

# *Astérisque*

TERESA MONTEIRO FERNANDES

**Propagation et constructibilité pour les systèmes  
microdifférentiels formels**

*Astérisque*, tome 140-141 (1986), p. 221-250

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1986\\_\\_140-141\\_\\_221\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__140-141__221_0)

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Société Mathématique de France  
Astérisque 140-141 (1986) p.221-250

Propagation et Constructibilité pour  
les systèmes microdifférentiels formels

par

Teresa Monteiro Fernandes

Faculdade de Ciências  
Universidade de Lisboa  
Av.24 de Julho nº 134,3º

Lisboa

Introduction

Dans un travail précédent ([11]) nous avons défini et étudié la notion de variété l-microcaractéristique qui donnait une condition suffisante pour la propagation et la constructibilité des faisceaux de solutions d'un système microdifférentiel  $\mathcal{M}$  dans un système microdifférentiel  $\eta$ . Il est aussi bien connu d'après les travaux de Kashiwara-Schapira et Kashiwara-Kawai que si  $\mathcal{M}$  et  $\eta$  sont holonomes singuliers réguliers les faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\eta$  sont  $\mathbb{C}$ -constructibles.

Dans ce travail nous donnons une condition de nature géométrique plus faible que celle de singularité régulière ou de non l-microcaractéristicité qui nous permet de démontrer des théorèmes de propagation et  $\mathbb{C}$ -constructibilité pour les faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\hat{\eta}$ , le module engendré par  $\eta$  sur les opérateurs microdifférentiels formels. Pour cela nous nous ramenons au cas où  $\eta$  est un module holonome simple sur une variété lagrangienne  $V$ . Nous utilisons alors l'anneau  $\hat{\mathcal{C}}_V$  de Kashiwara, Oshima et Kawai (cf. [5], [6], [12]) et par passage à l'idéal de  $\hat{\mathcal{C}}_V$  engendré par  $\hat{\mathcal{C}}_X(-1)$  le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre au plus  $-1$ , nous nous ramenons à travailler avec un anneau d'opérateurs différentiels homogènes sur  $V$ . Si  $\mathcal{M}_0$  est un  $\hat{\mathcal{C}}_V$ -sous module cohérent de  $\mathcal{M}$  qui l'engendre on peut définir la variété caractéristique du système différentiel engendré par  $\frac{\mathcal{M}_0}{\hat{\mathcal{C}}_X(-1) \mathcal{M}_0}$ . Cette sous variété ne dépend que de  $\mathcal{M}$  et on la note  $\hat{C}_V(\mathcal{M})$ . Soit  $u_0$  un générateur simple de  $\eta$  et filtrons  $\eta$  par  $\eta^{(v)} = \hat{\mathcal{C}}_X^{(v)} u_0$ . Nous démontrons que si  $\Omega$  est un ouvert de  $V$  à frontière non caractéristique pour  $\frac{\mathcal{M}_0}{\hat{\mathcal{C}}_X(-1) \mathcal{M}_0}$  alors il y a propagation au bord de  $\Omega$  pour les faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}_0$  dans  $\hat{\eta}^{(v)}$

quel que soit  $v$ .  $\hat{\mathcal{N}}(v)$  désigne le système engendré par  $\mathcal{N}(v)$  sur  $\hat{\mathcal{C}}_V = \varprojlim_k \mathcal{C}_V(-k)$ .

On en déduit en particulier un théorème de propagation pour les faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\hat{\mathcal{N}}$ .

Grâce à une proposition de nature purement algébrique nous démontrons ensuite que si  $\hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M})$  est lagrangien dans le fibré cotangent à  $V$  (ce qui est toujours vrai dans le cas où  $\mathcal{M}$  est holonôme singulier régulier) localement sur  $V$  les faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}_0$  dans  $\mathcal{N}$  (resp. dans  $\hat{\mathcal{N}}$ ) sont isomorphes aux faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}_0$  dans  $\mathcal{N}(v)$  (resp. dans  $\hat{\mathcal{N}}(v)$ ) pour  $v$  assez grand. On en déduit que les faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\hat{\mathcal{N}}$  (resp. de  $\mathcal{M}_0$  dans  $\hat{\mathcal{N}}(v)$ ) sont  $\mathbb{C}$ -constructibles, ceci grâce à un raisonnement du type "Mittag-Leffler".

Les démonstrations de ces résultats utilisent essentiellement les travaux de Kashiwara-Oshima et Kashiwara-Kawai qui nous permettent de nous ramener à travailler dans l'anneau des opérateurs différentiels sur  $V$ . On peut alors utiliser les résultats de Kashiwara sur la constructibilité des systèmes holonomes différentiels. Signalons enfin qu'une partie de nos résultats a été démontré par Yves Laurent par une méthode tout à fait différente. En particulier il a démontré que si  $\mathcal{M}$  est un système microdifférentiel holonôme alors  $\hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M})$  est toujours lagrangien.

Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont des systèmes différentiels holonomes, la  $\mathbb{C}$ -constructibilité des faisceaux de solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$  a été démontrée par M. Kashiwara.

Rappelons enfin que la construction de  $\hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M})$  dans le cas différentiel est due à Kashiwara [16].

La propagation dans le cadre différentiel a été démontrée par Schapira [15].

1. Préliminaires

a) Condition de Mittag-Leffler ([3])

Soit A un anneau unitaire.

1.1 Définition. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un système projectif de A-modules,  $F = \varprojlim_n F_n$  sa limite projective. On dit que  $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler si  $\forall n, \text{Im}(F_{n+v} \rightarrow F_n)_{v > 0}$  définit dans  $F_n$  une suite stationnaire, c'est à dire qu'il existe  $v_0 \in \mathbb{N}$  vérifiant:

$$\forall v \geq v_0, \text{Im}(F_{n+v} \rightarrow F_n) = \text{Im}(F_{n+v_0} \rightarrow F_n).$$

1.2 Proposition. Soit  $(\dot{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un système projectif dans la catégorie des complexes de A-modules (à gauche). Supposons que pour tout i, le système  $(F_n^i)_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler. Soit  $F_\infty^i = \varprojlim_n F_n^i$  et notons  $\dot{F}_\infty$  le complexe formé des  $F_\infty^i$ . Alors  $\dot{F}_\infty$  et  $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifient les deux conditions suivantes:

1) Le morphisme naturel:

$$\phi_i : H^i(\dot{F}_\infty) \longrightarrow \varprojlim_n H^i(\dot{F}_n) \text{ est surjectif,}$$

2) Si  $(H^{i-1}(F_n))_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler alors  $\phi_i$  est bijectif.

b) Stratifications de Whitney et faisceaux constructibles ([1], [3]).

Soit X une variété  $C^\infty$ , Y et Z deux-variétés de X disjointes, Y un point de Z. On dit que le couple  $(Y, Z)$  vérifie la condition de Whitney en y si dans une carte locale en y, étant données  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Z,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Y, avec  $\lim x_n = y, \lim y_n = y$ , tel que  $T_{x_n} Z$  converge vers un sous-espace  $\tau \subset T_x Y$  et si l'ensemble

des suites  $(\lambda_n(x_n - y_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  converge vers un sous-espace  $\ell$ , alors  $\tau$  contient  $\ell$ .

1.3 Definition. Soit  $X$  un espace analytique (réel ou complexe),  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des sous-ensembles analytiques non-singuliers. On dit que  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  est une stratification de Whitney de  $X$  et on note  $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  si les conditions suivantes sont vérifiées:

- 1)  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  est un recouvrement localement fini,
- 2)  $\bar{X}_\alpha, \bar{X}_\alpha - X_\alpha$  sont des sous-ensembles analytiques,
- 3)  $\alpha \neq \beta, X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ ,
- 4)  $\bar{X}_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset \implies \bar{X}_\alpha \supset X_\beta$
- 5)  $\forall \alpha, \beta, \alpha \neq \beta$ , le couple  $(X_\alpha, X_\beta)$  vérifie la condition de Whitney en tout point  $y \in X_\alpha$ .

1.4 Définition. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau d'espaces  $\mathbb{C}$ -vectoriels sur un espace analytique  $X$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est constructible (respectivement  $\mathbb{C}$ -constructible) s'il existe une stratification de Whitney de  $X$ ,  $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  telle que  $\forall \alpha, \mathcal{F}|_{X_\alpha}$  est localement constant (resp. localement constant de rang fini sur  $\mathbb{C}$ ).

c) Variété l-microcaractéristique d'un système microdifférentiel ([10], [12]); transformation  $L^{(0)}$  ([5], [6]); construction d'une nouvelle variété associée à un système microdifférentiel

Soit  $X$  une variété analytique complexe,  $T^*X$  son fibré cotangent. On note  $\dot{T}^*X$  le fibré  $T^*X$  privé de sa section nulle. Soit  $V$  une sous-variété involutive conique lisse de  $\dot{T}^*X$ ,  $T_V(T^*X)$  le fibré normal à  $V$  dans  $T^*X$  et  $\pi_0$  la projection de  $T_V(T^*X)$  sur  $V$ . On note  $\mathcal{C}_X$  le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini de Sato, Kawai et Kashiwara [13],  $\mathcal{C}_X(m)$  le sousfaisceau des opérateurs d'ordre inférieur ou égale à  $m$  et  $\mathcal{C}_V$  le sousfaisceau d'anneaux de  $\mathcal{C}_X$  engendré par  $\mathcal{F}_V$ , l'ensemble des opérateurs dans  $\mathcal{C}_X(1)$  dont le symbole d'ordre un s'annule sur  $V$ . On munit  $\mathcal{C}_V$  de la filtration par l'ordre:  $\mathcal{C}_V(m) = \mathcal{C}_V \cap \mathcal{C}_X(m)$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ . L'application  $\sigma$  ("symbole principal") induit un isomorphisme  $gr(\mathcal{C}_V) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} I_V(1)^j$  où  $I_V(j)$  désigne le faisceau des fonctions holomorphes homogènes de degré  $j$  nulles

sur  $V$ . On a posé  $I_V(1)^j = \mathcal{O}_{T^*X}(j)$  pour  $j \leq 0$ ,  $\mathcal{O}_{T^*X}(j)$  désignant le faisceau des fonctions holomorphes homogènes de degré  $j$ . On note  $\mathcal{H} = \mathcal{O}_{T^*X}(-1) \text{ gr}(\mathcal{E}_V)$  l'idéal engendré dans  $\text{gr}(\mathcal{E}_V)$  par le terme homogène  $\mathcal{O}_{T^*X}(-1)$  (qui agit en décalant de moins un degré). L'idéal  $\mathcal{H}$  est le gradué de l'idéal bilatère  $\mathcal{E}_V \mathcal{E}_X(-1)$  par rapport à la filtration induite.

On note  $\mathcal{A}$  l'anneau quotient  $\frac{\text{gr}(\mathcal{E}_V)}{\mathcal{H}}$  et on définit suivant [12] une application (compatible avec la composition) de  $\mathcal{E}_V$  dans  $\mathcal{A}$ , composé de  $\mathcal{E}_V \xrightarrow{\sigma} \text{gr}(\mathcal{E}_V) \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}$ . On le note  $\sigma_V^1$ . On peut alors identifier  $\pi_0^{-1}(\mathcal{A})$  au sous-faisceau de  $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$  formé de fonctions polynomiales en les variables de la fibre de  $\pi_0$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_X$ -module cohérent et  $\mathcal{M}_0$  un  $\mathcal{E}_{X(0)}$ -sous-module cohérent qui l'engendre (l'existence locale de  $\mathcal{M}_0$  est certainement assurée). Notons  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_V \mathcal{M}_0$ ,

$$\tilde{\mathcal{M}}_j = \mathcal{E}_V(j) \mathcal{M}_0 \quad \text{et} \quad \text{gr}(\tilde{\mathcal{M}}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{\mathcal{M}}_j}{\tilde{\mathcal{M}}_{j-1}}$$

1.5 Définition. On appelle variété 1-microcaractéristique de  $\mathcal{M}$  le long de  $V$  et on note  $C_V^1(\mathcal{M})$  le support du  $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$ -module cohérent

$$\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \otimes_{\pi_0^{-1}\mathcal{A}} \pi_0^{-1} \left( \frac{\text{gr}(\tilde{\mathcal{M}})}{\mathcal{H}_{\text{gr}(\tilde{\mathcal{M}})}} \right)$$

Cette définition est indépendante du choix de  $\mathcal{M}_0$  et l'ensemble  $C_V^1(\mathcal{M})$  est analytique, fermé, conique pour les deux actions naturelles de  $\mathbb{C}^*$  (pour plus de détails voir [12]). Nous référons aussi à [9] pour une autre construction de la variété  $C_V^1(\mathcal{M})$ .

Ci  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents on note  $C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  la variété  $C_{\Delta}^1(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}^*)$  où  $\Delta$  désigne le fibré conormal à  $X$  identifiée à la diagonale de  $X \times X$  et  $\mathcal{N}^*$  désigne le  $\mathcal{E}_X$ -module adjoint de  $\mathcal{N}$ .

Soit maintenant  $V$  une sous-variété lagrangienne lisse conique de  $T^*X$ . L'isomorphisme hamiltonien associé à la 2-forme symplectique  $d\omega_X$  sur  $T^*X$ ,

$$H : T^*(T^*X) \longrightarrow T(T^*X)$$

induit un isomorphisme  $T^*V \rightarrow T^*V(T^*X)$ . On identifiera donc ces deux fibrés.

À chaque opérateur  $P \in \mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m)}$  (c'est à dire,  $P$  est d'ordre inférieur ou égale à  $m+1$  et son symbole d'ordre  $m+1$  est nul  $V$ ) on associe avec Kashiwara-Oshima ([5]) et Kashiwara-Kawai ([6]) un opérateur différentiel sur  $V$  de la manière suivante:

Soit  $P(x, \xi) = \sum_{i \leq m+1} P_i(x, \xi)$  le symbole total de  $P$  dans un système de coordonnées symplectiques sur  $T^*X$ . On pose

$$L^{(m)}(P) = H_{P_{m+1}} + P_m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 P_{m+1}}{\partial x_i \partial \xi_i} \Big|_V$$

où  $H_{P_{m+1}}$  désigne le champ hamiltonien de  $P_{m+1}$ .

Cette définition est indépendante du choix de coordonnées. Notons  $\theta$  l'opérateur  $\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ .

On vérifie facilement que l'on a  $[\theta, L^{(m)}(P)] = mL^{(m)}(P)$  autrement dit  $L^{(m)}(P)$  est un opérateur d'ordre un homogène de degré  $m$ . En particulier si  $f$  est une fonction holomorphe sur  $V$  homogène de degré  $i$ , alors  $L^{(m)}(P)f$  est homogène de degré  $m+i$ . Notons  $\mathcal{D}_V^{(m)}$  le faisceau des opérateurs différentiels sur  $V$  homogènes de degré  $m$ . Le morphisme  $L^{(m)} : \mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_V^{(m)}$  vérifie les propriétés suivantes:

1.6 Proposition. Soient  $P_j$  ( $j=1,2$ ) des opérateurs appartenant à  $\mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m_j)}$ . Alors:

1)  $[\overline{L^{(m_1)}(P_1)}, \overline{L^{(m_2)}(P_2)}] = \overline{L^{(m_1+m_2-1)}(P_1, P_2)}$ .

2) Si  $P \in \mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m)}$ ,  $A \in \mathcal{C}_X^{(\ell)}$  alors  $L^{(m+\ell)}(AP) = \sigma_\ell(A) L^{(m)}(P)$  et  $L^{(m+\ell)}(PA) = L^{(m)}(P) \sigma_\ell(A)$

La proposition 1.6 permet d'étendre  $L^{(m)}$  à  $\mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m)}$  tout entier de sorte que l'on ait:

i)  $L^{(m)}(P_1+P_2) = L^{(m)}(P_1) + L^{(m)}(P_2)$  pour  $P_j \in \mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m)}$ ,

ii)  $L^{(m_1+m_2)}(P_1 P_2) = L^{(m_1)}(P_1) L^{(m_2)}(P_2)$  pour  $P_j \in \mathcal{C}_V \mathcal{C}_X^{(m_j)}$ .

En particulier  $L^{(0)}$  est un homomorphisme d'anneaux de  $\mathcal{C}_V$  sur



$\mathcal{D}_V(0)$ . Remarquons que  $L^{(0)}$  induit un isomorphisme de  $\frac{\mathcal{F}_V}{\mathcal{F}_V^2 \mathcal{E}_X(-1)}$  sur le groupe abélien des opérateurs dans  $\mathcal{D}_V(0)$  d'ordre  $\leq 1$ . En passant au quotient par  $\mathcal{E}_X(0)$  on obtient un isomorphisme  $\psi$  de  $\frac{\mathcal{F}_V}{\mathcal{F}_V^2 \mathcal{E}_X(-1) + \mathcal{E}_X(0)}$  sur  $\mathcal{O}_V(1)$ , l'ensemble des champs de vecteurs homogènes de degré zéro sur  $V$ .

Le morphisme  $\psi$  est le composé des morphismes

$$\frac{\mathcal{F}_V}{\mathcal{E}_X(0) + \mathcal{F}_V^2 \mathcal{E}_X(-1)} \cong \frac{I_V(1)}{I_V(1)I_V(0)} \cong \mathcal{O}_V(1),$$

$H$  étant induit par le morphisme "champ hamiltonian".

1.7 Proposition. [5] Le noyau de  $L^{(0)}: \mathcal{E}_V \rightarrow \mathcal{D}_V(0)$  coïncide avec  $\frac{\mathcal{E}_V}{\mathcal{E}_V \mathcal{E}_X(-1)}$ .

On doit cette proposition à Kashiwara et Kawai [5].

En particulier si  $P \in \mathcal{E}_V$  et  $L^{(0)}(P) = 0$  on a  $\sigma_V^1(P) = 0$ . Notons  $\hat{\sigma}_V(P) = \sigma(L^{(0)}(P))$  le symbole principal de  $L^{(0)}(P)$ .

1.8 Proposition. Soit  $P \in \mathcal{E}_V$  et identifions  $\sigma_V^1(P)$  à une section de  $\mathcal{O}_{T^*V}$ . Alors  $\hat{\sigma}_V(P)$  vérifie la condition suivante:

$$\sigma_V^1(P) \neq 0 \implies \hat{\sigma}_V(P) = \sigma_V^1(P).$$

Démonstration. Grâce à une transformation canonique locale on peut supposer  $X = \mathbb{C}^{n+1}$  muni des coordonnées  $(x, t)$  avec  $x \in \mathbb{C}^n$ , de sorte que  $V$  soit la sous variété de  $T^*X$  d'équations  $t = \xi = 0$  au voisinage de  $(x_0, 0; 0, 1)$ . Comme  $\sigma_V^1$  et  $\hat{\sigma}_V$  sont multiplicatifs et la restriction du noyau de  $\sigma_V^1$  à  $\mathcal{F}_V$  étant égal à  $\mathcal{F}_V^2 \mathcal{E}_X(-1) + \mathcal{E}_X(0)$  il suffit de calculer  $\sigma_V^1(P)$  et  $\hat{\sigma}_V(P)$  lorsque  $P = t D_t$ ,  $P = D_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) car tout opérateur dans  $\mathcal{F}_V$  peut s'écrire, modulo  $\mathcal{F}_V^2 \mathcal{E}_X(-1) + \mathcal{E}_X(0)$  sous la forme  $P(x, t, D_x, D_t) = A(x)(t D_t) + \sum_{j=1}^n B_j(x) D_j$  où  $A$  et  $B_j$  désignent des fonctions holomorphes. Calculons donc  $L^{(0)}(t D_t)$  et  $L^{(0)}(D_j)$ , pour  $j=1, \dots, n$ . On a  $H_{t\tau}|_V = (t \frac{\partial}{\partial t} - \tau \frac{\partial}{\partial \tau})|_V = -\tau \frac{\partial}{\partial \tau}$  et donc  $L^{(0)}(t D_t) = -\tau \frac{\partial}{\partial \tau} - 1/2$ . De même  $L^{(0)}(D_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}$  d'où le résultat. q.e.d.

1.9 Remarque. Le morphisme  $L^{(0)}: \mathcal{E}_V \rightarrow \mathcal{D}_V(0)$  conserve les filtrations, i.e., on a

$L^{(0)}(\mathcal{E}_V(j)) = \mathcal{D}_V(0, j)$ , l'ensemble des opérateurs dans  $\mathcal{D}_V(0)$  d'ordre  $\leq j$ . On en déduit un isomorphisme d'anneaux gradués

$$\text{gr}\left(\frac{\mathcal{E}_V}{\mathcal{E}_X(-1) \mathcal{E}_V}\right) \cong \text{gr}(\mathcal{D}_V(0)) \cong \frac{\text{gr}(\mathcal{E}_V)}{\mathcal{H}}$$

Le crochet de Poisson de  $\text{gr}(\mathcal{D}_V(0))$  (quotient de celui de  $\text{gr}(\mathcal{E}_V)$ ) coïncide donc avec celui associé à la structure symplectique de  $T^*V$ .

1.10 Proposition. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_V$ -module cohérent et notons

$$\mathcal{M}(-1) = \mathcal{E}_X(-1) \mathcal{M}, \quad \bar{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}(-1)}$$

structure de  $\mathcal{D}_V(0)$ -module à gauche, cohérent. Soit  $u$  une section de  $\mathcal{M}$  et soit  $\bar{u}$  la classe de  $u$  dans  $\bar{\mathcal{M}}$ . Alors l'idéal annulateur de  $\bar{u}$  dans  $\mathcal{D}_V(0)$  est formé des opérateurs  $Q$  de la forme  $L^{(0)}(P)$  avec  $P \in \text{ann } u$ .

Démonstration

Soit  $\mathcal{F} = \{Q \in \mathcal{D}_V(0); \exists P \in \text{ann } u, L^{(0)}(P) = Q\}$ . Alors on a clairement  $\text{ann } \bar{u} \supset \mathcal{F}$ . Réciproquement soit  $\bar{P} \in \mathcal{D}_V(0)$ ,  $\bar{P} \bar{u} = 0$  et soit  $P \in \mathcal{E}_V$  tel que  $L^{(0)}(P) = \bar{P}$ . Alors  $P u$  appartient à  $\mathcal{E}_X(-1) \mathcal{E}_V u$  c'est à dire qu'il existe  $Q \in \mathcal{E}_V \mathcal{E}_X(-1)$  tel que  $Pu = Qu$  et donc  $P - Q = P'$  avec  $P' \in \text{ann } u$ . On a donc  $L^{(0)}(P) = L^{(0)}(P')$  ce qui termine la démonstration.

q.e.d

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un système microdifférentiel muni d'un  $\mathcal{E}_V$ -sous-module  $\mathcal{M}_0$  cohérent qui l'engendre. Dans ces conditions on a

1.11 Proposition. Les groupes  $\text{Tor}_i^{\mathcal{E}_V} \left( \frac{\mathcal{E}_V}{\mathcal{E}_V \mathcal{E}_X(-1)}, \mathcal{M}_0 \right)$  sont nuls pour  $i > 0$ .

Démonstration

Soit  $p \in V$  et  $T$  un opérateur d'ordre moins un inversible au voisinage de  $p$ . On a alors

$\mathcal{L}_X(-1) \otimes \mathcal{L}_V = T \otimes \mathcal{L}_V$  et le complexe  
 $0 \longrightarrow \mathcal{L}_V \xrightarrow{T} \mathcal{L}_V \longrightarrow 0$  est quasi isomorphe à  $\frac{\mathcal{L}_V}{\mathcal{L}_X(-1) \otimes \mathcal{L}_V}$  décalé  
 d'un cran. Par suite  $\frac{\mathcal{L}_V}{\mathcal{L}_X(-1) \otimes \mathcal{L}_V} \otimes_{\mathcal{L}_V} \mathcal{M}_0$  est calculé par le complexe  
 $0 \longrightarrow \mathcal{M}_0 \xrightarrow{T} \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$  et la proposition résulte de ce que  
 $T$  opère injectivement dans  $\mathcal{M}_0$ .

q.e.d.

Les considérations ci-dessus motivent la construction d'une nouvelle sous-variété de  $T^*V$  associée de manière unique à un système microdifférentiel.

Pour cela nous démontrons la proposition suivante:

1.12 Proposition. Soit  $\mathcal{M}$  un système microdifférentiel et soient  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}'_0$  deux  $\mathcal{L}_V$ -sous-modules cohérents qui engendrent  $\mathcal{M}$ . Alors les variétés caractéristiques des systèmes  $\mathcal{D}_V \otimes_{\mathcal{D}_V(0)} \overline{\mathcal{M}}_0$  et  $\mathcal{L}_V \otimes_{\mathcal{L}_V(0)} \overline{\mathcal{M}'_0}$  coïncident.

Cette proposition justifie la définition suivante, de manière analogue au cas 1-microcaractéristique.

1.13 Définition. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{L}_X$ -module cohérent; on note  $\hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M})$  et on l'appelle variété microcaractéristique formelle de  $\mathcal{M}$  le long de  $V$  la variété caractéristique de  $\mathcal{D}_V \otimes_{\mathcal{D}_V(0)} \overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{M}_0$  désignant un sous- $\mathcal{L}_V$ -module cohérent de  $\mathcal{M}$  qui l'engendre.

Démonstration de la proposition 1.12.

La démonstration consistera en les étapes suivantes:

1) Vérifions d'abord que l'on a

$$(*) \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad \hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{L}_X(\ell) \otimes \mathcal{M}_0) = \hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M}_0)$$

pour tout sous  $\mathcal{L}_V$ -module cohérent  $\mathcal{M}_0$  de  $\mathcal{M}$ . On peut se ramener à supposer localement  $\mathcal{M}_0$  muni d'un seul générateur et  $\mathcal{L}_X(\ell)$  engendré sur  $\mathcal{L}_X(0)$  par un opérateur inversible  $T$ . Soit  $\psi$  l'isomor-

phisme d'anneaux  $\hat{\mathcal{C}}_V \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}_V$  qui à  $P \in \hat{\mathcal{C}}_V$  associe l'unique  $Q \in \mathcal{C}_V$  tel que  $PT=TQ$ . On peut alors définir un  $\hat{\mathcal{C}}_V$ -isomorphisme à gauche par rapport à la structure définie dans  $\hat{\mathcal{C}}_V$  par  $\Psi$ , de  $\hat{\mathcal{C}}_X(\ell) \mathcal{M}_0$  dans  $\mathcal{M}_0$ , à savoir celui qui à  $PTU$  avec  $P \in \hat{\mathcal{C}}_X(0)$  associe  $QU$  où  $PT=TQ$ .

2) Par 1) on peut supposer  $\mathcal{M}'_0$  contenu dans  $\mathcal{M}_0$ . De plus il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que l'on ait  $\mathcal{M}_0 \subset \hat{\mathcal{C}}_X(k) \mathcal{M}'_0$  et on obtient donc  $\mathcal{M}'_0(-k) \subset \mathcal{M}'_0 \subset \mathcal{M}_0$ .

On raisonne alors par récurrence sur  $k$ . Pour  $k=1$  on aura donc  $\mathcal{M}'_0(-1) \subset \mathcal{M}_0(-1) \subset \mathcal{M}'_0 \subset \mathcal{M}_0$  d'où l'on déduit les suites exactes de  $\hat{\mathcal{C}}_V$ -modules

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \frac{\mathcal{M}'_0}{\mathcal{M}_0(-1)} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}_0(-1)} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}'_0} \longrightarrow 0$$

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \frac{\mathcal{M}'_0}{\mathcal{M}'_0(-1)} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}'_0}{\mathcal{M}'_0(-1)} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}'_0}{\mathcal{M}_0(-1)} \longrightarrow 0$$

La proposition sera donc démontrée pour  $k=1$  pourvu que (\*) et (\*\*) soient des suites exactes de  $\mathcal{D}_V(0)$ -modules cohérents.

Si  $P \in \hat{\mathcal{C}}_V \setminus \hat{\mathcal{C}}_X(-1)$  et  $u \in \mathcal{M}'_0$  alors  $Pu \in \hat{\mathcal{C}}_X(-1) \mathcal{M}'_0$  et donc  $Pu \in \mathcal{M}_0$ . Par suite si  $P \in \hat{\mathcal{C}}_V$ ,  $\bar{u} \in \frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}'_0}$  on a  $P\bar{u} = \overline{Pu}$  où  $\bar{P}$  désigne la classe de  $P$  dans  $\mathcal{D}_V(0)$ . On en déduit que  $\frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{M}'_0}$  est un  $\mathcal{D}_V(0)$ -module à gauche. La même méthode de démonstration vaut pour  $\frac{\mathcal{M}'_0}{\mathcal{M}_0(-1)}$  et  $\frac{\mathcal{M}'_0(-1)}{\mathcal{M}'_0(-1)}$ .

La cohérence de ces  $\mathcal{D}_V(0)$ -modules résulte de ce qu'ils sont cohérents sur  $\hat{\mathcal{C}}_V$ .

Supposons maintenant le résultat vrai pour tout  $i < k$  avec  $i \geq 1$  et démontrons - le pour  $k$ . Soit  $\mathcal{M}''_0 = \mathcal{M}_0(-1) \cap \mathcal{M}'_0(+1)$ . Ce module est  $\hat{\mathcal{C}}_V$ -cohérent et vérifie les inclusions

$$\mathcal{M}_0(-k+1) \subset \mathcal{M}_0'' \subset \mathcal{M}_0$$

$$\mathcal{M}_0'(-1) \subset \mathcal{M}_0'' \subset \mathcal{M}_0'$$

car  $\mathcal{M}_0(-k+1) \subset \mathcal{M}_0(+1)$  (rappelons que l'hypothèse est que l'on a  $\mathcal{M}_0(-k) \subset \mathcal{M}_0' \subset \mathcal{M}_0$ ). Par suite  $\hat{c}_V(\mathcal{M}_0) = \hat{c}_V(\mathcal{M}_0')$ .

q.e.d.

Remarque. Pour la démonstration précédente nous nous sommes inspirés des méthodes de Kashiwara pour le calcul des multiplicités des systèmes (cf [3])

La proposition 1.8 entraîne:

1.14 Proposition. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_X$ -module cohérent.

Alors  $\hat{c}_V(\mathcal{M})$  est contenu dans  $c_V^1(\mathcal{M})$ .

1.15 Proposition. Soit  $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents. Alors

$$\hat{c}_V(\mathcal{L}) = \hat{c}_V(\mathcal{M}) \cup c_V^1(\mathcal{N})$$

Démonstration

Soient  $\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0, \mathcal{N}_0$  des  $\mathcal{E}_V$ -modules cohérents respectivement de  $\mathcal{M}, \mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  qui les engendrent vérifiant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_0 \longrightarrow 0$$

La proposition 1.11 entraîne alors que la suite

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{L}}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{N}}_0 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de  $\mathcal{D}_V(0)$ -modules cohérents.

q.e.d.

1.16 Proposition. Soit  $\mathcal{I}$  un idéal cohérent de  $\mathcal{E}_X, \mathcal{M} = \frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{I}}$ . Alors  $\hat{c}_V(\mathcal{M}) = \{0 \in T^*V, \forall Q \in \mathcal{I} \cap \mathcal{E}_V, \hat{c}_V(Q)(0) = 0\}$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.10. q.e.d.

1.17 Corollaire.

Soit  $P \in \check{C}_V$ ,  $P \notin \check{C}_X(-1) \check{C}_V$ . Alors

$$\hat{C}_V\left(\frac{\check{C}_X}{\check{C}_X^P}\right) = \{\theta \in T^*V, \hat{\sigma}_V(P)(\theta) = 0\}.$$

Démonstration.

On a démontré dans [12] que si  $Q \in \check{C}_V \cap \check{C}_X^P$ ,  $Q=RP$ , avec  $P \notin \check{C}_X(-1) \check{C}_V$  alors  $R$  appartient à  $\check{C}_V$ , d'où le résultat.

q.e.d.

1.18 Exemple. Soit  $X=\mathbb{C}^2$  muni des coordonnées  $(x,t)$  et  $V = \{(x,t;\xi,\tau) \in T^*\mathbb{C}^2, t=\xi=0, \tau \neq 0\}$ . Soit  $\mathcal{M}$  le système défini par l'équation  $(t^2 D_t + x)u=0$ .  $\mathcal{M}_0$  est donc engendré par le système sur  $\check{C}_V$  défini par la même équation. On a

$$L^{(0)}(t^2 D_t + x) = x \quad \text{car} \quad t^2 D_t \in \check{C}_X(-1) \check{C}_V.$$

Par suite  $\hat{C}_V(\mathcal{M}) = \{(x,\tau;\xi,t) \in T^*V, x=0\}$  et  $C_V^1(\mathcal{M}) = T_V(T^*X) = T^*V$

On est maintenant en mesure de définir  $\hat{C}_V(\mathcal{M})$  dans le cas où  $V$  est une sous variété lagrangienne lisse conique de  $T^*X$  éventuellement définie au voisinage de la section nulle.

1.19 Théorème. Soit  $\mathcal{M}$  un système microdifférentiel,  $V$  une sous variété lagrangienne lisse conique de  $T^*X$ . Alors on peut associer à  $\mathcal{M}$  de manière unique un sous ensemble analytique conique fermé de  $T^*V$  noté  $\hat{C}_V(\mathcal{M})$  tel que:

a) Si  $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$  est une suite exacte de  $\check{C}_X$ -modules cohérents, alors

$$\hat{C}_V(\mathcal{L}) = \hat{C}_V(\mathcal{M}) \cup \hat{C}_V(\mathcal{N})$$

b) Si  $\mathcal{M} = \check{C}_X / \mathcal{f}$  alors  $\hat{C}_V(\mathcal{M}) = \{\theta \in T^*V, \hat{\sigma}_V(P)(\theta) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{f} \cap \check{C}_V\}$

Démonstration

1) Unicité Soient  $u_1, \dots, u_r$  des générateurs locaux de  $\mathcal{M}$  et

posons  $\mathcal{M}_j = \mathcal{E}_X \otimes u_j$ . Alors d'après a) on a  $\hat{C}_V(\mathcal{M}) \supset \bigcup_j \hat{C}_V(\mathcal{M}_j)$  et d'après b) les  $\hat{C}_V(\mathcal{M}_j)$  sont définis de manière unique. Encore d'après a) on a  $\hat{C}_V(\bigoplus_j \mathcal{M}_j) = \bigcup \hat{C}_V(\mathcal{M}_j)$ . La suite exacte

$$\bigoplus_j \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

entraîne alors  $\hat{C}_V(\mathcal{M}) \subset \bigcup_j \hat{C}_V(\mathcal{M}_j)$ .

2) Existence

On utilisera le lemme suivant:

Lemme. Soient X et Y deux variétés analytiques complexes, V et W deux sous-variétés lagrangiennes lisses coniques contenues respectivement dans  $T^*X$  et dans  $T^*Y$ . Alors

$$\hat{C}_{V \times W}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}) = \hat{C}_V(\mathcal{M}) \times \hat{C}_W(\mathcal{N})$$

où  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  désignent respectivement un  $\mathcal{E}_X$ -module cohérent et un  $\mathcal{E}_Y$ -module cohérent.

Démonstration

On a vu dans [12] que si  $\mathcal{M}_0$  (resp.  $\mathcal{N}_0$ ) est un  $\mathcal{E}_V$ -module cohérent (respect. un  $\mathcal{E}_W$ -module cohérent) qui engendre  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) alors  $\mathcal{M}_0 \hat{\otimes} \mathcal{N}_0$  engendre  $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}$  et est un  $\mathcal{E}_{V \times W}$ -module cohérent.

Il faut donc montrer que  $\frac{\mathcal{M}_0 \hat{\otimes} \mathcal{N}_0}{\mathcal{E}_{V \times W} \mathcal{E}_{X \times Y}(-1)(\mathcal{M}_0 \hat{\otimes} \mathcal{N}_0)}$  est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{M}_0}{\mathcal{E}_V \mathcal{E}_X(-1) \mathcal{M}_0} \hat{\otimes} \frac{\mathcal{N}_0}{\mathcal{E}_W \mathcal{E}_Y(-1) \mathcal{N}_0}.$$

Remarquons que

$$\mathcal{E}_{V \times W} = \mathcal{E}_{X \times Y}(0) \otimes \left( p_1^{-1} \mathcal{E}_V \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1} \mathcal{E}_W \right) / \left( p_1^{-1} \mathcal{E}_X(0) \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1} \mathcal{E}_Y(0) \right)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  désignent respectivement les projections de  $T^*(X \times Y)$

sur  $T^*X$  et  $T^*Y$ . Comme  $\mathcal{L}_{X \times Y}(o)$  est plat sur  $p_1^{-1} \mathcal{L}_X(o) \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1} \mathcal{L}_Y(o)$  il en résulte que  $\mathcal{L}_{V \times W}$  est plat sur  $p_1^{-1} \mathcal{L}_V \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1} \mathcal{L}_W$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} & \frac{m_o}{\mathcal{L}_V \mathcal{L}_X(-1) m_o} \hat{\otimes} \frac{\eta_o}{\mathcal{L}_W \mathcal{L}_Y(-1) \eta_o} \approx \frac{m_o \hat{\otimes} \eta_o}{\mathcal{L}_W \mathcal{L}_Y(-1) \eta_o} \approx \frac{m_o \hat{\otimes} \eta_o}{\mathcal{L}_V \mathcal{L}_X(-1) m_o \hat{\otimes} \frac{\eta_o}{\mathcal{L}_W \mathcal{L}_Y(-1) \eta_o}} \approx \\ & = \frac{m_o \hat{\otimes} \eta_o}{\mathcal{L}_V \mathcal{L}_X(-1) m_o \hat{\otimes} \mathcal{L}_W \mathcal{L}_Y(-1) \eta_o} \approx \frac{m_o \hat{\otimes} \eta_o}{m_o \hat{\otimes} \mathcal{L}_W \mathcal{L}_Y(-1) \eta_o + \mathcal{L}_V \mathcal{L}_X(-1) m_o \hat{\otimes} \eta_o} \approx \\ & = \frac{m_o \hat{\otimes} \eta_o}{(\mathcal{L}_V \hat{\otimes} \mathcal{L}_W \mathcal{L}_Y(-1) + \mathcal{L}_V \mathcal{L}_X(-1) \hat{\otimes} \mathcal{L}_W)(m_o \hat{\otimes} \eta_o)} \approx \\ & = \frac{m_o \hat{\otimes} \eta_o}{\mathcal{L}_{V \times W} \mathcal{L}_{X \times Y}(-1)(m_o \hat{\otimes} \eta_o)} \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme résulte de ce que  $\mathcal{L}_{V \times W} \mathcal{L}_{X \times Y}(-1)$  est engendré par  $\mathcal{L}_{V \times W} \mathcal{L}_Y(-1) + \mathcal{L}_{V \times W} \mathcal{L}_X(-1)$ .

q.e.d.



2. Propagation et Constructibilité des Solutions  
des Systèmes Microdifférentiels

Dans ce paragraphe  $X$  désigne une variété analytique complexe et  $V$  une sous-variété lagrangienne lisse conique de  $T^*X$ . On notera  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{E}_X$ -module holonôme simple sur  $V$  muni d'un générateur simple  $u_0$  et, pour  $\nu \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\mathcal{N}_\nu(\nu) = \mathcal{E}_X(\nu)u_0$ . Soit  $\hat{\mathcal{E}}_X = \varprojlim_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X(-\nu)}$  le faisceau des opérateurs microdifférentiels formels ([13]) et posons, pour un  $\mathcal{E}_X$ -module  $\mathcal{M}$ ,  $\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{E}}_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}$ .

Rappelons que  $\hat{\mathcal{E}}_X$  est fidèlement plat sur  $\mathcal{E}_X$  (cf [13]). De même on peut définir  $\hat{\mathcal{E}}_V = \varprojlim_{\nu} \frac{\mathcal{E}_V}{\mathcal{E}_V(-\nu)}$  et si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{E}_V$ -module cohérent on note encore  $\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{E}}_V \otimes_{\mathcal{E}_V} \mathcal{M}$ .

2.1 Théorème. Soit  $\mathcal{M}$  un système microdifférentiel,  $\mathcal{M}_0$  un sous  $\mathcal{E}_V$ -module cohérent qui l'engendre.

1) Propagation. Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^1$  dans  $V$  localement situé du même côté de son bord  $\partial\Omega$ . Supposons que la conormale à  $\partial\Omega$  en  $x^* \in \partial\Omega$  n'appartient pas à  $\hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M})$ . Alors on a  
 (\*)  $\mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \hat{\eta}|_{\bar{\Omega}}) = 0$  au voisinage de  $x^*$ .

2) Constructibilité. Supposons  $\hat{\mathcal{C}}_V(\mathcal{M})$  isotrope dans  $T^*V$ . Alors il existe localement sur  $V$  un entier  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $|v| \geq \nu_0$  on ait  $\forall j, \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{\eta}(v)) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{\eta}(v+1))$   
 (resp.  $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{\eta}(v)) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{\eta}(v+1))$ ). De plus

les faisceaux  $\mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}, \hat{\eta})$  (resp.  $\mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{\eta}(v)), \forall$ ) sont  $\mathbb{C}$ -constructibles.

Remarque. Kashiwara - Kawai [5] et Kashiwara-Oshima [6] ont démontré que si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont singuliers réguliers on a des isomorphismes naturels  $\forall j, \mathcal{E}_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\circ) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \hat{\eta})$

D'autre part, Kashiwara-Schapira [7] ont démontré que si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont holonômes les faisceaux  $\mathcal{E}_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\circ)$  sont  $\mathbb{C}$ -constructibles. Par conséquent la conclusion 2) du théorème 2.1 reste vraie lorsque  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont holonômes singuliers réguliers.

On peut toutefois donner des exemples de systèmes holonômes vérifiant la condition géométrique du théorème 2.1.2) qui ne sont pas singuliers réguliers.

2.1 Exemple. Soit  $X = \mathbb{C}$  muni de la coordonnée  $t$ , soient  $(t, \tau)$  les coordonnées de  $T^*\mathbb{C}$  et  $V = \{t, \tau\} \in T^*\mathbb{C}, t=0, \tau \neq 0\}$ . Soit  $\mathcal{M}$  le système défini par  $(t^2 D_t + 1)u = 0$ . Alors  $\hat{C}_V(\mathcal{M}) = \emptyset$ , donc lagrangien et  $\mathcal{M}$  n'est pas singulier régulier.

Démonstration du Théorème 2.1

Notre théorème étant de nature locale nous allons considérer la situation suivante:

$X = \mathbb{C}^n$  muni des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V = T_Z^*X$ ,  $Z$  défini par l'équation  $x_1 = 0, x^* = (0; 1, 0; \dots; 0)$ . On peut alors supposer

$$\mathcal{M} = C_{Z|X} \simeq \frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_{x_1} + \mathcal{E}_{x_2} D_2 + \dots + \mathcal{E}_{x_n} D_n} \quad \text{le faisceau des microfonctions}$$

holomorphes le long de  $Z$ , d'ordre fini (cf. [13]) et  $\mathcal{N}(v) = C_{Z|X}(v) = \frac{\mathcal{E}_X(v)}{\mathcal{E}_X(v)x_1 + \mathcal{E}_X(v-1)D_2 + \dots + \mathcal{E}_X(v-1)D_n}$ . On a donc  $\mathbb{R}\mathcal{L}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \hat{\eta}) = \mathbb{R}\mathcal{L}om_{\mathcal{E}_V}(\mathcal{M}_0, \hat{\eta}) = \mathbb{R}\mathcal{L}om_{\mathcal{E}_V}(\mathcal{M}_0, \lim_v \hat{\eta}(v))$ . Soit  $\theta$  l'opérateur différentiel  $\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$ . Alors d'après le théorème de Cauchy-Kowalewska toute hypersurface  $\xi_1 = c$  avec  $c \neq 0$  est non caractéristique pour  $\theta - v, \forall v \in \mathbb{C}$ , ce qui entraîne une suite exacte de faisceaux au voisinage de  $x^*$ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(v) \longrightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{\theta - v} \mathcal{O}_V \longrightarrow 0.$$

On en déduit le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_V(o)} (\overline{m}_o, \mathcal{O}_V(v) |_{\overline{\Omega}})) & \\
 +1 \nearrow & & \searrow \\
 \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_V(o)} (\overline{m}_o, \mathcal{O}_V |_{\overline{\Omega}})) & \xleftarrow{\quad \theta - v \quad} & \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_V(o)} (\overline{m}_o, \mathcal{O}_V |_{\overline{\Omega}}))
 \end{array}$$

Or l'hypothèse de notre théorème signifie que la conormal à  $\partial\Omega$  en  $x^*$  est non caractéristique pour le système différentiel  $\tilde{m} = \mathcal{D}_{\mathcal{D}_V(o)} \otimes \overline{m}_o$ .

Il en résulte (cf [3]) que l'on a au voisinage de  $x^*$ ,

$$\mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_V(o)} (\overline{m}_o, \mathcal{O}_V |_{\overline{\Omega}})) = 0$$

et donc

$$(*) \quad \forall v, \quad \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_V(o)} (\overline{m}_o, \mathcal{O}_V(v) |_{\overline{\Omega}})) = 0.$$

Nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemma 1 Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a au voisinage de  $x^*$ ,

$$(***) \quad \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_o, \frac{C_{Z|X}(v)}{C_{Z|X}(v-i)} |_{\overline{\Omega}})) = 0$$

Démonstration. Remarquons d'abord que  $\frac{C_{Z|X}(v)}{C_{Z|X}(v-1)} = \mathcal{O}_V(v)$

On démontre par récurrence sur  $i$ , en remarquant que (\*\*\*) est trivialement vérifiée pour  $i=0,1$  d'après (\*). Supposons ensuite (\*\*\*) vérifiée pour  $i < i_0$ . On obtient une suite exacte:

$$(***) \quad 0 \longrightarrow \frac{C_{Z|X}(v-i_0+1)}{C_{Z|X}(v-i_0)} \longrightarrow \frac{C_{Z|X}(v)}{C_{Z|X}(v-i_0)} \longrightarrow \frac{C_{Z|X}(v)}{C_{Z|X}(v-i_0+1)} \longrightarrow 0$$

à laquelle correspond un triangle dans la catégorie dérivée

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_o, \frac{C_{Z|X}(v-i_0+1)}{C_{Z|X}(v-i_0)} |_{\overline{\Omega}})) = 0 & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_o, \frac{C_{Z|X}(v)}{C_{Z|X}(v-i_0+1)} |_{\overline{\Omega}})) & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_o, \frac{C_{Z|X}(v)}{C_{Z|X}(v-i_0)} |_{\overline{\Omega}}))
 \end{array}$$

et on applique l'hypothese de récurrence et (\*).

q.e.d.

Lemma 2 (Principe du prolongement analytique)

Les faisceaux  $\hat{\eta}(\nu)$  (et donc  $\hat{\eta}$ ) vérifient la condition suivante:

Soient  $W \subset \Omega$  deux ouverts de  $V$ ,  $\Omega$  connexe et  $W \neq \emptyset$ ,  $u$  une section de  $\hat{\eta}(\nu)$  sur  $\Omega$ . Si  $u$  est nulle sur  $W$  alors  $u$  est nulle.

Démonstration - La preuve est analogue pour  $\hat{\eta}(\nu)$  et  $\hat{\eta}$ .

Considérons le  $\hat{\mathcal{C}}_X$ -module engendré par  $u$ . Alors il existe  $P \in \hat{\mathcal{C}}_X$  défini dans  $\Omega$ , annulant  $u$ , avec  $P$  inversible dans  $W$  et donc dans  $\Omega$ . Par suite  $u$  est nulle dans  $\Omega$ .

q.e.d.

Lemme 3 Soit  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $Z = \{x_1 = 0\}$ ,  $V = T_Z^* X$ ; alors

1) Si  $\Omega$  est un ouvert de  $V$  tel que  $\gamma(\Omega)$  est connexe ( $\gamma: T_Z^* X \rightarrow Z$  désigne la projection) et la fibre de  $\Omega \rightarrow \gamma(\Omega)$  est contractile, on a:

$$\forall j, H^j(\Omega, \hat{\mathcal{C}}_{Z|X}) = \varinjlim_{\nu} H^j(\Omega, \hat{\mathcal{C}}_{Z|X}(\nu))$$

2) Si  $\Omega$  est un ouvert de  $V$  tel que  $\gamma(\Omega)$  est un ouvert de Stein de  $Z$  et la fibre de  $\gamma: \Omega \rightarrow \gamma(\Omega)$  est contractile, on a:

$$\forall \nu, \forall j > 0, H^j(\Omega, \hat{\mathcal{C}}_{Z|X}) = H^j(\Omega, \hat{\mathcal{C}}_{Z|X}(\nu)) = 0$$

Démonstration

On raisonne exactement comme dans [12], lemme 2.4.6. en remarquant que l'on a des isomorphismes de faisceaux d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$

$$\hat{\mathcal{C}}_{Z|X} = \gamma^{-1} \mathcal{O}_Z[t] \oplus \gamma^{-1} \hat{\mathcal{O}}_{Z|X}$$

$$\hat{\mathcal{C}}_{Z|X}(\nu) = \gamma^{-1} \mathcal{O}_Z[t]_{\leq \nu} \oplus \gamma^{-1} \hat{\mathcal{O}}_{Z|X}$$

où  $\mathcal{O}_Z[t]$  (resp.  $\mathcal{O}_Z[t]_{\leq \nu}$ ) désigne le faisceau des polynômes en  $t$  (resp. des polynômes en  $t$  de degré  $\leq \nu$ ) à coefficients dans  $\mathcal{O}_Z$  et

$\hat{\mathcal{O}}_{Z|X}$  désigne le complété formel de  $\mathcal{O}_X$  le long de  $Z$ .

a.e.d.

Lemme 4 On a  $\forall v \in Z, \forall j$ , au voisinage de  $x^*$

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V}(\mathcal{M}_0, \hat{\mathcal{C}}_{Z|X}^{(v)}|_{\bar{\Omega}})) = \\ & = \varprojlim_i \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V}(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}|_{\bar{\Omega}})) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration

On a  $\hat{\mathcal{C}}_{Z|X}^{(v)} = \varprojlim_i \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}$ . Remarquons que  $\forall i, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}$  est isomorphe en tant que faisceau de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels à  $\mathcal{O}_Z^i$ . les morphismes canoniques  $\frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i-1)}} \longrightarrow \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}$  se traduisant alors par la projection en la  $i+1$ -ème composante de  $\mathcal{O}_Z^{i+1}$  dans  $\mathcal{O}_Z^i$ . On peut donc représenter chaque'un des objets  $\mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}})$  par un complexe  $\dot{\mathcal{F}}_i$  tel que la famille  $(\dot{\mathcal{F}}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie la condition de Mittag-Leffler.

Il est aussi évident que la famille projective  $\mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\mathcal{O}_Z^i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie M.L. On peut donc appliquer la proposition 1.2:

$$\forall j, \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\mathcal{O}_Z^i) = \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\varprojlim_i \mathcal{O}_Z^i)$$

autrement dit

$$\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}) = \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\hat{\mathcal{C}}_{Z|X}^{(v)}).$$

D'après le lemme 1 on a  $\forall i, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V}(\mathcal{M}_0, \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}|_{\bar{\Omega}})) = 0$

Notons  $\mathcal{F}_i^\bullet = 0 \longrightarrow \mathcal{F}_i^0 \longrightarrow \mathcal{F}_i^1 \longrightarrow \dots$  la résolution flasque canonique de Godement du  $\mathcal{L}_V$ -module  $\frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}$ . Alors

l'object  $\mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}})$  est calculé par le complexe

$$\mathcal{G}_i^\bullet = 0 \longrightarrow \Gamma_{V-\Omega} \left( \frac{C_{Z|X}^{(\nu)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i)}} \right) \longrightarrow \underbrace{\Gamma_{V-\Omega} (\mathcal{F}_i^0)}_{\mathcal{G}_i^0} \longrightarrow \underbrace{\Gamma_{V-\Omega} (\mathcal{F}_i^1)}_{\mathcal{G}_i^1} \longrightarrow \dots$$

De plus nous concluons de la suite exacte de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_i^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{R}_{i+1}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{R}_i^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \frac{C_{Z|X}^{(\nu-i)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i-1)}} & \longrightarrow & \frac{C_{Z|X}^{(\nu)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i-1)}} & \longrightarrow & \frac{C_{Z|X}^{(\nu)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i)}} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où  $\mathcal{R}_i^\bullet$  désigne la résolution flasque canonique de  $\frac{C_{Z|X}^{(\nu-i)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i-1)}}$  que l'on a une suite exacte de complexes

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{G}_{i+1}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}_i^\bullet \longrightarrow 0$$

Considérons maintenant une résolution locale libre de  $\mathcal{M}_0$ :

$$\dots \longrightarrow \mathcal{L}_V^{r_1} \longrightarrow \mathcal{L}_V^{r_0} \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0$$

Alors  $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V}(\mathcal{M}_0, \mathcal{G}_i^\bullet)$  est calculé par le complexe double

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ \dots & \longrightarrow & (\mathcal{G}_i^\bullet)^{r_1} & \longrightarrow & (\mathcal{G}_i^{\bullet+1})^{r_1} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots & \longrightarrow & (\mathcal{G}_i^\bullet)^{r_0} & \longrightarrow & (\mathcal{G}_i^{\bullet+1})^{r_0} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

De même  $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V}(\mathcal{M}_0, \varprojlim \mathcal{G}_i^0)$  est calculé par le complexe

double

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \varprojlim (\mathcal{G}_i^\ell)^{r_1} & \longrightarrow & \varprojlim (\mathcal{G}_i^{\ell+1})^{r_1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 (**) & & \mathcal{G}_i^\ell & & \mathcal{G}_i^{\ell+1} & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \varprojlim (\mathcal{G}_i^\ell)^{r_0} & \longrightarrow & \varprojlim (\mathcal{G}_i^{\ell+1})^{r_0} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Notons  $\mathcal{G}_i^\cdot$  le complexe simple associé à (\*). Il est facile de voir que l'on a des suites exacte

$$\mathcal{G}_{i+1}^\cdot \longrightarrow \mathcal{G}_i^\cdot \longrightarrow 0 \quad \text{et que } \forall j, \forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{H}^j(\mathcal{G}_i^\cdot) = 0.$$

Par suite on peut appliquer la proposition 1.2 à  $(\mathcal{G}_i^\cdot)_{i \in \mathbb{N}}$  de sorte que l'on a  $\mathcal{H}^j(\varprojlim \mathcal{G}_i^\cdot) = \varprojlim \mathcal{H}^j(\mathcal{G}_i^\cdot) = 0$ . Remarquons que  $\varprojlim \mathcal{G}_i^\cdot$  s'identifie au complexe simple associé à (\*\*). Par conséquent

$$\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_0, \varprojlim \mathcal{G}_i^\cdot) = 0$$

autrement dit

$$\forall i, \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_0, \mathbb{R} \Gamma_{V-\Omega} (\hat{C}_{Z|X}(\nu) |_{\bar{\Omega}})) = 0$$

q.e.d.

Lemme 5 On a au voisinage de  $x^*$ :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\nu} \mathbb{R} \Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_0, \hat{C}_{Z|X}(\nu) |_{\bar{\Omega}})) = \\
 & \approx \mathbb{R} \Gamma_{V-\Omega} (\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{L}_V} (m_0, \hat{C}_{Z|X} |_{\bar{\Omega}})) = 0
 \end{aligned}$$

Démonstration

Nous allons démontrer que pour  $y^*$  voisin de  $x^*$  on a

$$\lim_{\nu} \mathbb{R} \Gamma_{V-\Omega} (\hat{C}_{Z|X}(\nu))_{y^*} = \mathbb{R} \Gamma_{V-\Omega} (\hat{C}_{Z|X})_{y^*}. \text{ D'après le lemme 1 on a }$$

$\mathcal{H}_{V-\Omega}^0 (\hat{C}_{Z|X}(\nu))_{y^*} = 0$ . Prenons comme système fondamental de voisinages de  $y^*$  la famille des voisinages ouverts  $W$  convexes contenant  $y^*$ . On obtient:

$$\forall j, v, \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\hat{C}_{Z|X}(v))_{Y^*} \approx \frac{\lim_{W \ni Y^*} H^{j-1}(W \cap \Omega, \hat{C}_{Z|X}(v))}{H^{j-1}(W, \hat{C}_{Z|X}(v))}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\lim_v \mathcal{H}_{V-\Omega}^j(\hat{C}_{Z|X}(v))_{Y^*}}{v} &= \frac{\lim_v \lim_{W \ni Y^*} H^{j-1}(W \cap \Omega, \hat{C}_{Z|X}(v))}{H^{j-1}(W, \hat{C}_{Z|X}(v))} = \\ &= \frac{\lim_{W \ni Y^*} H^{j-1}(W \cap \Omega, \hat{C}_{Z|X})}{H^{j-1}(W, \hat{C}_{Z|X})} \quad (\text{d'après le lemme 3}). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la condition 1) du théoreme 2.1 .

Démonstrons maintenant 2). Nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemme 6 - Soit A une  $\mathbb{C}$ -algèbre. Soit  $\theta$  un élément du centre de A et soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux A-modules à gauche. Supposons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , l'application  $\theta^{-\lambda}$  de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{N}$  soit surjective et que pour tout j, on ait  $\dim \text{Ext}_A^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < +\infty$ .

Notons  $\mathcal{N}_\lambda$  le noyau de  $\theta^{-\lambda}$  dans  $\mathcal{N}$ . Alors

1)  $\forall j, \forall \lambda, \text{Ext}_A^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\lambda)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

2)  $\forall j, \exists \lambda_j \in \mathbb{N}, |\lambda| \geq \lambda_j \implies \text{Ext}_A^j(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\lambda) = 0$ .

Démonstration

Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_\lambda \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{\theta^{-\lambda}} \mathcal{N} \longrightarrow 0.$$

Comme  $\theta^{-\lambda}$  appartient au centre de A, pour tout j,  $\theta^{-\lambda}$  définit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\text{Ext}_A^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  dans lui même. Considérons la suite exacte longue:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^0(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\lambda) \longrightarrow \text{Ext}_A^0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\theta^{-\lambda}} \text{Ext}_A^0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\lambda) \longrightarrow \dots$$

La condition 1) en résulte aussitôt.

Remarquons ensuite que pour tout j il existe  $\lambda_j' \geq 0$  tel que



pour  $|\lambda| \geq \lambda'_j$ ,  $\theta^{-\lambda}$  définit un  $\mathbb{C}$ -automorphisme de  $\text{Ext}_A^j(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  car ce sont des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Posons  $\lambda'_0 = \lambda'_0$  et  $\lambda_j = \sup(\lambda'_{j-1}, \lambda'_j)$  pour  $j \geq 1$ . Il est clair que  $\lambda_j$  satisfait à la condition 2).

q.e.d.

Lemme 7 - Sous les hypothèses du théorème 2.1.2) pour tout  $j$  et pour tout  $v$  les faisceaux  $\text{Ext}_{\mathcal{D}_V(0)}^j(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V(v))$  sont  $\mathbb{C}$ -constructibles, nuls pour  $|v|$  assez grand, localement sur  $V$ .

Démonstration

Comme  $\mathcal{D}_V \otimes_{\mathcal{D}_V(0)} \overline{\mathcal{M}}_0$  est holonôme et  $\mathcal{O}_V$  est plat sur  $\mathcal{D}_V(0)$  les faisceaux  $\mathcal{E}_{\text{xt}}^j_{\mathcal{D}_V(0)}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V)$  sont  $\mathbb{C}$ -constructibles (cf. [1], [2]). Soit donc  $V = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha$  une stratification de Whitney de  $V$  telle que les  $\mathcal{E}_{\text{xt}}^j_{\mathcal{D}_V(0)}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V)|_{V_\alpha}$  soient localement constants de rang fini sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $p$  un point de  $V_\alpha$  et prenons des coordonnées locales de sorte que l'on suppose  $X = \mathbb{C}^n$  muni des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V = T_Z^* X, Z$  désignant l'hypersurface d'équation  $x_1 = 0$  et  $p = (0:1, 0 \dots 0)$ . On est en mesure d'appliquer le lemme 6 avec  $A = \mathcal{D}_V(0), \theta = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}$  car l'hypersurface  $\xi_1 = \mathbb{C}$  étant non caractérisé que pour  $\theta^{-\lambda}$ , pour tout  $C \neq 0$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , l'opérateur  $\theta^{-\lambda}: \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_V$  est surjectif au voisinage de  $p$ . On en déduit

- (\*) i)  $\forall v, \forall j, \dim \mathcal{E}_{\text{xt}}^j_{\mathcal{D}_V(0)}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V(v))_p < +\infty$
- ii)  $\exists v_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $|v| \geq v_0$ ,  
 $\forall j, \mathcal{E}_{\text{xt}}^j_{\mathcal{D}_V(0)}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V(v))_p = 0$ . Ici nous utilisons le fait que la dimension cohomologique de  $\mathcal{D}_V(0)$  est finie.

Comme la catégorie des faisceaux  $\mathbb{C}$ -constructibles sur un espace analytique est abélienne la première assertion du lemme 7 se déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{D}_V(0)}^{xt^0}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V^{(v)}) \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{D}_V(0)}^{xt^0}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V)^{\otimes -v} \mathcal{E}_{\mathcal{D}_V(0)}^{xt^0}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V) \rightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{D}_V(0)}^{xt^1}(\overline{\mathcal{M}}_0, \mathcal{O}_V^{(v)}) \longrightarrow \dots \quad \text{en raisonnant par récurren-}$$

ce sur  $j$ . Par conséquent (ii) est vérifiée localement sur  $V_\alpha$ . La proposition résulte alors de ce que la stratification  $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$  est localement finie.

q.e.d.

D'après la proposition 1.11 on a les isomorphismes

$$\forall v, \forall j, \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^{xt^j}(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-1)}}) = \mathcal{E}_{\mathcal{D}_V(0)}^{xt^j}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O}_V^{(v)}).$$

En outre d'après le lemme 7 on a localement pour  $|v| \geq v_0$  les isomorphismes:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^{xt^j}(\mathcal{M}_0, C_{Z|X}^{(v)}) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^{xt^j}(\mathcal{M}_0, C_{Z|X}^{(v+1)}).$$

Le gradué de  $\hat{C}_{Z|X}$  coïncidant avec celui de  $C_{Z|X}$  on obtient de même

$$\mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^{xt^j}(\mathcal{M}_0, \hat{C}_{Z|X}^{(v)}) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^{xt^j}(\mathcal{M}_0, \hat{C}_{Z|X}^{(v+1)}).$$

Soit maintenant  $0 \longleftarrow \mathcal{M}_0 \longleftarrow (\mathcal{E}_V)^{n_0} \longleftarrow (\mathcal{E}_V)^{n_1} \longleftarrow \dots$

une résolution (locale) libre de  $\mathcal{M}_0$ . Alors l'object

$\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V}(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v_0)}}{C_{Z|X}^{(v_0-i)}})_{i \in \mathbb{Z}}$  est calculé par la cohomologie du

complexe obtenu de (\*) par application du foncteur

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V}(\cdot, \frac{C_{Z|X}^{(v_0)}}{C_{Z|X}^{(v_0-i)}})_{i \in \mathbb{Z}}$$

On obtient aussi une famille projective de complexes vérifiant la condition de Mittag-Leffler puisque les morphismes canoniques

$$\frac{C_{Z|X}^{(v_0)}}{C_{Z|X}^{(v_0-i-1)}} \longrightarrow \frac{C_{Z|X}^{(v_0)}}{C_{Z|X}^{(v_0-i)}} \quad \text{sont surjectifs.}$$

Remarquons aussi que le lemme 7 entraîne des isomorphismes naturels

$$\forall j, \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i-1)}})$$

pour tout  $v$  et  $i$  vérifiant  $|v-i| > v_0$ . Pour le voir il suffit de considérer le triangle

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V}(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v-i)}}{C_{Z|X}^{(v-i-1)}}) = 0 & \\ & \nearrow +1 & \searrow \\ \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V}(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}) & \longleftarrow & \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V}(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i-1)}}) \end{array}$$

associé aux inclusions

$$C_{Z|X}^{(v-i-1)} \subset C_{Z|X}^{(v-i)} \subset C_{Z|X}^{(v)}.$$

On obtient alors successivement par application de la proposition 1.2:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}}) &= \varprojlim_k \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-k)}}) = \\ &= \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \varprojlim_k \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-k)}}) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{C}_{Z|X}^{(v)}). \end{aligned}$$

En particulier pour  $v=v_0$  et  $i \geq 2v_0$  on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v_0)}}{C_{Z|X}^{(v_0-i)}}) &= \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{C}_{Z|X}^{(v_0)}) = \\ &= \mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \hat{C}_{Z|X}) = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \hat{C}_{Z|X}). \end{aligned}$$

On se ramène donc à montrer que  $\forall j, i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall v$ , les faisceaux  $\mathcal{E}_{\mathcal{E}_V}^j(\mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(v)}}{C_{Z|X}^{(v-i)}})$  sont  $\mathbb{C}$ -constructibles. D'après le lemme 7 ceci est vérifié pour  $i=1$ . Il reste alors à raisonner par récurrence sur  $i$  en utilisant la suite exacte (\*\*\*) et le triangle associé

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V} \left( \mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(\nu-i_0+1)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i_0)}} \right) & \\
 & \nearrow +1 & \searrow \\
 \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V} \left( \mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(\nu)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i_0+1)}} \right) & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_V} \left( \mathcal{M}_0, \frac{C_{Z|X}^{(\nu)}}{C_{Z|X}^{(\nu-i_0)}} \right)
 \end{array}$$

de manière analogue à la preuve de 1).

q.e.d.

On peut maintenant généraliser le théorème 2.1 à un couple de  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents.

2.2 Théorème.

Soit  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  un couple de  $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents.

1) Propagation - Soit  $\Omega$  un ouvert de  $T^*X$ ,  $x^* \in \partial\Omega$  et supposons que la conormale à  $\partial\Omega$  en  $x^*$  n'appartient pas à  $\hat{C}_\Delta(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*)$  ( $\Delta$  désignant comme d'habitude le fibré conormal à la diagonale de  $X \times X$  identifiée à  $X$  par la première projection).

Alors on a au voisinage de  $x^*$

$$\mathbb{R} \Gamma_{T^*X-\Omega} \left( \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X} \left( \mathcal{M}, \hat{\mathcal{N}}|_{\bar{\Omega}} \right) \right) = 0$$

2) Constructibilité - Supposons  $\hat{C}_\Delta(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*)$  lagrangien dans  $T^*(T^*X)$ . Alors  $\forall_j$  les faisceaux  $\mathcal{E}_{xt^j} \left( \mathcal{M}, \hat{\mathcal{N}} \right)$  sont  $\mathbb{C}$ -constructibles.

Démonstration

On a (cf [13]):

$$\forall j, \mathcal{L}_{\mathcal{M}}^j \otimes_{\mathcal{L}_X} \mathcal{L}_{\mathcal{N}}^j (\mathcal{M}, \hat{\eta}) = \mathcal{L}_{\mathcal{M} \otimes \eta^*}^j \otimes_{\mathcal{L}_{X \times X}} \mathcal{L}_{\mathcal{N}}^j (\mathcal{M} \otimes \eta^*, \hat{c}_X|_{X \times X})$$

et il suffit alors d'appliquer le théorème 2.1.

q.e.d.

En particulier si la variété 1-microcaractéristique  $C^1(\mathcal{M}, \eta)$  est isotrope les  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}^j \otimes_{\mathcal{L}_X} \mathcal{L}_{\mathcal{N}}^j (\mathcal{M}, \hat{\eta})$  vérifient le théorème 2.2.

Remarques

1) Dans le cas différentiel le théorème 2.5 est toujours vrai pourvu que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  soient holonomes ([2]).

2) Soit  $V$  une sousvariété lagrangienne lisse conique de  $T^*X$ ,  $\mathcal{M}$  un système holonôme singulier régulier et  $\mathcal{N}$  un système holonôme simple sur  $V$ . Kashiwara et Kawai ont démontré dans [4] (théorème 1.5) que  $\mathcal{M}$  vérifie l'hypothèse de 2), théorème 2.1.

Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration de la  $\mathbb{C}$ -constructibilité des faisceaux  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}^j \otimes_{\mathcal{L}_X} \mathcal{L}_{\mathcal{N}}^j (\mathcal{M}, \eta)$ .

Maria Teresa Monteiro Fernandes  
 Universidade de Lisboa  
 Faculdade de Ciências  
 Matemática Pura  
 Av. 24 de Julho, 134-3º

P O R T U G A L

Bibliographie

- [1] - Kashiwara, M. - On the maximally overdetermined systems of linear differential equation I. Publ. R.I.M.S. Kyoto University, 10 (1975), 563-579.
- [2] - Kashiwara, M. - On the maximally overdetermined systems of linear differential equation II. Inventiones Math. - 49(1978), 121-135.
- [3] - Kashiwara, M. - Cours à l'université de Paris Nord; Notes de Teresa Monteiro Fernandes (1977).
- [4] - Kashiwara, M., Kawai, T. - Second microlocalisation and asymptotic expansions. R.I.M.S. 313 (1980).
- [5] - Kashiwara, M., Kawai, T. - Holonomic Systems with regular singularities. R.I.M.S. 293 (1979).
- [6] - Kashiwara, M., Oshima, T. - Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. of Maths. 106,(1977) 145-200.
- [7] - Kashiwara, M., Schapira, P. - Microhyperbolic systems. Acta Math. 142 (1979) 1-55.
- [8] - Kashiwara, M., Sjöstrand, J., Kawai, T. - On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge. Ark. for Mat. 17, (1979) 83-91.
- [9] - Laurent, Yves - Lecture Notes in Physics, 126, Springer (1980) 77-89.
- [10] - Monteiro-Fernandes, T. - Variété 1-microcaractéristique pour les  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents, C.R.A.S. t.290, Serie A (1980) 787-790.

- [11] - Monteiro-Fernandes, T. - Problème de Cauchy microdifférentiel et théorèmes de propagation. C.R.A.S., t.290, Série A (1980) 833-836.
- [12] - Monteiro-Fernandes, T. - Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels (à paraître dans Astérisque).
- [13] - Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, M. - Lecture Notes in Math. 287, Springer, (1973) 265-529.
- [14] - Schapira, Pierre - Une introduction à l'étude des systèmes microdifférentiels. Astérisque 89-90, 45-83 (1981).
- [15] - Schapira, P. - Microdifferential systems in the complex domain - Grundlehren der math. Wissenschaften 269 - Springer-Verlag.
- [16] - Kashiwara, M. - Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations-Preprint du RIMS, 1983.