

Astérisque

CHRISTOPHE MARGERIN

Définitions, généralités, surfaces minimales dans \mathbb{R}^n et S^n

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 13-37

http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__13_0

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉFINITIONS, GÉNÉRALITÉS, SURFACES MINIMALES
DANS \mathbb{R}^n ET S^n

Christophe MARGERIN

I. NOTATIONS - DÉFINITIONS.

Par \bar{M}^n , on désigne une variété riemannienne de dimension n , munie d'une métrique notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On représentera par $\bar{\nabla}$ sa connexion canonique. Soit alors $M^n \xrightarrow{\varphi} \bar{M}^n$ une immersion isométrique. Si V et W sont des champs tangents à M alors, en notant $(X)^T$ (respectivement $(X)^N$) la projection de X sur l'espace tangent à M (resp. orthogonal à M) au point considéré

$$\bar{\nabla}_V W = (\bar{\nabla}_V W)^T + (\bar{\nabla}_V W)^N$$

le premier terme de droite est la connexion canonique induite sur M qu'on notera $(\bar{\nabla}_V W)^T = \nabla_V W$. Le second terme est par définition $B(V, W)$, où $B(\cdot, \cdot)$ est la seconde forme fondamentale de l'immersion. On remarque que $B(V, W) - B(W, V) = ([V, W])^N = 0$, c'est-à-dire que la seconde forme fondamentale est symétrique.

DÉFINITION 1. La trace de B s'appelle la courbure moyenne; on la notera H :

$H \equiv \text{tr}(B) = \sum_{j=1}^n B(e_j, e_j)$, où $(e_j)_{j=1}^n$ est une base orthonormée de l'espace tangent à M . Comme conséquence immédiate on a donc que H est un invariant de plongement isométrique.

DÉFINITION 2. L'immersion $M^n \xrightarrow{\varphi} \bar{M}^n$ est dite minimale si $H \equiv 0$.

Exemple. Si M est une courbe γ de \bar{M} , alors $H = \left(\frac{D}{ds} \frac{dy}{ds} \right)^N = K_g \vec{\nu}$ où K_g désigne la courbure géodésique; les immersions minimales de dimension 1 sont donc les géodésiques de \bar{M}^n .

II. IMMERSIONS MINIMALES DANS \mathbb{R}^n .

A Généralités : On considère ici le cas où $\bar{M}^n = \mathbb{R}^n$

LEMME 3. Si $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion isométrique alors que, $\Delta\psi \simeq H$.

Par " \simeq " on identifie un vecteur de \mathbb{R}^n et son transporté parallèle au point considéré. Δ représente l'opérateur de Laplace Beltrami sur M .

Démonstration : Si $v \in T_x M$, on remarque que $v \cdot \psi = \psi_*(v) \simeq v$. Alors,

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_j \{e_j \cdot \psi e_j \cdot \psi - (\nabla_{e_j} e_j) \cdot \psi\} \\ &= \sum_j \{e_j \cdot (e_j) - (\nabla_{e_j} e_j)\} = \sum_j \{\bar{\nabla}_{e_j} e_j - \nabla_{e_j} e_j\} \\ &= \sum_j B(e_j, e_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

COROLLAIRE 4. Soit une immersion isométrique $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$; ψ est minimale si et seulement si ψ est harmonique.

COROLLAIRE 5. Soit une immersion conforme $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$, Σ étant une surface de Riemann ψ est minimale si et seulement si ψ est harmonique.

Si l'on désigne par $z = x+iy$ le paramètre local de Σ , la conformité de ψ s'écrit

$$\begin{aligned} |\psi_x| &= |\psi_y| > 0 \text{ et } \langle \psi_x, \psi_y \rangle = 0. \psi \text{ définit donc une métrique sur } \Sigma, \\ ds^2 &= \lambda^2(dx^2 + dy^2) \text{ où } \lambda = |\psi_x| = |\psi_y|; \text{ maintenant si } \frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{4}{\lambda} \frac{d}{dz} \frac{d}{d\bar{z}} \text{ et le second corollaire est maintenant clair. } \blacksquare$$

B. La représentation de Weierstrass :

1) On considère ici encore une immersion conforme $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ où Σ est une surface de Riemann. Si ψ est minimale, on a vu que $\frac{d}{dz} \frac{d}{d\bar{z}} \psi \equiv 0$, c'est à dire que $\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \psi$

$$\begin{aligned} \text{est holomorphe. De plus } \varphi^2 &= \text{def } (\varphi, \varphi) \\ &= |\psi_x|^2 - |\psi_y|^2 + 2i \langle \psi_x, \psi_y \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement la donnée de n formes différentielles holomorphes vérifiant

$$1) \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 0 \text{ (c'est-à-dire, si l'on écrit localement } \alpha_k = \varphi_k dz, \sum_k \varphi_k^2 = 0)$$

$$2) \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 > 0$$

$$3) \text{Re} \int_{\gamma} \alpha_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \text{ et pour toute courbe fermée, } \gamma, \text{ de } \Sigma,$$

détermine une immersion minimale conforme de Σ dans \mathbb{R}^n . Il suffit de considérer

$\psi = (\psi_k)_{k=1}^n$ où $\psi_k(z) = 2 \operatorname{Re}(\int^z \alpha_k)$ où \int^z représente l'intégrale le long d'une courbe quelconque joignant une origine arbitrairement fixée à z . On a ainsi caractérisé toutes les immersions minimales de Σ dans \mathbb{R}^n .

2) Dans le cas où $n=3$ il est facile de résoudre $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$: on commence par considérer le cas $\alpha_1 \equiv i\alpha_2$ et $\alpha_3 \equiv 0$; il correspond à un plan "horizontal" dans \mathbb{R}^3 - A une rotation près on pourra donc supposer $\alpha_1 \neq i\alpha_2$ et définir $\alpha = \alpha_1 - i\alpha_2$, forme différentielle holomorphe non identiquement nulle et $g: g = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - i\alpha_2 w}$, fonction méromorphe. En écriture locale, si l'on pose $\alpha = f dz$ et $\alpha_j = \varphi_j dz$, avec f holomorphe, il vient

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2$$

$$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$$

c'est-à-dire

$$(i) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2) \\ \varphi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2) \\ \varphi_3 = f g \end{cases}$$

Si, réciproquement, on se donne une fonction méromorphe $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ et une forme différentielle α , holomorphe sur Σ vérifiant

1) que tout pôle d'ordre m de g est un zéro d'ordre $2m$ de α ,

2) que les α_k , définis par les équations (i), sont de périodes réelles nulles alors $\psi = (\psi_k)_{k=1}^3$ où $\psi_k(z) = 2 \operatorname{Re}(\int^z \alpha_k)$ détermine une immersion minimale.

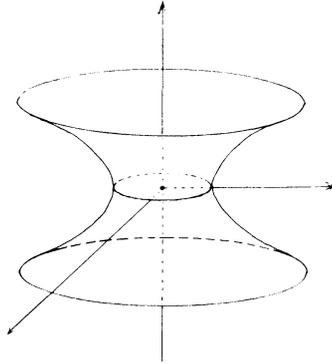
(i) détermine ce que l'on appelle la représentation de Weierstrass des surfaces minimales dans \mathbb{R}^3 .

Exemples : 1) $M = \mathbb{C}$ $\alpha = dz$ (ie $f \equiv 1$) et $g(z) = z$ correspond à la surface d'Enneper.

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad x_1 &= \operatorname{Re}(z - \frac{1}{3} z^3) \\ x_2 &= \operatorname{Re}(i \cdot (z + \frac{1}{3} z^3)) \\ x_3 &= \operatorname{Re}(z^2) \end{aligned}$$

C'est une surface simplement connexe, non plongée.

2) $f = \frac{1}{2}$ et $g = z$ sur $\mathbb{C} - \{0\}$: on obtient le caténoïde, surface de révolution de la "chaînette": $x_1 = \operatorname{ch}(x_3)$.



C. Surfaces minimales associées - surfaces conjuguées :

Soit $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion minimale. On supposera de plus M simplement connexe (sinon considérer le revêtement universel de M).

LEMME 6. "théorème d'uniformisation de Koebe" - (cf. [7])

Si M est une surface de Riemann simplement connexe alors

soit M est elliptique - c'est-à-dire conformétement équivalente à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

soit M est parabolique - c'est-à-dire conformétement équivalente à \mathbb{C} ,

soit M est hyperbolique - c'est-à-dire conformétement équivalente au disque unité.

Surfaces minimales associées. Dans tous les cas on dispose d'un paramètre global z et l'on peut écrire $\psi = 2 \operatorname{Re} \int^z \varphi dz$ où $\varphi = \frac{d\psi}{dz}$. Si on considère maintenant

$\psi_\theta = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\int^z \varphi dz \right) \cdot e^{i\theta} \right\}$ on a $\varphi_\theta = \frac{d\psi_\theta}{dz} = e^{i\theta} \cdot \varphi$ et $\varphi_\theta^2 = 0$ c'est-à-dire que

ψ_θ est une immersion minimale, dite "associée à ψ "; de plus $|\varphi_\theta|^2 = |\varphi|^2$ c'est-à-dire que ψ_θ est localement isométrique à ψ pour tout θ .

Surface minimale conjuguée. Enfin si l'on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$ on remarque que les fonctions coordonnées de $\psi_{\frac{\pi}{2}}$ sont les conjuguées harmoniques de celles de ψ : $\psi_{\frac{\pi}{2}}$ est traditionnellement appelée la surface conjuguée.

Exemples : On passe ainsi continûment de la caténoïde (ou de son revêtement universel) à l'hélicoïde. Par intégration de la représentation de Weierstrass on trouve

a) pour la caténoïde : $f = \frac{1}{z^2}$ et $g = z$

soit $\psi = \left(-\frac{\cos\theta}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right), -\frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right), \log \right)$ où $\rho = |z|$ et $\rho e^{i\theta} = z$, et il vient bien $\operatorname{ch}(\log) = \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) / 2$.

b) pour l'hélicoïde $f = i \cdot \frac{1}{z^2}$ et $g = z$ d'où

$\psi = \left(-\frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right), \frac{\cos\theta}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right), \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \right)$ où $z = x+iy = \rho e^{i\theta}$ c'est à dire

$\operatorname{tg} x_3 = \frac{x_2}{x_1}$, équation habituelle de l'hélicoïde dans \mathbb{R}^3 .

D. Surfaces minimales isométriques :

Le paragraphe précédent nous a conduit à la construction d'une famille à un paramètre de surfaces minimales isométriques (localement); on peut se demander, une immersion minimale $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ étant donnée, combien il existe de surfaces minimales (après quotient par les déplacements) dans \mathbb{R}^{n+m} (m arbitraire) isométriques à ψ . Passant éventuellement au revêtement universel on supposera M simplement connexe. On notera $\tilde{\psi} = \psi \frac{\pi}{2}$ la surface conjuguée de ψ ; considérant \mathbb{C}^n comme $\mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$ on définit une immersion

$$\chi : M \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\psi}, \psi),$$

minimale et isométrique à ψ . De plus, par la définition de $\tilde{\psi}$, χ est holomorphe. Nous disposons donc d'un moyen d'associer à toute immersion minimale dans \mathbb{R}^n une immersion isométrique, minimale et holomorphe dans \mathbb{C}^n . En fait on a le résultat suivant :

THÉORÈME 7. Dans chaque classe d'immersions minimales isométriques (après quotient par les déplacements de \mathbb{R}^n) de dimension 2 dans \mathbb{R}^n , il existe exactement une courbe holomorphe.

C'est un corollaire du lemme suivant :

LEMME 8. Si $\varphi : M^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ et $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ sont des applications holomorphes telles que $|\varphi|^2 = |\psi|^2$, si M est connexe, si $\operatorname{Im} \varphi$ n'est incluse dans aucun s.e. affine propre de \mathbb{C}^n , et si on identifie \mathbb{C}^n et $\{x \in \mathbb{C}^{n+m} / x_k = 0 \forall k \in \{n+1, \dots, n+m\}\}$, alors il existe une transformation unitaire $U : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ telle que $\psi = U \cdot \varphi$.

Démonstration. On peut supposer $|\varphi|^2 \neq 0$. On procède par récurrence sur n , en supposant que $\varphi(0) \neq 0$.

• Si $n = 1$: $|\varphi|^2 = |\varphi_1|^2 = \sum_{k=1}^{m+1} |\psi_k|^2$ i.e. $1 = \sum_{k=1}^{n+1} |\psi_k / \varphi_1|^2$ c'est-à-dire,

$0 = \sum_{k=1}^{m+1} |(\psi_k / \varphi_1)_z|^2$, ceci dans un voisinage de 0. Par analyticité on en déduit

$\psi_k = c_k \varphi_1$ sur M , $c_k =$ constante et $\sum_k |c_k|^2 = 1$; il existe alors une matrice unitaire

A , dont la première colonne est $(c_k)_{k=1}^{m+1}$ et telle que $\psi = A \cdot \varphi$

• Si on suppose maintenant que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, 0 \dots 0)$ a n coordonnées linéairement

indépendantes . A une transformation unitaire près, il vient $\varphi_1(0) \neq 0$ et $\varphi_j(0) = 0$ si $j > 1$.

De plus, par hypothèse
$$\sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2 = \sum_{k=1}^{n+m} |\psi_k|^2$$

i.e.
$$1 + \sum_{j=2}^n |\varphi_j/\varphi_1|^2 = \sum_{k=1}^{n+m} |\psi_k/\varphi_1|^2$$

c'est-à-dire, en prenant le laplacien de la ligne précédente

$$\sum_{j=2}^n |(\varphi_j/\varphi_1)_z|^2 = \sum_{k=1}^{n+m} |(\psi_k/\varphi_1)_z|^2 \quad ;$$

l'hypothèse de récurrence donne alors l'existence d'une matrice (C_{kj}) , unitaire,

vérifiant
$$\sum_{j=2}^n C_{kj} (\varphi_j/\varphi_1)_z = (\psi_k/\varphi_1)_z \quad .$$

En intégrant, $\psi_k = C'_{k1} \varphi_1 + \sum_{j=2}^n C_{kj} \varphi_j$, $k \in \{1, \dots, n+m\}$; ici les C'_{k1} sont des constantes.

Mais
$$\begin{aligned} \sum_k |\psi_k/\varphi_1|^2 &= \sum_k |C'_{k1}|^2 + \sum_j |\varphi_j/\varphi_1|^2 + 2 \sum_{k,j} \operatorname{Re} (C_{kj} \overline{C'_{k1}} \varphi_j/\varphi_1) \\ &= 1 + \sum_j |\varphi_j/\varphi_1|^2 \end{aligned}$$

et comme en $z = 0$ $\varphi_i(0) = 0$, $i \in \{2, \dots, n\}$,

il vient
$$\sum_k |C'_{k1}|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k,j} \operatorname{Re} (\overline{C'_{k1}} \cdot C_{kj} \varphi_j/\varphi_1) = 0 \quad .$$

La fonction $\sum_{k,j} \overline{C'_{k1}} \cdot C_{kj} \varphi_j/\varphi_1$ étant holomorphe, on en déduit qu'elle est identiquement nulle. De l'indépendance linéaire des φ_j on conclut alors $\sum_{k=1}^{n+m} \overline{C'_{k1}} C_{kj} = 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$.

On a alors $\psi = U\varphi$ pour $U = (U_{ij})$ où

$$\begin{cases} U_{ij} = C_{kj} & \text{pour } j \in \{2, \dots, n\} \\ & \text{et } k \in \{1, \dots, n+m\} \\ U_{i1} = C'_{k1} & \text{pour } k \in \{1, \dots, n+m\} \end{cases} \quad \blacksquare$$

GÉNÉRALITÉS

Pour passer à l'énoncé du théorème, il reste à faire la remarque suivante

COROLLAIRE 9. Si $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ et $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+m}$ sont des immersions holomorphes isométriques, il existe une isométrie holomorphe de \mathbb{C}^{n+m} , (i.e. la composée d'une transformation unitaire et d'une translation $F : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ telle que : $\psi = F \circ \varphi$).

Démonstration : Les métriques induites par ψ et φ sur M coïncident

$$ds^2 = 2|\psi'|^2 |dz|^2 = 2|\varphi'|^2 |dz|^2 ;$$

donc $|\psi'|$ est égal à $|\varphi'|$ et, du lemme précédent, on déduit l'existence d'une transformation unitaire U de \mathbb{C}^{n+m} telle que $\psi' = U\varphi'$. Donc $\psi = U\varphi + c$ avec $c = \text{constante} \in \mathbb{C}$.

Note : Il est possible de donner une description explicite de l'espace des immersions minimales $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, isométriques à une immersion donnée ψ_0 .

Chaque immersion est caractérisée par une matrice complexe $n \times m$, S , telle que $\psi = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{S \psi_0\}$ avec

$$1) \bar{S}^t \cdot S = \operatorname{Id}_m$$

$$2) \operatorname{rg}(S, \bar{S}) = n$$

$$3) S^t \cdot S \text{ est une forme quadratique pour laquelle les}$$

vecteurs tangents à ψ sont des directions de dégénérescence, i.e.

$$(\psi'_0)^t \cdot S^t \cdot S \cdot \psi'_0 = 0 .$$

Deux immersions "normalisées" (c'est-à-dire vérifiant $\varphi(p_0) = 0$, $\psi(p_0) = 0$ pour un point p_0 fixé et telles que ni $\varphi(M)$, ni $\psi(M)$ ne soit incluse dans aucun sous-espace affine propre) sont identiques à un déplacement près si et seulement si S_1 , (resp. S associé à φ , (resp. ψ), vérifient : $S_1 = O S_2$ où $O \in O(n)$.

Pour ce théorème de classification, nous renvoyons à [5]. On y trouvera aussi un théorème de E. Calabi, formulation d'un résultat équivalent et dont nous donnons ici l'énoncé :

THÉORÈME 10 L'espace des immersions minimales "normalisées" $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, isométriques à une immersion holomorphe donnée $\psi_0 : M^2 \rightarrow \mathbb{C}^m$ est décrit par l'ensemble des matrices complexes $m \times m$, P , vérifiant

$$1) \operatorname{Id}_m - P\bar{P} \geq 0$$

$$2) (\psi'_0) \cdot P \cdot \psi'_0 = 0 .$$

Si n est la dimension du plus petit espace affine contenant $\psi(M)$ et si P est la matrice associée à ψ alors $n - m = \operatorname{rang}(\operatorname{Id}_m - P\bar{P})$ et en particulier $m \leq n \leq 2m$ avec $n = 2m$ si et seulement si $\operatorname{Id}_m - P\bar{P} > 0$.

Note : Par rapport à la première classification on fait ici $P = S^t . S$; $P = 0$ correspond à l'unique courbe holomorphe de la classe.

E. Le principe de symétrie:

PROPOSITION 11 Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable dans \mathbb{R}^n . Si Γ contient un segment γ , alors toute solution du problème de Plateau pour le bord Γ peut être prolongée analytiquement en une surface minimale (éventuellement à points de branchement) par symétrie le long de γ .

Démonstration : C'est un corollaire du principe de réflexion pour les fonctions harmoniques (et holomorphes).

Soit en effet $\tilde{\psi} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ une telle solution et soit $\Delta^+ = \{z \in \Delta : \text{Im}(z) \geq 0\}$.

Il existe alors une transformation conforme de Δ qui fait passer de $\tilde{\psi}$ à $\psi : \Delta^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec de plus $\psi(\Delta^+ \cap 0x) = \gamma$.

Par rotation de \mathbb{R}^n on peut de plus supposer que γ est un morceau de la droite d'équation $x_1 = 0$, $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, c'est à dire $\psi_2(x, 0) = \psi_1(x, 0) = \psi_n(x, 0) : -1 \leq x \leq 1$.

Le principe de réflexion pour les fonction harmoniques permet alors de prolonger ψ_2, \dots, ψ_n en des fonctions harmoniques du disque par $\psi_k(x, y) = -\psi_k(x, -y)$ $\forall k \in \{2, \dots, n\}$.

Les fonctions $\varphi_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial z}$ $k \in \{2, \dots, n\}$ se prolongent alors en des fonctions holomorphes du disque. De plus, $\varphi_k|_{0x}$ est imaginaire pure.

La conformité de l'immersion entraîne maintenant $\varphi_1^2 = -(\varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2)$ expression positive sur l'axe $0x$.

φ_1 est donc réelle sur l'axe $0x$ et le principe de réflexion appliqué aux fonctions holomorphes nous permet de prolonger φ_1 analytiquement au disque par $\varphi_1(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)}$, c'est-à-dire de prolonger ψ_1 par la formule intégrale

$$\psi_1(z) = \text{Re} \int_0^t \varphi_1(z) dz .$$

Soit encore $\psi_1(x, y) = \psi_1(x, -y)$ l'application ψ , ainsi obtenue, est de toute évidence une immersion minimale.

Note : Il existe des généralisations de ce résultat élémentaire, par exemple

THÉORÈME 12. (H. Lewy). Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe de Jordan réelle analytique et $\psi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution du problème de Plateau pour le bord Γ . Alors ψ admet une extension analytique, minimale, le long du bord Γ .

THÉORÈME 13 (S. Hildebrandt). Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe de Jordan de classe de Hölder $C^{k,\alpha}$, $4 \leq k \leq \infty$ (ou $k=\omega$) et où $0 \leq \alpha < 1$. Alors toute solution au problème de Plateau, $\psi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour le bord Γ , est de classe $C^{k,\alpha}$ au bord.

Remarque : Il existe une version un peu plus forte de ce résultat : on peut supposer

- $1 \leq k$ (au lieu de $4 \leq k$)
- $\alpha = \alpha(t)$ module de continuité de la dérivée $k^{\text{ième}}$,

la solution étant alors $C^{k,\alpha(t)}$ au bord.

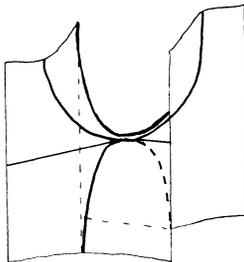
Application La surface de Scherk

Dans \mathbb{R}^3 on peut considérer le graphe de la fonction $z = \log \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right)$ sur le domaine $\{ |x| < \frac{\pi}{2} ; |y| < \frac{\pi}{2} \}$

la surface obtenue admet les quatre droites $|x| = |y| = \frac{\pi}{2}$ pour bord.

Le principe de réflexion introduit ci-dessus permet alors la construction d'une surface minimale complète, 2-périodique.

Sur son domaine fondamental on obtient quelque chose comme :

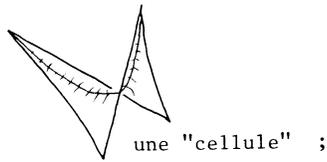


On peut tout de suite remarquer que l'application de Gauss rate ici 4 points. Un théorème de Xavier pour les surfaces complètes montre que, si la surface n'est pas un plan, alors son application de Gauss rate au plus 6 points. On ne connaît pas d'exemples entre 5 et 6 !

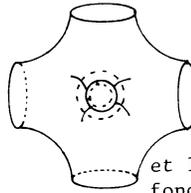
La surface de Schwarz

On considère la courbe Γ , à quatre côtés dans \mathbb{R}^3 , telle que l'angle au sommet soit de la forme $\pi/(k_i+1)$ où $k_i \in \mathbb{N}^*$. On considère alors Σ , solution du problème de Plateau pour ce bord Γ .

Le principe de réflexion conduit à une surface minimale régulière. Dans le cas où $k_i = 2$ pour tout i , la surface obtenue est alors plongée 3-périodique. Sa surface conjuguée correspond à la solution du problème de Plateau pour la courbe caractérisée par $k_1 = k_3 = 1$ $k_2 = k_4 = 2$; elle est elle-même 3-périodique et plongée.



une "cellule" ;



et le domaine fondamental

III. IMMERSIONS MINIMALES DANS S^n .

Soit \bar{M} une variété plongée de \mathbb{R}^n . On notera, si $p \in \bar{M}$ et $X \in T_p \mathbb{R}^n$, X^T la projection orthogonale de X sur $T_p \bar{M}$.

Soit $\psi : M \rightarrow \bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ une immersion de vecteur courbure moyenne K dans \bar{M} et \tilde{K} dans \mathbb{R}^n .

LEMME 14. $K = (\tilde{K})^T = (\Delta \psi)^T$.

En effet, $K = \sum_k (\bar{\nabla}_{e_k} e_k)^N = \sum_k ((e_k \cdot e_k)^T)^N = \sum_k ((e_k \cdot e_k)^N)^T = \tilde{K}^T$.

où e_k est un repère orthonormé de TM . (cf §2). ■

On considère maintenant le cas particulier où $\bar{M} = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

PROPOSITION 15. Soit $\psi : M^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion isométrique de la variété riemannienne M . L'immersion est minimale si et seulement si $\Delta \psi = -m\psi$.

Démonstration : On sait que ψ est minimale si et seulement si $(\Delta \psi)^T = 0$; la condition suffisante est donc immédiate.

Réciproquement, $\Delta \psi = f\psi$ où $f \in C^\infty(M^n)$

mais $\langle \Delta \psi, \psi \rangle = f \|\psi\|^2 = f$

tandis que $\langle e_j, \psi \rangle \equiv 0$ entraîne $\langle \bar{\nabla}_{e_j} e_j, \psi \rangle + \langle e_j, e_j \rangle = 0$

c'est à dire $\langle \Delta \psi, \psi \rangle = -m$. ■

PROPOSITION 16 (Takahashi). Si M est une m -variété riemannienne et $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion isométrique vérifiant $\Delta \psi = -\lambda \psi$ où $\lambda = \text{constante} \neq 0$, alors

- 1) $\lambda > 0$,
- 2) $\psi(M) \subset S^n(r)$ où $r = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}$,
- 3) l'immersion $\psi : M \rightarrow S^n(r)$ est minimale.

Démonstration : Puisque $\Delta \psi = K$ l'hypothèse $\Delta \psi = \lambda \psi$ entraîne que $\psi(P)$ est normale à l'immersion en tout point.

Si X désigne un champ quelconque sur M il vient :

$X \cdot \langle \psi, \psi \rangle = 2 \langle X \cdot \psi, \psi \rangle = 2 \langle X, \psi \rangle = 0$, c'est-à-dire $|\psi|^2 = \text{cte} = r^2$, mais pour

toute $f \in C^\infty(M)$ $\frac{1}{2} \Delta f^2 = f \Delta f + |\nabla f|^2$ et donc ici $0 = \langle \psi, \Delta \psi \rangle + |\nabla \psi|^2 = -\lambda r^2 + m$,
 i.e. $\lambda = m/r^2 > 0$. Enfin la minimalité de l'immersion dans $S(r)$ est une conséquence du premier lemme : (la courbure moyenne de l'immersion est égale à $(\tilde{K})^T$),
 et donc nulle.

COROLLAIRE 17. Soient G et H des groupes de Lie compacts, on considère l'espace homogène G/H . On suppose que la représentation d'isotropie de H est irréductible. On considère $E_\lambda = \{\varphi \in C^\infty(G/H) : \Delta \varphi = -\lambda \varphi\}$ un espace propre non trivial du Laplacien de G/H et on munit E_λ d'un produit scalaire invariant par l'action de G sur E_λ , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ étant une base orthonormale de E_λ pour ce produit scalaire.

Il existe alors un réel $\alpha \neq 0$ pour lequel l'application $\psi = (\alpha \varphi_1, \dots, \alpha \varphi_n)$ est une immersion isométrique minimale de G/H dans $S^{n-1}(r)$ où r est un réel positif.

Démonstration : D'après le résultat de Takahashi il suffit, pour établir ce corollaire, de montrer l'existence d'un nombre α non nul pour lequel $\psi = (\alpha \varphi_i)_{i=1}^n$ est une isométrie.

Si l'on note $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, la métrique induite par ϕ sur G/H est invariante ; pour tout $g \in G$, puisque $\Delta g^* \varphi = g^* \Delta \varphi$ et que le produit scalaire de E_λ est invariant pour l'action de G , il existe une matrice orthogonale $N \times N$, O_g , telle que $g^* \phi = O_g \cdot \phi$. Si l'on représente par \otimes le produit tensoriel symétrique, la métrique induite par ϕ sur G/H s'écrit $ds^2 = \sum_{k=1}^n d\varphi_k \otimes d\varphi_k$, que nous baptisons $(d\phi, d\phi)$. Alors, pour tout $g \in G$,

$$g^* ds^2 = (g^* d\phi, g^* d\phi) = (d(O_g \cdot \phi), d(O_g \cdot \phi)) = (d\phi, d\phi).$$

Soit $g^* ds^2 = ds^2$.

L'existence de $\alpha > 0$ est maintenant une conséquence du lemme de Schur :

LEMME 18. Si un groupe H agit irréductiblement sur \mathbb{R}^n et laisse invariantes deux formes bilinéaires symétriques définies positives φ_1 et φ_2 , alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$.

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée pour φ_1 , diagonalisant φ_2 . Dans cette base $\varphi_2(x, y) = \sum_i \lambda_i x_i y_i$.

Si E_{λ_i} est l'espace propre de φ_2 associé à λ_i on a : $x \in E_{\lambda_i}$ si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_2(x, y) = \lambda_i \varphi_1(x, y)$, donc E_{λ_i} est stable sous l'action de H , supposée par ailleurs irréductible. Donc $E_{\lambda_i} = \mathbb{R}^n$ et il n'existe qu'une valeur propre, égale à λ .

Application Immersions minimales de $S^n(r)$ dans $S^N(1)$

Il suffit d'utiliser les harmoniques sphériques. On peut, à titre d'exemple, introduire la surface de Véronèse (polynôme homogène de degré 2).

L'application $(x,y,z) = (xy,xz,yz, \frac{1}{2}(x^2-y^2), \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2+y^2-2z^2))$ de $S^2(\sqrt{3})$ vers $S^4(1)$ est une immersion isométrique minimale du plan projectif réel de courbure $\frac{1}{3}$ dans S^4 .

Nous pouvons maintenant nous poser la question de l'existence d'hypersurfaces minimales non triviales d'une sphère canonique. Déjà en dimension 3 la question présente un intérêt.

Dans le cas du genre $g = 1$ on connaît le tore de Clifford donné par l'équation

$$|z|^2 = |w|^2 = \frac{1}{2} \text{ (tore plat) ou encore après rotation par } X_1X_2 + X_3X_4 = 0 .$$

On a en effet la caractérisation suivante, due à Wu-Yi Hsiang [3] de la minimalité pour une surface algébrique d'équation $p = 0 : \Delta p | \nabla p |^2 - (\nabla p)^t H (\nabla p) \equiv 0 \pmod{p}$ où H est la matrice des dérivées secondes de p (hessien).

On montre dans [4] que c'est en fait la seule surface minimale algébrique de degré 2. Elle est caractérisée par le fait que c'est la seule surface minimale non triviale à courbure constante dans S^3 .

Cependant E. Calabi a construit une famille d'immersions minimales de $S_1 \times S_1$ dans S^3 ; il existe donc "beaucoup" de tores minimaux immergés dans S^3 .

Dans le cas du genre nul, on sait que les seules surfaces minimales immergées compactes sont totalement géodésiques. C'est un résultat de F. Almgren, corollaire de la proposition suivante :

PROPOSITION 19. Si $\psi : \Sigma \rightarrow S^3$ est une immersion minimale, avec Σ compacte et de genre g , alors

- 1) si $g = 0$ l'immersion est totalement géodésique.
- 2) Si $g \geq 1$ alors $\sum_p \in \mathbb{R} d_p = 4g - 4$.

Dans cet énoncé d_p est le "degré de sphéricité" de ψ en p. Par définition, d_p est égal à l'ordre de contact de ψ avec la 2-sphère géodésique tangente en $\psi(p)$ à l'immersion moins 1, l'ordre de contact étant lui-même défini comme étant le plus grand entier k tel que le jet d'ordre k de ψ soit contenu dans le 3-plan de \mathbb{R}^4 dont l'intersection avec S^3 définit la 2-sphère tangente. On a en particulier : $d_p \geq 0$ pour tout p dans \mathbb{R} .

LEMME 20. La courbure de Gauss K d'une surface minimale de S^3 est toujours inférieure (au sens large) à 1 ; elle vaut 1 exactement aux zéros de $\psi \wedge \partial \psi \wedge \bar{\partial} \psi \wedge \partial^2 \psi$.

GÉNÉRALITÉS

Démonstration : On notera β la seconde forme fondamentale de l'immersion ψ dans S^3 , minimale . On a ainsi $\beta_{ij} = \frac{1}{2F} \psi \wedge \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_{ij}$ où la métrique induite par ψ est écrite : $ds^2 = 2F|dz|^2$.

On a donc $\frac{1}{iF} \cdot \psi \wedge \partial \psi \wedge \bar{\partial} \psi \wedge \partial^2 \psi = \frac{1}{2} (\beta_{11} - i\beta_{12})$: (en utilisant $\Delta\psi = -F\psi$) ;

Comme $4F^2(1-K) = \beta_{12}^2 - \beta_{11}\beta_{22}$, on en déduit, pour une immersion minimale dans S^3
 $(1-K) = F^4 |\psi \wedge \partial \psi \wedge \bar{\partial} \psi \wedge \partial^2 \psi|^2$ ■

Note : Il est facile de voir que $(\frac{1}{F} \cdot \psi \wedge \partial \psi \wedge \bar{\partial} \psi \wedge \partial^2 \psi)$ est holomorphe; les zéros considérés sont donc isolés.

Démonstration de la Proposition : Notons $\omega = \frac{1}{iF} \psi \wedge \partial \psi \wedge \bar{\partial} \psi \wedge \partial^2 \psi (dz)^2$. Si Σ est compacte, de genre g alors,

$$\text{ou } g = \mathbb{C} \text{ et, comme } \omega = \frac{1}{2}(\beta_{11} - i\beta_{12})(dz)^2$$

ψ est ainsi totalement géodésique puisque $\omega \equiv 0$

$$\text{ou } g \geq 1 \text{ et } \omega \text{ a alors } 4g - 4 \text{ zéros, multiplicités}$$

comptées .

Il reste à voir que l'ordre du zéro de ω en p est égal à d_p ; comme P_p est engendré par $\psi(p), \psi_1(p), \psi_2(p)$, l'ordre de tangence est k si et seulement si $\psi(p) \wedge \psi_1(p) \wedge \psi_2(p) \wedge \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} \psi(p) = 0$ dès que $0 \leq i+j \leq k$, c'est-à-dire si et seulement si ω admet en p un zéro d'ordre $k-1$. (Il suffit ici encore, de remarquer que $\beta_{11} = -\beta_{22}$) ■

De la proposition, ainsi démontrée, on déduit maintenant le corollaire :

COROLLAIRE 21. Il n'existe pas d'immersion minimale du plan projectif réel dans S^3 .

En fait, ce corollaire constitue l'unique cas "pathologique". Nous allons en effet construire trois familles de surfaces minimales dans S^3 , établissant qu'il existe des surfaces minimales orientables compactes de genre arbitraire plongées dans S^3 , ou encore qu'il existe des surfaces minimales algébriques de degré arbitraire dans S^3 .

La construction de ces surfaces repose sur la généralisation aux espaces à courbure constante du principe de réflexion introduit au Paragraphe 2.

DÉFINITION 22. Dans S^3 on considère γ la géodésique d'équation $x_3 = x_4 = 0$ et S la 2-sphère d'équation $x_4 = 0$.

On appelle réflexion géodésique le long de γ (resp. S) l'application

$$P_\gamma : \begin{pmatrix} S^3 \longrightarrow S^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (x_1, x_2, -x_3, -x_4) \end{pmatrix}$$

(resp. $P_S : ((x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4))$).

On a alors le principe suivant

PROPOSITION 23. Soit M une surface minimale, C^2 au voisinage de son bord ∂M alors,

1) si ∂M contient un arc géodésique γ , on peut prolonger M analytiquement en une surface minimale par réflexion géodésique le long de chaque composante $\partial M \cap \gamma$;

2) si ∂M est contenu dans une 2-sphère géodésique S et si M y est orthogonale à S , alors on peut prolonger M en une surface minimale analytique par réflexion géodésique le long de chaque composante (non triviale) de $\partial M \cap S$.

Démonstration : Soit $p \in (\widehat{\partial M \cap \gamma})$. Il existe alors une application conforme

$$\psi : \Delta^+ \longrightarrow S^3 \text{ (où } \Delta^+ = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq 0\} \text{ avec}$$

- i) ψ régulière au voisinage de p , $\psi(0,0) = p$ $\psi_3(x,0) = \psi_4(x,0) = 0$
- ii) $\Delta\psi = -\langle \nabla\psi, \nabla\psi \rangle \cdot \psi$ sur Δ^+ (puisque ψ est minimale).

On considère l'extension définie par $(-1)^{[k/3]} \psi_k(x-y) = \psi_k(x,y)$.

Alors $\psi_k \in C(\Delta)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ et avec l'équation des surfaces minimales on déduit $\psi_k \in C^2(\Delta)$ pour $k=3$ ou 4 . Par construction $\psi_{k,x}$, $\psi_{k,xx}$ et $\psi_{k,yy}$ sont continues sur Δ pour $k=1$ ou 2 .

En remarquant que

$$a) \frac{\langle \psi, \psi \rangle}{2} x = \langle \psi, \psi_x \rangle = \psi_1 \cdot \psi_{1,x} + \psi_2 \cdot \psi_{2,x} = \psi_1 \cdot \psi_{1,y} + \psi_2 \cdot \psi_{2,y} = 0,$$

$$b) \psi_{1,x} + \psi_{1,y} + \psi_{2,x} + \psi_{2,y} = 0 \text{ et } \psi_{1,x}^2 + \psi_{2,x}^2 = |\psi_x|^2 > 0 \text{ pour } y = 0,$$

on a dans ce cas $\psi_{k,y} = \psi_{k,xy} = 0$ pour $k=1, 2$ et donc $\psi \in C^2(\Delta, S^3)$.

On conclut avec le lemme suivant :

LEMME 24. Si ψ est minimale (i.e. C^2 et vérifiant $\partial\bar{\partial}\psi = -F\psi$), alors ψ est réelle analytique.

GÉNÉRALITÉS

Démonstration : C'est un corollaire du théorème 1.10.4 de [6] en remarquant que, ψ étant minimale et conforme, est un extrémum de l'intégrale de Dirichlet et que la représentation de ψ en coordonnées stéréographiques (pour S^3) vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{1}{(1+|\psi|^2)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{1}{(1+|\psi|^2)^2} \right) + \frac{2|\nabla \psi|^2}{(1+|\psi|^2)^3} \psi = 0 \quad . \quad \blacksquare$$

Afin d'introduire des exemples d'application de ce principe, nous allons ici exposer un procédé de construction générique de surfaces minimales complètes, lisses et régulières dans S^3 .

Soit Γ une courbe géodésique polynômiale de S^3 de sommets $v_0, \dots, v_n = v_0$ et de côtés notés $\gamma_0, \dots, \gamma_n = \gamma_0$, γ_i intersectant γ_{i-1} en v_i , avec un angle $\frac{\pi}{k_i+1}$, $k_i \in \mathbb{N}^*$.

On notera $S(\gamma, \delta)$ l'unique 2-sphère géodésique contenant $\gamma \cup \delta$. On dira que $S(\gamma, \delta)$ "délimite" un sous-ensemble X de S^3 si X est contenu dans l'un des deux hémisphères fermés définis par $S(\gamma, \delta)$. On note N_i la géodésique perpendiculaire à $S(\gamma_i, \gamma_{i-1})$ en v_i . On notera $C(\Gamma) = \cap \{H : H \text{ hémisphère contenant } \Gamma\}$, l'enveloppe convexe de Γ , qui est convexe si et seulement si $\Gamma \subset \partial C(\Gamma)$.

Posons $\zeta(\Gamma) = \{S : S \text{ est une 2-sphère géodésique de } S^3 \text{ t.q. } S \cap \Gamma \text{ a au quatre composantes connexes}\}$.

On fera les hypothèses suivantes :

(0) - Γ est un polygone convexe et propre (i.e.: $\forall i \in \{1, \dots, n\} S(\gamma_{i-1}, N_i)$ ou $S(\gamma_i, N_i)$ "délimite" Γ) ;

(A) Γ est contenu dans un hémisphère ouvert de S^3 ;

(B) Pour tout p dans $\overset{\circ}{C}(\Gamma)$, il existe une 2-sphère géodésique S_p , n'appartenant pas à ζ_Γ , et contenant p ;

(C) si (γ_{i-1}, N_i) ou $S(\gamma_i, N_i)$ ne délimite pas Γ , alors $k_i = 1$;

(D) il existe une application continue $\pi : C(\Gamma) \rightarrow \Delta$, différentiable dans $\overset{\circ}{C}(\Gamma)$ et envoyant Γ sur $\partial \Delta$ de façon monotone, telle que

$$\forall S \in \zeta_\Gamma, \text{rang} \{d(\pi/S \cap \overset{\circ}{C}(\Gamma))\} \text{ est partout } 2.$$

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 25. A tout polygone Γ de S^3 ainsi construit, et vérifiant (0), (A), (B), (C) on peut associer une sous-variété minimale, complète, non singulière M de S^3 contenant Γ . La surface ainsi obtenue est compacte si et seulement si le groupe G_Γ

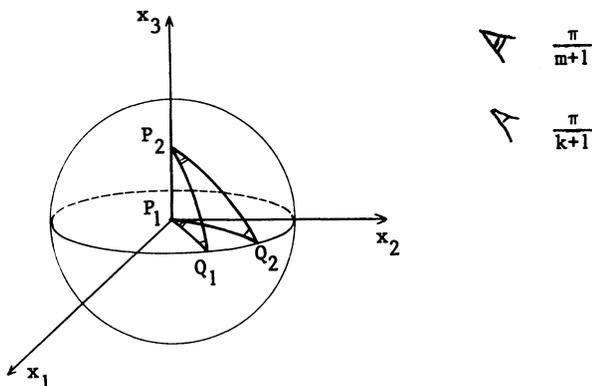
engendré par les réflexions le long des arcs géodésiques de Γ est fini. Si Γ vérifie de plus (D) alors le domaine fondamental M_Γ , engendrant M sous G_Γ et de frontière Γ , est plongé.

(cf. appendice pour la démonstration et le calcul du genre de M_Γ .)

Application. Nous allons construire une famille de surfaces dans S^3 qui constituera une démonstration du résultat suivant.

THÉORÈME 26. Pour tout entier $g \geq 0$ il existe un plongement minimal d'une surface compacte orientable de genre g dans S^3 . Si g n'est pas premier, le plongement n'est pas unique.

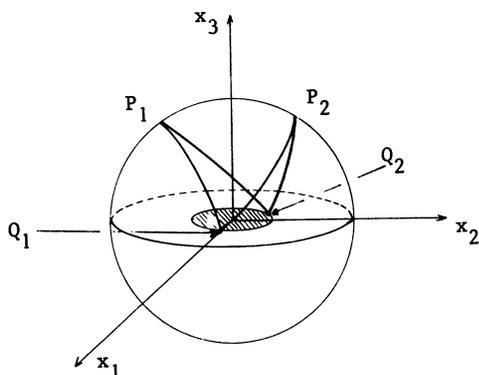
Construction. On considèrera la représentation de S^3 obtenue par projection stéréographique de pôle nord. Dans cette représentation les géodésiques de S^3 sont les droites passant par l'origine, les grands cercles de S^2 et les grands cercles plans intersectant S^2 en des points antipodaux. On notera C_1 l'axe Ox_3 et $C_2 = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, i.e. dans $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{E}^2$ $C_1 = \{(0, \omega) / |\omega| = 1\}$ et $C_2 = \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\}$. Pour $k, m \in (\mathbb{N}^*)^2$ on considère $P_1, P_2 \in C_1$ et $Q_1, Q_2 \in C_2$ avec distance $(P_1, P_2) = \pi/k+1$ et distance $(Q_1, Q_2) = \pi/m+1$. On notera Γ_{mk} le polygone $P_1Q_1P_2Q_2$; on a la représentation :



On note que si $k = 0$ la construction par réflexion conduit à une 2-sphère géodésique. De plus on remarque la symétrie en m et k . Désormais $m \geq k \geq 1$. Le polygone Γ_{mk} est alors propre, convexe, inclus dans un hémisphère ouvert de S^3 et vérifie les conditions (A) et (C). Pour se convaincre de (B), il suffit de considérer la famille des plans passant par Ox_3 en représentation stéréographique. Pour vérifier (D) on amène Γ_{mk} par rotation en position telle que l'axe Ox_3 soit

GÉNÉRALITÉS

axe de symétrie de Γ_{mk} et que Q_1 et Q_2 soient dans le plan $x_3 = 0$ et P_1, P_2 dans le demi-grand cercle supérieur du plan (x_2, x_3) :



la zone hachurée représentant la projection de l'enveloppe convexe sur le plan $x_1 x_2$

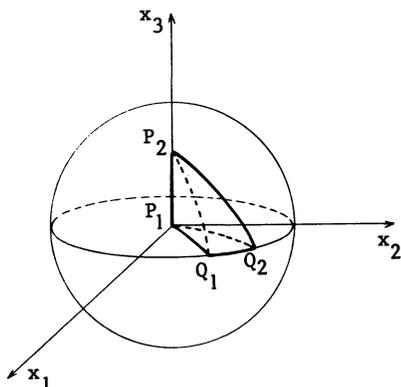
c'est à dire que l'on vérifie (D) en considérant π_0 , la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 = (x_1, x_2)$ (en fait sa restriction à $C(\Gamma_{mk})$) Le théorème se traduit alors

THÉOREME 27. A chaque polygone Γ_{mk} est associée une surface minimale orientable et compacte de genre mk , plongée dans S^3 .

Démonstration. Le groupe $G_{\Gamma_{mk}}$ est fini (et définit un "réseau" de S^3). Par réflexions successives on remplit la moitié des tétraèdres du réseau, i.e. $\text{Card } G_{\Gamma} / \text{Card } H_{\Gamma} = 2(k+1)(m+1)$. ■

Remarque. ξ_{m0} est une 2-sphère géodésique, ξ_{k1} est le tore de Clifford. On peut montrer que la solution du problème de Plateau pour $\Gamma_{m,k}$ est unique, même si l'on enlève la contrainte sur le genre. Avec la convention $m \geq k > 0$ on en déduit que $\xi_{mk} = \xi_{m',k'}$ si et seulement si $m = m'$ et $k = k'$.

Nous allons, sans démonstration, introduire deux autres familles, variations partir du tétraèdre introduit. Avec les mêmes conventions que supra, considérons maintenant $\Gamma'_{m,k}$, le polygone géodésique $P_1 P_2 Q_2 Q_1$. En admettant que (A), (B), (C), (D), (O) sont vérifiées, on peut associer à Γ'_{mk} une surface minimale non singulière et compacte $M_{\Gamma'_{mk}}$, de caractéristique 0 (puisque $k_i = 1, i \in \{1, 2, 3, 4\}$).



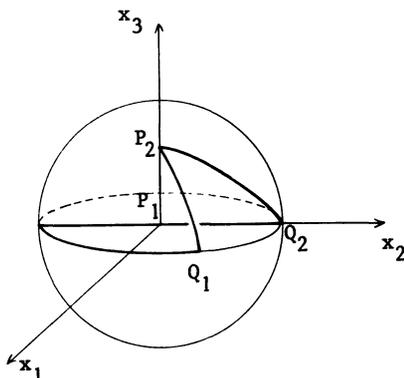
En fait $M_{\Gamma, mk}$ peut être vue comme l'immersion 2-périodique $\psi_{mk} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ définie par : $\psi_{mk}(x, y) = (\cos m x \cos y, \sin m x \cos y, \cos k x \sin y, \sin k x \sin y)$ (i). Les résultats se résument alors par :

THÉORÈME 28. A toute paire $\{m, k\}, (m, k) = 1$, on associe une surface minimale compacte $M_{\Gamma, mk}$ de S^3 de caractéristique d'Euler 0, donnée par l'équation (i). De plus

- (a) $M_{\Gamma, mk}$ est non-orientable si et seulement si $2/m.k$;
- (b) $M_{\Gamma, mk}$ vérifie l'équation algébrique $\text{Im}\{z^k \bar{w}^m\} = 0$;
- (c) $M_{\Gamma, mk}$ est géodésiquement réglée ;
- (d) $\text{Aire}(M_{\Gamma, mk}) \geq 2\pi^2 \min\{m, k\}$;
- (e) $M_{\Gamma, mk}$ est le tore de Clifford et c'est la seule surface du type $M_{\Gamma, mk}$ qui soit plongée.

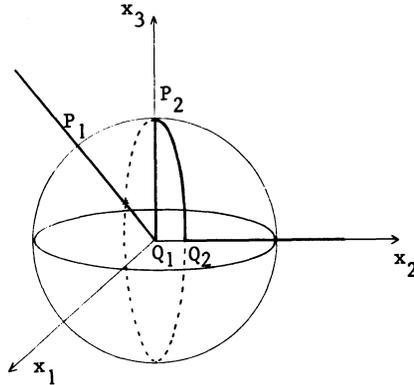
Voici enfin la dernière famille que nous voulions mentionner : ici

$\Gamma''_{mk} = P_2 Q_2 P_1 (-Q_2) Q_1$, c'est à dire que, par rapport à Γ_{mk} on remplace $Q_1 Q_2$ par le "grand tour" $Q_1 - Q_2 P_1 Q_2$ comme l'indique la représentation suivante dans la projection stéréographique de S^3 .



GÉNÉRALITÉS

On montre alors que le théorème de construction s'applique, bien que (A) ne soit pas vérifiée. La condition (c) fait aussi défaut dès que $m > 1$, mais ici encore on peut modifier la démonstration. Enfin la vérification de (D) n'est plus absolument immédiate. Disons seulement que l'on considère la projection stéréographique du pôle $-Q_2$, ce qui conduit à la figure suivante



et que l'on considère alors $\pi : C(\Gamma''_{m,k}) \rightarrow \{\text{fermeture dans } S^3 \text{ du 1er quadrant de } (x_1, x_2)\}$ définie par la projection le long de l'axe Ox_3 sur $C(\Gamma''_{mk}) - \{-Q_2\}$ et par $\pi(-Q_2) = -Q_2$.

On a alors :

THÉORÈME 29. A toute paire (m,k) , ordonnée, de \mathbb{N}^2 avec k impair on associe une surface $M_{\Gamma''_{mk}}$ compacte, non-orientable, minimale contenant $\Gamma''_{m,k}$ et de caractéristique d'Euler $1-mk$. ■

IV. ORBITES EXTRÉMALES.

THÉORÈME 30. Chaque composante connexe de l'ensemble des points fixes, F , d'une isométrie d'une variété riemannienne X est une sous-variété totalement géodésique.

Démonstration. Soit g l'isométrie de X , variété riemannienne et p un point fixe. On considère alors le sous-espace, noté F_p , des vecteurs tangents en p à X invariants par g_* . On a : $g(\exp(tv)) = \exp(tg_*v)$, $t \in \mathbb{R}$ $v \in T_p M$ et, comme \exp est inversible en 0 , on en déduit que F est une sous-variété totalement géodésique.

DÉFINITIONS 31. Deux orbites $G(p)$ et $G(p')$ sont dites de même type si les groupes d'isotropie associés G_p et $G_{p'}$, sont conjugués.

Le volume d'une orbite $G(p_0)$ est dit "extrémum local à type fixé" si $\frac{d}{dt} \text{vol}(G(p_t))|_{t=0} = 0$ pour toute famille à un paramètre, lisse, de G -orbites de même type (celui de G_0) sur M .

THÉORÈME 32. Soit G un groupe compact et connexe d'isométries d'une variété riemannienne M . Alors toute orbite de G , extrémum local à type fixé, est une sous-variété minimale de M .

Démonstration. Soit $\theta_0 = G(p_0)$ une orbite de G et H le vecteur courbure moyenne, on a $g_*H = H$ pour tout $g \in G$ et donc : $g(\exp(t H_{p_0})) = \exp(t H_{g p_0})$. Mais alors si $p_t = \exp(t H_{p_0})$ et $\theta_t = G(p_t)$, θ_{t_1} est une orbite de G et θ_t une famille à un paramètre lisse. Comme $g(\exp(t H_{p_0})) = \exp(t H_{g p_0}) = \exp(t H_{p_0})$ pour tout $t < t_0$ si et seulement si $g p_0 = p_0$, $G_{p_t} = G_{p_0}$, et les orbites θ_t sont toutes du même type.

La formule de la variation première s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\theta_t) \Big|_{t=0} = - \int_{\theta_0} |H|^2 dV_0 \quad ; \quad \text{d'où l'énoncé} \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 33. On applique le résultat précédent à l'action de SO_n sur $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. L'orbite d'un point (x,t) est la sphère $S^{n-1}(\|x\|)$, de volume $\alpha_{n-1} \|x\|^{n-1}$, où α_{n-1} représente le volume de la sphère unité $n-1$ dimensionnelle. Restreinte à $S^n(1)$ un extrémum est atteint pour $t = 0$. Cette orbite correspond bien à un "grand cercle".

De même pour l'action de $SO_p \times SO_q$ sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ qui préserve S^{p+q-1} . L'orbite de $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est un produit des sphères $S^{p-1}(\|x\|) \times S^{q-1}(\|y\|)$ de volume $\alpha_{p-1} \cdot \alpha_{q-1} \|x\|^{p-1} \|y\|^{q-1}$. Un extrémum de cette fonction restreinte à S^{p+q-1} est atteint par $\|x\|^2 = \frac{p}{p+q} \|y\|^2 = \frac{q}{p+q}$ donc $S^{p-1}(\sqrt{\frac{p}{p+q}}) \times S^{q-1}(\sqrt{\frac{q}{p+q}})$ est minimale dans S^{p+q-1} .

Soit $\{A \in M_{3 \times 3} / A^t = A \text{ et } \text{tr } A = 0\} = S \simeq \mathbb{R}^5$. On munit S du produit scalaire $\text{tr } A \cdot B$.

Pour l'action $A \rightarrow OAO^t$, $O \in SO_3$, $A \in S$, SO_3 agit orthogonalement sur S .

Chaque orbite générique est caractérisée par une matrice diagonale

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \end{cases}$$

Le sous-groupe d'isotropie est, dans le cas où les λ_i sont distincts : $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, (de générateur $\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}$).

L'orbite générique est donc difféomorphe à $SO_3/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ et le volume d'une telle orbite est un multiple de $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_1 - \lambda_3)$. Avec la contrainte $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, un extrémum correspond à

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) .$$

On en déduit que l'ensemble des matrices de S vérifiant $\|A\|^2 = 1$ et rang $A = 2$ est une hypersurface minimale de S^4 . Dans le cas $\lambda_i = \lambda_j = -\frac{1}{2} \lambda_k$ on trouve deux orbites isolées : ce sont, à un déplacement rigide près, deux surfaces de Veronèse.

V. VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES.

PROPOSITION 34. Toute sous-variété complexe d'une variété kählérienne est minimale.

Démonstration. Si $M^n \rightarrow X$, alors $(\bar{\nabla}_x JY)^N = (J\bar{\nabla}_x Y)^N = J(\bar{\nabla}_x Y)^N$, la première égalité parce que J est parallèle, la seconde parce que la sous-variété M^n est complexe.

On a donc montré $B(X, JY) = J \cdot B(X, Y) = B(JX, Y)$ mais, en choisissant maintenant une base locale de TM^n de la forme $e_1, J e_1, \dots, e_n, J e_n$, il vient

$$H = \sum_i (B(e_i, e_i) + B(J e_i, J e_i)) = 0 .$$

Exemple. Dans \mathbb{C}^n une telle surface peut s'écrire $V^m = \{z \in \mathbb{C}^n / p_i(z) = 0, \forall i \in \{1, n-m\}\}$.

On a une sous-variété complexe, d'après la version complexe du théorème des fonctions implicites, dès que le rang de $\frac{\partial p_i}{\partial z_j}(z)$ est $(n-m)$ en tout point.

On construit ainsi une sous-variété de dim 3, minimale dans S^5 : soit $V_d \subset \mathbb{C}^3$ d'équation $z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$.

L'image obtenue dans $\mathbb{C}P^2$ est compacte, orientable ; le théorème d'équivalence genre-degré pour une courbe donne $g = \frac{1}{2} (d-1) (d-2)$.

Si on considère la projection $\pi : S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$, de fibre S^1 , $M_d = S^5 \cap V_d$ est une sous-variété minimale de dimension 3, qui est topologiquement un cercle au-dessus d'une courbe (complexe) de genre $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. ■

APPENDICE.

Afin de donner une idée la plus précise possible de cette construction sans trop alourdir l'exposé nous admettrons les lemmes suivants :

Nous appellerons "pseudo-immersion" toute application $\psi : M \rightarrow S^N$ telle que

a) $\psi \in C(M, S^N) \cap H^1(M, S^N)$

b) $\text{rang}(d\psi) = 2(p.p)$

c) tout point intérieur à M admet un voisinage V_x difféomorphe à $\bar{\Delta}$ par ϕ tel que $\tilde{\psi} = \psi \circ \phi$ soit quasi-conforme.

LEMME 1. Soit $\psi : M \rightarrow S^N$ une pseudo-immersion telle que

a) ψ représente une surface d'aire minimale, solution du problème de Plateau, dans $C(M, S^N) \cap H^1(M, S^N)$, avec la condition au bord $\psi|_{\partial M} = f$,

b) $\psi(\partial M) \subset H^0$, H hémisphère de S^3 .

Alors $\psi(M^0) \subset C(\psi(\partial M))^0$.

LEMME 2. Si M est maintenant difféomorphe au disque fermé et si S est une hypersurface géodésique d'ordre de contact k avec ψ au point p de M^0 alors,

$\psi^{-1}(S) \cap M$ compte au moins $2(k+1)$ composantes.

LEMME 3. Soit M difféomorphe au disque unité. Supposons que $\psi|_{\partial M}$ représente une courbe de Jordan Γ dans S^N . On a alors :

a) si $\text{rang}(d\psi_p) < 2$ et $\psi(p) \in S$, alors $\Gamma \cap S$ admet au moins 4 composantes ;

b) si $\text{rang}(d\psi_p) = 2$ et S est tangente à ψ en p , alors $\Gamma \cap S$ compte au moins 4 composantes ;

c) si $\text{rang}(d\psi_p) = 2$ et si la courbure de Gauss de la métrique induite en p est 1 ; si de plus, S est tangente à ψ en p , alors $\Gamma \cap S$ compte au moins 6 composantes ;

d) il existe au moins une hypersphère géodésique S , contenant $\psi(p)$ telle que $\Gamma \cap S$ ait au moins $2 \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ composantes.

Considérons maintenant $\psi : \Delta \rightarrow S^3$ la solution classique du problème de Plateau pour Γ (cf. [6])

On posera $M_\Gamma = \psi(\Delta)$. On sait qu'alors ψ est continue sur Δ , analytique et quasi-conforme sur Δ^0 et est une représentation de Fréchet de Γ sur $\partial \Delta$. On sait aussi que ψ minimise les intégrales d'aire et de Dirichlet sur le sous-ensemble de $C(\Delta, S^3) \cap H_2^1(\Delta, S^3)$ formé des éléments satisfaisant la condition de représentation sur $\partial \Delta$.

Le lemme 1 montre que $\psi(\Delta^0) \subset C(\Gamma)^0$, le lemme 3 et la condition B montrent que ψ est régulière dans Δ^0 . A l'aide du lemme 3 la condition D entraîne enfin,

GÉNÉRALITÉS

par un argument de monodromie, que ψ est injective sur Δ^0 .

Autrement dit ψ est un plongement conforme de Δ^0 dans $C(\Gamma)^0$. On sait encore

que ψ est injective sur le bord, tandis que Hildebrandt [1] a établi que ψ est analytique en tout point du bord, d'image incluse dans l'intérieur d'un des arcs de Γ .

On peut maintenant appliquer le principe de réflexion.

LEMME 4. Soit $\delta_i = \psi^{-1}(\gamma_i)$; alors $|\nabla\psi| \neq 0$ partout le long de δ_i .

Démonstration. Soit $(x,0) \in \delta_i^0$. On considère un disque suffisamment petit contenu dans Δ^0 et centré en $(x,0)$. Comme Γ est convexe il existe une 2-sphère géodésique contenant γ_i , et divisant S^3 en H^+ et H^- avec $\psi(\Delta^+) \subset H^+$ (on a supposé pour ce faire que, via une transformation conforme, ψ ait son support inclus dans le demi-disque fermé, avec δ_i d'équation $y = 0$). Le lemme 1 montre que

$\psi(\text{int}(\Delta^+)) \subset \text{int}(H^+)$, de même avec Δ^- et H^- , c'est à dire que $\psi(\partial B) \cap S$ est en fait un doublet; mais le lemme 3, (a) montre qu'alors $|\nabla\psi| \neq 0$ en $(x,0)$. ■

Chaque réflexion étant une isométrie, on peut itérer les réflexions en un sommet v_i , pour, après $2k_i+2$ répétitions, retrouver le domaine fondamental. On construit ainsi une surface analytique, avec une éventuelle singularité au sommet même. A l'aide du raisonnement de Hildebrandt au §4 de [2] on peut alors montrer que ψ^* (correspondant à la réunion des réflexions successives au sommet v_i considéré) est en fait analytique en v_i .

LEMME 5. $|\nabla\psi^*(0,0)| \neq 0$ (c'est à dire que les sommets sont des points réguliers).

Démonstration. C'est une application du Lemme 2 : si $|\nabla\psi^*(0,0)| = 0$ le lemme, donne que, pour toute 2-sphère géodésique S contenant le sommet v_i , $(\psi^*|_{\partial B})^{-1}(S)$ a au moins quatre composantes (B est un disque, inclus dans Δ , centré à l'origine, et tel que $\psi^*(B)$ soit contenu dans une hémisphère ouverte). Il nous reste à montrer l'existence d'une 2-sphère S pour laquelle ceci est faux : ou bien Γ est délimité par $S(\gamma_{i-1}, N_i)$ et $S(\gamma_i, N_i)$; la sphère S^3 s'écrit alors comme la réunion de $2k_i+2$ régions congruentes au domaine lenticulaire L , défini par $S(\gamma_{i-1}, N_i)$ et $S(\gamma_i, N_i)$. De plus $M_\Gamma^0 \subset L^0$, et de même pour les réflexions dans chacun des autres domaines. Autrement dit M^* intersecte les faces de contact en des morceaux de géodésique, paramétrés injectivement. En considérant $S(\gamma_i, N_i) = S$, on a que $(\psi^*|_{\partial B})^{-1}(S)$ est un doublet.

Ou bien Γ est délimité par $S(\gamma_i, N_i)$ et $k_i = 1$. On fait le même raisonnement avec cette fois $S(\gamma_{i-1}, N_i)$ remplacée par la 2-sphère géodésique contenant γ_{i-1} et délimitant Γ . ■

Nous disposons à ce point, après toutes les combinaisons des réflexions de M_Γ , d'une surface complète et non singulière dans S^3 notée M_Γ .

On considère G_Γ , sous-groupe de $O(4)$ engendré par toutes les réflexions géodésiques possibles à partir de Γ ; $M_\Gamma = \bigcup_{g \in G_\Gamma} g(M_\Gamma)$ et si G_Γ est fini, M_Γ est compacte. Réciproquement, si $H_\Gamma = \{g \in G_\Gamma / g(M_\Gamma) = M_\Gamma\}$, H_Γ est fini, comme sous-groupe du groupe de symétrie du polygone géodésique Γ . Dès lors, si M_Γ est compacte, G_Γ est fini puisque

$$\text{Vol}(M_\Gamma) = [\text{ord}(G_\Gamma)/\text{ord}(H_\Gamma)] \cdot \text{Vol}(M_\Gamma).$$

Le théorème est ainsi établi (modulo les lemmes admis). De plus les dernières remarques, ainsi que la formule de Gauss-Bonnet, conduisent au calcul de la caractéristique d'Euler de la variété compacte M_Γ^* , dont on peut supposer que M_Γ est l'image par immersion dans S^3 . On a en effet

$$2\pi\chi(M_\Gamma^*) = \int_{M_\Gamma} K \cdot dH_2 = \frac{\text{Ord}(G_\Gamma)}{\text{Ord}(H_\Gamma)} \cdot \int_{M_\Gamma} K dH_2 = \frac{\text{Ord}(G_\Gamma)}{\text{Ord}(H_\Gamma)} \cdot \pi \cdot (2 - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{k_i+1})$$

où K est la courbure de Gauss sur M_Γ et dH_2 la mesure de Hausdorff dans S^3 .

PROPOSITION 6. $\chi(M_\Gamma^*) = \frac{\text{Ord}(G_\Gamma)}{\text{Ord}(H_\Gamma)} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{2(k_i+1)} \right)$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. HEINZ and S. HILDEBRANDT, Some remarks on minimal surfaces in Riemannian manifolds, Commun. Pure Appl. Math. 23 (1970), 371-377.
- [2] S. HILDEBRANDT, Boundary Behaviour of minimal surfaces, Arch. Rat. Mech. Anal. 35 (1969)p.47-82.
- [3] W. Y. HSIANG, Remarks on closed minimal submanifolds in the standard Riemannian m-sphere, J.Differential Geom.1 (1967) 257-267.
- [4] H.B. LAWSON, Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, Ann. Math 89 (1969)p.187-197.
- [5] H.B. LAWSON, Lectures on minimal submanifolds, chap.IV Publish or Perish n°9 1980.
- [6] C.B. MORREY, Multiple integrals in the calculus of variations, Springer Verlag New-York (1966).
- [7] G. SPRINGER, Introduction to Riemann Surfaces, Chap.9, Addison Wesley, New-York (1957).

C. MARGERIN
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques

91128 PALAISEAU Cedex
(France)