Astérisque

JEAN ÉCALLE

Classification analytique des champs hamiltoniens locaux. Invariants holomorphes et hamiltoniens étrangers

Astérisque, tome 150-151 (1987), p. 67-86

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__150-151__67_0>

CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES CHAMPS HAMILTONIENS LOCAUX. INVARIANTS HOLOMORPHES ET HAMILTONIENS ÉTRANGERS.

Jean ECALLE

§1. INTRODUCTION. CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES OBJETS LOCAUX. LES TROIS SORTES D'INVARIANTS ET LES TROIS SOURCES D'INVARIANCE.

Les objets locaux fondamentaux (*) sur $\mathbb{C}^\nu$ sont les champs de vecteurs locaux :

(1.1) $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $X_i(0)=0$ et $X_i(x) \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\}$ et les difféomorphismes (ou difféos) locaux :

(1.2) $f : x_i \to f_i(x)$ avec $i \leq i \leq \nu$; $f(0)=0$; $f_i(x) \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\}$

Le but est de classer ces objets locaux relativement aux changements de variables analytiques. On utilise pour cela des familles complètes et libres d'invariants scalaires.

Ces invariants peuvent être de trois sortes :

(i) Il y a les invariants formels, qui ne dépendent que d'un nombre fini de coefficients de l'objet. Ces invariants formels sont soit discrets (par ex. la dimension, le degré de résonance, etc...) soit algébriques (primaires ou secondaires ; Voir [1]).

(ii) Il y a ensuite les invariants holomorphes, qui dépendent holomorphiquement de l'objet, c'est-à-dire qui sont fonctions entières

---

(*) Les équations ou systèmes différentiels ou aux différences s'y remènent facilement.

de l'infinité de ses coefficients de Taylor.

(iii) Il y a enfin le reliquat, constitué par les invariants métaholomorphes, lesquels sont non constructibles.

Un objet local pris "au hasard" ne possède pas d'autres invariants analytiques que ses multiplicateurs, c'est-à-dire les valeurs propres λ_i (pour un champ) ou ℓ_i (pour un difféo) de sa partie linéaire. Pour qu'apparaissent d'autres invariants, il faut qu'opère l'une au moins des trois causes suivantes :

(i) résonance : Cela veut dire qu'il existe des relations de dépendance entières entre les multiplicateurs :

$$\left.\begin{array}{ll} (1.3) & n_1\lambda_1+\dots x_v\lambda_v = 0 \text{ pour un champ} \\ (1.4) & \ell_1^{n_1}\dots\ell_v^{n_v} = 1 \text{ pour un difféo} \end{array}\right\} (n_i \geqslant 0)$$

(ii) quasirésonance : Cela veut dire que les multiplicateurs sont liouvilliens dans leur ensemble ou, si l'on préfère, que leurs combinaisons entières $\Sigma n_i\lambda_i$ (resp.$\Pi\ \ell_i^{n_i}$) approchent 0 (resp. 1) anormalement vite. (Voir [1]).

(iii) nihilence : C'est un phénomène un peu plus délicat à définir. Le présentent, typiquement, les objets (champs ou difféos) qui laissent invariante une forme différentielle donnée. C'est notamment le cas des objets isochores ou hamiltoniens.

Comment agissent ces trois causes ?

(i) La résonance engendre des diviseurs nuls, augmente considérablement le nombre des invariants formels et donne toujours naissance à une infinité d'invariants holomorphes. Notons que la résonance est un phénomène très courant qui, pour les difféos, englobe en particulier la tangence à l'identité.

(ii) La nihilence n'a d'importance pratique que pour les objets hamiltoniens ou isochores. Elle peut engendrer des petits diviseurs et donner naissance à des invariants métaholomorphes.

(iii) La quasirésonance est un phénomène très exceptionnel en pratique. Elle engendre des tout-petits diviseurs (qu'on confond souvent avec les petits diviseurs, avec qui ils n'ont pourtant rien à voir) et donne naissance à des invariants métaholomorphes.

En résumé :

<u>source</u>		<u>obstruction</u>		<u>invariants</u>
résonance	$\Longrightarrow$	diviseurs nuls	$\Longrightarrow$	formels
quasirésonance	$\Longrightarrow$	tout-petits diviseurs		holomorphes
nihilence	$\Longrightarrow$	petits diviseurs	$\Longrightarrow$	métaholomorphes

Les invariants formels sont élémentaires et sans mystère. Les invariants métaholomorphes sont hautement exceptionnels et essentiellement non constructibles. Les invariants importants et interessants sont donc les invariants holomorphes. Il existe heureusement une méthode remarquablement simple et uniforme pour les calculer tous. Elle repose entièrement sur les fonctions résurgentes et le calcul étranger (Voir [1] et [2]).

§2. <u>CALCUL DES INVARIANTS HOLOMORPHES</u>. <u>INTÉGRALES FORMELLES ET ÉQUATION DU PONT</u>.

a) <u>Intégrales formelles</u>.

La méthode consiste à associer à l'objet considéré une ou plusieurs intégrales formelles $x(z,u)$ qui sont fonction du temps complexe z et de paramètres $u = (u_1,u_2,\ldots)$, puis à constater que cette intégrale formelle "contient" de la résurgence et enfin à analyser cette résurgence.

Pour un système d'équations différentielles ou aux différences, une intégrale formelle est tout simplement une solution du système qui contient le maximum de paramètres indépendants (constantes d'intégration). Pour un champ $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, c'est une solution "saturée" en paramètre (i.e. à $\nu-1$ paramètres u_i) du système dynamique :

$$(2.1)\quad \frac{\partial}{\partial z} x_i(z,u) = X_i(x_1(z,u),\ldots,x_\nu(z,u)) \qquad (1\leqslant i\leqslant \nu)$$

Pour un difféo local de $\mathbb{C}^\nu$, c'est une solution, également "saturée" en paramètres u_i, du système d'équations aux différences :

$$(2.2)\quad x_i(z+1,u) = f_i(x_1(z,u),\ldots,x_\nu(z,u)) \qquad (1\leqslant i\leqslant \nu)$$

On pose dans tous les cas :

$$(2.3)\quad x(z,u) = (x_1(z,u),\ldots,x_\nu(z,u))$$

et l'idée est de développer formellement en z, au voisinage de l'infini, de "toutes les manières possibles".

Les intégrales formelles sont toujours en nombre fini, à un reparamètrage élémentaire près. Elles s'écrivent :

$$(2.4)\quad x_i(z,u) = \sum_{n\in\mathcal{N}} u^n . z^{[n]} \;.\; \phi_i^n(z) \qquad (i=1,\ldots,\nu)$$

(i) avec une sommation étendue à une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbb{Z}^{\nu-1}$

(ii) avec des monômes $u^n = u_1^{n_1}\ldots u_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$

(iii) avec des blocs élémentaires $z^{[n]}$

(iv) avec des composantes $\phi_i^n(z)$ qui sont des fonctions résurgentes soit en z lui-même (c'est le cas le plus fréquent) soit en une variable z_p liée à z et dite temps parallèle (critique).

Sans anticiper sur les énoncés détaillés du § 5, précisons un peu la nature des composantes et des blocs élémentaires.

Les composantes $\phi_i^n(z)$ sont des fonctions résurgentes de z_p (par exemple de z). Elles se présentent, selon le cas, comme des séries infinies de puissances négatives de z_p (séries dites progrades)(*) ou de puissances mixtes, négatives ou positives (séries dites bigrades). Il existe dans chaque cas un algorithme simple pour calculer les coefficients des séries $\phi_i^n(z)$ en fonction des coefficients de Taylor de l'objet dont on part.

Les blocs $z^{[n]}$ sont des fonctions élémentaires de z, la plupart du temps monomiales (produit d'exponentielles, de puissances, de logarithmes simples ou itérés) fabriquées avec les seuls invariants formels discrets et primaires de l'objet. On sait soumettre ces blocs aux trois opérations suivantes :

(i) multiplication : $z^{[n]} \cdot z^{[n']} = z^{[n+n']}$.{série formelle}

(ii) dérivation : $\frac{\partial}{\partial z} z^{[n]} = z^{[n]}$. {série formelle}

(iii) translation : $(z+1)^{[n]} = z^{[n]}$.{série formelle}.

Puisque l'on sait multiplier, dériver et translater les blocs $z^{[n]}$ et bien sûr les composantes $\phi_i^n(z)$, on peut effectivement porter les $x_i(z,u)$ dans les systèmes (2.1) ou (2.2). Cela a donc un sens de dire que $x(z,u)$ est solution de ces systèmes.

On peut d'ailleurs considérer les blocs élémentaires $z^{[n]}$ comme de purs symboles, soumis aux seules règles (i) + (ii) + (iii), et dire

---

(*) c'est le cas en particulier quand $z_p = z$.

que l'on résout le système (2.1) ou (2.2) non pas directement dans l'algèbre des fonctions résurgentes (en z ou en z_p), ce qui serait impossible en général, mais dans une extension de cette algèbre, obtenue en lui adjoignant les symboles $z^{[n]}$. Dans ces extensions la résolution est toujours possible et ce d'un nombre fini de manières. A des reparamètrages élémentaires près, chacune des solutions est parfaitement déterminée, car fonctions résurgentes et blocs élémentaires "ne se mélangent pas".

b) Equation du pont.

Non seulement les intégrales formelles sont résurgentes en z ou en z_p (ou plutôt possèdent des composantes $\phi_i^n(z)$ qui le sont) mais, comme toutes les fonctions résurgentes issues de problèmes naturels, elles se trouvent vérifier des équations de résurgence remarquables. Il s'agit en l'occurence de l'équation du pont :

$$(2.5)\quad \dot{\Delta}_\omega\, x(z,u) = \mathbb{A}_\omega\, x(z,u) \qquad (\forall_\omega \in \Omega)$$

$\dot{\Delta}_\omega$ désigne ici la dérivation étrangère (pointée) par rapport à z ou z_p et $\mathbb{A}_\omega$ dénote un opérateur différentiel ordinaire en z et u, soumis à diverses contraintes à priori, dont les principales sont la commutation avec $\partial/\partial z$ (si l'objet analysé est un champ de vecteur X) ou la commutation avec la translation en z de pas 1 (si l'objet analysé est un difféo f). Soit respectivement :

$$(2.6)\quad \left[\mathbb{A}_\omega\, ,\ \frac{\partial}{\partial z}\right] = 0 \qquad (*)$$

$$(2.7)\quad \left[\mathbb{A}_\omega\, ,\ \exp\frac{\partial}{\partial z}\right] = 0 \qquad (*)$$

La condition (2.6) impose aux coefficients de $\mathbb{A}_\omega$ d'être constants en z.

(*) Même quand $x(z,u)$ est résurgente en z_p, l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$ commute avec $\frac{\partial}{\partial z}$ ou $\exp\frac{\partial}{\partial z}$ et non $\frac{\partial}{\partial z_p}$ ou $\exp\frac{\partial}{\partial z_p}$.

La condition (2.7) permet un facteur périodique en z de période 1. Quant à l'indice ω, il parcourt un ensemble discret Ω, dit réseau de résurgence et engendré par les multiplicateurs λ_i (de première génération ou d'une génération ultérieure) attachés à l'objet analysé.

L'équation (2.5) est dite équation du pont car elle exprime que l'application à x(z,u) d'une dérivation étrangère équivaut à l'application d'un opérateur différentiel ordinaire. En d'autres termes, elle jette un pont entre le calcul étranger et le calcul différentiel ordinaire.

Bien entendu, l'équation (2.5) est écrite sous une forme très compacte et condense une quantité énorme d'information. Elle implique en effet une équation de résurgence différente pour chacune des composantes $\phi_i^n(z)$ coefficients des monômes u^n et ces équations de résurgence, interprétées dans le modèle convolutif (variable ζ) décrivent complètement le comportement des fonctions $\phi_i^n(\zeta)$ sur leurs différents feuillets de Riemann.

c) Calcul des invariants holomorphes. Méthodes constructives et méthodes explicites.

Il se trouve que les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ sont des invariants de l'objet considéré ; que ce sont des invariants non seulement analytiques mais aussi holomorphes ; et que si on les rassemble tous, c'est-à-dire si on considère tous les $\mathbb{A}_\omega (\omega \in \Omega)$ relatifs aux N intégrales formelles et aux divers temps parallèles critiques z_p (toujours en nombre fini) on obtient un système complet d'invariants holomorphes de l'objet.

La définition des intégrales formelles et celle des dérivations étrangères étant entièrement constructives et l'équation du pont (2.5) déterminant complètement l'opérateur $\mathbb{A}_\omega$, il est clair qu'on tient là un procédé effectif de calcul des invariants holomorphes. Mais on peut faire mieux et établir des formules complètement et indiscutablement explicites fournissant les opérateurs $\mathbb{A}_\omega$ (cf §4).

§3. EXEMPLES DE CLASSIFICATION.

Premier exemple : champ à un degré de résonance.

Un tel champ ne possède (essentiellement) qu'une seule intégrale formelle et ses invariants holomorphes sont de la forme :

$$(3.1)\quad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \{A^o_\omega \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{v-1} A^i_\omega u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\} \qquad (\forall_\omega \in \Omega)$$

avec $A^o_\omega, \ldots, A^{v-1}_\omega \in \mathbb{C}$ et $u^{n(\omega)} = \prod u_i^{n_i}$ pour des entiers n_i fonction de ω.

Deuxième exemple : champ à plusieurs degrés de résonance.

Un champ à μ degrés de résonance possède N intégrales formelles $(1 \leq N < \infty)$ dont les paramètres u_i se scindent en deux familles : d'un côté $v-\mu$ paramètres de première génération (gen $u_i=1$), dont chacun est attaché à une "dimension" du réseau Ω, et de l'autre $\mu-1$ paramètres de seconde génération (gen $u_i=2$). Les invariants holomorphes A_ω associés à chaque intégrale formelle sont de la forme :

$$(3.2)\quad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \{A^o_\omega(u) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{\text{gen } u_i=1} A^i_\omega(u) u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\text{gen } u_i=2} A^i_\omega(u) \frac{\partial}{\partial u_i}\}$$

avec un facteur monomial.

$(3.3)\quad u^{n(\omega)} = \prod u_i^{n_i}$ (gen $u_i=1$; n_i fonction de ω) qui ne comporte que les paramètres de première génération, et avec des coefficients $A^i_\omega(u)$ qui ne sont plus des constantes mais des séries formelles en les paramètres de seconde génération :

$$(3.4)\quad A^o_\omega(u),\ A^1_\omega(u), \ldots, A^{v-1}_\omega(u) \in \mathbb{C}\,[[u_i\ ;\ \text{gen } u_i = 2]]\ .$$

Troisième exemple : difféos tangents à l'identité.

Il s'agit des difféos locaux de $\mathbb{C}^\nu$ laissant l'origine fixe et de la forme :

$$(3.5)\quad f : x_i \to f_i(x) = x_i + \sigma(x) \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

De tels difféos admettent N intégrales formelles ($1 \leq N < \infty$) dont les $\nu-1$ paramètres u_i sont tous de seconde génération. Le réseau de résurgence Ω est engendré par le seul multiplicateur imaginaire $\lambda_o = 2\pi i$ et les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ attachés à chaque intégrale formelle s'écrivent :

$$(3.6)\quad \mathbb{A}_\omega = e^{-\omega z}\,\{A^o(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_\omega(u)\,\frac{\partial}{\partial u_i}\,\}$$

avec $A^o_\omega(u)$, $A^1_\omega(u),\dots,A^{\nu-1}_\omega(u) \in \mathbb{C}\,[[u_1,\dots,u_{\nu-1}]]$.

Quatrième exemple : Difféos à multiplicateurs résonnants.

Les résultats sont les mêmes que pour les champs résonnants (exemples 1 et 2) avec cette seule différence que le réseau de résurgence Ω est automatiquement enrichi du multiplicateur imaginaire $\lambda_o = 2\pi i$ et que les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ comportent un facteur élémentaire fonction de z.

Autres exemples : Objets à plusieurs niveaux et à plusieurs générations.

Pour certains objets d'une particulière complexité - objets dégénérés (à plusieurs "niveaux") ou objets à directeurs résonnants (à plusieurs "générations")- il faut envisager des intégrales formelles résurgentes non pas en z mais en divers temps parallèles z_p liés à z (voir §2). Toutefois, et nous insistons sur ce point, l'équation du pont reste toujours valide et continue de livrer, constructivement, tous les invariants holomorphes de tous les objets envisageables.

§.4. FORMULES EXPLICITES POUR LES A_ω .

L'équation du pont fournit un procédé de calcul direct des invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ mais elle conduit aussi à des formules explicites pour ces mêmes $\mathbb{A}_\omega$. Bornons-nous aux champs de vecteurs résonnants. La méthode consiste à décomposer de tels champs X selon :

$$(4.1) \quad X = {}^\circ X + \mathbb{D}$$

comme somme d'une partie principale °X élémentaire (polynomiale) qui porte tous les invariants formels,discrets ou algèbriques primaires (voir §1 et [1] §1.1) de X, et d'une partie secondaire $\mathbb{D}$ faisant figure de perturbation. On calcule ensuite l'intégrale formelle °x(z,u) relative à °X. On peut choisir °X pour que °x aussi soit élémentaire et, en particulier, convergente en z à l'infini. On effectue alors dans (4.1) le changement de variables :

$$(4.2) \quad x_i = {}^\circ x_i(z,u_1,\dots,u_{v-1}) \qquad ({}^\circ X \to \partial/\partial z)$$

et on associe à la perturbation $\mathbb{D}$ une coperturbation $\mathbb{B}$ au moyen de la correspondance suivante, involution vectorielle :

$$(4.3) \quad \mathbb{B} = -(1+\mathbb{D}.z)^{-1}\mathbb{D} \ ; \ \mathbb{D} = -(1+\mathbb{B}.z)^{-1}.\mathbb{B}$$

Puis on sépare dans $\mathbb{B}$ les variables z et u_i en posant :

$$(4.4) \quad \mathbb{B} = \sum_{i\in J} b_i \mathbb{B}_i \qquad (b_i = b_{i(z)} \ ; \ \left[\frac{\partial}{\partial z},\mathbb{B}_i\right] = 0)$$

avec une somme étendue à un réservoir d'indices J approprié, avec des opérateurs $\mathbb{B}_i$ à coefficients constants en z et avec des facteurs b_i fonctions de z seul et comportant un facteur exponentiel de fréquence $\omega(i)$. Autrement dit :

(4.5) $b_{i(z)} = e^{\omega(i)z}\ \beta_i(z)$ avec $\omega(i) \in \mathbb{C}$ et $B_{i(z)}$ subexponentiel en z à l'infini.

Les formules cherchées s'écrivent alors, pour tout $\omega \in \Omega$:

(4.6) $$\mathbb{A}_\omega = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\omega(i_1)+\ldots\omega(i_r)=\dot{\omega}} \langle b_{i_r},\ldots,b_{i_2},b_{i_1}\rangle_\omega [[\mathbb{B}_{i_r} \ldots [\mathbb{B}_{i_2},\mathbb{B}_{i_1}]]$$

avec convergence du second membre garantie par la théorie. Ici ω est la projection naturelle de $\dot{\omega}$ sur $\mathbb{C}$ et les $\langle\ldots\rangle_\omega$ dénotent des scalaires élémentairement calculables à partir des b_i selon un procédé indiqué dans [1] §1.4.g.

§5. CHAMPS HAMILTONIENS A RÉSONANCE EXTRINSÈQUE. POTENTIELS DE RÉSURGENCE ET HAMILTONIENS ÉTRANGERS.

Abordons l'objet proprement dit de cet article et considérons des champs locaux X qui sont hamiltoniens, c'est-à-dire qui laissent invariante la forme hamiltonienne θ^H :

(5.1) $$L_X.\theta^H = 0 \text{ avec } \theta^H = \sum_{i=1}^{v/2} dx_i \wedge dx_{i+v/2}$$

et qui, par suite, dérivent d'un potentiel $\mathcal{H}$:

(5.2) $$\mathcal{H}(x) \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_v\}$$

L'hamiltonicité induit sur les multiplicateurs λ_i du champ X exactement v/2 relations de résonance intrinsèque :

(5.3) $$\lambda_i + \lambda_{i+v/2} = 0$$

qui peuvent (quand $\underset{i}{+}\,\lambda_i\mathbb{Z}$ n'est pas discret) engendrer des petits diviseurs et des invariants métaholomorphes, essentiellement non constructibles. Les invariants holomorphes n'apparaissent qu'en présence de relations de résonance :

(5.4) $$n_1\lambda_1 + \ldots n_v\lambda_v = 0 \qquad (n_i \in \mathbb{Z})$$

extrinsèques, c'est-à-dire non déduisibles des relations (5.3).

Un champ hamiltonien X présentant μ_{ext} degrés de résonance extrinsèque possède une (si $\mu_{ext}=1$) ou plusieurs (si $\mu_{ext}\geqslant 2$) intégrales formelles, qui sont résurgentes en z, vérifi nt l'équation du pont, et livrent chacune son cortège d'invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$. On montre en outre que ces invariants conservent θ^H :

(5.5) $L_{\mathbb{A}_\omega} \cdot \theta^H = 0$

Cela a un sens car, grâce au changement de variables

(5.6) $x_i = x_i(z,u_1,\ldots,u_{\nu-1})$

la forme symplectique θ^H peut s'exprimer en fonction des variables z et u_i. Les $\mathbb{A}_\omega$ sont donc eux-mêmes hamiltoniens et dérivent de potentiels $\mathcal{A}_\omega$:

(5.7) $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega(u_1,\ldots,u_\nu) \in \mathbb{C}[[u_1,\ldots,u_\nu]]$ qui se trouvent en fait être indépendants de z.

Bien que $\mathcal{H}$ détermine X, que X détermine les intégrales formelles x(z,u), que celles-ci déterminent les $\mathbb{A}_\omega$ et qu'à leur tour les $\mathbb{A}_\omega$ déterminent leurs potentiels $\mathcal{A}_\omega$, le problème se pose de calculer et, si possible, d'exprimer les "hamiltoniens étrangers" $\mathcal{A}_\omega$ directement à partir de l'hamiltonien $\mathcal{H}$. La chose s'avère possible et conduit à des développements très intéressants, que nous résumons en quelques propositions :

<u>Proposition 1</u> : (<u>Calcul explicite des potentiels de résurgence $\mathcal{A}_\omega$. L'involution hamiltonienne</u>).

Soit X un champ hamiltonien dérivant d'un potentiel $\mathcal{H}$ et présentant un ou plusieurs degrés de résonance extrinsèque (*). Autrement dit $\mu_{ext} \geqslant 1$. Les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ de X dérivent de potentiels $\mathcal{A}_\omega$ lesquels peuvent se calculer directement à partir de $\mathcal{H}$ par le

(*) Pour un exemple, voir la première note au bas de la page suivante.

procédé suivant :

a) On écrit X et son potentiel $\mathcal{H}$ comme sommes d'une partie principale (**) polynomiale et d'une perturbation finie (***)

(5.8) $X = {}^{\circ}X + \mathbb{D}$

(5.8 bis) $\mathcal{H} = {}^{\circ}\mathcal{H} + \mathcal{D}$

b) Pour chaque graduation $\mathcal{H}$ et chaque rayon propre γ on calcule l'intégrale formelle $^{\circ}x(z,u)$ de $^{\circ}X$ en résolvant le système dynamique :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\ {}^{\circ}x_i &= X_i({}^{\circ}x) = -\frac{\partial}{\partial x_{i+v/2}}\mathcal{H}({}^{\circ}x) \\ \frac{\partial}{\partial z}\ {}^{\circ}x_{i+v/2} &= X_{i+v/2}({}^{\circ}x) = +\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{H}({}^{\circ}x) \end{aligned}\right\| \quad (1 \leqslant i \leqslant v/2)$$

c) On soumet la perturbation $\mathcal{D} = \mathcal{D}\ (x_1, \ldots, x_v)$ au changement de variable :

(5.9) $x_i = {}^{\circ}x_i(z, u_1, \ldots, u_{v-1}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant v)$

On obtient ainsi une perturbation $\mathcal{D} = \mathcal{D}\ (z,u)$ qui est une série entière en $u_1, \ldots, u_{v-i}$.

(*) Pour fixer les idées, on pourra garder présent à l'esprit le cas d'un champ X à un seul degré de résonance extrinsèque, de la forme $\lambda_{v/2} = \lambda_v = 0$,et dérivant d'un potentiel $\mathcal{H}$ du type $\mathcal{H} = {}^{\circ}\mathcal{H} + \mathcal{D}$ avec :

$${}^{\circ}\mathcal{H}(x) = -\sum_{i<v/2} x_i x_{i+v/2}(\lambda_i + \sigma_i x_{v/2} + \tau_i x_v) - x_{v/2} x_v^2 \quad (\lambda_i, \sigma_i, \tau_i \in \mathbb{C})$$

(**) Pour le sens de cette expression voir §4 et [1] §8.4.

(**) "finie" signifie ici "non infinitésimale". Il est clair que les perturbations peuvent être,et sont en général, données par des séries infinies.

d) On inverse le changement de variable (5.9) et on calcule les crochets de Poisson :

$$(5.10) \qquad \{u_i,u_j\}_p = \sum_{q=1}^{v/2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_q}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_{q+v/2}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_{q+v/2}}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_q}\right)$$

en fonction des variables $u_1,u_2,\ldots,u_{v-1},u_v = z$. Ces crochets de Poisson sont tous indépendants de z (*).

e) A la perturbation $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z,u)$ on fait correspondre la coperturbation $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z,u)$ par l'involution suivante, dite involution hamiltonienne :

$$(5.11) \qquad \mathcal{B} = -\mathcal{D} - \frac{1}{2!}\{z,\mathcal{D}\}_p - \frac{1}{3!}\{z\{z,\mathcal{D}\}_p\}_p - \frac{1}{4!}\{z\{z\{z,\mathcal{D}\}_p\}_p\}_p \ldots$$

$$(5.12) \qquad \mathcal{D} = -\mathcal{B} - \frac{1}{2!}\{z,\mathcal{B}\}_p - \frac{1}{3!}\{z\{z,\mathcal{B}\}_p\}_p - \frac{1}{4}\{z\{z\{z,\mathcal{B}\}_p\}_p\}_p \ldots$$

Ici, les crochets de Poisson $\{\ ,\ \}_p$ portent sur des fonctions des variables u_i et $z = u_v$ et ils sont calculables par la formule :

$$(5.13) \qquad \{\varphi,\ \}_p = \sum_{i=1}^{v} \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\varphi\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\psi\right) \quad \{u_i,u_j\}_p$$

Quand φ et ψ sont indépendants de z, $\{\varphi,\psi\}_p$ l'est aussi.

f) On sépare dans la coperturbation $\mathcal{B}$ la variable z des variables $u_1,\ldots,u_{v-1}$ en écrivant :

$$(5.14) \qquad \mathcal{B}(z,u) = \sum_{i\in S} b_i(z)\ \mathcal{B}_i(u).$$

Ici l'indice i parcourt un ensemble dénombrable S, les facteurs $\mathcal{B}_i(u)$, sont des séries formelles en $u_1,\ldots,u_{v-1}$ et les facteurs $b_i(z)$ sont de la forme :

$$(5.15) \qquad b_i(z) = e^{\omega(i)z}\ \beta_i(z) \qquad\qquad (\omega(i)\in\Omega\ )$$

(*) Même les $\{z,u_i\}_p$ le sont.

avec une fréquence $\omega(i)$ appartenant au réseau de résurgence Ω de X et avec des facteurs $\beta_i(z)$ qui sont subexponentiels en z à l'infini (*).

g) A partir des fonctions $b_i(z)$ on construit les nombres :

(5.16) $\langle b_{i_r}, b_{i_{r-1}}, \dots, b_{i_2}, b_{i_1} \rangle_\omega$

définis comme en [1] §1.4.g.

h) Pour chaque $\omega \in \Omega$ on forme la série :

(5.17) $\mathcal{A}_\omega = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\omega(i_1)+\dots\omega(i_r)=0} \langle b_{i_r}, \dots, b_{i_2}, b_{i_1} \rangle \{\beta_{i_n} \dots \{\beta_{i_2}, \beta_{i_1}\}_p\}_p$

Celle-ci est convergente et admet une somme $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{A}_\omega(u_1, \dots, u_v)$ indépendante de z.

i) Les invariants holomorphes $\mathbb{A}_\omega$ du champ hamiltonien X dérivent des potentiels $\mathcal{A}_\omega$. Autrement dit, pour toute fonction d'épreuve $\varphi = \varphi(z, u_1, \dots, u_{v-1})$ on a :

(5.18) $\mathbb{A}_\omega . \varphi = \{A_\omega, \varphi\}_p$

et en particulier l'équation du pont peut s'écrire :

(5.19) $\dot{\Delta}_\omega\, x_i(z,u) = \mathbb{A}_\omega\, x_i(z,u) = \{A_\omega(u), x_i(z,u)\}_p \quad (1 \leqslant i \leqslant v)$

où $x(z,u) = (x_1(z,u), \dots, x_v(z,u))$ désigne comme d'habitude une intégrale formelle du champ X.

(*) D'une façon précise, les facteurs $\beta_i(z)$ sont résurgents en z et ont toutes leurs dérivées étrangères nulles. En fait, on peut toujours s'arranger pour avoir des $\beta_i(z)$ "monomiaux". Par exemple, dans les problèmes de niveau p on peut toujours s'arranger pour avoir :

$\beta_i(z) = z^{\tau_i} \exp\left(\sum_{q=1}^{p-1} \omega_q(i) z^{q/p}\right)$

j) Les séries $\mathcal{A}_\omega(u) \in \mathbb{C}[[u_1,\ldots,u_{\nu-1}]]$ sont dites potentiels de résurgence ou hamiltoniens étrangers. La réunion des N familles $\{\mathcal{A}_\omega ; \omega \in \Omega\}$ relatives aux N intégrales formelles de X constitue un système complet d'invariants holomorphes du champ hamiltonien X.

Les trois propositions qui suivent permettront de préciser le sens et la portée de la proposition ci-dessus :

Proposition 2 : (Le cotemps et l'interprétation de l'involution hamiltonienne).

Soit un champ hamiltonien $X = {}^\circ X + \mathbb{D}$ dérivant d'un potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$. On peut toujours choisir un paramètrage $(z,u_1,\ldots,u_{\nu-1})$ de l'intégrale formelle ${}^\circ x(z,u)$ de ${}^\circ X$ tel que l'on ait pour toute fonction d'épreuve $\varphi = \varphi(z,u)$:

$$(5.20)\quad \{z,\varphi\}_p = -\frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}} \varphi \quad , \quad \{u_{\nu/2},\varphi\}_p = +\frac{\partial}{\partial z}\varphi$$

Un tel paramètrage est dit précanonique. On appelle cotemps le paramètre $u_{\nu/2}$. Il est conjugué au temps z et on a évidemment :

$$(5.21)\quad \{u_{\nu/2},z\}_p \equiv 1 \quad ; \quad {}^\circ\mathcal{H} \equiv u_{\nu/2}.$$

Quant à l'involution hamiltonienne $\mathcal{D} \longleftrightarrow \mathcal{B}$ elle s'écrit :

$$(5.22)\quad \mathcal{B} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}}\right)^{n-1} \mathcal{D}^n \qquad (*)$$

$$(5.23)\quad \mathcal{D} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial u_{\nu/2}}\right)^{n-1} \mathcal{B}^n \qquad (*)$$

et les applications formelles :

(*) $\mathcal{D}^n$ et $\mathcal{B}^n$ désignent les puissances (au sens ordinaire) des fonctions scalaires $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z,u)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z,u)$.

(5.24) $u_{v/2} \to u_{v/2} + \mathcal{D}(z,u)$

(5.25) $u_{v/2} \to u_{v/2} + \mathcal{B}(z,u)$

sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, si l'on pose :

(5.26) $\mathcal{H}(z,u) = u_{v/2} + \mathcal{D}(z,u)$ (**)

(5.27) $\check{\mathcal{H}}(z,u) = u_{v/2} + \mathcal{B}(z,u)$

et si l'on fixe z et tous les $\dot{u}_i$ (pour $i \neq v/2$) de manière à considérer $\check{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{H}$ comme fonctions du seul cotemps $u_{v/2}$:

(5.28) $\mathcal{H} = \mathcal{H}(u_{v/2})$, $\check{\mathcal{H}} = \check{\mathcal{H}}(u_{v/2})$

on a identiquement :

(5.29) $\check{\mathcal{H}}(\mathcal{H}(u_{v/2})) \equiv \mathcal{H}(\check{\mathcal{H}}(u_{v/2})) \equiv u_{v/2}$

Ainsi, chose étonnante, l'involution hamiltonienne s'interprête comme une inversion par rapport au cotemps. Mais attention : nous verrons en fin de section que l'involution hamiltonienne $\mathcal{D} \longleftrightarrow \mathcal{B}$ ne dérive pas de l'involution vectorielle $\mathbb{D} \longleftrightarrow \mathbb{B}$ qui intervient dans la classification analytique des champs X ordinaires.

Proposition 3. (Paramètrage canonique et calcul des invariants $\mathbb{A}_\omega$).

Soit un champ hamiltonien $X = {}^\circ X + \mathbb{D}$ dérivant d'un potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$ et présentant μ_{ext} degrés de résonance extrinséque. Posons :

(5.30) $K = v/2 - \mu_{ext}$ $(1 \leqslant K < v/2)$

On peut toujours trouver pour l'intégrale formelle ${}^\circ x(z,u)$ de ${}^\circ X$ un paramètrage $(z,u_1,\ldots,u_{v-1})$ qui soit entier en $u_1,\ldots,u_{v-1}$ et tel que les seuls crochets de Poisson non nuls soient les suivants :

(**) On peut écrire ceci car $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$ et ${}^\circ\mathcal{H} = u_{v/2}$.

$$(5.31)\quad \begin{cases} \{u_i, u_{i+v/2}\}_p = u_i & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant K \\ \{u_i, u_{i+v/2}\}_p = 1 & \text{pour } K < i < v/2 \\ \{u_{v/2}, z\}_p = 1 & \end{cases}$$

Un tel paramètrage(*) est dit canonique (**). Relativement à un paramètrage canonique, les potentiels de résurgence $\mathcal{A}_\omega$ s'écrivent :

$$(5.32)\quad \mathcal{A}_\omega(u) = u^{n(\omega)}\, \mathcal{Q}_\omega(u)$$

avec un facteur monomial $u^{n(\omega)}$ qui ne contient que les paramètres de première génération :

$$(5.33)\quad u^{n(\omega)} = u_1^{n_1(\omega)} \dots u_K^{n_K(\omega)} \quad \text{avec } \omega = \sum_{i=1}^{K} n_i(\omega)\, \lambda_i^* \quad (***)$$

et avec une série entière $\mathcal{Q}_\omega(u)$ qui ne contient que des paramètres de seconde génération :

$$(5.34)\quad \mathcal{Q}_\omega(u) \in \mathbb{C}\, [[u_{K+1}, u_{K+2}, \dots, u_{v-2}, u_{v-1}]]$$

Quand à l'opérateur invariant $\mathbb{A}_\omega$ il s'écrit comme d'habitude :

$$(5.35)\quad \mathbb{A}_\omega = u^{n(\omega)} \{A^\circ_\omega(u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{K} A^i_\omega(u)\, u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=K+1}^{v-1} A^i_\omega(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\}$$

avec le même monôme $u^{n(\omega)}$ qu'en (8.4.70) et avec des composantes $A^i_\omega(u)$ qui valent :

(*) Lorsque $\mu_{ext}=1$, il est essentiellement unique.

(**) Il est évidemment aussi précanonique au sens de la proposition précédente, si bien qu'ici encore $u_{v/2}$ est le cotemps.

(***) Ici $\{\lambda_1^*, \dots, \lambda_K^*\}$ désigne une base bien choisie de Ω.

$$(5.36)\quad A_\omega^{i} = -\frac{\partial}{\partial u_{i+v/2}}\,\mathcal{A}_\omega \;;\; A_\omega^{i+v/2} = n_i(\omega)\,\mathcal{A}_\omega \qquad (\text{si } 1\leqslant i\leqslant K)$$

$$(5.36\text{ bis})\quad A_\omega^{i} = -\frac{\partial}{\partial u_{i+v/2}}\,\mathcal{A}_\omega \;;\; A_\omega^{i+v/2} = \frac{\partial}{\partial u_i}\,\mathcal{A}_\omega \quad (\text{si } K<i<v/2)$$

$$(5.36\text{ ter})\quad A_\omega^{v/2} = 0 \qquad ;\; A_\omega^{\circ} = \frac{\partial}{\partial u_{v/2}}\,\mathcal{A}_\omega .$$

<u>Proposition 4</u>. (<u>Les potentiels de résurgence en fonction des moules V_σ^ω</u>).

Lorsque, comme c'est souvent le cas, les fonctions auxiliaires $b_i(z)$ sont de la forme $e^{\omega(i)z}\;z^{\sigma(i)}$, autrement dit lorsque :

$$(5.37)\quad \mathcal{B}(z,u) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ \sigma\in\mathbb{C}}} e^{\omega z} z^{\sigma}\,\mathcal{B}_\omega^{\sigma}(u) \qquad (*)$$

les scalaires $\langle b_{i_n},\dots,b_{i_1}\rangle_\omega$ de (5.17) s'expriment à partir du moule V_σ^ω introduit en [1] § 1.4.g et l'identité (5.17) s'écrit :

$$(5.38)\quad \mathcal{A}_\omega = +\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{\substack{\omega_1+\dots\omega_r=\omega\\ \sigma_1,\dots,\sigma_1\in\mathbb{C}}} V_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}^{\omega_1,\dots,\omega_r}\,\{\mathcal{B}_{\omega_1}^{\sigma_1}\dots\{\mathcal{B}_{\omega_{r-1}}^{\sigma_{r-1}},\mathcal{B}_{\omega_r}^{\sigma_r}\}_p\}_p \quad (**)$$

Pour les démonstrations des propositions 1,2,3,4 et pour des exemples, voir [1] §8.4.

<u>Remarque</u> : (<u>Involution vectorielle et involution hamiltonienne</u>).

On prendra bien garde que dans le cas d'un champ hamiltonien $X = {}^\circ X + \mathbb{D}$ de potentiel $\mathcal{H} = {}^\circ\mathcal{H} + \mathcal{D}$, l'involution vectorielle

---

(*) Lorsque la coperturbation $\mathcal{B}$ est de cette forme, la perturbation $\mathcal{D}$ peut elle aussi s'écrire :

$$\mathcal{D}(z,u) = \sum e^{\omega z}\; z^{\sigma}\;\mathcal{D}_\omega^{\sigma}(u)$$

(**) Bien noter que l'ordre des indices est différent dans (5.17) et (5.38).

(5.40) $\mathbb{D} \to \mathbb{B} = -(1+\mathbb{D}.z)^{-1}\mathbb{D}$

ne dérive pas directement de l'involution hamiltonienne :

(5.41) $\mathcal{D} \to \mathcal{B} = -\mathcal{D} - \frac{1}{2!}\{z,\mathcal{D}^2\}_p - \frac{1}{3!}\{z\{z,\mathcal{D}^3\}_p\}_p \quad \ldots$

En effet, bien que $\mathbb{D}$ par définition dérive de $\mathcal{D}$, $\mathbb{B}$ ne dérive pas de $\mathcal{B}$ ni d'ailleurs d'aucun potentiel, car en général $\mathbb{B}$ n'annule pas la forme hamiltonienne.

Quand à l'interprétation (5.29) de l'involution hamiltonienne $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{B}$ en termes d'inversion (au sens de la substitution) relativement au cotemps $u_{v/2}$ (voir proposition 2), elle ne laisse de surprendre. D'ordinaire, en effet, on additionne les hamiltoniens, on prend leurs crochets de Poisson, etc..., mais on n'a jamais à les composer (au sens de la substitution) ni à les inverser par rapport à aucune de leurs variables ou paramètres. Ici, toutefois, cela devient nécessaire. C'est étrange mais c'est ainsi.

§6. RÉFÉRENCES.

[1] J. Ecalle, "L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux" (600 pages), Publ. Math. d'Orsay, 1985.

[2] J. Ecalle, "Les algèbres de fonctions résurgentes" (250 pages), Publ. Math. d'Orsay, 1981.

J.Ecalle
Université Paris Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques, Bât. 425
91405 Orsay Cedex