on a</u>

$$V(M,b)\psi_X^\lambda = \psi_{[M,b]X}^\lambda .$$

<u>Preuve</u>. C'est une application de routine des définitions 3.1 et 3.2 et de (2.21).

PROPOSITION 3.4. Pour tout $\lambda>\max(0,n-1)$ et tout $v\in H$, on a

$$(3.6)\qquad \int_{\Pi} |(v,\psi_X^\lambda)|^2 d\underline{m}(X)=(2\pi)^{n+1}\,\frac{2}{\lambda}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda-n+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+n+1))}\,\|v\|^2 .$$

Preuve. En posant $u=\omega_\lambda v$, c'est une conséquence de (3.5): la convention de non-indexation s'applique ici aussi bien aux produits scalaires qu'aux normes dans H.

Remarque. Le lecteur qui souhaiterait ne pas faire dépendre la preuve de la proposition 3.4 des résultats de [53] pourra, s'il ne tient pas à la valeur exacte de la constante, utiliser l'argument suivant: une fois prouvé que le premier membre de (3.6) est fini pour $v\in H$, il peut s'écrire (Av,v), où l'opérateur A commute avec les opérateurs de la représentation V; comme celle-ci est irréductible, le lemme de Schur montre que A est un multiple de l'identité.

Passons à la définition des opérateurs de symétrie dans H. On définit σ par

$$(3.7)\qquad (\sigma u)(t)=u(St)$$

où S a été défini en (2.8). Etant donné $Y=(y,\eta)\in D$, choisissons $(M,b)\in G$ tel que $(y,\eta)=(M,b).(\omega,0)=(M\omega,Jb)$ et posons

$$(3.8)\qquad \sigma_Y=V(M,b)\,\sigma\,V(M,b)^{-1}.$$

La formule explicite qui va suivre montrera que cette définition ne dépend pas du choix de M. L'inverse de (M,b) est $(M^{-1},-JM'Jb)$ de sorte que

$$V(M,b)^{-1}u(t)=u(Mt)e^{-2i\pi\langle t,M'Jb\rangle}$$

et

$$(\sigma_Y u)(t)=u(MSM^{-1}t)e^{-2i\pi\langle MSM^{-1}t,Jb\rangle}e^{2i\pi\langle Jt,b\rangle}.$$

Comme $MSM^{-1}=S_y$ si $y=M\omega$, ceci conduit à la définition:

DÉFINITION 3.5. Pour tout $Y=(y,\eta)\in D$ et tout $u\in H$, on pose

$$(\sigma_Y u)(t)=u(S_y t)e^{2i\pi\langle\eta,t-S_y t\rangle} .$$

Remarque. Observons que la symétrie σ_Y est unitaire et involutive, donc autoadjointe. Egalement, par suite de la première définition de σ_Y, on a

$$V(M_1,b_1)\sigma_Y V(M_1,b_1)^{-1} = \sigma_{(M_1,b_1).Y} \tag{3.9}$$

pour tout $Y \in D$ et tout $(M_1,b_1) \in G$.

DÉFINITION 3.6. Pour toute fonction $f \in L^1(D, dy\, d\eta)$, on appelle opérateur de symbole actif f l'opérateur sur H défini par

$$Op(f) = 2^{n+1} \int_D f(y,\eta)\ \sigma_{y,\eta}\ dy\, d\eta$$

i.e.

$$(Op(f)u,v) = 2^{n+1} \int_D f(y,\eta)(\sigma_{Y,\eta}u,v)dy\, d\eta\ .$$

Etant donné un opérateur à trace A sur H, le symbole passif de A est la fonction h sur D définie par

$$h(y,\eta) = 2^{n+1}\mathrm{Tr}(A\ \sigma_{y,\eta}).$$

Remarque. Comme σ_Y est auto-adjoint, le symbole (actif ou passif) de A^* est le conjugué de celui de A.

PROPOSITION 3.7. Soit g le symbole (actif ou passif) de A. Alors, pour tout $(M,b) \in G$, le symbole (actif ou passif) de $V(M,b)AV(M,b)^{-1}$ est la fonction $g \circ (M,b)^{-1}$. Le symbole (actif ou passif) de $\sigma A \sigma$ est $g \circ \tilde{S}$, où $\tilde{S}$ a été définie dans (2.17).

Preuve. La première partie est une conséquence immédiate de (3.9). Par ailleurs, si $Y=(y,\eta) \in D$ et $u \in H$, on a

$$(\sigma\, \sigma_Y\, \sigma\, u)(t) = u(SS_ySt)e^{2i\pi<\eta\ ,St-S_ySt>}\ .$$

Notons que si $y = M\omega$, alors $Sy = SM\omega = M'^{-1}\omega$, d'où

$$S_{Sy}t = M'^{-1}SM't = M'^{-1}M^{-1}St = M'^{-1}SSM^{-1}St = SMSM^{-1}St = SS_ySt.$$

Egalement

$$\begin{aligned}<\eta, St-S_ySt> &= <(MM')\eta, (MM')^{-1}St-(MM')^{-1}S_ySt> \\ &= <MM'\eta, M'^{-1}SM't-M'^{-1}SM^{-1}St> = <MM'\eta, S_{Sy}t-t>\end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième partie de la proposition, d'après (2.17).

En conséquence, le calcul de Fuchs bénéficie d'une propriété de <u>covariance</u> par rapport à tout le groupe Γ_c engendré par G et $\tilde{S}$: on peut noter que parmi les opérateurs de la représentation de ce groupe figurent les multiplications par les fonctions du type $\exp 2i\pi\langle \frac{t}{r(t)}, b\rangle$ $(b \in \mathbb{R}^{n+1})$.

<u>Avertissement</u> : dans le cas où n=0, le calcul de Fuchs $f \mapsto Op(f)$ développé dans le présent travail est identique à celui, noté $g \mapsto Q(g)$, développé dans ce seul cas dans [48]. Toutefois, un changement de notation s'est révélé nécessaire, de sorte que $Q(g)=Op(f)$ si l'on a l'identité $g(y\eta, y)=f(y,\eta)$.

IV - LE LIEN ENTRE LES DEUX ESPÈCES DE SYMBOLES DE FUCHS.

On évalue dans cette section l'opérateur F tel que le symbole passif h d'un opérateur à trace de la forme Op(f) soit donné par h=Ff: vu la proposition 3.3, l'opérateur F commute à l'action (géométrique) du groupe Γ_c sur D. On notera immédiatement que si f est sommable et si h_1 est le symbole passif d'un opérateur à trace B, on a alors

$$\text{(4.0)} \qquad Tr(Op(f)B) = 2^{n+1} Tr\left(\int f(Y)\,\sigma_Y\, B\, dY\right) = \int f(Y)\,h_1(Y)\,dY$$

avec $dY=dy\,d\eta$. Vu ce qui a été dit dans la remarque consécutive à la définition 3.4, il reviendrait au même que F coïncidât avec l'identité ou que Op fût une isométrie de $L^2(D)$ dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H : disons tout de suite que ce n'est pas le cas.

On sait que la propriété analogue est vérifiée pour ce qui concerne le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$. Mais elle doit être rattachée au fait que le calcul de Weyl peut être caractérisé comme celui qui associe à $e^{2i\pi[\langle a,x\rangle+\langle b,\xi\rangle]}$ l'opérateur $\exp 2i\pi[\langle a,x\rangle+\langle b,\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x}\rangle]$ et, ultimement , à la formule du caractère de Kirillov. Dans le calcul H_λ associé à un espace symétrique, au contraire, une telle relation n'a pas lieu d'emblée en général (voir [52]). Mais, outre qu'on peut toujours la récupérer en décidant que le "bon" symbole est l'image par $F^{\frac{1}{2}}$ du symbole actif, cette propriété ne revêt pas, à notre avis, une importance fondamentale. Ce qui est important en revanche (et n'est pas vérifié par exemple dans les méthodes de quantification, généralisant le calcul de Wick, proposées par F.A. Berezin [4], [5]), c'est que les opérateurs F et F^{-1} conservent les classes raisonnables de symboles : l'article [47] contient une discussion détaillée de ce point dans le cas du groupe $SL(2,\mathbb{R})$ ou du groupe d'Heisenberg.

Une autre remarque s'impose maintenant. On peut regretter qu'on ne puisse pas définir au premier abord un espace très large de symboles (analogue par exemple à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ de la théorie de Weyl) en quelque sorte le plus général possible pour la définition des correspondances entre symboles et opérateurs. Mais ne perdons pas de vue que <u>toute</u> l'analyse des fonctions sur les domaines C et D reste à faire : les méthodes que nous employons rendent de loin préférable de se concentrer sur l'analyse "dure" (celle dans les espaces de Hilbert, tel l'espace H), reléguant comme simples corollaires les résultats que l'on peut tirer de là sur l'analyse dans les espaces "mous" (analogues à $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}'$). La section 10 donne quelques résultats de ce genre : on pourrait, du reste, décrire effectivement un espace $\mathcal{S}'(D)$ répondant à la question posée au début de ce paragraphe, mais arrivés à ce point, la question ne présenterait plus qu'un intérêt pédagogique.

Les calculs de la présente section sont purement formels. Leur justification ne présente cependant pas de difficulté si l'on part d'un symbole actif $f \in \mathcal{K}(D)$, espace des fonctions $f \in C^\infty(D)$ vérifiant les conditions suivantes : (i) la projection sur C du support de f est une partie compacte de C ; (ii) la fonction f, prolongée par 0 en dehors de $C \times \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n+2})$. Il conviendrait cependant de vérifier que si $f \in \mathcal{K}(D)$ l'opérateur Op(f) est, à trace : comme cela résultera d'estimations prouvées dans la section 9, nous l'admettrons pour le moment.

On commence par calculer le noyau k de Op(f), caractérisé par l'identité

$$(\mathrm{Op}(f)u)(s) = 2^{n+1} \int_D f(y,\eta)\, e^{2i\pi \langle \eta, s - S_y s\rangle} u(S_y s)\, dy\, d\eta$$

$$= \int_C k(s,t)u(t)r(t)^{-\frac{n+1}{2}} dt \ .$$

Il faut évaluer le jacobien du changement de variable $y \mapsto S_y s=t$. Vu la relation

$$t=-\frac{r(y)}{r(s)}\ s+\frac{2<Jy,s>}{r(s)}\ y,$$

on a (voir (2.9) pour la définition de $\{k\}$):

$$\frac{\partial t_j}{\partial y_k} = 2\{k\}\ \frac{s_k y_j - s_j y_k}{r(s)} + 2\,\delta_{jk}\ \frac{<Jy,s>}{r(s)} \ . \tag{4.1}$$

Pour toute transformation de Lorentz Λ, on a $\Lambda t=S_{\Lambda y}(\Lambda s)$ et $\frac{Dt}{Dy} = \frac{D(\Lambda t)}{D(\Lambda y)}$. Ceci permet de se ramener à évaluer le jacobien en un point $y = (y_o,0,\dots,0)$ puisque le groupe de Lorentz opère transitivement sur les hyperboloïdes de masse ; à l'aide d'une rotation spatiale, on se ramène en outre au cas où $s = (s_o,s_1,0,\dots,0)$. Laissant au lecteur, pour des raisons économiques, le soin d'écrire (partant de (4.1)) la matrice des $\frac{\partial t_j}{\partial y_k}$ en de tels points, on voit que dans ce cas on a $\frac{Dt}{Dy} = 2^{n+1}\ y_o^{\,n+1}(r(s))^{-n} s_o^{\,n-1}$. En utilisant l'invariance on a dans le cas général

$$\frac{D(S_y s)}{Dy} = 2^{n+1}<y,Js>^{n-1} r(y)\,(r(s))^{-n} \ . \tag{4.2}$$

On rappelle que (2.13) donne le milieu $y= \mathrm{mil}(s,t)$ en fonction de s

$$y=2^{-\frac{1}{2}}\left[\ <s,Jt>+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[r(t)^{\frac{1}{2}} s + r(s)^{\frac{1}{2}}\, t\right].$$

Il en résulte que

$$<y,Js>=2^{-\frac{1}{2}}\ r(s)^{\frac{1}{2}}\left[\ <s,Jt>+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et $r(y)=(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}$, d'où la relation

$$k(s,t)=2^{\frac{n-1}{2}}(r(s)r(t))^{n/2}\left[\ <s,Jt>+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}\ \right]^{\frac{1-n}{2}} \tag{4.3}$$

$$(\mathcal{F}_2^{-1} f)(\mathrm{mil}(s,t),s-t),$$

où $\mathfrak{F}_2^{-1}f$ désigne la transformée de Fourier inverse de f par rapport au deuxième groupe $(\eta_o,\ldots,\eta_n)$ des variables.

Il faut maintenant évaluer le symbole passif h de l'opérateur A de noyau k: nous avons admis qu'il est à trace. L'expression (4.3) montre que pour tout $t \in C$ la fonction $s \mapsto k(s,t)$ appartient à H (elle est même C^∞ à support compact si, comme nous le supposons, $f \in \mathcal{K}(D)$). Si (u_j) est une base orthonormale de H, on a donc, quels que soient s,t et $y \in C$, l'identité

$$\sum_j u_j(S_y t)\int k(s,t)\bar{u}_j(s)\,dm(s)=k(S_y t,t).$$

D'après la définition 3.6, le symbole passif h de A est donné par

$$h(Y) = 2^{n+1}\sum_j (A\sigma_Y u_j, u_j)$$

et en explicitant σ_Y on obtient

$$h(y,\eta)=2^{n+1}\int_C k(S_y t,t)e^{2i\pi<\eta,t-S_y t>}\,dm(t). \tag{4.4}$$

Une comparaison de (4.3) et de (4.4) fournira le lien entre f et h.

LEMME 4.1. Pour y fixé $\in C$, l'application $t \mapsto z=S_y t-t$ est un difféomorphisme de C sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Son jacobien est donné par

$$\left|\frac{Dz}{Dt}\right|=(r(t))^{-n-1}(r(y)+r(t))^{n-1}[(r(y)-r(t))^2+4<y,Jt>^2].$$

La transformation inverse est définie comme suit : posons

$$\operatorname{sh}\alpha=(2r(y))^{-1}[<z,Jy>+(<z,Jy>^2-r(y)r(z))^{\frac{1}{2}}]$$

$$\operatorname{sh}\beta=(2r(y))^{-1}[<z,Jy>-(<z,Jy>^2-r(y)r(z))^{\frac{1}{2}}]\quad ;$$

alors

$$t=-\frac{z}{e^{\alpha+\beta}+1}+\frac{<z,Jy>}{r(y)}\left[\frac{1}{e^{\alpha+\beta}-1}+\frac{1}{e^{\alpha+\beta}+1}\right]y\ .$$

Preuve. Avec $M\in G_o$ tel que $y=M\omega$, soit $z'=M^{-1}z$ et $t'=M^{-1}t$, de sorte que $z'=St'-t'$. Considérées comme fonctions de y et z, α et β vérifient la condition d'invariance $\alpha(y,z)=\alpha(\omega,z')$ et $\beta(y,z)=\beta(\omega,z')$:

cela résulte en effet des relations $<z',J\omega>=<M^{-1}z,J\omega>=|M|^{-2}<z,Jy>$ $=r(y)^{-1}<z,Jy>$ et $r(y)^{-1}r(z)=r(z')$. On peut alors, pour ce qui concerne la preuve de la dernière relation affirmée dans le lemme 4.1, se ramener au cas où $y=\omega$. Par ailleurs,

$$<y,Jt>=<M\omega,JMt'>=|M|^2<\omega,JM^{-1}Mt'>=r(y)t'_o$$

et comme $\left|\frac{Dz}{Dt}\right| = \left|\frac{Dz'}{Dt'}\right|$, on voit qu'on peut également ne prouver la formule donnant le jacobien que lorsque $y=\omega$, ce que nous supposons désormais. On a donc simplement $z=St-t$. Nous serons amenés, dans de nombreux calculs, à écrire

$$z=(z_o,z_*) \text{ avec } z_*=(z_1,\dots,z_n). \tag{4.5}$$

Alors
$$\operatorname{sh}\alpha = \frac{1}{2}(z_o+|z_*|)$$
$$\operatorname{sh}\beta = \frac{1}{2}(z_o-|z_*|)$$

L'équation $z = St-t$ s'écrit

$$\begin{cases} z_o= [r(t)^{-1}-1]t_o \\ z_*= -[r(t)^{-1}+1]t_* \end{cases} \tag{4.6}$$

d'où
$$2\operatorname{sh}\alpha = \frac{t_o+|t_*|}{r(t)} - (t_o-|t_*|)=(t_o-|t_*|)^{-1}-(t_o-|t_*|)$$
$$2\operatorname{sh}\beta = (t_o+|t_*|)^{-1}-(t_o+|t_*|).$$

Par suite
$$e^{-\alpha}=t_o-|t_*| , \qquad e^{-\beta}=t_o+|t_*|$$

et
$$r(t)=e^{-(\alpha+\beta)} . \tag{4.7}$$

Enfin
$$t_o = \frac{z_o}{e^{\alpha+\beta}-1} , \qquad t_*= -\frac{z_*}{e^{\alpha+\beta}+1}$$

d'où

$$t= \frac{z_o}{e^{\alpha+\beta}-1}\,\omega - \frac{z-z_o\,\omega}{e^{\alpha+\beta}+1} = -\frac{z}{e^{\alpha+\beta}+1} + z_o\left[\frac{1}{e^{\alpha+\beta}-1} + \frac{1}{e^{\alpha+\beta}+1}\right]\omega$$

ce qui est la formule annoncée. Les équations (4.6) fournissent (voir (2.9) si l'on a oublié la signification de $\{\}$)

$$\frac{\partial z_o}{\partial t_j} = (r(t)^{-1}-1)\delta_{oj} - \frac{2\{j\}t_j t_o}{(r(t))^2}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial t_j} = (-r(t)^{-1}-1)\delta_{kj} + \frac{2\{j\}t_j t_k}{(r(t))^2}, \qquad k\geqslant 1$$

ce qui permet d'écrire la matrice $-\frac{Dz}{Dt}$ (pour économiser les notations, on emploie pour cette matrice le même symbole que pour son déterminant) sous la forme

$$-\frac{Dz}{Dt} = (r(t))^{-2}\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ o & bI\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} t_o^2 & -t_o t_1 & -t_o t_2 & \cdots & -t_o t_n \\ -t_1 t_o & t_1^2 & t_1 t_2 & \cdots & t_1 t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -t_n t_o & t_n t_1 & t_n t_2 & \cdots & t_n^2 \end{pmatrix}\right]$$

avec

$$a = r(t)(r(t)-1), \qquad b = r(t)(r(t)+1).$$

Pour évaluer ce déterminant, on se ramène au prix d'une transformation orthogonale sur t_* au cas où $t_2=\ldots=t_n=0$, auquel cas on a facilement

$$\text{dét}\left(-\frac{Dz}{Dt}\right) = (r(t))^{-2(n+1)}b^{n-1}(ab+2at_1^2+2bt_o^2)$$

$$= (r(t))^{-(n+1)}(r(t)+1)^{n-1}[(r(t)-1)^2+4t_o^2]$$

ce qui prouve le lemme 4.1.

THÉORÈME 4.2. <u>Soit</u> $f\in\mathcal{K}(D)$ <u>et soit</u> h <u>le symbole passif de l'opérateur</u> $Op(f)$. <u>On a</u>

$$h(y,\eta) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2i\pi\langle\eta,z\rangle}(\mathcal{F}_2^{-1}f)(y,z)\,\frac{\left(\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{ch}\beta)\right)^{1-n}}{\mathrm{ch}\alpha\;\mathrm{ch}\beta}\,dz$$

où α et β sont les fonctions de y et z définies dans le lemme 4.1.

Preuve. En partant de (4.3), on obtient

$$k(S_y t,t)=2^{\frac{n-1}{2}}(r(y))^n[<S_y t,Jt>+r(y)]^{\frac{1-n}{2}}(\mathcal{F}_2^{-1}f)(y,S_y t-t)$$

et l'on note aussitôt (cf.(2.12)) que

$$<S_y t,Jt>+r(y)=<-\frac{r(y)}{r(t)}t+\frac{2<t,Jy>y}{r(t)},Jt>+r(y)=\frac{2<y,Jt>^2}{r(t)}.$$

On reporte cette expression de $k(S_y t,t)$ dans (4.4), où l'on effectue le changement de variable indiqué dans le lemme 4.1. Il ne reste plus qu'à expliciter certaines fonctions de y et t comme des fonctions de y et z. On a

$$<y,Jt> = -\frac{<y,Jz>}{e^{\alpha+\beta}+1}+<y,Jz>\left[\frac{1}{e^{\alpha+\beta}-1}+\frac{1}{e^{\alpha+\beta}+1}\right]$$

$$=\frac{<y,Jz>}{e^{\alpha+\beta}-1}=r(y)\frac{\mathrm{sh}\alpha+\mathrm{sh}\beta}{e^{\alpha+\beta}-1}=r(y)e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

et, d'après (4.7),

$$r(t)=r(y)e^{-(\alpha+\beta)}.$$

Par ailleurs, revenant aux divers facteurs de l'expression du jacobien donnée dans le lemme 4.1, on a

$$r(y)+r(t)=2r(y)e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$(r(y)-r(t))^2+4<y,Jt>^2=4(r(y))^2e^{-(\alpha+\beta)}(\mathrm{sh}^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\mathrm{ch}^2\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$=4(r(y))^2e^{-(\alpha+\beta)}\mathrm{ch}\alpha\ \mathrm{ch}\beta$$

et

$$\left|\frac{Dt}{Dz}\right|=(r(y)e^{-(\alpha+\beta)})^{n+1}(2r(y)e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2})^{1-n}\frac{1}{4}(r(y))^{-2}\frac{e^{\alpha+\beta}}{\mathrm{ch}\alpha\ \mathrm{ch}\beta}$$

$$=2^{-n-1}e^{-\frac{n+1}{2}(\alpha+\beta)}(\mathrm{ch}\alpha\ \mathrm{ch}\beta)^{-1}(\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2})^{1-n}.$$

Il reste à substituer dans (4.4) les diverses expressions obtenues, se rappelant que $dm(t) = r(t)^{-\frac{1}{2}(n+1)}dt$, pour obtenir le théorème 4.2.

Remarques : 1) Si l'on pose, pour $z \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$F_o(z) = (\mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{ch}\beta)^{-1}\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{ch}\beta)\right)^{1-n} \tag{4.8}$$

avec

$$\mathrm{sh}\,\alpha = \frac{1}{2}(z_o + |z_*|), \qquad \mathrm{sh}\,\beta = \frac{1}{2}(z_o - |z_*|),$$

la relation donnée dans le théorème 4.2 s'écrit aussi, de façon plus suggestive,

$$h(y,\eta) = F_o\left(\frac{1}{2i\pi} M^{-1} \frac{\partial}{\partial\eta}\right) f(y,\eta) \tag{4.9}$$

où $M \in G_o$ est choisie telle que $y=M\omega$. En effet, il est immédiatement clair qu'il en est ainsi lorsque $y=\omega$ et, pour le cas général, la justification la plus simple consiste à observer que l'opérateur F commute à l'action de G_o décrite en (2.14).
2) On remarquera que l'opérateur F conserve l'espace $\mathcal{K}(D)$.

V - LA DISTANCE SUR Π ET L'INVARIANT δ_+ ; UNE INÉGALITÉ GÉOMÉTRIQUE

On obtient, en modifiant un peu une paramétrisation de I.I. Piatetskii-Chapiro [31], la description qui suit de $\Pi = C+i\mathbb{R}^{n+1}$, déjà donnée dans [53] .

Désignons par $A = (\alpha_o,\beta_o,\alpha_1,\beta_1,\ldots,\beta_n)$ le point courant de $\mathbb{C}^{n+3}$ et, pour toute paire (A,A') de points de $\mathbb{C}^{n+3}$, posons

$$q(A,A') = \alpha_o\alpha'_o+\beta_o\beta'_o-\alpha_1\alpha'_1-\beta_1\beta'_1-\ldots-\beta_n\beta'_n \,. \tag{5.1}$$

On vérifie aisément (cf [53]) que les conditions $q(A,A)=0$ et $q(A,\bar{A})>0$ entraînent $|\alpha_o-i\beta_o| \neq |\alpha_o+i\beta_o|$. On désigne alors par Ω le sous-ensemble de $\mathbb{C}^{n+3}$ caractérisé par le système $q(A,A)=0$; $q(A,\bar{A})>0$; $|\alpha_o-i\beta_o| > |\alpha_o+i\beta_o|$. Le domaine Π est l'image de Ω par l'application de Ω dans $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par

(5.2) $$X_j = \frac{\beta j}{i(\alpha_o+\alpha_1)} \qquad j=0,\ldots,n.$$

Rappelons les relations (de vérification immédiate)

(5.3) $$r(X) = (\alpha_o-\alpha_1)(\alpha_o+\alpha_1)^{-1}$$

et, avec x = Re X,

(5.4) $$q(A,\bar{A}) = 2\,|\alpha_o+\alpha_1|^2 r(x).$$

Un point $A \in \Omega$ est <u>normalisé</u> si $q(A,\bar{A})=2$: tout point de Π est l'image d'un point normalisé de Ω , défini à la multiplication près par un nombre complexe de module 1 ; dans ce cas, (5.4) se réduit à $r(x) = |\alpha_o+\alpha_1|^{-2}$.

L'action du groupe $\Gamma = SO_o(2,n+1)$ dans Π est celle qui résulte de l'action linéaire de ce groupe dans $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+3}$. Si $X \in \Pi$ est l'image de $A \in \Omega$ normalisé, on a avec la notation (2.27)(cf [53])

(5.5) $$\delta_+(\omega,X) = \frac{1}{2}|\alpha_o-i\beta_o| \ , \qquad \delta_-(\omega,X) = \frac{1}{2}|\alpha_o+i\beta_o|.$$

Si l'on note, comme il est d'usage, Γ = KAN la décomposition d'Iwasawa de Γ, le groupe $K=SO(2) \times SO(n+1)$ est celui qui fixe ω : la décomposition de Cartan de Γ (voir [53], section 2 ou S. Helgason [20] , p. 105) montre alors que tout point $X \in \Pi$ est l'image par un élément de K d'un point de la forme

(5.6) $$X=(e^{-s}\text{ch } t, e^{-s}\text{sh } t, 0,\ldots,0)$$

avec, si l'on veut, $s \geqslant |t|$. On a dans ce cas

(5.7) $$\delta_\pm(\omega,X) = \frac{1}{2}(\text{ch } s \pm \text{ch } t).$$

Si l'on désigne par d la distance géodésique sur Π , on a sous la même hypothèse $d(\omega,X) = (s^2+t^2)^{\frac{1}{2}}$: cela résulte en effet de ce que l'application:

(5.8) $$r \mapsto (e^{-rs}\text{ch}(rt), e^{-rs}\text{sh}(rt), 0,\ldots,0)$$

est une géodésique de Π , puisque c'est l'image par l'application traditionnellement notée Exp d'une droite du plan $\mathfrak{a}$ de l'algèbre de Lie de Γ constitué par l'algèbre de Lie du sous-groupe A.

LEMME 5.1. Les fonctions δ_+ et d sur $\Pi \times \Pi$ vérifient

$$\delta_+ \leqslant e^d \leqslant (4\,\delta_+)^{\sqrt{2}} .$$

Pour tout $X \in \Pi$ et tout $k \geqslant 1$ l'ensemble des $X' \in \Pi$ tels que $\delta_+(X,X') \leqslant k$ est connexe.

Preuve. En supposant X donné par (5.6), on a

$$\delta_+(\omega,X) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, s + \mathrm{ch}\, t) \leqslant \mathrm{ch}(s^2+t^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{(s^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} = e^{d(\omega,X)}$$

et $d(\omega,X) \leqslant 2^{\frac{1}{2}} s$, d'où $\delta_+(\omega,X) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\, s \geqslant \frac{1}{4}\, e^s \geqslant \frac{1}{4}\, \exp(2^{-\frac{1}{2}} d(\omega,X))$.

Les inégalités s'obtiennent dans le cas général en utilisant leur invariance par Γ. Pour la seconde partie, on se ramène également au cas où $X=\omega$ et l'on note alors, en se servant de (5.7) et (5.8), que l'on a $\delta_+(\omega,X'') \leqslant \delta_+(\omega,X')$ lorsque X" appartient au segment de géodésique joignant ω et X'.

On va maintenant établir une inégalité triangulaire qui montre une autre analogie entre $\log \delta_+$ et une fonction distance.

LEMME 5.2. Quels que soient $X,X',X'' \in \Pi$, on a

$$\delta_+(X,X') \leqslant 2^5 \delta_+(X,X'')\,\delta_+(X'',X') .$$

Preuve. Représentons $X \in \Pi$ par $A \in \Omega$, A normalisé. On a

$$\delta_+^2(\omega,X) = \frac{|\alpha_0 - i\beta_0|^2}{4} \geqslant \frac{|\alpha_0-i\beta_0|^2 + |\alpha_0+i\beta_0|^2}{8} = \frac{|\alpha_0|^2+|\beta_0|^2}{4}$$

et

$$|\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_n|^2 + 2$$

d'où

$$\delta_+^2(\omega,X) \geqslant \frac{1}{8}(|\alpha_0|^2+|\beta_0|^2+|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2+\ldots+|\beta_n|^2) = \frac{1}{8}|A|^2. \tag{5.9}$$

Par ailleurs, en utilisant (5.2) et (5.4),

$$|X|^2 = |\alpha_o+\alpha_1|^{-2} \sum_{j\geqslant o} |\beta_j|^2 \leqslant r(x)\,|A|^2 \leqslant 8r(x)\,\delta_+^2(\omega,X)$$

d'où, en utilisant la définition (2.27),

(5.10) $$|X|^2 \leqslant \frac{1}{2}\,|r(\omega+X)|^2 .$$

Si $|X| \geqslant \frac{1}{4}$ alors $|r(\omega+X)| \geqslant 2^{\frac{1}{2}}|X| \geqslant 2^{-3/2}$; dans le cas contraire on a $|r(X)| \leqslant 1/16$ et

$$|r(\omega+X)| = |1+r(X)+2X_o| \geqslant 1-\frac{1}{16}-\frac{1}{2} = \frac{7}{16} \geqslant 2^{-3/2} .$$

Dans tous les cas

(5.11) $$|r(\omega+X)| \geqslant 2^{-3/2} .$$

D'après (2.27) et (5.9) on a

$$\frac{|r(\omega+X)|}{4(r(x))^{\frac{1}{2}}} \geqslant 2^{-3/2}\,|A|$$

d'où

$$|r(\omega+X)| \geqslant 2^{\frac{1}{2}}\,(r(x))^{\frac{1}{2}}\,|A| = 2^{\frac{1}{2}}\,\frac{|A|}{|\alpha_o+\alpha_1|}$$

et comme, d'après (5.3),

$$|r(X)| = |\alpha_o-\alpha_1|\,|\alpha_o+\alpha_1|^{-1} \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(|\alpha_o|^2+|\alpha_1|^2)^{\frac{1}{2}}\,|\alpha_o+\alpha_1|^{-1} ,$$

on a

(5.12) $$|r(X)| \leqslant |r(\omega+X)| .$$

Si X et X'sont deux points de Π , on a donc

$$|r(\omega+X)\,r(\omega+X')| \geqslant \max(2^{-3/2}|r(X)|\,,2^{-3/2}|r(X')|\,,2|X|\,|X'|)$$

et

$$|r(X+\bar{X}')| \leqslant |r(X)| + |r(X')| + 2|X|\,|X'| \leqslant 8\,|r(\omega+X)\,r(\omega+X')| .$$

En divisant cette inégalité par $4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}$ et en utilisant

(2.27), on en déduit

$$\delta_+(X,X')\leqslant 2^5\,\delta_+(\omega,X)\,\delta_+(\omega,X'),$$

ce qui démontre le lemme si l'on utilise en outre l'invariance par Γ de celui-ci.

LEMME 5.3. <u>Quels que soient</u> $X=x+i\xi$ <u>et</u> $X'=x'+i\xi'$ <u>appartenant à</u> Π , <u>on a</u> $|r(X)|\geqslant r(x)$ <u>et</u> $\delta_+(X,X')\geqslant\delta_+(x,x')$.

<u>Preuve</u>. C'est peut-être le moment de rappeler une terminologie classique et suggestive. Un point $z\in\mathbb{R}^{n+1}$ est dit du genre temps s'il appartient à C(de sorte que l'inégalité $r(z)>0$ signifie que z ou $-z$ est du genre temps), du genre espace si $r(z)<0$ et du genre lumière si $r(z)=0$. On a

$$|r(X)|^2=|r(x)-r(\xi)+2i\langle x,J\xi\rangle|^2=(r(x)-r(\xi))^2+4\langle x,J\xi\rangle^2.$$

C'est évidemment $\geqslant(r(x))^2$ si ξ est du genre espace. Mais dans le cas contraire on a (cf.(2.2), que nous ne rappellerons plus)

$$|\langle x,J\xi\rangle|\geqslant(r(x)r(\xi))^{\frac{1}{2}}$$

d'où $|r(X)|^2\geqslant(r(x)+r(\xi))^2$ et la première inégalité est encore vérifiée.

Comme C est un cône convexe, $X+\bar{X}'\in\Pi$ d'où $|r(X+\bar{X}')|\geqslant r(x+x')$ ce qui (à l'aide de la définition (2.27)) prouve la deuxième partie du lemme.

LEMME 5.4. <u>Quels que soient</u> X <u>et</u> $X'\in\Pi$ <u>on a</u>

$$\delta_+(X,X')\geqslant\max\left[\delta_+(x,x'),\ \frac{|r(\xi-\xi')|}{8(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}},\ \frac{|\langle Jx,\xi-\xi'\rangle|}{2(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}},\ \frac{|\langle Jx',\xi-\xi'\rangle|}{2(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}\right].$$

<u>Preuve</u>. La première inégalité vient d'être prouvée. Par ailleurs

$$\delta_+(X,X')\ \geqslant\ \frac{|\mathrm{Re}\ r(X+\bar{X}')|}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}=\frac{|r(x+x')-r(\xi-\xi')|}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}$$

d'où

$$\frac{|r(\xi-\xi')|}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}} \leqslant \delta_+(X,X')+\delta_+(x,x') \leqslant 2\delta_+(X,X').$$

En tenant compte de la partie imaginaire de $r(X+\bar{X}')$, on obtient

$$\delta_+(X,X') \geqslant \frac{|<J(x+x'),\xi-\xi'>|}{2(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}.$$

On a aussi, en utilisant (2.28) (une conséquence de (5.7)),

$$\delta_+(X,X') \geqslant \delta_-(X,X') = \frac{|r(X-X')|}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{|<J(x-x'),\xi-\xi'>|}{2(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}.$$

En additionnant les deux dernières inégalités, on obtient le lemme 5.4.

LEMME 5.5. Avec X et $X' \in \Pi$, et $x''= \mathrm{mil}(x,x')$, on a

$$\frac{|<x'',J(\xi-\xi')>|}{4r(x'')} \leqslant (\delta_+(X,X'))^{3/2}.$$

Preuve. Rappelons (2.13) que

$$x'' = (2A)^{-\frac{1}{2}}(x\ r(x')^{\frac{1}{2}} + x'r(x)^{\frac{1}{2}})$$

avec

$$A = <x,Jx'>+(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}} \geqslant 2(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}.$$

Notons également que

$$(5.13) \qquad \delta_+(x,x') = \frac{r(x)+r(x')+2<x,Jx'>}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{1}{4}\max\left(\left(\frac{r(x)}{r(x')}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{r(x)}{r(x')}\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

D'où

$$|<x'',J(\xi-\xi')>| \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r(x')}{r(x)}\right)^{\frac{1}{4}}|<x,J(\xi-\xi')>| + \left(\frac{r(x)}{r(x')}\right)^{\frac{1}{4}}|<x',J(\xi-\xi')>|\right]$$

$$\leqslant (\delta_+(x,x'))^{\frac{1}{2}}\,[|<Jx,\xi-\xi'>|+|<Jx',\xi-\xi'>|]$$

$$\leqslant 4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}(\delta_+(X,X'))^{3/2}$$

ce qui démontre le lemme.

Le prochain lemme ne sera utilisé que plus loin, mais il est commode de le prouver maintenant.

LEMME 5.6. <u>Soient</u> $x \in C$, $x' \in C$ <u>et</u> $x'' = \mathrm{mil}(x,x')$.

<u>On a</u>
$$\langle x,x'\rangle \geqslant |x''|^2$$

<u>Preuve</u>. On commence par remarquer que

$$x_o^2 r(x') + x_o'^2 r(x) - r(x)r(x')$$
$$= x_o^2(x_o'^2 - |x_*'|^2) + x_o'^2(x_o^2 - |x_*|^2) - (x_o^2 - |x_*|^2)(x_o'^2 - |x_*'|^2)$$
$$= x_o^2 x_o'^2 - |x_*|^2 |x_*'|^2 \leqslant x_o^2 x_o'^2 - \langle x_*, x_*'\rangle^2 = \langle x,x'\rangle\langle x,Jx'\rangle.$$

Par ailleurs, rappelant que $r(x'') = (r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}$ et utilisant les notations de la preuve du lemme précédent, on obtient

$$x_o'' = (2A)^{-\frac{1}{2}}(x_o r(x')^{\frac{1}{2}} + x_o' r(x)^{\frac{1}{2}})$$

et

$$|x''|^2 = 2x_o''^2 - r(x'')$$
$$= A^{-1}[x_o^2 r(x') + x_o'^2 r(x) + 2x_o x_o' r(x'') - Ar(x'')]$$
$$= A^{-1}[x_o^2 r(x') + x_o'^2 r(x) + 2x_o x_o' r(x'') - \langle x,Jx'\rangle r(x'') - (r(x''))^2].$$

En utilisant l'inégalité prouvée plus haut, on trouve

$$|x''|^2 \leqslant A^{-1}[\langle x,x'\rangle\langle x,Jx'\rangle + 2x_o x_o' r(x'') - \langle x,Jx'\rangle r(x'')]$$
$$= A^{-1}[\langle x,x'\rangle\langle x,Jx'\rangle + \langle x,x'\rangle r(x'')]$$
$$= \langle x,x'\rangle.$$

THÉORÈME 5.7. <u>Quels que soient</u> $X \in \Pi$ <u>et</u> $X' \in \Pi$ on a

$$|X|^2 \leqslant 2^{21}(\delta_+(X,X'))^5 |X'|^2.$$

<u>Preuve</u>. Soit $M \in G_o$ telle que $x'' = \mathrm{mil}(x,x') = M\omega$ et posons $z = \xi - \xi'$, $\zeta = M^{-1}z$. Alors

$$\frac{1}{2}\ \frac{|r(z)|}{r(x")} + \frac{<x",Jz>^2}{(r(x"))^2} = \frac{1}{2}\ \frac{|r(z)|}{r(x")} + \frac{<\omega,|M|^2JM^{-1}z>^2}{(r(x"))^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ |r(M^{-1}z)| + <\omega,JM^{-1}z>^2$$

$$= \frac{1}{2}\ |r(\zeta)| + \zeta_o^2 \geqslant \frac{1}{2}(|\zeta_*|^2 - \zeta_o^2) + \zeta_o^2 = \frac{1}{2}|\zeta|^2,$$

d'où

$$|M^{-1}(\xi-\xi')|^2 \leqslant \frac{|r(\xi-\xi')|}{r(x")} + 2\ \frac{<x",J(\xi-\xi')>^2}{(r(x"))^2} \quad .$$

D'après les lemmes 5.4 et 5.5, on a donc

$$|M^{-1}(\xi-\xi')|^2 \leqslant 8\delta_+(X,X') + 32(\delta_+(X,X'))^3$$

d'où

$$|M^{-1}(\xi-\xi')| \leqslant 8(\delta_+(X,X'))^{3/2} \tag{5.14}$$

Par ailleurs, quels que soient x et $x' \in C$ on a

$$\frac{x_o}{x'_o} \leqslant 4\ \frac{<x,Jx'>}{r(x')} \quad . \tag{5.15}$$

On peut en effet pour prouver cette inégalité supposer que $r(x) = r(x') = 1$ puis, à l'aide d'une transformation orthogonale sur x_* et x'_* , se ramener au cas où

$$x_o = \text{ch } t,\ x_1 = \text{sh } t,\ x_2 = \ldots = 0$$

$$x'_o = \text{ch } s,\ x'_1 = \text{sh } s \cos u, x'_2 = \text{sh } s \sin u, x'_3 = \ldots = 0.$$

Alors

$$<x,Jx'> = \text{ch } s \text{ ch } t - \text{sh } s \text{ sh } t \cos u \geqslant \text{ch}(|s|-|t|) \geqslant \frac{1}{2}\ e^{|t|-|s|}$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\ \frac{\text{ch } t}{\text{ch } s} = \frac{x_o}{4x'_o} \ .$$

En utilisant (5.15) et (5.13) on obtient

$$\frac{x_o}{x'_o} \leqslant 4\ \frac{<x,Jx'>}{r(x")}\ \left(\frac{r(x)}{r(x')}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^5(\delta_+(x,x'))^2$$

d'où

$$|x|^2 = 2x_o^2 - r(x) \leqslant 2x_o^2 \leqslant 2^{11}(\delta_+(x,x'))^4 x_o'^2$$

et

(5.16) $$|x|^2 \leqslant 2^{11}(\delta_+(x,x'))^4 |x'|^2.$$

On évalue maintenant $|\xi-\xi'|$:

$$|\xi_o-\xi_o'| = |\langle M^{-1}(\xi-\xi'), M'\omega\rangle| \leqslant |M^{-1}(\xi-\xi')|\,|M'\omega|.$$

Notons, en posant $k = M'^{-1}(M'M)^{\frac{1}{2}}$, l'égalité $kk'=1$: comme $k \in G_o$, il en résulte que $k \in \{1\} \times SO(n)$ d'où $k^{-1}\omega = \omega$ et par suite

$$|M\omega|^2 = \langle M'M\, k^{-1}\omega, k^{-1}\omega\rangle = |(M'M)^{\frac{1}{2}} k^{-1}\omega|^2 = |M'\omega|^2.$$

En se servant en outre de (5.14), on en déduit

$$|\xi_o-\xi_o'| \leqslant 8(\delta_+(X,X'))^{3/2}|x''|.$$

De plus, d'après le lemme 5.4,

$$|r(\xi-\xi')| \leqslant 8\ \delta_+(X,X')r(x'')$$

d'où

$$|\xi-\xi'|^2 = 2(\xi_o-\xi'_o)^2 - r(\xi-\xi') \leqslant 2^7(\delta_+(X,X'))^3|x''|^2 + 8\delta_+(X,X')r(x'')$$

soit

(5.17) $$|\xi-\xi'|^2 \leqslant 2^8(\delta_+(X,X'))^3|x''|^2.$$

Par suite

(5.18) $$|\xi|^2 \leqslant 2(|\xi'|^2 + |\xi-\xi'|^2) \leqslant 2|\xi'|^2 + 2^9(\delta_+(X,X'))^3|x''|^2.$$

Pour terminer, on a besoin d'un dernier lemme.

LEMME 5.8. Quel que soit $x \in C$, on a

$$\delta_+(x,Sx) \geqslant (\delta_+(\omega,x))^2.$$

Preuve. Pour tout $x \in C$, on a

$$\delta_+(x,Sx) = \frac{r(x+Sx)}{4} = \frac{(r(x))^2+1+2|x|^2}{4r(x)} .$$

D'une part

$$\delta_+(x,Sx) \geqslant \frac{(r(x)+1)^2}{4r(x)} .$$

D'autre part, vu que $|x|^2 = 2x_o^2 - r(x)$, on a aussi

$$\delta_+(x,Sx) \geqslant \frac{x_o^2}{r(x)} .$$

Enfin

$$\delta_+(\omega,x) = \frac{r(x)+1}{4(r(x))^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_o}{2(r(x))^{\frac{1}{2}}} \leqslant (\delta_+(x,Sx))^{\frac{1}{2}}.$$

Fin de la preuve du théorème 5.7.

On tire du lemme 5.8 l'inégalité

$$\delta_+(x',x'') \leqslant (\delta_+(x,x'))^{\frac{1}{2}} .$$

En se servant de (5.16), on en déduit

$$|x''|^2 \leqslant 2^{11}(\delta_+(x,x'))^2|x'|^2 ,$$

et (5.18) montre alors que

$$|\xi|^2 \leqslant 2|\xi'|^2 + 2^{20}(\delta_+(X,X'))^5|x'|^2,$$

inégalité qui, alliée à (5.16), prouve le théorème 5.7.

VI - FONCTIONS POIDS ET CLASSES DE SYMBOLES.

Rappelons (2.22) que l'application $\tau : \Pi \mapsto D$ définie par $\tau(x+i\xi) = (\frac{x}{r(x)}, -J\xi)$ entrelace les actions de $G = G_o \times \mathbb{R}^{n+1}$ sur Π et D respectivement.

DÉFINITION 6.1. Pour toute fonction m sur D, nous poserons $\tilde{m} = m \circ \tau$ et nous dirons que m est une fonction-poids si elle est réelle >0

et si de plus il existe des constantes $C_1 > 0$ et $N_1 > 0$ telles que, quels que soient X et $X' \in \Pi$, on ait

$$\tilde{m}(X) \leqslant C_1 \tilde{m}(X')(\delta_+(X,X'))^{N_1}.$$

PROPOSITION 6.2. Le produit ou le maximum de deux fonctions-poids, les puissances réelles d'une fonction-poids sont des fonctions-poids. Les fonctions $Y \mapsto r(y)$ et $Y \mapsto \frac{|y|^2}{r(y)} + r(y)|\eta|^2$ sont des fonctions-poids.

Preuve. La première partie est évidente. Les fonctions sur Π attachées, par la transformation $m \mapsto \tilde{m}$, aux deux fonctions indiquées, sont les fonctions $X \mapsto (r(x))^{-1}$ et $X \mapsto (r(x))^{-1}|X|^2$, et la seconde partie résulte donc de (5.13), du lemme 5.3 et du théorème 5.7.

Remarque. Cette définition est analogue à une généralisation des fonctions-poids au sens de Beals [2], donnée dans le cadre du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$ par l'auteur [40] et par Hörmander [21].

PROPOSITION 6.3. Posons $|\eta|_y = |M'\eta|$ si $y = M\omega$, $M \in G_o$. La fonction $m_o(Y) = (1 + |\eta|_y^2)^{\frac{1}{2}}$ est une fonction-poids.

Preuve. Explicitons $|\eta|_y^2$ pour commencer. On a $\langle y,\eta\rangle = \langle \omega, M'\eta\rangle = (M'\eta)_o$ et $r(y)r(\eta) = r(M'\eta)$ d'où

$$|\eta|_y^2 = 2(M'\eta)_o^2 - r(M'\eta) = 2\langle y,\eta\rangle^2 - r(y)r(\eta). \tag{6.1}$$

On pourra comparer cela à (2.20).

Rappelons que toute matrice $\Lambda \in SO_o(1,n)$ peut s'écrire sous la forme $\Lambda = \Omega_1 \Lambda_1 \Omega_2$ avec Ω_1 et $\Omega_2 \in \{1\} \times SO(n)$ et

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & \\ & 0 & I \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Ce fait (la décomposition de Cartan du groupe $SO_o(1,n)$) peut se retrouver comme suit : Λ étant donnée, il existe une rotation Ω_1^{-1} sur les n dernières coordonnées qui amène le vecteur $\Lambda\omega$ sur un vecteur de la forme $z=(\mathrm{ch}\ t, \mathrm{sh}\ t, 0, \ldots, 0)$: alors $\Omega_1^{-1}\Lambda\omega$ et $\Lambda_1\omega$ coïncident, d'où $\Lambda_1^{-1}\Omega_1^{-1}\Lambda \in \{1\}\times SO(n)$. Il est clair que les matrices Λ et Λ_1 ont même norme, celle-ci étant définie par $\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda x| : x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1\}$. Comme les valeurs propres de Λ_1 éventuellement distinctes de 1 sont $e^{\pm t}$, on voit que $\|\Lambda\| = e^{|t|} = z_o + |z_1| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} |z| = 2^{\frac{1}{2}} |\Lambda\omega|$. Plus généralement, on en déduit

(6.3) $$\|M\| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} |y| \quad \text{si } y = M\omega, \ M \in G_o.$$

En conséquence, si $y = M\omega$ et $y_1 = M_1\omega$, on a

(6.4) $$\|M^{-1}M_1\| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} |M^{-1}M_1\omega| = 2^{\frac{1}{2}} |M^{-1}y_1| .$$

Or, en utilisant (5.13), on obtient

$$|M^{-1}y_1|^2 = 2\langle M^{-1}y_1, J\omega\rangle^2 - r(M^{-1}y_1) \leqslant 2(r(y))^{-2}\langle y_1, Jy\rangle^2$$
$$= \frac{2r(y_1)}{r(y)} \left[\frac{\langle y_1, Jy\rangle}{(r(y)r(y_1))^{\frac{1}{2}}}\right]^2 \leqslant 2^7(\delta_+(y,y_1))^4$$

d'où $\|M^{-1}M_1\| \leqslant 2^4(\delta_+(y,y_1))^2$. Il en résulte que, pour tout η, on a

(6.5) $$|\eta|_{y_1} = |M_1'\eta| \leqslant \|M_1'M'^{-1}\| \ |M'\eta| = \|M^{-1}M_1\| \ |M'\eta| \leqslant 2^4(\delta_+(y,y_1))^2 |\eta|_y .$$

Cela étant, soient $Y=(y,\eta)$ et $Y'=(y',\eta')$ deux points de D, et posons $\tau^{-1}Y = JX, \tau^{-1}Y' = JX'$, c'est à dire

$$x = Sy, \xi = -\eta, x' = Sy', \xi' = -\eta' .$$

Soit y_1 le milieu de y et y' : alors $Sy_1 = \mathrm{mil}(x,x')$. De plus, si $y_1 = M_1\omega, M_1 \in G_o$, on a $Sy_1 = M_1'^{-1}\omega$. L'inégalité (5.14) fournit alors

(6.6) $$|M_1'(\eta - \eta')| = |M_1'(\xi - \xi')| \leqslant 8(\delta_+(X,X'))^{3/2}.$$

Par ailleurs, (6.5) et le lemme 5. 8 fournissent

$$\left[\frac{m_o(Y)}{m_o(Y')}\right]^2 = \frac{1+|\eta|_y^2}{1+|\eta'|_{y'}^2} \leqslant 2^{16}(\delta_+(y,y_1))^8 \frac{1+|\eta|_{y_1}^2}{1+|\eta'|_{y_1}^2}$$

$$\leqslant 2^{17}(\delta_+(y,y'))^4(1+|\eta-\eta'|^2_{y_1})$$
$$= 2^{17}(\delta_+(y,y'))^4(1+|M_1'(\eta-\eta')|^2).$$

Avec l'aide de (6.6), on obtient finalement

(6.7) $$(m_o(Y))^2 \leqslant 2^{24}(m_o(Y'))^2(\delta_+(\tau^{-1}Y,\tau^{-1}Y'))^7,$$

ce qui démontre la proposition 6.3.

Rappelons que (2.20) définit une structure riemannienne sur D: si l'on identifie l'espace tangent à D en (y,η) au produit $T_y(C)\times T_y^*(C)$, ce qui peut se faire de façon naturelle, les restrictions de la forme quadratique ds^2 aux sous-espaces $T_y(C)\times\{0\}$ et $\{0\}\times T_y^*(C)$ sont deux formes duales l'une de l'autre (nous venons précisément de considérer la deuxième de ces restrictions dans la proposition qui précède). Si $\{e_o,\dots,e_n\}$ est une base orthonormale de $T_y(C)$ pour la structure riemannienne sur C donnée par (2.6) et si $\{\varepsilon_o,\dots,\varepsilon_n\}$ est la base duale de $T_y^*(C)$, on peut, pour toute fonction $f\in C^\infty(D)$, définir pour tout $Y=(y,\eta)$,

$$\|f\|^2_{1,Y} = \sum_{j=o}^{n}(|(e_jf)(Y)|^2+|(\varepsilon_jf)(Y)|^2)$$

en désignant par $(e_jf)(Y)$ (resp. $(\varepsilon_jf)(Y)$) la dérivée de f le long du vecteur e_j (resp. ε_j): le résultat ne dépend pas du choix de la base orthonormale. Plus généralement, posant $e_j=\varepsilon_{j-n-1}$ pour $j>n$ et prolongeant les vecteurs e_j $(0\leqslant j\leqslant 2n+1)$ en des champs de vecteurs constants, on peut, pour tout entier $k\geqslant 1$, définir

(6.8) $$\|f\|^2_{k,Y} = \sum_{j_1,\dots,j_k=o}^{2n+1}|(e_{j_1}\dots e_{j_k}f)(Y)|^2:$$

le résultat ne dépend pas de la base orthonormale choisie ; enfin, on pose $\|f\|_{o,Y}=|f(Y)|$.

DÉFINITION 6.4. <u>Soit</u> m <u>une fonction-poids sur</u> D. <u>Un symbole de poids</u> m <u>est une fonction</u> f <u>de classe</u> C^∞ <u>sur</u> D, <u>à valeurs complexes</u>, <u>telle que pour tout entier</u> $k\geqslant 0$ <u>la fonction</u> $Y\mapsto(m(Y))^{-1}\|f\|_{k,Y}$ <u>soit bornée</u>.

<u>On posera</u>

$$\|f\|_{m;k} = \sum_{j=0}^{k} \sup_Y ((m(Y))^{-1} \|f\|_{j,Y}) .$$

Remarque. Si f est un symbole de poids m, et si $(M,b) \in G$, alors $f_{M,b} = f \circ (M,b)^{-1}$ est un symbole de poids $m \circ (M,b)^{-1}$; de plus, la norme $\|f_{M,b}\|_{m \circ (M,b)^{-1};k}$ est indépendante de (M,b): tout ceci résulte de l'invariance par G de la structure riemannienne de D. Les opérateurs différentiels sur D qui commutent à l'action de G conservent la classe des symboles de poids donné. Dans l'algèbre constituée par ces opérateurs figurent les opérateurs

$$\Sigma\, y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\ ,\ r(y)^{-1}\langle Jy, \frac{\partial}{\partial \eta}\rangle, \tag{6.9}$$
$$r(y)\Box_y\ ,\ \Sigma\, \frac{\partial^2}{\partial y_j\, \partial \eta_j} \quad \text{et} \quad r(y)^{-1}\Box_\eta\, ,$$

où l'on a noté $\Box$ l'opérateur d'Alembertien usuel.

Comme dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$, les symboles (modelés sur les symboles des opérateurs différentiels) où l'on "gagne" en dérivant par rapport aux variables grecques présentent un intérêt fondamental. On pose, si p et q sont entiers $\geqslant 0$,

$$\|f\|^2_{p,q,Y} = \sum_{i_1,\dots,i_p=0}^{n}\ \sum_{j_1,\dots,j_q=0}^{n} |(e_{i_1}\cdots e_{i_p}\, \varepsilon_{j_1}\cdots \varepsilon_{j_q} f)(Y)|^2 \tag{6.10}$$

avec la même hypothèse que plus haut sur les bases $\{e_j\}$ et $\{\varepsilon_j\}$.

DÉFINITION 6.5. Soit μ un nombre réel. Nous appellerons symbole classique d'ordre μ toute fonction f de classe C^∞ sur D possedant la propriété suivante: quels que soient les entiers p et $q \geqslant 0$, il existe $C>0$ telle que, quel que soit $Y \in D$, on ait

$$\|f\|_{p,q,Y} \leqslant C(m_0(Y))^{\mu - q},$$

où m_0 est la fonction-poids introduite dans la proposition 6.3.

PROPOSITION 6.6. Pour tout nombre réel μ, la fonction $Y \mapsto (m_0(Y))^\mu$ est un symbole classique d'ordre μ.

Preuve. Pour tout $N \in G_0$, on a, pour l'action de G_0 sur D définie par (2.14),

$$m_o(N.(y,\eta)) = m_o(Ny,N'^{-1}\eta) = m_o(y,\eta).$$

Compte tenu de cette propriété d'invariance, il suffit de prouver les estimations réclamées par la définition 6.5 au point $y = \omega$. On utilise l'expression

$$(1+|\eta|_y^2)^{\mu/2} = [\,1+2\langle y,\eta\rangle^2 - r(y)r(\eta)\,]^{\mu/2}$$

fournie par (6.1): le résultat souhaité s'en déduit aussitôt.

LEMME 6.7. <u>Soit</u> $f(Y) = \delta_+(\omega,\tau^{-1}Y)$ <u>pour tout</u> $Y \in D$. <u>La fonction</u> f <u>est une fonction-poids</u>, <u>et</u> f <u>est un symbole de poids</u> f.

<u>Preuve</u>. Le premier point résulte du lemme 5.2. Quel que soit $(M,b) \in G$, la relation (6.8) montre que

$$\|f\|_{k,(M,b).Y} = \|f \circ (M,b)\|_{k,Y}$$

pour tout symbole f. Par suite $\|f\|_{k,Y} = \|f \circ (M,b)\|_{k,(\omega,0)}$ si $Y = (M,b).(\omega,0)$, ce qui permet, pour montrer qu'un symbole f est de poids m, de n'étudier que les dérivées ordinaires au point $(\omega,0)$ de la famille de symboles $f \circ (M,b)$. Introduisant les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{X}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right),$$

on est alors ramené, dans le cas présent, à prouver l'existence, pour tout couple (α,β) de multi-indices, d'une constante $C > 0$ indépendante de $X' \in \Pi$ telle que l'on ait

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{X}}\right)^{\beta} \delta_+^2(X,X')\,(X=\omega)\right| \leqslant C\,\delta_+^2(\omega,X').$$

Or, si l'on écrit

$$\delta_+^2(X,X') = \frac{r(X+\bar{X}')\,r(\bar{X}+X')}{16\; r(x)\,r(x')},$$

cela résulte de l'inégalité

$$|\omega+\bar{X}'| \leqslant 4\,|r(\omega+\bar{X}')|,$$

une conséquence de (5.10) et (5.11).

Sur l'espace des symboles de poids donné, la topologie naturelle est comme d'habitude trop fine pour être utile. Le mode de convergence ci-dessous est strictement pratique, adapté à des utilisations ultérieures du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

PROPOSITION 6.8 . Soit m une fonction-poids, et soit Symb(m) l'espace vectoriel des symboles de poids m. Nous dirons qu'une suite (f_ν) converge vers f dans cet espace si d'une part, pour tout k, on a $\sup \|f_\nu\|_{m;k} < \infty$ au sens de la définition 6.3 et si d'autre part les dérivées de tous ordres de la suite (f_ν) tendent vers les dérivées correspondantes de f uniformément sur tout compact de D. En ce sens, tout symbole $f \in \mathrm{Symb}(m)$ est la limite d'une suite de symboles à support compact.

Preuve. Soit χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\chi(t)=1$ pour tout $t \leqslant 1$ et $\chi(t) = 0$ pour $t \geqslant 2$. Posons, pour $\nu=1,2,\ldots,$

$$f_\nu(Y) = f(Y)\,\chi(\nu^{-1}\delta_+(\omega,\tau^{-1}Y)).$$

Vu le lemme 5.1, il est clair que f_ν est à support compact et que la suite (f_ν) converge vers f dans $C^\infty(D)$. De plus, le lemme 6.7 montre que les fonctions $Y \mapsto \chi(\nu^{-1}\delta_+(\omega,\tau^{-1}Y))$ constituent une famille bornée de symboles de poids 1.

PROPOSITION 6.9. Soit F l'opérateur de passage du symbole actif au symbole passif défini sur l'espace $\mathcal{K}(D)$ dans le théorème 4.2. Pour toute fonction-poids m, les opérateurs F et F^{-1} se prolongent (de façon unique d'après la proposition qui précède) en des opérateurs de Symb(m) dans Symb(m) séquentiellement continus au sens de la proposition 6.8.

Preuve. Reprenons les notations (4.8) de la remarque qui a suivi la preuve du théorème 4.2. On a

$$\mathrm{sh}^2\alpha + \mathrm{sh}^2\beta = \frac{|z|^2}{2} \qquad \text{et} \qquad 4\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta = r(z)$$

d'où

$$\mathrm{ch}^2\alpha\,\mathrm{ch}^2\beta = 1 + \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{16}(r(z))^2$$

et

$$(2+\frac{|z|^2}{2})^{\frac{1}{2}} \leqslant \operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(2+\frac{|z|^2}{2})^{\frac{1}{2}},$$

$$(1+\frac{|z|^2}{2})^{\frac{1}{2}} \leqslant \operatorname{ch}\alpha\,\operatorname{ch}\beta \leqslant 1+\frac{|z|^2}{4} \quad .$$

Il en résulte que, pour p entier assez grand, les fonctions

$$(6.11) \qquad E_o(z) = (1+|z|^2)^{-p}F_o(z) \text{ et } E_1(z) = \frac{(1+|z|^2)^{-p}}{F_o(z)}$$

sont sommables ainsi que toutes leurs dérivées (la première pour $p \geqslant 1$, la seconde pour $p \geqslant n+2$). Avec la notation de (4.9), on peut donc écrire

$$F_o(\frac{1}{2i\pi}\, M^{-1}\, \frac{\partial}{\partial\eta}) = (1-(4\pi^2)^{-1}|M^{-1}\, \frac{\partial}{\partial\eta}|^2)^p E_o(\frac{1}{2i\pi}\, M^{-1}\, \frac{\partial}{\partial\eta}),$$

identité dans laquelle intervient l'opérateur différentiel

$$1-(4\pi^2)^{-1}|M^{-1}\,\frac{\partial}{\partial\eta}|^2 = 1-(4\pi^2)^{-1}[2\left(\frac{\langle Jy,\frac{\partial}{\partial\eta}\rangle}{r(y)}\right)^2 - (r(y))^{-1}\square_\eta] \ .$$

On sait (cf(6.9)) que cet opérateur conserve la classe Symb(m). Pour terminer, on se limite à l'étude de l'opérateur F mais la même discussion serait valable pour F^{-1} en y remplaçant partout E_o par E_1. Soit E l'opérateur $E = E_o(\frac{1}{2i\pi}\, M^{-1}\,\frac{\partial}{\partial\eta})$. Avec la notation de la définition 6.4 il s'agit, pour tout entier $k \geqslant 0$, d'établir, pour C bien choisie, l'inégalité $\|Ef\|_{m;k} \leqslant C\|f\|_{m;k}$ pour $f \in \text{Symb}(m)$: on peut en outre faire dépendre de k le choix de l'entier p défini en (6.11). La restriction de Ef à l'espace vectoriel $T^*_\omega(C)$ constitué des points (ω,η) est donnée par $\hat{E}_o * (f|_{T^*_\omega(C)})$, où la fonction $\hat{E}_o$, transformée de Fourier de E_o, est continue et reste bornée après multiplication par un polynôme arbitraire. On a

$$(m(\omega,\eta))^{-1}(Ef)(\omega,\eta) = \int \frac{m(\omega,\eta')}{m(\omega,\eta)}\, \hat{E}_o(\eta-\eta')(m(\omega,\eta'))^{-1}f(\omega,\eta')d\eta'$$

et la relation

$$m(\omega,\eta') \leqslant C_1\; m(\omega,\eta)(1+|\eta'-\eta|^2)^{N_1},$$

une conséquence immédiate de la définition 6.2, montre que $m^{-1}Ef$ est une fonction bornée sur $T^*_\omega(C)$: en utilisant le fait que l'opérateur E commute avec l'action du groupe G_o sur D, on obtient la même borne pour la restriction de la fonction $m^{-1}Ef$ à une fibre $T_y^*(C)$ quelconque de D. Toujours avec le même argument, on peut pour terminer se borner à estimer les dérivées de Ef aux points (ω,η). Si w est la fonction de deux variables telle que

$$E_o(z) = w(4 \text{ sh } \alpha \text{ sh } \beta,\ \text{sh}\alpha+\text{sh}\beta) = w(r(z), z_o),$$

on peut écrire (voir théorème 4.2)

$$(Ef)(y,\eta) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2i\pi<\eta,z>} (\mathcal{F}_2^{-1} f)(y,z)\ w(\frac{r(z)}{r(y)}, \frac{<Jy,z>}{r(y)})\, dz.$$

Cette expression permet d'expliciter les dérivées, calculées en (ω,η), de la fonction Ef. Si l'on choisit p assez grand dans (6.11), les dérivées par rapport à y prises en ω, d'ordre $\leqslant$ k, de la fonction $w((r(y))^{-1}r(z), (r(y))^{-1}<Jy,z>)$, restent sommables ainsi que leurs dérivées de tous ordres relativement à z : ceci permet de conclure comme plus haut.

VII. FONCTIONS DE WIGNER.

Pour étudier les opérateurs pseudo-différentiels sur C, nous serons amenés à les décomposer comme sommes d'opérateurs de rang un particuliers: cette méthode (voir(1.6)) a l'avantage de concentrer toutes les difficultés de l'analyse autour de l'estimation de la "fonction de Wigner": c'est une méthode que nous avions déjà systématisée dans [42], [44] pour le calcul de Weyl.

DÉFINITION 7.1. Soient φ et $\psi \in H$ (voir début de la section 3). La fonction de Wigner $W(\varphi,\psi)$ est la fonction sur D qui est le symbole passif de l'opérateur $u \mapsto (u,\psi)\varphi$: en d'autres termes

$$W(\varphi,\psi)(Y) = 2^{n+1}(\sigma_Y \varphi,\psi).$$

Avant d'évaluer cette fonction dans le cas d'une paire de fonctions du genre ψ_X^λ (définition 3.2), il faut préciser les déterminations de certaines racines carrées qui y apparaîtront.

PROPOSITION ET DÉFINITION 7.2. Pour $X \in \Pi$, $r(X)$ n'est pas réel $\leqslant 0$ et l'on définit $(r(X))^{\frac{1}{2}}$ à l'aide de la détermination principale de la fonction racine carrée dans $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ -z \notin \mathbb{R}^+\}$. Quels que soient X et $X' \in \Pi$, on pose

$$(7.1) \qquad \rho(X,X') = \langle X,\bar{X}'\rangle + (r(X))^{\frac{1}{2}}(r(\bar{X}'))^{\frac{1}{2}}.$$

Alors $\rho(X,X')$ n'est jamais réel $\leqslant 0$ et l'on définit $(\rho(X,X'))^{\frac{1}{2}}$ au moyen de la même détermination.

Preuve. Avec $X = x+i\xi$, on a

$$r(X) = r(x)-r(\xi)+2i\langle x,J\xi\rangle.$$

Si $r(\xi) \leqslant 0$ on a $\operatorname{Re} r(X) > 0$ et dans le cas contraire on a $\operatorname{Im} r(X) \neq 0$: ceci prouve la première partie.

Nous allons montrer, et nous l'admettons un instant, qu'aucun des nombres complexes σ et τ définis à leur échange près par

$$\sigma + \tau = 2\langle X,\bar{X}'\rangle$$
$$\sigma\tau = r(X)r(\bar{X}')$$

n'est réel $\leqslant 0$, ce qui permet de définir $\sigma^{\frac{1}{2}}$ et $\tau^{\frac{1}{2}}$, deux nombres ayant une partie réelle > 0 . On a bien entendu

$$2\rho(X,X') = (\sigma^{\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{1}{2}})^2$$

dans le cas où X et X' sont réels (i.e. $\in C$) et comme les deux membres de cette égalité sont des fonctions holomorphes du couple $(X,\bar{X}')$ dans l'ouvert connexe dense défini par

$$\langle X,\bar{X}'\rangle^2 - r(X)r(\bar{X}') \neq 0$$

cette égalité persiste pour X et X' quelconques $\in \Pi$: comme enfin $\operatorname{Re}(\sigma^{\frac{1}{2}}+\tau^{\frac{1}{2}})>0$, la proposition est prouvée, sous réserve de montrer que ni σ ni τ n'est réel $\leqslant 0$. Notons que cette dernière assertion est invariante, pour toute matrice $\Lambda \in SO_o(1,n)$, par le changement de (X,X') en $(\Lambda X, \Lambda'^{-1}X')$. Après une première transformation de Lorentz qui amène $\operatorname{Re} X$ à être un multiple de $\omega = e_o$, on peut trouver $M \in \{1\} \times SO(n)$ qui amène les vecteurs $\operatorname{Im} X$, $\operatorname{Re} X'$ et $\operatorname{Im} X'$ dans l'espace engendré par e_1,e_2,e_3: autrement dit on peut se ramener au cas $n = 3$, ce que nous supposons désormais. On associe à tout $X \in \Pi$ la matrice

$$A_X = \begin{pmatrix} X_o+X_1 & X_2+iX_3 \\ X_2-iX_3 & X_o-X_1 \end{pmatrix}$$

d'où, se rappelant que la formule $\Sigma X = r(X)^{-1}JX$ définit une symétrie sur Π ,

$$A_X^* = A_{\bar{X}} \ , \ \frac{1}{2}(A_X+A_X^*) = A_x \quad \text{et } A_X^{-1} = A_{\Sigma X} \ .$$

Comme $\mathrm{Tr}\, A_x = 2x_o$ et dét.$A_x = r(x)$, la condition que $X \in \Pi$ est caractérisée par le fait que $\mathrm{Re}(A_X\theta,\theta) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{C}^2$ non nul. Si X' est un autre point de Π , on vérifie que $<X,\bar{X}'> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A_XA_{X'}^*)$ et que dét$(A_XA_{X'}^*) = r(X)r(\bar{X}')$, et par suite σ et τ ne sont autres que les valeurs propres de $A_XA_{\bar{X}}'$. Si la valeur propre σ était réelle $\leqslant 0$ on aurait, pour un certain vecteur non nul $\theta \in \mathbb{C}^2$, $A_XA_{\bar{X}'}\theta = \sigma\,\theta$, d'où $A_{\bar{X}'}\theta = \sigma A_X^{-1}\theta = \sigma A_{\Sigma X}\theta$, soit $(A_{\bar{X}'}-\sigma A_{\Sigma X})\theta = 0 = A_{\bar{X}'-\sigma\Sigma X}\,\theta$: or, si σ est réel $\leqslant 0$, $X'' = \bar{X}'-\sigma\Sigma X$ appartient à Π et ceci est une contradiction puisque $\mathrm{Re}(A_{X''}\,\theta,\theta) > 0$. Ceci termine la preuve de la proposition.

Remarques : 1) une estimation très précise de la fonction $\mathrm{Re}(\rho(X,X')^{\frac{1}{2}})$, cruciale pour la suite, sera l'objet de la section suivante; 2) nous convenons une fois pour toutes que les déterminations des racines carrées de nombres complexes non réels < 0 sont choisies avec une partie réelle > 0 .

THÉORÈME 7.3. Soit $\lambda > 0$ et supposons $n \geqslant 1$. Pour tout $X \in \Pi$, soit ψ_X^λ la fonction introduite dans la définition 3.2 :

$$\psi_X^\lambda(t) = c_\lambda\,(r(x)r(t))^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)}\,e^{-2\pi<Jt,X>}.$$

Pour tout couple (T,T') de points de Π , posons $\rho = \rho(T,T')$ au sens de (7.1) et

$$K(T,T') = \rho^{\frac{1-n}{4}}\int_0^\infty e^{-\pi\rho^{\frac{1}{2}}s}\left(\exp -2\pi\,\frac{<T,\bar{T}'>}{\rho^{\frac{1}{2}}\,s}\right)K_o\left(\frac{2\pi\,(r(T))^{\frac{1}{2}}\,(r(\bar{T}'))^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}\,s}\right)s^{-\frac{n+1}{2}}\,ds.$$

Alors, pour tout couple (X,X') de points de Π , on a l'identité

$$W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(y,\eta) = 2^{n+1}c_\lambda^2(r(x)r(y)^2r(x'))^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)}$$

$$K(r(y)M^{-1}(X+iJ\eta),r(y)M^{-1}(X'+iJ\eta))$$

si $M \in G_0$ <u>est telle que</u> $y = M\omega$.

<u>Remarques</u>. Si l'on fait agir sur T et T' la même matrice $\in \{1\}\times SO(n)$, il est clair que $K(T,T')$ reste inchangé, ce qui montre que le second membre de la dernière identité ne dépend pas du choix de M. La fonction K_0 qui intervient dans la définition de K est la fonction de Bessel habituellement désignée ainsi. Dans le cas où $n = 0$, la formule est un peu plus simple et se trouve dans [48], p.1190.

<u>Preuve du théorème</u> 7.3. On a, avec $Y = (y,\eta)$,

$$W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y) = 2^{n+1}\int_C \psi_X^\lambda(S_y s)\, e^{2i\pi<\eta,s-S_y s>}\, \psi_{\bar{X}'}^\lambda(s)\,dm(s)$$

et comme $r(S_y s) = (r(y))^2(r(s))^{-1}$ on obtient

$$W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y) = 2^{n+1}c_\lambda^2[r(x)(r(y))^2 r(x')]^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)}\, I(X,X';Y)$$

avec

$$I(X,X';Y) = \int_C e^{-2\pi<JS_y s,X+iJ\eta>}e^{-2\pi<Js,\bar{X}'-iJ\eta>}dm(s).$$

Avec $y = M\omega$, on a

$$<JS_y s,X+iJ\eta> = <JMSM^{-1}s,X+iJ\eta> = r(y)<JSM^{-1}s,M^{-1}(X+iJ\eta)>$$

et

$$<Js,\bar{X}'-iJ\eta> = r(y)<JM^{-1}s,M^{-1}(\bar{X}'-iJ\eta)> .$$

En posant $s = Mt$, on obtient donc

$$I(X,\bar{X}';Y) = K(r(y)M^{-1}(X+i\,J\eta),r(y)M^{-1}(X'+i\,J\eta))$$

avec

$$(7.2) \qquad K(T,T') = \int_C e^{-2\pi<St,JT>}e^{-2\pi<t,J\bar{T}'>}dm(t).$$

Il s'agit maintenant de transformer cette intégrale (n+1)-dimensionnelle en l'intégrale simple définie dans le théorème 7.3. La convergence de cette dernière est la conséquence de l'inégalité $Re(\rho^{\frac{1}{2}}) > 0$ et d'inégalités simples relatives à K_0 : il est inutile de discuter en détail ce point ici, car des estimations considérablement plus raffinées seront développées dans la section 9. La fonction K définie dans le théorème 7.3 et celle définie dans (7.2) sont alors toutes deux des fonctions holomorphes de $T \in \Pi$ et $\bar{T}' \in \Pi$: il suffit donc d'établir leur égalité lorsque T et T' sont réels (i.e. $\in C$), ce que nous supposons désormais. Dans ce cas, on a

$$(7.3) \qquad K(T,T') = \int_C e^{-2\pi<St,JT>} e^{-2\pi<t,JT'>} dm(t)$$

et l'on obtient facilement, pour toute matrice $N \in G_o$, la formule d'invariance

$$(7.4) \qquad K(N'T, N^{-1}T') = K(T,T')$$

où l'on désigne par N' la transposée de N : il suffit en effet de poser $t = |N|^{-2}Nt'$ dans l'intégrale (7.3) et d'utiliser encore (2.5). On a donc $K(T,T') = K(\omega,T")$ si l'on choisit $N \in G_o$ tel que $N'T = \omega$ et que l'on pose $T" = N^{-1}T'$. Notons tout de suite que

$$(7.5) \qquad r(T") = |N|^{-2} r(T') = r(T)r(T')$$

et que

$$(7.6) \qquad T"_o = <\omega, N^{-1}T'> = <N'^{-1}\omega, T'> = <T,T'>.$$

D'où, si T et $T' \in C$,

$$(7.7) \qquad K(T,T') = \int_C (\exp -2\pi \frac{t_o}{r(t)}) e^{-2\pi<JT",t>} dm(t)$$

avec T" vérifiant (7.5) et (7.6).

Cette intégrale est invariante par le groupe $\{1\} \times SO(n)$ opérant sur T", ce qui permet de se ramener au cas où $T" = (x_o, x_1, 0, \ldots, 0)$ avec

$$(7.8) \qquad x_o = <T,T'> \text{ et } x_o^2 - x_1^2 = r(T)r(T').$$

Finalement, avec ce choix de x_o et x_1, on a

$$(7.9) \qquad K(T,T') = \int_C (\exp -2\pi \frac{t_o}{r(t)}) e^{-2\pi(x_o t_o - x_1 t_1)} (r(t))^{-\frac{n+1}{2}} dt.$$

Pour évaluer cette intégrale, on écrit $t = (t_o, t_1, t")$: le domaine d'intégration est défini par $t_o > 0$, $-t_o < t_1 < t_o$ et $|t''| \leqslant (t_o^2-t_1^2)^{\frac{1}{2}}$, ce qui conduit à évaluer d'abord, avec $R = |t''|$, l'intégrale

$$(7.10) \qquad I = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^{(t_o^2-t_1^2)^{\frac{1}{2}}} \exp(-2\pi t_o(t_o^2-t_1^2-R^2)^{-1}) (t_o^2-t_1^2-R^2)^{-\frac{n+1}{2}} R^{n-2} dR \, .$$

On pose

$$\theta = [1- \frac{R^2}{t_o^2-t_1^2}]^{-1} -1 \, , \qquad R = (t_o^2-t_1^2)^{\frac{1}{2}} (\frac{\theta}{\theta+1})^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$dR = \frac{1}{2}(t_o^2-t_1^2)^{\frac{1}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}} (\theta+1)^{-3/2} d\theta$$

et

$$(7.11) \qquad I = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} (t_o^2-t_1^2)^{-1} \int_0^{\infty} (\exp- \frac{2\pi t_o}{t_o^2-t_1^2}(\theta+1))\theta^{\frac{n-3}{2}} d\theta$$

$$= (2t_o)^{\frac{1-n}{2}} (t_o^2-t_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \exp- \frac{2\pi t_o}{t_o^2-t_1^2} \, .$$

D'où

$$K(T,T') = \iint_{|t_1|<t_o} (2t_o)^{\frac{1-n}{2}} (t_o^2-t_1^2)^{\frac{n-3}{2}} (\exp- \frac{2\pi t_o}{t_o^2-t_1^2}) e^{-2\pi(x_o t_o - x_1 t_1)} dt_o dt_1 .$$

Posons $\sigma = x_o+x_1$, $\tau = x_o-x_1$, c'est-à-dire

$$(7.12) \qquad \sigma + \tau = 2 < T,T'> \, , \quad \sigma\tau = r(T)r(T') \, .$$

En effectuant le changement de variable défini par

$$t_o-t_1 = \sigma^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-1} \quad , \quad t_o+t_1 = \tau^{-\frac{1}{2}}\beta^{-1} ,$$

on obtient

$$K(T,T') = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha\beta)^{-1}(\sigma^{\frac{1}{2}}\alpha+\tau^{\frac{1}{2}}\beta)^{\frac{1-n}{2}} \exp-\pi(\sigma^{\frac{1}{2}}\alpha+\tau^{\frac{1}{2}}\beta)$$

$$\exp-\pi(\sigma^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1}+\tau^{\frac{1}{2}}\beta^{-1})\,d\alpha\,d\beta .$$

On peut bien entendu considérer si on le veut cette intégrale comme une généralisation à deux variables d'une intégrale classique ([28],p.85) permettant de représenter les fonctions K_ν : lorsque n = 1, on a simplement

$$K(T,T') = 2\,K_o(2\pi\,\sigma^{\frac{1}{2}})K_o(2\pi\,\tau^{\frac{1}{2}}),$$

mais il s'agit ici du cas où l'espace symétrique Π est isométrique au produit de deux demi-plans de Poincaré et toute la situation est dans ce cas réductible. En vue d'estimations ultérieures, il est préférable de réduire encore un peu cette intégrale double. On pose

$$s = \sigma^{\frac{1}{2}}\alpha+\tau^{\frac{1}{2}}\beta \quad , \quad t = \alpha\beta^{-1}$$

d'où

$$\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha\beta} = \frac{ds\,dt}{st} ,$$

$$\sigma^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1}+\tau^{\frac{1}{2}}\beta^{-1} = \frac{\sigma+\tau}{s} + (\sigma\tau)^{\frac{1}{2}}\,\frac{t+t^{-1}}{s}$$

et

$$K(T,T') = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty s^{\frac{1-n}{2}} e^{-\pi s}\exp-\pi\left[\frac{\sigma+\tau}{s} + (\sigma\tau)^{\frac{1}{2}}\,\frac{t+t^{-1}}{s}\right]\frac{ds\,dt}{st} .$$

On note ([28], p.85) que

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\exp-\pi\frac{(\sigma\tau)^{\frac{1}{2}}}{s}(t+t^{-1})\right)\frac{dt}{t} = K_o\left(2\pi\,\frac{(\sigma\tau)^{\frac{1}{2}}}{s}\right),$$

d'où

$$K(T,T') = \int_0^\infty e^{-\pi s}e^{-\pi(\sigma+\tau)s^{-1}}K_o(2\pi(\sigma\tau)^{\frac{1}{2}}s^{-1})\,s^{-\frac{n+1}{2}}\,ds.$$

Il ne reste plus, toujours pour T et T' $\in$ C, qu'à faire le changement de variable $s\mapsto \rho^{\frac{1}{2}}s$ et à rappeler (7.12) pour terminer la preuve du théorème 7.3.

VIII - LE MODULE ET L'ARGUMENT DE LA FONCTION $\rho(X,X')$.

Avertissement : dans cette section, seul l'espace Π est considéré, non l'espace D ; on en profitera pour utiliser également la notation $Y = y+i\eta$ quand le besoin de nombreux points se fera sentir.

LEMME 8.1. *Pour tout* $X \in \Pi$, *le vecteur* $Y = \dfrac{X}{(r((X))^{\frac{1}{2}}}$ *appartient à* Π.

Preuve. Avec les notations de la section 5, soit $A \in \Omega$, non nécessairement normalisé, dont X soit l'image. Rappelons (définition 7.2) que $r(X) \notin -\mathbb{R}^+$. Les conditions

$$|\alpha_o|^2 + |\beta_o|^2 - |\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2 - \ldots - |\beta_n|^2 > 0$$

et

$$\alpha_o^2 + \beta_o^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \ldots - \beta_n^2 = 0$$

interdisent que α_o soit nul, et comme $r(X) = (1+\frac{\alpha_1}{\alpha_o})^{-1}(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_o})$ n'est pas réel $\leqslant 0$, et que $\alpha_o^2 \neq \beta_o^2$, on voit que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_o} \notin]-\infty,1] \cup [1,\infty[\quad .$$

Ceci permet de définir, pour tout $A \in \Omega$, la fonction holomorphe $(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_o^2})^{\frac{1}{2}}$, en lui attribuant la valeur 1 lorsque $\alpha_1 = 0$. Posons $\gamma_o = \alpha_o(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_o^2})^{\frac{1}{2}}$ et

$$\tilde{A} = (\gamma_o, \beta_o, 0, \beta_1, \ldots, \beta_n).$$

On a

$$\gamma_o^2 + \beta_o^2 - \beta_1^2 - \ldots - \beta_n^2 = 0$$

et

$$|\gamma_o|^2 + |\beta_o|^2 - |\beta_1|^2 - \ldots - |\beta_n|^2 = |\alpha_o^2 - \alpha_1^2| + |\beta_o|^2 - |\beta_1|^2 - \ldots - |\beta_n|^2$$

$$\geqslant |\alpha_o|^2 - |\alpha_1|^2 + |\beta_o|^2 - |\beta_1|^2 - \ldots - |\beta_n|^2 > 0.$$

Enfin on notera que la condition $|\alpha_o - i\beta_o| > |\alpha_o + i\beta_o|$ peut s'écrire

$\mathrm{Re}(\alpha_0 i\bar{\beta}_0)>0$ i.e. $\mathrm{Im}(\frac{\beta_0}{\alpha_0})>0$. Pour ce qui concerne γ_0 on a

$$\mathrm{Im}\,\frac{\beta_0}{\gamma_0} = \mathrm{Im}\,[\,(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2})^{-\frac{1}{2}}\frac{\beta_0}{\alpha_0}\,]:$$

lorsque A parcourt l'ouvert Ω on a $|\gamma_0-i\beta_0| \neq |\gamma_0+i\beta_0|$ c'est à dire $\mathrm{Im}\,\frac{\beta_0}{\gamma_0} \neq 0$ et comme Ω est connexe on a en fait $\mathrm{Im}\,\frac{\beta_0}{\gamma_0}>0$, autrement dit $\tilde{A} \in \Omega$. Soit Y l'image de $\tilde{A}$ dans Π. On a, pour tout j,

$$Y_j = \frac{\beta_j}{i\gamma_0} = \frac{\alpha_0+\alpha_1}{\gamma_0}X_j$$

et l'on termine en remarquant que

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\gamma_0} = (1+\frac{\alpha_1}{\alpha_0})\,(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2})^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{2}} = (r(X))^{-\frac{1}{2}}\,.$$

LEMME 8.2. <u>Sous les hypothèses du lemme</u> 8.1, <u>on a</u>

$$r(y) \geqslant \frac{r(x)}{|r(X)|}\,.$$

<u>Preuve</u>. D'après (5.4), on a

$$r(x) = \frac{1}{2}\,|\alpha_0+\alpha_1|^{-2}q(A,\bar{A})$$

et de même

$$r(y) = \frac{1}{2}\,|\gamma_0|^{-2}q(\tilde{A},\bar{\tilde{A}}) = \frac{1}{2}\,|\alpha_0^2-\alpha_1^2|^{-1}q(\tilde{A},\bar{\tilde{A}})$$

$$= \frac{1}{2}\,|\alpha_0^2-\alpha_1^2|^{-1}[\,|\alpha_0^2-\alpha_1^2|+|\beta_0|^2-|\beta_1|^2-\dots-|\beta_n|^2\,]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,|\alpha_0^2-\alpha_1^2|^{-1}q(A,\bar{A})$$

d'où

$$\frac{r(y)}{r(x)} \geqslant \frac{|\alpha_0+\alpha_1|^2}{|\alpha_0^2-\alpha_1^2|} = \left|\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_0-\alpha_1}\right| = \frac{1}{|r(X)|}\,.$$

LEMME 8.3. <u>Soient</u> X <u>et</u> $X' \in \Pi$, $Y = \dfrac{X}{(r(X))^{\frac{1}{2}}}$, $Y' = \dfrac{X'}{(r(X'))^{\frac{1}{2}}}$.

<u>On a</u> $d(Y,Y') \leqslant 2d(X,X')$.

<u>Preuve</u>. Soit θ l'application $X \mapsto Y = \dfrac{X}{(r(X))^{\frac{1}{2}}}$: on se propose d'établir l'inégalité $\|dY\|^2 \leqslant 4\ \|dX\|^2$ en tout point X de Π . On notera que θ commute avec l'action du groupe de Lorentz, ce qui permet (comme dans la preuve de la proposition 7.2 mais c'est plus simple ici) de n'établir cette inégalité qu'en un point "spécial", entendant par là un point tel que $X_2 = \ldots = X_n = 0$; si X est spécial Y l'est aussi. Il est agréable de prendre comme coordonnées $(V,W,X_2,\ldots,X_n)$ avec $V = X_0+X_1$ et $W = X_0-X_1$: on pose aussi $v = \operatorname{Re} v$, $w = \operatorname{Re} W$. Avec $X_{**}= (X_2,\ldots,X_n)$, l'application θ s'écrit dans ces coordonnées

$$(V,W,X_{**}) \mapsto (VW-\sum_2^n X_j^2)^{-\frac{1}{2}}\ (V,W,X_{**}).$$

On a ((2.24) et (2.9))

$$ds^2 = (r(x))^{-2}[2|\langle Jx,dX\rangle|^2-r(x)\ \Sigma\ \{j\}\ |dX_j|^2] ,$$

l'emploi des coordonnées complexes étant recommandé parce que θ est holomorphe. En un point spécial, on a $r(x) = vw$,

$$\langle Jx,dX\rangle = x_0dX_0-x_1dX_1 = \frac{1}{2}(wdV+vdW)$$

et

$$(r(x))^{-2}\ [\ 2|\langle Jx,dX\rangle|^2-r(x)\,(|dX_0|^2-|dX_1|^2)\ ]$$

$$= \frac{1}{2}|v^{-1}dV+w^{-1}dW|^2-\frac{1}{4}\ \frac{|dV+dW|^2}{vw} + \frac{1}{4}\ \frac{|dV-dW|^2}{vw}$$

$$= \frac{1}{2}|\ v^{-1}dV+w^{-1}dW\ |^2-\frac{1}{2}\ [\frac{dV}{v}\ \frac{d\bar{W}}{w} + \frac{d\bar{V}}{v}\ \frac{dW}{w}\ ]$$

$$= \frac{1}{2}(v^{-2}|\ dV\ |^2+w^{-2}|\ dW\ |^2).$$

Donc, en un point spécial,

$$\|dX\|^2 = \frac{1}{2}\ [\ v^{-2}\,|dV|^2+\ w^{-2}\ |dW|^2]+(vw)^{-1}[\,|dX_2|^2+\ldots+|dX_n|^2].$$

Si l'on désigne, faute de mieux, par $(\tilde{V},\tilde{W},Y_{**})$ les nouvelles coordonnées de $Y = \theta(X)$, on a, d'après le lemme 8.2,

$$(8.1) \qquad \tilde{v}\,\tilde{w} = r(y) \geqslant \frac{r(x)}{|r(X)|} = \frac{vw}{|VW|} .$$

En un point spécial, on a

$$d\tilde{V} = \frac{dV}{(VW)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\,\frac{V}{(VW)^{3/2}}\, d(VW-\sum_2^n x_j^2) = \frac{1}{2}(\frac{V}{W})^{\frac{1}{2}}\,(\frac{dV}{V} - \frac{dW}{W}),$$

$$d\tilde{W} = \frac{1}{2}(\frac{V}{W})^{-\frac{1}{2}}(-\frac{dV}{V} + \frac{dW}{W})$$

et, pour $j \geqslant 2$,

$$dY_j = (VW)^{-\frac{1}{2}} dX_j$$

d'où

$$\|dY\|^2 = \frac{1}{8}[\,\tilde{v}^{-2}\,\frac{|V|}{|W|} + \tilde{w}^{-2}\,\frac{|W|}{|V|}\,]\,|\frac{dV}{V} - \frac{dW}{W}|^2 + (\tilde{v}\tilde{w})^{-1}\,|VW|^{-1}\sum_2^n |dX_j|^2 .$$

Le deuxième terme est $\leqslant (vw)^{-1}\sum_2^n |dX_j|^2$. Il suffit donc d'établir l'inégalité (entre formes hermitiennes)

$$[\tilde{v}^{-2}\,\frac{|V|}{|W|} + \tilde{w}^{-2}\,\frac{|W|}{|V|}]\,|\frac{dV}{V} - \frac{dW}{W}|^2 \leqslant 16[v^{-2}\,|dV|^2 + w^{-2}\,|dW|^2] .$$

On a

$$\tilde{v}^2 = (\mathrm{Re}\,\tilde{V})^2 = [\mathrm{Re}(\frac{V}{W})^{\frac{1}{2}}]^2 = \frac{1}{2}[\frac{|V|}{|W|} + \mathrm{Re}\,\frac{V}{W}] = \frac{|V|\,|W| + \mathrm{Re}\,V\bar{W}}{2\,|W|^2}$$

et de même

$$\tilde{w}^2 = \frac{|V|\,|W| + \mathrm{Re}\,W\bar{V}}{2|V|^2} .$$

Posons $V = a\,e^{i\theta}$, $W = b\,e^{i\varphi}$ avec $a > 0$, $b > 0$ et θ et φ compris strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On a $v^2 = a^2\cos^2\theta$ et (puisque $|\theta-\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}+|\theta|$) :

$$\tilde{v}^2 = \frac{a}{2b}\,(1+\cos(\theta-\varphi)) \geqslant \frac{a}{2b}(1-|\sin\theta|) \geqslant \frac{a}{4b}\cos^2\theta = \frac{|v|^2}{4|V|\,|W|}$$

D'où

$$(8.2) \qquad \frac{\tilde{v}^{-2}}{|V|\,|W|} \leqslant 4v^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{w}^{-2}}{|V|\,|W|} \leqslant 4w^{-2} ,$$

la deuxième de ces inégalités se prouvant de façon analogue. Par ailleurs

$$\tilde{v}^2 \geqslant \frac{a}{2b}(1-|\sin\varphi|) \geqslant \frac{a}{4b}\cos^2\varphi = \frac{|V|}{4|W|^3}\, w^2$$

d'où

$$\frac{\tilde{v}^{-2}|V|}{|W|^3} \leqslant 4w^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{w}^{-2}|W|}{|V|^3} \leqslant 4v^{-2} . \tag{8.3}$$

Il en résulte que

$$\left[\tilde{v}^{-2}\frac{|V|}{|W|} + \tilde{w}^{-2}\frac{|W|}{|V|}\right]\left|\frac{dV}{V} - \frac{dW}{W}\right|^2 \leqslant 2\left[\tilde{v}^{-2}\frac{|V|}{|W|} + \tilde{w}^{-2}\frac{|W|}{|V|}\right]\left[\frac{|dV|^2}{|V|^2} + \frac{|dW|^2}{|W|^2}\right]$$

$$\leqslant 16\,[\,v^{-2}|dV|^2 + w^{-2}|dW|^2\,] ,$$

ce qui termine la preuve du lemme 8.3.

COROLLAIRE. <u>Sous les hypothèses du lemme</u> 8.3, <u>on a</u>

$$\delta_+(Y,Y') \leqslant 2^6(\delta_+(X,X'))^{2\sqrt{2}} .$$

<u>Preuve</u>. D'après le lemme 5.1,

$$\delta_+(Y,Y') \leqslant \exp d(Y,Y') \leqslant \exp 2d(X,X') \leqslant (4\ \delta_+(X,X'))^{2\sqrt{2}}.$$

LEMME 8.4. <u>Si</u> Re $r(X) \geqslant 0$, <u>alors</u>

$$|x|^2 \leqslant 2r(x)\,\delta_+(X,JX) .$$

<u>Preuve</u>. Avec $\xi_* = (0,\xi_1,\dots,\xi_n)$, on a

$$\delta_+(X,JX) = \frac{|r(X+J\bar{X})|}{4r(x)} = \frac{|r(2x_o\omega+2i\xi_*)|}{4r(x)} = \frac{x_o^2+|\xi_*|^2}{r(x)}$$

et comme $r(\xi) \leqslant r(x)$, on a

$$|x|^2 = x_o^2 + |x_*|^2 + r(\xi) + 2|\xi_*|^2 \leqslant 2(x_o^2 + |\xi_*|^2) = 2r(x)\,\delta_+(X,JX).$$

PROPOSITION 8.5. <u>Soit</u> $\rho(X,X')$ <u>la fonction définie en</u> (7.1). <u>Sous les hypothèses du lemme</u> 8.3 <u>on a</u>

$$|\rho(X,X')| \geqslant 2^{-5}|x|\,|x'|\,(\delta_+(Y,Y'))^{-1} \geqslant 2^{-11}|x|\,|x'|\,(\delta_+(X,X'))^{-2\sqrt{2}} .$$

Preuve. Puisque $r(Y) = r(Y') = 1$, on a

$$\rho(Y,Y') = \langle Y,\bar{Y}'\rangle + 1 = \frac{1}{2}\, r(Y+J\bar{Y}')$$

d'où, en revenant à la définition (2.27) de la fonction δ_+,

$$|\rho(Y,Y')| \geqslant 2\ \delta_+(Y,JY')(r(y)r(y'))^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le lemme 5.2, on a

$$\delta_+(Y,JY')\ \delta_+(Y,Y') \geqslant 2^{-5}\ \delta_+(Y',JY')$$

et en utilisant le lemme 8.4 on en déduit

$$|\rho(Y,Y')|\quad \delta_+(Y,Y') \geqslant 2^{-4}\delta_+(Y',JY')(r(y)r(y'))^{\frac{1}{2}} \geqslant 2^{-5}|Y'|^2\left(\frac{r(y')}{r(y)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

En échangeant les rôles de Y et Y' et faisant la moyenne géométrique on obtient

$$|\rho(Y,Y')|\ \delta_+(Y,Y') \geqslant 2^{-5}|Y|\ |Y'|.$$

Compte tenu des égalités

$$|\rho(X,X')| = |r(X)r(\bar{X}')|^{\frac{1}{2}}\quad |\rho(Y,Y')|$$

et

$$|X|\ |X'| = |r(X)r(\bar{X}')|^{\frac{1}{2}}\quad |Y|\ |Y'|$$

la proposition 8.5 résulte de là.

L'estimation de ρ est loin d'être terminée car on a besoin de minorer $\mathrm{Re}(\rho^{\frac{1}{2}})$: il s'agit donc de montrer également que l'argument de ρ ne peut pas trop s'approcher de $\pm\pi$. On va d'abord établir ce fait pour ce qui concerne $\rho(Y,Y')$.

LEMME 8.6. Soient Y et $Y' \in \Pi$ vérifiant $r(Y) = r(Y') = 1$. On appelle $\mathrm{Arg}\ \rho(Y,Y')$ l'argument compris entre $-\pi$ et π de $\rho(Y,Y')$. On a alors

$$|\mathrm{Arg}\ \rho(Y,Y')| \leqslant \pi - 2^{-3}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2}.$$

Preuve. Rappelons que $\delta_+(Y,Y') \geqslant 1$: on peut donc supposer $\mathrm{Re}\ \rho(Y,Y') < 0$ sinon $|\mathrm{Arg}\ \rho(Y,Y')| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Avec $Y = y+i\eta$, $Y' = y'+i\eta'$, on a

$$2\rho(Y,Y') = r(Y+J\bar{Y}') = r(y+Jy'+i(\eta-J\eta'))$$

d'où

(8.4) $$\operatorname{Re} \rho(Y,Y') = \frac{1}{2}[r(y+Jy')-r(\eta-J\eta')],$$

$$\operatorname{Im} \rho(Y,Y') = \langle y+Jy', J\eta-\eta'\rangle.$$

La condition $\operatorname{Im} r(Y) = 0 = 2\langle y,J\eta\rangle$ montre que $r(\eta) \leqslant 0$, et il en est de même de $r(\eta')$. Comme

$$r(\eta-J\eta') = r(\eta)+r(\eta')-2\langle\eta,\eta'\rangle \geqslant 0$$

(puisque $\operatorname{Re} \rho(Y,Y') \leqslant 0$), on a $\langle\eta,\eta'\rangle \leqslant 0$ et par suite

(8.5) $$|\eta-\eta'|^2 \geqslant |\eta|^2+|\eta'|^2 \geqslant 2|\langle\eta,\eta'\rangle|.$$

Par ailleurs

$$-\operatorname{Re} \rho(Y,Y') \leqslant \frac{1}{2} r(\eta-J\eta')$$

et

$$|\operatorname{Im} \rho(Y,Y')| \geqslant (r(y+Jy'))^{\frac{1}{2}}(r(J\eta-\eta'))^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant (2\langle y,y'\rangle)^{\frac{1}{2}}(r(J\eta-\eta'))^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\frac{-\operatorname{Re} \rho(Y,Y')}{|\operatorname{Im} \rho(Y,Y')|} \leqslant 2^{-3/2}\left(\frac{r(\eta-J\eta')}{\langle y,y'\rangle}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{-\langle\eta,\eta'\rangle}{\langle y,y'\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2^{-3/2}\frac{|\eta-\eta'|}{\langle y,y'\rangle^{\frac{1}{2}}} \leqslant 2^{5/2}(\delta_+(Y,Y'))^{3/2}$$

d'après l'inégalité (5.17) et le lemme 5.6. Avec $\rho = |\rho|e^{i\alpha}$, $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$, cela signifie $(\operatorname{tg}\alpha)^{-2} \leqslant 2^5(\delta_+(Y,Y'))^3$ d'où

$$|\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \leqslant \pi-\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(2^{-5/2}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2}) \leqslant \pi-\frac{1}{8}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2}.$$

LEMME 8.7. <u>Soit</u> $Y \in \Pi$ <u>vérifiant</u> $r(Y) = 1$ <u>et soit</u> $r(y) = \cos^2\beta$ <u>avec</u> $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$. <u>Soit</u> $X = e^{i\varphi}Y$ <u>avec</u> $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$. <u>Alors</u> $X \in \Pi$ <u>si et seulement si</u> $|\varphi| < \frac{\pi}{2}-\beta$.

<u>Preuve</u>. La condition $\operatorname{Im} r(Y) = 0 = 2\langle y,J\eta\rangle$ montre que η est du genre espace s'il n'est pas nul, et comme $r(y)-r(\eta) = \operatorname{Re} r(Y) = 1$ on a $r(y) \leqslant 1$, ce qui permet d'écrire $r(y) = \cos^2\beta$; noter que $r(\eta) = -\sin^2\beta$. Avec $X = e^{i\varphi}(y+i\eta)$, on obtient $x = y\cos\varphi - \eta\sin\varphi$, d'où

$$r(x) = r(y)\cos^2\varphi+r(\eta)\sin^2\varphi = \cos^2\beta\cos^2\varphi-\sin^2\beta\sin^2\varphi$$

$$= \cos(\beta+\varphi)\cos(\beta-\varphi).$$

Si $X \in \Pi$, cela doit être > 0 d'où $\beta \pm \varphi < \frac{\pi}{2}$, i.e. $|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \beta$: la réciproque marche aussi puisque x_0, fonction continue de φ , non nulle lorsque $r(x) > 0$, est alors > 0.

LEMME 8.8. <u>Soient</u> Y <u>et</u> $Y' \in \Pi$ <u>tels que</u> $r(Y)=r(Y')=1, r(y)=\cos^2\beta, r(y') = \cos^2\beta'$, $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta' < \frac{\pi}{2}$.

<u>Alors</u>

$$|\mathrm{Arg}\ \rho(Y,Y')| \leqslant \beta + \beta' .$$

<u>Preuve</u>. Posons $X = e^{i\varphi}Y$ et $X' = e^{i\varphi'}Y'$ avec $|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \beta$ et $|\varphi'| < \frac{\pi}{2} - \beta'$ arbitraires. Alors

$$\mathrm{Arg}\ \rho(X,X') = \mathrm{Arg}(e^{i(\varphi-\varphi')}\rho(Y,Y')) = \varphi - \varphi' + \mathrm{Arg}\ \rho(Y,Y')$$

est, d'après la proposition et définition 7.2, strictement inférieur à π : en faisant tendre φ et φ' vers $\frac{\pi}{2} - \beta$ et $\beta' - \frac{\pi}{2}$ respectivement, on voit que $\mathrm{Arg}\ \rho(Y,Y') \leqslant \beta + \beta'$; l'autre moitié de l'inégalité s'obtient de même.

LEMME 8.9. <u>Soient</u> X et $X' \in \Pi$ <u>avec</u>

$$X = e^{i\varphi}|r(X)|^{\frac{1}{2}}Y,\ r(Y)=1,\ r(y) = \cos^2\beta\ ,\ 0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2} .$$

<u>On suppose que</u> $r(X')$ <u>est réel</u> (>0). <u>Alors</u>

$$\left(\frac{\pi}{2} - \beta - |\varphi|\right)^{-1} \leqslant 2^5 \varphi^{-2} (\delta_+(X,X'))^2 .$$

<u>Preuve</u>. D'après la preuve du lemme 8.7, on a

$$\begin{aligned} r(x) &= |r(X)|\ \cos(\beta+\varphi)\cos(\beta-\varphi) \\ &\leqslant |r(X)|\cos(\beta+|\varphi|) \leqslant |r(X)|\ \left(\frac{\pi}{2} - \beta - |\varphi|\right) \end{aligned}$$

et il s'agit donc de prouver l'inégalité

$$\frac{|r(X)|}{r(x)} \leqslant 2^7\ \varphi^{-2}(\delta_+(X,X'))^2 . \tag{8.6}$$

On a également $\xi = |(r(X)|^{\frac{1}{2}}(y \sin\varphi + \eta\cos\varphi)$ et

$$\begin{aligned} r(\xi) &= |r(X)|\ \ (r(y)\sin^2\varphi + r(\eta)\cos^2\varphi) \\ &= |r(X)|\ \ (\cos^2\beta\ \sin^2\varphi - \sin^2\beta\cos^2\varphi) \\ &= |r(X)|\ \ \sin(\varphi+\beta)\sin(\varphi-\beta) . \end{aligned} \tag{8.7}$$

Si l'on suppose $|\varphi| \geqslant \frac{3\pi}{8}$ alors $\beta \leqslant \frac{\pi}{8}$, $|\varphi| - \beta \geqslant \frac{\pi}{4}$ et $r(\xi) \geqslant \frac{1}{2}|r(X)|$. D'après le lemme 5.4 on a alors (vu que $\langle x', J\xi'\rangle = 0$)

$$2\,\delta_+(X,X') \geqslant \frac{|\langle x', J\xi\rangle|}{(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}} \geqslant \left(\frac{r(\xi)}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{|r(X)|}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui prouve l'inégalité (8.6).

On suppose désormais $|\varphi| < \frac{3\pi}{8}$ et, pour fixer les idées, $\varphi > 0$ (on s'y ramène par conjugaison complexe). On a

$$\begin{aligned} 2\langle x, J\xi\rangle &= 2|r(X)|\langle y\cos\varphi - \eta\sin\varphi, J(y\sin\varphi + \eta\cos\varphi)\rangle \\ &= 2|r(X)|\ (r(y) - r(\eta))\sin\varphi\cos\varphi = |r(X)|\ \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Puisque $\langle x', J\xi'\rangle = 0$,

$$2\,\delta_+(X,X') \geqslant \max\left(\frac{\langle x', Jx\rangle}{(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}, \frac{|\langle x', J\xi\rangle|}{(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{8.8}$$

toujours d'après le lemme 5.4. On évalue, en notant que $|r(\xi)| \leqslant |r(X)|$ d'après (8.7),

$$\begin{aligned} r(x + \tfrac{1}{2}\xi\sin 2\varphi) &= r(x) + \langle x, J\xi\rangle\sin 2\varphi + \tfrac{1}{4}r(\xi)\sin^2 2\varphi \\ &\geqslant \tfrac{1}{4}|r(X)|\sin^2 2\varphi \end{aligned}$$

ce qui implique en particulier que le vecteur $x + \frac{1}{2}\xi\sin 2\varphi$ ou son opposé est du genre temps. D'où ((8.8) et encore (2.2))

$$3\,\delta_+(X,X') \geqslant \frac{|\langle x', J(x + \frac{1}{2}\xi\sin 2\varphi)\rangle|}{(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{|r(X)|}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\left(\frac{|r(X)|}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 6(\sin 2\varphi)^{-1}\delta_+(X,X') \leqslant 2^{3/2}\varphi^{-1}\delta_+(X,X'),$$

ce qui prouve le lemme 8.9. Bien entendu, les puissances de 2 sont sans importance.

PROPOSITION 8.10. *Soient* X *et* $X' \in \Pi$. *On a*

$$|\operatorname{Arg}\rho(X,X')| \leqslant \pi - 2^{-53}(\delta_+(X,X'))^{-10\sqrt{2}-2}.$$

Preuve. Posons

$$X = e^{i\varphi}|r(X)|^{\frac{1}{2}}\, Y, \qquad X' = e^{i\varphi'}|r(X')|^{\frac{1}{2}}\, Y'$$

avec $r(Y) = r(Y') = 1$, $r(y) = \cos^2\beta, r(y') = \cos^2\beta'$, $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta' < \frac{\pi}{2}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \beta$ et $|\varphi'| < \frac{\pi}{2} - \beta'$.
D'après la preuve du lemme 8.8 on a

$$\operatorname{Arg} \rho(X,X') = \varphi - \varphi' + \operatorname{Arg} \rho(Y,Y').$$

D'après le lemme 8.6 on a

$$|\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \leqslant \pi - 2^{-3}(\delta_+(Y,Y')^{-3/2},$$

autrement dit

$$(8.9) \quad \pi - |\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| = (\tfrac{\pi}{2}-\beta) + (\tfrac{\pi}{2}-\beta') + (\beta+\beta'-|\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')|)$$
$$\geqslant 2^{-3}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2}.$$

Supposons pour commencer

$$(8.10) \qquad \beta + \beta' - |\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \geqslant 2^{-4}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2}.$$

Dans ce cas on écrit

$$\begin{aligned} \pi - |\operatorname{Arg} \rho(X,X')| &\geqslant \pi - |\varphi| - |\varphi'| - |\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \\ &= (\tfrac{\pi}{2} - |\varphi|) + (\tfrac{\pi}{2} - |\varphi'|) - |\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \\ &\geqslant \beta + \beta' - |\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \geqslant 2^{-4}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2} \end{aligned}$$

et, d'après le corollaire du lemme 8.3, on a

$$2^{-4}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2} \geqslant 2^{-13}(\delta_+(X,X'))^{-3\sqrt{2}},$$

ce qui démontre la proposition.

Dans le cas où l'inégalité (8.10) est en défaut, il résulte de (8.9) que l'un des deux nombres $\frac{\pi}{2} - \beta$ et $\frac{\pi}{2} - \beta'$, disons le premier, est $\geqslant 2^{-5}(\delta_+(Y,Y'))^{-3/2}$. Rappelons ((5.13) et lemme 5.3) que

$$\frac{r(y)}{r(y')} \leqslant 2^4(\delta_+(y,y'))^2 \leqslant 2^4(\delta_+(Y,Y'))^2$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\cos\beta \leqslant 2(r(y))^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^3(r(y'))^{\frac{1}{2}}\ \delta_+(Y,Y') \leqslant 2^3\ \delta_+(Y,Y')(\frac{\pi}{2} - \beta').$$

Par suite

$$(8.11) \qquad \min(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \beta') \geqslant 2^{-8}(\delta_+(Y,Y'))^{-5/2}.$$

Si φ et φ' sont de même signe, on a

$$|\varphi - \varphi'| \leqslant \max(|\varphi|, |\varphi'|) \leqslant \max(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \beta')$$

d'où

$$\begin{aligned} |\operatorname{Arg} \rho(X,X')| &\leqslant |\varphi - \varphi'| + |\operatorname{Arg} \rho(Y,Y')| \\ &\leqslant \max(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \beta') + \beta + \beta' \\ &= \pi - \min(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \beta') \leqslant \pi - 2^{-8}(\delta_+(Y,Y'))^{-5/2} \\ &\leqslant \pi - 2^{-23}(\delta_+(X,X'))^{-5\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

et la proposition est encore démontrée.

Il reste enfin le cas où (8.11) est toujours vérifiée et où φ et φ' sont de signes opposés, disons $\varphi \geqslant 0$. On a

$$(8.12) \quad \pi - \operatorname{Arg} \rho(X,X') = (\frac{\pi}{2} - \varphi - \beta) + (\frac{\pi}{2} + \varphi' - \beta') + (\beta + \beta' - \operatorname{Arg} \rho(Y,Y')) \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi - \beta.$$

D'après le lemme 5.1 l'ensemble Δ des $X'' \in \Pi$ tels que $\delta_+(X,X'') \leqslant \delta_+(X,X')$ est connexe : comme $\operatorname{Arg}(r(X''))^{\frac{1}{2}}$ est une fonction continue de X'' sur cet ensemble, prenant des valeurs de signes opposés en X et en X', on peut trouver $X'' \in \Delta$ tel que $(r(X''))^{\frac{1}{2}}$ soit réel (>0). D'après le lemme 8.9, on a alors

$$(8.13) \qquad \frac{\pi}{2} - \varphi - \beta \geqslant 2^{-5}\varphi^2(\delta_+(X,X''))^{-2} \geqslant 2^{-5}\varphi^2(\delta_+(X,X'))^{-2}.$$

Si $\varphi \leqslant 2^{-9}(\delta_+(Y,Y'))^{-5/2}$, on a, d'après (8.11),

$$\frac{\pi}{2}-\beta-\varphi \geqslant 2^{-9}(\delta_+(Y,Y'))^{-5/2} \geqslant 2^{-24}(\delta_+(X,X'))^{-5\sqrt{2}}.$$

Enfin, si $\varphi \geqslant 2^{-9}(\delta_+(Y,Y'))^{-5/2}$, on a, d'après (8.13),

$$\frac{\pi}{2}-\varphi-\beta \geqslant 2^{-23}(\delta_+(Y,Y'))^{-5}(\delta_+(X,X'))^{-2} \geqslant 2^{-53}(\delta_+(X,X'))^{-10\sqrt{2}-2}.$$

L'autre moitié de l'inégalité affirmée par la proposition 8.10 résulte de la première en échangeant X et X'.

THÉORÈME 8.11. <u>Quels que soient</u> X <u>et</u> $X' \in \Pi$, <u>on a</u>

$$\mathrm{Re}[(\rho(X,X'))^{\frac{1}{2}}] \geqslant 2^{-61}|X|^{\frac{1}{2}}\,|X'|^{\frac{1}{2}}\,(\delta_+(X,X'))^{-11\sqrt{2}-2}.$$

<u>Preuve</u>. Avec $\rho = |\rho|e^{i\alpha}$, on a

$$\mathrm{Re}\,\rho^{\frac{1}{2}} = |\rho|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{1}{2}\,|\rho|^{\frac{1}{2}}\,\frac{\pi-|\alpha|}{2}.$$

D'après la proposition 8.10, on a $\pi-|\alpha| \geqslant 2^{-53}\,\delta_+^{-10\sqrt{2}-2}$ et d'après la proposition 8.5, on a $|\rho| \geqslant 2^{-11}|X|\,|X'|\,\delta_+^{-2\sqrt{2}}$, ce qui permet de conclure.

IX - L'ESTIMATION FONDAMENTALE.

L'objet de cette section est d'évaluer $(\mathrm{Op}(f)\psi^\lambda_X, \psi^\lambda_{X'})$ lorsque f est un symbole de poids m. Tout le calcul des opérateurs résultera de cette estimation et de sa réciproque, de la même façon que l'on peut déduire toutes les propriétés de base du calcul de Weyl du théorème 1.1.

Si f est sommable, on a d'après les définitions 3.6 et 7.1 les identités ($X \in \Pi$, $X' \in \Pi$):

$$(9.1)\quad (\mathrm{Op}(f)\psi^\lambda_X, \psi^\lambda_{X'}) = 2^{n+1}\int_D f(Y)(\sigma_Y\psi^\lambda_X, \psi^\lambda_{X'})\,dY = \int f(Y)\,W(\psi^\lambda_X, \psi^\lambda_{X'})(Y)\,dY.$$

Pour estimer la fonction de Wigner, il faut pour commencer majorer la fonction K(T,T') introduite dans le théorème 7.3. Notons que

$$(9.2)\qquad \frac{\langle T,\bar{T}'\rangle}{\rho^{\frac{1}{2}}} + \frac{(r(T))^{\frac{1}{2}}(r(\bar{T}'))^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}}} = \rho^{\frac{1}{2}}$$

et que

$$\frac{(\rho(T,T'))^{\frac{1}{2}}}{r(T)^{\frac{1}{2}} r(\bar{T}')^{\frac{1}{2}}} = \left(\rho\left(\frac{T}{r(T)}, \frac{T'}{r(T')}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

a aussi une partie réelle > 0 , puisque la transformation $T \mapsto \frac{T}{r(T)} = J\Sigma T$ (Σ étant la symétrie de Π autour de ω) opère dans Π. En désignant par α et β les deux termes du membre de gauche de (9.2), l'étude de $K(T,T')$ amène aux considérations suivantes.

LEMME 9.1. Soit, pour α et β complexes vérifiant $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\gamma = \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0$,

$$g(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^{\frac{1-n}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi(\alpha+\beta)s}\, e^{-2\pi\alpha s^{-1}} K_0(2\pi\beta s^{-1})\, s^{-\frac{n+1}{2}}\, ds.$$

On a, pour une certaine constante $C > 0$,

$$|g(\alpha,\beta)| \leqslant C\gamma^{1-n}\left[1+ |\log|\beta|| + |\log\gamma|\right] e^{-\frac{\pi}{2}\gamma} \qquad \text{si } n > 1$$

et

$$|g(\alpha,\beta)| \leqslant C\, e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\left[1+|\log|\beta||\,(1+|\log\gamma|)+(\log\gamma)^2\right] \qquad \text{si } n = 1.$$

Preuve. Compte tenu de l'inégalité

$$|K_0(z)| \leqslant C\left(1+\left|\log\frac{z}{2\pi}\right|\right) e^{-\operatorname{Re} z}$$

valable pour une certaine constante $C > 0$ ([28] ,p. 139 et p. 69), on a

$$(9.3) \qquad |g(\alpha,\beta)| \leqslant C\,\gamma^{\frac{1-n}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi\gamma s} e^{-2\pi\gamma s^{-1}} (1+|\log|\beta||+|\log s|)\, s^{-\frac{n+1}{2}}\, ds.$$

Evaluons l'intégrale

$$(9.4) \qquad I = \int_0^\infty e^{-\pi\gamma(s+2s^{-1})} |\log s|\, s^{-\frac{n+1}{2}}\, ds$$

$$\leqslant \int_1^\infty e^{-\pi\gamma s}(\log s)\, s^{-\frac{n+1}{2}}\, ds + \int_1^\infty e^{-2\pi\gamma s}(\log s)\, s^{\frac{n-3}{2}}\, ds.$$

L'intégrale analogue sans le facteur $|\log s|$ n'est autre que $2^{\frac{1}{4}(5-n)} K_{\frac{n-1}{2}}(2^{3/2}\pi\gamma)$ et se majore sans difficulté (mêmes références que plus haut). D'après des calculs sur la fonction gamma incomplète ([28],p. 337), on a, si $a > 0$,

$$\int_1^{\infty} e^{-xs}s^{a-1}ds = x^{-a}\Gamma(a,x) = x^{-a}\Gamma(a) + \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{x^k}{a+k}$$

et

$$\int_1^{\infty} e^{-xs}s^{a-1}(\log s)ds = \frac{d}{da}(x^{-a}\Gamma(a,x)).$$

Cela fournit, quand $x \to 0$, l'équivalent $-\Gamma(a)x^{-a}\log x$ pour la deuxième intégrale. Par ailleurs ([28], p. 342),

$$\int_1^{\infty} e^{-xs}\frac{ds}{s} = E_1(x) = -\text{cte}-\log x+\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{x^k}{k},$$

$$\int_1^{\infty} e^{-xs}(\log s)ds = x^{-1}E_1(x)$$

et, en intégrant par rapport à x,

$$\int_1^{\infty} e^{-xs}(\log s)\frac{ds}{s} \sim \frac{1}{2}(\log x)^2 , \quad x \to 0.$$

A l'aide de (9.3) et (9.4), ces équivalents démontrent le lemme dans le cas où γ est proche de 0. D'un autre côté il est immédiat que si $\gamma \geqslant 1$ on a

$$|g(\alpha,\beta)| \leqslant C\,\gamma^{1-n}\,e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\,(1+|\log|\beta||).$$

LEMME 9.2. <u>On a, avec</u> $T = r(y)M^{-1}(X+iJ\eta)$ <u>et</u> $\tau : \Pi \to D$ <u>défini en</u> (2.22),

$$\delta_+(X,\tau^{-1}Y) \leqslant 4(1+|T|^2)(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}}$$

<u>quels que soient</u> $Y = (y,\eta) \in D, X = x+i\xi \in \Pi$ <u>et</u> $M \in G_o$ <u>telle que</u> $y = M\omega$.

<u>Preuve</u>. On a $\tau^{-1}Y = \frac{y}{r(y)} - iJ\eta$ et

$$\delta_+(X,\tau^{-1}Y) = \frac{1}{4}\left(\frac{r(y)}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left|r(x+\frac{y}{r(y)}+i(\xi+J\eta))\right|$$

s'écrit $|a_1+\ldots+a_6|$ avec

$$a_1 = \frac{1}{4}(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\,\frac{<x,Jy>}{(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}}}, \quad a_3 = \frac{1}{4}\,(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_4 = \frac{i}{2}\left(\frac{r(y)}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}} < x, J\xi+\eta>, \quad a_5 = \frac{i}{2}(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}} < y, J\xi+\eta>$$

et

$$a_6 = -\frac{1}{4}\left(\frac{r(y)}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\; r(\xi+J\eta).$$

Par ailleurs, posons $y = M\omega$ et $x = N\omega$ avec $M,N \in G_o$. Alors

$$r(y)(M^{-1}x)_o = r(y) < M^{-1}x, J\omega> = <x,Jy>$$

d'où

(9.5) $\quad |r(y)M^{-1}x|^2 = 2 <x,Jy>^2 - r(x)r(y) = |r(x)N^{-1}y|^2$

et

$$|r(y)M^{-1}(\xi+J\eta)|^2 \geq \max[(r(y)M^{-1}(\xi+J\eta))_o^2, (r(y))^2 |r(M^{-1}(\xi+J\eta))|]$$
$$= \max[<y,J\xi+\eta>^2,\; r(y)\,|r(\xi+J\eta)|].$$

Comme

$$|T|^2 = |r(y)M^{-1}x|^2 + |r(y)M^{-1}(\xi+J\eta)|^2,$$

on en déduit (encore (2.2))

$$|a_1| \leq \frac{1}{4}\,\frac{<x,Jy>^2}{(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{4}\;|T|^2 (r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}},$$

$$|a_2| \leq \frac{1}{2}\;|T|\,(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}},$$

$$|a_3| = \frac{1}{4}\;(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(pour mémoire)},$$

$$|a_5| = \frac{1}{2}(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}}\; r(y)\;|(M^{-1}(\xi+J\eta))_o| \leq \frac{1}{2}\;|T|\,(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$|a_6| \leq \frac{1}{4}\;|T|^2 (r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}}.$$

Il reste à évaluer $|a_4| = \frac{1}{2}\left(\frac{r(y)}{r(x)}\right)^{\frac{1}{2}} |<x,J\xi+\eta>|$: la norme de la matrice $N^{-1}M$ est, d'après (6.4), au plus égale à $2^{\frac{1}{2}}|N^{-1}M\,\omega| = 2^{\frac{1}{2}}|N^{-1}y|$

$\leqslant 2(N^{-1}y)_o = 2 < N^{-1}y, J\omega > = 2 \frac{<y,Jx>}{r(x)}$. Par suite

$$\frac{|<x,J\xi+\eta>|}{r(x)} = |(N^{-1}(\xi+J\eta))_o| \leqslant |N^{-1}(\xi+J\eta)|$$

$$\leqslant 2 \frac{<y,Jx>}{r(x)} |M^{-1}(\xi+J\eta)| \leqslant 2^{3/2} \frac{<y,Jx>}{r(x)} |(M^{-1}(\xi+J\eta))_o|$$

$$= 2^{3/2} \frac{<y,Jx>}{r(x)r(y)} |<y,J\xi+\eta>| \leqslant 2^{7/2}|a_2|\,|a_5|$$

$$\leqslant 2^{3/2}(r(x)r(y))^{-1}|T|^2$$

d'où

$$|a_4| \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}}|T|^2.$$

LEMME 9.3. Soit m une fonction-poids (cf. déf. 6.1) vérifiant

$$\tilde{m}(X) \leqslant C_1\, \tilde{m}(X')\,(\delta_+(X,X'))^{N_1}$$

pour tout couple (X,X') de points de Π . Soit f une fonction continue sur D vérifiant $|f(Y)| \leqslant C_2 m(Y)$ pour tout $Y \in D$. Soit $\lambda > N_1$. Si $n > 1$, on peut trouver une constante C ne dépendant que de n, N_1 et λ telle que, quels que soient X et $X' \in \Pi$, on ait

$$\left|\int_D f(Y)W(\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})(Y)\,dY\right| \leqslant CC_1C_2\,\tilde{m}(X)\,(\delta_+(X,X'))^a(1+\log \delta_+(X,X'))$$

avec

$$a = \frac{1}{2}(\lambda+n+1)+(2n+2+\lambda+N_1)(11\sqrt{2}+{}^{13}/_4).$$

Si n = 1, la même inégalité est valable à condition d'y remplacer $\log \delta_+(X,X')$ par son carré.

Preuve. On pose

(9.6) $$T = r(y)M^{-1}(X+i\,J\eta),\quad T' = r(y)M^{-1}(X'+i\,J\eta)$$

et l'on note que

$$\delta_+(T,T') = \delta_+(X,X')$$

à cause de l'invariance par le groupe $G = G_o \times \mathbb{R}^{n+1}$: dans ce qui suit, on écrira simplement δ_+ pour désigner $\delta_+(X,X')$. Avec l'aide du lemme 9.2, l'hypothèse sur la fonction-poids sera utilisée ici sous la forme

$$(9.7)\qquad m(Y) \leqslant C_1\tilde{m}(X)(\delta_+(X,\tau^{-1}Y))^{N_1} \leqslant CC_1\tilde{m}(X)(1+|T|^2)^{N_1}(r(x)r(y))^{-N_1/2}$$

où, à partir de maintenant, on désigne par C une constante arbitraire ne dépendant que de n, N_1 et λ. Supposons $n > 1$, les modifications à apporter dans le cas où n = 1 étant insignifiantes. D'après le théorème 7.3 et le lemme 9.1, on a

$$\left|W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)\right| \leqslant C(r(x)r(y)^2 r(x'))^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)}(\mathrm{Re}\,\rho^{\frac{1}{2}})^{1-n}$$
$$\left[1+\left|\log\frac{|r(T)r(T')|}{|\rho|}\right|+|\log(\mathrm{Re}\,\rho^{\frac{1}{2}})|\right]\exp-\frac{\pi}{2}(\mathrm{Re}\,\rho^{\frac{1}{2}})$$

avec $\rho = \rho(T,T')$. D'après les théorèmes 8.11 et 5.7, on a

$$(9.8)\qquad \mathrm{Re}\,\rho^{\frac{1}{2}} \geqslant C^{-1}|T|^{\frac{1}{2}}\;|T'|^{\frac{1}{2}}\;\delta_+^{-11\sqrt{2}-2} \geqslant C^{-1}|T|\;\delta_+^{-11\sqrt{2}-\frac{13}{4}}.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 5.3,

$$(9.9)\qquad |r(T)| \geqslant r(\mathrm{Re}\,T) = r(r(y)M^{-1}x) = r(x)r(y)$$

et, d'après (5.13)

$$(9.10)\qquad |r(T')| \geqslant r(x')r(y) \geqslant 2^{-4}\delta_+^{-2}r(x)r(y).$$

Dans l'autre sens, on a

$$(9.11)\qquad |r(T)| \leqslant |T|^2,\; |r(T')| \leqslant |T'|^2 \text{ et } |\rho| \leqslant 2|T|\,|T'|.$$

Enfin, on écrit $r(x') \leqslant 2^4\delta_+^2 r(x)$, toujours d'après (5.13).
On obtient

$$|W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)| \leqslant C(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1)}|T|^{1-n}\,\delta_+^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1)+(n-1)(11\sqrt{2}+\frac{13}{4})}$$
$$[1+\log\delta_+ + |\log|T|| + |\log(r(x)r(y))|]$$
$$\exp-(C^{-1}|T|\,\delta_+^{-11\sqrt{2}-\frac{13}{4}}).$$

Avec l'aide de (9.7) on a

$$(9.12)\qquad \left|\int f(Y)W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)dY\right| \leqslant CC_1C_2\widetilde{m}(X)\,\delta_+^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1)+(n-1)(11\sqrt{2}+\frac{13}{4})}\, I$$

avec

$$I=\iint (r(x)r(y))^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1-N_1)}|T|^{1-n}(1+|T|^2)^{N_1}\exp-(C^{-1}|T|\,\delta_+^{-11\sqrt{2}-\frac{13}{4}})$$

$$[1+\log\delta_+ + |\log|T|| + |\log(r(x)r(y))|]\,dy\,d\eta.$$

On a vu (9.5) que

$$(9.13)\qquad |r(y)M^{-1}x| = |r(x)N^{-1}y|$$

si $x = N\omega$, d'où

$$(9.14)\qquad |T|^2 = |r(x)N^{-1}y|^2+|r(y)M^{-1}(\xi+J\eta)|^2.$$

On a aussi $r(x)r(y) \leqslant |T|^2$ d'après (9.9). On pose

$$(9.15)\qquad \begin{aligned} y' &= r(x)N^{-1}y \\ \eta' &= r(y)M^{-1}(\xi+J\eta) \end{aligned}$$

pour un choix particulier de N et un choix C^∞ de M comme fonction de y (par exemple celui caractérisé par $M = M'$, matrice définie positive). Alors

$$(9.16)\qquad dy\,d\eta = (r(x)r(y))^{-\frac{n+1}{2}}dy'\,d\eta'.$$

Si $\lambda > N_1$, alors

$$(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}(\lambda-N_1)}[1+|\log r(x)r(y)|] \leqslant C|T|^{\lambda-N_1}(1+|\log|T||)$$

et

$$I \leqslant C\iint |T|^{1-n+\lambda-N_1}(1+|T|^2)^{N_1}\exp-(C^{-1}|T|\,\delta_+^{-11\sqrt{2}-\frac{13}{4}})$$

$$(1+\log\delta_+ + |\log|T||)\,dy'\,d\eta'.$$

Dans cette intégrale, on a ((9.14) et (9.15))

$$|T|^2 = |y'|^2 + |\eta'|^2 .$$

Il ne reste plus qu'à y opérer le changement de variable $(y',\eta') \mapsto \delta_+^{11\sqrt{2}+\frac{13}{4}}(y',\eta')$ pour obtenir le lemme 9.3.

Il faut maintenant, moyennant l'hypothèse que f est un symbole de poids m, effectuer une intégration par parties pour améliorer l'exposant de δ_+ dans le lemme 9.3. L'expression de $W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)$ établie dans le théorème 7.3, et qui a bien joué son rôle dans la preuve du dernier lemme, n'est pas, en vue de cette intégration par parties, la plus heureuse.

LEMME 9.4. <u>Pour</u> X <u>et</u> X' <u>fixés</u>, <u>posons</u> $g_\lambda = W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)$ <u>et désignons par</u> $\mathcal{F}_2^{-1} g_\lambda$ <u>la transformée de Fourier inverse de cette fonction par rapport aux</u> n+1 <u>dernières variables</u>. <u>Si, pour</u> $(y,z) \in C \times \mathbb{R}^{n+1}$, <u>on définit</u>, <u>conformément au lemme 4.1</u>, $s \in C$ <u>et</u> $t \in C$ <u>par l'équation</u> $(y,z) = (\mu(s,t), s-t)$, <u>on peut alors écrire</u>

$$(\mathcal{F}_2^{-1} g_\lambda)(y,z) = c_\lambda^2 (r(x)r(x'))^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)} (r(y))^{\lambda/2}$$
$$(\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta)^{-1} (\mathrm{ch}\,\tfrac{\alpha+\beta}{2})^{1-n} e^{-2\pi<Js,X>} e^{-2\pi<Jt,\bar{X}'>}$$

<u>en désignant par</u> α <u>et</u> β <u>les fonctions de</u> (y,z) <u>introduites dans ce même lemme</u>.

<u>Preuve</u>. On part de l'expression suivante établie au début de la preuve du théorème 7.3 :

$$g_\lambda(Y) = 2^{n+1} c_\lambda^2 \left(r(x)r(y)^2 r(x')\right)^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)} \int_C e^{-2\pi<JS_y t, X+iJ\eta>} e^{-2\pi<Jt,\bar{X}'-iJ\eta>} dm(t)$$

et l'on effectue le changement de variable défini par $z = S_y t - t$. On obtient

$$(\mathcal{F}_2^{-1} g_\lambda)(y,z) = 2^{n+1} c_\lambda^2 \left(r(x)r(y)^2 r(x')\right)^{\frac{1}{4}(\lambda+n+1)}$$
$$e^{-2\pi<JS_y t,X>} e^{-2\pi<Jt,\bar{X}'>} \frac{dm(t)}{dz} .$$

D'après une relation établie dans la preuve du théorème 4.2, on a

$$\frac{dm(t)}{dz} = r(t)^{-\frac{n+1}{2}} \left|\frac{Dt}{Dz}\right| = 2^{-n-1} r(y)^{-\frac{n+1}{2}} (\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta)^{-1} (\mathrm{ch}\,\tfrac{\alpha+\beta}{2})^{1-n} ,$$

ce qui conduit au lemme 9.4.

LEMME 9.5. Pour tout j, appelons $\frac{\partial}{\partial q_j}$ l'image directe de l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial s_j} + \frac{\partial}{\partial t_j}$ par le difféomorphisme $(s,t) \mapsto (y,z) = (\mathrm{mil}(s,t), s-t)$. Avec les notations du lemme 4.1 définissons les opérateurs $A_{j,\lambda}$ sur les symboles par

$$\mathcal{F}_2^{-1}(A_{j,\lambda}\, g) = r(y)^{\frac{\lambda+1}{2}} (\mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta)^{-1} (\mathrm{ch}\,\tfrac{\alpha+\beta}{2})^{1-n}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} [(r(y))^{-\frac{\lambda}{2}} \mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta\ (\mathrm{ch}\tfrac{\alpha+\beta}{2})^{n-1} (\mathcal{F}_2^{-1} g)].$$

Enfin, posons

$$B_\lambda = (16\pi^2)^{-1} \left(\frac{c_{\lambda+2}}{c_\lambda}\right)^2 \sum \{j\}\ A_{j,\lambda+1} A_{j,\lambda} .$$

Alors on a, pour tout couple de points X,X', l'identité

$$B_\lambda\ W(\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda) = \frac{r(X+\bar{X}')}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}\ W(\psi_X^{\lambda+2}, \psi_{X'}^{\lambda+2}).$$

Preuve. Dans le système de coordonnées $(q,z) = (\frac{s+t}{2}, s-t)$, on a $\frac{\partial}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial s_j} + \frac{\partial}{\partial t_j}$ et le produit des deux derniers facteurs au second membre de l'identité fournie par le lemme 9.4 s'écrit aussi $\exp -2\pi[\langle Jq, X+\bar{X}'\rangle + \frac{1}{2}\langle Jz, X-\bar{X}'\rangle]$. Il est alors clair que l'application de l'opérateur $A_{j,\lambda}$ à la fonction $g_\lambda = W(\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)$ a pour effet de multiplier celle-ci par $-2\pi\{j\}(X_j + \bar{X}_j)\, r(y)^{\frac{1}{2}}$: le lemme 9.5 s'en déduit immédiatement.

LEMME 9.6. Soit Φ le difféomorphisme de $C \times C$ sur $T(C) = C \times \mathbb{R}^{n+1}$ défini par $\Phi(s,t) = (y,z) = (\mathrm{mil}(s,t), s-t)$. Son jacobien est donné par

$$\left|\frac{D(y,z)}{D(s,t)}\right| = \mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta \left(\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^{n-1} .$$

Preuve. La matrice jacobienne $\frac{D(y,z)}{D(s,t)}$ (désignée par le même nom que son déterminant) s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ I & -I \end{pmatrix}$ avec $A = \frac{Dy}{Ds}$, $B = \frac{Dy}{Dt}$. On a

$$\frac{Dy}{Ds} = \left(\frac{D(S_y t)}{Dy}\right)^{-1} \tag{9.17}$$

avec, d'après (4.2),

$$\text{dét}\ \frac{D(S_y t)}{Dy} = 2^{n+1} \langle y,Jt\rangle^{n-1} r(y)(r(t))^{-n}. \tag{9.18}$$

En dérivant par rapport à t, à s fixé, la relation $s = S_y t$, on obtient

$$O = \left.\frac{D(S_y t)}{Dt}\right|_{y=cte} + \left.\frac{D(S_y t)}{Dy}\right|_{t=cte} \left.\frac{Dy}{Dt}\right|_{s=cte}. \tag{9.19}$$

Il en résulte la relation matricielle

$$B = -A\,\frac{D(S_y t)}{Dt} \tag{9.20}$$

d'où, par addition de colonnes,

$$\begin{aligned} \text{dét}\ \frac{D(y,z)}{D(s,t)} &= (-1)^{n+1}\ \text{dét}\ A\ \text{dét}\ \left(I - \frac{D(S_y t)}{Dt}\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(\text{dét}\ \frac{D(S_y t)}{Dy}\right)^{-1} \text{dét}\ \frac{D(t-S_y t)}{Dt} . \end{aligned} \tag{9.21}$$

Le premier facteur a été rappelé en (9.18). D'après le lemme 4.1, le second s'écrit

$$\begin{aligned} \text{dét}\ \frac{D(t-S_y t)}{Dt} = (r(t))^{-n-1}(r(y)+r(t))^{n-1} \\ [(r(y)-r(t))^2+4\langle y,Jt\rangle^2]. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Il ne reste plus, partant de (9.21),(9.18) et (9.22), qu'à substituer les expressions

$$\langle y,Jt\rangle = r(y)e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\ \text{ch}\ \frac{\alpha-\beta}{2} ,$$

$$r(t) = r(y)e^{-(\alpha+\beta)}$$

$$(r(y)-r(t))^2+4\langle y,Jt\rangle^2 = 4(r(y))^2 e^{-(\alpha+\beta)}\text{ch}\,\alpha\ \text{ch}\,\beta$$

tirées de la preuve du théorème 4.2 pour obtenir le lemme 9.6.

LEMME 9.7. Avec les notations du lemme 9.5, définissons les opérateurs $A'_{j,\lambda}$ par

$$\mathcal{F}_2^{-1}(A'_{j,\lambda}g) = -r(y)^{-\lambda/2}(\mathrm{ch}\,\frac{\alpha-\beta}{2})^{n-1}\frac{\partial}{\partial q_j}[(r(y))^{\frac{\lambda+1}{2}}(\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2})^{1-n}(\mathcal{F}_2^{-1}g)]$$

et posons

$$B'_\lambda = (16\pi^2)^{-1}(\frac{c_{\lambda+2}}{c_\lambda})^2\sum\{j\}\ A'_{j,\lambda}A'_{j,\lambda+1}\ .$$

Soit $f \in \mathcal{K}(D)$, espace (introduit dans la section 4) des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n+2})$ à support en y compact et soit $\lambda > 0$. Pour tout couple (X,X'), on a l'identité

$$\int_D f(Y)(B_\lambda W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda))(Y)dY = \int_D (B'_\lambda f)(Y)W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)dY.$$

Preuve. La transformation $\mathcal{F}_2^{-1}$ est une isométrie de $L^2(T^*(C),dy\,d\eta)$ sur $L^2(T(C),\,dy\,dz)$. D'après le lemme 9.6, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial q_j}$ $= \frac{\partial}{\partial s_j} + \frac{\partial}{\partial t_j}$ admet l'adjoint formel

$$(\frac{\partial}{\partial q_j})' = -(\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\beta)^{-1}(\frac{\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2}})^{1-n}\frac{\partial}{\partial q_j}(\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\beta)(\frac{\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2}})^{n-1}$$

où les fonctions de (α,β) doivent s'entendre comme les opérateurs de multiplication correspondants. L'opérateur B_λ admet alors pour adjoint formel l'opérateur B'_λ indiqué : c'est aussi son transposé formel parce que les fonctions $\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta$ et $\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$ sont, pour y fixé, des fonctions paires de z. La validité sans termes de bord, dans les conditions indiquées, de la formule d'intégration par parties, résulte le plus facilement de la forme de $W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)$ donnée par le lemme 9.4.

LEMME 9.8. Soit m une fonction-poids. Au sens de la proposition 6.9, l'opérateur B'_λ défini dans le lemme 9.7 s'étend en un opérateur séquentiellement continu de Symb(m) dans Symb(m).

Preuve. Il est facile de voir que l'opérateur B'_λ commute avec l'action de $G = G_o \times \mathbb{R}^{n+1}$ sur D. Il n'en est pas de même pour les opérateurs $A'_{j,\lambda}$ (il n'en serait ainsi que pour une action équivariante convenable de G_o sur des symboles à valeurs vectorielles, mais le prix en longueur à payer pour ces satisfactions esthétiques est trop grand). Quoiqu'il en soit, il suffit, comme dans la preuve de la proposition 6.9, de donner pour $f \in \mathrm{Symb}(m)$ et ses dérivées des estimations convenables aux points (ω,η) (ou même $(\omega,0)$ seulement). Pour ce qui concerne l'opérateur (de convolution sur les fibres du cotangent) $\mathcal{F}_2(\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2})^{\pm(n-1)}\mathcal{F}_2^{-1}$, il opère dans l'espace Symb(m) puisque la démonstration de la proposition 6.9 s'applique sans aucune modification.

D'après (5.13), on a

$$r(y) \leqslant 2^4(\delta_+(y,y'))^2 r(y')$$

et comme $\delta_+((r(y))^{-1}y,\ ((r(y'))^{-1}y') = \delta_+(y,y')$, la fonction $(y,\eta) \mapsto r(y)$ est une fonction-poids. De plus, la fonction $r(y)$ est un symbole de poids $r(y)$. En effet, soient $\beta = \sum \beta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ et $\gamma = \sum \gamma_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ deux vecteurs tels que $\|\beta\|_y = \|\gamma\|_y = 1$ pour un certain point $y = M\omega \in C$: cela s'écrit aussi $|M^{-1}\beta| = |M^{-1}\gamma| = 1$. En écrivant

$$\frac{1}{2}\beta(r) = \langle Jy,\beta\rangle = \langle JM\omega,\beta\rangle = r(y)\ \langle\omega,M^{-1}\beta\rangle$$

et

$$\frac{1}{2}\gamma(\beta(r)) = \langle J\gamma,\beta\rangle = \langle JMM^{-1}\gamma,\beta\rangle = r(y)\ \langle JM^{-1}\gamma, M^{-1}\beta\rangle,$$

on voit que l'on a $|\beta(r)| \leqslant 2r(y)$ et $|\gamma(\beta(r))| \leqslant 2r(y)$. Par suite, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la multiplication par $(r(y))^{\mu}$ opère de Symb(m) dans Symb(m') avec $m'(y,\eta) = m(y,\eta)(r(y))^{\mu}$: les estimations obtenues sont aux points (ω,η) les mêmes qu'en l'absence du facteur $(r(y))^{\mu}$, ce qui est suffisant d'après ce qui a été vu plus haut.

Il reste à examiner les opérateurs

$$\text{(9.23)} \qquad \mathcal{F}_2 \frac{\partial}{\partial q_j}\mathcal{F}_2^{-1} = \sum_k \mathcal{F}_2\left(\frac{\partial y_k}{\partial s_j} + \frac{\partial y_k}{\partial t_j}\right)\mathcal{F}_2^{-1}\frac{\partial}{\partial y_k}$$

avec $(y,z) = (\mathrm{mi\ell}(s,t), s-t)$ et

$$(2.13)\qquad \mathrm{mi}\ell(s,t) = 2^{-\frac{1}{2}}[\langle s,Jt\rangle+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}((r(s))^{\frac{1}{2}}t+(r(t))^{\frac{1}{2}}s).$$

D'après (2.6), la norme en y du vecteur $\frac{\partial}{\partial y_k}$ est

$$\|\frac{\partial}{\partial y_k}\|_y = (r(y))^{-1}(2y_k^2-r(y))^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{3^{\frac{1}{2}}|y|}{r(y)}.$$

On a vu plus haut que $r(y)$ est une fonction-poids, et l'inégalité $|y| \leqslant 2^{11/2}(\delta_+(y,y'))^2|y'|$ établie en (5.16) montre qu'il en est de même de la fonction $|y|$. L'opérateur $\frac{\partial}{\partial y_k}$ transforme un symbole de poids $m(y,\eta)$ en un symbole de poids $m(y,\eta)\frac{|y|}{r(y)}$, ce qui ne change rien en $y=\omega$. Avec

$$A = \langle s,Jt\rangle+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}$$

on obtient, en dérivant (2.13), la relation

$$\frac{\partial y_k}{\partial s_j}+\frac{\partial y_k}{\partial t_j} = -(2A)^{-3/2}\{j\}[(r(s))^{\frac{1}{2}}t_k+(r(t))^{\frac{1}{2}}s_k][s_j+t_j+s_j(\frac{r(t)}{r(s)})^{\frac{1}{2}}+t_j(\frac{r(s)}{r(t)})^{\frac{1}{2}}]$$
$$+(2A)^{-\frac{1}{2}}[((r(s))^{\frac{1}{2}}+(r(t))^{\frac{1}{2}})\delta_{jk}+\{j\}\frac{s_jt_k}{(r(s))^{\frac{1}{2}}}+\{j\}\frac{t_js_k}{(r(t))^{\frac{1}{2}}}].$$

On a, d'après la preuve du théorème 4.2, les relations

$$(9.24)\qquad r(s) = r(y)e^{\alpha+\beta}, \qquad r(t) = r(y)e^{-(\alpha+\beta)},$$

$$A = \frac{2\langle y,Jt\rangle}{r(t)} = 2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Par ailleurs la formule d'inversion du lemme 4.1 peut s'écrire

$$(9.25)\qquad t = -\frac{z}{e^{\alpha+\beta}+1}+\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}\,y$$

$$s = \frac{z}{e^{-(\alpha+\beta)}+1}+\frac{\mathrm{ch}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}}\,y\,.$$

La continuité séquentielle (de l'espace Symb(m) dans un espace Symb(m') approprié, avec $m' = m$ aux points (ω,η)) de l'opérateur $\mathcal{F}_2(\frac{\partial y_k}{\partial s_j}+\frac{\partial y_k}{\partial t_j})\mathcal{F}_2^{-1}$ s'obtient alors par une combinaison des remarques développées plus haut et des méthodes de la proposition 6.9, après avoir observé la dernière inégalité suivante : si $y = M\omega$ et $z = Mz'$, alors $z'_0 = \mathrm{sh}\,\alpha + \mathrm{sh}\,\beta$, $r(z') = 4\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$, d'où $|z'| = 2^{\frac{1}{2}}\,|\mathrm{sh}\,\alpha - \mathrm{sh}\,\beta|$ et, d'après (6.3),

$$|z| = |Mz'| \leqslant 2\,|y|\;|\mathrm{sh}\,\alpha - \mathrm{sh}\,\beta| .$$

THÉORÈME 9.9. Soit m une fonction-poids telle que

$$\tilde{m}(X) \leqslant C_1\,\tilde{m}(X')\,(\delta_+(X,X'))^{N_1}$$

pour tout couple (X,X'). Soit $N \geqslant 0$ arbitraire. Soit $\lambda \geqslant 2N+80(N_1+n+2)$.

Il existe un entier $k \geqslant 0$ et une constante $C > 0$ ne dépendant que de n,N,N_1 et λ vérifiant la propriété suivante : pour tout symbole f de poids m et tout couple (X,X') de points de Π, on a

$$\left|\int_D f(Y)\,W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)\,dY\right| \leqslant CC_1\|f\|_{m;k}\,\tilde{m}(X)\,(\delta_+(X,X'))^{-N},$$

où la norme intervenant au membre de droite a été définie dans la définition 6.4.

Preuve. Soit ν un entier $\geqslant 0$ et supposons $\lambda > 2\nu$. En utilisant l'identité du lemme 9.5 et en appliquant ν fois la formule d'intégration par parties fournie par le lemme 9.7 on obtient, pour tout symbole $f \in \mathcal{K}(D)$, l'identité

$$\int f(Y)\,W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)\,dY = \left[\frac{r(X+\bar{X}')}{4(r(x)r(x'))^{\frac{1}{2}}}\right]^{-\nu}\int g(Y)\,W(\psi_X^{\lambda-2\nu},\psi_{X'}^{\lambda-2\nu})(Y)\,dY$$

avec $g = B'_{\lambda-2\nu}\cdots B'_{\lambda-4}\,B'_{\lambda-2}\,f$. D'après le lemme 9.8, le lemme 9.3 et la propriété d'approximation des symboles par des éléments de $\mathcal{K}(D)$ fournie par la proposition 6.8, la même identité reste valable quelle que soit $f \in \mathrm{Symb}(m)$ pourvu que l'on ait $\lambda > 2\nu+N_1$. Si $|g(Y)| \leqslant C_2 m(Y)$ pour tout $Y \in D$, on a en outre, d'après le lemme 9.3,

$$\left|\int f(Y)\,W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)\,dY\right| \leqslant CC_1C_2\,\tilde{m}(X)\,(\delta_+(X,X'))^a\,[1+(\log\delta_+(X,X'))^2]$$

avec

$$a = \tfrac{1}{2}[\lambda-2\nu+n+1] + [2n+2+\lambda-2\nu+N_1]\,(11\sqrt{2}+\tfrac{13}{4})-\nu.$$

Le théorème 9.1 est alors démontré pourvu que λ soit tel que l'on puisse trouver ν entier $\geqslant 0$ tel que $\lambda-N_1 > 2\nu$ et $a < -N$, i.e.

$$\lambda - N_1 > 2\nu > (11\sqrt{2}+\frac{17}{4})^{-1}[N+\frac{1}{2}(\lambda+n+1)+(2n+2+\lambda+N_1)(11\sqrt{2}+\frac{13}{4})].$$

C'est possible si le membre de gauche de cette double inégalité dépasse le membre de droite de plus de 2, i.e. si l'on a

$$\lambda > 2N+(44\sqrt{2}+15)N_1+(44\sqrt{2}+14)(n+1)+44\sqrt{2}+17.$$

X - LA CONTINUITÉ DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS.

DÉFINITION 10.1. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre d'opérateurs sur les fonctions sur C engendrée par les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux et par la multiplication par $(r(t))^{-\frac{1}{2}}$. On désigne par $\mathcal{S}(C)$ l'espace des fonctions $u \in C^\infty(C)$ telles que Au appartienne à $H = L^2(C, dm(t))$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Remarques : 1) L'espace $\mathcal{S}(C)$ reste invariant aussi bien sous l'action des éléments de G que sous celle de la symétrie σ définie par $(\sigma u)(t) = u(St) = u((r(t))^{-1}Jt)$.

2) Les fonctions ψ_X^λ introduites dans la définition 3.2 n'appartiennent pas à $\mathcal{S}(C)$. Cependant, soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{A}$ et soit $\mathcal{S}_E(C)$ l'espace des $u \in C^\infty(C)$ telles que $Au \in H$ pour tout $A \in E$. Alors les fonctions ψ_X^λ appartiennent à $\mathcal{S}_E(C)$ si λ est assez grand.

3) Munissons l'espace $\mathcal{S}(C)$ de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet. Alors son dual topologique $\mathcal{S}'(C)$ s'identifie à l'espace de distributions dans C engendré par celles des la forme $A\,u$ ($A \in \mathcal{A}$, $u \in H$). Il est clair que toute distribution $v \in \mathcal{S}'(C)$ se prolonge, pour E bien choisi, en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}_E(C)$, ce dernier espace étant muni de sa topologie préhilbertisable naturelle. Par suite on peut définir (v, ψ_X^λ) si λ est assez grand.

THÉORÈME 10.2. Soit $u \in \mathcal{S}(C)$ et soit ν un entier $\geqslant 0$. On a alors

$$(10.1) \qquad \int_\Pi |(u, \psi_X^\lambda)|^2 \; (\delta_+(\omega, X))^{2\nu} \, d\underline{m}(X) < \infty$$

si $\lambda > 2\nu + \max(0, n-1)$. Réciproquement, soit $v \in \mathcal{S}'(C)$ et supposons que, pour tout ν, la condition (10.1) soit vérifiée pour λ assez grand. Alors v appartient à $\mathcal{S}(C)$.

Preuve. En partant de la définition 3.2, on vérifie les identités ($\{\}$ défini en (2.9))

$$2\pi X_j \psi_X^\lambda = [\, -\{j\} \frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{1}{2}(\lambda+n+1)\frac{t_j}{r(t)}]\, \psi_X^\lambda \tag{10.2}$$

qui permettent de trouver un opérateur $A_\lambda \in \mathcal{A}$ tel que

$$r(\omega+X)\psi_X^\lambda = [1+2X_o+r(X)]\psi_X^\lambda = A_\lambda\ \psi_X^\lambda \tag{10.3}$$

pour tout $X \in \Pi$. Comme par ailleurs on a l'identité

$$(r(x))^{-\frac{1}{2}}\ \psi_X^\lambda = \frac{c_\lambda}{c_{\lambda-2}}\ (r(t))^{\frac{1}{2}}\ \psi_X^{\lambda-2} \tag{10.4}$$

et que $\mathcal{A}$ est une algèbre autoadjointe d'opérateurs sur H, on peut donc trouver un opérateur $B_\lambda \in \mathcal{A}$ permettant d'écrire les identités

$$\frac{r(\omega+\overline{X})}{4(r(x))^{\frac{1}{2}}}\ (u,\psi_X^\lambda) = (B_\lambda u\ ,\psi_X^{\lambda-2}). \tag{10.5}$$

Ceci prouve la première partie du théorème 10.1 grâce à (2.27) et à la proposition 3.4.

LEMME 10.3. Soit $\nu \in \mathbb{R}$ et soit $k = 0,1,\dots,n$. Il existe $C > 0$ tel que, pour toute fonction f holomorphe sur Π , on ait

$$\int \left|\frac{\partial f}{\partial X_k}\right|^2 (\delta_+(\omega,X))^{2\nu} d\underline{m}(X) \leqslant C \int |f(X)|^2 (\delta_+(\omega,X))^{2\nu+4} d\underline{m}(X).$$

Preuve. Compte tenu de l'inégalité élémentaire

$$|r(x)-r(x')| \leqslant |x-x'|^2+2|x|\ |x-x'|, \tag{10.6}$$

on voit que la condition

$$|x-x'| \leqslant \inf\ (\frac{r(x)}{8|x|}\ ,\ \frac{1}{2}(r(x))^{\frac{1}{2}})$$

entraîne $(\frac{r(x)}{r(x')})^{\pm 1} \leqslant 2$ ainsi que

$$r(x+x') \leqslant r(2x)+|x'-x|^2+4|x|\ |x'-x| \leqslant 5r(x). \tag{10.7}$$

Notons également que

$$(10.8)\qquad \frac{2|x|}{r(x)}+2r(x)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{|x|^2}{r(x)}+2r(x)^{-1}+1 \leqslant 2^9(\delta_+(\omega,x))^2$$

d'après (5.10) et (5.11). Enfin, sous la condition indiquée, on a

$$(10.9)\qquad |r(X+\bar{X}')| = |r(x+x')-r(\xi-\xi')+2i\,\langle J(x+x'),\xi-\xi'\rangle|$$

$$\leqslant 5r(x)+|\xi-\xi'|^2+4|x|\,|\xi-\xi'|+2|x'-x|\,|\xi-\xi'|$$

et

$$(10.10)\qquad \delta_+(X,X') \leqslant 2^{-3/2}\frac{|r(X+\bar{X}')|}{r(x)}$$

$$\leqslant 2^{-3/2}\left[5+\frac{3|X-X'|^2}{r(x)}+\frac{4|x|}{r(x)}|X-X'|\right].$$

Il résulte alors de (10.8) que, pour $C_1 > 0$ bien choisi, la condition $|X-X'| \leqslant C_1^{-1}(\delta_+(\omega,x))^{-2}$ entraîne $\delta_+(X,X') \leqslant C_1$. Pour tout $X \in \Pi$, soit D_X le polydisque de centre X et de rayons tous égaux à $\rho = \rho(X) = C_1^{-1}(n+1)^{-\frac{1}{2}}(\delta_+(\omega,X))^{-2}$. D'après ce qui précède et les lemmes 5.2 et5.3, le rapport $\left(\frac{\delta_+(\omega,X')}{\delta_+(\omega,X)}\right)^{\pm 1}$ reste borné, de façon uniforme, lorsque X' parcourt D_X. La formule de Cauchy et l'inégalité de Schwarz fournissent l'inégalité

$$(10.11)\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial X_k}\right|^2 \leqslant 2\pi^{-n-1}\rho^{-2n-4}\int_{D_X}|f(X')|^2dx'd\xi'$$

et comme

$$(10.12)\qquad \int_{|X-X'|\leqslant\rho(X)} \rho(X)^{-2n-4}\delta_+(\omega,X)^{2\nu}dxd\xi \leqslant C\,\delta_+(\omega,X')^{2\nu+4},$$

la preuve du lemme 10.3 est terminée.

LEMME 10.4. <u>Soit</u> $v \in \mathcal{S}'(C)$. <u>Pour tout</u> λ <u>assez grand, il existe une constante</u> $k_\lambda > 0$ <u>telle que l'on ait</u>

$$\int_\Pi (v,\psi_X^\lambda)(\psi_X^\lambda,u)\,d\underline{m}(X) = k_\lambda\,(v,u)$$

pour toute $u \in \mathcal{S}(C)$.

Preuve. Lorsque $v \in H$, c'est une conséquence de la proposition 3.4. Sinon, on se ramène par la remarque n° 3 consécutive à la définition 10.1 au cas où $v = Aw$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $w \in H$. Il suffit de montrer que l'intégrale $\int (Aw, \psi_X^\lambda)(\psi_X^\lambda, u) d\underline{m}(X)$, considérée comme forme sesquilinéaire du couple (w,u), est continue sur $H \times \mathcal{S}(C)$. D'après (10.2), on peut trouver des polynômes $P_{\alpha,j}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $j \in \mathbb{N}$) en nombre fini, à coefficients ne dépendant que de n, de λ et de A tels que

$$A^* \psi_X^\lambda = \sum X^\alpha P_{\alpha,j}(t)(r(t))^{-j/2} \psi_X^\lambda \quad (10.13)$$

On a

$$(r(t))^{-\frac{1}{2}} \psi_X^\lambda = \frac{c_\lambda}{c_{\lambda-2}} r(x)^{\frac{1}{2}} \psi_X^{\lambda-2} \quad (10.14)$$

et, avec $\chi_X^\lambda = (r(x))^{-\frac{1}{4}(\lambda+n+1)} \psi_X^\lambda$, les relations

$$t_k \chi_X^\lambda = -(2\pi \{k\})^{-1} \frac{\partial}{\partial X_k} \chi_X^\lambda . \quad (10.15)$$

Puisque $\chi_X^\lambda(t)$ est une fonction holomorphe de X, le lemme 10.4 se déduit de la première partie (déjà prouvée) du théorème 10.2 et de l'application à la fonction $\bar{f}(X) = (w, \chi_X^\lambda)$ du lemme 10.3.

Fin de la preuve du théorème 10.2.

La proposition 3.4 et le lemme 10.4 montrent que si $v \in \mathcal{S}'(C)$ vérifie

$$\int |(v, \psi_X^\lambda)|^2 d\underline{m}(X) < \infty$$

pour λ assez grand, alors $v \in H$. Pour démontrer la deuxième partie du théorème 10.2, on peut alors se servir à nouveau des identités (10.13), (10.14), (10.15) et du lemme 10.3.

Nous sommes enfin en mesure de donner la définition de $\mathrm{Op}(f)$ pour des symboles f assez généraux. En raison du fait que les fonctions ψ_X^λ n'appartiennent pas à $\mathcal{S}(C)$, il est nécessaire d'introduire, pour les sous-espaces vectoriels E de dimension finie de $\mathcal{A}$, l'espace $\mathcal{S}_E(C)$ défini dans la deuxième remarque consécutive à la définition 10.1 : on désigne en outre par $u \mapsto \|u\|_E$ la norme sur cet espace naturellement associée au choix (arbitraire) d'une base de E.

PROPOSITION 10.5. *Soit* m *une fonction-poids. Il existe un sous-espace vectoriel* E *de dimension finie de* $\mathcal{A}$ *vérifiant la propriété suivante : pour toute paire* (u,v) *d'éléments de* $\mathcal{S}_E(C)$, *la forme linéaire* $f \mapsto (\mathrm{Op}(f)u,v)$ *initialement définie, pour* $f \in C_o^\infty(D)$, *par la définition* 3.6, *se prolonge en une forme linéaire séquentiellement continue sur l'espace* $\mathrm{Symb}(m)$ *des symboles de poids* m. *Ce prolongement est unique. En outre, si on le désigne par* $(\mathrm{Op}_{m;E}(f)u,v)$, *ce prolongement est, pour* $f \in \mathrm{Symb}(m)$ *donné, une forme sesquilinéaire continue sur* $\mathcal{S}_E(C) \times \mathcal{S}_E(C)$. *Celle-ci définit donc un opérateur linéaire continu* $\mathrm{Op}_{m;E}(f)$ *de* $\mathcal{S}_E(C)$ *dans* $\mathcal{S}'_E(C)$, *ce dernier espace étant muni de sa topologie faible de dual de* $\mathcal{S}_E(C)$.

Preuve. Soit k_λ la constante définie dans la proposition 3.4, telle que

$$(u,v) = k_\lambda^{-1} \int (u,\psi_X^\lambda)(\psi_X^\lambda,v)\,d\underline{m}(X) \tag{10.16}$$

quelles que soient u et $v \in H$. Pour tout symbole $f \in L^1(D)$, définissons, pour tout $\lambda > \max(0,n-1)$ et toute paire (X,X'), l'expression

$$\{f;X,X'\} = \int_D f(Y)\,W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)\,dY. \tag{10.17}$$

D'après la définition 3.6, cette intégrale n'est autre, pour $f \in L^1(D)$, que $(\mathrm{Op}(f)\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)$ et l'on a donc, quelles que soient u et $v \in H$, l'identité

$$(\mathrm{Op}(f)u,v) = k_\lambda^{-2} \iint (u,\psi_X^\lambda)\{f;X,X'\}(\psi_{X'}^\lambda,v)\,d\underline{m}(X)\,d\underline{m}(X'). \tag{10.18}$$

Nous allons maintenant utiliser (10.17) et (10.18) pour définir le prolongement $(\mathrm{Op}_{m;E}(f)u,v)$ qui est l'objet de la proposition. Avec les notations du théorème 9.9, on peut trouver λ_o et k ne dépendant que de n et du poids m, vérifiant ce qui suit : pour tout $\lambda > \lambda_o$ il existe $C > 0$ telle que

$$|\{f;X,X'\}| \leqslant C\,\|f\|_{m,k}\,\widetilde{m}(X) \tag{10.19}$$

pour tout symbole $f \in \mathrm{Symb}(m)$.

LEMME 10.6. *On a*

$$\int_{\Pi} (\delta_+(\omega,X))^{-\mu}\, d\underline{m}(X) < \infty$$

si $n \geqslant 1$ et $\mu > 2n$, ou bien $n = 0$ et $\mu > 1$.

Preuve. Ce résultat a été démontré dans la proposition 2.4 de [31] à l'aide de la décomposition de Cartan de Γ : on peut bien entendu en donner une preuve plus élémentaire, mais c'est plus laborieux.

Fin de la preuve de la proposition 10.5.
Avec les notations du théorème 9.9, on a

$$\widetilde{m}(X) \leqslant C_1\, \widetilde{m}(\omega)\left(\delta_+(\omega,X)\right)^{N_1}. \tag{10.20}$$

Compte tenu de la première partie du théorème 10.2 et de l'inégalité de Schwarz, l'intégrale au second membre de (10.18) a donc un sens pour u et v $\in \mathcal{S}_E(C)$ si E est bien choisi : par définition, sa valeur est le prolongement $(\mathrm{Op}_{m;E}(f)u,v)$ cherché. Pour C bien choisie, on a ainsi

$$|(\mathrm{Op}_{m;E}(f)u,v)| \leqslant C\|f\|_{m;k}\|u\|_E\ \|v\|_E \tag{10.21}$$

ce qui démontre la proposition 10.5, l'unicité du prolongement résultant de la proposition 6.8 (l'approximation des symboles par des symboles à support compact).

PROPOSITION ET DÉFINITION 10.7. Pour u et v appartenant à $\mathcal{S}(C)$, la définition que l'on vient de donner de $(\mathrm{Op}_{m;E}(f)u,v)$ ne dépend que de f. On notera Op(f) l'opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(C)$ dans $\mathcal{S}'(C)$ (faible) ainsi défini. Dans le cas où f est intégrable, cette définition coïncide avec celle initialement donnée dans la définition 3.6. Enfin, dans l'un quelconque de ces deux cas, on a les égalités

$$(\mathrm{Op}(f)\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda) = \int_D f(Y)W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)dY \tag{10.22}$$

si λ est assez grand : il est entendu qu'au premier membre de cette relation figure le prolongement de Op(f) en un opérateur continu de $\mathcal{S}_E(C)$ dans $\mathcal{S}'_E(C)$ pour E bien choisi.

Preuve. Il est clair que le choix de E n'est pas intervenu dans la définition de $(Op_{m;E}(f)u,v)$, sous la seule réserve de la convergence de (10.18). Par ailleurs, l'indépendance de cette définition à l'égard du choix de la fonction-poids m est également évidente si l'on remarque que $\max(m_1,m_2)$ est une fonction-poids lorsque m_1 et m_2 le sont. La deuxième partie de la proposition se déduit d'une approximation banale de $f \in L^1(D)$ par troncature et régularisation si l'on observe que

$$(10.23) \qquad |W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)| \leqslant 2^{n+1}$$

quels que soient X et $X' \in \Pi$, et $Y \in D$: or (10.23) est une conséquence immédiate de la définition 7.1. La formule (10.22), enfin, est valable par définition si $f \in L^1(D)$. Si f est un symbole de poids quelconque, la formule reste valable grâce au théorème 9.9 dont la preuve implique également, pour λ assez grand, la continuité séquentielle, sur l'espace Symb(m), de l'intégrale au second membre de (10.22).

THÉORÈME 10.8. Soit f un symbole de poids m. L'opérateur Op(f) est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(C)$ dans $\mathcal{S}(C)$.

Preuve. Le théorème 10.2 montre que, lorsque ν décrit $\mathbb{N}$ (λ étant choisi de façon arbitraire tel que $\lambda > 2\nu + \max(0,n-1)$), les semi-normes

$$(10.24) \qquad u \mapsto \left[\int |(u,\psi_X^\lambda)|^2 (\delta_+(\omega,X))^{2\nu} d\underline{m}(X)\right]^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{\lambda,\nu}$$

constituent un système fondamental de semi-normes continues sur $\mathcal{S}(C)$. Avec $A = Op(f)$, on a, ainsi qu'il a déjà été remarqué, $A^* = Op(\bar{f})$ puisque les symétries σ_Y sont des opérateurs autoadjoints. Par suite, pour λ assez grand et pour tout $X \in \Pi$, le lemme 10.4 permet d'écrire, pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(C)$, les relations

$$(Au,\psi_X^\lambda) = (u,A^*\psi_X^\lambda) = k_\lambda^{-1} \int (u,\psi_{X'}^\lambda)(A\psi_{X'}^\lambda,\psi_X^\lambda)\, d\underline{m}(X').$$

D'après le théorème 9.9 et (10.20), pour tout N on a, pour λ et k assez grands, l'inégalité

$$(10.25)\qquad |(A\psi^{\lambda}_{X'},\psi^{\lambda}_{X})| \leqslant C\|f\|_{m;k}(\delta_+(\omega,X'))^{N_1}(\delta_+(X,X'))^{-N}$$
$$\leqslant C\|f\|_{m;k}(\delta_+(\omega,X))^{N_1}\ (\delta_+(X,X'))^{N_1-N},$$

la deuxième inégalité résultant du lemme 5.2. On peut alors écrire

$$|(Au,\psi^{\lambda}_{X})| \leqslant C\|f\|_{m;k}(\delta_+(\omega,X))^{N_1}\int|(u,\psi^{\lambda}_{X'})|\ (\delta_+(X,X'))^{N_1-N}\,d\underline{m}(X')$$
$$\leqslant C\|f\|_{m;k}(\delta_+(\omega,X))^{N_1}\|u\|_{\lambda,\nu}\ [\int(\delta_+(\omega,X'))^{-2\nu}(\delta_+(X,X'))^{2N_1-2N}$$
$$d\underline{m}(X')]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant C\|f\|_{m;k}(\delta_+(\omega,X))^{N_1-\nu}\ \|u\|_{\lambda,\nu}\ [\int(\delta_+(X,X'))^{2\nu+2N_1-2N}\,d\underline{m}(X')]^{\frac{1}{2}}.$$

Pourvu que l'on choisisse d'abord ν , puis N, assez grands, enfin λ, le théorème 10.2 et le lemme 10.6 (joint à la Γ-invariance de la fonction δ_+) permettent d'obtenir le théorème 10.8.

THÉORÈME 10.9. <u>Soit</u> f <u>un symbole de poids</u> m = 1. <u>L'opérateur</u> A = Op(f) <u>se prolonge en un opérateur linéaire continu de</u> H $= L^2(C,dm(t))$ <u>dans</u> H .

<u>Preuve</u>. L'inégalité (10.25) devient, puisqu'on a maintenant $N_1 = 0$,

$$(10.26)\qquad |(A\ \psi^{\lambda}_{X},\psi^{\lambda}_{X'})| \leqslant C\|f\|_{1;k}(\delta_+(X,X'))^{-N}$$

et (10.18) fournit, pour u et v $\in \mathcal{S}(C)$,

$$(10.27)\quad |(Au,v)| \leqslant C\|f\|_{1,k}\iint|(u,\psi^{\lambda}_{X})|\ (\delta_+(X,X'))^{-N}\ |(\psi^{\lambda}_{X'},v)|\,d\underline{m}(X)\,d\underline{m}(X').$$

Il suffit alors, grâce à la proposition 3.4, de prouver que $(\delta_+(X,X'))^{-N}$ est, pour N assez grand, le noyau d'un opérateur borné sur $L^2(\Pi,d\mu)$, ce qui résulte du lemme 10.6.

La dernière proposition de cette section, sans intérêt particulier, n'a d'autre but que de justifier une affirmation utilisée dans la preuve du théorème 4.2.

PROPOSITION 10.10. <u>Si</u> $f \in \mathcal{K}(D)$, <u>l'espace</u> (<u>introduit dans la section</u> 4) <u>des fonctions de</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1})$ <u>dont le support a une première projection sur</u> $\mathbb{R}^{n+1}$ <u>qui est une partie compacte de</u> C, <u>alors l'opé-</u>

<u>rateur</u> Op(f) <u>est un opérateur à trace sur</u> H.

<u>Preuve</u>. Pour tout N_1, f est un symbole de poids m avec

$$\tilde{m}(X) = (\delta_+(\omega,X))^{-N_1} .$$

Le théorème 9.9 montre alors que, pour tout N, il existe C > 0 telle que, quels que soient X et $X' \in \Pi$, on ait, pour λ assez grand,

$$(10.28) \qquad |(\mathrm{Op}(f)\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})| \leqslant C(\delta_+(\omega,X))^{-N_1}(\delta_+(X,X'))^{-N}.$$

La formule (10.18) est une décomposition de Op(f) comme intégrale d'opérateurs de rang un du type

$$(10.29) \qquad u \mapsto (u,\psi^\lambda_X)\,\psi^\lambda_{X'} .$$

Ceux-ci ont évidemment une norme-trace égale à 1, et la proposition 10.10 est donc une conséquence du fait que la fonction au second membre de (10.28) est intégrable par rapport à $d\underline{m}(X)d\underline{m}(X')$ si N et N_1 sont bien choisis.

XI - LA RÉCIPROQUE DE L'ESTIMATION FONDAMENTALE.

Le théorème 9.9 et (10.22) montrent que si f est un symbole de poids m, alors on a pour tout N, pourvu que λ et C soient assez grands, les inégalités

$$|(\mathrm{Op}(f)\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})| \leqslant C\,\tilde{m}(X)\,(\delta_+(X,X'))^{-N}.$$

La présente section établit une réciproque de ces inégalités.

LEMME 11.1. <u>Soient</u> m <u>une fonction-poids</u>, C_1 <u>et</u> N_1 <u>tels que</u>

$$\tilde{m}(X) \leqslant C_1\,\tilde{m}(X')\,(\delta_+(X,X'))^{N_1}$$

<u>pour tout couple</u> (X,X'). <u>Pour tout</u> $\lambda > n+1+N_1$, <u>il existe une constante</u> C > 0 <u>ne dépendant que de</u> (n,N_1,λ) <u>vérifiant ce qui suit</u> :

supposons

$$N > 2n+\frac{1}{2}(\lambda+n+1)+(2+\lambda+N_1+n)(11\sqrt{2}+\frac{13}{4})$$

et soit a une fonction mesurable sur $\Pi\times\Pi$ vérifiant, pour une certaine constante $C_2 > 0$ et pour tout couple (X,X') l'inégalité

$$|a(X,X')| \leqslant C_2\,\widetilde{m}(X)\,(\delta_+(X,X'))^{-N}.$$

Alors la fonction f définie sur D par

$$f(Y) = \iint a(X,X')\,W(\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})(Y)\,d\underline{m}(X)\,d\underline{m}(X')$$

vérifie l'inégalité $|f(Y)| \leqslant CC_1C_2\; m(Y)$ pour tout $Y \in D$.

Preuve. D'après le lemme 9.2 (déjà utilisé pour prouver (9.7) mais ici on opère en sens inverse) on a

$$\widetilde{m}(X) \leqslant CC_1 m(Y)\,(1+|T|^2)^{N_1}(r(x)r(y))^{-\frac{1}{2}N_1} \tag{11.1}$$

avec une constante C ne dépendant que de N_1. On a posé $T = r(y)M^{-1}(X+iJ\eta)$ avec $M\in G$, $y = M\omega$, et l'on utilise l'estimation de la fonction de Wigner écrite entre (9.11) et (9.12). Pour commencer, traitons l'exponentielle intervenant au second membre : pour tout $N_2 \geqslant 1$, on a

$$\exp-(C^{-1}|T|\,\delta_+^{-11\sqrt{2}-\frac{13}{4}}) \leqslant (N_2C)^{N_2}(1+|T|)^{-N_2}\,\delta_+^{N_2(11\sqrt{2}+\frac{13}{4})}. \tag{11.2}$$

Le nombre N_2 sera choisi plus tard mais ne dépendra que de λ et N_1 : dans la suite, on désigne par C une constante inconnue ne dépendant que de n, N_1 et λ. On suppose également $n \geqslant 2$, le cas $n = 1$ ne nécessitant que de très légères modifications et le cas $n = 0$ ayant été traité dans [48].

On a alors

$$|W(\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})(Y)| \leqslant C(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1)}\,\delta_+^b\,(1+\log\delta_+)\; |T|^{1-n}(1+|T|)^{-N_2}[1+|\log|T|| + |\log(r(x)r(y))|] \tag{11.3}$$

avec

$$b = \frac{1}{2}(\lambda+n+1)+(N_2+n-1)(11\sqrt{2}+\frac{13}{4}).$$

Puisque

$$T = r(y)M^{-1}x + i\, r(y)M^{-1}(\xi+J\eta),$$

on a, en désignant par dT la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$,

$$dT = (r(y))^{n+1}dx\, d\xi = (r(x)r(y))^{n+1}d\underline{m}(X). \tag{11.4}$$

Par suite

$$|f(Y)| \leqslant CC_1C_2\; m(Y)\; I_1I_2 \tag{11.5}$$

avec

$$I_1 = \int (\delta_+(X,X'))^{b-N}\,[1+\log\,\delta_+(X,X')]d\underline{m}(X') \tag{11.6}$$

et

$$I_2 = \int (r(x)r(y))^{\frac{1}{2}(\lambda-n-1-N_1)}|T|^{1-n}(1+|T|)^{-N_2}(1+|T|^2)^{N_1} \tag{11.7}$$

$$[1+|\log|T||+|\log(r(x)r(y))|\,]\,dT.$$

La seconde intégrale est bornée pourvu que l'on ait

$$\lambda-n-1-N_1 > 0 \tag{11.8}$$

et, compte tenu de l'inégalité $(r(x)r(y))^{\frac{1}{2}} \leqslant |T|$, que l'on ait aussi

$$N_2 > 2+\lambda+N_1\ . \tag{11.8 bis}$$

On choisira $N_2 = 3+\lambda+N_1$. D'après le lemme 10.6, l'intégrale I_1 est alors bornée pourvu que l'on ait $N > b+2n$, ce qui est la condition indiquée dans le lemme 11.1.

Nous allons maintenant estimer les normes $\|f\|_{m;k}$ introduites dans la définition 6.4. Compte tenu des relations de covariance

$$W(\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})((M,b)^{-1}.Y) = W(\psi^\lambda_{[M,b]X},\psi^\lambda_{[M,b]X'})(Y)$$

(laquelle résulte des propositions 3.3 et 3.7) et

$$f((M,b)^{-1}.Y) = \iint a([M,b]^{-1}X,[M,b]^{-1}X')W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)\,d\underline{m}(X)\,d\underline{m}(X'),$$

il suffit d'estimer les dérivées de f aux points $Y = (\omega,\eta)$ ou même $(\omega,0)$; revenant à la définition de f donnée dans le lemme 11.1, on voit que ce sont les dérivées par rapport à (y,η) (évaluées en $y=\omega$, $\eta = 0$) de la fonction $W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y)$ qu'il s'agit d'évaluer. On reprend les notations du théorème 7.3, c'est-à-dire que l'on pose $y = M\omega$ $(M \in G_0)$,

$$(11.9) \qquad T = r(y)M^{-1}(X+i\,J\eta), \qquad T' = r(y)M^{-1}(X'+i\,J\eta).$$

On a alors

$$(11.10) \qquad r(T)r(\bar{T}') = (r(y))^2 r(X+i\,J\eta)r(\bar{X}'-i\,J\eta)$$

et comme la formule (2.16) peut s'écrire

$$(MM')^{-1}x = (r(y))^{-1}[-Jx+2(r(y))^{-1}\langle x,Jy\rangle Jy],$$

on a aussi

$$(11.11) \qquad \langle T,\bar{T}'\rangle = -r(y)\langle J(X+iJ\eta),\bar{X}'-iJ\eta\rangle+2\langle Jy,X+iJ\eta\rangle\langle Jy,\bar{X}'-iJ\eta\rangle.$$

Rappelons enfin que $\rho(T,T') = \langle T,\bar{T}'\rangle+r(T)^{\frac12}r(\bar{T}')^{\frac12}$. Le théorème 7.3 et les formules (11.10) et (11.11) permettent l'évaluation des dérivées souhaitées. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on désignera abusivement par D^k n'importe quel opérateur de dérivation partielle par rapport aux coordonnées (y,η), d'ordre total k. Avec les notations du lemme 9.1, on pose $\rho = \rho(T,T')$ et

$$(11.12) \qquad \alpha = \rho^{-\frac12}\langle T,\bar{T}'\rangle \quad , \quad \beta = \rho^{-\frac12}(r(T))^{\frac12}r(\bar{T}')^{\frac12}$$

d'où $\alpha+\beta = \rho^{\frac12}$. Avec

$$(11.13) \qquad g(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^{\frac{1-n}{2}}\int_0^\infty e^{-\pi(\alpha+\beta)s}\,e^{-2\pi\alpha s^{-1}}K_0(2\pi\beta s^{-1})s^{-\frac{n+1}{2}}ds,$$

on a alors

$$(11.14) \qquad W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(Y) = 2^{n+1}c_\lambda^2[r(x)(r(y))^2r(x')]^{\frac14(\lambda+n+1)}g(\alpha,\beta).$$

Considérons maintenant l'effet sur une dérivée $D^j(W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda))$ d'une dérivation d'ordre 1 supplémentaire, sans oublier qu'à la fin on n'évaluera $D^k(W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda))$ qu'au point $y=\omega$. Pour commencer, la dérivation d'une fonction de Bessel $K_\nu(z)$ ne dégrade pas le comportement de celle-ci pour $|z|$ grand, mais multiplie par z^{-1} (à une constante près) ou bien $z^{-1}(\log z)^{-1}$ le terme principal du développement de la fonction en $z = 0$. Par ailleurs, les résultats du lemme 9.1 conduisent, pour tout μ réel, à l'inégalité

(11.15) $$\int_0^\infty e^{-\pi\gamma(s+2s^{-1})} s^{\mu-1}(1+|\log s|)\,ds \leqslant C\, e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\gamma^{-|\mu|}[1+(\log\gamma)^2].$$

En l'occurrence, $\gamma = \mathrm{Re}\,\rho^{\frac12}$ et le remplacement de μ par $\mu \pm 1$ n'est pas susceptible d'affecter le second membre de (11.15) par un facteur plus grand que $\gamma+\gamma^{-1}$. Si l'on examine les différents termes produits par les dérivations successives de $g(\alpha,\beta)$ définie en (11.13) et si l'on part de (11.3), on obtient, avec la même valeur de b, l'inégalité

(11.15) $$|D^k W(\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)(\omega,0)| \leqslant C(r(x))^{\frac12(\lambda+n+1)}\delta_+^b(1+\log^2\delta_+)$$
$$|T|^{1-n}(1+|T|)^{-N_2}[1+\log^2|T|+\log^2(r(x))]\,\theta^k,$$

pourvu que la fonction $\theta=\theta(T,T')$ permette d'obtenir, avec des constantes C ne dépendant que de n et de j, les inégalités

(11.16) $$(|D^j\alpha|+|D^j\beta|)(\gamma+\gamma^{-1})^j \leqslant C\,\theta^j, \qquad j \geqslant 1$$

ainsi que (avec C ne dépendant que de n)

(11.17) $$\frac{|D^j\rho|}{|\rho|}+\frac{|D^j\beta|}{|\beta|} \leqslant C\theta^j.$$

Si nous posons

(11.18) $$u = \langle T,\bar{T}'\rangle, \quad v = r(T)^{\frac12} r(\bar{T}')^{\frac12},$$

d'où

$$\rho = u+v \ , \quad \alpha = \rho^{-\frac{1}{2}} u \ , \quad \beta = \rho^{-\frac{1}{2}} v \ , \tag{11.19}$$

on vérifie les inégalités

$$|D^j u| \leqslant C(1+|T|)(1+|T'|), \tag{11.20}$$

$$|D^j v| \leqslant C|r(T)|^{\frac{1}{2}} \ |r(T')|^{\frac{1}{2}} \left[1+\frac{|T|}{|r(T)|}+\frac{|T'|}{|r(T')|}\right]^j \tag{11.21}$$

et

$$|D^j \rho| \leqslant C(1+|T|)(1+|T'|)\left[1+\frac{|T|}{|r(T)|}+\frac{|T'|}{|r(T')|}\right]^j. \tag{11.22}$$

D'après la proposition 8.5,

$$|\rho| \geqslant C^{-1} |T| \ |T'| \ \delta_+^{-2\sqrt{2}} \tag{11.23}$$

et par suite (11.17) sera vérifiée pourvu que $\theta \geqslant \theta_o$ avec

$$\theta_o = \delta_+^{2\sqrt{2}} \ \frac{(1+|T|)(1+|T'|)}{|T| \ |T'|}\left[1+\frac{|T|}{|r(T)|}+\frac{|T'|}{|r(T')|}\right]. \tag{11.24}$$

En se servant de l'inégalité évidente $\operatorname{Re}(\rho^{\frac{1}{2}}) \leqslant 2^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}} \ |T'|^{\frac{1}{2}}$ et du théorème 8.11, on obtient

$$\gamma + \gamma^{-1} \leqslant C \ \delta_+^{11\sqrt{2}+2} \ \frac{(1+|T|)(1+|T'|)}{|T|^{\frac{1}{2}} \ |T'|^{\frac{1}{2}}}. \tag{11.25}$$

D'après (11.17) on a

$$|D^j(\rho^{-\frac{1}{2}})| \leqslant C \, |\rho|^{-\frac{1}{2}} \theta_o^j \tag{11.26}$$

et (11.20),(11.21) et (11.19) fournissent alors

$$\begin{aligned} |D^j \alpha| + |D^j \beta| &\leqslant C \ |\rho|^{-\frac{1}{2}}(1+|T|)(1+|T'|) \ \theta_o^j \\ &\leqslant C\delta_+^{\sqrt{2}} |T|^{-\frac{1}{2}} \, |T'|^{-\frac{1}{2}}(1+|T|)(1+|T'|)\theta_o^j. \end{aligned} \tag{11.27}$$

Les inégalités (11.27) et (11.25) montrent que (11.16) sera à son tour vérifiée si

$$(11.28) \qquad \theta = \theta_0\, \delta_+^{12\sqrt{2}+2} |T|^{-1} |T'|^{-1} (1+|T|)^2 (1+|T'|)^2$$

$$= \delta_+^{14\sqrt{2}+2} |T|^{-2} |T'|^{-2} (1+|T|)^3 (1+|T'|)^3 \left[1+\frac{|T|}{|r(T)|}+\frac{|T'|}{|r(T')|}\right].$$

En utilisant le théorème 5.7 pour majorer $\left(\frac{|T|}{|T'|}\right)^{\pm 1}$ ainsi que (9.9) et (9.10) pour minorer $|r(T)|$ et $|r(T')|$ on obtient

$$(11.29) \qquad \theta \leqslant C\, \delta_+^{14\sqrt{2}+\frac{23}{2}} \frac{(1+|T|)^6}{|T|^4} \left[1+\frac{|T|}{r(x)\,r(y)}\right].$$

L'inégalité (11.15) fournit enfin

$$(11.30) \qquad |D^k W(\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)(\omega,0)| \leqslant C\, r(x)^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1)} \delta_+^a (1+\log^2 \delta_+)$$

$$|T|^{1-n-4k} (1+|T|)^{6k-N_2} [1+(r(x))^{-k} |T|^k][1+\log^2 |T| + \log^2 r(x)],$$

avec

$$(11.31) \qquad a = \frac{1}{2}(\lambda+n+1) + (N_2+n-1)\,(11\sqrt{2}+\frac{1[illegible]}{4}, [illegible]\, 14\sqrt{2}+\frac{23}{2})$$

où, rappelons-le, N_2 peut être choisi comme on le souhaite mais ne doit dépendre que de (n,λ,N_1,k). En procédant comme dans la preuve du lemme 11.1 on a

$$(11.32) \qquad |(D^k f)(\omega,0)| \leqslant C C_1 C_2\, m(\omega)\, I_1 I_2$$

avec C ne dépendant que de (n,λ,N_1,k) et

$$(11.33) \qquad I_1 = \int (\delta_+(X,X'))^{a-N} [1+\log^2 \delta_+(X,X')]\, d\underline{m}(X'),$$

$$(11.34) \qquad I_2 = \int (r(x))^{\frac{1}{2}(\lambda-n-1-N_1)} |T|^{1-n-4k} (1+|T|)^{6k-N_2}$$

$$(1+|T|^2)^{N_1} \left[1+\frac{|T|^k}{(r(x))^k}\right] [1+\log^2 |T| + \log^2 r(x)]\, dT.$$

L'intégrale I_2 est bornée pourvu que l'on ait

$$(11.35) \qquad \lambda-n-1-N_1-2k > 0,$$

$$(11.36) \qquad \lambda > N_1+5k-2\ ,$$

$$(11.37) \qquad N_2 > 2+\lambda+N_1+2k\ :$$

la relation (11.36) exprime la sommabilité de l'intégrale I près de $T = 0$, après majoration de $r(x)^{\frac{1}{2}}$ par $|T|$: elle n'était pas apparue précédemment car lorsque $k = 0$ c'est une conséquence de (11.35). Pour ne pas compliquer inutilement ces majorations assez grossières, on remplira (11.35) et (11.36) simultanément en exigeant

$$(11.38) \qquad \lambda > N_1+5k+n+1.$$

Puis on prend $N_2 = 3+\lambda+N_1+2k$: alors I_1 est finie pourvu que $N > a+2n$. Armé d'une calculatrice de poche, on parvient finalement au résultat suivant :

LEMME 11.2. Soient m une fonction-poids, C_1 et N_1 tels que

$$\tilde{m}(X) \leqslant C_1 \tilde{m}(X')(\delta_+(X,X'))^{N_1}$$

pour tout couple (X,X'). Soit k un entier $\geqslant 0$. Pour tout $\lambda > n+1+N_1+5k$, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de (n,N_1,k,λ) vérifiant ce qui suit : soit

$$N = 35(N_1+\lambda+n+2k+2)$$

et soit a une fonction mesurable sur $\Pi\times\Pi$ vérifiant, pour une certaine constante $C_2 > 0$ et pour tout couple (X,X'), l'inégalité

$$|a(X,X')| \leqslant C_2 \tilde{m}(X)(\delta_+(X,X'))^{-N}.$$

Alors la fonction f définie sur D par

$$f(Y) = \iint a(X,X')W(\psi^\lambda_X,\psi^\lambda_{X'})(Y)\,d\underline{m}(X)\,d\underline{m}(X')$$

est de classe C^k et vérifie l'inégalité

$$\|f\|_{m;k} \leqslant CC_1C_2$$

au sens de la définition 6.4.

Observons que dans le théorème 9.9 le nombre λ doit être nettement plus grand que $2N$: ici N doit, au contraire, être grand par rapport à λ . C'est la raison de la généralisation qui suit de la proposition 3.4 et du lemme 10.4.

PROPOSITION 11.3. Soient λ et ν deux nombres réels strictement supérieurs à $\max(0,n-1)$. Il existe un nombre $k_{\lambda,\nu} > 0$ tel que, quelles que soient u et $v \in H$, on ait

$$\int_{\Pi} (u,\psi_X^\lambda)(\psi_X^\nu,v)\,d\underline{m}(X) = k_{\lambda,\nu}(u,v).$$

De plus, pour toute distribution $u \in \mathcal{S}'(C)$, si l'on choisit en outre λ assez grand, alors la formule reste valable pour toute $v \in \mathcal{S}(C)$.

Preuve : D'après la proposition 3.4 et l'inégalité de Schwarz, l'intégrale converge et peut s'écrire (Au,v) pour un certain opérateur linéaire continu de H dans H : d'après la proposition 3.3, celui-ci commute avec les opérateurs $V(M,b)$. Le lemme de Schur fournit alors la relation indiquée puisque V est irréductible, mais il faut encore montrer que $k_{\lambda,\nu}$ est réel > 0. Choisissons $u \in H$ à support compact dans C, et posons $v(t) = r(t))^{\frac{1}{4}(\lambda-\nu)}u(t)$. Alors

$$(v,\psi_X^\nu) = (u,(r(t))^{\frac{1}{4}(\lambda-\nu)}\psi_X^\nu) = \frac{c_\nu}{c_\lambda}(r(x))^{\frac{1}{4}(\nu-\lambda)}(u,\psi_X^\lambda)$$

d'où

$$\int (u,\psi_X^\lambda)(\psi_X^\nu,v)\,d\underline{m}(X) = \frac{c_\nu}{c_\lambda}\int |(u,\psi_X^\lambda)|^2 (r(x))^{\frac{1}{4}(\nu-\lambda)}\,d\underline{m}(X) > 0 ,$$

ce qui permet de conclure puisque dans le cas examiné on a $(u,v) > 0$.

La deuxième partie de l'énoncé se prouve comme le lemme 10.4.

THÉORÈME 11.4. Soient m une fonction-poids et A un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(C)$ dans $\mathcal{S}(C)$: d'après les résultats de la section 10, on peut alors définir $(A\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)$ pour tout couple (X,X') si λ est assez grand. Supposons que pour tout $N > 0$ il existe $\lambda_o > 0$ et, pour tout $\lambda > \lambda_o$, une constante $C > 0$ pour laquelle on ait l'inégalité

$$(11.38) \qquad |(A\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)| \leqslant C\,\widetilde{m}(X)\,(\delta_+(X,X'))^{-N}$$

pour tout couple (X,X'). Alors A peut s'écrire $\mathrm{Op}(f)$ pour un certain symbole f unique de poids m. De plus, pour tout nombre réel ν assez grand, on peut trouver λ tel que, avec la constante $k_{\lambda,\nu}$

introduite à la proposition 11.3, le symbole passif h de A défini par $h = Ff$ (cf. prop. 6.9) soit donné par

$$h(Y) = k_{\lambda,\nu}^{-2}\iint (A\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)\, W(\psi_{X'}^\nu,\psi_X^\nu)(Y)\, d\underline{m}(X)\, d\underline{m}(X') .$$

Preuve. D'après la proposition 11.3, on a, si λ est assez grand et si $\nu > \max(0,n-1)$, l'identité suivante, valable quelles que soient u et v $\in \mathcal{S}(C)$ ou même $\mathcal{S}_E(C)$ avec les notations de la section 10 et un choix convenable de E :

$$(11.39)\qquad (Au,v) = k_{\lambda,\nu}^{-2}\iint (u,\psi_X^\nu)\,(A\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)\,(\psi_{X'}^\nu,v)\, d\underline{m}(X)\, d\underline{m}(X') .$$

Il suffit en effet de développer sous la forme fournie dans cette proposition le produit scalaire $(A\,u,v)$, puis de développer à son tour $(Au,\psi_{X'}^\lambda) = (u,A^*\psi_{X'}^\lambda)$ de la même façon puisque $A^*\psi_{X'}^\lambda \in \mathcal{S}'(C)$. Posons

$$(11.40)\qquad h(Y) = k_{\lambda,\nu}^{-2}\iint (A\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)\, W(\psi_{X'}^\nu,\psi_X^\nu)(Y)\, d\underline{m}(X)\, d\underline{m}(X') .$$

Soit k un entier $\geqslant 0$ arbitraire. D'après le lemme 11.2 on peut affirmer, si ν et λ sont bien choisis, que h est un symbole de poids m jusqu'à l'ordre de différentiabilité k : ceci signifie bien entendu que $h \in C^k(D)$ et que $\|h\|_{m;k} < \infty$. En effet on est dans les conditions où ce lemme peut s'appliquer pourvu que $\nu > n+1+N_1+5k$ et que (11.38) soit remplie avec N assez grand (une fonction de N_1,ν,n,k) : à son tour cette inégalité est satisfaite si λ est assez grand.
La proposition 6.9 montre alors que la fonction $f = F^{-1}h$ est, pour k assez grand, un symbole de poids m jusqu'à l'ordre de différentiabilité k', où k' peut être rendu arbitrairement grand pourvu que k soit assez grand. Nous allons montrer que $A = Op(f)$, les méthodes développées dans tout ce travail rendant naturellement la définition de cet opérateur acceptable dès que f est un symbole de poids m jusqu'à un ordre de différentiabilité fini mais assez grand. Il suffit de prouver que l'on a $(Op(f)\psi_Z^\lambda,\psi_{Z'}^\lambda) = (A\psi_Z^\lambda,\psi_{Z'}^\lambda)$ pour tout couple (Z,Z'), λ ayant été augmenté si nécessaire (ce qui ne nuit en rien à ce qui précède) pour que les fonctions ψ_Z^λ appartiennent à un espace $\mathcal{S}_E(C)$ tel que Op(f) se prolonge en un opérateur continu de $\mathcal{S}_E(C)$ dans $\mathcal{S}_E'(C)$.

LEMME 11.5. Fixons Z et $Z' \in \Pi$. Quels que soient k, a et b $\in \mathbb{N}$, la fonction $W(\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda)$ est, pour λ assez grand (ne dépendant que de k, a et b) un symbole de poids $(r(y))^a(1+|Y|^2)^{-b}$ jusqu'à l'ordre de différentiabilité k.

Preuve. avec $y = M\omega$, $M \in G$, $Z = z+i\zeta$ et $T = r(y)M^{-1}(Z+iJ\eta)$, choisissons $N \in G$ tel que $z = N\omega$. D'après (9.5) et (6.3), on peut écrire

$$\begin{aligned}|T|^2 &= |r(y)M^{-1}z|^2 + |r(y)M^{-1}(\zeta + J\eta)|^2 \\ &\geqslant |r(z)N^{-1}y|^2 + \frac{1}{2}|y|^{-2}(r(y))^2|\zeta + J\eta|^2.\end{aligned}$$

Le lemme est alors une conséquence immédiate des inégalités (11.3) et (11.30), étant entendu qu'aucune uniformité par rapport à Z ou Z' n'est requise pour notre propos.

Fin de la preuve du théorème 11.4.

D'après le lemme 11.1 (dans la preuve duquel seules des majorations de la valeur absolue de la fonction de Wigner ont été utilisées), on a

$$(11.41)\qquad \iint |(A\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)|\ \ |W(\psi_{X'}^\nu, \psi_X^\nu)(Y)|\, d\underline{m}(X)\, d\underline{m}(X') \leqslant C\, m(Y).$$

Considérons la fonction $W^{\#}(\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda) = F^{-1}(W(\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda))$ qui n'est autre que le symbole actif de l'opérateur $u \mapsto (u, \psi_{Z'}^\lambda)\psi_Z^\lambda$: la proposition 6.9 et le lemme 11.5 montrent que pour a et $b \in \mathbb{N}$ arbitrairement grands elle est, si λ est assez grand, un symbole de poids $(r(y))^a(1+|Y|^2)^{-b}$ jusqu'à l'ordre de différentiabilité 0. Comme $m(Y) \leqslant C_1 m(\omega, 0)(\delta_+(\omega, \tau^{-1}Y))^{N_1}$, cela suffit, vu (11.41), pour assurer la convergence de l'intégrale

$$\iiint (A\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda) W(\psi_{X'}^\nu, \psi_X^\nu)(Y) W^{\#}(\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda)(Y)\, d\underline{m}(X)\, d\underline{m}(X')\, dY.$$

D'après la relation (4.0), on a

$$(11.42)\qquad \int W^{\#}(\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda)(Y) W(\psi_{X'}^\nu, \psi_X^\nu)(Y)\, dY = (\psi_{X'}^\nu, \psi_{Z'}^\lambda)(\psi_Z^\lambda, \psi_X^\nu).$$

Enfin l'opérateur F^{-1}, décrit dans le théorème 4.2, est son propre transposé : c'est une conséquence de la formule de Parseval, et un argument identique a déjà été utilisé dans la preuve du lemme 9.7.

La formule (10.22) permet alors d'écrire

$$(11.43) \qquad (\mathrm{Op}(f)\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda) = \int_D h(Y) W^{\#}(\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda)(Y)\,dY$$

et en partant de (11.40) et se servant de (11.42), on obtient

$$(11.44) \qquad (\mathrm{Op}(f)\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda) = k_{\lambda,\nu}^{-2} \iint (A\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)(\psi_{X'}^\nu, \psi_{Z'}^\lambda)(\psi_Z^\lambda, \psi_X^\nu)\,d\underline{m}(X)\,d\underline{m}(X'),$$

ou enfin, à l'aide de (11.39),

$$(11.45) \qquad (\mathrm{Op}(f)\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda) = (A\psi_Z^\lambda, \psi_{Z'}^\lambda).$$

Ceci montre que $A = \mathrm{Op}(f)$. Il reste à prouver que si $A = \mathrm{Op}(f_1)$ pour un certain symbole f_1 de poids m, alors $h_1 = Ff_1$ est identique à h défini pour λ et ν assez grands par (11.40). C'est bien le cas si $f_1 \in C_o^\infty(D)$ car alors (11.40) exprime que h est le symbole passif de l'opérateur à trace A, développé à l'aide de (11.39). Or, le théorème 9.9 et le lemme 11.1 montrent la continuité séquentielle du second membre de (11.40) relativement à f_1 : une application des propositions 6.8 et 6.9 termine alors la preuve du théorème 11.4.
Remarque. On peut dans l'énoncé du théorème 11.4 remplacer la première hypothèse par celle que A opère continûment de $\mathcal{S}_E(C)$ dans $\mathcal{S}'_E(C)$ pour E bien choisi : si l'on part, pour $u \in \mathcal{S}(C)$, de l'expression du produit scalaire (Au, ψ_X^λ) fournie par le lemme 10.4, cela résulte en effet du théorème 10.2, du lemme 5.2 et d'une application de l'inégalité de Schwarz.

XII - LA COMPOSITION DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS.

DÉFINITION 12.1. Soit m une fonction-poids. On appellera opérateur pseudo-différentiel de poids m tout opérateur de la forme Op(f), où f est un symbole de poids m.

Remarque : le théorème 11.4 montre qu'alors f est unique (c'est le symbole actif de Op(f)), et le symbole passif de Op(f) (c'est par définition h = Ff) est aussi un symbole de poids m.

THÉORÈME 12.2. Soient A et B deux opérateurs pseudo-différentiels de poids m_1 et m_2 respectivement. Alors le composé AB est un opérateur pseudo-différentiel de poids $m_1 m_2$.

Preuve. Notons d'abord que, d'après le théorème 10.8, AB est bien défini en tant qu'opérateur de $\mathcal{S}(C)$ dans $\mathcal{S}(C)$. Pour λ assez grand, et tout couple (X,X'), le lemme 10.4 permet d'écrire

$$(AB\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda) = (B\psi_X^\lambda, A^*\psi_{X'}^\lambda) = k_\lambda^{-1} \int (B\psi_X^\lambda, \psi_Z^\lambda)(A\psi_Z^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)\, d\underline{m}(Z).$$

D'après le théorème 9.9 et la formule (10.22), on a pour tout N, avec des constantes C indépendantes de (X,Z,X'), les inégalités

$$|(A\psi_Z^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)| \leqslant C\, \tilde{m}_1(X')(\delta_+(Z,X'))^{-N}$$

et

$$|(B\psi_X^\lambda, \psi_Z^\lambda)| \leqslant C\, \tilde{m}_2(X)(\delta_+(X,Z))^{-N}$$

d'où

$$|(AB\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)| \leqslant C\, \tilde{m}_2(X)\tilde{m}_1(X')\, I \tag{12.1}$$

avec, par application du lemme 5.2,

$$\begin{aligned} I &= \int (\delta_+(X,Z))^{-N}(\delta_+(Z,X'))^{-N} d\underline{m}(Z) \\ &\leqslant C(\delta_+(X,X'))^{-N+n+1}\left[\int (\delta_+(X,Z))^{-2n-2} d\underline{m}(Z)\right]^{\frac12} \\ &\qquad\qquad \left[\int (\delta_+(Z,X'))^{-2n-2} d\underline{m}(Z)\right]^{\frac12} \\ &\leqslant C(\delta_+(X,X'))^{-N+n+1}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du lemme 10.6. Par suite

$$|(AB\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)| \leqslant C\, \tilde{m}_2(X)\tilde{m}_1(X')(\delta_+(X,X'))^{-N+n+1} \tag{12.2}$$

et comme

$$\tilde{m}_1(X') \leqslant C_1\, \tilde{m}_1(X)(\delta_+(X,X'))^{N_1}, \tag{12.3}$$

le théorème 11.4 permet de conclure.

L'estimation qui suit sera utilisée plus tard.

LEMME 12.3. <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 12.2, <u>supposons</u> (12.3) <u>vérifiée ainsi que l'inégalité</u>

$$\widetilde{m}_2(X') \leqslant C_2\, \widetilde{m}_2(X)\,(\delta_+(X,X'))^{N_2}$$

<u>pour tout</u> (X,X'). <u>Soient</u> f,g <u>et</u> $f \circ g$ <u>les symboles actifs respectifs de</u> A,B <u>et</u> AB. <u>Soit</u> k <u>un entier</u> $\geqslant 0$. <u>Il existe un entier</u> $k' \geqslant 0$ <u>ne dépendant que de</u> n,N_1,N_2 <u>et</u> k, <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>ne dépendant que de</u> n,N_1,N_2,k,C_1 <u>et</u> C_2 <u>tels qu'on ait en outre</u>

$$\|f \circ g\|_{m_1m_2;k} \leqslant C\|f\|_{m_1;k'}\,\|g\|_{m_2;k'}\ .$$

<u>Preuve</u>. Soit $h = F(f \circ g)$ le symbole passif de AB. D'après la proposition 6.9 on a

$$\|f \circ g\|_{m_1m_2;k} \leqslant CC_1C_2\|h\|_{m_1m_2;k''}$$

si k'' et C (dépendant de n,N_1,N_2 et k) sont bien choisis. D'après le théorème 11.4 et le lemme 11.2 (dans lequel λ doit être remplacé par ν), on peut trouver N,C et λ_0 ne dépendant que de (n,N_1,N_2,k) tels qu'on ait alors

$$\|f \circ g\|_{m_1m_2;k} \leqslant CC_1^2C_2^2\ K$$

pourvu qu'il existe $\lambda > \lambda_0$ permettant de réaliser les inégalités

$$|(AB\psi_X^\lambda,\psi_{X'}^\lambda)| \leqslant K\ \widetilde{m}_1(X)\widetilde{m}_2(X)\,(\delta_+(X,X'))^{-N}.$$

Si l'on se refère à (12.3) et à la façon dont nous avons obtenu (12.2) en partant du théorème 9.9, on voit que l'on obtient finalement l'inégalité

$$\|f \circ g\|_{m_1m_2;k} \leqslant CC_1^4C_2^3\|f\|_{m_1;k'}\,\|g\|_{m_2;k'}$$

avec des constantes C et k' ne dépendant que de n,N_1,N_2 et k.

Dans le reste de cette section, nous allons établir une formule intégrale exprimant la composition des symboles. Celle-ci est en effet susceptible d'intéresser certains lecteurs ; elle apporte en outre des faits de structure inhabituels (zones d'influence). En revanche, la méthode que nous employons rend l'utilisation de cette formule inutile, voire nuisible, en vue de la recherche du développement asymptotique du composé de deux symboles (voir section 1).

Les calculs qui suivent sont formels mais pourraient, au prix de longueurs, être aisément justifiés en partant de symboles dans la classe $\mathcal{K}(D)$ introduite à la section 4. Rien ne nous obligeant à choisir l'une plutôt que l'autre des deux espèces de symboles (actif et passif) utilisées jusqu'à présent, nous allons en choisir une troisième ! La formule de composition y gagnera en simplicité.

DÉFINITION 12.4. *Si* $f \in \mathcal{K}(D)$, *le nouveau symbole* g *de l'opérateur* $\mathrm{Op}(f)$ *est la fonction* $g \in \mathcal{K}(D)$ *définie par*

$$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(y,z) = \left(\tfrac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta)\right)^{1-n}(\mathcal{F}_2^{-1}f)(y,z)$$

où α *et* β *sont les fonctions de* (y,z) *définies dans le lemme* 4.1.

PROPOSITION 12.5. *Pour toute fonction-poids* m, *l'application* $f \mapsto g$ *que l'on vient de définir, de même que l'application inverse, se prolonge en une application séquentiellement continue de* $\mathrm{Symb}(m)$ *dans* $\mathrm{Symb}(m)$.

Preuve : Il n'y a presque rien à changer à la preuve de la proposition 6.9.

Remarques : 1) pour tout opérateur pseudo-différentiel A de poids m, le nouveau symbole g de A se définit sans ambiguïté grâce à la proposition 12.5 et à la remarque qui suit la définition 12.1.

2) si h est le symbole passif de A, rappelons que le théorème 4.2 fournit la relation

$$(\mathcal{F}_2^{-1}h)(y,z) = \left(\tfrac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta)\right)^{1-n}(\operatorname{ch}\alpha\,\operatorname{ch}\beta)^{-1}(\mathcal{F}_2^{-1}f)(y,z).$$

LEMME 12.6. *Le noyau* k *d'un opérateur et son nouveau symbole* g *sont liés par la relation*

$$k(s,t) = 2^{1-n}\left((r(s))^{\frac12} + (r(t))^{\frac12}\right)^{n-1}(r(s)r(t))^{\frac12}\,(\mathcal{F}_2^{-1}g)(\mathrm{mil}(s,t),s-t).$$

Preuve. Si f est le symbole actif de l'opérateur, on a, d'après (4.3),

$$k(s,t) = 2^{\frac{1}{2}(n-1)}(r(s)r(t))^{n/2}[\langle s,Jt\rangle+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}(1-n)}$$

$$(\mathcal{F}_2^{-1}f)(m\ell(s,t),s-t).$$

Si l'on utilise la définition 12.4 , il ne reste plus, pour prouver le lemme, qu'à extraire de la preuve du théorème 4.2 (avec $s = S_y t$) les relations

(12.4) $$r(s) = r(y)e^{\alpha+\beta} , \; r(t) = r(y)e^{-(\alpha+\beta)} ,$$

$$\langle s,Jt\rangle+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}} = \frac{2\langle y,Jt\rangle^2}{r(t)} = 2r(y)\operatorname{ch}^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

d'où

(12.5) $$(r(s))^{\frac{1}{2}}+(r(t))^{\frac{1}{2}} = 2(r(y))^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

et, pour mémoire,

$$r(s+t) = 4r(y)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta .$$

Le calcul du composé de deux symboles va nécessiter un changement de variables compliqué.

LEMME 12.7. Pour tout couple (x,y) de points de C, définissons la transformation linéaire A_x^y sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par la relation

$$A_x^y z = (r(y))^{-1}[-\langle z,Jx\rangle y + \langle x,Jy\rangle z + \langle y,Jz\rangle x].$$

Elle est régulière et a pour déterminant $(r(y))^{-n}(\langle x,Jy\rangle)^{n-1}r(x)$. Si x,y et z sont trois points de C, on a les identités $A_x^y z = A_z^y x$ et $A_x^y(S_y z) = A_x^z y$. Définissons la fonction τ sur $C\times C\times C$ par la relation $\tau(x,y,z) = (r(y))^2 r(A_x^y z)$. Alors τ est symétrique en (x,y,z) et, de plus, la fonction θ définie par $\theta(x,y,z) = (r(x)r(y)r(z))^{-1}\tau(x,y,z)$ est invariante par l'action du groupe G_o sur x,y et z.

Preuve : On commence par vérifier (c'est immédiat) que l'on a

(12.6) $$M^{-1} A_x^y M = A_{M^{-1}x}^{M^{-1}y}$$

pour toute $M \in G_o$. On peut en particulier choisir M telle que $M^{-1}y = \omega$ et $M^{-1}x = x' = (x'_o, x'_1, 0\ldots, 0)$: dans ce cas, il suffit d'expliciter la matrice $A_{x'}^{\omega}$ pour vérifier que son déterminant est ${x'_o}^{n-1} r(x')$. Comme $x'_o = \langle M^{-1}x, J\omega\rangle = r(y)^{-1}\langle x, Jy\rangle$ et que $r(x') = r(y)^{-1} r(x)$, la première formule est vérifiée. La deuxième est triviale. Si l'on pose $z' = M^{-1}z$, il est facile de vérifier l'identité de

$$A_{x'}^{\omega} Sz' = -\langle Sz', Jx'\rangle \omega + x'_o Sz' + (Sz')_o x'$$

et de

$$A_{x'}^{z'} \omega = (r(z'))^{-1} [-x'_o z' + \langle x', Jz'\rangle \omega + z'_o x'].$$

On en déduit la relation $A_x^y(S_y z) = A_x^z y$ en se servant de (12.6) et de la formule $S_y = MSM^{-1}$. En développant, on obtient

$$\tau(x,y,z) = \langle x,Jy\rangle^2 r(z) + \langle y,Jz\rangle^2 r(x) + \langle z,Jx\rangle^2 r(y) - 2\langle x,Jy\rangle\langle y,Jz\rangle\langle z,Jx\rangle$$

ce qui prouve la dernière partie du lemme.

<u>Remarque</u> : si l'on développe

$$\theta(\omega, x', z') = (r(x')r(z'))^{-1} [{x'_o}^2 r(z') - {x'_1}^2 ({z'_o}^2 - {z'_1}^2)]$$

(sous les hypothèses de la preuve qui précède) et si l'on utilise l'invariance de groupe, on voit que l'on a $\theta(x,y,z) \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si x,y,z sont linéairement dépendants : ce dernier cas est bien sûr le seul lorsque n = 0 ou 1.

LEMME 12.8. <u>Soit</u> $y \in C$. <u>L'application</u> $\Psi_y : C \times C \longrightarrow C \times C$ <u>définie par</u>

$$\Psi_y(s,t) = (x,z) = (\mathrm{mil}(s,t), \mathrm{mil}(S_y s, t))$$

est un difféomorphisme dont l'image est la partie Δ_y de $C \times C$ caractérisée par la condition $\theta(x,y,z) > 0$. La transformation $\Phi_y : (x,z) \mapsto (s,t)$ définie par les formules

$$s = (\theta(x,y,z))^{-\frac{1}{2}} A_x^z y \ , \ t = (\theta(x,y,z))^{-\frac{1}{2}} A_z^y x$$

est l'inverse de Ψ_y. On a également $S_y s = \theta^{-\frac{1}{2}} A_y^x z$. Enfin, le jacobien de ces transformations est donné par

$$\frac{D(s,t)}{D(x,z)} = 2^{n+1}(\theta(x,y,z))^{-n}(\langle x,Jy\rangle\langle z,Jy\rangle)^{n-1} r(x)(r(y))^{1-n}(r(z))^{-n}.$$

Preuve. Une application de (12.6) et des formules (avec $y = M\omega$)

$$M^{-1}\mathrm{mil}(s,t) = \mathrm{mil}(M^{-1}s, M^{-1}t), \qquad M^{-1}\mathrm{mil}(S_y s,t) = \mathrm{mil}(SM^{-1}s, M^{-1}t)$$

permet de se ramener au cas où $y = \omega$, ce que nous supposerons désormais. Nous écrirons Φ, Ψ pour Φ_ω, Ψ_ω, A_x pour A_x^ω et $\theta(x,z)$ pour $\theta(\omega,x,z)$. En développant, on obtient

$$(12.7) \qquad \theta(x,z) = (r(x)r(z))^{-1}[x_o^2 r(z) + z_o^2 r(x) - \langle x,z\rangle\langle x,Jz\rangle].$$

Posons

$$(12.8) \qquad \bar{s} = (r(s))^{-\frac{1}{2}} s, \quad \bar{t} = (r(t))^{-\frac{1}{2}} t,$$

d'où $r(\bar{s}) = r(\bar{t}) = 1$. Si $(x,z) = \Psi(s,t)$, (2.13) fournit

$$(12.9) \qquad x = a(\bar{s}+\bar{t}), \quad z = b(J\bar{s}+\bar{t})$$

avec

$$(12.10) \qquad \begin{aligned} a &= 2^{-\frac{1}{2}}(\langle\bar{s},J\bar{t}\rangle+1)^{-\frac{1}{2}} r(s)r(t))^{\frac{1}{4}}, \\ b &= 2^{-\frac{1}{2}}(\langle\bar{s},\bar{t}\rangle+1)^{-\frac{1}{2}}(r(s))^{-\frac{1}{4}}(r(t))^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

On vérifie les relations

$$(12.11) \qquad \begin{aligned} &\langle\bar{s}+\bar{t}\rangle, J\bar{s}+\bar{t}\rangle = 2\bar{t}_o(\bar{s}_o+\bar{t}_o), \\ &\langle\bar{s}+\bar{t}, \bar{s}+J\bar{t}\rangle = 2\bar{s}_o(\bar{s}_o+\bar{t}_o) \end{aligned}$$

qui conduisent à

$$\theta(x,z) = 4a^2b^2(\bar{s}_o+\bar{t}_o)^2(r(t))^{-1}>0. \tag{12.12}$$

En utilisant la définition de A_x^z , puis (12.8) et (12.9), on obtient

$$\begin{aligned} A_x^z\omega &= (r(z))^{-1}[-x_oz+\langle x,Jz\rangle\omega+z_ox] \\ &= 2ab(r(s))^{\frac{1}{2}}(r(t))^{-\frac{1}{2}}(\bar{s}_o+\bar{t}_o)\bar{s}, \end{aligned} \tag{12.13}$$

relation qui, avec l'aide de (12.12), fournit la première des deux égalités exprimant que $\Phi \circ \Psi$ est l'identité : l'autre s'obtient de même.

Dans l'autre sens, supposons vérifiée la relation $(s,t) = \Phi(x,z)$,i.e.

$$\begin{aligned} s &= (\theta(x,z))^{-\frac{1}{2}}(r(z))^{-1}[\langle x,Jz\rangle\omega+z_ox-x_oz] \\ t &= (\theta(x,z))^{-\frac{1}{2}}[-\langle x,Jz\rangle\omega+z_ox+x_oz]. \end{aligned} \tag{12.14}$$

En se servant de (12.7) et en développant r(s) et r(t), on vérifie les relations $r(s) = r(x)(r(z))^{-1}$ et $r(t) = r(x)r(z)$; il en résulte aussitôt, également, que Ss est bien donnée par la formule indiquée, à savoir

$$Ss = (\theta(x,z))^{-\frac{1}{2}}(r(x))^{-1}[\langle x,Jz\rangle\omega-z_ox+x_oz]. \tag{12.15}$$

Il est clair que $s_o > o$, et comme $2x_oz_o - \langle x,Jz\rangle = \langle x,z\rangle > 0$, on a aussi $t_o > 0$: l'application Φ prend donc ses valeurs dans $C \times C$. En développant tout, on vérifie les relations

$$\langle s,Jt\rangle+(r(s)r(t))^{\frac{1}{2}} = 2r(x)(r(z))^{-1}(\theta(x,z))^{-1}z_o^2 \tag{12.16}$$

et

$$(r(s))^{\frac{1}{2}}t+(r(t))^{\frac{1}{2}}s = 2(r(x))^{\frac{1}{2}}(r(z))^{-\frac{1}{2}}(\theta(x,z))^{-\frac{1}{2}}z_ox,$$

d'où $\mathrm{mil}(s,t) = x$; la relation $\mathrm{mil}(Ss,t) = z$ s'obtient de même. Ainsi $\Psi \circ \Phi$ est la transformation identique de Δ_ω .

Dans le laborieux calcul qui suit, on désigne par la même notation la matrice jacobienne d'une transformation et le déterminant jacobien : identifiant un vecteur $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ à la matrice colonne qui lui correspond, on désigne par y' le transposé de cette dernière. Un premier lemme est nécessaire.

LEMME 12.9. Soit f une fonction C^∞ : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Le jacobien de la transformation $X \mapsto Y = f(X)X$ est

$$\frac{DY}{DX} = (f(X))^{m-1}(f(X)+\langle X,\frac{\partial f}{\partial X}\rangle).$$

Preuve. Soit B l'application linéaire (de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$) de rang un telle que $BZ = \langle Z,\frac{\partial f}{\partial X}\rangle X$: la matrice jacobienne de la transformation donnée est $f(X)I+B$. Or B a m-1 valeurs propres nulles, la dernière étant $\langle X,\frac{\partial f}{\partial X}\rangle$.

Fin de la preuve du lemme 12.8 :

C'est la transformation $\Phi:(x,z)\mapsto(s,t)$ que l'on va étudier. Posons

$$\sigma = \langle x,Jz\rangle\,\omega + z_o x - x_o z \tag{12.17}$$

$$\tau = r(z)[-\langle x,Jz\rangle\,\omega + z_o x + x_o z].$$

D'après (12.10) et (12.12), la fonction $\theta(x,z)$ est homogène de degré 0 en les variables (s,t); il en est de même de la fonction $r(z) = (r(s))^{-\frac{1}{2}}(r(t))^{\frac{1}{2}}$. Comme le passage de (s,t) à (σ,τ) se fait en multipliant par $(\theta(x,z))^{\frac{1}{2}}r(z)$, le lemme 12.9 fournit

$$\frac{D(s,t)}{D(x,z)} = (\theta(x,z))^{-n-1}(r(z))^{-2n-2}\,\frac{D(\sigma,\tau)}{D(x,z)} \quad . \tag{12.17}$$

On vérifie aisément les relations

$$A_{Jx} = JA_x\,J \tag{12.18}$$

et

$$2(r(x))^{-1}xx'A_{Jx} = A_x + JA_{Jx}\;, \tag{12.19}$$

la valeur commune des deux membres de la dernière égalité étant l'application $z\mapsto 2z_o x$. En écrivant les matrices par blocs, on obtient

$$\frac{D(\sigma,\tau)}{D(x,z)} = \begin{pmatrix} A_{Jz} & A_x J \\ r(z)A_z & r(z)A_x+B \end{pmatrix} \tag{12.20}$$

où la matrice B (qui provient des dérivées du facteur r(z) de la deuxième ligne de (12.17)) est donnée par

$$\frac{1}{2} B = A_x z(Jz)'. \tag{12.21}$$

On peut écrire

$$\frac{D(\sigma,\tau)}{D(x,z)} \begin{pmatrix} A_{Jz}^{-1} & 0 \\ 0 & JA_x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ r(z)A_zA_{Jz}^{-1} & (r(z)A_x+B)JA_x^{-1} \end{pmatrix} \tag{12.22}$$

et une soustraction de colonnes fournit

$$\frac{D(\sigma,\tau)}{D(x,z)} = z_o^{n-1}\, r(z)\text{dét } D \tag{12.23}$$

avec

$$D = r(z)A_x+B - r(z)A_z\, A_{Jz}^{-1}\, A_x\, J. \tag{12.24}$$

En se servant de (12.19) et de (12.21), on obtient

$$\begin{aligned} D &= r(z)A_x+B - 2zz'A_xJ + r(z)A_{Jx} \\ &= 2[r(z)x_oI + A_xzz'J - zz'A_xJ]. \end{aligned} \tag{12.25}$$

Pour calculer le déterminant de D, notons que pour toute matrice $g \in \{1\} \times SO(n)$ (une rotation en les n dernières coordonnées), on a la relation $g A_x g^{-1} = A_{gx}$: comme g commute avec J, il en résulte aussitôt que le déterminant de D est invariant par la transformation $(x,z) \mapsto (gx,gz)$. On peut alors se ramener au cas où $x = (x_o, x_1, 0, \dots, 0)$ et $z = (z_o, z_1, z_2, 0, \dots, 0)$, ce qui fournit

$$\text{dét } D = (2x_o r(z))^{n-2}\text{dét } D_o \tag{12.26}$$

où la matrice D_o est le 3×3-bloc supérieur gauche de D. En développant, on a

$$(12.27)\qquad \frac{1}{2} D_o = x_o r(z) I + \begin{pmatrix} 0 & x_1(z_o^2-z_1^2) & -x_1z_1z_2 \\ x_1(z_o^2-z_1^2) & 0 & -x_1z_oz_2 \\ -x_1z_1z_2 & x_1z_oz_2 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$(12.28)\qquad 2^{-3}\text{dét } D_o = (x_o r(z))^3 - x_o r(z) x_1^2 (z_o^2-z_1^2) r(z)$$
$$= x_o (r(z))^2 [x_o^2 r(z) - x_1^2 (z_o^2 - z_1^2)].$$

En examinant (12.7), on voit que l'on peut écrire

$$(12.29)\qquad \text{dét } D_o = 8x_o r(x)(r(z))^3 \theta(x,z)$$

la fonction au second membre étant invariante par le groupe $\{1\}\times SO(n)$. Cette formule, jointe à (12.26),(12.23) et (12.17), achève de prouver le lemme 12.8.

THÉORÈME 12.10. Soient g_1,g_2 et g les nouveaux symboles des opérateurs A,B et AB. Rappelant les notations du lemme 12.2, posons

$$\gamma(x,y,z) = (\theta(x,y,z))^{-n}(r(y))^2(r(x)r(z))^{-1-n}(r(x)+r(y))^{n-1}$$
$$(r(z)+r(y))^{n-1}\ [(r(z)-r(x))^2+4(\theta(x,y,z))^{-1}\langle x,Jz\rangle^2].$$

C'est une fonction invariante par le groupe G_o, symétrique en (x,z). On a l'identité

$$g(y,\eta) = 4\int \gamma(x,y,z) g_1(x,(A_x^y)'^{-1}\xi) g_2(z,(A_z^y)'^{-1}\zeta)\,dx\,dz\,d\xi\,d\zeta$$
$$\exp -2i\pi(\theta(x,y,z))^{-\frac12}[-\langle x-S_yx,\zeta-(A_z^y)'\eta\rangle+\langle z-S_yz,\xi-(A_x^y)'\eta\rangle]\ ,$$

le domaine d'intégration étant l'ouvert de $(\mathbb{R}^{n+1})^4$ caractérisé par la condition $\theta(x,y,z)>0$.

Preuve. D'après le lemme 12.6,

$$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(y,\chi) = 2^{n-1}((r(s))^{\frac12}+(r(S_ys))^{\frac12})^{1-n}(r(y))^{-1}k(s,S_ys) \text{ si}$$

$s-S_ys=\chi$. D'après le lemme 4.1,

$$\left|\frac{Dx}{Ds}\right| = (r(s))^{-n-1}(r(y)+r(s))^{n-1}[(r(y)-r(s))^2+4<y,Js>^2]$$

d'où

$$g(y,\eta) = 2^{n-1}(r(y))^{-1}\int (r(s))^{-1}[(r(y)-r(s))^2+4<y,Js>^2]$$
$$e^{-2i\pi<s-S_y s,\eta>}k(s,S_y s)dm(s).$$

Soient k_1 et k_2 les noyaux des opérateurs A et B.

Si l'on pose $(x,z) = \Psi_y(s,t)$ conformément au lemme 12.8 et que l'on applique deux fois le lemme 12.6, on obtient, en notant que

$$(12.30) \qquad r(x)r(z) = r(t)r(y),\ r(x)(r(z))^{-1} = r(s)(r(y))^{-1},$$

la relation

$$k_1(s,t)k_2(t,S_y s) = 2^{2-2n}(r(y))^{1-n}r(x)r(z)(r(x)+r(y))^{n-1}(r(z)+r(y))^{n-1}$$
$$(\mathcal{F}_2^{-1}g_1)(x,s-t)(\mathcal{F}_2^{-1}g_2)(z,t-S_y s).$$

On a

$$k(s,S_y s) = \int k_1(s,t)k_2(t,S_y s)dm(t),$$

expression que l'on substituera dans l'intégrale donnée plus haut permettant l'évaluation de $g(y,\eta)$.
D'après le lemme 12.8,

$$dm(s)dm(t) = (r(x))^{-n-1}ds\ dt$$

$$= 2^{n+1}(\theta(x,y,z))^{-n}(<x,Jy><z,Jy>)^{n-1}(r(x)r(z))^{-n}$$
$$(r(y))^{1-n}dx\ dz.$$

Cela conduit à

$$(12.31) \quad g(y,\eta) = 4\int j(x,y,z)g_1(x,\xi)g_2(z,\zeta)e^{2i\pi a}dx\ dz\ d\xi\ d\zeta$$

avec

$$a = <s-t,\xi>+<t-S_y s,\zeta>+<S_y s-s,\eta>$$

et

$$j(x,y,z) = (r(y))^{-2n}(r(x))^{-n}(r(z))^{2-n}(<x,Jy><z,Jy>)^{n-1}$$
$$(r(x)+r(y))^{n-1}(r(z)+r(y))^{n-1}[(r(s)-r(y))^2+4<y,Js>^2] .$$

On transforme le dernier facteur de $j(x,y,z)$ en se servant de (12.30) et de la relation

$$<y,Js> = (\theta(x,y,z))^{-\frac{1}{2}}<Jy,A_x^z y>$$
$$= (\theta(x,y,z)^{-\frac{1}{2}}<x,Jz>r(y)(r(z))^{-1}$$

qui conduit à

$$(r(y)-r(s))^2+4<y,Js>^2 = (r(y))^2(r(z))^{-2}[(r(z)-r(x))^2+$$
$$4(\theta(x,y,z))^{-1}<x,Jz>^2] .$$

Par ailleurs, avec $\theta = \theta(x,y,z)$, les lemmes 12.8 et 12.7 fournissent

$$s = \theta^{-\frac{1}{2}}A_x^z y = \theta^{-\frac{1}{2}}A_x^y(S_y z)$$
$$t = \theta^{-\frac{1}{2}} A_z^y x = \theta^{-\frac{1}{2}}A_x^y z$$
$$S_y s = \theta^{-\frac{1}{2}} A_y^x z = \theta^{-\frac{1}{2}} A_z^x y = \theta^{-\frac{1}{2}} A_z^y(S_y x)$$

d'où

$$\theta^{\frac{1}{2}}a = <A_x^y(S_y z)-A_x^y z,\xi>+<A_z^y x-A_z^y(S_y x),\zeta>+<A_z^y(S_y x)-A_x^y(S_y z),\eta)>$$

ou, si l'on rappelle que $A_z^y x-A_x^y z = 0$,

$$\theta^{\frac{1}{2}}a = <A_x^y(S_y z-z),\xi-\eta>+<A_z^y(x-S_y x),\zeta-\eta>.$$

Il ne reste plus, pour obtenir le théorème 12.10 qu'à effectuer dans (12.31) le changement de variables $\xi \mapsto (A_x^y)'^{-1}\xi$, $\zeta \mapsto (A_z^y)'^{-1}\zeta$; le jacobien de cette transformation linéaire est, d'après le lemme 12.7, égal à

$$(r(y))^{2n}(<x,Jy><z,Jy>)^{1-n}(r(x)r(z))^{-1},$$

ce qui remplace dans l'intégrale le facteur $j(x,y,z)dx\,dz\,d\xi\,d\zeta$ par $\gamma(x,y,z)dx\,dz\,d\xi\,d\zeta$.

Remarques : 1) Lorsque y,x et z sont proches, la fonction $\theta(x,y,z)$ est proche de 1, $\gamma(x,y,z)$ est proche de 2^{2n}, les transports parallèles A_x^y et A_z^y sont proches de l'identité ; de plus $\frac{1}{2}(x-S_y x)$ et $\frac{1}{2}(z-S_y z)$ sont proches de x-y et z-y respectivement, et par suite

$$\frac{1}{2}\left[-\langle x-S_y x,\zeta-(A_z^y)'\eta\rangle+\langle z-S_y z,\xi-(A_x^y)'\eta\rangle\right]$$

est proche de la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ évaluée sur le couple des vecteurs $(x-y,\xi-\eta)$ et $(z-y,\zeta-\eta)$. En ce sens, toute la formule de composition est proche de celle, connue, relative au calcul de Weyl, y compris le coefficient de **normalisation** 2^{2n+2}.

2) il apparaît ici une "zone d'influence" lorsque $n \geqslant 2$: si $\theta(x^o,y^o,z^o) < 0$, alors g est nulle dans un voisinage conique de l'ensemble des points (y^o,η) si g_1 (resp. g_2) a son support dans un petit voisinage conique de l'ensemble des points (x^o,ξ) (resp. $z^o,\zeta)$).

XIII - LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Nous explicitons dans cette section la formule de composition des (nouveaux) symboles des opérateurs différentiels.

DÉFINITION 13.1. Soit μ un entier $\geqslant 0$. Nous appellerons symbole différentiel d'ordre μ toute fonction f sur D de la forme

$$f(y,\eta) = \sum_{|\alpha|\leq\mu} a_\alpha(y)\,\eta^\alpha$$

où, avec les conventions de la section 6, les coefficients a_α sont des fonctions C^∞ sur C vérifiant les estimations

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{n} |(e_{j_1}\ldots e_{j_k}\,a_\alpha)(y)|^2 \leqslant C(\delta_+(\omega,y))^{2N}$$

(N fixe quelconque, C dépendant de k).

Remarques : 1) Soit $M\in G_o$ tel que $y = M\omega$: ainsi qu'il a déjà été remarqué dans la proposition 6.3, la norme au-dessus de y du vecteur

$\epsilon = \Sigma\, \gamma_j \dfrac{\partial}{\partial \eta_j}$ est $|M'\gamma|$. Or (6.3) et la relation $Sy = SM\omega = M'^{-1}\omega$ fournissent $\| M'^{-1} \| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} (r(y))^{-1} |y|$. Il résulte aisément de là que f est un symbole de poids (cf. (2.22))

$$Y \mapsto (\delta_+(\omega, \tau^{-1}Y))^N \left[\frac{|y|^2}{(r(y))^2} + |\eta|^2\right]^{\mu/2}.$$

On pourra comparer ce poids à celui introduit dans la proposition 6.2.

2) Un symbole différentiel de poids m peut être approché par une suite de symboles à support compact (dans l'espace Symb(m)) par la méthode de la proposition 6.8. On peut aussi l'approcher par la suite $(f_\nu)_{\nu \geqslant 1}$, avec

$$f_\nu (y,\eta) = f(y,\eta)\,\chi(\nu^{-1}\delta_+(\omega,y))\exp -\pi\, \nu^{-1} |\eta|_y^2 , \tag{13.1}$$

où χ est la fonction introduite dans la preuve de cette proposition, et où l'on a posé $|\eta|_y = |M'\eta|$ si $y = M\omega$: les fonctions f appartiennent à l'espace $\mathcal{K}(D)$.

PROPOSITION 13.2. <u>Soit</u> f <u>un symbole différentiel</u>, <u>considéré comme symbole actif</u>. <u>Le nouveau symbole</u> g <u>qui lui correspond est le symbole différentiel</u>

$$g(y,\eta) = \Sigma \frac{1}{\gamma!} (\partial_\eta^\gamma f)(y,\eta) \left[\left(-\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z}\right)^\gamma \left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{ch}\beta)\right)^{1-n}\right] (z=0)$$

<u>où</u> α <u>et</u> β <u>sont les fonctions de</u> (y,z) <u>définies dans le lemme 4.1</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. L'approximation (13.1), la proposition 12.5 et la définition 12.4 permettent d'écrire, au sens des distributions en les n+1 dernières coordonnées,

$$\int (\mathcal{F}_2^{-1} g)(y,z)u(z)dz = \int g(y,\eta)(\mathcal{F}^{-1}u)(\eta)d\eta$$

$$= \lim_\nu \int u(z)\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\alpha + \mathrm{ch}\,\beta)\right)^{1-n} e^{2i\pi<\eta',z>} f_\nu(y,\eta')dz\, d\eta'$$

$$= \int f(y,\eta')d\eta' \int u(z)e^{2i\pi<\eta',z>}\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\alpha + \mathrm{ch}\,\beta)\right)^{1-n}dz,$$

autrement dit

$$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(y,z) = (\mathcal{F}_2^{-1}f)(y,z)(\tfrac{1}{2}(\text{ch}\,\alpha+\text{ch}\,\beta))^{1-n}$$

au sens des distributions. Il suffit d'écrire le développement

$$f(y,\eta') = \Sigma\frac{1}{\gamma!}(\partial_\eta^\gamma f)(y,\eta)(\eta'-\eta)^\gamma$$

pour obtenir la proposition 13.1.

On peut noter que la fonction $z \mapsto \text{ch}\,\alpha + \text{ch}\,\beta$ est paire, et par suite seuls peuvent être non nuls les termes avec $|\gamma|$ pair.

THÉORÈME 13.3. Soit

$$g(y,\eta) = \Sigma\, a_\alpha(y)\,\eta^\alpha$$

un symbole différentiel. L'opérateur A qui admet g comme nouveau symbole est l'opérateur différentiel défini par

$$(Au)(s) = 2^{1-n}(r(s))^{\frac{1}{2}}\Sigma\, D_t^\alpha\{a_\alpha(\text{mi}\ell(s,t))((r(s))^{\frac{1}{2}}+(r(t))^{\frac{1}{2}})^{n-1}$$
$$(r(t))^{-n/2}u(t)\}\ (t=s),$$

avec $D_t^\alpha = (\frac{1}{2i\pi})^{|\alpha|}\ \partial_t^\alpha$.

Preuve. Lorsque $g \in \mathcal{K}(D)$, le lemme 12.6 permet d'expliciter l'opérateur A de nouveau symbole g sous la forme

$$(Au)(s) = 2^{1-n}(r(s))^{\frac{1}{2}}\int g(\text{mi}\ell(s,t),\eta)e^{2i\pi<\eta,s-t>}u(t)$$
$$((r(s))^{\frac{1}{2}}+(r(t))^{\frac{1}{2}})^{n-1}(r(t))^{-n/2}dt\,d\eta,$$

valable pour $u \in \mathcal{S}(C)$. Par des arguments analogues à ceux de la proposition 13.2, on étend cette formule (au sens des distributions tempérées relativement à η) au cas des symboles différentiels, ce qui conduit aussitôt au théorème 13.3.

Remarque. Posons

$$P(s,D) = \Sigma\, a_\alpha(s)\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial s}\right)^\alpha$$

si

$$P(y,\eta) = \Sigma\, a_\alpha(y)\eta^\alpha.$$

Le théorème 13.3 exprime alors que $A = P(s,D)$ si

$$(13.2) \qquad \chi(s,t) = \left(\frac{1}{2}((r(s))^{\frac12} + (r(t))^{\frac12})\right)^{n-1} (r(s))^{\frac12} (r(t))^{-n/2}$$

et

$$(13.3) \qquad P(y,\eta) = \Sigma \frac{1}{\beta !} \left[D_t^\beta (\chi(s,t)\partial_\eta^\beta g(\mathrm{mil}(s,t),\eta)\right) (s=t=y).$$

Il suffit en effet d'employer la formule de Leibniz et la relation

$$\partial^\beta (\eta^\alpha) = \frac{\alpha !}{(\alpha-\beta)!}\eta^{\alpha-\beta}.$$

On voit qu'il existe donc des opérateurs différentiels $Q_\beta (y, \partial/_{\partial y})$ à coefficients C^∞ tels que (13.3) s'écrive

$$(13.4) \qquad P(y,\eta) = \sum_\beta Q_\beta \left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right) (\partial_\eta^\beta g)(y,\eta).$$

On notera que le degré de Q_β (en tant qu'opérateur différentiel) est $\leqslant |\beta|$. En outre, $Q_0(y,\frac{\partial}{\partial y})$ se réduit à l'identité et, si l'on désigne par N l'opérateur $g \mapsto P-g$, la formule (13.4) s'inverse sous la forme

$$g = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k N^k P.$$

L'opérateur N est nilpotent lorsqu'on le considère comme défini sur l'espace vectoriel des symboles différentiels de degré μ moindre qu'un entier donné. Par suite, il existe des opérateurs différentiels $R_\beta (y,\frac{\partial}{\partial y})$ à coefficients C^∞ tels que l'identité (13.4) soit équivalente à

$$(13.5) \qquad g(y,\eta) = \sum_\beta R_\beta (y, \partial/_{\partial y}) (\partial_\eta^\beta P)(y,\eta).$$

Ici encore, le degré de l'opérateur différentiel $R_\beta(y, \partial/_{\partial y})$ est $\leqslant |\beta|$ et $R_0(y, \partial/_{\partial y})$ est l'opérateur identique.

Si l'on développe g somme de termes homogènes, i.e.

$$g = g^\mu + g^{\mu-1} + \ldots + g^0$$

avec

$$g^k(y,\eta) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(y)\eta^\alpha$$

et si l'on écrit de même

$$P = P^{\mu} + P^{\mu-1} + \ldots + P^{o} ,$$

alors (13.3) s'écrit

$$(13.6) \qquad P^{k}(y,\eta) = \Sigma \frac{1}{\beta!} \left[D_t^{\beta}(\chi(s,t)\, \partial_\eta^{\beta}\, g^{k+|\beta|}(\mathrm{mil}(s,t),\eta)\right.(s=t=y).$$

On a bien entendu $P^{\mu} = g^{\mu}$; calculons $P^{\mu-1}$.

La formule (2.13) qui donne le milieu $\mathrm{mil}(s,t)$ fournit sans difficulté la relation

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\mathrm{mil}_k(s,t))(t=s) = \frac{1}{2}\,\delta_{jk}$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left[a_\alpha(\mathrm{mil}(s,t))\,((r(s))^{\frac{1}{2}} + (r(t))^{\frac{1}{2}})^{n-1}(r(t))^{-n/2}\right] (t = s)$$

$$= 2^{n-2}(r(s))^{-\frac{1}{2}}\, \frac{\partial a_\alpha(s)}{\partial s_j} - 2^{n-2}(n+1)(r(s))^{-3/2}\{j\}\, s_j a_\alpha(s).$$

Si l'on désigne par (j) le multi-indice de longueur 1 dont la j-ème composante est égale à 1, on peut alors écrire

$$P^{\mu-1}(s,D) = g^{\mu-1}(s,D) + \frac{1}{4i\pi} \sum_{|\alpha|=\mu} \sum_j \frac{\alpha!}{(\alpha-(j))!}\left[\frac{\partial a_\alpha(s)}{\partial s_j} - (n+1)\frac{\{j\}s_j}{r(s)}\, a_\alpha(s)\right]$$

$$D^{\alpha-(j)}$$

en ne retenant dans la somme que les couples (α,j) tels que $\alpha-(j)$ soit un multi-indice. Cela peut encore s'écrire

$$(13.7) \quad P^{\mu-1}(y,\eta) = g^{\mu-1}(y,\eta) + \frac{1}{4i\pi}\, \Sigma \frac{\partial^2 g^{\mu}}{\partial y_j\, \partial \eta_j} - \frac{n+1}{4i\pi} \langle Sy, \frac{\partial g^{\mu}}{\partial \eta}\rangle$$

avec

$$\langle Sy, \frac{\partial g^{\mu}}{\partial \eta}\rangle = (r(y))^{-1}\, \Sigma\, \{j\}\, y_j\, \frac{\partial g^{\mu}}{\partial \mu_j} .$$

THÉORÈME 13.4. <u>Il existe une famille unique</u> $(P_{\gamma_1,\gamma_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}))$, <u>dépendant du couple</u> (γ_1,γ_2) <u>de multi-indices</u> $\in \mathbb{N}^{n+1}$, <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>pour tout</u> (γ_1,γ_2), $P_{\gamma_1,\gamma_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z})$ <u>est un opérateur différentiel</u>

à coefficients constants sur les fonctions de $(x,z) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$: l'ordre de cet opérateur est au plus $|\gamma_1| + |\gamma_2|$ et ses coefficients sont des fonctions C^∞ du paramètre $y \in C$.

(ii) quels que soient les symboles différentiels g_1 et g_2, le symbole $g_1 \circ g_2$ (composition des nouveaux symboles correspondant à la composition des opérateurs) s'écrit

$$(g_1 \circ g_2)(y,\eta) = \Sigma \left[P_{\gamma_1,\gamma_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}) (\partial_\eta^{\gamma_1} g_1(x,\eta)\, \partial_\eta^{\gamma_2} g_2(z,\eta)) \right] \quad (x=z=y).$$

De plus, le terme au second membre correspondant à $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ se réduit au produit $g_1(y,\eta) g_2(y,\eta)$; la somme des termes tels que $|\gamma_1| + |\gamma_2| = 1$ s'écrit $(4i\pi)^{-1}\{g_1,g_2\}$, où le crochet de Poisson est défini par

$$\{g_1,g_2\} = \Sigma \left(\frac{\partial g_1}{\partial \eta_j} \frac{\partial g_2}{\partial y_j} - \frac{\partial g_1}{\partial y_j} \frac{\partial g_2}{\partial \eta_j}\right).$$

Preuve. Compte tenu des formules (13.4) et (13.5) qui permettent de passer du nouveau symbole g à la forme $P(s,D)$ et réciproquement, la formule est une conséquence de la relation familière

$$P_1(s,D) P_2(s,D) = P(s,D)$$

si

$$(13.8) \qquad P(y,\eta) = \Sigma \frac{1}{\beta!} \partial_\eta^\beta P_1(y,\eta) D_y^\beta P_2(y,\eta).$$

A chaque manipulation utilisant l'une des formules (13.4),(13.8) ou (13.5), on dérive toujours au moins autant par rapport à η qu'on ne le fait par rapport à y, ce qui justifie (i). L'unicité des opérateurs différentiels à coefficients constants $P_{\gamma_1,\gamma_2}(y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z})$ résulte de ce que la valeur au point y du résultat de l'action de cet opérateur sur la fonction $a(x)b(z)$ doit coïncider avec la valeur au point $(y,0)$ du symbole $(\frac{1}{\gamma_1!} a(y)\, \eta^{\gamma_1}) \circ (\frac{1}{\gamma_2!} b(y)\, \eta^{\gamma_2})$. On peut noter aussi que la règle de covariance fournie par la proposition 3.7 (qui s'étend bien sûr aux nouveaux symboles) fournit certaines règles d'invariance relatives au système des P_{γ_1,γ_2} : il n'est pas indispensable de les expliciter.

Pour prouver la dernière assertion du théorème 13.4, il suffit de le faire dans le cas de deux symboles différentiels homogènes. (i.e. $g_1 = g_1^{\mu_1}$ et $g_2 = g_2^{\mu_2}$), auquel cas la somme des termes du développement de $g = g_1 \circ g_2$ qui correspondent à une valeur donnée de $|\gamma_1| + |\gamma_2|$ est aussi homogène. Soit A (resp. B) l'opérateur différentiel de nouveau symbole g_1 (resp. g_2) et posons

$$A = P_1^{\mu_1}(s,D) + P_1^{\mu_1-1}(s,D) + \ldots,$$

$$B = P_2^{\mu_2}(s,D) + P_2^{\mu_2-1}(s,D) + \ldots ,$$

$$AB = P^{\mu_1+\mu_2}(s,D) + P^{\mu_1+\mu_2-1}(s,D) + \ldots$$

On a alors, d'après (13.8),

$$P^{\mu_1+\mu_2}(y,\eta) = P_1^{\mu_1}(y,\eta) P_2^{\mu_2}(y,\eta)$$

et

$$P^{\mu_1+\mu_2-1}(y,\eta) = P_1^{\mu_1}(y,\eta) P_2^{\mu_2-1}(y,\eta) + P_1^{\mu_1-1}(y,\eta) P_2^{\mu_2}(y,\eta)$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \sum_j \frac{\partial}{\partial \eta_j} (P_1^{\mu_1}(y,\eta)) \frac{\partial}{\partial y_j} (P_2^{\mu_2}(y,\eta))) .$$

Si l'on se sert trois fois de la relation (13.7), on obtient après un calcul très simple la relation

$$g^{\mu_1+\mu_2-1} = \frac{1}{4i\pi} \{g_1, g_2\} .$$

Ceci prouve le théorème 13.2.

Remarque. Les termes au second membre de la formule de composition des symboles différentiels correspondant à $|\gamma_1| + |\gamma_2| \leqslant 1$ sont exactement ceux que l'on pouvait attendre et ne sont pas liés spécifiquement au calcul symbolique employé : le crochet de Poisson est celui qui correspond à la forme symplectique canonique de l'espace de phase $T^*(C)$. Si l'on veut se faire une idée du développement complet, on peut faire appel au théorème 12.10 à condition de justifier son extension aux symboles différentiels : comme cette justification n'est ni intéressante ni courte, contentons-nous de décrire le résultat (nous n'en aurons pas l'usage). On effectue le changement de variables défini par

(13.9) $$X = x - S_y x \quad , \quad Z = z - S_y z \ .$$

Le jacobien de ce changement est fourni par le lemme 4.1 :

(13.10) $$\left|\frac{DX}{Dx}\right| = (r(x))^{-n-1}(r(x)+r(y))^{n-1}[(r(y)-r(x))^2+4<x,Jy>^2]$$

et l'on a une formule analogue pour $\left|\frac{DZ}{Dz}\right|$.

Simultanément, on effectue le changement

$$\xi \mapsto (A_x^y)'\eta + (\theta(x,y,z))^{\frac{1}{2}}\,\xi \ , \quad \zeta \mapsto (A_z^y)'\eta + (\theta(x,y,z))^{\frac{1}{2}}\zeta \ .$$

On obtient finalement

(13.11) $$(g_1 \circ g_2)(y,\eta) = \int F(X,Z,\xi,\zeta)\, e^{-2i\pi[-<X,\zeta>+<Z,\xi>]}\, dXdZd\xi d\zeta,$$

intégrale dont le domaine st, pour ce qui concerne (X,Z), un certain voisinage de $(0,0)$.

On a

(13.12) $$F(X,Z,\xi,\zeta) = \varepsilon(x,y,z)\, g_1(x,\eta + (\theta(x,y,z))^{\frac{1}{2}}(A_x^y)'^{-1}\xi)$$
$$g_2(z,\eta + (\theta(x,y,z))^{\frac{1}{2}}(A_z^y)'^{-1}\zeta)$$

avec

(13.13) $$\varepsilon(x,y,z) = 4(r(y))^2[\theta(x,y,z)(r(z)-r(x))^2+4<x,Jz>^2]$$
$$[(r(y)-r(x))^2+4<x,Jy>^2]^{-1}[(r(y)-r(z))^2+4<z,Jy>^2]^{-1}.$$

Dans le cas de symboles différentiels, la fonction F est, relativement aux variables ξ et ζ, un polynôme, et (13.11) fournit le développement

(13.14) $$(g_1 \circ g_2)(y,\eta) = \Sigma\, \frac{(-1)^{|\gamma_2|}}{\gamma_1!\,\gamma_2!}\,(\partial_\xi^{\gamma_1}\partial_\zeta^{\gamma_2} D_X^{\gamma_2} D_Z^{\gamma_1} F)(0,0,0,0).$$

On a posé $D_X^{(j)} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial X_j}$, $D_Z^{(j)} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial Z_j}$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial X_j}$ et $\frac{\partial}{\partial Z_j}$ étant liés par (13.9) (cf. lemme 4.1) aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_k}$ et $\frac{\partial}{\partial z_k}$: l'évaluation des dérivées se fait en $X = Z = 0$, c'est-à-dire $x = z = y$. Si l'on veut se servir effectivement de ce développement, il y a avantage à remarquer que la fonction θ est invariante non seulement par le groupe G_0 (lemme 12.7) mais également par la symétrie S. En conséquence, $\theta(x,y,z) = \theta(S_y x, y, S_y z)$ est, pour y fixé, une fonction paire des variables $X = x - S_y x$ et $Z = z - S_y z$. Un développement de Taylor au premier ordre, en $x = z = y$, de la fonction $\epsilon(x,y,z)$, montre alors que celle-ci coïncide, à $O(|X|^2+|Z|^2) = O(|x-y|^2+|z-y|^2)$ près, avec $[r(y)<x,Jz>(<x,Jy>)^{-1}(<z,Jy>^{-1}]^2$: en développant à nouveau, on voit donc que $\epsilon(x,y,z) = 1$ à des termes d'ordre $\geqslant 2$ près. Ceci permet de retrouver, sous la version (13.14) de la formule de composition, le début du développement tel qu'il a été indiqué dans le théorème 13.4, à savoir

$$g_1 \circ g_2 = g_1 g_2 + (4i\pi)^{-1}\{g_1, g_2\} + \dots$$

Pour terminer cette section consacrée aux opérateurs différentiels, voici quelques opérateurs et leurs nouveaux symboles :

Symbole	Opérateur
$2i\pi<y,\eta>$	$e = \Sigma\, s_j \frac{\partial}{\partial s_j}$
$2i\pi[-\{k\}y_j\eta_k+\{j\}y_k\eta_j]$	$\partial_{jk} = -\{k\}s_j \frac{\partial}{\partial s_k} + \{j\}s_k \frac{\partial}{\partial s_j}$
$-4\pi^2 r(y)r(\eta)$	$r(s)\Box + (1-n)e - \frac{(n-1)(n-2)}{4}$
$-4\pi^2 \|\eta\|_y^2$	$2e^2 - r(s)\Box + (n-1)e$ + cte.

Pour vérifier les deux premières formules, on remarque que l'application de (13.7) conduit dans ces deux cas à $P^0(y,\eta) = 0$. Si A est l'opérateur dont le nouveau symbole est $-4\pi^2 r(y)r(\eta)$, le théorème 13.3 fournit

$$(Au)(s) = 2^{1-n}\Box_t\{r(s)(r(t))^{\frac{1}{2}(1-n)}((r(s))^{\frac{1}{2}}+(r(t))^{\frac{1}{2}})^{n-1}u(t)\}(t = s)$$

et il n'y a qu'à effectuer le calcul : si l'on ne tenait pas à la valeur du terme constant, on pourrait appliquer le théorème 13.4 et la formule

$$r(s)\Box + (1-n)e = e^2 + \sum_{j<k} \{j\}\partial_{jk}^2$$

de vérification aisée : on pourra noter que les opérateurs du premier ordre figurant dans cette liste sont tangents à ∂C aux points de ∂C ,i.e. y annulent la fonction r. La dernière formule résulte de (6.1), de la troisième formule et du théorème 13.4 : l'opérateur d'ordre zéro résiduel est une constante vu son invariance par le groupe G_o .

Si l'on écrit, avec des notations classiques, la métrique riemannienne (2.6) de C sous la forme

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ij}\, dy_i\, dy_j$$

et si l'on désigne par (g^{ij}) la matrice inverse de (g_{ij}), alors (2.20) fournit

$$\Sigma\, g^{ij} d\eta_i d\eta_j = 2 <y,d\eta>^2 - r(y)r(d\eta),$$

soit

$$g^{ij} = 2y_i y_j - \delta_{ij}\{j\} r(y).$$

La formule usuelle donnant l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta u = (\text{dét } g)^{-\frac{1}{2}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \left((\text{dét } g)^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)$$

jointe à la relation dét $g = (r(y))^{-(n+1)}$, fournit

$$\Delta u = (1+n)\, \Sigma\, y_j \frac{\partial u}{\partial y_i} + 2\, \Sigma\, y_i y_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} - r(y) \Box u,$$

autrement dit

$$\Delta = 2e^2 - r(y)\Box + (n-1)e.$$

Ainsi que l'on pouvait s'y attendre, l'opérateur de nouveau symbole $-4\pi^2 |\eta|_y^2$ coïncide avec Δ à une constante additive près.

Remarque. Quelle espèce de symbole choisir ?

Soit q une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $q(0,0) = 1$ et telle que q et q^{-1} aient toutes leurs dérivées majorées par le produit d'un polynôme fixe par une constante dépendant de l'ordre de dérivation. On peut alors définir une espèce de symbole g_q lié au symbole actif f d'un opérateur par la relation

$$(\mathcal{F}_2^{-1} g_q)(y,z) = q(\mathrm{sh}\alpha,\ \mathrm{sh}\beta)(\mathcal{F}_2^{-1} f)(y,z)$$

où α et β sont les fonctions de (y,z) définies dans le lemme 4.1. Lorsque $q(\mathrm{sh}\alpha\ ,\mathrm{sh}\beta) = (\mathrm{ch}\alpha\ \mathrm{ch}\beta)^{-1}\ (\frac{1}{2}\ (\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{ch}\beta))^{1-n}$, on retrouve le symbole passif d'après le théorème 4.2; la définition 12.4 montre que le choix $q(\mathrm{sh}\alpha,\ \mathrm{sh}\beta) = (\frac{1}{2}\ (\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{ch}\beta))^{1-n}$ conduit au nouveau symbole.

Dans tous les cas, le calcul symbolique lié au choix du symbole g_q reste covariant à l'égard des actions déjà utilisées du groupe G, puisque l'opérateur $f \longmapsto g_q$ commute à l'action de G sur $T^*(C)$: c'est en effet un opérateur de convolution relativement à la variable η, et de plus $\alpha(y,z)$ et $\beta(y,z)$ sont invariantes par l'action de G_o sur T(C). En revanche, si $\tilde{S}$ est définie comme en (2.17), de sorte que (prop. 3.7) le symbole actif de $\sigma\,\mathrm{Op}(f)\sigma$ est $\mathrm{Op}(f \circ \tilde{S})$, on a

$$(\mathcal{F}_2^{-1}(f \circ \tilde{S}))(y,z) = r(y)^{-(n+1)}(\mathcal{F}_2^{-1} f)(Sy,-(MM')^{-1}z)\ :$$

or, sous la transformation $(y,z) \longmapsto (Sy,-MM'^{-1}z)$, α et β deviennent $-\beta$ et $-\alpha$. Ce n'est donc que si $q(\mathrm{sh}\alpha,\mathrm{sh}\beta) = q(-\mathrm{sh}\beta,-\mathrm{sh}\alpha)$ que le symbole g_q reste covariant sous l'action du groupe complet Γ_c (voir fin de la section 3).

Quelle que soit q, le symbole g_q de l'opérateur de multiplication par une fonction a(y) n'est autre que cette fonction, d'après un cas particulier du théorème 13.3. Si l'on souhaite qu'en outre les opérateurs différentiels à coefficients constants aient les mêmes symboles que dans le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$, il faut prendre

$$q(\mathrm{sh}\alpha,\mathrm{sh}\beta) = (\tfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{ch}\beta))^{1-n}(\mathrm{ch}\ \tfrac{\alpha+\beta}{2})^{n-1} e^{\frac{n+1}{2}(\alpha+\beta)}$$

comme on le voit en utilisant le théorème 13.3, (12.5) et la relation $r(t) = r(y)e^{-(\alpha+\beta)}$. On voit qu'il n'y a pas dans ce cas covariance par rapport à Γ_c .

Pour tous ces choix d'une espèce de symbole, les propriétés essentielles (caractérisation via les fonctions ψ_X^λ , continuité, calcul symbolique) établies dans ce travail restent valables.

XIV - DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

On étend aux symboles classiques, tels qu'ils onts été introduits dans la définition 6.5, les développements asymptotiques établis dans la section qui précède pour des symboles différentiels.

LEMME 14.1. Soit f un symbole classique d'ordre μ. Pour tout $\eta^o \in \mathbb{R}^{n+1}$, et tout entier $N \geqslant 1$, posons $f = T^{N-1}_{\eta^o}(f) + R^N_{\eta^o}(f)$ avec

$$T^{N-1}_{\eta^o}(f)(y,\eta) = \sum_{|\gamma| \leqslant N-1} \frac{1}{\gamma!} (\eta-\eta^o)^\gamma (\partial^\gamma_\eta f)(y,\eta^o).$$

Soit m_{η^o} la fonction sur D définie par

$$m_{\eta^o}(y,\eta) = (1+|\eta-\eta^o|^2_y)^{\frac{1}{2}}$$

(cf. prop. 6.3). Alors, pour toute paire (p,q) d'entiers $\geqslant 0$, il existe une constante $C_{N,p,q}(f)$ ne dépendant que de (n,N,p,q) et de f telle que, quels que soient η^o et $Y = (y,\eta)$, on ait les inégalités

$$\|T^{N-1}_{\eta^o}(f)\|_{p,q,Y} \leqslant C_{N,p,q}(f)(m_{\eta^o}(Y))^{N-1+|\mu|}\ (m_o(Y))^\mu$$

et

$$\|R^N_{\eta^o}(f)\|_{p,q,Y} \leqslant C_{N,p,q}(f)(m_{\eta^o}(Y))^{N+|\mu-N|}(m_o(Y))^{\mu-N}.$$

En outre, on peut supposer $C_{N,p,q}(f)$ invariante par l'action de G_o sur f.

Preuve. Quels que soient Y et $Y' \in D$, on a l'inégalité (cf. (6.7))

$$(14.1) \qquad m_{\eta^o}(Y) \leqslant 2^{12}(\delta_+(\tau^{-1}Y,\tau^{-1}Y'))^{7/2} m_{\eta^o}(Y'),$$

ce qui montre pour commencer que la fonction m_{η^o} est une fonction-poids : la preuve de la proposition 6.3 s'applique sans aucune modification, et ce point jouera un rôle essentiel plus loin. Rappelons (2.14) que G_o opère sur D par la relation $M.(y,\eta) = (My, M'^{-1}\eta)$: quels que soient $\eta^o \in \mathbb{R}^{n+1}$, $Y \in D$ et $M \in G_o$, il est immédiat que l'on a

$$(14.2) \qquad m_{M'^{-1}\eta^o}(M.(y,\eta)) = m_{\eta^o}(y,\eta).$$

Comme on a aussi, à l'évidence,

(14.3) $$T^{N-1}_{\eta^o}(f \circ M) = T^{N-1}_{M'^{-1}\eta^o}(f) \circ M$$

si l'on pose $(f \circ M)(y,\eta) = f(My, M'^{-1}\eta)$, on voit que l'on peut se borner à établir les estimations énoncées dans le lemme 14.1 aux points Y de la forme (ω,η) : ceci permet de remplacer les champs de vecteurs constants $e_o,\dots,e_n,\varepsilon_o,\dots,\varepsilon_n$ figurant dans (6.10) par les opérateurs de dérivation canoniques pour les coordonnées standard sur D. La définition des classes de symboles classiques conduit, avec une constante C ne dépendant que de n,N et f, à l'inégalité

$$|T^{N-1}_{\eta^o}(f)(\omega,\eta)| \leqslant C(1+|\eta-\eta^o|^2)^{\frac{1}{2}(N-1)}(1+|\eta^o|^2)^{\mu/2}$$

et, si l'on se sert de l'inégalité élémentaire (appelée souvent "inégalité de Peetre")

(14.4) $$(1+|\eta^o|^2)^{\mu/2} \leqslant 2^{|\mu|/2}(1+|\eta|^2)^{\mu/2}(1+|\eta-\eta^o|^2)^{|\mu|/2}$$

on obtient

$$|T^{N-1}_{\eta^o}(f)(\omega,\eta)| \leqslant C\,(m_{\eta^o}(\omega,\eta))^{N-1+|\mu|}(m_o(\omega,\eta))^{\mu}.$$

Les dérivations de cette partie régulière du développement de Taylor par rapport aux variables y_j ne changent rien aux inégalités, et celles par rapport aux variables η_j n'apportent que des satisfactions. On voit que la première des estimations affirmées dans le lemme 14.1 est valable avec

(14.5) $$C_{N,p,q}(f) = C_N \sum_{j=0}^{N-1+q} \sup_Y \{(m_o(Y))^{-\mu} \| f\|_{p,j,Y}\},$$

la constante C_N ne dépendant que de (n,N). Pour tout point η' appartenant au segment joignant η^o à η, (14.4) fournit

(14.6) $$(1+|\eta'|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-N)} \leqslant 2^{\frac{1}{2}|\mu-N|}(1+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-N)}(1+|\eta-\eta^o|^2)^{\frac{1}{2}|\mu-N|}$$

et la formule de Taylor permet d'écrire pour η' bien choisi

(14.7) $$|R^N_{\eta^o}(f)(\omega,\eta)| \leqslant C(1+|\eta-\eta^o|^2)^{N/2}(1+|\eta'|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-N)}$$

$$\leqslant C\,(1+|\eta-\eta^o|^2)^{\frac{1}{2}(N+|\mu-N|)}(1+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-N)},$$

avec $C = \sup\{(m_o(Y))^{-\mu+N}\|f\|_{O,N,Y}\}$. L'opérateur $R^N_{\eta^o}$ commute avec les opérateurs de dérivation par rapport aux variables y_j. Enfin, on a

$$\partial_\eta^\beta (R^N_{\eta^o}(f)) = \partial_\eta^\beta f \qquad\qquad \text{si } |\beta| \geqslant N$$

et

$$\partial_\eta^\beta (R^N_{\eta^o}(f)) = R^{N-|\beta|}_{\eta^o} (\partial_\eta^\beta f)$$

dans le cas contraire : la dernière assertion du lemme 14.1 est donc une conséquence de (14.7).

PROPOSITION 14.2. Soit f un symbole classique d'ordre μ , et soit g le nouveau symbole de l'opérateur A = Op(f). Soient α et β les fonctions de (y,z) définies dans le lemme 4.1. Pour tout entier $N \geqslant 1$, le symbole dont la valeur en (y,η) est

$$g(y,\eta) - \sum_{|\gamma|\leqslant N-1} \frac{1}{\gamma!} (\partial_\eta^\gamma f)(y,\eta)\left[\left(-\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z}\right)^\gamma \left(\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta)\right)^{1-n}\right](z=0)$$

est un symbole classique d'ordre $\mu-N$.

Preuve. Soit G l'opérateur $f \mapsto g$: d'après la proposition 12.5 cet opérateur est, pour toute fonction-poids m, séquentiellement continu de Symb(m) dans Symb(m). Un examen attentif de la preuve (en fait, celle de la proposition 6.9) montre que, quel que soit l'entier $k \geqslant 0$ et quel que soit $N_1 \geqslant 0$, il existe un entier $k' \geqslant 0$ et une constante $C>0$ ne dépendant que de (n,N_1,k) vérifiant ce qui suit : soit m une fonction-poids telle que (cf. déf.6.1)

$$(14.8) \qquad \tilde{m}(X) \leqslant C_1\, \tilde{m}'(X')\,(\delta_+(X,X'))^{N_1}$$

pour tout couple (X,X') de points de Π . Alors, pour tout symbole $f \in \mathrm{Symb}(m)$, on a

$$(14.9) \qquad \|Gf\|_{m;k} \leqslant CC_1 \|f\|_{m;k'} \ .$$

On voit que cette estimation présente une grande part d'uniformité relativement à la fonction-poids m, qui n'intervient que via N_1 et C_1 : dans le lemme 12.3 nous avons pris soin de donner un énoncé du même genre, relatif à la composition des symboles.

Posons, pour tout multi-indice γ ,

$$a_\gamma(y) = [(-\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z})^\gamma(\frac{1}{2}(\text{ch}\,\alpha + \text{ch}\,\beta))^{1-n}](z=0)$$

et, pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$(14.10) \qquad (G_N f)(y,\eta) = \sum_{|\gamma|\leqslant N-1} \frac{1}{\gamma!}(\partial_\eta^\gamma f)(y,\eta).a_\gamma(y).$$

Il s'agit de montrer que si f est un symbole classique d'ordre μ, alors $Gf-G_N f$ est un symbole classique d'ordre $\mu-N$. Comme $G_{N+1}f-G_N f$ est à l'évidence un symbole classique d'ordre $\mu-N$, il revient au même (pousser les développements plus loin pour l'étude des dérivées) de montrer que $Gf-G_N f$ est, pour tout N, un symbole de poids $(y,\eta) \mapsto (1+|\eta|^2_y)^{\frac{1}{2}(\mu-N)}$. En se servant d'un argument d'invariance, on est donc ramené à prouver, pour tout couple (δ,ε) de multi-indices, l'existence d'une constante $C_{N,\delta,\varepsilon}(f)$ ne dépendant que de (n,N,δ,ε) et de f , invariante par l'action de G_o sur f, telle que

$$(14.11) \qquad |\partial_y^\delta\partial_\eta^\varepsilon(Gf-G_N f)(\omega,\eta^o)| \leqslant C_{N,\delta,\varepsilon}(f)(1+|\eta^o|)^{\mu-N}$$

pour tout $\eta^o \in \mathbb{R}^{n+1}$.

A l'aide de la décomposition du lemme 14.1, on écrit

$$(14.12) \qquad Gf = GT^{N-1}_{\eta^o}(f) + GR^N_{\eta^o}(f).$$

Posons

$$(14.13) \qquad m(Y) = (m_{\eta^o}(Y))^{N+|\mu-N|}(m_o(Y))^{\mu-N}.$$

D'après (14.1), l'inégalité (14.8) est vérifiée si

$$(14.14) \qquad C_1 = 2^{12(N+2|\mu-N|)} ,$$

$$N_1 = \frac{7}{2}(N+2|\mu-N|).$$

Le lemme 14.1 montre que $R^N_{\eta^o}(f)$ est un symbole de poids m; enfin, on notera que

$$(14.15) \qquad m(\omega,\eta^o) = (1+|\eta^o|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-N)}.$$

L'inégalité (14.9) permet donc d'écrire

$$(14.16) \qquad |\partial_y^\delta \partial_\eta^\epsilon (GR^N_{\eta^o}(f))(\omega,\eta^o)| \leqslant C_{N,\delta,\epsilon}(f)(1+|\eta^o|)^{\mu-N}$$

et il reste à obtenir la même inégalité pour les dérivées, évaluées en (ω,η^o), de la différence $G_N f - GT^{N-1}_{\eta^o}(f)$.

La proposition 13.2 permet de calculer l'image par G des symboles différentiels : se servant aussi de la définition de $T^{N-1}_{\eta^o}(f)$ donnée dans le lemme 14.1, on obtient

$$(14.17) \qquad (GT^{N-1}_{\eta^o}(f))(y,\eta) = \sum \frac{1}{\gamma!} \sum_{|\gamma'|\leqslant N-1} \frac{1}{(\gamma'-\gamma)!} (\eta-\eta^o)^{\gamma'-\gamma} (\partial_\eta^{\gamma'} f)(y,\eta^o).a_\gamma(y)$$

d'où, pour tout multi-indice ϵ ,

$$(14.18) \qquad (\partial_\eta^\epsilon GT^{N-1}_{\eta^o}(f))(y,\eta^o) = \sum_{|\gamma|\leqslant N-1-|\epsilon|} \frac{1}{\gamma!}(\partial_\eta^{\gamma+\epsilon} f)(y,\eta^o).a_\gamma(y).$$

Par ailleurs, (14.10) fournit

$$(14.19) \qquad (\partial_\eta^\epsilon G_N f)(y,\eta^o) = \sum_{|\gamma|\leqslant N-1} \frac{1}{\gamma!}(\partial_\eta^{\gamma+\epsilon} f)(y,\eta^o).a_\gamma(y).$$

Comme on a

$$(14.20) \qquad |\partial_y^\delta((\partial_\eta^{\gamma+\epsilon} f)(y,\eta^o).a_\gamma(y))(y=\omega)| \leqslant C_{N,\delta,\epsilon}(f)(1+|\eta^o|)^{\mu-N}$$

lorsque $|\gamma|+|\epsilon|\geqslant N$, la comparaison de (14.18) et (14.19) achève de prouver la proposition 14.2.

Bien entendu, des développements asymptotiques du même genre expriment la relation entre deux quelconques des trois types de symboles introduits : en fait, l'intérêt de la proposition 14.2 a été, avant toute autre chose, de nous préparer à la preuve, à peine plus complexe, du théorème de composition suivant.

THÉORÈME 14.3. <u>Soient</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>deux symboles classiques d'ordres</u> μ_1 <u>et</u> μ_2 <u>respectivement; soient</u> A <u>et</u> B <u>les opérateurs dont les nouveaux</u>

symboles sont g_1 et g_2, et soit g le nouveau symbole de AB. Pour tout entier $N \geqslant 1$, posons, avec les notations du théorème 13.4,

$$h_N(y,\eta) = \sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2| \leqslant N-1} [P_{\gamma_1,\gamma_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z})(\partial_\eta^{\gamma_1} g_1(x,\eta)\partial_\eta^{\gamma_2} g_2(z,\eta))](x=z=y).$$

Alors $g-h_N$ est un symbole classique d'ordre $\mu_1+\mu_2-N$.

Preuve. Pour tout $\eta^o \in \mathbb{R}^{n+1}$, décomposons $g = g_1 \circ g_2$ comme somme de quatre termes à l'aide des décompositions

$$g_1 = T^{N-1}_{\eta^o}(g_1) + R^N_{\eta^o}(g_1) \quad , \quad g_2 = T^{N-1}_{\eta^o}(g_2) + R^N_{\eta^o}(g_2).$$

Une démonstration identique à celle de l'inégalité (14.16) de la proposition précédente, sauf que l'on y emploie le lemme 12.3 au lieu de (14.9), permet d'obtenir

$$(14.21) \quad |\partial_y^\delta \partial_\eta^\epsilon (R^N_{\eta^o}(g_1) \circ R^N_{\eta^o}(g_2))(\omega,\eta^o)| \leqslant C_{N,\delta,\epsilon}(g_1) C_{N,\delta,\epsilon}(g_2) (1+|\eta_o|)^{\mu_1+\mu_2-2N}.$$

A condition de se servir également de l'estimation de la partie régulière $T^{N-1}_{\eta^o}(g_j)$ donnée dans le lemme 14.1, on obtient pour $R^N_{\eta^o}(g_1) \circ T^{N-1}_{\eta^o}(g_2)$ et $T^{N-1}_{\eta^o}(g_1) \circ R^N_{\eta^o}(g_2)$ des estimations analogues à (14.21), pourvu que l'on y remplace l'exposant $\mu_1+\mu_2-2N$ par $\mu_1+\mu_2-N$. Il ne reste plus qu'à évaluer les dérivées, au point (ω,η^o), de la différence $h_N - T^{N-1}_{\eta^o}(g_1) \circ T^{N-1}_{\eta^o}(g_2)$.

Si l'on part de l'expression des symboles différentiels $T^{N-1}_{\eta^o}(g_1)$ et $T^{N-1}_{\eta^o}(g_2)$ définie dans le lemme 14.1 et que l'on effectue leur composition à l'aide du théorème 13.4, on obtient

$$(14.22) \quad (T^{N-1}_{\eta^o}(g_1) \circ T^{N-1}_{\eta^o}(g_2))(y,\eta)$$
$$= \sum_{\substack{|\gamma'| \leqslant N-1 \\ |\gamma''| \leqslant N-1}} \sum_{\gamma_1,\gamma_2} \frac{1}{(\gamma'-\gamma_1)!(\gamma''-\gamma_2)!} P_{\gamma_1,\gamma_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z})$$
$$\{(\eta-\eta^o)^{\gamma'-\gamma_1+\gamma''-\gamma_2}(\partial_\eta^{\gamma'} g_1)(x,\eta^o).(\partial_\eta^{\gamma''} g_2)(z,\eta^o)\}$$
$$(x=z=y)$$

et par suite

$$(14.23) \qquad \partial_\eta^{\epsilon}(T_{\eta^o}^{N-1}(g_1)\circ T_{\eta^o}^{N-1}(g_2))(y,\eta^o)$$

$$= \sum_{\substack{|\gamma'|\leq N-1\\ |\gamma''|\leq N-1}} \ \sum_{\epsilon_1+\epsilon_2=\epsilon} \frac{\epsilon!}{\epsilon_1!\epsilon_2!} P_{\gamma'-\epsilon_1,\gamma''-\epsilon_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z})$$

$$\{(\partial_\eta^{\gamma'} g_1)(x,\eta^o).(\partial_\eta^{\gamma''} g_2)(z,\eta^o)\}(x=z=y).$$

Par ailleurs on a

$$(14.24) \qquad \partial_\eta^{\epsilon} h_N(y,\eta^o) = \sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2|\leq N-1} \ \sum_{\epsilon_1+\epsilon_2=\epsilon} \frac{\epsilon!}{\epsilon_1!\epsilon_2!} P_{\gamma_1,\gamma_2}(y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z})$$

$$\{(\partial_\eta^{\gamma_1+\epsilon_1} g_1)(x,\eta^o).(\partial_\eta^{\gamma_2+\epsilon_2} g_2)(z,\eta^o)\}\ (x=z=y).$$

Si, dans (14.23), on pose $\gamma'=\gamma_1+\epsilon_1$ et $\gamma''=\gamma_2+\epsilon_2$, le champ de sommation est défini par $|\gamma_1|\leq N-1-|\epsilon_1|, |\gamma_2|\leq N-1-|\epsilon_2|$, et tous les termes qui correspondent à des 4-uples $(\epsilon_1,\epsilon_2,\gamma_1,\gamma_2)$ de multi-indices tels que $|\gamma_1+\epsilon_1|+|\gamma_2+\epsilon_2|\leq N-1$ se trouvent simultanément dans les deux sommes qui définissent (14.23) et (14.24) : une inspection des termes résiduels achève de prouver le théorème 14.3, à condition d'utiliser une fois de plus l'invariance de l'application $(g_1,g_2)\mapsto h_N$ sous l'action du groupe G (une conséquence de la covariance et de l'unicité des P_{γ_1,γ_2}).

XV. LE DOMAINE D'UN PROBLÈME MIXTE.

Lorsque n = 0 , C coïncide avec la demi-droite $\mathbb{R}_*^+$, et la définition 3.6 du calcul de Fuchs devient

$$(15.1) \qquad Op(f)u(s)=2\iint_{y>0} f(y,\eta)u(y^2/s)\exp 2i\pi\eta(s-y^2/s)dy\, d\eta$$

ou encore

$$(15.2) \qquad Op(f)u(s)=\iint_{t>0} f((st)^{\frac12},\tau)e^{2i\pi(s-t)\tau}u(t)(\tfrac{s}{t})^{\frac12}dt\, d\tau.$$

Ce calcul a été détaillé également dans [48] : renvoyons à l'avertissement à la fin de la section 3 concernant le changement de notation effectué. Compte-tenu de ce changement, les opérateurs e_1 et e_2 de [48] deviennent respectivement $t^{-1}\partial/\partial\tau$ et $t\partial/\partial t$ si $f = f(t,\tau)$: ils constituent la base de champs de vecteurs utilisée en (6.8) pour définir les classes de symboles.

Considérons le demi-espace $M = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$, ensemble des points (t,x) avec $t > 0$. On peut représenter les opérateurs sur les fonctions sur M au moyen de symboles $f = f(t,x;\tau,\xi)$ vivant sur $M \times \mathbb{R}^{n+1}$, via un produit direct du calcul de Fuchs par le calcul de Weyl. La formule obtenue est

$$(15.3) \qquad (\mathrm{Op}(f)u)(s,x) = \int f((st)^{\frac{1}{2}}, \frac{x+y}{2};\tau,\eta)$$

$$\exp 2i\pi[(s-t)\tau+\langle x-y,\eta\rangle]\, u(t,y)\, (\frac{s}{t})^{\frac{1}{2}} dt\, dy\, d\tau d\eta.$$

La norme d'un covecteur (τ,ξ) au point (t,x) est donnée par

$$(15.4) \qquad |(\tau,\xi)|_{t,x} = (t^2|\tau|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Vu les théorèmes 1.1 et 9.9, nous laissons au lecteur la preuve du résultat suivant.

THÉORÈME 15.1. Appelons symbole de poids 1 toute fonction f de classe C^∞ sur $M \times \mathbb{R}^{n+1}$, telle que la fonction

$$(t\frac{\partial}{\partial t})^j (t^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau})^k (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial\xi})^\beta f(t,x;\tau,\xi)$$

soit bornée pour tout (j,k,α,β). La formule (15.3) étend l'application Op en une application linéaire séquentiellement continue de l'espace des symboles de poids 1 dans l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n ; t^{-1}dt\, dx)$.

La notion correcte de symbole classique d'ordre μ est caractérisée par les inégalités

$$(15.5) \qquad |(t\frac{\partial}{\partial t})^j (t^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau})^k (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial\xi})^\beta f(t,x;\tau,\xi)|$$

$$\leqslant C(j,k,\alpha,\beta)[1+t^2|\tau|^2+|\xi|^2]^{\frac{1}{2}(\mu-k-|\beta|)}.$$

En particulier figurent dans l'algèbre des opérateurs à symboles classiques les opérateurs différentiels $t\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ et les opérateurs de multiplication par $\varphi(\log t,x)$, où $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est une fonction à dérivées de tous ordres bornées. Ces opérateurs sont encore trop généraux pour bénéficier de propriétés de traces analogues à celles du calcul [29] de R.B. Melrose. Nous donnerons des indications à ce sujet dans la prochaine section, après avoir introduit la notion convenable de symbole totalement caractéristique : mais l'étude de problèmes aux limites dépasse le cadre de ce travail.

Revenons au cône C pour n quelconque. Pour faciliter la manipulation des classes de symboles, il est utile de spécifier une base orthonormale de $T_y(C)$, $y \in C$: une telle base est constituée par le système des vecteurs $e_j = M\,{}^{\partial}/_{\partial y_j}$, où $M \in G_o$ est une matrice choisie telle que $y = M\omega$. Utilisant l'application exponentielle Exp relative à l'espace symétrique C, on est invité à rechercher M sous la forme

$$M = \exp\begin{pmatrix} a & b' \\ b & aI \end{pmatrix} \text{ , } a \in \mathbb{R} \text{ , } b \in \mathbb{R}^n.$$

On obtient

$$(15.6) \qquad M = \begin{pmatrix} y_o & y_*' \\ y_* & r(y)^{\frac{1}{2}}I+(y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1}y_*y_*' \end{pmatrix} \text{ :}$$

il est d'ailleurs plus simple, partant de (15.6), de constater que $M\omega = y$ et de vérifier directement l'égalité $M'JM = MJM = r(y)J$, qui exprime que $M \in G_o$. Avec $e_j = M\,{}^{\partial}/\partial y_j$, on est conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 15.2. <u>Les champs de vecteurs</u> e_j sur C <u>sont définis par</u>

$$e_o = \sum_o^n y_j \,{}^{\partial}/\partial y_j$$

<u>et</u>, <u>pour</u> $k \geqslant 1$,

$$e_k = (r(y))^{\frac{1}{2}}[(y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1}y_k \frac{\partial}{\partial y_o}+\frac{\partial}{\partial y_k}]+(y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1}y_k e_o.$$

<u>Remarque</u> : on aura noté dans le calcul de e_k l'utilisation de la relation

$$\sum_{j\geqslant 1} y_j \frac{\partial}{\partial y_j} = e - y_o \frac{\partial}{\partial y_o} .$$

On remarquera que e_j n'a pas ici la même signification qu'en (6.8), où e_j représentait un champ de vecteurs constant : cette dernière notation est désormais abandonnée. Il importe de distinguer l'opérateur différentiel produit $e_{j_1}\ldots e_{j_k}$ de l'opérateur, que nous noterons $e_{j_1}\ldots{}_{j_k}$, obtenu par composition en gelant les coefficients : pour évaluer $(e_{j_1\ldots j_k} f)(y)$, on désigne par $\bar{e}_j$ le champ de vecteurs constants coïncidant avec e_j au point y, et l'on calcule $(\bar{e}_{j_1}\ldots\bar{e}_{j_k} f)(y)$. La compréhension des classes de symboles est facilitée par la comparaison de ces deux opérateurs, ce qui est plus pénible qu'on pourrait le croire à première vue.

LEMME 15.3. Soient $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, et f la fonction linéaire $y \mapsto \langle y,\eta\rangle$. On a

$$|(e_{j_1}\ldots e_{j_k} f)(y)| \leqslant C\, |\eta|_y$$

où C est une constante ne dépendant que de k et où $|\eta|_y$ a été défini dans la proposition 6.3.

Preuve : on a, avec $y = M\omega$,

$$(15.7) \qquad |\langle y,\eta\rangle| = |\langle\omega, M'\eta\rangle| \leqslant |M'\eta| = |\eta|_y .$$

D'après (6.3), on a $\|M\| \leqslant 2^{\frac{1}{2}}|y|$, et comme $M'^{-1} = r(y)^{-1}JMJ$, on a aussi

$$(15.8) \qquad |\eta| \leqslant \|M'^{-1}\|\,|M'\eta| = r(y)^{-1}\|M\|\,|M'\eta| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} \frac{|y|}{r(y)} |\eta|_y .$$

Les opérateurs e_j étant trop compliqués, on effectue le changement de variable (il jouera un rôle important plus loin) défini par

$$(15.9) \qquad y_o = t_o(1+|t_*|^2)$$

$$y_k = 2t_o t_k , \qquad k \geqslant 1.$$

Le domaine de la variable t est caractérisé par $t_o > 0$, $|t_*| < 1$: on a

$$r(y)^{\frac{1}{2}} = t_o(1-|t_*|^2) \quad , \quad y_o + r(y)^{\frac{1}{2}} = 2t_o .$$

Une vérification immédiate (partir du membre de droite) conduit aux formules suivantes :

(15.10) $$e_o = t_o \frac{\partial}{\partial t_o}$$

$$e_k = t_k t_o \frac{\partial}{\partial t_o} + \frac{1}{2}(1-|t_*|^2)\frac{\partial}{\partial t_k} \quad , \ k \geqslant 1$$

En se servant de (15.8) et de (15.9), ainsi que de l'inégalité $|y| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} y_o$, on obtient

(15.11) $$|\eta|_y \geqslant \frac{1}{4} t_o (1-|t_*|^2)^2 |\eta| \ .$$

Enfin on a , avec $f(y) = g(t)$,

(15.12) $$g(t) = t_o[\eta_o(1+|t_*|^2)+2 < \eta_*, t_*>] \ ,$$

(15.13) $$(e_j g)(t) = t_j g(t) + t_o(1-|t_*|^2)(\eta_o t_j+\eta_j) \quad , \ j \geqslant 1$$

et il est immédiat, par récurrence, que l'image de $g(t)$ par un produit des opérateurs $e_j (j\geqslant 0)$ est toujours une fonction de la forme

$$P(t_*)g(t)+\sum_{j\geqslant 1} P_j(t_*)t_o(1-|t_*|^2)(\eta_o t_j+\eta_j)+ Q(t_*)t_o(1-|t_*|^2)^2 \eta_o$$

où P,P_j,Q sont des polynômes sur $\mathbb{R}^n$. Se rappelant que $|t_*|< 1$, on voit que ,d'après (15.11), le troisième terme est majoré par $C|\eta|_y$; il en est de même du premier d'après (15.7). Pour majorer le terme du milieu, on choisit, conformément à (15.6), M sous la forme

(15.14) $$M = M' = t_o \begin{pmatrix} 1+|t_*|^2 & 2t_*' \\ 2t_* & (1-|t_*|^2)I+2t_*t_*' \end{pmatrix}$$

ce qui donne, pour $j \geqslant 1$,

$$(M'\eta)_j = t_o[2\eta_o t_j+(1-|t_*|^2)\eta_j+2t_j<\eta_*,t_*>]$$

soit, en utilisant (15.12),

$$(M'\eta)_j-t_j g(t) = t_o(1-|t_*|^2)(\eta_o t_j+\eta_j) .$$

Par suite

$$t_o(1-|t_*|^2)\ |\eta_o t_j+\eta_j| \leqslant 2\ |\eta|_y \quad , \tag{15.15}$$

ce qui termine la preuve du lemme 15.3.

LEMME 15.4. <u>Soit</u> E <u>l'espace des symboles de poids</u> 1 <u>sur</u> $T^*(C)$, <u>qui ne dépendent en fait que de</u> $y\in C$. <u>On peut écrire des identités</u>

$$e_{j_1}\ldots e_{j_k} = e_{j_1\ldots j_k} + \Sigma\, a_{i_1\ldots i_r}(y)e_{i_1\ldots i_r}$$

<u>et</u>

$$e_{j_1\ldots j_k} = e_{j_1}\ldots e_{j_k} + \Sigma\, b_{i_1\ldots i_r}(y)e_{i_1}\ldots e_{i_r} \ ,$$

<u>où les sommes sont étendues</u> à $r \leqslant k-1$ <u>et aux</u> r<u>-uples tels que</u> $i_1<\ldots<i_r$, <u>et où les coefficients</u> $a_{i_1\ldots i_r}$ et $b_{i_1\ldots i_r}$ <u>appartiennent à</u> E.

<u>Preuve</u>. L'existence et l'unicité de ces décompositions linéaires est évidente, mais il faut majorer les dérivées des coefficients. Soit $V(x,y) = (V_{r,s}(x,y))$ la matrice qui fait passer de la base $(e_j(x))$ à la base $(e_j(y))$. La conséquence principale du lemme 15.3 est l'inégalité

$$|(e_{j_1}(\partial_x)\ldots e_{j_k}(\partial_x)V_{r,s}(y,x))(x=y)| \leqslant C_k \ , \tag{15.16}$$

où la notation $e_j(\partial_x)$ précise la variable par rapport à laquelle les dérivations s'effectuent ; en inversant la matrice, on voit que (15.16) reste valable si $V_{r,s}(y,x)$ est remplacé par $V_{r,s}(x,y)$. Ecrivant

$$e_r(x) = \sum_s V_{s,r}(x,y)e_s(y)$$

et appliquant (15.16), on vérifie les inégalités

$$|e_{j_1}\ldots e_{j_k}\, a_{i_1\ldots i_r}| \leqslant C_k \ . \tag{15.17}$$

Le lemme 15.4 se déduit de (15.17) et d'une récurrence sur k.

Avec M définie en (15.6), on a

$$M^{-1} = r(y)^{-1}JMJ = r(y)^{-1}\begin{pmatrix} y_o & -y_*' \\ -y_* & r(y)^{\frac12}I+(y_o+r(y)^{\frac12})^{-1}y_*y_*' \end{pmatrix}$$

et l'on obtient la base duale (ϵ_j) de la base (e_j), au point y, en posant $\epsilon_j = M'^{-1}\partial/\partial\eta_j$: on désigne également par ϵ_j le champ de vecteurs sur $T^*(C)$ ainsi défini.

DÉFINITION 15.5. Les champs de vecteurs ϵ_j sur $T^*(C)$ sont définis par

$$\epsilon_o = (r(y))^{-1} \langle Jy, \partial/\partial\eta \rangle$$

et, pour $k \geqslant 1$,

$$\epsilon_k = (r(y))^{-\frac{1}{2}}[-(y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1}y_k \frac{\partial}{\partial\eta_o} + \frac{\partial}{\partial\eta_k}] - (y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1}y_k\ \epsilon_o.$$

PROPOSITION 15.6. Soient m une fonction-poids, μ un nombre réel, $f \in C^\infty(T^*(C))$. La fonction f est un symbole de poids m si et seulement si on a les inégalités

$$|(e_{j_1}\dots e_{j_k}\ \epsilon_{i_1}\dots\epsilon_{i_p}\ f)(Y)| \leqslant C\ m(Y),$$

où C ne dépend que de f et de k+p. La fonction f est un symbole classique d'ordre μ si et seulement si on a

$$|(e_{j_1}\dots e_{j_k}\ \epsilon_{i_1}\dots\epsilon_{i_p} f(y,\eta)| \leqslant C(1+|\eta|_y^2)^{\frac{1}{2}(\mu-p)}$$

avec C ne dépendant que de f et de k+p.

Preuve. C'est une conséquence du lemme 15.4, si l'on observe aussi que (15.16) reste valable lorsqu'on y remplace la matrice $V = V(x,y)$ par la matrice V'^{-1}.

Remarque. Les opérateurs $e_{j_1} \dots e_{j_k}$, au contraire des opérateurs $e_{j_1} \dots_{j_k}$, se transportent par difféomorphisme : c'est le seul intérêt de la proposition 15.6.

DÉFINITION ET THÉORÈME 15.7. On appellera domaine mixte le domaine $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ constitué des points t tels que $t_o > 0$ et $|t_*| < 1$: il est muni de la métrique riemannienne dont le ds^2 est donné par

$$ds^2 = [\frac{dt_o}{t_o} - \frac{2\langle t_*,dt_*\rangle}{1-|t_*|^2}]^2 + \frac{4\,|dt_*|^2}{(1-|t_*|^2)^2}\ . \tag{15.18}$$

Le difféomorphisme $\Phi : \mathfrak{M} \to C$ défini par

$$y_o = t_o(1+|t_*|^2),$$

$$y_k = 2t_o t_k , \qquad k \geqslant 1$$

est une isométrie (riemannienne) de $\mathfrak{M}$ sur C .

Preuve . Rappelons que, d'après (2.6), le ds^2 de C est donné par

$$ds^2 = (r(y))^{-2}(2\langle Jy,dy\rangle^2 - r(y)r(dy)).$$

On a par ailleurs

$$(r(y))^{-2} = t_o^{-4}(1-|t_*|^2)^{-4}.$$

Il suffit d'écrire

$$dy_o = (1+|t_*|^2)dt_o + 2 \sum_{k\geqslant 1} t_o t_k dt_k ,$$

$$dy_k = 2(t_o dt_k + t_k dt_o), \qquad k \geqslant 1,$$

et de développer pour obtenir la formule indiquée.
On peut aussi, si l'on préfère, vérifier que le système de vecteurs (e_j) défini en (15.10) est orthonormal pour le ds^2 défini en (15.18).

Remarques. Le domaine $\mathfrak{M}$ est le domaine naturel pour l'étude des problèmes mixtes dans la boule B_n de $\mathbb{R}^n$, si t_*(resp. t_o) est interprété comme la variable d'espace (resp. de temps). La transformation Φ (essentiellement un éclatement) est bijective de $\mathfrak{M}$ sur C, mais pas de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur $\bar{C}$: la partie lisse du bord de $\mathfrak{M}$ a deux composantes, qui correspondent respectivement aux données au bord (resp. initiales) du problème mixte. Le groupe G_o opère de façon isométrique sur $\mathfrak{M}$, les formules étant birationnelles mais non linéaires en général. Cependant, avec $a > o$ et $\Omega \in SO(n)$, les transformations linéaires $(t_o, t_*) \mapsto (at_o, \Omega t_*)$ figurent dans ce groupe.

On constatera que le ds^2 de $\mathfrak{M}$ est plus maniable que celui de C, puisqu'il apparaît d'emblée comme somme de carrés. Nous allons maintenant transférer le calcul de Fuchs de C vers $\mathfrak{M}$. Le difféomorphisme Φ de $\mathfrak{M}$ sur C s'étend en $\tilde{\Phi} : T^*(\mathfrak{M}) \to T^*(C)$ avec $(y,\eta) = \tilde{\Phi}(t,\theta)$ si et seulement si $y = \Phi(t)$ et $\Sigma\tau_j d\theta_{j_*} = (D\Phi(t))' \,\Sigma\eta_j dy_j$. Les formules (15.10) fournissent l'image sur $T^*(\mathfrak{M})$ des opérateurs e_j de la définition 15.2 : on écrira simplement e_j pour $(\Phi^{-1})_* e_j$, et la même convention s'applique pour ce qui concerne le transfert des opérateurs ϵ_j de la définition 15.5 : comme $<e_j,\epsilon_k> = \delta_{jk}$, on a

$$\epsilon_o = t_o^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta_o} - 2(1-|t_*|^2)^{-1}<t_*, \frac{\partial}{\partial\theta_*}> \tag{15.19}$$

$$\epsilon_k = 2(1-|t_*|^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta_k}, \qquad k\geqslant 1 .$$

On pose $|\tau|_t = |\eta|_y$ si $(y,\eta) = \tilde{\Phi}(t,\theta)$. La forme quadratique $\theta\mapsto|\theta|_t^2$ est duale du ds^2, et les formules (15.10) fournissent donc

$$|\theta|_t^2 = (t_o\theta_o)^2 + \sum_{k\geqslant 1}[t_k t_o\theta_o + \tfrac{1}{2}(1-|t_*|^2)\theta_k]^2. \tag{15.20}$$

<u>L'espace</u> $T^*(\mathfrak{M})$ <u>est lui aussi riemannien</u>, son ds^2 étant la somme de celui défini en (15.18) et de $|d\theta|_t^2$: de cette façon, $\tilde{\Phi}$ est une isométrie pour la métrique sur C définie en (2.20). Désignons, si $T = (t,\theta)$ et $T' = (t',\theta')$ appartiennent à $T^*(\mathfrak{M})$, par $d(T,T')$ la distance riemannienne de T et de T'. Alors une fonction $m > 0$ sur $T^*(\mathfrak{M})$ est une <u>fonction-poids</u> si et seulement si il existe $C_1 > 0$ et $N_1 > 0$ tels que

$$m(T) \leqslant C_1 m(T') e^{N_1 d(T,T')} \tag{15.21}$$

quels que soient T et $T' \in T^*(\mathfrak{M})$: cette notion résulte par transport de celle déjà connue, en raison du lemme 5.1 et du fait que τ, défini en (2.22), est une isométrie de Π sur $T^*(C)$. Si l'on pose pour simplifier

$$\|\theta\|_t^2 = t_o^2\,\theta_o^2 + (1-|t_*|^2)^2\,|\theta_*|^2, \tag{15.22}$$

on vérifie qu'il existe $C > 0$ ($C = 9$ convient) tel que

$$C^{-1}\|\theta\|_t^2 \leqslant |\theta|_t^2 \leqslant C\|\theta\|_t^2 . \tag{15.23}$$

On définit maintenant, par transfert, la notion de symbole de poids ou d'ordre donné vivant sur $T^*(\mathfrak{M})$. D'après la proposition 15.6, un symbole de poids m est une fonction C^∞ qui reste bornée par m après application d'un élément quelconque de l'algèbre d'opérateurs engendrée par les champs de vecteurs e_j et ϵ_j définis en (15.10) et (15.19). Dans les coordonnées t, il y a un analogue du lemme 15.4 qui, cette fois, ne présente aucune difficulté. On est alors conduit à ce qui suit.

DÉFINITION 15.8. Soit m une fonction-poids sur $T^*(\mathcal{M})$: un symbole de poids m sur $\mathcal{M}$ est une fonction f de classe C^∞ sur $T^*(\mathcal{M})$ vérifiant les inégalités

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t_o}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial t_*}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta_o}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \theta_*}\right)^\beta f(t,\theta)\right| \leqslant C\, t_o^{k-j}(1-|t_*|^2)^{|\beta|-|\alpha|} m(t,\theta)$$

avec des constantes C ne dépendant que de $(j,k,\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$.

Si μ est un nombre réel, on appelle symbole classique d'ordre μ sur $\mathcal{M}$ toute fonction f de classe C^∞ sur $T^*(\mathcal{M})$ vérifiant

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t_o}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial t_*}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta_o}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \theta_*}\right)^\beta f(t,\theta)\right| \leqslant C\, t_o^{k-j}(1-|t_*|^2)^{|\beta|-|\alpha|}$$

$$(1+\|\theta\|_t^2)^{\frac{1}{2}(\mu-k-|\beta|)}$$

avec la même hypothèse sur les constantes C , et la définition de $\|\theta\|_t$ donnée en (15.22).

D'après (15.18) ou un calcul de jacobien, la mesure (G_o-invariante) sur $\mathcal{M}$ qui correspond à la mesure dm(y) est

$$d\bar{m}(t) = 2^n\, t_o^{-1}(1-|t_*|^2)^{-n} dt. \tag{15.24}$$

La transformation $u \mapsto u \circ \Phi^{-1}$ est une isométrie de $L^2(\mathcal{M}, d\bar{m})$ sur $L^2(C, dm)$. Nous noterons également $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ l'image réciproque de l'espace $\mathcal{S}(C)$ par cette application : on vérifie immédiatement que $u \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ si et seulement si $u \in C^\infty(\mathcal{M})$ et si de plus Du est une fonction bornée chaque fois que D appartient à l'algèbre d'opérateurs engendrée par les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathcal{M}$ et par les opérateurs de multiplication par t_o^{-1} ou $(1-|t_*|^2)^{-1}$.

Enfin, en tenant compte du théorème 10.8 , on peut donner la définition suivante.

DÉFINITION 15.9. Soit f un symbole de poids m sur $\mathcal{M}$. On désigne par $\Theta(f) : \mathcal{S}(\mathcal{M}) \to \mathcal{S}(\mathcal{M})$ l'opérateur défini par

$$\Theta(f)u = (A(u \circ \Phi^{-1})) \circ \Phi$$

où A est l'opérateur de $\mathcal{S}(C)$ dans $\mathcal{S}(C)$ dont le nouveau symbole (au sens de la définition 12.4) est $f \circ \tilde{\Phi}^{-1}$.

Remarques : 1) il n'est pas très agréable d'expliciter $\Theta(f)$ dans les coordonnées de $T^*(\mathcal{M})$: si l'on se refère à ce qui a été dit dans la section "perspectives" de l'introduction, on se rappellera que les opérateurs de symétrie ne dépendent que de la géométrie intrinsèque de $\mathcal{M}$ ou de C, et se transportent donc immédiatement; en revanche, les opérateurs de translation sont liés au plongement dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et il est indubitable que la représentation V(I,b)(cf.déf. 3.1) se décrit mieux via le plongement de C dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

2) outre l'intérêt que peut présenter le domaine $\mathcal{M}$ dans l'étude des problèmes aux limites mixtes, on aura bien sûr remarqué que, sur $\mathcal{M}$, la définition des classes de symboles est plus maniable.

D'après les théorèmes 10.9 et 12.2, et la proposition 12.5, $\Theta(f)$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathcal{M}, d\bar{m})$ si f est un symbole sur $\mathcal{M}$ de poids 1; si f et g sont des symboles de poids m_1 et m_2 , $f \circ g$, défini par $\Theta(f \circ g) = \Theta(f)\,\Theta(g)$, est un symbole de poids $m_1 m_2$.

Soit $t^o \in \mathcal{M}$ tel que $t_o^o = 1$ et $t_*^o = 0$, de sorte que $\Phi(t^o) = \omega$, et désignons par $m_1(t)$ la fonction $\exp d(t^o, t)$ au sens de la distance riemannienne (15.18) sur $\mathcal{M}$: la fonction $(t,\theta) \mapsto m_1(t)$ est une fonction-poids. Si μ est un entier ≥ 0, on appellera symbole différentiel d'ordre μ sur $\mathcal{M}$ toute fonction f sur $T^*(\mathcal{M})$ de la forme

$$f(t,\theta) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(t)\,\theta^\alpha \, , \tag{15.25}$$

où les a_α sont des symboles sur $\mathcal{M}$ de poids m_1^N pour N bien choisi, ne dépendant que de t.

L'équation $(y,\eta) = \tilde{\Phi}(t,\theta)$ signifie que $y = \Phi(t)$ et que $\theta = A_y' \eta$ en désignant par A_y la matrice jacobienne dérivée de Φ au point t : explicitement on a

(15.26) $$\eta_o = t_o^{-1}(1-|t_*|^2)^{-1}<Jt,\theta>$$

$$\eta_* = (2t_o)^{-1}\,\theta_* - t_o^{-1}(1-|t_*|^2)^{-1}<Jt,\theta>t_* \ .$$

Il résulte de là que le symbole g sur C tel que

(15.27) $$g(y,\eta) = (f \circ \tilde{\Phi}^{-1})(y,\eta) = \Sigma\, a_\alpha(\Phi^{-1}(y))(A'_y\eta)^\alpha$$

est un symbole différentiel au sens de la définition 13.1. L'opérateur différentiel A qui lui correspond s'écrit $A = P(y,D_y)$ avec, d'après (13.4),

$$P(y,\eta) = \sum Q_\beta\,(y,\tfrac{\partial}{\partial y})(\partial_\eta^\beta g)(y,\eta) \quad .$$

Dans cette expression Q_β est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant |\beta|$, indépendant de P, et de plus $Q_o = 1$. Enfin on a

(15.28) $$D_y = \frac{1}{2i\pi}\,\partial/\partial y = \frac{1}{2i\pi}\,A'^{-1}_y\,\partial/\partial t \ .$$

puisque A'_y est également la matrice de passage de la base $(\partial/\partial y_j)_{j\geqslant 0}$ à la base $(\partial/\partial t_j)$. Il résulte de tout cela que $\Theta(f) = P_1(t,D_t)$, avec

(15.29) $$P_1(t,\theta) = \Sigma\, R_\beta(t,\tfrac{\partial}{\partial t})(\partial_\theta^\beta f)(t,\theta),$$

où R_β est un opérateur différentiel (ne dépendant que de β) d'ordre $\leqslant |\beta|$, et $R_o = 1$.

Enfin, on transporte l'énoncé et la preuve du théorème de composition des symboles classiques sans difficulté, vu que celui-ci est basé sur la formule de composition des symboles différentiels et sur des développements de Taylor par rapport aux seules variables grecques. Le résultat obtenu est le suivant :

THÉORÈME 15.10 Il existe une famille unique $(R_{\gamma_1,\gamma_2}(t,\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial w}))$ dépendant du couple (γ_1,γ_2) de multi-indices $\in \mathbb{N}^{n+1}$, possédant les propriétés suivantes :

(i) pour tout (γ_1,γ_2), $R_{\gamma_1,\gamma_2}(t,\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial w})$ est un opérateur différentiel à coefficients constants sur les fonctions de $(s,w) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$: l'ordre de cet opérateur est au plus $|\gamma_1| + |\gamma_2|$ et ses coefficients sont des fonctions C^∞ du paramètre $t \in D$.

(ii) Si f_1 et f_2 sont deux symboles classiques sur $\mathcal{M}$ d'ordres μ_1 et μ_2, et si $\Theta(f_1)\Theta(f_2) = \Theta(f)$, alors f est un symbole classique d'ordre $\mu_1+\mu_2$; de plus, pour tout $N \geq 1$, si l'on pose

$$h_N(t,\theta) = \sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2| \leq N-1} \left[R_{\gamma_1,\gamma_2}\left(t,\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\partial_\theta^{\gamma_1} f_1(s,\theta)\partial_\theta^{\gamma_2} f_2(w,\theta)\right)\right]_{(s=w=t)},$$

le symbole $f-h_N$ est un symbole classique d'ordre $\mu_1+\mu_2-N$.

(iii) on a $h_1 = f_1 f_2$ et $h_2-h_1 = (4i\pi)^{-1}\{f_1,f_2\}$.

Nous allons maintenant caractériser les opérateurs sur $\mathcal{M}$ dont les symboles sont des symboles différentiels classiques.

LEMME 15.11 Au sens de la définition 15.4, le symbole de l'opérateur $(2i\pi)^{-1}\, t_o \frac{\partial}{\partial t_o}$ est la fonction $t_o\theta_o$; si $k \geq 1$, le symbole de l'opérateur $(2i\pi)^{-1}e_k$ est la fonction

$$t_k t_o \theta_o + \frac{1}{2}(1-|t_*|^2)\theta_k - \frac{n-1}{4i\pi}\, t_k \ .$$

Preuve. La formule (13.7) montre que, sur C, le nouveau symbole de l'opérateur $(2i\pi)^{-1}\, \Sigma\, a_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}$ est

$$g(y,\eta) = \Sigma a_j(y)\eta_j - \frac{1}{4i\pi}\,\Sigma \frac{\partial a_j}{\partial y_j} + \frac{n+1}{4i\pi}\,\Sigma\{j\}\, y_j a_j(y)(r(y))^{-1}.$$

La définition 15.1 fournit les opérateurs $(2i\pi)^{-1}e_o$ et $(2i\pi)^{-1}e_k$ dans les coordonnées y : il est plus commode d'écrire ici

$$e_k = y_k \frac{\partial}{\partial y_o} + r(y)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y_k} + y_k(y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1}\langle y_*, \frac{\partial}{\partial y_*}\rangle.$$

Dans le cas de e_o, on obtient $g(y,\eta) = \langle y,\eta\rangle$; dans le cas de e_k, un calcul sans grâce fournit

$$\Sigma \frac{\partial a_j}{\partial y_j} = (n-1)(y_o+r(y)^{\frac{1}{2}})^{-1} y_k$$

ainsi que $\Sigma\{j\}y_j a_j(y) = 0$: on en déduit le résultat annoncé par transfert de $T^*(C)$ vers $T^*(\mathfrak{M})$, à l'aide des formules (15.26).

THÉORÈME 15.12 La correspondance ® établit une bijection entre l'espace des symboles différentiels classiques sur $\mathfrak{M}$ et l'algèbre engendrée par les opérateurs $t_o \frac{\partial}{\partial t_o}$, $(1-|t_*|^2)\frac{\partial}{\partial t_k}$ pour $k\geqslant 1$, et les opérateurs de multiplication par les fonctions $a^k \in C^\infty(\mathfrak{M})$ vérifiant

$$|(\frac{\partial}{\partial t_o})^j (\frac{\partial}{\partial t_*})^\alpha a(t)| \leqslant C_{j,\alpha}\, t_o^{-j}(1-|t_*|^2)^{-|\alpha|}.$$

Preuve. D'après la définition 15.8 et (15.22), les symboles classiques d'ordre μ sont les fonctions de la forme

$$f(t,\theta) = g(t_o, t_*, t_o\theta_o, (1-|t_*|^2)\theta_*) \tag{15.30}$$

telles que

$$|(\frac{\partial}{\partial t_o})^j (\frac{\partial}{\partial t_*})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \theta_o})^k (\frac{\partial}{\partial \theta_*})^\beta g(t,\theta)| \leqslant C_{j,\alpha,k,\beta}\, t_o^{-j}(1-|t_*|^2)^{-|\alpha|}$$
$$(1+|\theta|^2)^{\frac{1}{2}(\mu-k-|\beta|)}.$$

D'après le lemme 15.11 et (15.10), l'opérateur $(2i\pi)^{-1} t_o \frac{\partial}{\partial \theta_o}$ (resp. $(2i\pi)^{-1}(1-|t_*|^2)\frac{\partial}{\partial t_k}$) a pour symbole $t_o\theta_o$ (resp. $(1-|t_*|^2)\theta_k - \frac{n-1}{2i\pi} t_k$). Le théorème 15.12 se prouve alors par récurrence sur l'ordre de l'opérateur, à l'aide du théorème 15.10.

Remarque. On constatera la différence entre les deux composantes de la partie lisse de $\partial\mathfrak{M}$: pour $t_o = 0$, tous les vecteurs tangents sont permis, alors que pour $|t_*| = 1$ seuls sont permis les vecteurs portés par la génératrice du cylindre.

XVI - UTILISATION DU CALCUL DE FUCHS DANS LES E.D.P.

Cette section effectue de très brèves incursions dans le domaine des applications de la théorie. Celles-ci sont au moins de trois natures différentes. Les plus simples, dont nous donnerons un exemple ici, concernent l'existence d'estimations elliptiques dans des chaînes d'espaces de Sobolev avec poids dont la théorie classique n'autoriserait pas l'utilisation : elles sont une conséquence immédiate de l'existence d'un calcul symbolique. Les secondes concernent les problèmes aux limites dans le cône ou le domaine mixte $\mathfrak{M}$; le cas plus simple du demi-espace $M = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ doit être également considéré. Nous nous bornerons dans cette direction à des indications sommaires concernant (dans le cas de M) les propriétés de traces des opérateurs totalement caractéristiques ainsi que le lien entre notre calcul et celui de Melrose [29]. Les applications effectives aux problèmes aux limites, qui nécessitent des développements importants, attendront encore un peu, notre intérêt s'étant au cours de la rédaction du présent travail déplacé vers les applications de la troisième espèce. Ces dernières, brièvement évoquées dans la section 19 et développées dans des articles séparés ([49][51]), concernent le calcul de Klein-Gordon, analyse pseudodifférentielle sur $\mathbb{R}^n$ qui joue par rapport au calcul de Weyl le rôle que joue la mécanique relativiste par rapport à la mécanique classique.

Rappelons que la formule (15.3) attache à un symbole $f = f(t,x;\tau,\xi)$ vivant sur $M \times \mathbb{R}^{n+1}$ l'opérateur Op(f) de symbole actif f défini par

$$(16.1) \qquad (\mathrm{Op}(f)u)(s,x) = \int f\left((st)^{\frac{1}{2}}, \frac{x+y}{2}; \tau, \eta\right) \exp 2i\pi[(s-t)\tau + \langle x-y,\eta\rangle]\, u(t,y) \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}} dt\, dy\, d\tau\, d\eta .$$

L'espace de Hilbert au centre des considérations est $H = L^2(M; t^{-1}dt\, dx)$. Une définition analogue à la définition 3.6 permet d'introduire le symbole passif g de l'opérateur Op(f) : comme dans le cas du calcul de Weyl les notions de symboles actif et passif coïncident, le théorème 4.2 appliqué avec n = 0 (ou bien la proposition 1.2 de [48]) montre que

$$(16.2)\qquad g(t,x;\tau,\xi) = [1+\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2i\pi}\, t^{-1}\tfrac{\partial}{\partial\tau})^2]^{-\frac{1}{2}} f(t,x;\tau,\xi).$$

Insistons une fois de plus sur le fait que le calcul ainsi défini n'est pas lié uniquement à la <u>géométrie intrinsèque</u> de M (laquelle n'est pas distincte de celle de $\mathbb{R}^{n+1}$ par le difféomorphisme $(t,x) \longmapsto (x_o,x) = (\log t,x)$) mais dépend également du plongement de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Certaines classes d'opérateurs différentiels, cependant, correspondent aux mêmes classes de symboles dans ce calcul et dans celui que l'on obtiendrait, à partir du calcul de Weyl, en composant avec ce difféomorphisme. Ainsi, l'analogue (plus facile) du théorème 15.12 montre que les symboles f de la forme

$$(16.3)\qquad f(t,x;\tau,\xi) = h(\log t,x;t\tau,\xi),$$

où $h(x_o,x;\xi_o,\xi)$ est un polynôme en (ξ_o,ξ) dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de (x_o,x) à dérivées bornées, sont exactement les symboles des opérateurs dans l'algèbre engendrée par les opérateurs $t\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ et par les opérateurs de multiplication par des fonctions C^∞ à dérivées bornées de $(\log t,x)$: on voit donc que la relation (16.3) établit pour la classe d'opérateurs différentiels considérée une bijection entre leurs classes de symboles pour l'un et l'autre calculs symboliques.

Pour tout nombre réel k, la fonction $(t,x;\tau,\xi)\mapsto t^k$ est une fonction-poids pour le calcul défini en (16.1), d'une importance capitale dans l'étude des opérateurs du type de Fuchs (voir W.Schulze [36]); si A est un opérateur de poids m sur M, le théorème 12.2 montre que l'opérateur $(t^k)A(t^{-k})$ est également un opérateur de poids m : nous allons déterminer son symbole. Rappelons qu'au contraire, dans le calcul de Weyl en une variable x_o, la fonction e^{kx_o} n'est pas une fonction-poids (elle est réhabilitée en tant que telle dans le calcul de N. Dencker [17]: cependant ce dernier, défini au moyen de noyaux tronqués près de la diagonale, est une version non intrinsèque du calcul de Weyl dans laquelle les propriétés de covariance ont été perdues). En outre, toujours dans le calcul de Weyl en une variable, le symbole de l'opérateur $(e^{2\pi kx_o})\mathrm{Op}(f)(e^{-2\pi kx_o})$ est $f_k(x_o,\xi_o) = f(x_o,\xi_o+ik)$ lorsque f est un symbole différentiel : cette formule montre que f_k ne peut avoir de sens pour des symboles généraux f.

THÉORÈME 16.1. <u>Soient</u> k <u>un entier</u> $\geqslant 0$ <u>et</u> $(t^{k/2})$ <u>l'opérateur de mul-</u>

tiplication par la fonction $t \mapsto t^{k/2}$. Soient $A = \mathrm{Op}(f)$ au sens de (16.1), g le symbole passif de A, et f_k (resp. f_{-k}) le symbole actif de l'opérateur $(t^{k/2})A(t^{-k/2})$ (resp. $(t^{-k/2})A(t^{k/2})$). Soit $D = -(4i\pi)^{-1}t^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau}$, opérateur agissant sur les symboles. On a

$$f_k = \sum_{p \text{ pair}} \binom{k}{p}(1+D^2)^{p/2}D^{k-p}f + \sum_{p \text{ impair}} \binom{k}{p}(1+D^2)^{\frac{p+1}{2}}D^{k-p}g$$

et la même formule vaut pour f_{-k} à condition de remplacer D par $-D$ au second membre.

Preuve. On obtient $[(t^{k/2})A(t^{-k/2})u]\,(s,x)$ à partir de (16.1) en ajoutant le facteur $(\frac{s}{t})^{k/2}$ sous le signe intégral au second membre. Avec $\alpha = (st)^{\frac{1}{2}}$ et $\beta = s-t$, on a

$$(\frac{s}{t})^{\frac{1}{2}} = (1+\frac{\beta^2}{4\alpha^2})^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2\alpha} = [(1+\frac{\beta^2}{4\alpha^2})^{\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2\alpha}]^{-1} .$$

Si l'on désigne par $\mathcal{F}_3^{-1}f$ la transformée de Fourier inverse de f par rapport à la variable τ, on voit donc que l'on a

$$(\mathcal{F}_3^{-1}f_k)(\alpha,\frac{x+y}{2};\beta,\eta) = [(1+\frac{\beta^2}{4\alpha^2})^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2\alpha}]^k(\mathcal{F}_3^{-1}f)(\alpha,\frac{x+y}{2};\beta,\eta)$$

autrement dit

$$f_k = [(1+D^2)^{\frac{1}{2}}+D]^k f . \tag{16.4}$$

Il suffit de développer par la formule du binôme et d'utiliser (16.2) pour obtenir le théorème 16.1.

COROLLAIRE. Si f est, au sens de (15.5), un symbole classique d'ordre μ, il en est de même, pour tout entier k, de f_k.

Preuve. Cela résulte d'un développement asymptotique analogue à celui de la proposition 14.2, exprimant cette fois le lien entre les symboles actif et passif d'un même opérateur. Bien que nous n'ayons pas l'usage de ce fait, signalons que le corollaire (ainsi que (16.4), mais non le théorème 16.1) restent valables si k n'est pas entier : il suffit, partant de (16.4), d'établir un développement (fini) valable pour des symboles différentiels, puis d'étendre la validité asymptotique de celui-ci par les méthodes de la section 14. Bien entendu, le développement qui intervient dans le théorème 16.1 est fini, ce qui va simplifier le très bref examen des propriétés de traces qui suit.

Dans l'étude des opérateurs agissant sur des fonctions sur M susceptibles d'avoir des traces sur $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, l'emploi de l'espace $L^2(M,dt\,dx)$ est plus naturel que celui de H, ce qui conduit à remplacer Op par Q, défini par

$$(16.5)\qquad (Q(f)u)(s,x) = \int f\big((st)^{\frac{1}{2}}, \tfrac{x+y}{2};\tau,\eta\big)$$
$$\exp 2i\pi[(s-t)\tau + \langle y,\eta\rangle]u(t,y)\,dt\,dy\,d\tau\,d\eta\ .$$

Il est naturel d'examiner Q(f) lorsque f est un symbole appartenant aux classes introduites par R.B. Melrose [29] : appelons ainsi <u>symbole totalement caractéristique d'ordre</u> μ tout symbole f de la forme

$$(16.6)\qquad f(t,x;\tau,\xi) = g(t,x;t\tau,\xi)$$

où g est la restriction à $t > 0$ d'un symbole classique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ d'ordre μ au sens du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$. On voit que si tel est le cas, et si u est la restriction à M d'une fonction appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, alors $(Q(f)u)(s,x)$ admet quand $s\to 0$ une limite donnée par

$$(16.7)\qquad (Q(f)u)(0,x) = \int g(0,\tfrac{x+y}{2};0,\eta)e^{2i\pi\langle x-y,\eta\rangle}u(0,y)\,dy\,d\eta\ .$$

Autrement dit l'application $u|_{\partial M} \mapsto Q(f)u|_{\partial M}$ est, au sens du calcul de Weyl sur $\partial M = \{0\} \times \mathbb{R}^n$, l'opérateur de symbole

$$(x,\xi) \longmapsto g(0,x;0,\xi)\,.$$

Pour les symboles totalement caractéristiques, le calcul défini en (16.5) bénéficie donc également de la propriété de restriction essentielle dans le calcul de Melrose, et qui est l'objet de la proposition 5.23 de [29]. On notera que l'hypothèse de lacunarité, nécessaire dans le calcul de Melrose, ne l'est pas ici. Il reste à examiner les traces d'ordre supérieur. En posant

$$u_1'(s,x) = \frac{\partial u}{\partial s}(s,x) \text{ et } f_1'(t,x;\tau,\xi) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x;\tau,\xi)\ ,$$

on obtient, en partant de (16.5) et en intégrant par parties,

$$(16.8)\qquad (Q(f)u)_1' = Q(f)u_1' + \frac{1}{2}(t^{-\frac{1}{2}})Q(f_1')(t^{\frac{1}{2}}u) + \frac{1}{2}(t^{\frac{1}{2}})Q(f_1')(t^{-\frac{1}{2}}u).$$

D'après le théorème 16.1 valable aussi bien pour la règle Q que pour la règle Op donnée en (16.1) et le lien (16.2) entre les symboles actif et passif, on obtient

$$(16.9)\qquad (Q(f)u)_1' = Q(f)u_1' + Q((1+D^2)^{\frac{1}{2}} f_1')u.$$

Or, si l'on pose

$$(16.10)\qquad h(t,x;\tau,\xi) = \left[1-(4\pi)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]^{\frac{1}{2}} g(t,x;\tau,\xi),$$

on a

$$(16.11)\qquad (1+D^2)^{\frac{1}{2}} f_1'(t,x;\tau,\xi) = h_1'(t,x;t\tau,\xi).$$

Il est facile de voir (par une preuve analogue, quoique considérablement plus simple, à celle de la proposition 6.9) que h, défini par (16.10), est encore la restriction à $M\times\mathbb{R}^{n+1}$ d'un symbole classique d'ordre μ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, au sens du calcul de Weyl, et par suite que $(1+D^2)^{\frac{1}{2}} f_1'$ est un symbole totalement caractéristique d'ordre μ si f en est un.

Les formules (16.7) et (16.9) permettent, pour tout entier $k\geqslant 0$, d'exprimer la k-ème trace sur ∂M de $Q(f)u$ sous la forme $A_o u_o+\dots+A_k u_k$, où u_j est la j-ème trace de u et où A_j est un opérateur pseudo-différentiel sur ∂M dont le symbole de Weyl est explicite.

Il est utile de remarquer que le symbole f totalement caractéristique d'ordre μ défini par (16.6) est un symbole classique d'ordre μ au sens de (15.5) si l'on suppose valable la famille d'inégalités

$$\left|\left[(1+t)\frac{\partial}{\partial t}\right]^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\beta g(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C(1+|\tau|+|\xi|)^{\mu-k-|\beta|}$$

avec C dépendant de (j,α,k,β). Pour t borné, cette hypothèse ne diffère pas de celle que g est la restriction à $M\times\mathbb{R}^{n+1}$ d'un symbole de Weyl classique d'ordre μ.

Ainsi qu'on le verra dans un instant, le calcul défini en (16.5) et celui de Melrose (dans le cas du demi-espace) conduisent dans le cas des symboles totalement caractéristiques aux mêmes opérateurs, pourvu que l'on ajoute dans le cas du calcul de Melrose une hypothèse de lacunarité. L'article [29] va plus loin dans de nombreuses directions : description précise des espaces de distributions sur une variété à bord, invariance par difféomorphisme, opérateurs intégraux de Fourier... En revanche, rappelons que le calcul présenté ici n'est pas limité aux symboles totalement caractéristiques, ni même aux symboles classiques. Enfin, signalons que puisque seule la version "n=O" du calcul de Fuchs intervient ici, le théorème 8.2 de [48] permet d'obtenir une forme tout à fait explicite de la formule asymptotique de composition des symboles qui est l'objet du théorème 14.3.

Nous allons maintenant effectuer la comparaison entre un opérateur totalement caractéristique $Q(f)$ défini par (16.5) et (16.6) et un opérateur de Melrose $Op_o(a)$ défini par

$$(16.12) \qquad (Op_o(\tilde{a})u)(s,x) = \int \tilde{a}(s,x;\sigma,\xi)e^{2i\pi(s\sigma+\langle x,\xi\rangle)}\hat{u}(\sigma,\xi)d\sigma d\xi.$$

On suppose que $\tilde{a}$ est un symbole totalement caractéristique d'ordre μ, c'est-à-dire que $\tilde{a}$ s'écrit

$$(16.13) \qquad \tilde{a}(s,x;\sigma,\xi) = a(s,x;s\sigma,\xi)$$

où a est la restriction à $s>0$ d'un symbole sur $\mathbb{R}^{2n+2}$ classique d'ordre μ au sens du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$. On supposera en fait, avec L. Hörmander ([22],p.113), que a appartient à S^μ_+ , classe un peu plus restrictive caractérisée comme suit : $a \in S^\mu_+$ si $a \in C^\infty(\bar{M}\times \mathbb{R}^{n+1})$ et si, pour tout entier ν et tous indices ou multi-indices j,α,k,β, il existe une constante $C>o$ telle que

$$(16.4) \qquad |\partial_s^j\partial_x^\alpha\partial_\sigma^k\partial_\xi^\beta\ a(s,x;\sigma,\xi)| \leqslant C(1+s)^{-\nu}(1+|\sigma|+|\xi|)^{\mu-k-|\beta|}.$$

On suppose enfin que a est lacunaire au sens de Melrose, c'est-à-dire (cf.R.B. Melrose [29] ou L.Hörmander [22],p.114) que la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}_3^{-1}a$, définie pour $s>0$ par l'intégrale oscillante

$$(\mathcal{F}_3^{-1}a)(s,x;r,\xi) = \int a(s,x;\sigma,\xi)e^{2i\pi r\sigma}d\sigma \quad ,$$

est à support dans $r \leqslant 1$. Cette condition assure que, pour $s>0$, l'intégrale au second membre de (16.12) ne dépend, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, que de la restriction de u à M et permet de regarder $Op_o(\tilde{a})$ comme opérant dans les fonctions définies seulement sur M.

THÉORÈME 16.2. Il y a identité entre la classe des opérateurs Q(f) (cf(16.5)) où g, lié à f par (16.6), appartient à S_+^μ, et celle des opérateurs $Op_o(\tilde{a})$ (cf. (16.12)) où a, lié à $\tilde{a}$ par (16.13), appartient à S_+^μ et est en outre lacunaire.

Preuve. Rappelons [41] que l'opérateur

$$J^{\frac{1}{2}} = \exp(4i\pi)^{-1} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} \tag{16.15}$$

connecte le symbole "standard" d'un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. celui du calcul dans lequel les convolutions ont la priorité sur les multiplications) et son symbole de Weyl. Ici, faisons-le agir sur $f(t,x;\tau,\xi)$ dans les seules variables tangentielles (x,ξ) : désignant par $\mathcal{F}_2 u$ la transformée de Fourier de $u(t,x)$ relativement à x, on peut alors écrire (16.5) sous la forme

$$\begin{aligned}(Q(f)u)(s,x) = \int & (J^{\frac{1}{2}}f)((st)^{\frac{1}{2}},x;\tau,\xi) \\ & \exp 2i\pi[(s-t)\tau+\langle x,\xi\rangle]\ (\mathcal{F}_2 u)(t,\xi)dt\ d\tau\ d\xi\ .\end{aligned} \tag{16.16}$$

On sait que les classes de symboles classiques sont stables par $J^{\frac{1}{2}}$: ici cet opérateur, agissant dans les seules variables tangentielles, commute à l'opérateur $g \longmapsto f$ défini en (16.6) et conserve l'appartenance de g à S_+^μ .

La comparaison de (16.12) et de (16.16) montre que l'identité de Q(f) et de $Op_o(\tilde{a})$ équivaut à l'identité entre intégrales oscillantes

$$\int \tilde{a}(s,x;\sigma,\xi)e^{2i\pi(s-t)\sigma}d\sigma = \int (J^{\frac{1}{2}}f)((st)^{\frac{1}{2}},x;\tau,\xi)e^{2i\pi(s-t)\tau}d\tau. \tag{16.17}$$

Tenant compte du lien entre a et $\tilde{a}$ d'une part, entre f et g d'autre part, et de ce que $(\mathcal{F}_3^{-1}a)(s,x;r,\xi) = 0$ pour $r \geqslant 1$, on résoud aisément (16.17) sous la forme

$$(16.18)\qquad a(s,x;\sigma,\xi) = \int_{\theta>0} (J^{\frac12}g)(s\theta^{\frac12},x;\tau\theta^{\frac12},\xi)\, e^{2i\pi(1-\theta)(\tau-\sigma)}\,d\theta\,d\tau\ :$$

on note immédiatement que cette identité implique que a est lacunaire. En sens inverse, (16.17) fournit

$$(16.19)\qquad \int a(s,x;s\sigma,\xi)\exp 2i\pi\left(s-\frac{t'^2}{s}\right)\sigma\,d\sigma = t'^{-1}\int (J^{\frac12}g)(t',x;\tau',\xi)\exp 2i\pi\left(\frac{s}{t'}-\frac{t'}{s}\right)\tau'\,d\tau'$$

d'où, en posant $t'=t$, $\rho=\frac12\left(\frac{s}{t}-\frac{t}{s}\right)$ et effectuant le changement $\sigma\mapsto t^{-1}\sigma$:

$$(16.20)\qquad (J^{\frac12}g)(t,x;\tau,\xi) = 2\int e^{4i\pi\rho(\sigma-\tau)}\, a(t(\rho+(1+\rho^2)^{\frac12}),x;\sigma(\rho+(1+\rho^2)^{\frac12}),\xi)\,d\sigma\,d\rho$$

ou encore

$$(16.20\text{ bis})\qquad (J^{\frac12}g)(t,x;\tau,\xi) = \frac12\int_{\theta>0} a(t\theta^{\frac12},x;\sigma,\xi)\, e^{2i\pi(1-\theta^{-1})\sigma}\, e^{-2i\pi(\theta^{\frac12}-\theta^{-\frac12})\tau}\,\theta^{-1}(1+\theta^{-1})\,d\theta\,d\sigma\ .$$

Il s'agit à présent de montrer que les transformations (16.18) et (16.20) (ou (16.20 bis)) conservent la classe des restrictions à $M\times\mathbb{R}^{n+1}$ des symboles sur $\mathbb{R}^{2n+2}$ classiques d'ordre μ au sens du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$: il est entendu qu'en outre a est supposé lacunaire dans (16.20). On pose $2\rho=\theta^{\frac12}-\theta^{-\frac12}$ dans les deux cas.

On coupe l'intégrale au second membre de (16.18) en deux morceaux I_1 et I_2 en insérant les facteurs $\chi(\rho)$ et $1-\chi(\rho)$ de classe C^∞, le premier ayant son support dans $|\rho|\leqslant\frac34$ et le second dans $|\rho|\geqslant 2^{-3/2}$: on a donc $\frac14\leqslant\theta\leqslant 4$ sur le domaine d'intégration de I_1 et $\max(\theta,\theta^{-1})\geqslant 2$ sur le domaine d'intégration de I_2 . Pour I_1 , on effectue un grand nombre de fois l'intégration par parties relativement à $\frac{\partial}{\partial\theta}$ qui sort le facteur $\tau-\sigma$, utilisant pleinement (16.14) y compris le facteur $(1+s)^{-\nu}$: le facteur $(1+|\tau-\sigma|^2)^{-N}$ obtenu à la suite de cette opération assure d'une part la sommabilité en τ, et permet d'autre part la comparaison de $1+\sigma^2$ et de $1+\tau^2$ grâce à l'inégalité "de Peetre" rappelée en (14.4). Pour étudier I_2, on l'écrit après changement de variable sous la forme

$$(16.21) \qquad I_2 = 2\int [1-\chi(\rho)]\ (J^{\frac{1}{2}}g)(s(\rho+(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}),x;\tau,\xi)$$
$$e^{-4i\pi\rho\tau}e^{4i\pi\rho(\rho+(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}})\sigma}(\rho^2+1)^{-\frac{1}{2}}[(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}+\rho]\ d\rho\ d\tau.$$

Puisque $J^{\frac{1}{2}}g$ est la restriction à $\overline{M}\times\mathbb{R}^{n+1}$ d'un symbole (de Weyl) classique, on voit qu'un nombre suffisant d'intégrations par parties relativement à $\frac{\partial}{\partial\tau}$ permet d'assurer la sommabilité relativement à $d\rho\ d\tau$ tout en faisant sortir une haute puissance de ρ^{-1}. Des intégrations par parties relativement à ρ permettent de faire apparaître le facteur

$$[1+|-\tau+(\rho^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\rho+(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}})^2\sigma|^2]^{-N}\ :$$

comme $\rho+(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{1}{2}(\rho^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ et que l'on sait disposer des puissances de ρ , l'inégalité de Peetre permet encore de comparer les puissances de $1+\tau^2$ et celles de $1+\sigma^2$. L'examen des dérivées de a défini par (16.18) ne pose pas de difficultés nouvelles.

On écrit l'intégrale au second membre de (16.20 bis) sous la forme $I_1'+I_2'+I_3'$, intégrales obtenues par l'insertion des facteurs supplémentaires $\chi_j(\rho)$ avec $\chi_2=\chi$ comme plus haut, et $\theta\leqslant\frac{1}{2}$ (resp. $\theta\geqslant 2$) pour $\rho\in\mathrm{supp}(\chi_1)$ (resp. $\mathrm{supp}(\chi_3)$). La première intégrale I_1' se traite à l'aide d'intégrations par parties relativement à l'opérateur $\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}$, lesquelles assurent la sommabilité par rapport à $d\sigma$ tout en mettant en évidence de hautes puissances de θ et de $1+|\sigma|+|\xi|$: la comparaison des puissances de $1+\sigma^2$ et de $1+\tau^2$ est assurée par une intégration par parties en $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et par l'inégalité de Peetre. On écrit I_2' dans les variables utilisées dans (16.20), insérant au second membre de cette identité le facteur supplémentaire $\chi(\rho)$ à support dans $|\rho|\leqslant 3/4$: cette intégrale se traite comme I_1 au moyen d'une intégration par parties en $\partial/\partial\rho$. L'étude de I_3' repose sur l'hypothèse que a est lacunaire : on part de l'intégrale au second membre de (16.20 bis) avec le facteur supplémentaire $\psi_3(\theta)=\chi_3(\frac{1}{2}(\theta^{\frac{1}{2}}-\theta^{-\frac{1}{2}}))$ (ici $\theta\geqslant 2$), et l'on écrit

$$(16.22) \qquad e^{2i\pi(1-\theta^{-1})\sigma}=\sum_{j<k}\frac{1}{j!}\left(-2i\pi\frac{\sigma}{\theta}\right)^j e^{2i\pi\sigma}$$
$$+\frac{1}{(k-1)!}\left(-2i\pi\frac{\sigma}{\theta}\right)^k\int_0^1(1-z)^{n-1}e^{2i\pi(1-z\theta^{-1})\sigma}dz.$$

L'hypothèse de lacunarité entraîne la nullité des intégrales oscillantes

$$\int \sigma^j a(t\theta^{\frac{1}{2}}, x; \sigma, \xi) e^{2i\pi\sigma} d\sigma \quad ,$$

ce qui montre que les termes réguliers du développement (16.22) ne contribuent en rien à l'intégrale examinée. Il reste à considérer, avec k aussi grand qu'on le souhaite et $z \in [0,1]$, l'intégrale (déjà transformée au moyen d'une première intégration par parties)

$$(16.23) \qquad I_4'(z) = \int e^{2i\pi(1-z\theta^{-1})\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^N [\sigma^k a(t\theta^{\frac{1}{2}}, x; \sigma, \xi)]$$
$$e^{2i\pi(\theta^{\frac{1}{2}}-\theta^{-\frac{1}{2}})\tau} (1-z\,\theta^{-1})^{-N} \theta^{-1-k} (1+\theta^{-1}) \psi_3(\theta) d\theta \, d\sigma \ .$$

Puisque $1-z\theta^{-1} \geqslant \frac{1}{2}$, la sommabilité est déjà assurée si $k \geqslant 1$ et $N-k$ est assez grand : de plus une haute puissance de θ^{-1} reste en évidence et l'on conclut comme dans les intégrales qui précèdent à l'aide d'une intégration par parties en $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et de l'inégalité de Peetre.

Ceci termine la preuve du théorème 16.2.

Nous revenons maintenant au cas du domaine mixte $\mathfrak{M}$. Certaines conséquences de l'existence d'un calcul symbolique sont de pure routine, telles l'inversion des opérateurs elliptiques et la définition de certains espaces de Sobolev. Soit $H = L^2(\mathfrak{M}, t_0^{-1}(1-|t_*|^2)^{-n} dt)$ (voir (15.24)). Pour tout entier $k \geqslant 0$, soit $H_k^F(\mathfrak{M})$ l'espace des $u \in H$ telles que Du appartienne à H toutes les fois que D est un produit de k opérateurs au plus, choisis parmi les opérateurs $t_0\frac{\partial}{\partial t_0}$, $(1-|t_*|^2)\frac{\partial}{\partial t_j}$ $(j \geqslant 1)$. On peut identifier le dual $H_{-k}^F(\mathfrak{M})$ à l'espace vectoriel engendré par les distributions Dv sur $\mathfrak{M}$, où D est un opérateur de la forme indiquée plus haut et où $v \in H$. On pose $H_\infty^F(\mathfrak{M}) = \bigcap_{k\geqslant 0} H_k^F(\mathfrak{M})$ et $H_{-\infty}^F(\mathfrak{M}) = \bigcup_{k\geqslant 0} H_{-k}^F(\mathfrak{M})$. Tant que l'on reste entre ces deux espaces, le calcul symbolique relatif aux symboles classiques introduits dans la définition 15.8 et à la règle de correspondance de la définition 15.9 présente les aspects les plus usuels si familiers dans le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction nulle au voisinage de 0 et égale à 1 en dehors d'un compact : elle est destinée, comme à l'habitude, à éliminer les singularités à l'origine des fonctions homogènes. Ainsi, nous appellerons <u>symbole homogène</u> d'ordre μ sur $\mathcal{M}$ toute fonction $f(t,\theta)$ de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_X(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$, homogène de degré μ en θ, telle que la fonction

$$(t,\theta) \longmapsto \alpha(\|\theta\|_t^2) f(t,\theta)$$

soit un symbole classique d'ordre μ. Un symbole <u>presque homogène</u> d'ordre μ sera n'importe quel symbole classique f d'ordre μ vérifiant la propriété suivante : il existe, pour tout entier $j \geqslant 0$, un symbole homogène $f_{\mu-j}$ d'ordre $\mu-j$, tel que, pour tout entier $k \geqslant 1$, le symbole

$$(t,\theta) \mapsto f(t,\theta) - \alpha(\|\theta\|_t^2) \sum_{j \leqslant k-1} f_j(t,\theta)$$

soit un symbole classique d'ordre $\mu-k$. Evidemment, les $f_{\mu-j}$ sont uniques, et le symbole presque homogène f sera dit <u>globalement elliptique</u> si f_μ^{-1} est un symbole homogène d'ordre $-\mu$: par un argument habituel, on peut alors, pour tout entier $k \geqslant 0$, trouver un symbole presque homogène g, d'ordre $-\mu$, tel que les composés $f \circ g$ et $g \circ f$ diffèrent de 1 par des symboles classiques d'ordre $-k$.

Au sens de la définition 15.9, $\Theta(f)$ opère de $H^F_\infty(\mathcal{M})$ dans $H^F_\infty(\mathcal{M})$ et de $H^F_{-\infty}(\mathcal{M})$ dans $H^F_{-\infty}(\mathcal{M})$ pour tout symbole classique f. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_k(t,\theta) = (1+\|\theta\|_t^2)^{k/2} \tag{16.24}$$

et l'espace $H^F_k(\mathcal{M})$ comme l'espace des $u \in H^F_{-\infty}(\mathcal{M})$ tels que $\Theta(f_k)u$ appartienne à H : le théorème 15.12 et l'ellipticité globale de f_k montrent que cette nouvelle définition de $H^F_K(\mathcal{M})$ coïncide avec l'ancienne lorsque k est un entier pair $\geqslant 0$. Tout opérateur A ayant un symbole classique d'ordre μ opère de $H^F_k(\mathcal{M})$ dans $H^F_{k-\mu}(\mathcal{M})$ pour tout k réel : si de plus A est globalement elliptique, alors $u \in H^F_{-\infty}(\mathcal{M})$ appartient à $H^F_k(\mathcal{M})$ si et seulement si Au appartient à $H^F_{k-\mu}(\mathcal{M})$; un corollaire de ces faits est l'identité des deux définitions de $H^F_k(\mathcal{M})$ pour tout entier k.

Un opérateur elliptique d'ordre 2 typique est

$$L = \left(t_0 \frac{\partial}{\partial t_0}\right)^2 + \sum_{k \geqslant 1} \left[(1-|t_*|^2) \frac{\partial}{\partial t_k}\right]^2 .$$

On observera la différence entre les types de dégénérescence de L sur les deux composantes lisses du bord de $\mathcal{M}$: si l'on examine près de $|t_*| = 1$ le deuxième terme de cet opérateur, on constate qu'il évoque les opérateurs elliptiques dégénérés examinés par M.S.Baouendi et C. Goulaouic dans [1] ; toutefois, la dégénérescence y est "deux fois plus grande", ce qui change tout. Près de $(t_o = 0, |t_*| < 1)$, L est totalement caractéristique elliptique au sens de Melrose [29]. Enfin, L n'est pas hypoelliptique jusqu'au bord au sens classique.

Le dernier aspect de la théorie que nous évoquerons concerne la <u>microlocalisation jusqu'au bord</u>. Dans le cas du demi-espace $M = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$, on peut définir le fibré cotangent comprimé $\widetilde{T}^*(M)$ comme le complété de $M \times \mathbb{R}^{n+1} = \{(t,x;\tau,\xi) : t > 0\}$ relativement à la métrique riemannienne définie par

$$ds^2 = dt^2 + \sum dx_j^2 + (d(t\tau))^2 + \sum d\xi_j^2 :$$

l'application $(t,x;\tau,\xi) \mapsto (t,x;t\tau,\xi)$ de $M \times \mathbb{R}^{n+1}$ dans $M \times \mathbb{R}^{n+1}$ se prolonge en une isométrie de $\widetilde{T}^*(M)$ sur $\overline{M} \times \mathbb{R}^{n+1}$, au moyen de laquelle nous identifierons ces deux espaces. On voit que cette notion de fibré cotangent comprimé ne diffère pas de celle de Melrose. Si l'on pose

$$\tilde{f}(t,x;\tau,\xi) = f(t,x;t\tau,\xi),$$

l'application $f \mapsto \tilde{f}$ permet d'identifier les restrictions à $M \times \mathbb{R}^{n+1}$ (identifié à une partie de $\widetilde{T}^*(M)$) des symboles classiques d'ordre μ au sens du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$ aux symboles totalement caractéristiques d'ordre μ sur M (voir (16.6)).

Dans le cas du domaine $\mathcal{M}$, nous définirons un symbole <u>totalement caractéristique</u> d'ordre μ comme un symbole $\tilde{f}$ de la forme

$$\tilde{f}(t,\theta) = f(t, t_o\theta_o, (1-|t_*|^2)\theta_*) \tag{16.25}$$

où f est la restriction à $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n+1}$ d'un symbole sur $\mathbb{R}^{n+1}$, classique d'ordre μ au sens du calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Si l'on examine les inégalités qui suivent (15.30), on voit que ce n'est que pour t_o borné que les symboles totalement caractéristiques ont en particulier le comportement exigé des symboles classiques sur $\mathcal{M}$. Cependant le calcul symbolique (théorème 15.10) reste valable pour des symboles totalement caractéristiques. Cette fois, le fibré cotangent comprimé à considérer est le complété de $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n+1}$ pour la métrique

$$ds^2 = \sum_{j\geq 0} dt_j^2 + (d(t_0\theta_0))^2 + \sum_{k\geq 1} (d((1-|t_*|^2)\theta_k))^2.$$

L'identification définie par (16.25) des symboles totalement caractéristiques à des restrictions à $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{n+1} \subset \overline{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{n+1}$ de symboles sur $\mathbb{R}^{n+1}$ classiques au sens du calcul de Weyl, permet, pour des classes presque homogènes appropriées, de définir une notion d'<u>ensemble caractéristique</u>, partie fermée conique de $\overline{\mathcal{M}} \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ où s'annule la partie homogène principale du symbole. Par suite, on dispose d'une notion de <u>front d'onde</u> $WF_F(u)$ pour $u \in H^F_{-\infty}(\mathcal{M})$, et l'on peut, au moins pour les symboles totalement caractéristiques, microlocaliser jusqu'au bord la notion d'ellipticité.

Les applications de ces notions aux problèmes aux limites nécessitent encore de longs développements et seront traitées ailleurs.

XVII - LA SÉRIE DISCRÈTE HOLOMORPHE ET LE CALCUL DE FUCHS

Dans cette section, nous établissons le lien entre la série discrète holomorphe de $SO_o(2,n+1)$ et le groupe complet Γ_C (voir (2.19)) de covariance du calcul de Fuchs du cône C. Ceci permettra de comprendre pourquoi toute la partie difficile (théorèmes fondamentaux 9.9 et 11.4) de l'analyse pseudo-différentielle sur C a pu être basée sur l'emploi des fonctions ψ_X^λ : ces fonctions, ou plus exactement les fonctions φ_X^λ (voir (3.3)), jouent en effet un rôle intrinsèque dans la représentation V_λ introduite dans la section 3.

Outre l'intérêt de faire apparaître le calcul de Fuchs comme une limite du calcul H_λ (mais, comme nous l'avons dit dans l'introduction, ce dernier calcul n'autorise pas de formules de composition sous forme de développements asymptotiques), cette section mettra en lumière le rôle d'une certaine <u>contraction</u> de groupe. Les contractions de groupes jouent un rôle de plus en plus important en physique mathématique : dans le cas particulier qui nous occupe, les aspects géométriques en ont été discutés par S. Sternberg [39]. Le groupe SO(2,4) est en effet le groupe des transformations (un peu singulières) qui conservent les équations de Maxwell : il est en même temps le groupe qui occupe une position centrale dans la cosmologie d'I. Segal [37]. Comme l'existence des "transformations d'échelle" $X \mapsto aX$ dans ce groupe n'est apparemment pas conciliable avec le concept de masse, S. Sternberg a proposé de remplacer l'algèbre so(2,4) par une contraction, ce qui rétablirait la situation.

Bornons-nous dans cette direction à nous réjouir que l'un des univers possibles selon Segal-Sternberg soit précisément l'espace sur lequel vivent les symboles du calcul de Fuchs.

Soient Γ un groupe de Lie, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}_1$ une décomposition de son algèbre de Lie en somme directe d'espaces vectoriels, $\mathfrak{g}_o$ étant en outre une sous-algèbre : on désigne par p_1 la projection sur $\mathfrak{g}_1$ parallèlement à $\mathfrak{g}_o$.
On a évidemment

$$(17.1) \qquad p_1([x,z]) = p_1([x,p_1(z)]) \text{ si } x \in \mathfrak{g}_o, \ z \in \mathfrak{g}.$$

Si $x, x' \in \mathfrak{g}_0$ et $y, y' \in \mathfrak{g}_1$, posons

$$[x+y\ ,\ x'+x']_c = [x,x'] + p_1([x,y'] + [y,x']). \tag{17.2}$$

La relation (17.1) fournit

$$[x+y,[x'+y',x''+y'']_c]_c = [x,[x',x'']] + p_1([x,[x',y'']]) + p_1([x,[y',x'']]) + p_1([y,[x',x'']]), \tag{17.3}$$

d'où il résulte que la formule (17.2) définit une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ sur l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{g}$: nous appellerons $\mathfrak{g}_c$ une <u>contraction</u> de $\mathfrak{g}$.

Soit dV_λ <u>une représentation infinitésimale</u>, dépendant d'un paramètre $\lambda > \lambda_o$, de $\mathfrak{g}$ dans un espace de Hilbert H. Nous entendons par là la donnée d'un sous-espace dense $\mathcal{S}$ de H et d'une application linéaire dV_λ de $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$, telle que :

(i) $dV_\lambda(z)$ est un opérateur essentiellement autoadjoint pour tout $z \in \mathfrak{g}$

(ii) $[dV_\lambda(z_1), dV_\lambda(z_2)] = -i\ dV_\lambda([z_1,z_2])$ si z_1 et $z_2 \in \mathfrak{g}$.

Un cas particulier est celui où V_λ est une représentation unitaire de Γ dans H, et où

$$dV_\lambda(z) = -i \frac{d}{ds}\Big|_{s=o} (V_\lambda(e^{sz})). \tag{17.4}$$

Supposons que pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}_o \times \mathfrak{g}_1$, et pour une certaine constante réelle α non nulle, l'opérateur $dV_\lambda(x+\alpha\lambda^{-2}y)$ admette, quand $\lambda \to \infty$, une limite $dV(x,y)$. Alors, si de plus $(x',y') \in \mathfrak{g}_o \times \mathfrak{g}_1$, on voit que

$$dV_\lambda([x+\alpha\lambda^{-2}y, x'+\alpha\lambda^{-2}y']) \to dV([x,x'], p_1([x,y']+[y,x']))$$

quand $\lambda \to \infty$. Autrement dit, dV est une représentation infinitésimale de l'algèbre de Lie contractée $\mathfrak{g}_c$: il peut en outre arriver que dV soit la représentation infinitésimale attachée, par une formule du type (17.4), à une représentation unitaire d'un groupe Γ_c ayant $\mathfrak{g}_c$ comme algèbre de Lie.

Nous allons montrer que le programme qui précède peut être entièrement rempli en partant de $\Gamma = SO_o(2,n+1)$; le groupe Γ_c sera le groupe complet de covariance du calcul de Fuchs. Renvoyons à la section 2 pour la définition du groupe $G_o = \mathbb{R}^+_* \times SO_o(1,n)$ de transformations linéaires de C et pour celle du groupe G de transformations affines de $C \times \mathbb{R}^{n+1}$.

THÉORÈME 17.1. Soit Γ_c le groupe de transformations de $C \times \mathbb{R}^{n+1}$ engendré par G et par la symétrie $\widetilde{S}$ définie en (2.17) ; soit V la représentation unitaire de ce groupe dans H qui étend celle donnée sur G par la définition 3.1, et telle que $V(\widetilde{S}) = \sigma$, et rappelons que le calcul de Fuchs est covariant relativement à cette action et cette représentation de Γ_c . La composante connexe $(\Gamma_c)_o$ de l'élément neutre peut être identifiée à l'ensemble des triples $(M,b,c) \in G_o \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, avec

$$(M_1,b_1,c_1)(M,b,c) = (M_1M, b_1 + JM_1'^{-1}Jb, c+JM^{-1}Jc_1).$$

L'action de $(\Gamma_c)_o$ dans $C \times \mathbb{R}^{n+1}$ est donnée par

$$(M,b,c).(y,\eta) = (My, M'^{-1}\eta + Jb - M'^{-1}P_y^{-1}Jc),$$

où l'on a posé $P_y = NN'$ si $y = N\omega$, $N \in G_o$. La représentation de $(\Gamma_c)_o$ est donnée par

$$V(M,b,c)u(t) = u(M^{-1}t)\exp 2i\pi\langle Jb,t\rangle \exp 2i\pi\langle Jc, \frac{M'Jt}{r(t)}\rangle .$$

Enfin, $(\Gamma_c)_o$ est engendré par G et par l'élément $(I,0,\omega)$, avec $\omega = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Preuve . Rappelons (2.17) que

$$\widetilde{S}(y,\eta) = (Sy, -P_y\eta)$$

et (2.18) que

$$(M,b).(y,\eta) = (My, M'^{-1}\eta + Jb)$$

si $(M,b) \in G$. Définissons

$$(17.5) \qquad (I,0,c) = \widetilde{S}(I,c)\widetilde{S} :$$

comme $P_{Sy} = P_y^{-1}$, on voit que

$$\begin{aligned}(I,0,c).(y,\eta) &= \widetilde{S}(I,c).(Sy,-P_y\eta) = \widetilde{S}(Sy,-P_y\eta+Jc)\\ &= (y, P_{Sy}(P_y\eta - Jc)) = (y, \eta - P_y^{-1}Jc).\end{aligned}$$

Plus généralement, posant par définition

$$(17.6) \qquad (M,b,c) = (M,b)(I,0,c),$$

on vérifie la formule donnant l'action de (M,b,c) sur $C \times \mathbb{R}^{n+1}$: la formule qui exprime le produit $(M_1,b_1,c_1)(M,b,c)$ résulte sans peine de là. Comme $Sy = N'^{-1}\omega$ si $y = N\omega$, $N \in G_o$, on vérifie que $P_{MSy} = MP_y^{-1}M'$ pour tout $M \in G_o$; également, $SMS\, y = M'^{-1}y$, d'où l'on déduit que

$$\tilde{S}(M,O)\tilde{S}.(y,\eta) = (SMSy,\ P_{MSy}M'^{-1}P_y\eta) = (M'^{-1}_y, M\eta)$$

autrement dit

$$\tilde{S}(M,O)\tilde{S} = (M'^{-1},O).$$

Comme $(M,b) = (I,b)(M,O)$, on a par suite

$$\tilde{S}(M,b,c)\tilde{S} = (I,O,b)(M'^{-1},O)(I,c) \tag{17.7}$$
$$= (M'^{-1}, JMJc,\ JM'Jb).$$

Le groupe connexe $(\Gamma_c)_o$ est donc d'indice 2 dans Γ_c. La représentation V s'obtient sans peine sur $(\Gamma_c)_o$ par

$$V(M,b,c) = V(M,b)\sigma V(I,c)\sigma\ ,$$

à l'aide de la définition 3.1, utilisant (2.5) une fois de plus.

Enfin, on a, pour tout $M \in G_o$,

$$(M,O,O)(I,O,\omega)(M^{-1},O,O) = (I,O,JM^{-1}J\omega)$$

et $JM^{-1}J\omega$ est un élément arbitraire de C. Comme C engendre le groupe additif $\mathbb{R}^{n+1}$, la relation (17.6) montre finalement que (Γ_c) est engendré par G et par l'élément (I,O,ω).

PROPOSITION 17.2. Considérons les sous-groupes à un paramètre suivants de $(\Gamma_c)_o$:

1) type 1 : $s \mapsto (I,sb,o)$, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$
2) type 2 : $s \mapsto (e^sI,O,O)$
3) type 3 : $s \mapsto (e^{s\Omega},O,O)$, $\Omega = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix} \frac{1}{n}$, $A = -A' = (a_{jk})$

   type 3 bis : $s \to (e^{s\Omega},O,O)$, $\Omega = \begin{pmatrix} O & q'_* \\ q_* & O \end{pmatrix}$, $q_* \in \mathbb{R}^n$

4) type 4 : $s \mapsto (I,O,sc)$, $c \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Les générateurs infinitésimaux de la représentation V associés à ces sous-groupes sont

$$-i\,\tilde{f}_b = 2\pi\,\langle Jb,t\rangle$$
$$-i\,\tilde{\varepsilon} = i\sum_{j\geq o} t_j \frac{\partial}{\partial t_j}\ ,$$
$$-i\,\tilde{g}_A = i\sum a_{jk}t_k \frac{\partial}{\partial t_j}\ ,$$
$$-i\,\tilde{g}_{q_*} = i\sum q_k\left(t_k \frac{\partial}{\partial t_o} + t_o \frac{\partial}{\partial t_k}\right)\ ,$$
$$-i\,\tilde{h}_c = 2\pi\,\langle c,(r(t))^{-1}t\rangle\ .$$

<u>L'algèbre de Lie de</u> Γ_c <u>s'écrit</u> $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}_1$ <u>où</u> $\mathfrak{g}_o$ <u>est l'algèbre de Lie du groupe</u> G <u>engendré par les sous-groupes du type</u> 1,2,3,3 bis et $\mathfrak{g}_1$ <u>est celle</u> (<u>commutative</u>) <u>des transformations du type 4</u>.

<u>On a les relations</u>

$$[\tilde{h}_c , \tilde{\varepsilon}] = - \tilde{h}_c \qquad , \qquad [\tilde{h}_c , \tilde{g}_A] = - \tilde{h}_{Ac_*},$$

$$[\tilde{h}_c , \tilde{g}_{q_*}] = \tilde{h}_{\langle c_*, q_* \rangle} \,\omega + c_o q_* \ .$$

<u>Preuve</u> : Si l'on part de la définition (17.4) des opérateurs infinitésimaux d'une représentation et que l'on utilise l'expression de V donnée dans le théorème 17.1, on obtient ces relations sans difficulté : ne pas oublier, pour l'avant-dernière, d'employer la formule $\Sigma a_{jk} t_j t_k = 0$, conséquence de $A = - A'$.

THÉORÈME 17.3. <u>L'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}_c$ <u>du groupe</u> Γ_c <u>s'obtient par contraction à partir de l'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>du groupe</u> $\Gamma = SO_o(2,n+1)$.

<u>Preuve</u>. Les calculs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_c$ sont déjà faits (proposition 17.2) puisque la représentation fidèle V permet d'identifier $(\Gamma_c)_o$ à son image par V, donc $\mathfrak{g}_c$ à l'ensemble des produits par i des opérateurs infinitésimaux de cette représentation. Au contraire, les calculs dans $\mathfrak{g}$ seront faits via la représentation linéaire de Γ dans $\mathbb{C}^{n+3}$ évoquée au début de la section 5. La formule (5.2) permet d'entrelacer l'action linéaire de Γ dans $\mathbb{C}^{n+3}$ et son action par automorphismes complexes de Π : enfin, la transformation τ définie en (2.22), que nous rappelons,

$$\tau(x+i\xi) = (\frac{x}{r(x)} \ , \ -J\xi) \quad ,$$

entrelace les actions du sous-groupe G de Γ dans Π et dans $C \times \mathbb{R}^{n+1}$. Ceci rend possible d'identifier $\mathfrak{g}_o \subset \mathfrak{g}_c$ à l'algèbre de Lie de G considéré comme sous-groupe de Γ : nous allons à présent construire les générateurs des sous-groupes à un paramètre de Γ des types 1,2,3 et 3 bis.

<u>Type 1</u> : vu la relation (2.21)

$$[M,b]X = JM'^{-1}JX -ib,$$

la transformation de Π qui correspond à $(I,b,o) \in (\Gamma_c)_o$ est la transformation $X \mapsto X-ib$. On vérifie qu'elle provient de la transformation linéaire de $\mathbb{C}^{n+3}$ définie, dans les coordonnées $(\alpha_o, \beta_o, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_n)$, par

$$\alpha_0' = (1 - \tfrac{1}{2} r(b))\alpha_0 - \tfrac{1}{2} r(b)\alpha_1 - \langle \beta, Jb\rangle$$
$$\alpha_1' = \tfrac{1}{2} r(b)\alpha_0 + (1 + \tfrac{1}{2} r(b))\alpha_1 + \langle \beta, Jb\rangle$$
$$\beta_j' = \beta_j + (\alpha_0 + \alpha_1) b.$$

La matrice de cette transformation est exp f_b avec

$$f_b = \begin{pmatrix} 0 & -b_0 & 0 & b_1 \dots b_n \\ b_0 & 0 & b_0 & 0 \dots 0 \\ 0 & b_0 & 0 & -b_1 \dots -b_n \\ b_1 & 0 & -b_1 & \\ \dots\dots\dots & & & 0 \\ b_n & 0 & -b_n & \end{pmatrix}$$

Type 2 : l'élément $(e^s I, 0, 0)$ de $(\Gamma_c)_0$ correspond à la transformation $X \mapsto e^{-s}X$ de Π , qu'on relève en la transformation linéaire

$$\alpha_0' = \alpha_0 \operatorname{ch} s + \alpha_1 \operatorname{sh} s$$
$$\alpha_1' = \alpha_0 \operatorname{sh} s + \alpha_1 \operatorname{ch} s$$
$$\beta_j' = \beta_j$$

dont la matrice est exp $s\varepsilon$ avec

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & N' \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \underline{\quad} \\ n+1 \end{matrix} \quad , \quad N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Type 3 ou 3 bis : $(\Lambda, 0, 0)$, avec $\Lambda \in SO_0(1,n)$, correspond à $X \mapsto \Lambda X$ ou encore à la transformation linéaire

$$\alpha_0' = \alpha_0, \ \alpha_1' = \alpha_1, \ \beta' = \Lambda\beta .$$

Si $\Lambda = e^{\Omega}$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & q_*' \\ q_* & A \end{pmatrix}$, la matrice de cette transformation est exp g_{A,q_*} avec

$$g_{A,q_*} = \begin{pmatrix} 0 & P' \\ P & A \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \underline{n} \end{matrix} \ , \ P' = \begin{pmatrix} 0 \\ q_*' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On écrira g_A pour $g_{A,0}$ et g_{q_*} pour g_{0,q_*} : bien entendu on a $A = -A'$.

Enfin, on pose

$$\delta = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{2} \\ \\ \underline{n+1} \end{array}$$

et, si $q_* \in \mathbb{R}^n$,

$$h_{q_*} = [\delta, g_{q_*}] = \begin{pmatrix} 0 & -Q' \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \underline{3} \\ \underline{n} \end{array} \quad \text{avec } Q' = \begin{pmatrix} q'_* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de G est engendrée par les éléments $f_b, \varepsilon, g_A, g_{q_*}$; pour obtenir $\mathfrak{g}$ en entier, il faut ajouter l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_1$ engendré par δ et les h_{q_*}. Il n'est pas nécessaire d'écrire les relations dans $\mathfrak{g}_0$ qui, par construction, ne sont évidemment pas distinctes de celles dans $\mathfrak{g}_0$ considérée comme sous-algèbre de $\mathfrak{g}_c$. On obtient par ailleurs

$$[\delta, f_b] = -b_0\,\varepsilon + g_{b_*} \qquad [\delta, \varepsilon] = f_\omega - \delta$$

$$[\delta, g_A] = 0 \qquad [\delta, g_{q_*}] = h_{q_*}$$

$$[h_{q_*}, f_b] = -\langle b_*, q_*\rangle \varepsilon + b_0 g_{q_*} - g_{q_* \wedge b_*}$$

avec

$$(q_* \wedge b_*)_{jk} = q_j b_k - q_k b_j ,$$

$$[h_{q_*}, \varepsilon] = f_{q_*} - h_{q_*} , \qquad [h_{q_*}, g_A] = -h_{Aq_*} , \qquad [h_{q_*}, g_{r_*}] = \langle q_*, r_*\rangle \delta .$$

La formule de contraction (17.2) consiste à conserver $[z,z']$ si z et $z' \in \mathfrak{g}_0$, à le remplacer par 0 si z et $z' \in \mathfrak{g}_1$, et à le remplacer par sa projection sur $\mathfrak{g}_1$ si $z \in \mathfrak{g}_0$ et $z' \in \mathfrak{g}_1$. Considérons l'isomorphisme linéaire de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_c$ qui envoie f_b sur $\tilde{f}_b$, ε sur $\tilde{\varepsilon}$, g_A sur $\tilde{g}_A$, g_{q_*} sur $\tilde{g}_{q_*}$, δ sur $\tilde{\delta} = \tilde{h}_\omega$ et h_{q_*} sur $\tilde{h}_{q_*}$. Les relations établies dans la proposition 17.2 s'écrivent

$$[\tilde{\delta}, \tilde{f}_b] = 0, \quad [\tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}] = -\tilde{\delta}, \quad [\tilde{\delta}, \tilde{g}_A] = 0, \quad [\tilde{\delta}, \tilde{g}_{q_*}] = \tilde{h}_{q_*},$$

$$[\tilde{h}_{q_*}, \tilde{f}_b] = 0 , \quad [\tilde{h}_{q_*}, \tilde{\varepsilon}] = -\tilde{h}_{q_*}, \quad [\tilde{h}_{q_*}, \tilde{g}_A] = -\tilde{h}_{Aq_*},$$

$$[\tilde{h}_{q_*}, \tilde{g}_{r_*}] = \langle q_*, r_*\rangle \tilde{\delta} .$$

Ceci termine la preuve du théorème 17.3.

THÉORÈME 17.4. <u>La représentation infinitésimale dV attachée à la représentation</u> V <u>de</u> $(\Gamma_c)_o$ <u>définie dans le théorème</u> 17.1 <u>est une contraction de la série discrète holomorphe</u> dV_λ <u>de représentation infinitésimales de</u> so(2,n+1).

<u>Preuve</u>. Pour commencer, il faut rappeler en détail la construction classique de la série discrète holomorphe (V_λ). On pourra consulter H. Rossi et M. Vergne ([32],[33]); dans le cas qui nous occupe, les calculs ont été détaillés dans ([53], section 2). On pose

$$k_\lambda = 2^{-2\lambda}\pi^{n/2-\lambda}\,\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1-n))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1))} \tag{17.8}$$

et

$$(K_\lambda u)(X) = k_\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_C u(t)e^{-2\pi<Jt,\bar{X}>}dt. \tag{17.9}$$

Alors, si $\lambda > \max(0,n-1)$, K_λ est une isométrie de H_λ (cf.(3.2)) sur l'espace $\mathcal{H}_\lambda$ des fonctions $\bar{f}$ antiholomorphes sur Π, de carré sommable pour la mesure $r(x)^{\frac{1}{2}(\lambda+n+1)}d\underline{m}(X)$. Soient $\gamma \in SO(2,n+1)$ et $[\gamma]$ la transformation complexe de Π associée ; soit j le jacobien holomorphe de $[\gamma]$. Il est possible (de façon non unique) de choisir dans Π une détermination holomorphe de log j(X). On définit alors une transformation unitaire $\mathcal{M}_{\gamma^{-1}}$ en posant

$$(\mathcal{M}_{\gamma^{-1}}\bar{f})(X) = (\bar{j}(X))^{\frac{\lambda+n+1}{2(n+1)}}\,\bar{f}([\gamma](X)). \tag{17.10}$$

A cause de l'ambiguïté résiduelle, $\mathcal{M}$ n'est qu'une représentation projective de $\Gamma = SO_o(2,n+1)$ en général mais l'ambiguïté peut être levée sur les sous-groupes à un paramètre de Γ (remplaçant ceux-ci par leurs revêtements universels), ce qui conduira à une véritable représentation infinitésimale. On définit la représentation projective V_λ de Γ dans H_λ par $V_\lambda(\gamma) = K_\lambda^{-1}\mathcal{M}_\gamma K_\lambda$. Enfin, pour avoir un espace indépendant de λ, on désigne par ω_λ l'isométrie de H sur H_λ telle que

$$(\omega_\lambda u)(t) = r(t)^{\frac{1}{4}(\lambda-n-1)}u(t) \tag{17.11}$$

et l'on définit la représentation W_λ de Γ dans H par

$$W_\lambda(\gamma) = \omega_\lambda^{-1}V_\lambda(\gamma)\,\omega_\lambda\,. \tag{17.12}$$

Par exemple, si $[\gamma]$ est l'élément $[M,b] \in G$ défini en (2.21) par

$$[M,b](X) = JM'^{-1}JX - ib,$$

on vérifie successivement que $j(X) = (\det M)^{-1} = |M|^{-(n+1)}$,

que

$$V_\lambda([M,b])u(t) = |M|^{\frac{1}{2}(\lambda-n-1)} u(M^{-1}t)e^{2i\pi\langle Jt,b\rangle}$$

et que

$$W_\lambda([M,b])u(t) = u(M^{-1}t)e^{2i\pi\langle Jt,b\rangle}.$$

On voit donc que sous l'identification de $G \subset \Gamma$ à un sous-groupe de $(\Gamma_c)_o$ donnée dans le théorème 17.1, les représentations W_λ et V, restreintes à ce groupe, se correspondent. Compte tenu de la relation $[\delta, g_{q_*}] = h_{q_*}$ établie dans la preuve du théorème 17.3, il suffit pour terminer la preuve du théorème 17.4 de prouver le résultat suivant. Soit A_λ l'opérateur infinitésimal de la représentation W_λ correspondant au sous-groupe à un paramètre engendré par δ, bien défini à l'addition près d'une constante réelle. Alors, pour un choix convenable de cette constante, et de la constante réelle α non nulle, $\lambda^{-2}A_\lambda$ a pour limite lorsque $\lambda \to \infty$ l'opérateur $-i\alpha^{-1}\tilde{\delta} = -i\alpha^{-1}\tilde{h}_\omega$, c'est-à-dire l'opérateur de multiplication par $2\pi\alpha^{-1}(r(t))^{-1}t_o$. Le théorème 17.4 est donc une conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION 17.5. <u>Pour la représentation projective</u> W_λ <u>de</u> Γ <u>dans</u> H <u>définie en</u> (17.12), <u>l'opérateur infinitésimal</u> A_λ <u>correspondant au sous-groupe à un paramètre</u> $SO(2) \subset SO(2) \times SO(n+1)$ <u>est donné par</u>

$$A_\lambda = -(4\pi)^{-1}t_o \sum_{o}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_j^2} - (2\pi)^{-1}\sum_{1}^{n} t_j \frac{\partial^2}{\partial t_o \partial t_j}$$
$$+ (16\pi)^{-1}[\lambda^2-(n+1)^2]\frac{t_o}{r(t)} + \pi t_o.$$

<u>Preuve</u>. Le générateur infinitésimal de $SO(2)$ est la matrice δ introduite dans la preuve du théorème 17.3 (on voit ici l'intérêt des structures hermitiennes, puisque le centre non trivial du sous-groupe compact maximal de Γ joue un rôle capital). La matrice $e^{\theta\delta}$ opère linéairement sur $\mathbb{C}^{n+3}$ par les formules

$$\alpha'_o = \alpha_o\cos\theta - \beta_o\sin\theta$$
$$\beta'_o = \alpha_o\sin\theta + \beta_o\cos\theta$$
$$\alpha'_k = \alpha_k,\ \beta'_k = \beta_k \text{ pour } k \geqslant 1.$$

On note, en utilisant (5.2) et (5.3), que

$$\frac{\alpha_0'+\alpha_1'}{\alpha_0+\alpha_1} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\alpha_1}\cos\theta - \frac{\beta_0}{\alpha_0+\alpha_1}\sin\theta + \frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1}$$

$$= \frac{1}{2}(1+r(X))\cos\theta - iX_0\sin\theta + \frac{1}{2}(1-r(X))$$

$$= -\ r(X\sin\frac{\theta}{2} + i\omega\cos\frac{\theta}{2}) \ .$$

Par ailleurs

$$\frac{\beta_0'}{i(\alpha_0+\alpha_1)} = \frac{1}{2i}\ (1+r(X))\ \sin\theta + X_0\cos\theta \ .$$

Il en résulte que $[e^{\theta\delta}]$ est la transformation complexe $X \mapsto X'$ de Π définie par les formules

(17.13) $$X_0' = (r(X\sin\frac{\theta}{2} + i\omega\cos\frac{\theta}{2}))^{-1}[\ \frac{i}{2}(1+r(X))\sin\theta - X_0\cos\theta]$$

$$X_k' = -(r(X\sin\frac{\theta}{2} + i\omega\cos\frac{\theta}{2}))^{-1}X_k \qquad ,\ k \geqslant 1.$$

Si l'on se rappelle que Σ est la symétrie de Π telle que $\Sigma X = (r(X))^{-1}JX$, on voit, après un bref développement, que

(17.14) $$X'\sin\frac{\theta}{2} - i\,\omega\cos\frac{\theta}{2} = \Sigma\,(X\sin\frac{\theta}{2} + i\omega\cos\frac{\theta}{2}).$$

Cette formule exprime $[e^{\theta\delta}]$ à l'aide de Σ et de transformations du sous-groupe G. Or, un calcul élémentaire mais typographiquement coûteux montre que le jacobien holomorphe de la transformation $Z \mapsto \Sigma Z$ est $(-1)^{n+1}(r(Z))^{-n-1}$, et par suite le jacobien holomorphe de $[e^{\theta\delta}]$ est la fonction

(17.15) $$j(X) = [-r(X\sin\frac{\theta}{2} + i\,\omega\cos\frac{\theta}{2})]^{-n-1}.$$

Comme il a été vu dans la proposition et définition 7.2, $r(X)$ n'est jamais réel $\leqslant 0$ pour $X \in \Pi$: lorsque $0 < \theta < \pi$, on choisit alors l'argument de $-r(X\sin\frac{\theta}{2} + i\,\omega\cos\frac{\theta}{2})$ dans $]0,2\pi[$ pour tout $X \in \Pi$, et l'on définit enfin

(17.16) $$\mathcal{R}_\theta = \mathcal{M}_{[e^{-\theta\delta}]}$$

conformément à la définition (17.10). On vérifie la relation de groupe

(17.17) $$\mathcal{R}_{\theta+\theta'} = \mathcal{R}_{\theta}\mathcal{R}_{\theta}$$

si $0 < \theta < \pi$, $0 < \theta' < \pi$, $0 < \theta+\theta' < \pi$. En effet, on commence par remarquer que l'argument de $-r(X \sin\frac{\theta}{2} + i\omega\cos\frac{\theta}{2})$ se prolonge en une fonction continue à valeurs dans $[0,2\pi[$ si l'on rajoute à Π les points de la forme $i\beta\omega$ avec β réel, $|\beta| < \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$. Or, quand $X \to 0$, le point $[e^{\theta'\delta}](X)$ tend vers $-i(\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2})\omega$, et dans les conditions indiquées on a $0 < \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} < \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$. Une application directe de (17.10) permet alors de lever l'ambiguïté résiduelle sur les arguments. On est maintenant en mesure d'évaluer le générateur infinitésimal du groupe $\mathcal{R}_{\theta}$, avec

(17.18) $$(\mathcal{R}_{\theta}\bar{f})(X) = [-r(\bar{X}\sin\frac{\theta}{2} + i\omega\cos\frac{\theta}{2})]^{-\frac{1}{2}(\lambda+n+1)}\bar{f}([e^{\theta\delta}](X)).$$

On a effet

(17.19) $$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0}(\mathcal{R}_{\theta}\bar{f})(X) = \frac{i}{2}(\lambda+n+1)\bar{X}_0\bar{f}(X) + \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0}\bar{f}([e^{\theta\delta}](X)).$$

De plus, les formules (17.13) fournissent

(17.20) $$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0}([e^{\theta\delta}]X) = i[X_0^2 - \frac{1}{2}(1+r(X))]\omega + iX_0X_*$$

d'où

(17.21) $$\frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0}(\mathcal{R}_{\theta}\bar{f})(X) = \frac{i}{2}(\lambda+n+1)\bar{X}_0\bar{f}(X) + i[\bar{X}_0^2 - \frac{1}{2}(1+r(\bar{X}))]\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{X}_0} + i\sum_{k\geq 1}\bar{X}_0\bar{X}_k\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{X}_k}.$$

Soit

(17.22) $$iL_{\lambda} = K_{\lambda}^{-1}(\frac{d}{d\theta}\mathcal{R}_{\theta})(\theta=0)K_{\lambda}$$

le générateur infinitésimal du groupe $K_{\lambda}^{-1}\mathcal{R}_{\theta}K_{\lambda}$. La relation 17.9 montre qu'il suffit pour obtenir iL_{λ} de remplacer dans (17.21) $\bar{X}_j$ par $\{j\}(2\pi)^{-1}\partial/\partial t_j$ et $\frac{\partial}{\partial\bar{X}_j}$ par $-\{j\}2\pi t_j$. On obtient l'opérateur infinitésimal de la représentation V_{λ} attaché au sous-groupe SO(2) sous la forme

(17.23) $$L_{\lambda} = -(4\pi)^{-1}\sum_{j\geq 0}t_0\frac{\partial^2}{\partial t_j^2} - (2\pi)^{-1}\sum_{k\geq 1}t_k\frac{\partial^2}{\partial t_0\partial t_k} + (4\pi)^{-1}(\lambda-n-1)\frac{\partial}{\partial t_0} + \pi t_0.$$

Enfin, l'opérateur infinitésimal A_{λ} de la représentation W_{λ} attaché au même groupe est, d'après (17.12), $A_{\lambda} = \omega_{\lambda}^{-1}L_{\lambda}\omega_{\lambda}$: on obtient la proposition 17.5 après un calcul élémentaire, mais pénible.

Remarque : posons

$$\sigma^{\lambda} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\lambda+n+1)} K_{\lambda}^{-1} \mathcal{R}_{\pi} \circ K_{\lambda}$$

où $\mathcal{R}_{\theta}$ a été défini en (17.16); pour tout $X \in \Pi$ soit

$$\sigma_X^{\lambda} = V_{\lambda}([M,b])\sigma^{\lambda}\,(V_{\lambda}([M,b])^{-1}$$

si $[M,b] \in G$ est tel que $X = [M,b]\omega$. Alors, pour tout opérateur à trace A sur H_{λ}, la fonction $b_{\lambda} : X \mapsto 2^{n+1}\mathrm{Tr}(A\sigma_X^{\lambda})$ est le symbole passif de A pour le calcul H_{λ} qui a été introduit dans [53]. Avec $\tau : \Pi \to \mathbb{C}+i\mathbb{R}^{n+1}$ définie en (2.22), il est naturel de chercher le lien entre la fonction $b_{\lambda} \circ \tau^{-1}$ et le symbole passif h, au sens du calcul de Fuchs, de l'opérateur $\omega_{\lambda}^{-1} A\, \omega_{\lambda}$. Dans le cas où $n = 0$, la section 10 de [48] exprime ce lien sous la forme

$$h(y,\eta) = (2\pi)^{y\partial/\partial y} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1-y\,\partial/\partial y))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1+y\,\partial/\partial y))}\, b_{\lambda}(\tau^{-1}(y,\eta)). \tag{17.24}$$

Pour $n \geqslant 2$, on peut encore expliciter (sous une forme assez compliquée) le noyau de l'opérateur $b_{\lambda} \circ \tau^{-1} \mapsto h$, qui bien entendu commute à l'action du groupe G sur $\mathbb{C}+i\mathbb{R}^{n+1}$: l'analogue de (17.24) n'est pas encore éclairci. Il est intéressant de remarquer, lorsque $n = 0$, la relation asymptotique

$$b_{\lambda}(\tau^{-1}(y,\eta)) \sim h(\tfrac{\lambda}{4\pi}\, y,\eta), \qquad \lambda \to \infty. \tag{17.25}$$

Toujours dans le cas où $n = 0$, il est possible (c'est un peu plus simple) de fonder sur l'usage de (17.24) la preuve des théorèmes fondamentaux du calcul de Fuchs. On est en effet ramené à prouver les résultats analogues dans le calcul H_{λ} pour λ grand : or la fonction de Wigner du calcul H_{λ} (voir [54]) a une structure plus simple que celle du calcul de Fuchs. L'étude de l'action sur les classes de symboles de l'opérateur qui intervient dans (17.24) ne présente guère de difficultés.

On pourra remarquer pour terminer que l'opérateur L_{λ} défini en (17.23), opérateur infinitésimal du groupe de rotations lié à la structure complexe de Π, joue relativement au calcul H_{λ} le rôle joué par l'oscillateur harmonique ([42]) dans le calcul de Weyl : aucun opérateur similaire n'existe dans le calcul de Fuchs.

XVIII - LE CALCUL DE FUCHS DU DOMAINE $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Remplaçons le cône C par $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et la forme quadratique $r(t)$ qui le définit par $|t|^2$. Nous nous proposons d'indiquer les grandes lignes de la situation obtenue : plus encore que les analogies formelles, il sera intéressant de mettre en lumière en quoi les deux théories diffèrent sur un plan plus profond.

On suppose $n \geqslant 2$, et l'on s'intéresse au domaine $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sur lequel opère le groupe $G_o = \mathbb{R}_*^+ \times SO(n)$: on identifie l'élément $(a,\Omega) \in G_o$ à la matrice $M = a\Omega$, et l'on pose $|M| = a = (\text{dét } M)^{1/n}$. L'espace de Hilbert sur lequel on va opérer est $H = L^2(\mathbb{R}^n)$. Le domaine $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un espace riemannien symétrique naturellement isométrique à $\mathbb{R}_*^+ \times S^{n-1}$. En analogie avec les considérations qui ont permis d'obtenir (2.12), on explicite la symétrie géodésique S_y de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ autour de y par

$$S_y t = -\frac{|y|^2}{|t|^2}\, t + \frac{2\langle y,t\rangle\, y}{|t|^2} = S_{-y} t \, . \tag{18.1}$$

Bien entendu, on a encore $M S_y M^{-1} = S_{My}$ si $M \in G_o$.

Si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$, on introduit la transformation unitaire $\sigma_{y,\eta}$ par

$$(\sigma_{y,\eta} u)(t) = |y|^n \, |t|^{-n} u(S_y t)\, e^{2i\pi \langle \eta, t - S_y t\rangle} \, . \tag{18.2}$$

Le calcul de Fuchs sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est alors défini comme suit. Soit f une fonction sur $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$ sommable relativement à la mesure de Lebesgue $dY = dy\, d\eta$ et telle que $f(y,\eta) = f(-y,\eta)$: on lui associe l'opérateur $\mathrm{Op}(f)$ sur H tel que

$$\mathrm{Op}(f) = 2^n \int f(Y)\, \sigma_Y \, dY \, . \tag{18.3}$$

On fait opérer sur $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$ un produit semi-direct G du groupe G_o par $\mathbb{R}^n$ via la relation (comparer avec (2.18))

$$(M,b).(y,\eta) = (My, M'^{-1}\eta + b) . \tag{18.4}$$

Par ailleurs, la formule

$$V(M,b)u(t) = |M|^{-n/2} u(M^{-1}t)\, e^{2i\pi \langle b,t\rangle} \tag{18.5}$$

définit une représentation unitaire V de G dans H, et l'on vérifie la relation de covariance

$$(18.6) \qquad V(M,b)\mathrm{Op}(f)V(M,b)^{-1} = \mathrm{Op}(f \circ (M,b)^{-1}).$$

On peut étendre celle-ci à un groupe de transformations comprenant les symétries σ_Y. Une classe de symboles invariante sous l'action de G est celle des symboles de poids 1, définie comme suit : un symbole de poids 1 est une fonction de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$, bornée, et qui reste une fonction bornée après application d'un élément quelconque de l'algèbre engendrée par les opérateurs $|y|\,\partial/\partial y_j$, $|y|^{-1}\partial/\partial\eta_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Jusqu'à présent, rien de bien nouveau n'est apparu. Tout va changer avec l'introduction du domaine

$$(18.7) \qquad \Pi = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n = \{X = (X_0, X_*) : X_0 > 0\}.$$

C'est un espace riemannien symétrique (l'espace hyperbolique de rang un) pour la structure telle que

$$(18.8) \qquad ds^2 = X_0^{-2} \sum_{j \geqslant 0} dX_j^2 .$$

La distance d est donnée par

$$(18.9) \qquad \mathrm{ch}\, d(X,X') = (2X_0X_0')^{-1}[X_0^2 + X_0'^2 + |X_* - X_*'|^2].$$

Il est classique que l'on peut donner une autre réalisation de Π comme hyperboloïde de masse dans $\mathbb{R}^{n+2}$: le groupe de Lorentz SO(1,n+1) opère sur ce modèle par son action linéaire naturelle, en préservant sa structure riemannienne. En conservant la réalisation Π de ce domaine, on notera qu'un groupe (non connexe) Γ d'isométries de Π est engendré par G et par l'inversion $X \mapsto |X|^{-2}X$, à condition de faire opérer $G = G_0 \times \mathbb{R}^n$ (produit semi-direct) par

$$(18.10) \qquad [M,b](X_0,X_*) = (|M|^{-1}X_0, M'^{-1}X_* - b).$$

On obtient la composante connexe Γ_0 de l'élément neutre en remplaçant l'inversion par le produit de celle-ci par une symétrie linéaire euclidienne dans les variables X_* .

L'emploi du domaine Π est naturel en vue des formules de résolution de l'identité d'un type analogue à celui de la proposition 3.4. Soit en effet $\psi(t) = g(|t|)$ une fonction de carré sommable sur $\mathbb{R}^n$ invariante par rotation, telle que $\|\psi\| = 1$ et

$$(18.11) \qquad \int_0^\infty |g(r)|^2 \frac{dr}{r} = \alpha < \infty ,$$

et posons

$$(18.12) \qquad \psi_X(t) = X_0^{n/2} e^{-2i\pi <X_*,t>} \psi(X_0 t)$$

pour tout $X \in \Pi$: les fonctions ψ_X sont normalisées et, pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a, grâce à la formule de Parseval,

$$\int_\Pi |(u,\psi_X)|^2 X_0^{-n-1} dX = \int_0^\infty X_0^{-1} dX_0 \int |\psi(X_0 t)|^2 |u(t)|^2 dt$$

$$= \frac{2^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \alpha \|u\|^2 .$$

On peut par exemple prendre $\psi = \psi^\nu$ $(\nu > \frac{n}{2})$ avec

$$(18.13) \qquad \psi^\nu(t) = k_\nu |t|^{-\frac{n}{2}+\nu} e^{-2\pi|t|} .$$

Hasardons-nous à effectuer la <u>conjecture</u> suivante : pour que f soit un symbole de poids 1, il faut et il suffit que, pour tout N, on ait

$$(18.14) \qquad |(Op(f)\psi_X^\nu, \psi_{X'}^\nu)| \leq C\ (\text{ch } d(X,X'))^{-N}$$

pour tout ν assez grand, et tout couple (X,X') de points de Π . Sans avoir d'opinion bien arrêtée sur la validité éventuelle de cette conjecture, nous pensons qu'en tout état de cause une grande partie des méthodes développées dans le présent travail devraient s'étendre à cette nouvelle situation.

Pour clore cet aperçu du calcul de Fuchs sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, nous allons examiner l'analogue de la représentation V_λ qui, dans le cas du groupe $SO_0(2,n+1)$, a été décrite dans la section précédente : bien entendu, le groupe Γ_0 (localement isomorphe à $SL(2,\mathbb{C})$ lorsque $n = 2$) n'a pas de série discrète, et Π n'a pas de structure complexe. En supposant $0 < \lambda < n$ et en posant (pour des raisons qui apparaîtront plus loin) $\lambda = -2\rho$ $(0 < -\rho < \frac{n}{2})$, introduisons cependant l'espace

(18.15) $$H_\lambda = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \; ; \int |t|^{2\rho} |u(t)|^2 dt < \infty\} .$$

A l'aide de la formule

(18.16) $$\mathcal{F}(|t|^{2\rho})(x) = \pi^{-2\rho-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\rho+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\rho)} |x|^{-2\rho-n}$$

on voit que si $u = \hat{v}$ on peut aussi écrire

(18.17) $$\|u\|_\lambda^2 = \pi^{-2\rho-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\rho+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\rho)} \int |x-x'|^{-2\rho-n} v(x)\bar{v}(x')dx\, dx'.$$

Posons

(18.18) $$\varphi(t) = k_\rho |t|^{-\rho} K_\rho (2\pi |t|)$$

avec

(18.19) $$k_\rho = 2\pi^{n/4}[(\Gamma(n))^{-1}\Gamma(\tfrac{n}{2})\Gamma(\tfrac{n}{2}-\rho)\Gamma(\tfrac{n}{2}+\rho)]^{-\frac{1}{2}}$$

de sorte que ([28], p. 101) $\|\varphi\|_\lambda = 1$; posons aussi

(18.20) $$\varphi_X(t) = X_o^{\frac{n}{2}+\rho} e^{-2i\pi<X_*,t>} \varphi(X_o t)$$

$$= k_\rho X_o^{n/2} e^{-2i\pi<X_*,t>} |t|^{-\rho} K_\rho (2\pi X_o |t|)$$

pour tout $X \in \Pi$, d'où $\|\varphi_X\|_\lambda = 1.$

Avec $g_{ij} = X_o^{-2} \delta_{ij}$ et dét $g = X_o^{-2(n+1)}$, l'opérateur de Laplace-Beltrami $\tilde{\Delta}$ sur Π est donné par

$$\tilde{\Delta} = (\text{dét } g)^{-\frac{1}{2}} \Sigma \frac{\partial}{\partial X_j} ((\text{dét } g)^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial}{\partial X_i})$$

soit

(18.21) $$\tilde{\Delta} = X_o^2 \Delta - (n-1) X_o \frac{\partial}{\partial X_o}$$

où Δ est le laplacien sur Π obtenu par restriction du laplacien euclidien de $\mathbb{R}^{n+2}$; on vérifie alors l'identité

$$\tilde{\Delta}\varphi_X(t) = [\rho^2 - n^2/4]\varphi_X(t).$$

Par suite, si l'on attache à $u \in H_\lambda$ la fonction f sur Π telle que $f(X) = (u, \varphi_X)$, on voit que f est solution de l'équation différentielle Γ-invariante

(18.22) $$\widetilde{\Delta} f = (\rho^2 - n^2/4) f.$$

Bien entendu, l'analogue de l'application $u \mapsto f$ est, dans le cas du cône C, la transformation de Laplace K_λ (cf.17.9) de la section précédente ; dans le cas de $\mathbb{R}^n$, cette application s'appelle la transformation de Bargmann-Fock. Il est clair que Γ opère dans les solutions de (18.22), ce qui conduit à une représentation : toutefois, l'image de H_λ par cette application n'est pas isométrique à un sous-espace d'un espace L^2 avec poids sur Π, et il faut vérifier par un autre moyen que cette représentation est unitaire. Or, si l'on fait opérer unitairement G dans H_λ par

(18.23) $$V_\lambda(M,b)u(t) = |M|^{-\rho-\frac{n}{2}} u(M^{-1}t)e^{2i\pi\langle b,t\rangle}$$

et que l'on utilise (18.10), on vérifie que

(18.24) $$V_\lambda(M,b)\varphi_X = \varphi_{[M,b]X} \cdot$$

Par ailleurs, $\chi = \mathfrak{F}^{-1}\varphi$ est donnée par

(18.25) $$\chi(x) = c_\rho (1+|x|^2)^{\rho - n/2}$$

avec

(18.26) $$c_\rho = \pi^{\rho-\frac{n}{4}} \left[\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\frac{n}{2}-\rho)}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2}+\rho)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et l'on a

(18.27) $$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi_X)(x) = X_o^{\rho-\frac{n}{2}} \chi\left(\frac{x-X_*}{X_o}\right)$$

$$= c_\rho X_o^{-\rho+\frac{n}{2}} [X_o^2 + |x-X_*|^2]^{\rho-\frac{n}{2}}.$$

Attachons à l'inversion $X \mapsto |X|^{-2}X$ de Π la transformation $\sigma = \mathfrak{F}\widetilde{\sigma}\mathfrak{F}^{-1}$ de H_λ, avec

(18.28) $$(\widetilde{\sigma}\, v)(x) = |x|^{2\rho-n} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

La formule (18.17) montre que σ est unitaire, et la relation (18.27) permet d'obtenir sans peine

(18.29) $$\sigma\varphi_X = \varphi_{|X|^{-2}X} \cdot$$

Il est clair que les formules (18.24) et (18.29) permettent d'obtenir (de façon unique) une représentation unitaire V_λ de Γ dans H_λ .

Au moins dans le cas où n = 2, celle-ci est extraite de la série supplémentaire des représentations de SL(2, $\mathbb{C}$). En effet, explicitons au moyen des relations

$$X_o = (\tau_o-\tau_1)^{-1}\ ,\ X_1 = \tau_2(\tau_o-\tau_1)^{-1},\ X_2 = \tau_3(\tau_o-\tau_1)^{-1}$$

l'isométrie de Π sur l'hyperboloïde de masse $\{\tau \in \mathbb{R}^4 : \tau_o > 0, \tau_o^2-\tau_1^2-\tau_2^2-\tau_3^2=1\}$. Pour tout $X \in \Pi$, posons

$$A_X = \begin{pmatrix} \tau_o-\tau_1 & \tau_2-i\tau_3 \\ \tau_2+i\tau_3 & \tau_o+\tau_1 \end{pmatrix} . \tag{18.30}$$

Avec $z = x_1+ix_2$, on peut écrire dans ce cas (18.27) sous la forme

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi_X(z) = c_\rho\ [(z\ -1)A_X \begin{pmatrix} \bar{z} \\ -1 \end{pmatrix}]^{\rho-1} . \tag{18.31}$$

Comme SL(2,$\mathbb{C}$) opère sur Π par $g.X = \tilde{X}$ si $A_{\tilde{X}} = g\, A_X g^*$, on vérifie que la représentation T telle que $T(g) = \mathcal{F}^{-1} V_\lambda(g)\mathcal{F}$ est donnée par

$$T(g)v(z) = |-\beta z+\delta|^{2(\rho-1)} v\left(\frac{\alpha z-\gamma}{-\beta z+\delta}\right) \tag{18.32}$$

si $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. Les relations (18.17) et (18.32) permettent de reconnaître la série supplémentaire des représentations de SL(2,$\mathbb{C}$)([18] p.193).Dans le cas où n = 2, nous avons effectué le calcul des opérateurs infinitésimaux (voir section 17) de la représentation V_λ . Considérons en effet la base de $s\ell(2,\mathbb{C})$ constituée des matrices

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{18.33}$$

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{B}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{B}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Par des calculs laborieux (analogues à ceux de la section qui précède), on voit que les opérateurs infinitésimaux (opérant sur $H_\lambda = H_{-2\rho}$) attachés à cette base sont $L_1, L_2, L_3, B_1, B_2, B_3$ donnés par

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{t_2}{4\pi}(\partial_1^2-\partial_2^2) + \frac{t_1}{2\pi}\partial_1\partial_2 + \frac{\rho+1}{2\pi}\partial_2 - \pi t_2 \\ L_2 &= \frac{t_1}{4\pi}(\partial_1^2-\partial_2^2) + \frac{t_2}{2\pi}\partial_1\partial_2 + \frac{\rho+1}{2\pi}\partial_1 - \pi t_1 \\ L_3 &= i(-t_2\partial_1 + t_1\partial_2) \end{aligned} \tag{18.34}$$

$$B_3 = i(t_1\partial_1+t_2\partial_2+\rho+1)$$
$$L_1+B_2 = -2\pi t_2$$
$$L_2-B_1 = -2\pi t_1 .$$

Soit ω_ρ l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur $H_{-2\rho}$ telle que

$$(\omega_\rho u)(t) = |t|^{-\rho}u(t)$$

et posons $\tilde{L}_1 = \omega_\rho^{-1}L_1\omega_\rho,\ldots$ On vérifie que $\tilde{L}_1+\tilde{B}_2 = -2\pi t_2, \tilde{L}_2-\tilde{B}_1 = -2\pi t_1$, $\tilde{B}_3 = i(t_1\partial_1+t_2\partial_2+1)$ et $\tilde{L}_3 = i(-t_2\partial_1+t_1\partial_2)$ sont les opérateurs infinitésimaux, <u>indépendants</u> de ρ, de la représentation V de G définie en (18.5). Par ailleurs, les opérateurs $\rho^{-2}\tilde{L}_1$ et $\rho^{-2}\tilde{L}_2$ admettent comme limite, quand $\rho^2\to\infty$, les opérateurs de multiplication par les fonctions $-(4\pi|t|^2)^{-1}t_2$ et $-(4\pi|t|^2)^{-1}t_1$. Les quatre opérateurs indépendants de ρ, et les deux opérateurs limites, engendrent l'espace des opérateurs infinitésimaux de la représentation du groupe complet de covariance du calcul de Fuchs sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Au lieu de prendre ρ réel, $0 < -\rho < \frac{n}{2}$, on peut prendre ρ imaginaire pur, sans changer (18.28) et en remplaçant l'espace H_λ par l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$. On obtient cette fois, dans le cas $n = 2$, une partie de la série principale des représentations de $SL(2,\mathbb{C})$. Cela ne change pas l'écriture formelle des opérateurs infinitésimaux de la représentation : comme cette fois rien ne s'oppose à ce que l'on fasse tendre $i\rho$ vers l'infini, on peut regarder le groupe de covariance du calcul de Fuchs sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et la représentation qui lui est associée comme une contraction de la série de représentations de Γ_0 que l'on vient d'étudier.

Les considérations qui précèdent rendent extrêmement vraisemblable la possibilité de développer le calcul de Fuchs sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ suivant les mêmes lignes que le calcul de Fuchs du cône C, puisque l'on dispose au moins des résolutions de l'identité adaptées à ce calcul. L'absence de structure complexe sur l'espace Π est néanmoins susceptible de créer des surprises intéressantes.

Enfin, la version obtenue (par transformation de Fourier) en échangeant y et η devrait être utile également, puisqu'elle permettrait l'usage d'une classe de symboles stable par les opérateurs de dérivation $|\eta|^{-1}\partial/\partial y_j$ et $|\eta|\partial/\partial\eta_j$ $(1\leq j\leq n)$: on sait que l'existence d'un calcul symbolique satisfaisant pour une telle classe (proche d'une classe habituellement notée $S_{1,1}$: voir à ce sujet le travail de G. Bourdaud [8]) rendrait bien des services dans les équations aux dérivées partielles.

XIX - MÉCANIQUE QUANTIQUE, RELATIVITÉ ET ANALYSE MICROLOCALE.

Nous n'avons guère évoqué jusqu'à présent dans ce travail l'un des aspects les plus fondamentaux de l'analyse pseudo-différentielle, à savoir son lien avec la mécanique quantique.

L'association d'un opérateur Op(f) sur un espace de Hilbert H à un symbole f, fonction définie sur l'espace des phases $\mathfrak{X}$ d'un système mécanique, est en effet cruciale à un double titre dans la mécanique quantique des systèmes à un nombre fini de degrès de liberté . Pour commencer, la théorie de l'observation repose sur elle, puisque (Op(f)u,u) représente le résultat de la mesure de l'observable f lorsque le système est dans l'état décrit par la fonction d'onde normalisée u. Ensuite, c'est l'opérateur Op(f) attaché à la fonction énergie f qui permet dans le cas non relativiste, via l'équation de Schrödinger, de poser le problème de l'évolution quantique du système : son évolution classique, rappelons-le, se décrit au moyen des équations de Hamilton-Jacobi liées au hamiltonien de f. Il n'y a pas chez les physiciens de consensus sur la façon dont il convient d'interpréter les transitions quantiques subies par un système lors d'une observation (réduction du paquet d'onde), ni sur la façon dont les deux processus (observation et évolution) se complètent.

Il est remarquable que, dans le cas où $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^{2n}$, le calcul de Weyl Op = Op_W , qui rend tant de services aux analystes, soit en même temps la règle de correspondance la plus utilisée, et de loin, en mécanique quantique. C'est sans contestation possible la plus simple. Nous pensons cependant que l'importance du groupe d'Heisenberg en physique a été exagérément grossie par l'emploi exclusif de la règle de quantification de Weyl. Si, à n'en pas douter, les structures symplectiques sont fondamentales en physique, rappelons qu'elles ne sont en rien liées spécifiquement au groupe d'Heisenberg puisqu'elles se manifestent très généralement, dans la théorie de Kirillov, sur les orbites de la représentation coadjointe. D'autres groupes, en particulier le groupe de Poincaré, sont plus fondamentaux.

Nous allons commencer par donner un énoncé relatif à l'analyse microlocale sur $\mathbb{R}^n$, qui permettra d'introduire très brièvement la méthode de quantification relativiste (calcul symbolique de Klein-Gordon) issue du calcul de Fuchs longuement étudié dans ce volume. Il est instructif à cet effet de mettre en parallèle la mécanique relativiste et celle non relativiste, nous autorisant d'ailleurs à désigner par la même lettre les notions qui se correspondent.

On suppose choisies des unités physiques telles que $h = c = 1$, et l'on s'intéresse à une particule libre, sans spin, dont la masse est choisie comme unité. Il est commode, comme on le fait en physique d'écrire le point courant de l'espace-temps sous la forme $x = (t,\vec{x}) = (x_o,\vec{x})$; également, le vecteur (ou plutôt covecteur) d'énergie-impulsion est $p = (p_o,\vec{p})$. Il décrit dans le cas relativiste l'hyperboloïde de masse $\mathcal{H}$ d'équation $p_o = (1+|\vec{p}|^2)$, et dans le cas non relativiste le paraboloïde de masse $\mathcal{H}$ d'équation $p_o = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$. Dans le cas relativiste, soit Γ_o le groupe de Lorentz restreint $SO_o(1,n)$: il opère sur $\mathcal{H}$ par son action linéaire. Dans le cas non relativiste, le groupe Γ_o des transformations affines qui conservent $\mathcal{H}$ est engendré par les transformations $(p_o,\vec{p})\mapsto(p_o, K\vec{p})$ avec $K \in SO(n)$ et par les transformations

$$(19.1) \qquad (p_o,\vec{p})\mapsto(p_o-wp_1+\frac{1}{2}w^2,p_1-w,p_2,\dots,p_n)$$

dépendant du paramètre réel w. Rappelons, pour faciliter la comparaison, que le groupe de Lorentz est engendré par les rotations $(p_o,\vec{p})\mapsto(p_o,K\vec{p})$ et par les transformations ([26], p.38)

$$(19.2) \qquad (p_o,\vec{p})\mapsto(\frac{p_o-wp_1}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}} , \frac{p_1-wp_o}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}, p_2,\dots,p_n) :$$

les transformations conjuguées d'une transformation (19.2) par une rotation s'appellent les "boosts" ou "velocity transformations". On voit que la situation non relativiste est tout à fait semblable, sauf qu'il n'y a pas dans (19.1) de contraction de Lorentz.

L'espace $L^2(\mathcal{H})$ des fonctions sur $\mathcal{H}$ de carré sommable relativement à une mesure convenable est invariant sous l'action du groupe Γ_o : il faut prendre la mesure $d\vec{p}$ dans le cas non relativiste, et la mesure $p_o^{-1}d\vec{p}$ dans le cas relativiste.

Soit $\mathcal{G}^{-1}$ la transformation de $L^2(\mathcal{H})$ dans les distributions tempérées sur l'espace-temps $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ définie au sens des distributions, dans le cas relativiste, par

$$(19.3) \qquad (\mathcal{G}^{-1}\varphi)(x) = \int_{\mathcal{H}} \varphi(p) e^{2i\pi\langle x,p\rangle} p_o^{-1} d\vec{p} \ :$$

dans le cas non relativiste, on prend la même définition, après avoir remplacé $p_o^{-1}d\vec{p}$ par $d\vec{p}$.

En désignant par Δ le laplacien $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ et par $\square$ l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, on vérifie que $T = \mathcal{G}^{-1}$ est solution de l'équation de Klein-Gordon

$$(19.4) \qquad \square T = -4\pi^2 T$$

dans le cas relativiste et, dans le cas non relativiste, de celle de Schrödinger

$$(19.5) \qquad i\frac{\partial T}{\partial t} = (4\pi)^{-1} \Delta T \ .$$

Dans le premier cas, $\mathcal{H}$ étant en réalité un feuillet d'un hyperboloïde à deux feuillets, il convient d'être plus précis et d'écrire l'équation de Klein-Gordon vérifiée par $\mathcal{G}^{-1}v$ sous la forme

$$(19.6) \qquad (2i\pi)^{-1} \frac{\partial T}{\partial t} = [1-(4\pi^2)^{-1}\Delta]^{\frac{1}{2}} T \ .$$

Composant $\mathcal{G}^{-1}$ avec l'opérateur de restriction à $t = o$ des distributions sur l'espace-temps, on obtient, dans le cas non relativiste, une isométrie de $L^2(\mathcal{H}, d\vec{p})$ sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}^n)$; dans le cas relativiste on obtient (c'est immédiat : voir par exemple Dautray-Lions [16], t.2, p. 402) une isométrie de $L^2(\mathcal{H}, p_o^{-1}d\vec{p})$ sur l'espace de Hilbert $H = H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, espace de Sobolev habituel muni de sa norme standard.

L'action géométrique précédemment décrite de Γ_o sur $\mathcal{H}$ conduit à une représentation unitaire irréductible de Γ_o dans $L^2(\mathcal{H})$, que l'on peut aussi regarder comme une représentation de Γ_o dans un espace de distributions solutions de (19.5) ou de (19.6). On peut adjoindre à Γ_o les translations d'espace-temps, qui opèrent par multiplication de $\varphi \in L^2(\mathcal{H})$ par une exponentielle du type $e^{-2i\pi\langle x^o,p\rangle}$, $x^o \in \mathbb{R}^{n+1}$: le groupe Γ_1 obtenu est, suivant le cas, le groupe de Poincaré ou celui de Galilée.

Soit, dans le cas relativiste, Π le tube complexe $C+i\mathbb{R}^{n+1}$ employé dans ce travail : dans le cas non relativiste, ce sera l'ensemble des points $Z = z+i\zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $z_o>0$. Dans les deux cas, posons

$$(19.7) \qquad \varphi_Z(p) = e^{-2\pi<Z,p>}$$

et

$$(19.8) \qquad \psi_Z = \mathcal{G}^{-1}\varphi_Z\Big|_{t=o} \ .$$

Une fonction $u \in H$ est caractérisée par l'ensemble de ses produits scalaires avec les fonctions ψ_Z , en d'autres termes par la transformée de Laplace de la mesure portée par $\mathcal{H}$ associée à $\mathcal{G}u_1$, où u_1 est l'extension de u à l'espace-temps définie par l'équation d'évolution (19.5) ou (19.6). On obtient du reste facilement des formules de résolution de l'identité analogues à la proposition 3.4, en étendant l'intégrale à certaines sous-variétés de Π de codimension réelle 2 : plusieurs choix sont possibles.

Dans le cas non relativiste, le calcul de ψ_Z à partir de (19.3), intégrale dans laquelle on a substitué $p_o = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$, est immédiat et fournit

$$(19.9) \qquad \psi_Z(\vec{x}) = Z_o^{-n/2}\exp- \frac{\pi}{Z_o}(\vec{x}+iZ_*)^2$$

avec $(X)^2 = \Sigma X_j^2$ si $X = (X_1,\ldots,X_n)$. Dans le cas relativiste, on a

$$(19.10) \qquad (\mathcal{G}^{-1}\varphi_Z)(x) = \psi(Z-ix)$$

avec, par définition, pour tout $Z \in \Pi$,

$$(19.11) \quad \psi(Z) = \int_{\mathcal{H}} e^{-2\pi<p,Z>}\frac{d\vec{p}}{p_o} = 2(r(Z))^{\frac{1-n}{4}}K_{\frac{n-1}{2}}(2\pi(r(Z))^{\frac{1}{2}}).$$

Pour prouver (19.11), on rappelle que r(Z) n'est pas réel $\leqslant 0$ d'après la proposition 7.2 : le prolongement holomorphe permet de ramener la preuve au cas où $Z \in C$, et l'invariance de Lorentz autorise à supposer que $Z = (r^{\frac{1}{2}},0,\ldots 0)$ avec $r = r(Z)$; dans ce dernier cas, c'est une conséquence de la formule

$$(19.12) \quad \int_o^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}t}(\mathrm{sh}\ t)^{n-1}dt = \pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)K_{\frac{n-1}{2}}(z)$$

énoncée dans [28], p.85. D'après (19.8), on obtient finalement ψ_Z sous la forme

$$\psi_Z(\vec{x}) = \psi(Z_o, Z_1 - ix_1, \ldots, Z_n - ix_n). \tag{19.13}$$

Un des buts de cette section est de montrer comment la mécanique quantique, relativiste ou non, conduit à une analyse microlocale des distributions sur $\mathbb{R}^n$. Comme nous l'avons déjà dit, il y a trop de fonctions ψ_Z : limitons-nous à celles pour lesquelles $Z_o = 1$ et posons

$$\chi_{\Xi'} = \psi_{(1, i\Xi')} \tag{19.14}$$

pour tout $\Xi' = \vec{x} + i\xi' \in \mathbb{C}^n$: dans le cas relativiste, pour que $(1, i\Xi')$ appartienne à Π, il faut en outre supposer $|\xi'| < 1$.

Dans le cas non relativiste, on a

$$\chi_{\Xi'}(\vec{x}) = \exp -\pi(\vec{x} - \vec{x}' - i\xi')^2, \tag{19.15}$$

ce qui montre que $\quad 2^{n/4} e^{i\pi\langle\vec{x}', \xi'\rangle} e^{-\pi|\xi'|^2} \chi_{\vec{x}' + i\xi'}$

est la fonction que nous avions notée $\varphi_{\vec{x}', \xi'}$ dans la section 1. La description d'une fonction u sur $\mathbb{R}^n$ via la fonction $\Xi' \mapsto (u, \chi_{\Xi'})$ sur $\mathbb{C}^n$ s'appelle la représentation de Bargmann-Fock de u (voir par exemple Igusa [25], p. 31). Une généralisation de cette représentation, prenant en compte la possibilité de faire dépendre la norme symplectique choisie du point de l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$, a été donnée dans [42]; voir également Cordoba-Fefferman [14]. Bros et Iagolnitzer [10] ont basé sur des transformations de ce genre une définition du front d'onde analytique d'une distribution, dont Bony [7] a montré l'équivalence avec d'autres, introduites par diverses méthodes ; Sjöstrand a utilisé des généralisations de cette transformation dans des problèmes d'équations aux dérivées partielles [38].

Nous allons montrer que l'analogue relativiste de la représentation de Bargmann-Fock conduit immédiatement à une caractérisation agréable du front d'onde C^∞ d'une distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $(\ ,\ )_{\frac{1}{2}}$ le produit scalaire sur $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, défini par $(u_1, u_2)_{\frac{1}{2}} = (Lu_1, u_2)$, où l'opérateur de convolution L a pour symbole de Weyl $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. Soit B_n la boule-unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.

D'après (19.11) et (19.13), on a

$$(19.16) \quad \chi_{\vec{x}'+i\xi'}(\vec{x}) = 2[|\vec{x}-\vec{x}'|^2+1-|\xi'|^2-2i<\vec{x}-\vec{x}',\xi'>]^{\frac{1-n}{4}}$$

$$K_{\frac{n-1}{2}}(2\pi[|\vec{x}-\vec{x}'|^2+1-|\xi'|^2-2i<\vec{x}-\vec{x}',\xi'>]^{\frac{1}{2}}).$$

On voit que, lorsque $|\xi'|=1$, la fonction au membre de droite de (19.16) est C^∞ en dehors du point x' et reste une fonction intégrable. D'après (19.3), la transformée de Fourier $\hat{\chi}_{\vec{x}'+i\xi'}$ est donnée par

$$(19.17) \quad \hat{\chi}_{\vec{x}'+i\xi'}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}\exp-2\pi[(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}-<\xi',\xi>+i<x',\xi>].$$

PROPOSITION 19.1. <u>Pour toute distribution tempérée</u> u <u>sur</u> $\mathbb{R}^n$, <u>la fonction</u> de B_n <u>dans</u> $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>qui associe à</u> $\xi'\in B_n$ <u>la fonction</u> $\vec{x}'\longmapsto(u,\chi_{\vec{x}'+i\xi'})_{\frac{1}{2}}$ <u>s'étend en une application continue de</u> $\bar{B}_n$ <u>dans</u> $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Preuve</u>. Considérée comme noyau $k(\vec{x}',\vec{x})$, la fonction $\chi_{\vec{x}'+i\xi'}(\vec{x})$ est un noyau de convolution. On se ramène alors au cas où u est continue à croissance lente, auquel cas il suffit d'utiliser l'inégalité

$$|\chi_{\vec{x}'+i\xi'}(\vec{x})| \leqslant C[|\vec{x}-\vec{x}'|^{1-n}+|\log|\vec{x}-\vec{x}'||]\, e^{-2\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} ,$$

ce qui termine la preuve de la proposition 19.1.

On peut donc définir

$$(19.18) \quad \tilde{u}(\vec{x}'+i\xi') = (u,\chi_{\vec{x}'+i\xi'})_{\frac{1}{2}}$$

lorsque $\vec{x}'+i\xi'\in\mathbb{R}^n+i\,\bar{B}_n$: c'est une fonction continue de ξ' à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, que l'on peut éventuellement restreindre en une distribution sur $\mathbb{R}^n+i\,S^{n-1}$ s'il y a lieu.

THÉORÈME 19.2. Soit $(\vec{x}^o,\xi^o)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ <u>avec</u> $|\xi^o|=1$, <u>et soit</u> $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. <u>Si</u> $(\vec{x}^o,\xi^o)$ <u>n'appartient pas au front d'onde</u> C^∞ <u>de u</u>, <u>alors u est</u> C^∞ <u>au voisinage du point</u> $\vec{x}^o+i\xi^o$.

<u>Preuve</u> . Ecrivons $Lu = u_1+u_2$, le point $\vec{x}^o$ n'appartenant pas au support de u_2 et $\hat{u}_1$ étant à décroissance rapide dans un voisinage conique W de ξ^o : alors

$$\tilde{u}(\vec{x}'+i\xi') = (\hat{u}_1, \hat{\chi}_{\vec{x}'+i\xi'}) + (u_2, \chi_{\vec{x}'+i\xi'}) . \tag{19.19}$$

Le deuxième terme est une fonction C^∞ de $(\vec{x}',\xi')$ pour $|\xi'|\leqslant 1$ tant que $\vec{x}'$ est en dehors du support de u_2. Le premier s'écrit

$$\int \hat{u}_1(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \exp -2\pi[(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} - \langle\xi',\xi\rangle - i\langle\vec{x}',\xi\rangle]\,d\xi \ :$$

l'intégrale sur W est une fonction C^∞ de $(\vec{x}',\xi')$ parce que $\hat{u}_1$ est à décroissance rapide dans ce cône ; par ailleurs, pourvu que ξ' soit assez voisin de ξ^o, on a $\langle\xi',\xi\rangle \leqslant (1-\varepsilon)\,|\xi|$ pour un certain $\varepsilon > 0$ lorsque ξ n'appartient pas à W, ce qui permet de traiter l'intégrale sur $\mathbb{R}^n \setminus W$.

THÉORÈME 19.3. Soit $(\vec{x}^o,\xi^o) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ et soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Supposons que la restriction de $\tilde{u}$ à $\mathbb{R}^n + iS^{n-1}$ soit de classe C^∞ au voisinage de $\vec{x}^o + i\xi^o$: alors $(\vec{x}^o,\xi^o)$ n'appartient pas au front d'onde C^∞ de u .

Preuve. Soit $U \times V$ un voisinage ouvert de $(\vec{x}^o,\xi^o)$ dans $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ dans lequel u est de classe C^∞ , et soit V_1 un voisinage de ξ^o d'adhérence contenue dans V. Désignant par $d\sigma$ la mesure superficielle canonique sur S^{n-1}, on peut écrire

$$\int_{V_1} \tilde{u}(\vec{x}'+i\xi')\,d\sigma(\xi') = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\,I(\xi)\,e^{-2\pi(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} e^{2i\pi\langle\vec{x}',\xi\rangle} d\xi \tag{19.20}$$

avec

$$I(\xi) = \int_{V_1} e^{2\pi\langle\xi',\xi\rangle} d\sigma(\xi') . \tag{19.21}$$

Soit $\varepsilon \in]0,\frac{\pi}{4}]$ tel que V_1 contienne l'ensemble des points $\xi' \in S^{n-1}$ tels que $\langle\xi^o,\xi'\rangle \geqslant \cos 2\varepsilon$, et soit W le voisinage conique de ξ^o engendré par l'ensemble des points $\xi \in S^{n-1}$ tels que $\langle\xi^o,\xi\rangle \geqslant \cos\varepsilon$: alors, pour tout $\xi \in W$, V_1 contient l'ensemble des points $\xi' \in S^{n-1}$ vérifiant $\langle\xi',\xi\rangle \geqslant \cos\varepsilon$ (inégalité du triangle pour la métrique invariante sur S^{n-1}). A l'aide d'une rotation, on peut écrire, lorsque $\xi \in W$ et $n \geqslant 2$,

$$I(\xi) \geqslant \int_{\xi'_1 \geqslant \cos\varepsilon} e^{2\pi|\xi|\xi'_1} d\sigma(\xi') \tag{19.22}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{\cos\varepsilon}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{2\pi|\xi|t} dt$$

$$\geqslant C^{-1} e^{2\pi|\xi|} (1+|\xi|^2)^{\frac{1-n}{4}} \quad ,$$

et le résultat final reste valable lorsque n = 1. De cette égalité on conclut que l'opérateur pseudo-différentiel de convolution A dont le symbole de Weyl est la fonction $I(\xi) e^{-2\pi(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}$ est microlocalement elliptique dans la direction de ξ^o. Comme $Au(\vec{x}')$, définie également par le membre de gauche de (19.20), est une fonction de classe C^∞ de $\vec{x}'$ lorsque $\vec{x}'$ parcourt U , on en déduit que $(\vec{x}^o, \xi^o)$ n'appartient pas au front d'onde C^∞ de u.

Les fonctions ψ_Z définies en (19.8) sont permutées entre elles sous la représentation du groupe de Poincaré ou de Galilée Γ_1 définie plus haut, à la multiplication près par un facteur indépendant de $\vec{x}$ pour ce qui concerne le cas non relativiste. C'est pourquoi, entre autres raisons, il est intéressant de disposer d'un calcul symbolique des opérateurs sur H covariant sous la représentation indiquée. Prenons comme espace de phase $\mathfrak{X}$ l'ensemble des points $\Omega = (t,\vec{x};v)$, où v doit être interprétée comme une vitesse $\in \mathbb{R}^n$, et satisfaire $|v| < 1$ dans le cas relativiste ; chaque point Ω est un observateur au sens de la physique. A tout Ω correspond une décomposition de l'espace-temps, considéré comme espace vectoriel, sous la forme

(19.23) $$\mathbb{R}^{n+1} = S_\Omega \oplus T_\Omega \quad ,$$

où T_Ω est l'espace de dimension 1 engendré par le vecteur $\varepsilon_\Omega = (1,v_1,\ldots,v_n)$; quant à S_Ω , c'est dans le cas non relativiste l'espace fixe des points $(0,\vec{x})$, et dans le cas relativiste l'espace des $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\langle J\varepsilon_\Omega, x\rangle = 0$, c'est-à-dire l'orthogonal de T_Ω relativement au ds^2 de Minkowski. A tout observateur Ω on associe la symétrie P_Ω , transformation affine qui conserve le point $(t,\vec{x})$ et dont la partie linéaire préserve les vecteurs de T_Ω et change ceux de S_Ω en leurs opposés : P_Ω ne dépend que du couple $(\vec{x}-tv;v)$, et l'on appelle fonction admissible sur $\mathfrak{X}$ toute fonction $f(t,\vec{x};v)$ ne dépendant que de ce couple, autrement dit satisfaisant l'équation différentielle

(19.24) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \Sigma v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \ .$$

Evidemment, cette équation permet de confondre une fonction admissible et sa restriction à $t = 0$. Continuant à identifier, au moyen de (19.5) ou (19.6), les éléments u de H à des distributions T sur l'espace-temps, on peut associer à tout observateur Ω l'opérateur de parité σ_Ω défini, dans le cas relativiste, par $\sigma_\Omega T = T \circ P_\Omega$ (on a ainsi étendu au groupe de Poincaré orthochrone la représentation initialement définie sur le groupe de Poincaré restreint). Dans le cas non relativiste, la formule est un peu plus compliquée : si $\Omega = (t^0, \vec{x}^0; v)$, on trouve (cf [51])

$$(19.25) \qquad (\sigma_\Omega T)(t,\vec{x}) = T(t, 2(\vec{x}^0 - t^0 v) - \vec{x} + 2tv) \exp -4i\pi \langle v, \vec{x} - tv - \vec{x}^0 + t^0 v\rangle .$$

Dans les deux cas, on peut enfin attacher à tout opérateur à trace A sur H le symbole (passif) g de A défini par

$$(19.26) \qquad g(\Omega) = 2^n \mathrm{Tr}(A\sigma_\Omega) :$$

c'est une fonction admissible sur $\mathfrak{X}$.

Dans le cas non relativiste, $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, les fonctions admissibles s'identifient à des fonctions sur $\mathbb{R}^{2n}$, et l'on retrouve, ainsi qu'on le vérifie aisément, le calcul symbolique de Weyl (faire $t = 0$ et $t^0 = 0$ dans (19.25)) : insistons sur le fait qu'à aucun moment nous n'avons considéré le groupe d'Heisenberg !

Dans le cas relativiste, nous avons introduit dans [49], et développé dans [50],[51], le calcul symbolique obtenu, sous le nom de calcul de Klein-Gordon. Le lecteur n'aura pas manqué d'observer la similitude de la construction des calculs de Weyl et de Klein-Gordon : c'est évidemment lié au fait que cette construction a une portée plus générale. Il convient de faire remarquer cependant que le calcul de Klein-Gordon a une structure plus riche que le calcul de Weyl : du reste, si l'on modifie la construction qui précède en choisissant une unité de vitesse indépendante de la vitesse de la lumière, il n'est pas interdit de faire tendre c vers l'infini ; on constate alors [49] que le calcul de Klein-Gordon se contracte (i.e. dégénère) vers le calcul de Weyl.

Pour terminer, observons que, sous conjugaison par la transformation de Fourier $\mathcal{G}$, un calcul symbolique des opérateurs agissant sur des solutions de (19.16) apparaît comme un calcul symbolique sur $L^2(\mathcal{H}, p_o^{-1} d\vec{p})$. En fait, le calcul de Klein-Gordon n'est qu'une "restriction" (le mot est impropre, car $L^2(C, dm(t))$ est une somme continue des espaces $L^2(\mathcal{H}_m, p_o^{-1} d\vec{p})$ associés à une masse variable $m > 0$) du calcul de Fuchs développé dans le présent travail, et c'est bien ainsi que nous en avons découvert [49] l'existence.

La présente section aura fait voir, nous l'espérons, qu'en mathématiques tout autant qu'en physique les structures issues de la relativité sont susceptibles de jouer un rôle fondamental.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI, M.S. et GOULAOUIC, C. Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rational Mech. Anal. 34(1970) 361-379.

[2] BEALS, R. A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42(1975), 1-42.

[3] BEALS, R. Characterization of pseudodifferential operators and applications, Duke Math. J. 42(1977), 45-57.

[4] BEREZIN, F.A. Quantization, Math. USSR Izvest. 8(1974), 1109-1165.

[5] BEREZIN, F.A. Quantization in complex symmetric spaces, Math. USSR Izvest. 9(1975), 341-379.

[6] BOLLEY, P., DAUGE, M. et CAMUS, J. Régularité Gevrey pour le problème de Dirichlet dans des domaines à singularités coniques. Comm. Part. Diff. Equ. 10,4(1985), 391-432.

[7] BONY, J.M. Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, n° 3, Ecole Polytechnique, Paris.

[8] BOURDAUD, G. Sur les opérateurs pseudo-différentiels àcoefficients peu réguliers, Thèse d'Etat, Orsay 1983.

[9] BOUTET DE MONVEL, L. Boundary value problems for pseudodifferential operators, Acta Math. 126(1971), 11-51.

[10] BROS, J. et IAGOLNITZER, D. Support essentiel et structure analytique des distributions, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975-76, n° 18, Ecole Polytechnique, Paris.

[11] CALDERON, A. et VAILLANCOURT, R. A class of bounded pseudodifferential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 69(1972), 183-269.

[12] CHEEGER, J. et TAYLOR, M. Diffraction by conical singularities, C.P.A.M. 35(1982), 275-331.

[13] COIFMAN, R. et MEYER,Y. Au-delà des opérateurs pseudodifférentiels, Astérisque n° 57, Société Mathématique de France, Paris(1978).

[14] CORDOBA, A. et FEFFERMAN, C. Wave packets and Fourier integral operators, Comm. Part. Diff. Equ. 3,11(1978), 979-1006.

[15] DAUGE, M. Régularités et singularités des solutions de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines singuliers de type à coins, Thèse (Nantes), 1986.

[16] DAUTRAY, R. et LIONS, J.L. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, t.2, Masson, Paris (1985).

[17] DENCKER, N. The Weyl calculus with locally temperate metrics and weights, Arkiv för Mat. 24(1986), 60-79.

[18] GELFAND, I.M., GRAEV, M.I et VILENKIN, N.Y. Generalized Functions, vol. 5, Acad. Press, New York-London-Toronto-Sydney San Francisco (1966).

[19] GROSS, K.I. et KUNZE, R.A. Fourier Bessel transforms and holomorphic discrete series, Lecture Notes in Math. 266(1972), 79-122.

[20] HELGASON, S. Functions on symmetric spaces, Lecture Notes in Math. 1077(1984), 254-287.

[21] HÖRMANDER, L. The Weyl calculus of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. 23,3(1979), 359-443.

[22] HÖRMANDER, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 3, Springer-Verlag (1985).

[23] HOWE, R. A symbolic calculus for nilpotent groups, in "Proc. Conference on operator algebras and representation theory", Neptun (Roumanie)(1980), 254-277.

[24] HOWE, R., RATCLIFF, G. et WILDBERGER, N. Symbol mappings for certain nilpotent groups, Lecture Notes in Math. 1077 (1984), 288-320.

[25] IGUSA, J. Theta Functions, Springer-Verlag (1972).

[26] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. Théorie du champ , Ed. Mir, Moscou (1966).

[27] LERAY, J. Analyse lagrangienne et mécanique, Séminaire au Collège de France (1976-77), Paris.

[28] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. et SONI, R.P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, 3ème edition, Springer-Verlag (1966).

[29] MELROSE, R.B. Transformation of boundary problems, Acta Math. 147(1981), 149-236.

[30] PHAM THE LAI. Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids. Comm. Part. Diff. Equ. 4(1979), 389-445.

[31] PIATETSKY-CHAPIRO, I.I. Géométrie des domaines classiques et théorie des fonctions automorphes, Dunod, Paris (1966).

[32] ROSSI, H. et VERGNE, M. Representations of certain solvable Lie groups and holomorphic discrete series, J. Funct. Anal. 13(1973), 324-389.

[33] ROSSI, H. et VERGNE, M. Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, Acta Math. 136, 1-2(1976), 1-59.

[34] ROULEUX, M. Diffraction analytique sur une variété à singularité conique, Comm. in Partial Diff. Equ. 11,9(1986), 947-988.

[35] SCHULZE, B.W. Opérateurs pseudodifférentiels et asymptotique sur des variétés à singularités, Séminaire E.D.P. Ecole Polytechnique, Paris, 1985-86.

[36] SCHULZE, B.W. L'asymptotique conormale sur des variétés avec singularités coniques ou arêtes, Séminaire d'Analyse, Université de Nantes (1987).

[37] SEGAL, I.E. Mathematical cosmology and extragalactic astronomy, Acad. Press, New-York (1976).

[38] SJÖSTRAND, J. Singularités analytiques microlocales, Astérisque n° 95, Société Mathématique de France Paris (1982).

[39] STERNBERG, S. Chronogeometry and symplectic geometry, Coll. Intern. CNRS 237(1975), Paris, 45-57.

[40] UNTERBERGER, A. Symboles associés aux champs de repères de la forme symplectique, Note C.R. Acad. Sci. Paris 285(1977), 1005-1008.

[41] UNTERBERGER, A. Encore des classes de symboles, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-78, n°6, Ecole Polytechnique, Paris.

[42] UNTERBERGER, A. Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, Ann. Inst. Fourier 29(1979), 201-221.

[43] UNTERBERGER, A. Extensions du lemme de Cotlar et applications, Note C.R. Acad. Sci Paris 288(1979), 249-252.

[44] UNTERBERGER, A. Les opérateurs métadifférentiels, Lecture Notes in Physics 126(1980), 205-241.

[45] UNTERBERGER, A. Quantification de certains espaces hermitiens symétriques, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, Ecole Polytechnique, Paris (1980).

[46] UNTERBERGER, A. L'opérateur de Laplace-Beltrami du demi-plan et les quantifications linéaire et projective de SL(2,$\mathbb{R}$), in "Colloque en l'honneur de L. Schwartz", Astérisque n° 131(1985), 255-275.

[47] UNTERBERGER, A. Symbolic calculi and the duality of homogeneous spaces, Contemporary Math. 27(1984), 237-252.

[48] UNTERBERGER, A. The calculus of pseudo-differential operators of Fuchs type, Comm. in Partial Diff. Equ. 9,12(1984), 1179-1236.

[49] UNTERBERGER, A. Pseudodifferential analysis, quantum mechanics and relativity, à paraître.

[50] UNTERBERGER, A. Analyse relativiste, Note C.R. Acad. Sci. Paris 305(1987), 415-418.

[51] UNTERBERGER, A. Quantization and relativity, à paraître.

[52] UNTERBERGER, A. et UNTERBERGER, J. La série discrète de SL(2,$\mathbb{R}$) et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 17(1984), 83-116.

[53] UNTERBERGER, A. et UNTERBERGER, J. A quantization of the Cartan domain BD I (q = 2) and operators on the light cone, J. Funct. Anal. 72,2(1987), 279-319.

[54] UNTERBERGER, A. et UNTERBERGER, J. Quantification et analyse pseudo-différentielle, à paraître.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX

André Unterberger
Département de Mathématiques
Université de Reims
Moulin de la Housse, BP 347
51062 Reims Cedex

Soit C le cône de lumière solide constitué des points $(x_o, x_*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tels que $x_o > |x_*|$. C'est un espace symétrique pour une structure riemannienne invariante par le groupe de Lorentz et par les homothéties de rapport positif. Egalement, l'espace cotangent $T^*(C)$ admet un groupe G de transformations affines qui contient le groupe de Poincaré. On étudie un calcul symbolique des opérateurs (le calcul de Fuchs de C), c'est-à-dire une règle de correspondance entre des fonctions sur $T^*(C)$ (les symboles) et des opérateurs sur $L^2(C)$: le calcul de Fuchs est covariant relativement à l'action de G sur $T^*(C)$ dont il a été question plus haut et à une certaine représentation de G dans $L^2(C)$.

Le calcul de Fuchs est comparable au calcul pseudo-différentiel classique (le calcul de Weyl) sur $\mathbb{R}^n$ mais adapté à la géométrie du cône : ainsi, les espaces de Sobolev de la théorie sont liés à l'opérateur de Laplace-Beltrami de C. Les faits les plus marquants relatifs au calcul de Weyl (par exemple le théorème de Calderon-Vaillancourt sur la continuité des opérateurs) s'étendent, mais sont considérablement plus difficiles à établir. L'analyse pseudo-différentielle sur le demi-espace ou le domaine d'un certain problème mixte est un sous-produit du calcul de Fuchs du cône : dans le cas du demi-espace, elle étend et précise l'analyse totalement caractéristique de Melrose.

Les méthodes reposent sur la théorie de la quantification et sur la série discrète holomorphe de représentations du groupe conforme $SO_o(2,n+1)$, groupe des automorphismes du domaine de Siegel $C+i\mathbb{R}^{n+1}$.

L'un des but poursuivis est de montrer que le calcul de Weyl n'est qu'une des nombreuses analyses pseudo-différentielles possibles que la géométrie des domaines classiques amène à construire. Restreignant le calcul de Fuchs du cône à un hyperboloïde de masse, on obtient un calcul symbolique (le calcul de Klein-Gordon) qui joue relativement au calcul de Weyl le rôle que joue la mécanique relativiste par rapport à la mécanique classique.

Let C be the forward light-cone in (n+1)-dimensional space : it is a symmetric space for a riemannian structure invariant under the Lorentz group as well as under the "scale transformations" $x \mapsto a\, x$ $(a > 0)$. Also, the cotangent space $T^*(C)$ admits a group of affine transformations that contains the Poincaré group. We define and study a calculus of operators (the "Fuchs calculus" of C), i.e. a correspondence rule Op from functions on $T^*(C)$ (symbols) to operators acting on $L^2(C)$: the Fuchs calculus is covariant under the group action alluded to above, and a certain representation of that group in $L^2(C)$.

The main results are quite parallel to the ones well-known in the Weyl calculus on $\mathbb{R}^n$ (e.g. the Calderon-Vaillancourt theorem on the boundedness of operators), though the main estimate is considerably more difficult to prove. The whole analysis is closely tied to the geometry of the cone : thus, the relevant Sobolev spaces are defined in terms of the Laplace-Beltrami operator of C. Related domains, the pseudodifferential analysis on which is a by-product of the present analysis, include the half-space as well as the domain suitable for the analysis of mixed (space-time) boundary-value problems on a ball. In the half-space case, Melrose's totally characteristic operators fit into the Fuchs calculus.

The methods rely heavily on quantization theory and on the holomorphic discrete series of representations of the conformal group $SO_o(2,n+1)$, which is the group of automorphisms of the Siegel domain $\Pi = C+i\mathbb{R}^{n+1}$.

One of the major motivations at the origin of the present work was to show that the Weyl calculus is just one of numerous pseudodifferential analyses, that live on classical domains. Restricting the Fuchs calculus on the cone to a mass hyperboloid, one gets a symbolic calculus (the Klein-Gordon calculus) whose relation to the Weyl calculus is in some ways identical to the relation of relativistic mechanics to classical mechanics.