HENRI CARAYOL

Formes modulaires et représentations ℓ-adiques

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 33-47
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__33_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 147-148 (1987), p.33-47.

FORMES MODULAIRES
ET REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES

Henri CARAYOL

Au cours des journées arithmétiques de Metz, en 1981, Guy Henniart avait donné un exposé sur les conjectures de Langlands locales (dans le cas du groupe GL(n)). Je veux ici parler du cas global ; or notre compréhension de la théorie globale, bien que plus ancienne, demeure considérablement plus floue et fragmentaire. Aussi, contrairement à l'exposé précité, on ne tente pas ici d'énoncer des conjectures générales - quitte à renvoyer éventuellement, pour une approche plus céleste de la relation entre "motifs" et représentations automorphes, au court texte ([D5]) de Deligne, puis au difficile exposé de Langlands ([L2]) à la conférence de Corvallis. Plus modestement, nous avons ici concentré notre attention à des problèmes liés au cas du groupe GL(2) et de ses formes (c'est d'ailleurs essentiellement encore le seul cas pour lequel on dispose de résultats bien tangibles). Nous commençons donc par rappeler succinctement ce qu'énonce dans ce cas la conjecture locale (en fait, un théorème) ; puis nous abordons la théorie globale, pour commencer sous sa version classique, la théorie d'Eichler-Shimura-Deligne, laquelle associe à une forme modulaire un système de représentations ℓ-adiques du groupe de Galois Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ensuite nous traduisons cette théorie en langage adélique (les formes modulaires deviennent représentations automorphes, et les courbes modulaires courbes de Shimura) et nous la généralisons quelque peu (le corps $\mathbb{Q}$ est remplacé par un corps totalement réel F). A ce stade, la relation entre théorie locale et théorie globale devient claire, et une question se pose naturellement aux "mauvaises" places ; nous expliquons comment cette dernière est résolue.

1. Théorie locale (cf. [C], [H]).

1.1) Soit F un corps local non archimédien. Notons $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles du groupe $GL_2(F)$, et $\mathcal{G}_2$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations F-semi-simples de degré 2 du groupe de Weil-Deligne W'_F. Afin de ne pas s'encombrer de la définition de ce dernier, on peut se borner à rappeler (cf. [D3]) que les représentations de W'_F s'interprètent, pour tout premier ℓ différent de la caractéristique résiduelle de F, comme représentations continues ℓ-adiques du groupe de Weil W_F. Pour $\pi \in \mathcal{A}_2$ et χ un quasi-caractère du groupe F^*, on note usuellement $\chi.\pi$ le produit tensoriel $(\chi.\det)\otimes\pi$. Via l'isomorphisme de la théorie du corps de classes (normalisé de façon "géométrique" : les Frobenius arithmétiques correspondent aux inverses d'uniformisantes), χ définit un quasi-caractère, noté encore χ, du groupe W_F. Pour $\sigma \in \mathcal{G}_2$, on note alors $\chi.\sigma$ le produit tensoriel $\chi\otimes\sigma$. Rappelons enfin que la théorie de Godement-Jacquet-Langlands (resp. de Deligne-Langlands) associe à tout élément de $\mathcal{A}_2$ (resp. de $\mathcal{G}_2$) des facteurs locaux L et ϵ.

On doit à Kutzko le :

THÉORÈME 1. Il existe une bijection de $\mathcal{G}_2$ dans $\mathcal{A}_2$:

$$\sigma \to \pi_L(\sigma),$$

caractérisée par les égalités, pour chaque quasi-caractère χ de F^* :

$$L\left(\chi.\pi_L(\sigma), s\right) = L(\chi.\sigma, s)$$

$$\epsilon\left(\chi.\pi_L(\sigma), s\right) = \epsilon(\chi.\sigma, s).$$

1.2) Le résultat qui précède peut s'éclairer d'un jour plus concret au moyen d'un "dictionnaire", mais nous devons au préalable classifier partiellement les ensembles $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{G}_2$.

1.2.1) Les représentations $\pi \in \mathcal{A}_2$ sont de 4 types possibles :

a) Les caractères, factorisables à travers le déterminant.

b) La série principale irréductible : Pour μ_1 et μ_2 deux quasi-caractères de F^* tels que $\mu_1\mu_2^{-1}$ ne soit pas égal à la valeur absolue normalisée ni à son inverse, l'induite (unitaire) $I\left(\mu_1, \mu_2\right)$ est irréductible. Dans le cas particulier où μ_1 et μ_2 sont non ramifiés, on parle de série principale non ramifiée (ou sphérique).

c) Les représentations <u>spéciales</u> : Pour $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\;|$ ou $|\;|^{-1}$, alors $I(\mu_1, \mu_2)$ est réductible. On en note $Sp(\mu_1, \mu_2)$ l'unique constituant de dimension infinie.

d) Toute représentation qui ne tombe pas dans l'un des types précédents est dite <u>cuspidale</u>. Une construction due à Weil ("représentation de Weil"), pour laquelle on renvoie à ([C]), permet d'en construire une, notée $W(E, \lambda)$, associée à un couple (E, λ) formé d'une extension quadratique E de F et d'un quasi-caractère λ de E^* non factorisable via la norme $N_{E/F}$. En caractéristique résiduelle différente de 2, toute $\pi \in \mathcal{G}_2$ est de la forme $W(E, \lambda)$ ("cuspidale ordinaire") ; il en existe d'autres ("extraordinaires") si F est de caractéristique résiduelle 2.

1.2.2) De même, toute $\sigma \in \mathcal{G}_2$ est de l'un des 3 types suivants :

a) Représentations <u>décomposées</u>, de la forme $\mu_1 \oplus \mu_2$.

b) Représentations <u>spéciales</u> $Sp(\mu_1, \mu_2)$ (avec $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\;|$ ou $|\;|^{-1}$), de semi-simplifiée $\mu_1 \otimes \mu_2$.

c) Représentations <u>irréductibles</u>. On en obtient à partir d'un couple (E, λ) comme plus haut de la façon suivante : Via l'isomorphisme de la théorie du corps de classes, λ définit un quasi-caractère de W_E, dont on considère l'induite $I(E, \lambda)$ à W_F. Toutes les irréductibles sont ainsi obtenues ("imprimitives") si la caractéristique résiduelle de F n'est pas égale à 2, autrement il en existe d'autres ("primitives").

1.3) <u>Dictionnaire</u>

$\sigma \in \mathcal{G}_2$	$\pi_L(\sigma) \in \mathcal{G}_2$
décomposée $\mu_1 \oplus \mu_2$ avec $\mu_1 \mu_2^{-1} \neq |\;|, |\;|^{-1}$	principale $I(\mu_1, \mu_2)$
décomposée $\mu_1 \oplus \mu_2$ avec $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\;|^{-1}$	caractère $g \to \mu_2(\det g)\, |\det g|^{-1/2}$
spéciale $Sp(\mu_1, \mu_2)$ $(\mu_1 \mu_2^{-1} = |\;|$ ou $|\;|^{-1})$	spéciale $Sp(\mu_1, \mu_2)$
irréductible $<$ imprimitive $I(E, \lambda)$ / primitive	cuspidale $<$ ordinaire $W(E, \lambda)$ / extraordinaire

1.4) Dans la suite de cet exposé nous considérerons, plutôt que la correspondance ("de Langlands") définie ci-dessus, celle ("de Hecke") qu'on en déduit après passage à la contragrédiente et torsion par le quasi-caractère $|\ |^{-1/2}$:

$$\pi_H(\sigma) = |\ |^{-1/2} \cdot \pi_L\left(\sigma^\vee\right).$$

2. Théorie globale : Version classique.

2.1) Soit ψ un caractère de Dirichlet modulo N, et soit $f \in S_k(N, \psi)$ une forme modulaire parabolique de poids $k \geq 2$ pour le groupe $\Gamma_o(N)$. On note a_n $(n \geq 1)$ les coefficients de son développement de Fourier, et l'on suppose f nouvelle, valeur propre des opérateurs de Hecke, et normalisée (i.e. $a_1 = 1$). Les a_n engendrent un corps de degré fini sur $\mathbb{Q}$, dont on suppose choisi un plongement dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

THÉORÈME 2 (cf. [D1]). Il existe une (unique) représentation continue ℓ-adique :

$$\rho_\ell : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right),$$

qui est non ramifiée en dehors de N et ℓ, et qui vérifie, pour tout p premier ne divisant pas $N\ell$ et pour Φ_p un élément de Frobenius en p, les relations :

$$\mathrm{tr}\left(\rho_\ell\left(\Phi_p\right)\right) = a_p, \quad \det\left(\rho_\ell\left(\Phi_p\right)\right) = p^{k-1}\,\psi(p).$$

2.2) Rappelons succinctement comment construire ρ_ℓ dans le cas le plus simple où $k = 2$ et $\psi = 1$. Partant de la courbe modulaire $X_o(N)$, laquelle est définie sur $\mathbb{Q}$ et munie des correspondances de Hecke T_p $(p \nmid N)$, on considère l'espace de cohomologie ℓ-adique :

$$\mathcal{V}_N = H^1\left(X_o(N) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

ou, si l'on préfère un autre langage, le dual du module de Tate de la jacobienne $J_o(N)$ de $X_o(N)$:

$$\mathcal{V}_N^\vee = T_\ell\, J_o(N) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell .$$

L'espace $\mathcal{V}_N$ est muni des endomorphismes T_p^* induits par les correspondances T_p, et il est aussi muni d'une action (commutant aux T_p^*) du groupe $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On montre ensuite que le sous-espace suivant de $\mathcal{V}_N$:

$$\mathcal{V}_f = \bigcap_{p \nmid N} \mathrm{Ker}\left(T_p^* - a_p\right)$$

est de dimension 2, et il définit la représentation cherchée ρ_ℓ. Pour prouver que les relations annoncées sont satisfaites, on utilise alors la relation de congruence de Eichler-Shimura : En p (ne divisant pas N), la courbe $X_o(N)$ a bonne réduction $\overline{X_o(N)}$, et la réduction $\overline{T}_p$ de la correspondance de Hecke s'identifie à la somme de la correspondance de Frobenius F_p et de la correspondance transposée ; il en résulte la relation :

$$T_p^* = F_p^* + p\left(F_p^*\right)^{-1},$$

d'où la relation suivante :

$$a_p = \rho_\ell\left(\Phi_p\right) + p\rho_\ell\left(\Phi_p\right)^{-1},$$

soit :

$$\rho_\ell\left(\Phi_p\right)^2 - a_p\rho_\ell(\Phi) + p = 0,$$

et donc (car on sait d'avance que $\det \rho_\ell\left(\Phi_p\right) = p$) :

$$\operatorname{tr} \rho_\ell\left(\Phi_p\right) = a_p.$$

2.3) La construction dans le cas général ($k > 2$) nécessite de remplacer $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par un faisceau ℓ-adique non constant sur $X_o(N)$ et d'étudier en détail ce qui se passe au voisinage des pointes ; pour cela, voir [D1] ou [L1].

2.4) La théorie classique ci-dessus ébauchée a l'inconvénient de ne pas décrire le comportement de ρ_ℓ en un nombre premier p qui divise le conducteur N ; une telle description requiert l'usage d'un langage adélique, et c'est l'objet de ce qui va suivre. Notons toutefois que se posent naturellement des questions, qui ont un sens même dans ce cadre classique : Soit en effet $p \neq \ell$; si p ne divise pas N, il résulte aussitôt du théorème 2 que les facteurs eulériens en p de f et de ρ_ℓ coïncident :

$$L_p\left(\rho_\ell, s\right) = L_p(f, s) \left(= \left(1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}\psi(p)\right)^{-1}\right);$$

d'autre part, comme ρ_ℓ est non ramifiée en p, l'exposant en p de son conducteur d'Artin est nul, donc égal à $v_p(N)$. La question est de savoir si ces relations sont encore valides pour p un diviseur de N :

$$L_p\left(\rho_\ell, s\right) = L_p(f, s)$$

$$v_p\left(a\left(\rho_\ell\right)\right) = v_p(N).$$

En particulier, pour f une nouvelle forme rationnelle de poids 2 et E_f la courbe elliptique (de Weil) associée, est-il vrai que la fonction $L(E, s)$ coïncide avec $L(f, s)$ (on sait du moins que c'est le cas à un nombre fini près de facteurs eulériens) et que le conducteur géométrique de E_f est égal à N ? La théorie esquissée ci-dessous permet de prouver que toutes ces questions admettent une réponse affirmative.

3. Théorie globale : Version adélique.

3. 1) Représentations automorphes paraboliques (définition sauvage). Soit G un groupe algébrique réductif défini sur $\mathbb{Q}$, dont le centre est noté Z ; fixons un quasi-caractère ψ du quotient $Z(\mathbb{Q})\backslash Z(\mathbb{A})$. On considère alors l'espace ${}_oL^2_\psi$ constitué des fonctions f sur le quotient $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$, qui se transforment par l'action de $Z(\mathbb{A})$ via le caractère ψ, qui sont de carré intégrable modulo $Z(\mathbb{A})$, et qui vérifient de plus la condition suivante : Pour U le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique propre (défini sur $\mathbb{Q}$) de G, on a

$$\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)\, du = 0 \quad \text{(pour presque tout g)}.$$

Le groupe $G(\mathbb{A})$ opère, par translations à droite, sur l'espace ${}_oL^2_\psi$. Les représentations automorphes paraboliques sont, par définition, les représentations irréductibles du groupe $G(\mathbb{A})$ qui interviennent dans la décomposition de ${}_oL^2_\psi$.

Soit π une telle représentation automorphe. Parce que le groupe $G(\mathbb{A})$ est le produit restreint des groupes $G(\mathbb{Q}_p)$ - où p décrit l'ensemble des nombres premiers - et $G(\mathbb{R})$, alors π admet une décomposition (modulo quelques considérations topologiques ici escamotées) comme un produit tensoriel restreint :

$$\pi = \left(\bigotimes_p \pi_p\right) \otimes \pi_\infty$$

avec π_p $\left(\text{resp. } \pi_\infty\right)$ une représentation admissible irréductible du groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ $\left(\text{resp. } G(\mathbb{R})\right)$.

3. 2) Lien avec la théorie classique pour $G = GL(2)$.

Pour $k \geq 2$ un entier, nous notons D_k la représentation essentiellement de carré intégrable du groupe $GL_2(\mathbb{R})$ qui intervient dans l'induite unitaire $\mathrm{Ind}(\alpha, \beta)$ où α et β sont les quasi-caractères suivants de $\mathbb{R}^*$:

$$\alpha(t) = |t|^{\frac{1}{2}(k-1)} \operatorname{sgn}(t)^k, \quad \beta(t) = |t|^{-\frac{1}{2}(k-1)}.$$

On renvoie au livre de Gelbart $\left([G], \S 5\right)$ pour la construction qui associe à une forme modulaire classique une représentation automorphe du groupe $GL_2(\mathbb{A})$.

PROPOSITION. Il existe une bijection $f \to \pi(f)$ entre l'ensemble des nouvelles formes de poids k, valeurs propres normalisées des opérateurs de Hecke, et l'ensemble des représentations automorphes paraboliques $\pi = \left(\otimes \pi_p\right) \otimes \pi_\infty$ du groupe $GL_2(\mathbb{A})$ telles que la composante π_∞ soit équivalente à D_k. On peut caractériser cette bijection par la propriété suivante : Soit $f \in S_k(N, \psi)$ (nouvelle, normalisée, valeur propre des opérateurs de Hecke), soit p un nombre premier ne divisant pas N, et notons a_p le p-ième coefficient de Fourier de f ; la composante en p de $\pi(f)$ est alors équivalente à la représentation principale non ramifiée :

$$\pi(f)_p \simeq I\left(|\ |_p^{s_1}, |\ |_p^{s_2}\right),$$

avec deux nombres complexes s_1 et s_2 qui vérifient :

$$p^{s_1} p^{s_2} = \psi(p) \quad \text{et} \quad p^{s_1} + p^{s_2} = p^{\frac{1-k}{2}} a_p.$$

3.3) Variétés de Shimura (voir [D2]).

Soit toujours G un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}$ (pour simplifier, on suppose que le groupe adjoint G^{ad} n'a pas de $\mathbb{Q}$-facteurs compacts). Notons $\underline{S}$ le groupe $\operatorname{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\left(G_m\right)$ (noter que $S(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{C}^*$) et supposons donné un morphisme $h : \underline{S} \to G_{\mathbb{R}}$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour l'action adjointe sur l'algèbre de Lie de G, $h(i)$ admet ses valeurs propres dans l'ensemble $\{1, z\bar{z}^{-1}, \left(z^{-1}\right)\bar{z}\}$.

(ii) L'automorphisme intérieur défini par $h(i)$ est une involution de Cartan du groupe G^{ad}.

Désignons par K_∞ le centralisateur de $h(i)$ dans $G(\mathbb{R})$; c'est un sous-groupe compact modulo le centre de dimension maximale, et la donnée de h permet de définir sur le quotient $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ une structure complexe invariante. Pour $K \subset G\left(\mathbb{A}_f\right) = \prod G\left(\mathbb{Q}_p\right)$ un sous-groupe compact ouvert, on considère alors la variété analytique complexe :

$$M_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G\left(\mathbb{A}_f\right) \times X/K.$$

On constate sans peine que cette variété s'identifie à la somme disjointe d'un nombre fini de quotients $\Gamma_i\backslash X$, avec Γ_i des sous-groupes de congruence dans $G(\mathbb{Q})$, et il résulte de travaux de Baily et Borel que $M_K(G,X)(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique. La théorie de Shimura caractérise de façon axiomatique un modèle de cette variété, noté $M_K(G,X)$, défini sur un certain corps de nombres $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ (indépendant de K). Nous nous limitons ici au cas des <u>courbes</u>, qu'on obtient comme suit :

Soit F un corps totalement réel de degré n, et soit B une algèbre de quaternions sur F qui se déploie en une place archimédienne $F \xhookrightarrow{\tau_1} \mathbb{C}$ et qui se ramifie aux autres places archimédiennes. On considère alors le groupe $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\left(B^*\right)$. Désignant par $\mathbb{H}$ le corps des quaternions de Hamilton, et pour un choix convenable de h, on a :

$$G(\mathbb{R}) \simeq GL_2(\mathbb{R}) \times \left(\mathbb{H}^*\right)^{n-1}$$

$$K_\infty = GO(2)^+ \times \left(\mathbb{H}^*\right)^{n-1}$$ (avec GO^+ le groupe des similitudes directes) et X s'identifie à la somme de deux copies du demi-plan de Poincaré. Le corps de définition E du modèle de Shimura $M_K(G,X)$ est alors égal à F (plongé dans $\mathbb{C}$ via τ_1). Dans le cas particulier où $F = \mathbb{Q}$, $B = M_2(\mathbb{Q})$, $G = GL_2$, tout cela n'est qu'une reformulation de la théorie classique des courbes modulaires.

3.4) <u>Généralisation du théorème 2</u>.

3.4.1) Supposons, pour simplifier, que B est déployée en toutes les places finies, ce qui impose au degré de F d'être <u>impair</u>. Pour $k \geq 2$ et w des entiers, nous notons $D_{k,w}$ le produit tensoriel $D_k \otimes |\;|^{-w/2}$, et $\overline{D}_{k,w}$ la représentation de $\mathbb{H}^*$ associée à $D_{k,w}$ par la correspondance de Jacquet-Langlands ([JL], § 16) ; plus explicitement, si W désigne la représentation de degré 2 de $\mathbb{H}^*$ qu'on obtient à partir d'un isomorphisme $\mathbb{H} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq M_2(\mathbb{C})$, et si ν désigne la norme réduite sur $\mathbb{H}$, alors $\overline{D}_{k,w}$ est équivalente au produit tensoriel de $\mathrm{Sym}^{k-2}(W)$ par le caractère

$$|\nu|^{\frac{-w-k+2}{2}}.$$

Fixons $k_1, \ldots, k_n$ (tous ≥ 2) et w des entiers tous de même parité. Nous nous intéressons dans la suite aux représentations automorphes paraboliques π du groupe $G(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini π_∞ est équivalente à la représentation

$$D_{k_1, w} \otimes \overline{D}_{k_2, w} \otimes \ldots \otimes \overline{D}_{k_n, w}$$

du groupe $G(\mathbb{R}) \simeq GL_2(\mathbb{R}) \times \left(\mathbb{H}^*\right)^{n-1}$.

En un nombre premier p, le groupe $G\left(\mathbb{Q}_p\right)$ est isomorphe au produit des groupes $GL_2\left(F_{\mathfrak{p}}\right)$ -où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des places de F qui relèvent p- et la composante locale π_p de π s'exprime alors comme produit tensoriel de représentations, notées $\pi_{\mathfrak{p}}$, des groupes $GL_2\left(F_{\mathfrak{p}}\right)$.

3.4.2) Supposons choisi, pour ℓ un nombre premier, un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Le théorème qui suit généralise, d'après (3.2), le théorème 2 au cas d'un corps totalement réel de degré impair $F \neq \mathbb{Q}$.

THÉORÈME 3 (Shimura, Ohta, Rogawski-Tunnell).

<u>Soit</u> π <u>comme ci-dessus</u>. <u>Il existe une</u> (<u>unique</u>) <u>représentation continue</u> ℓ-<u>adique</u> $\rho_\ell : \mathrm{Gal}\,(\overline{F}/F) \to GL_2\left(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$ <u>qui vérifie la propriété suivante</u> : <u>En chaque place finie</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> F, <u>de caractéristique résiduelle différente de</u> ℓ, <u>et telle que</u> $\pi_{\mathfrak{p}}$ <u>soit une représentation principale non ramifiée</u>, <u>alors la restriction de</u> ρ_ℓ <u>au groupe</u> $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ <u>correspond à</u> $\pi_{\mathfrak{p}}$ <u>par la correspondance de Hecke</u> (1.4).

3.4.3) Le principe de la construction de la représentation ρ_ℓ est le suivant (version adélifiée de (2.2) dans le cas particulier où F est égal à $\mathbb{Q}$) ; nous nous limitons encore pour simplifier au cas où tous les k_i sont égaux à 2 et $w = 0$.

Notons S_K la compactification lisse de $M_K(G, X)$ $\big($d'ailleurs, dans le cas $F \neq \mathbb{Q}$, $M_K(G, X)$ est déjà propre et $S_K = M_K(G, X)\big)$, et considérons le groupe de cohomologie :

$$\mathcal{V}_K = H^1\left(S_K \underset{F}{\otimes} \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right).$$

Parce que les S_K constituent (pour K de plus en plus petit) un système projectif où opère le groupe $G\left(\mathbb{A}_f\right)$, la limite inductive

$$\mathcal{V} = \varinjlim_{K} \mathcal{V}_K$$

est donc munie d'actions (qui commutent entre elles) des groupes Gal $(\overline{F}/F)$ et $G(\mathbb{A}_f)$. La représentation cherchée ρ_ℓ s'obtient alors comme l'espace des entrelacements :

$$\rho_\ell = \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, \mathcal{V})$$

(avec π_f la représentation $\bigotimes_p \pi_p$ du groupe $G(\mathbb{A}_f)$).

La preuve du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2 ; elle utilise que S_K a bonne réduction en $\mathfrak{p}$ pour K de la forme $K_\mathfrak{p}^o K^\mathfrak{p}$, avec $K^\mathfrak{p} \subset \prod_{\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}} GL_2(F_{\mathfrak{p}'})$, $K_\mathfrak{p}^o = GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ (où $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ désigne l'anneau des entiers de $F_\mathfrak{p}$), et une relation de congruence analogue à celle de (2.2).

4. <u>La correspondance aux mauvaises places</u>.

4.1) Le théorème qui précède suggère clairement comment décrire aux "mauvaises" places la représentation ρ_ℓ. C'est l'objet du résultat qui suit, démontré dans ma thèse ([Ca]).

THÉORÈME 4. <u>Même énoncé que le théorème 3, moins la restriction "telle que $\pi_\mathfrak{p}$ soit une représentation principale non ramifiée"</u>.

De ce résultat, on déduit alors sans peine que les questions formulées en (2.4) admettent une réponse affirmative.

4.2) Le principe de la démonstration du théorème 4 est d'en prouver tout d'abord une version affaiblie :

THÉORÈME (4) FAIBLE. <u>Même énoncé que le théorème (4), avec la restriction supplémentaire que $\pi_\mathfrak{p}$ ne soit pas une représentation cuspidale extraordinaire</u>.

On montre ensuite, par un argument de "changement de base pour GL_2", que le théorème (4) résulte de sa version affaiblie. Pour la théorie du changement de base, avec d'autres applications (à la conjecture d'Artin), on renvoie à l'exposé ([G-L]). Soulignons que la preuve du théorème (4) relatif à un corps donné F nécessite de disposer du théorème faible non seulement pour F lui-même, mais aussi pour des extensions (cubiques) de F.

4.3) Dans le cas particulier où F est le corps $\mathbb{Q}$, le théorème précédent avait été prouvé par Deligne $\left([D4]\right)$ à la suite d'un travail de Langlands $\left([L1]\right)$. Leur étude reposait sur la théorie de la mauvaise réduction des courbes modulaires, théorie développée au préalable par Deligne, Rapoport puis Drinfel'd, et expliquée dans [K-M]. Pour $n \geq 1$ un entier, notons $\mathbb{Z}_p^n$ l'anneau des entiers de l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$ engendrée par les racines p^n-ièmes de l'unité ; notons aussi K_p^n le noyau de la projection de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $GL_2(\mathbb{Z}/p^n)$. Pour K un sous-groupe de la forme $K = K_p^n \times H$ $\left(\text{avec } H \subset \prod_{p' \neq p} GL_2(\mathbb{Q}_{p'})\right)$, posons $S_{n,H} = S_K$. On dispose alors d'un modèle $\underline{S}_{n,H}$ de $S_{n,H}$ sur l'anneau $\mathbb{Z}_p^n$, dont la fibre spéciale est réduite et réunion de composantes lisses. De la théorie des cycles évanescents, il résulte que la cohomologie

$$\mathcal{V}_{n,H} = H^1\left(S_{n,H} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

s'insère dans une suite exacte $\mathcal{V}'_{n,H} \to \mathcal{V}_{n,H} \to \mathcal{V}''_{n,H}$, avec

$$\mathcal{V}'_{n,H} = H^1\left(\underline{S}_{n,H} \underset{\mathbb{Z}_p^n}{\otimes} \bar{\mathbb{F}}_p, \bar{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

la cohomologie de la fibre spéciale, et $\mathcal{V}''_{n,H}$ la cohomologie "évanescente". Passant à la limite, on en déduit une suite exacte $\mathrm{Gal}\left(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p\right) \times GL_2(\mathbb{A}_f)$-équivariante : $\mathcal{V}' \to \mathcal{V} \to \mathcal{V}''$.

Parce que l'on dispose d'une description assez explicite de l'ensemble des points de la fibre spéciale (munie des différentes actions), l'espace $\mathcal{V}'$ est susceptible d'une étude directe. On trouve que les représentations automorphes π qui y interviennent sont celles pour lesquelles π_p est une représentation de la série principale (éventuellement ramifiée) ou spéciale, et on prouve le théorème pour ces représentations.

Dans $\mathcal{V}''$ interviennent les π telles que π_p soit cuspidale ou spéciale. La méthode de Deligne revient à calculer $\mathcal{V}''$ à partir d'une représentation (a priori inconnue) du groupe produit :

$$GL_2(\mathbb{Q}_p) \times D_p^* \times W_{\mathbb{Q}_p},$$

où D_p désigne le corps de quaternions de centre $\mathbb{Q}_p$. On en déduit que, pour π_p cuspidale, la restriction de ρ_ℓ à $W_{\mathbb{Q}_p}$ ne dépend que de π_p (et non pas des autres composantes $\pi_{p'}$, $p' \neq p$). Si π_p est ordinaire (i.e. obtenue par la construction de Weil), on se ramène alors (en modifiant les autres composantes $\pi_{p'}$) à supposer que π provient, par la construction de Weil globale, d'un grössencharakter d'un corps quadratique imaginaire ; on remarque enfin que, dans ce dernier cas, le théorème est une simple conséquence de la théorie globale du corps de classes.

4.4) Dans le cas général ($F \neq \mathbb{Q}$), nous avons commencé par développer une théorie de la mauvaise réduction des courbes de Shimura ; ensuite, nous sommes parvenus à généraliser les arguments de Deligne et Langlands.

5. <u>Remarques</u>.

5.1) Wiles vient d'écrire une nouvelle preuve de la conjecture principale pour les corps cyclotomiques. Il y utilise de façon essentielle le théorème (4) faible (et même seulement dans le cas le plus "facile" où π_p est une représentation principale) ; cela lui permet de n'y faire qu'un usage modéré de la géométrie algébrique - contrairement à l'article originel [M-W]. Utilisant nos résultats, il obtient aussi une généralisation de la conjecture au cas d'un corps abélien totalement réel de degré impair.

5.2) Dans le cas où le poids est égal à 1, on sait encore associer aux représentations automorphes paraboliques des représentations galoisiennes (alors <u>complexes</u> continues) vérifiant l'analogue du théorème 3 ; la construction est due à Deligne et Serre dans le cas où F est égal à $\mathbb{Q}$, et à Rogawski-Tunnell dans le cas plus général d'un corps totalement réel de degré impair. Le problème qui se pose alors aux mauvaises places - prouver l'analogue du théorème 4- se résoud par des arguments standard de facteurs L et ε : Cela résulte de ce qu'on sait a priori que les fonctions L d'Artin vérifient des équations fonctionnelles dont les constantes s'expriment comme produit de constantes locales.

5.3) De même, si F est un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, Drinfel'd a associé à toute représentation automorphe de $GL_2(\mathbb{A}_F)$ un système compatible de représentations galoisiennes ℓ-adiques. Le problème qui se pose alors aux mauvaises places admet une réponse affirmative en vertu de la théorie de Grothendieck des fonctions L.

5.4) Dans des cas plus généraux où l'on part d'un groupe réductif G tel que l'espace symétrique correspondant soit hermitien, une construction analogue à (3.4.3) associe à certaines représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$ - une condition qui porte sur la composante π_∞ - des systèmes de représentations ℓ-adiques du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ du corps de définition de la variété de Shimura $M(G, X)$. S'appuyant sur une description encore conjecturale de la réduction mod p d'une variété de Shimura, Langlands a esquissé une méthode pour prouver alors des résultats semblables au théorème 3. On peut même espérer être en mesure ultérieurement de prouver des analogues du théorème 4.

H.CARAYOL
Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques
7 rue R.Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX

BIBLIOGRAPHIE

[C] P. CARTIER :
La conjecture locale de Langlands pour GL(2) et la démonstration de Ph. Kutzko. Séminaire Bourbaki, février 1980, exposé 550, Springer Lecture notes n° 842 (1981).

[Ca] H. CARAYOL :
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII (1984)
1ère partie : Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura, à paraître dans Compositio Math.
2ème partie : Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, à paraître dans Annales Sci. de l'E.N.S.

[D1] P. DELIGNE :
Formes modulaires et représentations ℓ-adiques. Séminaire Bourbaki, février 1969, exposé 355, Springer Lecture notes n° 179 (1971).

[D2] P. DELIGNE :
Travaux de Shimura. Séminaire Bourbaki, février 1971, exposé 389, Springer Lecture notes n° 244 (1971).

[D3] P. DELIGNE :
Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in Modular functions of one variable II, Springer Lecture notes n° 349 (1973).

[D4] P. DELIGNE :
Lettre à Piatetskii-Shapiro (1973).

[D5] P. DELIGNE :
Non abelian class field theory, Problems of present day mathematics, in Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proc. Sym. in Pure Math., vol. 28, AMS, Providence (1976).

[G] S. GELBART :
Automorphic forms on adele groups. Annals of Math. Studies, n° 83, Princeton University Press (1975).

[G-L] P. GERARDIN - J.P. LABESSE :
The solution of the base change problem for GL(2), in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sym. in Pure Math., vol. 33, part 2, AMS, Providence (1979).

[H] G. HENNIART :
Les conjectures de Langlands locales pour GL(n). Journées Arithmétiques, Metz 1981, Astérisque 94 (1982).

[J-L] H. JACQUET - R.P. LANGLANDS :
Automorphic forms on GL(2). Springer Lecture notes n° 114 (1970).

[K-M] N.M. KATZ - B. MAZUR :
Arithmetic moduli of elliptic curves. Annals of Math. Studies, n° 108, Princeton University Press (1985).

[L1] R.P. LANGLANDS :
Modular forms and ℓ-adic representations, in Modular functions of one variable II, Springer Lecture notes n° 349 (1973).

[L2] R.P. LANGLANDS :
Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen, in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sym. in Pure Math., vol. 33, part 2, AMS, Providence (1979).

[M-W] B. MAZUR - A. WILES :
Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$. Inventiones Math. 76, pp. 179-330 (1984).

[W] A. WILES :
On p-adic representations for totally real fields. Peprint.