Astérisque

TERESA MONTEIRO FERNANDES

Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels

Astérisque, tome 140-141 (1986), p. 135-220

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__140-141__135_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 140-141 (1986) p.135-220

PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES SYSTÈMES MICRODIFFÉRENTIELS

par

Teresa MONTEIRO FERNANDES

Université de Paris-Nord

Villetaneuse FRANCE

Faculté des Sciences de l'Université de Lisbonne

Rue da Escola Politecnica

Lisbonne PORTUGAL

Table des Matières

CHAPITRE 2 Page

INTRODUCTION

On doit à M.Kashiwara et P.Schapira [12] la notion de direction microcaractéristique d'un module cohérent sur $\mathcal{E}_X$, (l'anneau des opérateurs microdifférentiels), le long d'une sous-variété V involutive dans le fibré cotangent à une variété X. Cette notion permet par exemple de donner une condition pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans le faisceau des fonctions à singularités essentielles sur une hypersurface $Z \subset X$. Nous supposerons ici V contenue dans le fibré cotangent privé de la section nulle.

A la variété V on associe la sous algèbre $\mathcal{E}_V^1$ de $\mathcal{E}_X$ engendrée sur les opérateurs d'ordre zéro par les opérateurs d'ordre un dont le symbole d'ordre un s'annule sur V (cf. [9] , [10], [11]).

Dans ce travail (cf.chapitre 1) nous construisons la variété 1-microcaractéristique $C_V^1(\mathcal{M})$ d'un $\mathcal{E}_V^1$-module cohérent puis la variété 1-microcaractéristique d'un $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ le long de V en considérant la variété $C_V^1(\mathcal{M}_0)$ pour un $\mathcal{E}_V^1$-module cohérent $\mathcal{M}_0$ qui engendre $\mathcal{M}$. Cette notion correspond à celle de variété microcaractéristique citée plus haut, mais cette fois-ci avec une condition de Levi. Pour ces constructions nous utilisons la théorie des anneaux et modules filtrés ([1] , [4], [18]) en nous inspirant des méthodes de B.Malgrange [15] pour la construction de la variété caractéristique d'un $\mathcal{E}_X$-module cohérent . Nous montrons en particulier que $C_V^1(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble fermé, analytique du fibré normal $T_V(T^*X)$, conique pour les deux actions naturelles de $\mathbb{C}^*$. Les directions de $C_V^1(\mathcal{M})$ en un point $x^* \in T^*X$ sont appelées directions 1-microcaractéristiques pour $\mathcal{M}$ le long de V en x^*.

Nous démonstrons alors au chapitre 2 que si Y est une sous-variété de X non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long du fibré conormal T_Z^*X privé de la section nulle, que l'on notera $\dot{T}_Z^*X$, a une sous variété $Z \subset X$, transverse à Y, le problème de Cauchy avec données sur Y est bien posé dans le faisceau $C_{Z|X}$. Pour cela nous nous ramenons à un théorème de Cauchy Kowalewska dans un module $\mathcal{N}$ à caractéristiques simples sur V supposée régulière et on utilise alors la méthode de P. Schapira [19] . En particulier si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et si Z est une hypersurface de X transverse à la sous variété des données Y supposée non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ le long de $\dot{T}^*_Z X$, le problème de Cauchy est bien posé dans le faisceau des fonctions à singularités méromorphes ou logaritmiques sur Z.

Ces résultats nous permettent alors de traiter le cas d'un couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ version du théorème 3.3.1. [12] mais ici sans utiliser les opérateurs d'ordre infini.

Nous consacrons le dernier § du chapitre 2 à l'étude de la propagation des solutions d'un $\mathcal{E}_X$-module $\mathcal{M}$ dans un module holonôme muni d'un générateur simple sur une sous variété V lagrangienne.

On a pour cela adapté les méthodes géométriques dûes à J.M. Bony et P.Schapira dans le cas différentiel [3] .

On peut alors, par le procédé habituel de passage à la diagonale, démontrer un théorème de propagation pour un couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ au bord d'un ouvert de T^*X, analogue au théorème 8.2.1. de [13] avec ici $\mathcal{N}$ au lieu de $\mathcal{N}^\infty$.

Singnalons que la notion de variété 1-microcaractéristique est d'un intérêt particulier dans la théorie des systèmes holonômes à points singuliers réguliers ([10], [11]).

Une partie de nos résultats a été obtenue simultanément par Yves Laurent par des méthodes très différentes ([14]).

Précisons que le chapitre 1 reprend et améliore les constructions que nous avions faites pour nôtre thèse de 3ème cycle.

Je veux enfin témoigner ma reconnaissance à M.Kashiwara et P. Schapira, le premier m'ayant donné l'idée de départ pour la construction de la variété 1-microcaractéristique, le second par l'intérêt et le soutien constant qu'il a apporté à la réalisation de ce travail.

CHAPITRE 1

§1. - L'anneau $\mathcal{D}_V^1$

a) Rappels sur les anneaux et modules filtrés

Les résultats suivants, dans leur ordre de présentation figurent essentiellement dans [18] mais le lecteur averti peut aussi se reporter à [1] , [4], [16], [20] .

On dit qu'un anneau A, unitaire est filtré s'il est muni d'une famille $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de sous groupes de A vérifiant :

i) $1 \in A_o$; ii) $\forall k$, $A_k \subset A_{k+1}$; iii) $\bigcup_k A_k = A$;

iv) $\forall k,\ell$, $A_k . A_\ell \subset A_{k+\ell}$.

Supposons en plus que pour tout k et ℓ on a $[A_k, A_\ell] \subset A_{k+\ell-1}$. Alors l'anneau gradué gr(A) associé à la filtration (A_k)

$$gr(A) \underset{\text{déf}}{=\!=} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{A_k}{A_{k-1}}$$

est commutatif. Soit $a \in A$. On dit que a est d'ordre k si $a \in A_k$, $a \notin A_{k-1}$ et a est d'ordre $-\infty$ si $a \in A_k$. On note $\sigma(a)$ l'image de a dans gr(A) : c'est le symbole principal de a. Si a appartient à A_k le symbole d'ordre k de a, $\sigma_k(a)$ est l'image de a dans $\frac{A_k}{A_{k-1}} \subset gr(A)$. On dit qu'un élément $\bar{a} \in gr(A)$ est homogène s'il existe k avec $\bar{a} \in \frac{A_k}{A_{k-1}}$ et on dit qu'un idéal $\bar{I}$ de gr(A) est homogène si toutes les composantes homogènes des éléments de $\bar{I}$ appartiennent à $\bar{I}$.

Si a est d'ordre k et b est d'ordre ℓ on a par définition du deuxième terme $\sigma_{k+\ell}(ab)=\sigma_k(a)\ \sigma_\ell(b)$. On définit aussi le crochet de Poisson sur gr(A) par bilinéarité, en posant, pour $a,b \in A$:

$$\{\sigma(a),\ \sigma(b)\} = \sigma_{k+\ell-1}([a,b]).$$

Soit M un A-module muni d'une famille $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de sous modules vérifiant :

i) $M_k \subset M_{k+1}$; ii) $M=\bigcup_k M_k$; ii) $A_k\, M_\ell \subset M_{k+\ell}$, $\forall k,\ell \in \mathbb{Z}$.

On dit que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de M. Etant données $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(M'_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ deux filtrations de M, on dit qu'elles sont équivalentes s'il existe un entier $c > 0$ tel que :

$$\forall k,\ M_{k-c} \subset M'_k \subset M_{k+c} .$$

A un module filtré M on associe le gr(A)-module $gr(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k/M_{k-1}$.

Si L est un sous module de M, on définit sur L la filtration induite $L_k = M_k \cap L$ et si ϕ: M $\longrightarrow$ N est un morphisme surjectif on définit sur N la filtration image

$$N_k = \phi(M_k) .$$

Définition 1.1.1. : On dit que la filtration (M_k) sur M est bonne s'il existe $m_1,\ldots,m_d \in M$ et des entiers $k_1,\ldots,k_d$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ M_k = \sum_{j=1}^{d} A_{k-k_j}\, m_j .$$

Il est clair que deux bonnes filtrations sur M sont toujours equivalentes et si ϕ:M $\longrightarrow$ N est un morphisme surjectif la filtration image d'une bonne filtration sur M est bonne.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\ell_1,\ldots,\ell_n \in \mathbb{Z}$. On définit sur A^n la filtration:

$$(A^n)_k = \bigoplus_j A_{k-\ell_j}\, e_j$$

où $e_j = (0,\ldots,\underset{\substack{\downarrow\\ j}}{1},\ldots,0)$.

Si les ℓ_j sont tous nuls on l'appelle filtration produit.

Définition 1.1.2. [18] La filtration sur A est dite noethérienne à gauche (resp. à droite) si :

1 - gr(A) est noethérien,

2 - ∀n, les sous modules à gauche (resp. à droite) de A_0^n sont fermés pour la topologie définie par la filtration produit.

On supprimera les références "à gauche","à droite" sauf en cas de risque d'imprécision, et sauf mention du contraire, nous considérerons la structure à gauche.

Théorème 1.1.3. : Soit A un anneau muni d'une filtration noethérienne et soit M un A-module à gauche muni d'une bonne filtration, L un sous module de M.
Alors la filtration induite sur L est bonne.

Corollaire 1.1.4. : Supposons A muni d'une filtration noethérienne. Alors A est noethérien et si M est un A-module muni d'une bonne filtration, on a :

1 - M est séparé : $\bigcap_k M_k = \{0\}$,

2 - Tout sous L de M est fermé:

$$L = \bigcap_k (L + M_k)$$

3 - gr(M) est un gr(A)-module de type fini et si gr(M) est libre, M est libre.

Proposition 1.1.5. : Soit M un A-module muni d'une filtration, soit I_M l'idéal annulateur de gr(M) et $\sqrt{I_M}$ son radical.
Alors $\sqrt{I_M}$ ne change pas si on considère sur M une filtration équivalente.

Définition 1.1.6. : Soit M un A-module de type fini. On appelle idéal caractéristique de M et on le note I car(M) l'idéal $\sqrt{I_M}$ associé à une bonne filtration.

Proposition 1.1.7. : Supposons la filtration sur A noethérienne.
Soit :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

<u>une suite exacte de A modules de type fini.</u>
Alors I car(M) = I car(L) $\cap$ I car(N).

Les propositions 1.1.5. et 1.1.7. admettent les généralisa - tions suivantes, correspondant au passage au quotient par un idéal homogène de gr(A):

<u>Proposition 1.1.8. et définition 1.1.9.</u> : <u>Supposons la filtration sur A noethérienne et soit</u> $\mathcal{I}$ <u>un idéal homogène de</u> gr(A).
<u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module muni d'une bonne filtration. Alors l'idéal</u>
$\mathrm{ann}\left(\frac{\mathrm{gr}(M)}{\mathcal{I}\mathrm{gr}(M)}\right)$ <u>ne dépend pas de la bonne filtration de</u> M.
<u>On le note</u> I car$_{\mathcal{I}}$(M).

<u>Démonstration</u>

D'après un résultat de Serre ([21]) la racine de l'idéal $\mathrm{ann}\left(\frac{\mathrm{gr}(M)}{\mathcal{I}\mathrm{gr}(M)}\right)$ en tant que gr(A)-module est égale à $\sqrt{\mathrm{ann}\ \mathrm{gr}(M)+\mathcal{I}}$.

Par suite on a $\quad \sqrt{\mathrm{ann}\ \frac{\mathrm{gr}(M)}{\mathcal{I}\mathrm{gr}(M)}} = \frac{\sqrt{\mathrm{ann}\ \mathrm{gr}(M)+\mathcal{I}}}{\mathcal{I}}$.

Soit maintenant gr(M)' le gradué de M par rapport à une autre bonne filtration. Il suffit donc de démontrer l'égalité:

$$\sqrt{\mathrm{ann}\ \mathrm{gr}(M)+\mathcal{I}} = \sqrt{\mathrm{ann}\ \mathrm{gr}(M)'+\mathcal{I}}$$

en sachant d'après la proposition 1.1.5. que :

$$\sqrt{\mathrm{ann}\ \mathrm{gr}(M)} = \sqrt{\mathrm{ann}\ \mathrm{gr}(M)'}\ .$$

On applique alors le lemme suivant:

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> B <u>un anneau unitaire commutatif,</u> p <u>et</u> q <u>deux idéaux tels que</u> $\sqrt{p}=\sqrt{q}$. <u>Alors pour tout idéal</u> I <u>de</u> B<u>, on a</u> :

$$\sqrt{p+I} = \sqrt{q+I}\ .$$

<u>Démonstration</u>

Il suffit évidemment de démontrer l'inclusion $\sqrt{p+I} \subset \sqrt{q+I}$.

Soit $f \varepsilon B$ et $N \varepsilon \mathbb{N}$ tels que $f^N \varepsilon p+I$. Ecrivons $f^N=u+v$ avec $u \varepsilon p, v \varepsilon I$. Alors u appartient à $\sqrt{q}$ et donc il existe $M \varepsilon \mathbb{N}$ tel que $u^M \varepsilon q$. On obtient :

$$f^{NM} = (u+v)^M = u^M + W \quad \text{où } W \varepsilon I$$

et donc f appartient à $q+I$.

Q.E.D.

<u>Proposition 1.1.11</u> : <u>Sous les hypothèses de la proposition 1.9., soit</u>

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

<u>une suite exacte de A-modules de type fini. On a alors:</u>

$$I\,car_{\mathcal{I}}(M) = I\,car_{\mathcal{I}}(L) \cap I\,car_{\mathcal{I}}(N).$$

<u>Démonstration</u>

Soit donnée sur M une bonne filtration et munissons L et N respectivement des filtrations induite et image.

Alors la suite des graduées est exacte et on peut appliquer la proposition 1.1.7. :

$$I\,car(M) = I\,car(L) \cap I\,car\,(N)\ .$$

Il faut démontrer l'égalité :

$$\sqrt{\text{ann gr}(M) + \mathcal{I}} = \sqrt{\text{ann gr}(L) + \mathcal{I}} \cap \sqrt{\text{ann gr}(N) + \mathcal{I}}.$$

Mais cela est une conséquence immédiate du lemme suivant:

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> B <u>un anneau commutatif unitaire et soient</u> m,p et q <u>des idéaux de</u> B <u>vérifiant</u> $\sqrt{p} \cap \sqrt{q} = \sqrt{m}$. <u>Alors pour tout idéal</u> I <u>de</u> B <u>on a l'égalité</u>:

$$\sqrt{p + I} \cap \sqrt{q + I} = \sqrt{m + I}.$$

Démonstration

1) Soit $f \in B$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $f^N \in m+I$.

Ecrivons $f^N = u+v$ avec $u \in m$, $v \in I$. Alors $u \in \sqrt{p}$ et $u \in \sqrt{q}$ ce qui implique l'existence de N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$u^{N_1} \in p$, $u^{N_2} \in q$. On a donc:

$$f^{NN_1} = u^{N_1} + v' \text{ avec } v' \in I$$

$$f^{NN_2} = u^{N_2} + v'' \text{ avec } v'' \in I$$

ce qui montre que f appartient à $\sqrt{p+I} \cap \sqrt{q+I}$.

2) Soit $f \in \sqrt{p+I} \cap \sqrt{q+I}$ et N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f^{N_1} = a_1+v$ avec $a_1 \in p$, $v \in I$, $f^{N_2} = a_2+v'$ avec $a_2 \in q$, $v' \in I$.

Alors $f^{N_1+N_2} = (a_1+v)(a_2+v') = a_1 a_2 + v''$,

avec $a_1 a_2 \in p \cap q$ et $v'' \in I$.

Comme $p \cap q$ est contenu dans $\sqrt{m}$ il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1 a_2)^M \in m$ et donc $f^{(N_1+N_2)M} \in m+I$.

Q.E.D.

Rappellons maintenant le résultat essential de [4].

Proposition 1.1.12 : Supposons gr(A) muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-algèbre noethérienne. Soit M un A-module de type fini. Alors I car(M) est involutif, c'est à dire:

$$\{I\ car(M), I\ car(M)\} \subset I\ car(M).$$

Soit maintenant I un idéal bilatère de A et notons $\mathcal{H}$ le gradué de I. On peut alors définir dans $\frac{gr(A)}{\mathcal{H}}$ un crochet de Poisson à partir de celui de gr(A), c'est à dire, en posant pour

$\bar{a}$, $\bar{b} \in \frac{gr(A)}{\mathcal{H}}$, $\{\bar{a},\bar{b}\}$=classe de $\{a,b\}$ modulo $\mathcal{H}$, où a et b sont des représentants de $\bar{a}$ e $\bar{b}$ respectivement. Pour vérifier que cette définition est bien posée, il suffit de montrer que si a et b sont homogènes et b $\in \mathcal{H}$ alors $\{a,b\} \in \mathcal{H}$ ce qui résulte aussitôt du fait que I est bilatère.

Proposition 1.1.13 : Soient A et B deux anneaux filtrés, avec $A \subset B$ et la filtration de A coincidant avec la filtration induite par B. On suppose que les filtrations de A et de B sont noethériennes et que gr(B) est plat (resp. fidèlement plat) sur gr(A).

Alors si I est un A-sous-module de A^n on a $gr(BI)=gr(B)\ gr(I)$ et B est plat (resp. fidèlement plat) sur A.

Soit maintenant X un espace topologique et soit $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneaux unitaires filtrés sur X. On dira que la filtration $(\mathcal{O}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est noethérienne si pour $x\in X$ la filtration $(\mathcal{O}_k)_x$, $k \in \mathbb{Z}$, est une filtration noethérienne de $\mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{O}$ vérifie la condition σ si, pour tout ouvert U de X, toute section a de $\mathcal{O}$ sur U , l'application de U dans $Z\ U\{-\infty\}$ qui à associe l'ordre de a_x dans $\mathcal{O}_x$ est localement constante. On peut donc définir le morphisme de faisceaux $\sigma: \mathcal{O} \longrightarrow gr(\mathcal{O})$.

Soit $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathcal{O}$-modules à gauche muni d'une filtration $(\mathcal{M}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Soit U un ouvert de X. On dira que la filtration de $\mathcal{M}$ est bonne sur U s'il existe des sections $u_1,\dots,u_r$ de $\mathcal{M}$ sur U et des entiers $k_1,\dots,k_r$ tels que:

$$\mathcal{M}_k\Big|_U = \sum_j \mathcal{O}_{k-k_j}\Big|_U u_j$$

Définition 1.1.14 [7] : a) On dit que $\mathcal{O}$ est un faisceaux d'anneaux noethérien si :

1 - $\mathcal{A}$ est cohérent,

2 - $\forall x \in X$, $\mathcal{A}_x$ est un anneau noethérien,

3 - toute suite croissante d'idéaux cohérents de $\mathcal{A}$ sur un ouvert U de X est localement stationnaire.

b) Si $\mathcal{A}$ est un faisceaux d'anneaux gradués on ne considérera que la structure graduée et on dit alors que :

1 - $\mathcal{A}$ est cohérent si pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout morphisme de $\mathcal{A}$-modules gradués défini localement

$$\mathcal{A}^N \longrightarrow \mathcal{A}$$

le noyau (qui est évidemment un $\mathcal{A}$ sous-module gradué de $\mathcal{A}^N$) est localement de type fini.

2 - $\mathcal{A}$ est noethérien si : i) $\mathcal{A}$ est cohérent ; ii) $\forall x$, toute suite croissante d'idéaux homogènes de $\mathcal{A}_x$ est stationnaire ; iii) toute suite croissante d'idéaux homogènes cohérents de $\mathcal{A}$ sur un ouvert U de X est localement stationnaire.

Proposition 1.1.15. : Soit $\mathcal{A}$ un faisceaux d'anneaux filtrés vérifiant la condition σ .Supposons :

1 - $\forall x$, la filtration sur $\mathcal{A}_x$ est noethérienne,

2 - $gr(\mathcal{A})$ est un faisceaux cohérent (resp.noethérien).

Alors $\mathcal{A}$ est cohérent (resp. noethérien).

Proposition 1.1.16. : Sous les hypothèses de la proposition précédente, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module muni d'une bonne filtration, $\mathcal{M}$ est cohérent si et seulement si $gr(\mathcal{M})$ est cohérent.

Proposition 1.1.17. (Pseudocohérence) : Soit $\mathcal{B}$ un faisceaux cohérent d'anneaux filtrés et $\mathcal{A}$ un sous faisceaux cohérent d'anneaux de $\mathcal{B}$ muni de la filtration induite. Supposons que $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}$ sont noethériens et que $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$ sont des $\mathcal{A}_0$-modules cohérents pour $k>>0$. Alors $\mathcal{B}$ est pseudocohérent sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{B}$-module cohérent, et $\mathcal{N}$ un sous-$\mathcal{A}$-module de type fini alors $\mathcal{N}$ est $\mathcal{A}$-cohérent.

b) Construction de $\mathcal{D}_V^1$

Soit maintenant X une veriété analytique complexe, T^*X son fibré cotangent et $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini de Sato, Kawai et Kashiwara [20].

Soit $\mathcal{E}_X(m)$ le sous-faisceau des ôperateurs d'ordre inférieur ou égal à m. On munit ainsi $\mathcal{E}_X$ d'une structure de faisceau d'anneaux filtrés, cohérent, de gradué égal à $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T^*X}(m)$ ($\mathcal{O}_{T^*X}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur T^*X et $\mathcal{O}_{T^*X}(m)$ le sousfaisceau des fonctions homogènes de degré m par rapport à la variable de la fibre). On note σ_m l'homomorphisme de $\mathcal{E}_X(m)$ dans $\mathcal{O}_{T^*X}(m)$ qui à $P \in \mathcal{E}_X(m)$ associe son symbole d'ordre m.

Soit V une sous-variété lisse, involutive, homogène du fibré $\dot{T}^*X$. On lui associe suivant Kashiwara-Oshima [13] un sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{E}_X$, noté $\mathcal{D}_V^1$ (noté $\mathcal{E}_V$ dans [9], [10] et [11]) de la manière suivante:

Soit I_V l'idéal de $\mathcal{O}_{T^*X}$ des fonctions nulles sur V et soit $I_V(m) = I_V \cap \mathcal{O}_{T^*X}(m)$.

Notons $\mathcal{J}_V$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}_X(o)$-modules de $\mathcal{E}_X(1)$ des opérateurs dont le symbole $\sigma_1(P)$ s'annule sur V :

$$P \in \mathcal{J}_V \Longleftrightarrow P \in \mathcal{E}_X(1) \quad \text{et } \sigma_1(P)\big|_V = 0.$$

On note $\mathcal{D}_V^1$ la sous-algèbre de $\mathcal{E}_X$ engendrée sur $\mathcal{E}_X(o)$ par $\mathcal{J}_V$. Remarquons que $\mathcal{D}_V^1\big|_{T^*X-V} = \mathcal{E}_X$.

Pour tout entier m on note $\mathcal{D}_V^1(m) = \mathcal{D}_V^1 \cap \mathcal{E}_X(m) = \mathcal{J}_V^m$ avec la convention $\mathcal{F}_V^k = \mathcal{E}_X(k)$ pour $k \leq 0$.

Exemple 1.1.18.

Supposons $X=\mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $T^*\mathbb{C}^n$ muni des coordonnées (x,ξ) avec $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ et V définie dans $\dot{T}^*X$ par les équations $x_1=\ldots=x_r=\xi_{r+1}=\ldots=\xi_r=0$.

On peut caractériser le faisceau $\mathcal{D}_V^1$ de la manière suivante :

Soit P un opérateur microdifférentiel d'ordre m dont le symbole total s'écrit $P(x,\xi)=\sum_{k\leq m} p_k(x,\xi)$. Alors P appartient à $\mathcal{D}_V^1$ si et seulement si:

$$(*) \qquad p_k \in I_V(1)^k \quad , \quad \forall k > 0.$$

Supposons par exemple, V défine par les équations :

$$\xi_1 = \ldots = \xi_p = 0.$$

Alors P appartient à $\mathcal{D}_V^1(m)$ si et seulement si on peut écrire :

$$(**) \qquad P(x,D_x) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{N}^p \\ 0\leq|\alpha|\leq m}} A_\alpha(x,D_x)\, D_1^{\alpha_1}\ldots D_p^{\alpha_p}$$

où les A_α appartiennent à $\mathcal{E}_X(0)$. La vérification est alors immédiate.

Théorème 1.1.19. : 1) La famille $(\mathcal{D}_V^1(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ définit sur $\mathcal{D}_V^1$ une filtration noethérienne à gauche et à droite.

2) $\mathcal{D}_V^1$ est un anneau noethérien (et en particulier cohérent).

Démonstration

1) Soit $x^* \in T^*X$. Le théorème est trivialement vérifié au voisinage de x^* si x^* n'appartient pas à V car on a :

$$\mathcal{D}_V^1\Big|_{T^*X-V} = \mathcal{E}_X\Big|_{T^*X-V}$$

et la filtration de $\mathcal{E}_X$ est noethérienne à gauche et à droite. Soit donc $x^* \in V$. Comme pour $k \leq 0$ on a $\mathcal{D}_V^1(k) = \mathcal{E}_X(k)$ la condition 2) de la définition 1.1.2. est automatiquement vérifiée.

Remarquons que σ induit un $\mathcal{O}_{T^*X}(0)$-isomorphisme

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ , \quad \frac{\mathcal{D}_V^1(k)}{\mathcal{D}_V^1(k-1)} \xrightarrow{\sim} I_V(1)^k$$

avec la convention $I_V(1)^k = \mathcal{O}_{T^*X}(k)$ pour $k \leq 0$. On en déduit un isomorphisme des gradués :

$$gr(\mathcal{D}_V^1) \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} I_V(1)^k$$

L'anneau $gr(\mathcal{D}_V^1)$ est donc engendré par deux sous-anneaux :

$$\mathcal{A}' = \bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{O}_{T^*X}(-j) \ , \quad \mathcal{A}'' = \bigoplus_{j \geq 0} I_V(1)^j \ .$$

On remarque que $\mathcal{A}'$ est noethérien car c'est le gradué de $\mathcal{E}_X(0)$ par rapport à la filtration par l'ordre ([20]).

Nous aurons besoin du résultat suivant:

<u>Lemme 1.1.20.</u> [9] : <u>Le faisceau d'anneaux gradués</u> $\bigoplus_{j \geq 0} I_V(1)^j$ <u>est noethérien.</u>

<u>Démonstration</u>

Soit $x^* \in V$. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ un système de générateurs du $\mathcal{O}_{T^*X}(0)$-module cohérent $I_V(1)$ au voisinage de x^*.

Soit Φ l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{T^*X}(0)$-algèbres graduées $\mathcal{O}_{T^*X}(0)[T_1, \ldots, T_p] \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{j \geq 0} I_V(1)^j$ qui à T_i associe f_i. Alors Φ est un homomorphisme surjectif. Soit Φ_m la partie homogène de degré m de Φ . Alors Ker Φ_m est un $\mathcal{O}_{T^*X}(O)$-module cohérent. Par conséquent le noyau de Φ est réunion d'une suite croissante $(\mathcal{J}_k)_{k\geq o}$ d'idéaux de $\mathcal{O}_{T^*X}(O)\,[T_1,\ldots,T_p]$ ($\mathcal{J}_k$ étant engendré par $\bigoplus_{m\leq k}$ ker Φ_m).

Remarquons que $\mathcal{O}_{T^*X}(O)\,[T_1,\ldots,T_p]$ est un faisceau d'anneaux noethérien car on a l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{T^*X}(O)\,[T_1,\ldots,T_p] \simeq \mathcal{O}_{T^*X}(O) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}\,[T_1,\ldots,T_p]$$

et $\mathcal{O}_{T^*X}(O)$ est un faisceau d'anneaux noethérien. Par conséquent Ker Φ est un idéal cohérent. Pour achever la démonstration, il suffit d'observer que l'anneau quotient d'un faisceau d'anneaux noethérien par un idéal cohérent est encore noethérien.

Q.E.D.

Soit maintenant $\{I_k\}_{k\geq o}$ une suite croissante d'idéaux homogènes de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)_{x^*}$.

Comme I_k est homogène on peut écrire :

$$I_k = I'_k + I''_k$$

où

$$I'_k = \mathfrak{A}'_{x^*} \cap I_k, \quad I''_k = \mathfrak{A}''_{x^*} \cap I_k.$$

Par conséquent les suites $\{I'_k\}$, $\{I''_k\}$ sont stationnaires car $\mathfrak{A}'_{x^*}$ et $\mathfrak{A}''_{x^*}$ sont noethériens, et $\{I_k\}$ est donc stationnaire.

2) Pour montrer que $\mathcal{D}_V^1$ est cohérent, il suffit, grâce à la proposition 1.1.15., de montrer que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)$ est cohérent.

Soit $\psi:\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)^N \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)$ un morphisme de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)$-modules gradués et soit $\mathcal{N}$ le noyau de ψ. Notons p_1 (resp. p_2) la projection de $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)$ dans $\mathfrak{A}'$ (resp. dans $\mathfrak{A}''$). Comme $\mathfrak{A}'$ (resp. $\mathfrak{A}''$) est noethérien, le noyau $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{N}''$) du morphisme :

$$p_1 \circ \psi\big|_{\mathfrak{A}'^N} : \mathfrak{A}'^N \longrightarrow \mathfrak{A}'$$

(resp. du morphisme :

$$P_2 \circ \psi \big|_{\mathfrak{a}''^N} : \mathfrak{a}''^N \longrightarrow \mathfrak{a}'')$$

est localement de type fini.

On a évidemment :

$$\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{a}'^N$$

$$\mathfrak{n}'' = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{a}''^N$$

Comme $\mathfrak{n}$ est un sous-module gradué de $\mathrm{gr}\,\mathfrak{D}_V^1)^N$, on a aussi :

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}' + \mathfrak{n}''$$

et donc $\mathfrak{n}$ est localement de type fini.

On démontre de manière analogue que $\mathfrak{D}_V^1$ est noëthérien.

Q.E.D.

Toutes les hypothèses de la proposition 1.1.17. sont donc remplies avec $\mathfrak{B} = \mathcal{E}_X$ (resp. $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}_V^1$) et $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_V^1$ (resp. $\mathfrak{A} = \mathcal{E}_X(0)$) et on peut énoncer:

<u>Théorème 1.1.21.</u> : a) <u>L'anneau $\mathcal{E}_X$ est pseudocohérent sur $\mathfrak{D}_V^1$</u>

b) <u>L'anneau $\mathfrak{D}_V^1$ est pseudocohérent sur $\mathcal{E}_X(0)$.</u>

<u>Théorème 1.1.22.</u> : <u>L'anneau $\mathcal{E}_X$ est plat sur $\mathfrak{D}_V^1$</u> .

<u>Démonstration</u>

Soit $x^* \in T^*X$. Si $x^* \notin V$ le théorème est trivialement vérifié. Supposons donc que $x^* \in V$. Alors chaque module $\mathcal{E}_X(m)\mathfrak{D}_V^1$, $m \in \mathbb{Z}$, est un $\mathfrak{D}_V^1$-module localement libre de rang un et il suffit alors de remarquer que:

$$\mathcal{E}_X = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_X(m)\mathcal{D}_V^1$$

Q.E.D.

Proposition 1.1.23. : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent engendré par un sous $\mathcal{D}_V^1$-module $\mathcal{L}$.
Alors les morphismes naturels :

$$\mathcal{E}_X \underset{\mathcal{D}_V^1}{\otimes} \mathcal{L} \xrightarrow{f} \mathcal{M} \quad , \quad \mathcal{E}_X(m) \underset{\mathcal{E}_X(O)}{\otimes} \mathcal{L} \xrightarrow{f'} \mathcal{E}_X(m)\mathcal{L}$$

$$(P \otimes u \longrightarrow Pu) \qquad\qquad (P \otimes u \longrightarrow P\,u)$$

sont des isomorphismes respectivement de $\mathcal{E}_X$-modules à gauche et de $\mathcal{D}_V^1$-modules à gauche.

Démonstration

Les morphismes f et f' sont évidemment surjectifs. Remarquons en outre que l'égalité $\mathcal{E}_X(m)\,\mathcal{D}_V^1 = \mathcal{D}_V^1\,\mathcal{E}_X(m)$ montre que $\mathcal{D}_V^1$ opère à gauche sur $\mathcal{E}_X(m) \underset{\mathcal{E}_X(O)}{\otimes} \mathcal{L}$ et $\mathcal{E}_X(m)\mathcal{L}$, et que f' est un morphisme pour cette structure.

Soient u une section de $\mathcal{L}$ et P un opérateur microdifférentiel dans un ouvert U et supposons Pu=O.

Soit $x^* \in V \cap U$ et R un opérateur inversible au voisinage de x^* tel que $R^{-1}P \in \mathcal{D}_V^1$.

On a $R^{-1}\,Pu=O$, $P\otimes u= R\otimes R^{-1}\,Pu=O$

au voisinage de x^* et donc $P \otimes u=O$ ce qui entraîne que f et f' sont injectives .

Q.E.D.

§2. - Construction de $C_V^1(\mathcal{M})$

a) Préliminaires

On supposera comme au §1. que V désigne une sous-variété involutive, lisse, homogène de $\dot{T}^*X$. On notera $\mathcal{O}_{T^*X}(-1)gr(\mathcal{D}_V^1)$ l'idéal engendré par le terme homogène $\mathcal{O}_{T^*X}(-1)$ du faisceau d'anneaux gradués $gr\,\mathcal{D}^1_V)$:

$$\forall j \in \mathbb{Z},\quad \mathcal{O}_{T^*X}(-1)\ I_V(1)^j \simeq I_V(1)^{j-1} \quad .$$

Lemme 1.2.1. : L'isomorphisme $gr\,\mathcal{D}^1_V) \simeq \bigoplus_{j\in Z} I_V(1)^j$ induit les isomorphismes

$$\bigoplus_{j\in Z} \frac{\mathcal{F}^j_V}{\mathcal{F}^{j-1}_V + \mathcal{E}_X(-1)\mathcal{F}^{j+1}_V} \xrightarrow[\sim]{\psi_1} \bigoplus_{j\geq o} \frac{I_V(1)^j}{I_V(1)^j\ I_V(0)} \xleftarrow{\sim}$$

$$\xleftarrow[\sim]{\psi} \frac{gr(\mathcal{D}^1_V)}{\mathcal{O}_{T^*X}(-1)\ gr(\mathcal{D}^1_V)} \quad .$$

Démonstration

On a $$\frac{gr(\mathcal{D}^1_V)}{\mathcal{O}_{T^*X}(-1)\ gr(\mathcal{D}^1_V)} \simeq \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \frac{I_V(1)^j}{I_V(1)^{j+1}\ \mathcal{O}_{T^*X}(-1)}$$

Remarquons que pour $j<0$, on a :

$$I_V(1)^j = I_V(1)^{j+1}\ \mathcal{O}_{T^*X}(-1)$$

Plaçons nous au voisinage de $x^* \in V$.

L'existence d'une fonction f holomorphe homogène de degré -1 inversible au voisinage de x^* entraîne l'égalité, pour tout $j\geq 0$,

$$(*) \qquad I_V(1)^j\ I_V(0) = I_V(1)^{j+1}\ \mathcal{O}_{T^*X}(-1)$$

L'application ψ_2 qui est évidemment surjective est donc un isomorphisme.

Montrons que ψ_1 est injective (ψ_1 est évidemment surjective). On a pour tout $j<0$, $\mathcal{F}^j_V = \mathcal{F}^{j+1}_V \mathcal{E}_X(-1)$.

Soit $P \in \mathcal{F}^j_V$ vérifiant $\sigma_j(P) \in I_V(1)^j\ I_V(0)$. D'après l'égalité (*) $\sigma_j(P)$ appartient à $I_V(1)^{j+1}\ \mathcal{O}_{T^*X}(-1)$ et on peut évidemment supposer

$$\sigma_j(P) = f\ g \quad \text{avec } f \in I_V(1)^{j+1}$$

$g \in \mathcal{O}_{T^*X}(-1)$. Soient $P' \in \mathcal{J}_V^{j+1}$, $R' \in \mathcal{E}_X(-1)$ vérifiant

$\sigma_{j+1}(P')=f$, $\sigma_{-1}(R') = g$.

Alors $P - P'R'$ appartient à $\mathcal{J}_V^{j-1}$ et donc ψ_1 est injective.

Q.E.D.

Corollaire 1.2.2.

L'anneau gradué $\displaystyle\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\mathcal{J}_V^j}{\mathcal{J}_V^{j-1} + \mathcal{E}_X(-1)\mathcal{J}_V^{j+1}}$ est noethérien.

Démonstration

Le faisceau d'anneaux $\displaystyle\bigoplus_{j\geq 0} \frac{I_V(1)^j}{I_V(1)^j I_V(0)}$ est noethérien car c'est l'anneau quotient d'un faisceau d'anneaux noethérien par un idéal cohérent.

Q.E.D.

Soit $\mathcal{O}_V$ le faisceau des fonctions holomorphes sur V et $\mathcal{O}_V(j)$ le sous faisceau des fonctions homogènes de degré j:

$$\mathcal{O}_V = \frac{\mathcal{O}_{T^*X}}{I_V} \quad , \quad \mathcal{O}_V(j) = \frac{\mathcal{O}_{T^*X}(j)}{I_V(j)}$$

Posons $\displaystyle\mathcal{A} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\mathcal{J}_V^j}{\mathcal{J}_V^{j-1}+\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{J}_V^{j+1}}$, et

$\mathcal{A}_V = \mathcal{O}_V \otimes_{\mathcal{O}_V(0)} \mathcal{A}$. On a, d'après le lemme 1.2.1. et la platitude de $\mathcal{O}_{T^*X}$ sur $\mathcal{O}_{T^*X}(0)$:

$$\mathcal{A}_V \simeq \mathcal{O}_V \otimes_{\mathcal{O}_V(0)} \Big(\bigoplus_{j\geq 0} \frac{I_V(1)^j}{I_V(0) I_V(1)^j}\Big)$$

$$= \mathcal{O}_V \underset{\mathcal{O}_V(o)}{\otimes} [\mathcal{O}_V(o) \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} (\underset{j}{\oplus} I_V(1)^j)]$$

$$= \mathcal{O}_V \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} (\underset{j\geq o}{\oplus} I_V(1)^j) = \frac{\mathcal{O}_{T^*X}}{I_V} \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} (\underset{j\geq o}{\oplus} I_V(1)^j)$$

$$= \underset{j\geq o}{\oplus} \frac{I_V^j}{I_V^{j+1}} .$$

De plus comme $\mathcal{O}_V$ est plat sur $\mathcal{O}_V(o)$, $\mathcal{A}_V$ est plat sur $\mathcal{A}$.

Soit $(f_i)_{i=1,\dots,p}$ un système local de générateurs indépendants homogènes de degré un de I_V et soit ψ le morphisme de $\mathcal{O}_{T^*X}$-algèbres

$$\mathcal{O}_{T^*X}[T_1,\dots,T_p] \longrightarrow \underset{j\geq o}{\oplus} I_V^j$$

$$T_i \longmapsto f_i$$

Le noyau $\mathcal{P}$ de Φ est engendré par les polynômes $f_i\, T_k - f_k\, T_i$, $k,i=1,\dots,p$ et on a donc un isomorphisme

$$\underset{j\geq o}{\oplus} I_V^j \xleftarrow{\ \sim\ } \mathcal{O}_{T^*X}[T_1,\dots,T_p]/\mathcal{P}$$

Comme $\mathcal{P}$ est contenu dans l'idéal $I_V[T_1,\dots,T_p]$ engendré par I_V dans $\mathcal{O}_{T^*X}[T_1,\dots,T_p]$ on en déduit l'isomorphisme :

$$(*) \qquad \frac{\mathcal{O}_{T^*X}[T_1,\dots,T_p]}{I_V\ [T_1,\dots,T_p]} \simeq \mathcal{O}_V[T_1,\dots,T_p] \simeq \mathcal{A}_V .$$

Soit π_o la projection du fibré normal à V, $T_V(T^*X)$, sur V. L'isomorphisme (*) permet d'identifier $\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V$ à un sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$.

<u>Lemme 1.2.3.</u> : $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$ <u>est plat sur</u> $\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V$

(<u>et donc</u> sur $\pi_o^{-1}\mathcal{A}$).

Démonstration

La platitude étant vérifiée dans les fibres on peut utiliser l'isomorphisme local (*) sur un ouvert U contenant $\theta \in T_V(T^*X)$.

On en déduit que $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)_\theta}$ est le complété de $(\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V)_\theta$ par rapport aux puissances de l'idéal engendré par $T_1,\ldots,T_p$ et est donc plat sur $(\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V)_\theta$ (cf. Bourbaki alg.comm.ch. 3 et 4).

Q.E.D.

Pour chaque $j\in\mathbb{Z}$, soit Φ_j le morphisme de $\mathcal{O}_{T^*X}(o)$-modules:

$$\frac{\mathcal{J}_V^j}{\mathcal{J}_V^{j-1}} \xrightarrow{\Phi_j} \frac{\mathcal{J}_V^j}{\mathcal{J}_V^{j-1}+\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{J}_V^{j+1}}$$

et soit Φ le morphisme de $\mathcal{O}_{T^*X}(o)$-algèbres associé :

$gr(\mathcal{D}_V^1) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A}$.

Il est évident que Φ est surjectif et d'après le lemme 1.2.1. le noyau de Φ est l'idéal $\mathcal{O}_{T^*X}(-1)\ gr(\mathcal{D}_V^1)$.

Définition 1.2.4. : Soit P un opérateur dans $\mathcal{D}_V^1$. On note $\sigma_V^1(P)$ l'image de P par le morphisme composé

$$\mathcal{D}_V^1 \xrightarrow{\sigma} gr(\mathcal{D}_V^1) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A}$$

L'isomorphisme (*) permet donc d'identifier $\sigma_V^1(P)$ à une section de $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$.

Observons que d'après la définition 1.2.4. en notant m l'ordre de P on a :

$$\begin{cases} \sigma_V^1(P) \equiv 0 \quad \text{si} \quad m<0 \\ \sigma_V^1(P) = \text{partie homogène d'ordre m du développement de Taylor} \\ \qquad \text{de } \sigma(P) \text{ le long de V.} \end{cases}$$

<u>Remarque 1.2.4'</u> : Notons $\{\ ,\ \}$ le crochet de Poisson de $gr(\mathcal{D}^1_V)$ associé à la structure d'anneau filtré (vérifiant la condition σ) de $\mathcal{D}^1_V$ (cf. § 1.). Ce crochet provient de celui de $gr(\mathcal{E}_X)$. Suivant le §.1., l'idéal $\mathcal{O}_{T^*X}(-1)\ gr(\mathcal{D}^1_V)$ étant le gradué de l'idéal bilatère $\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V$ on peut définir dans $\mathcal{A}$ un crochet de Poisson, que l'on notera $\{\ ,\ \}_1$ image de $\{\ ,\ \}$ par passage au quotient par $\mathcal{O}_{T^*X}(-1)\ gr(\mathcal{D}^1_V)$.

Remarquons que l'on peut considérer $\mathcal{A}$ comme le gradué de $\dfrac{\mathcal{D}^1_V}{\mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{D}^1_V}$ par la filtration image de celle de $\mathcal{D}^1_V$:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\quad \left(\frac{\mathcal{D}^1_V}{\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V}\right)_k = \frac{\mathcal{D}^1_V(k)}{\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V(k+1)} .$$

De plus on a $\forall k,\ \mathcal{D}^1_V(k)\ \mathcal{E}_X(-1) = \mathcal{E}_X(-1)\ \mathcal{D}^1_V(k)$. Toutes les conditions sont ainsi remplies pour définir dans $\mathcal{A}$ un nouveau crochet de Poisson par bilinéarité en posant pour $\overline{P} \in \dfrac{\mathcal{D}^1_V(j)}{\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V(j+1)}$,

$$\overline{Q} \in \frac{\mathcal{D}^1_V(\ell)}{\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V(\ell+1)}\ ,\quad \{\sigma(\overline{P}),\ \sigma(\overline{Q})\} = \sigma[\overline{P},\overline{Q}] = \overline{\sigma[P,Q]}$$

où P et Q désignement des représentants respectivement de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ et σ désigne le morphisme "symbole principal" de $\dfrac{\mathcal{D}^1_V}{\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V}$ sur $\mathcal{A}$.
Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^1_V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\Psi"'] & gr(\mathcal{D}^1_V) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{A} \\
 & \dfrac{\mathcal{D}^1_V}{\mathcal{D}^1_V\,\mathcal{E}_X(-1)} \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Il est clait que si $P \in \mathcal{D}^1_V(j)$, $P \notin \mathcal{D}^1_V(j-1) + \mathcal{E}_X(-1)\ \mathcal{D}^1_V(j+1)$

(i.e., $\sigma^1_V(P) \neq 0$), on a :

$$\sigma_V^1(P) = \sigma(\Psi(P)) = \boldsymbol{\sigma}(\overline{P}).$$

Par conséquent, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{A}$, on a $\{\overline{a},\overline{b}\} = \{\overline{a},\overline{b}\}_1$,

c'est à dire que les deux crochets définis ci-dessus coincident.

b) <u>Construction de $C_V^1(\mathcal{M})$ pour un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent $\mathcal{M}$</u>

On supposera donc que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent. On peut localement le munir d'une bonne filtration et la proposition 1.1.16. entraîne que $gr(\mathcal{M})$ est alors un $gr(\mathcal{D}_V^1)$-module cohérent.

Le morphisme $\Phi: gr(\mathcal{D}_V^1) \longrightarrow \mathcal{A}$ défini dans a) permet de munir le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$ d'une structure de $\pi_o^{-1} gr(\mathcal{D}_V^1)$-module.

<u>Proposition 1.2.5.: Le support du faisceau de $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$-modules cohérents à gauche</u> :

$$\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V}{\otimes} \pi_o^{-1}(\mathcal{A}_V \underset{gr(\mathcal{D}_V^1)}{\otimes} gr(\mathcal{M}))$$

<u>ne dépend pas de la bonne filtration choisie</u>.

<u>Démonstration</u>

Notons $\mathcal{H} = \mathcal{O}_{T^*X}(-1) gr(\mathcal{D}_V^1) = gr(\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}_V^1)$. Si $\mathcal{L}$ est un $gr(\mathcal{D}_V^1)$-module gradué cohérent le $\mathcal{A}$-module :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{A} \underset{gr(\mathcal{D}_V^1)}{\otimes} \mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{H}\mathcal{L}}$$

est cohérent sur $\mathcal{A}$ par l'exactitude à droite du foncteur $\otimes$. L'idéal annulateur de $\tilde{\mathcal{L}}$ est donc cohérent, homogène, ainsi que sa racine que l'on notera $\mathcal{J}_V(\mathcal{L})$. D'après le lemme 1.2.3. l'idéal annulateur de $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \pi_o^{-1}\mathcal{L}$ coincide avec $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \pi_o^{-1}\mathcal{J}_V(\mathcal{L})$

et donc supp ($\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \pi_o^{-1}\mathcal{L}$) est la variété des zéros de $\pi_o^{-1}\mathcal{J}_V(\mathcal{L})$.

Suivant les notations de la proposition 1.1.8. étant donné une bonne filtration sur $\mathcal{M}$ on a $\mathcal{J}_V(gr(\mathcal{M}))=I\ car_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ et la proposition 1.2.5. en est alors une conséquence immédiate.

Q.E.D.

Définition 1.2.6. : On note $C_V^1(\mathcal{M})$ et on appelle variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de V le support du $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$ -module cohérent

$$\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V}{\otimes} \pi_o^{-1}\mathcal{A}_V \underset{gr(\mathcal{D}_V^1)}{\otimes} gr(\mathcal{M}))$$

pour une bonne filtration de $\mathcal{M}$.

L'existence locale de bonnes filtrations sur $\mathcal{M}$ implique avec la proposition 1.2.5. que l'on peut définir globalement $C_V^1(\mathcal{M})$ comme un sous ensemble fermé analytique conique pour les deux actions de $\mathbb{C}^*$ sur $T_V(T^*X)$- celle liée à la structure de fibré de T^*X sur X et celle liée à la structure de fibré de $T_V(T^*X)$ sur V. Précisons ces deux actions sur un example :

Supposons la variété X munie d'un système de coordonnées (x,ξ) et soit $V=\dot{T}_Z^*X$ le fibré conormal à la sous variété Z d'equa - tions $x_1=\ldots=x_\ell=0$ privé de la section nulle. Munissons $T_V(T^*X)$ des coordonnées :

$$(x",\xi',\tilde{x}',\tilde{\xi}") = (x",\xi',<\tilde{x}', \frac{\partial}{\partial x'}> , <\tilde{\xi}", \frac{\partial}{\partial \xi"}>)$$

où $x'= (x_1,\ldots,x_\ell)$, $x"= (x_{\ell+1},\ldots,x_n)$,

$\xi'= (\xi_1,\ldots,\xi_\ell)$, $\xi"= (\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n)$.

Les actions de $\mathbb{C}^*$ sur $T_V(T^*X)$ sont alors les suivantes :

$$\forall c \in \mathbb{C}^*, \quad (x'',\xi',\tilde{x}',\tilde{\xi}'') \longrightarrow (x'',\xi',c\tilde{x}',c\tilde{\xi}'')$$

$$(x'',\xi',\tilde{x}',\tilde{\xi}'') \longrightarrow (x'',c\xi',\tilde{x}',c\tilde{\xi}'') \ .$$

Proposition 1.2.7. : Soit $0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_V^1$-modules cohérents. On a alors :

$$C_V^1(\mathcal{M}) = C_V^1(\mathcal{L}) \cup C_V^1(\mathcal{N}).$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate des propositions 1.2.5. et 1.1.11.

Q.E.D.

Remarque 1.2.8.

Soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_V^1 u = \mathcal{D}_V^1/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_V^1$. Munissons $\mathcal{M}$ de la bonne filtration :

$$\mathcal{M}_j = \mathcal{D}_V^1(j)u = \frac{\mathcal{D}_V^1(j)}{\mathcal{D}_V^1(j) \cap \mathcal{J}} \ .$$

On a donc $\quad \mathrm{gr}(\mathcal{M}) \simeq \dfrac{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)}{\mathrm{gr}(\mathcal{J})} \simeq \dfrac{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)}{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)\sigma(\mathcal{J})}$

(où $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)\sigma(\mathcal{J})$ désigne l'idéal engendré dans $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)$ par les symboles principaux des éléments de $\mathcal{J}$) et :

$$\mathcal{A} \underset{\mathrm{gr}(\mathcal{D}_V^1)}{\otimes} \mathrm{gr}(\mathcal{M}) \simeq \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}\sigma_V^1(\mathcal{J})}$$

Par conséquent :

$$C_V^1(\mathcal{M}) = \{\theta \in T_V(T^*X), \ \forall Q \in \mathcal{J}, \ \sigma_V^1(Q)(\theta) = 0\}$$

En particulier si $\mathcal{J}$ est engendré par un seul opérateur P, on a:

$$C_V^1(\mathcal{M}) = \{\theta \in T_V(T^*X), \ \sigma_V^1(P)(\theta) = 0\} \ .$$

c) Construction de $C_V^1(\mathcal{M})$ pour un $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$

Désignons par $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent. Il existe localement un $\mathcal{E}_X(o)$-module cohérent qui l'engendre et à fortiori un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent qui l'engendre.

Lemme 1.2.9. : Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent ; alors pour tout entier m,

$$\mathcal{L}(m) = \mathcal{E}_X(m) \underset{\mathcal{E}_X(o)}{\otimes} \mathcal{L}$$

est un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent et on a :

$$(*) \quad C_V^1(\mathcal{L}) = C_V^1(\mathcal{L}(m)) \quad .$$

Démonstration

Comme $\mathcal{E}_X(m)$ est localement libre sur $\mathcal{E}_X(o)$, $\mathcal{L}(m)$ est locale - ment isomorphe à une puissance $\mathcal{L}^N$ et est donc cohérent.

L'égalité (*) est alors une conséquence de la proposition 1.2.7..

Q.E.D.

Lemme 1.2.10. : Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_V^1$-sous-module cohérent de $\mathcal{M}$ qui engendre $\mathcal{M}$.

Alors $C_V^1(\mathcal{L})$ est indépendant du choix de $\mathcal{L}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{L}'$ un autre $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent tel que $\mathcal{E}_X\mathcal{L} = \mathcal{E}_X\mathcal{L}' = \mathcal{M}$. Il suffit de démontrer localement l'inclusion:

$$C_V^1(\mathcal{L}') \subset C_V^1(\mathcal{L}).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{E}_X(m)\mathcal{L} \supset \mathcal{L}'$. D'après la proposition 1.1.18, on a :

$$\mathcal{L}(m) = \mathcal{E}_X(m) \underset{\mathcal{E}_X(o)}{\otimes} \mathcal{L} \simeq \mathcal{E}_X(m)\mathcal{L}$$

et donc $C_V^1(\mathcal{L}') \subset C_V^1(\mathcal{L}(m))$. On applique alors le lemme précédent.

Q.E.D.

<u>Definition 1.2.11.</u> : <u>Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent qui engendre $\mathcal{M}$.</u>

<u>On appelle variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de V et on note $C_V^1(\mathcal{M})$ l'ensemble $C_V^1(\mathcal{L})$.</u>

On peut donc poser risque de confusion

I $\mathrm{car}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ = I $\mathrm{car}_{\mathcal{H}}(\mathcal{L})$.

Le lemme 1.2.9. montre que $C_V^1(\mathcal{M})$ est bien défini globalement comme un sous ensemble de $T_V(T^*X)$; remarquons aussi que, d'après la proposition 1.2.8. $C_V^1(\mathcal{M})$ est fermé analytique et conique pour les deux actions de $\mathbb{C}^*$.

Soit $x^* \varepsilon$ V; on appelle directions 1-microcaractéristiques de $\mathcal{M}$ le long de V en x^* les éléments de la fibre de $C_V^1(\mathcal{M})$ em x^*.

Soit π la projection $T^*X \longrightarrow X$ et H l'isomorphisme symplectique associé à la 2-forme canonique sur T^*X :

$$H : T^*(T^*X) \longrightarrow T(T^*X).$$

On peut donc définir :

$$H \circ \pi^* : T^*X \longrightarrow T(T^*X)$$

et si $\theta \in T^*X$ on identifiera θ et $\pi^*(\theta)$.

Une sous varété Y de X (resp. de T^*X) est <u>non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de V</u> si, pour toute fonction f holomorphe nulle sur Y vérifiant df $\neq$ O, $\mathcal{H}_f = H(df) \not\in C_V^1(\mathcal{M})$.

Soit Σ une feuille bicaractéristique de V.

Alors H induit un isomorphisme :

$$T^*\Sigma \simeq T_V(T^*X) \underset{V}{\times} \Sigma .$$

On dira qu'un vecteur η de $T^*\Sigma$ est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur V s'il en est ainsi de $H(\eta)$, son image dans $T_V(T^*X)$.

<u>Théorème 1.2.12.</u> : <u>Soit</u> :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

<u>une suite exacte de $\mathcal{E}_X$-modules cohérents ; on a alors l'égalité</u>:

$$C_V^1(\mathcal{M}) = C_V^1(\mathcal{M}') \cup C_V^1(\mathcal{M}'') .$$

Démonstration

Soit $\mathcal{M}_o$ un $\mathcal{D}^1_V$-module cohérent qui engendre $\mathcal{M}$. Quitte à remplacer $\mathcal{M}_o$ par $\mathcal{E}_X(m)\,\mathcal{M}_o$ pour m assez grand on peut supposer que $\mathcal{M}'_o = \mathcal{M}_o \cap \mathcal{M}'$ engendre $\mathcal{M}'$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_o \longrightarrow \mathcal{M}_o \xrightarrow{\Phi} \Phi(\mathcal{M}_o) \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{D}^1_V$-modules. Alors $\Phi(\mathcal{M}_o)$ est localement de type fini et donc cohérent car $\mathcal{E}_X$ est pseudocohérent sur $\mathcal{D}^1_V$. Par conséquent $\mathcal{M}'_o$ est cohérent. On applique alors la proposition 1.2.7. .

Q.E.D.

Remarque 1.2.13.

Soit $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X u = \mathcal{E}_{X/\mathcal{J}}$ où $\mathcal{J}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{E}_X$.
Soit $\mathcal{L} = \mathcal{D}^1_V u = \mathcal{D}^1_V / \mathcal{D}^1_V \cap \mathcal{J}$.

Alors $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{D}^1_V$-module cohérent et on conclut de la remarque 1.2.8. que:

$$C^1_V(\mathcal{L}) = \{\theta \in T_V(T^*X),\ \forall Q \in \mathcal{D}^1_V \cap \mathcal{J},\ \sigma^1_V(Q)(\theta) = 0\}.$$

Rappelons maintenant qu'une sous variété V involutive de T^*X est maximalement dégénérée si l'ensemble des points où la 1-forme canonique ω_X s'annule est une sous variété lagrangienne.

On montre dans [20] que l'on peut, par transformation canonique, identifier localement V à la sous variété de $\dot{T}^*\mathbb{C}^n$ d'équations

$$(*) \quad x_1 = \dots = x_r = \xi_{n+1} = \dots = \xi_p = 0,$$

où p est la codimension de V.

Théorème 1.2.14. : Supposons V maximalement dégénérée et soit $\mathcal{M} = \mathcal{E}_{X/\mathcal{E}_X P}$ où $P \in \mathcal{D}^1_V(m)$, $P \notin \mathcal{D}^1_V(m-1)$ et $P \notin \mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{D}^1_V(m+1)$.
Alors $C^1_V(\mathcal{M}) = \{\theta \in T_V(T^*X),\ \sigma^1_V(P)(\theta) = 0\}$.

Démonstration

Le théorème étant de nature locale, on peut utiliser des coordonnées sur X de sorte que V soit définie par les équations (*). Pour simplifier les calculs, on supposera r=O et p<n, c'est-à-dire V régulière, le raisonnement étant le même dans le cas général.

Soit $Q \in \mathcal{D}_V^1 \cap \mathcal{E}_X P$ un opérateur d'ordre $r>0$ s'écrivant $Q=RP$. On va montrer que R appartient à $\mathcal{D}_V^1$. Soit $P(x,\xi)=\sum_{j\leq m} P_j(x,\xi)$ le symbole total de P, $Q(x,\xi)=\sum_{j\leq r} Q_j(x,\xi)$ le symbole total de Q et $R(x,\xi)=\sum_{j\leq r-m} R_\ell(x,\xi)$ le symbole total de R. Soit I_V l'idéal de définition de V: par hypothèse il existe j, $0<j\leq m$ tel que:

$$(**)\quad \begin{cases} P_j \in I_V^{j+1} & \text{si} \quad j > j_o \\ P_{j_o} \notin I_V^{j_o+1} & \end{cases}$$

On démontrera par récurrence double sur s et j, décroissante en j que pour tout j et s positifs R_j appartient à I_V^{j-s}.

Supposons cette propriété vraie pour s-1, i.e., pour tout j, $R_j \in I_V^{j-s-1}$.

Supposons aussi que pour $j>j_1$, $R_j \in I_V^{j-s}$. On va vérifier que $R_{j_1} \in I_V^{j_1-s}$. On a ;

$$(*)\quad Q_{j_o+j_1} = \sum_{\substack{|\alpha|\geq 0 \\ j_o+j_1=\ell-|\alpha|+k}} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha R_\ell \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha P_k$$

- Pour $\ell \leq j_1$ on a $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha R_\ell \in I_V^{\ell-s-1-|\alpha|}$

et pour $k > j_o$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha P_k \in I_V^{k+1}$;

- Pour $\ell > j_1$ on a $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha R_\ell \in I_V^{\ell-s-|\alpha|}$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha P_k \in I_V^k$.

- Pour $\ell \leq j_1$, $k \leq j_o$, on a :

$$j_o + j_1 = k + \ell - |\alpha| \leq j_o + j_1 - |\alpha|$$

et donc $\alpha=0$, $\ell=j_1$, $k = j_o$.

Par conséquent $P_{j_o} R_{j_1} \varepsilon I_V^{j_o+j_1-s}$ ce qui entraîne avec (*) que $R_{j_1} \varepsilon I_V^{j_1-s}$.

Q.E.D.

Rappelons maintenant la construction de la variété microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de V de M. Kashiwara et P. Schapira [12] que l'on note $C_V(\mathcal{M})$:

Remarquons d'abord que $\mathcal{A}_V = \bigoplus_{j\geq o} I_V^j / I_V^{j+1}$ est l'anneau gradué associé à la filtration de $\mathcal{O}_{T^*X}$ par les puissances de l'idéal I_V.

On note alors σ_V l'application "symbole" (cf.§.1) de $\mathcal{O}_{T^*X}$ dans $\mathcal{A}_V$:

- si f ε $\mathcal{O}_{T^*X}$, $\sigma_V(f)$ est la partie homogène de plus bas degré non identiquement nulle du développement de Taylor de f le long de V.

Pour chaque k ε $\mathbb{Z}$ notons $\sigma_{V,k}$ la restriction de σ_V à $\mathcal{O}_{T^*X}(k)$. Soit Φ le morphisme d'anneaux associé aux $\sigma_{V,k}$:

$$\Phi : gr(\mathcal{E}_X) \longrightarrow \mathcal{A}_V \quad .$$

On notera encore σ_V le morphisme composé :

$$\mathcal{E}_X \xrightarrow{\ \sigma\ } gr(\mathcal{E}_X) \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathcal{A}_V .$$

Le morphisme Φ munit $\mathcal{A}_V$ d'une structure de $gr(\mathcal{E}_X)$-module : si f ε $gr(\mathcal{E}_X)$, a ε $\mathcal{A}_V$, on pose $fa=\Phi(f)a$.

Soit maintenant $\mathcal{M}_o$ un $\mathcal{E}_X(0)$-sous-module cohérent de $\mathcal{M}$ qui l'engendre et munissons $\mathcal{M}$ de la bonne filtration sur $\mathcal{E}_X$

$$\mathcal{M}_j = \mathcal{E}_X(j)\,\mathcal{M}_o, \quad \forall j \ \varepsilon\ Z \ .$$

Comme la filtration de $\mathcal{E}_X$ est noethérienne et $gr(\mathcal{E}_X)$ est noethérien $gr(\mathcal{M})$ est $gr(\mathcal{E}_X)$-cohérent . On pose alors:

$$C_V(\mathcal{M}) = \operatorname{supp}\left(\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V}{\otimes} \pi_o^{-1}(\mathcal{A}_V \underset{gr(\mathcal{E}_X)}{\otimes} gr(\mathcal{M}))\right)$$

On définit ainsi un ensemble analytique fermé de $T_V(T^*X)$, conique par les deux actions de $\mathbb{C}^*$. En particulier si $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{E}_X$, $\mathcal{M}_j = \mathcal{E}_X(j)/\mathcal{E}_X(j)\cap\mathcal{J}$, on a l'isomorphisme

$gr(\mathcal{M}) \simeq \dfrac{gr(\mathcal{E}_X)}{gr(\mathcal{J})}$ (où l'on considère $\mathcal{J}$ muni de la filtration induite).

On en déduit l'isomorphisme :

$$\mathcal{A}_V \underset{gr(\mathcal{E}_X)}{\otimes} gr(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{A}_V}{\mathcal{A}_V\sigma_V(\mathcal{J})}$$

(où $\mathcal{A}_V\,\sigma_V(\mathcal{J})$ désigne l'idéal engendré par l'image de $\mathcal{J}$ par le morphisme σ_V) et on a donc :

$$C_V(\mathcal{M}) = \{\theta \in T_V(T^*X),\ \forall P \in \mathcal{J},\ \sigma_V(P)(\theta) = 0\}$$

Comme on se place en dehors de T^*_XX on a localement des $\mathcal{O}_{T^*X}(0)$ - isomorphismes $\dfrac{\mathcal{M}_j}{\mathcal{M}_{j-1}} \simeq \dfrac{\mathcal{M}_o}{\mathcal{M}_{-1}}$. Notons $\overline{\mathcal{M}_o} = \dfrac{\mathcal{M}_o}{\mathcal{M}_{-1}}$.

On a alors $gr(\mathcal{M}) = gr(\mathcal{E}_X)\,\overline{\mathcal{M}_o} = gr(\mathcal{E}_X) \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} \overline{\mathcal{M}_o}$

et donc:

$$C_V(\mathcal{M}) = \operatorname{supp}\left[(\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V}{\otimes} \pi_o^{-1}(\mathcal{A}_V \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} \overline{\mathcal{M}_o})\right] =$$

$$= \operatorname{supp}\left[\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_o^{-1}\mathcal{A}_V}{\otimes} \pi_o^{-1}\Big(\bigoplus_{j\geq o} \frac{I_V^j\,\overline{\mathcal{M}_o}}{I_V^{j+1}\,\overline{\mathcal{M}_o}}\Big)\right]$$

ce qui montre que $C_V(\mathcal{M})$ s'identifie au cone normal au support de $\mathcal{M}$ le long de V :

$$C_V(\mathcal{M}) = C_V(\operatorname{supp}\mathcal{M}) \quad \text{(cf. [11])}.$$

Munissons $\mathcal{D}_V^1\,\mathcal{M}_o$ de la filtration $\mathcal{D}_V^1(j)\mathcal{M}_o$. On a alors l'isomorphisme :

$$(*) \quad \mathcal{A} \underset{gr(\mathcal{D}_V^1)}{\otimes} gr(\mathcal{D}_V^1\mathcal{M}_o) \simeq \mathcal{O}_V(o) \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} gr(\mathcal{D}_V^1\mathcal{M}_o)$$

car on a :

$$\mathcal{A} = \frac{gr(\mathcal{D}_V^1)}{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{O}_V(o) \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} gr(\mathcal{D}_V^1)$$

Comme $\mathcal{A}_V$ est plat sur $\mathcal{A}$ on en déduit les injections :

$$\mathcal{O}_V \underset{T^*X(o)}{\otimes} \bar{\mathcal{M}}_o \longrightarrow \mathcal{O}_V \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(o)}{\otimes} gr(\mathcal{D}_V^1\mathcal{M}_o) \longrightarrow \mathcal{O}_V \underset{gr(\mathcal{D}_V^1)}{\otimes} gr(\mathcal{D}_V^1\mathcal{M}_o)$$

d'où l'on déduit l'inclusion :

$$C_V(\mathcal{M}) \subset C_V^1(\mathcal{M})$$

Exemple 1.2.15.

Soit $X=\mathbb{C}$, t une coordonnée de X, P l'operateur $t^2 D_t + 1$, $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$ et $V = \dot{T}^*_{\{o\}}C$. Munissons T^*X des coordonnées (t,τ) et $T_V(T^*X)$ des coordonnées $(\tau,\tilde{t})$ ($\tilde{t}$ est la composante suivant le vecteur $\partial/\partial t$) avec $\tau\neq 0$.
On a alors :

$$C_V(\mathcal{M}) = \{\theta = (\tau,\tilde{t}) \in T_V(T^*X),\ \sigma_V(P)(\theta) = \tau\tilde{t}^2 = 0\}$$

et donc $C_V(\mathcal{M}) = \{\tilde{t} = 0\}$.
Mais d'après le théorème 1.2.14., on a $C_V^1(\mathcal{M}) = T_V(T^*X)$.

La proposition suivante montre que la notion de variété 1-microcaractéristique généralise la condition de Lévi dans le cas d'un $\mathcal{E}_X$-module défini par un seul opérateur ([2]).

Proposition 1.2.16. : Soit $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$ avec $P \in \mathcal{D}_V^1(m)$, $P \notin \mathcal{D}_V^1(m-1)$ et $P \notin \mathcal{D}_V^1\,\mathcal{E}_X(-1)$. Alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) $\sigma(P) \notin I_V(0)\ I_V(1)^m$,

(ii) $C_V^1(\mathcal{M}) = C_V(\mathcal{M})$.

Démonstration

La condition (ii) équivaut, d'après le théorème 1.2.14., à l'égalité $\sigma_V(P) = \sigma_V^1(P)$ et donc à $\sigma_V^1(P) \neq 0$, autrement dit, à (i).

Q.E.D.

Remarquons que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-module défini par un seul opérateur P quitte à multiplier P par un opérateur elliptique convenable, on peut toujours supposer que P vérifie les hypothèses do Théorème 1.2.14. et on retrouve ainsi la condition de Lévi pour un opérateur, dûe à J.M. Bony [2] .

Proposition 1.2.17. : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et supposons que $\theta \in T_V(T^*X)_{x^*}$ est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de V en x^*. Alors pour toute section u de $\mathcal{M}$ il existe $P \in \mathcal{E}_X$ défini au voisinage de x^* vérifiant :

1) $Pu = 0$,

2) $\theta \notin C_V^1(\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P)$.

Démonstration

Soit $\mathcal{J} = \mathrm{ann}\ u$; comme $C_V^1(\mathcal{M})$ contient $C_V^1(\mathcal{E}_X/\mathcal{J})$, θ n'appartient pas à $C_V^1(\mathcal{E}_X/\mathcal{J})$ et il existe donc $P \in \mathcal{D}_V^1 \cap \mathcal{J}$ vérifiant $\sigma_V^1(P)(\theta) \neq 0$. Par conséquent P vérifie 1) et 2).

Q.E.D.

§3. - Opérations

a) Adjoint

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et notons $\mathcal{M}^* = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X)$ l'adjoint de $\mathcal{M}$. C'est un complexe de $\mathcal{E}_X$-modules à droite. Remarquons que l'on peut formuler la notion de variété 1-microcaractéristique pour de tels modules exactement comme dans ce qui précède, les modules à droite remplaçant partout les modules à gauche. Si $\mathcal{M}^{\bullet}$ est un complexe borné à cohomologie cohérente, on pose :

$$C_V^1(\mathcal{M}^{\bullet}) = \bigcup_j C_V^1(\mathcal{H}^j(\mathcal{M}^{\bullet})) .$$

Théorème 1.3.1. : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent. Alors :

$$c_V^1(\mathcal{M}) = c_V^1(\mathcal{M}^*).$$

Démonstration

Observons qu'il suffit de vérifier l'inclusion :

$$(*) \qquad c_V^1(\mathcal{M}^\bullet) \supset \bigcup_j c_V^1(\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{E}_X))$$

pour tout complexe $\mathcal{M}^\bullet$ borné à cohomologie cohérente. En effet, en remplaçant dans (*) $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}^*$ on obtient :

$$c_V^1(\mathcal{M}) \subset c_V^1(\mathcal{M}^*) \subset \bigcup_j c_V^1(\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X))$$

car $(\mathcal{M}^*)^*$ est quasi isomorphe à $\mathcal{M}$ (cf. [20]). Pour démontrer (*) on se ramène à $\mathcal{M}^\bullet$ de la forme $0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots$ où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{E}_X$-module cohérent. En outre si la propriété (*) est vraie pour un nombre fini de $\mathcal{E}_X$-modules $\mathcal{L}^i$, elle sera vraie pour leur somme directe.

Supposons d'abord $\mathcal{L}$ de la forme $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$. Alors $\mathcal{L}^*$ s'identifie à la cohomologie du complexe $0 \longrightarrow \mathcal{E}_X \xrightarrow{P} \mathcal{E}_X \longrightarrow 0 \ldots$ où P opère à gauche dans $\mathcal{E}_X$.

Comme P est injectif, on a :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{E}_X) = 0.$$

Par conséquent $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{E}_X) \simeq \dfrac{\mathcal{E}_X}{P\,\mathcal{E}_X}$ et

$c_V^1(\mathcal{E}_X/P\mathcal{E}_X) = c_V^1(\mathcal{L})$. L'inclusion (*) est donc vraie pour tout module de la forme $\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P_i$. On démontre le cas général pour la méthode de Kashiwara (cf. [4]).

Montrons par récurrence sur j que :

$$c_V^1(\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{E}_X)) \subset c_V^1(\mathcal{L}).$$

Soit $(u_1, \ldots, u_s)$ un système local de générateurs de $\mathcal{L}$. Soit

$\theta \in T_V(T^*X)$, $\theta \notin C_V^1(\mathcal{L})$. Alors il existe des opérateurs P_j, $j = 1,\dots,s$, tels que :

1) $\forall j$, $P_j\, u_j = 0$

2) $\theta \notin C_V^1(\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P_j)$.

Soit $\mathcal{L}' = \bigoplus_{j=1}^{s} \left(\frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X P_j}\right)$ et soit $\mathcal{N}$ le $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini par la suite exacte :

$$(**) \qquad 0 \longleftarrow \mathcal{L} \longleftarrow \mathcal{L}' \longleftarrow \mathcal{N} \longleftarrow 0 .$$

Alors $\theta \notin C_V^1(\mathcal{N})$.

Posons $T_j = \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{E}_X)$, et L_j, R_j les $\mathcal{E}_X$-modules correspondants pour $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{N}$.

On a une suite exacte longue :

$$(***) \qquad 0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow R_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow R_{i-1} \longrightarrow T_i \longrightarrow L_1 \; \dots$$

Comme $\mathcal{L}'$ vérifie (*), pour tout j, θ n'appartient pas à $C_V^1(L_j)$. En outre, on a $T_0 \subset L_0$ et donc $\theta \notin C_V^1(T_0)$.

Par conséquent $C_V^1(T_0) \subset C_V^1(\mathcal{L})$ et de la même manière $C_V^1(R_0) \subset C_V^1(\mathcal{L})$.

Supposons maintenant $j \geq 1$ et (*) vrai pour $j-1$; on a alors:

$$C_V^1(R_{j-1}) \subset C_V^1(\mathcal{L}) \quad \text{et} \quad \theta \notin C_V^1(R_{j-1}) \quad .$$

Par conséquent, on a :

$$C_V^1(T_j) \subset C_V^1(R_{j-1}) \cup C_V^1(L_j) \quad \text{et } \theta \notin C_V^1(T_j).$$

Q.E.D.

b) Produit

Soient maintenant X et Y deux variétés analytiques complexes, V et V' deux sous variétés lisses coniques involutives de $\dot{T}^*X$ et $\dot{T}^*Y$ respectivement. Soit $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) un $\mathcal{E}_X$-module cohérent (resp. un $\mathcal{E}_Y$-module cohérent). On définit le produit tensoriel de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ (cf. [30])

$$\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{M}' \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{E}_{X\times Y} \underset{p_1^{-1}\mathcal{E}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{E}_Y}{\otimes} (p_1^{-1}\mathcal{M} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{M}')$$

où p_1 et p_2 désignent les projections de $T^*X \times T^*Y$ sur T^*X et T^*Y respectivement.

Théorème 1.3.2. : On a l'égalité :

$$C^1_{V\times V'}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{M}') = C^1_V(\mathcal{M}) \times C^1_V(\mathcal{M}')$$

Démonstration

Soit $\mathcal{M}_o$ (resp. $\mathcal{M}'_o$) un $\mathcal{D}^1_V$-module cohérent (resp. un $\mathcal{D}^1_{V'}$-module cohérent) qui engendre $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$). Soit $\mathcal{M}_o \hat{\otimes} \mathcal{M}'_o$ le $\mathcal{D}^1_{V\times V'}$-module cohérent :

$$\mathcal{D}^1_{V\times V'} \underset{p_1^{-1}\mathcal{D}^1_V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{D}^1_{V'}}{\otimes} (p_1^{-1}\mathcal{M}_o \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{M}'_o)$$

Alors il est facile de voir que $\mathcal{M}_o \hat{\otimes} \mathcal{M}'_o$ engendre $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{M}'$. Soient maintenant deux bonnes filtrations sur $\mathcal{M}_o$ et $\mathcal{M}'_o$, respectivement :

$$\mathcal{M}_{ok} = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{F}^k_V u_i, \mathcal{M}'_{ok} = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{F}^k_{V'} u'_j .$$

On leur associe la bonne filtration produit sur $\mathcal{M}_o \hat{\otimes} \mathcal{M}'_o$:

$$(\mathcal{M}_o \hat{\otimes} \mathcal{M}'_o)_k = \sum_{i,j} \mathcal{F}^k_{V\times V'} u_i \hat{\otimes} u'_j \quad \text{où}$$

$v_i \hat{\otimes} u'_j$ désigne l'image de $u_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} u'_i$ dans $\mathcal{M}_o \hat{\otimes} \mathcal{M}'_o$.

On a donc:

$$(\mathcal{M}_o \otimes \mathcal{N}'_o)_k = \mathcal{E}_{X\times Y}(O) \underset{p_1^{-1}\mathcal{E}_X(o) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{E}_Y(o)}{\otimes} \left(\sum_{p+i=k} \mathcal{F}_V^p \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{F}_{V'}^t,\ u_i \otimes u'_j \right)$$

et le théorème en résulte.

Q.E.D.

c) Division

Soit maintenant $X=\mathbb{C}^n$ et munissons T^*X des coordonnées (x,ξ), $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Soit V la sous variété de $\dot{T}^*\mathbb{C}^n$ d'équations $\xi_1=\ldots=\xi_r=x_{n+1}=\ldots=x_p=O$.

Théorème 1.3.3. (Division)

Soit $P \in \mathcal{D}_V^1$ un opérateur d'ordre m tel que $H(\partial x_1) \not\in C_V^1(\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P)$. Alors quel que soit $Q \in \mathcal{D}_V^1$ il existe P et R de manière unique tels que

1) $Q = SP + R$,

2) ordre de R < ordre de Q et $\mathrm{ad}^m_{x_1}(R)=O$

(où $\mathrm{ad}_{x_1}(R) = [x_1,R]$).

Démonstration

On utilisera le lemme suivant :

Lemme 1.3.4. : Soit $x^* \in V$ et soit $f(x,\xi) \in I_V(1)^m$, $m\geq O$, vérifiant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^\nu f(x^*) = O, \quad \nu < m$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^m f(x^*) \neq O.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $g \in I_V(1)^k$ il existe manière unique $s \in I_V(1)^{k-m}$ et $r \in I_V(1)^k$ tels que :

i) $g = sf + r$,

ii) r est un polynôme en ξ_1 de degré inférieur à m.

Démonstration

Le théorème de division de Weierstrass classique assure l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes s et r vérifiant i) et ii) et on se ramène donc à monter que s appartient à I_V^{k-m} . On a alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^m g = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^m (sf) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{m-i} s \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{i} f$$

et il suffit de remarquer que pour i

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^i f \in I_V^{m-i} \ , \ \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^i f \notin I_V^{m-i+1} \ .$$

Q.E.D.

Le lemme 1.3.4. appliqué au symbole principal de P permet de raisonner par récurrence décroissante sur l'ordre de Q et on se ramène au cas où est d'ordre zéro; on applique alors le théorème de division microdifférentiel ([20]).

Q.E.D.

Corollaire 1.3.5. : Soit $P \in \mathcal{D}_V^1$ un opérateur d'ordre m et supposons que $H(\partial x_1)$ est non 1-microcaractéristique pour P le long de V. Il existe alors des opérateurs E et $\tilde{P}$ définis au voisinage de x^* vérifiant :

$$P = E\,\tilde{P}$$

1) E elliptique d'ordre zéro,

2) $\tilde{P}(x,D_x) = D_1^m + \sum_{o\leq j<m} A_j(x,D')D_1^j$

où les $A_j(x,D')$ désignent des opérateurs dans $\mathcal{D}_V^1(m-j)$ indépendants de D_1.

Démonstration

On applique le théorème précédent avec $Q=D_1^m$.

Q.E.D.

d) Restriction

Nous allons étudier la restriction $\mathcal{M}_Y$ d'un $\mathcal{E}_X$-module $\mathcal{M}$ cohérent à une sous variété Y de X. Rappelons la construction de $\mathcal{M}_Y$ (cf. [20]) : soit π la projection de T^*X sur X, ρ la projection de $T^*X \underset{X}{\times} Y$ sur T^*X, ω le plongement de $T^*X \underset{X}{\times} Y$ dans T^*X et notons avec [20] :

$$\mathcal{E}_{Y\to X} = \pi^{-1}\mathcal{E}_Y \underset{\pi^{-1}\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{E}_X \ .$$

On montre dans [20] que ce faisceau est muni d'une structure naturelle de $(\rho^{-1}\mathcal{E}_Y, \omega^{-1}\mathcal{E}_X)$- bimodule et on pose :

$$\mathcal{M}_Y = \rho_*(\mathcal{E}_{Y\to X} \underset{\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{M}) \ .$$

Si Y est non caractéristique pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_Y$ est un $\mathcal{E}_Y$-module cohérent et la variété caractéristique de $\mathcal{M}_Y$, $SS(\mathcal{M}_Y)$, est contenue dans $\rho(SS(\mathcal{M}) \cap T^*X \underset{X}{\times} Y)$ (cf. [20]).

Soit d la codimension de Y et p la codimension de V. On supposera l'existence de d fonctions homogènes de degré zéro nulles sur Y, $f_1,\dots,f_d$, et de d fonctions homogènes de degré un nulles sur V, $g_1,\dots,g_d$ telles que la matrice (d,d) des crochets de Poisson:

$$\{f_i,g_j\}|_V \quad \text{soit non dégénérée.}$$

On dit alors que V et $T^*X \underset{X}{\times} Y$ sont orthogonales . Soit $x^* \in V$ et soit E la 2-forme symplectique sur $T_{x^*}(T^*X)$. Notons :

$$(T_{x^*}V)^{\perp} = \{v \in T_{x^*}(T^*X),\ \forall w \in T_{x^*}(V),\ E(v,w)=0\} \ .$$

Lemme 1.3.6. : Sous les hypothèses précédentes :

(i) V et $T^*X \underset{X}{\times} Y$ sont transversales ,

(ii) la restriction de ρ à $V \cap T^*X \underset{X}{\times} Y$ est une immersion.

Démonstration

D'après l'hypothèse d'orthogonalité, on a :

(*) $\quad T_{x^*}(T^*X \underset{X}{\times} Y) \cap T_{x^*}(V) = 0$ et (i) en résulte car V

étant involutive, on a $T_{x^*}(V)^{\perp} \subset T_{x^*}(V)$ et donc

$T_{x^*}(T^*X \underset{X}{\times} Y) + T_{x^*}(V) = T_{x^*}(T^*X)$;

(**) l'application tangente $T_{x^*}(\rho)$ associée à ρ est injective ce qui équivaut à (ii).

Q.E.D.

<u>Lemme 1.3.7.</u> : <u>La sous variété de</u> $\dot{T}^*Y$

$$V' = \rho(V \cap T^*X \underset{X}{\times} Y)$$

<u>est involutive, lisse et homogène</u> .

<u>Démonstration</u>

On considère T^*X muni des coordonnées symplectiques (x,ξ) de sorte que V soit définie par les équations $g_1 = \ldots = g_p = 0$ avec $\{g_i, g_k\} = 0$, $\forall i,k$, g_i homogène de degré un, les dg_i indépendantes sur V et $T^*X \underset{X}{\times} Y$ définie par $f_1(x,\xi) = \ldots = f_d(x,\xi) = 0$, avec $\{f_i, f_k\} \equiv 0$, $\forall i,k$, f_i homogène de degré zéro et les df_i linéairement indépendantes sur $T^*X \underset{X}{\times} Y$.

Supposons par exemple $\{f_1, g_1\} \neq 0$. On peut évidemment supposer $g_1 = \xi_1$. On a donc $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ et on peut écrire

$f_1(x,\xi) = a_1(x,\xi)(x_1 + h(x',\xi))$ avec a_1 inversible .

En remplaçant f_1 par $a_1^{-1} f_1$ on a $\{f_1, g_1\} = 1$ et on peut donc écrire dans un nouveau système de coordonnées $f_1 = x_1$, $g_1 = \xi_1$.

Comme $\{g_i, \xi_i\} = 0$, les g_i sont indépendantes de x_1. En divisant g_i par ξ_1 pour $i>1$ on peut aussi supposer g_i indépendant de ξ_1. De même, on conclut de $\{f_i, x_1\} = 0$ que les f_i sont indépendants de ξ_1, et, en divisant f_i par x_1, pour $i>1$, on peut supposer f_i indépendante de ξ_1. Une transformation canonique indépendante de (x_1, ξ_1) permet de supposer $f_2 = x_2$. Supposons ensuite que $\{f_2, g_2\} \neq 0$. Alors on peut écrire :

$$g_2 = a_2(x',\xi')\ \xi_2 + b_2(x',\xi'')$$

avec b_2 indépendant de (x_1,ξ_1,ξ_2) et a_2 inversible. En remplaçant g_2 par $a_2^{-1}\ g_2$ on obtient $\{f_2,g_2\} = 1$ et à nouveau par une transformation canonique indépendante de (x_1,x_2,ξ_1) on peut supposer $g_2=\xi_2$.

En recommençant ce raisonnement par rapport à f_i, $i=2,\dots,d$, on peut donc se ramener à la situation locale suivante :

- Y est la sous variété de $\mathbb{C}^n$ d'équations $x_1=\dots=x_d=0$,
- V est défine dans $T^*\mathbb{C}^n$ par les équations

$\xi_1 = \dots = \xi_d = g_{d+1}(x'',\xi'') = \dots = g_p(x'',\xi'') = 0$ où les g_i ne dépendant pas de $(x_1,\dots,x_d,\xi_1,\dots,\xi_d)$. Alors V' est défine dans T^*Y par les équations $g_{d+1}=\dots=g_p=0$ ce qui entraîne bien que V' est lisse, involutive et homogène.

Q.E.D.

Notons maintenant $\mathcal{D}^1_{V',V}$ le faisceau

$$\pi^{-1}\mathcal{O}_Y \underset{\pi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}^1_V \simeq \mathcal{C}_{Y\to X}(0) \underset{\mathcal{C}_X(0)}{\otimes} \mathcal{D}^1_V\ .$$

Alors $\mathcal{D}^1_{V',V}$ est évidemment muni d'une structure de $\mathcal{D}^1_V$-module à droite.

<u>Lemme 1.3.7'</u> . : <u>$\mathcal{D}^1_{V',V}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}^1_{V'}$-module à gauche</u>.

<u>Démonstration</u>

Il suffit évidemment de démontrer que l'application naturelle de $\mathcal{D}^1_{V',V}$ dans $\mathcal{C}_{Y\to X}$ est injective et que $\mathcal{D}^1_{V',V}$ est invariant à gauche par $\rho^{-1}\mathcal{E}_{V'}$. On peut utiliser des coordonnées locales et supposer Y défine par $x_1=\dots=x_d=0$ et V définie par

$$\xi_1=\dots=\xi_d = g_{d+1}(x'',\xi'') = \dots = g_p(x'',\xi'') = 0.$$

Le lemme 1.2.1. entraîne que si P appartient à

$$\mathcal{D}^1_V \cap (x_1\mathcal{C}_X + \dots + x_d\mathcal{C}_X) \text{ et s'écrit :}$$

$$P = x_1 P_1 + \ldots + x_d P_d$$

les P_i appartiennent à $\mathcal{D}^1_V$. Il suffit alors de remarquer que les opérateurs dans $\rho^{-1}\mathcal{J}_V$, commutent avec $x_1, \ldots, x_d$.

Q.E.D.

Théorème 1.3.8. : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent.
Soit V une sous variété involutive lisse maximalement dégénérée de T^*X et soit Y une sous variété de X orthogonale à V, non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de V. On a alors l'inclusion :

$$C^1_{V'}(\mathcal{M}_Y) \subset \lambda(C^1_V(\mathcal{M}) \cap T_V(T^*X \underset{X}{\times} Y))$$

où λ désigne l'application naturelle

$$T_V(T^*X \underset{X}{\times} Y) \longrightarrow T_{V'}(T^*Y)$$

associée à ρ.

Démonstration

On utilisera les lemmes suivants :

Lemme 1.3.9. : Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}^1_V$-module cohérent et soit Y une sous variété de X orthogonale à V, non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{L}$. Alors :

(i) $\mathcal{L}_Y \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{D}^1_{V',V} \underset{\mathcal{D}^1_V}{\otimes} \mathcal{L}$ est un $\mathcal{D}^1_{V'}$-module cohérent et

(ii) $C^1_{V'}(\mathcal{L}_Y) \subset \lambda(C^1_V(\mathcal{L}) \cap T_V(T^*X \underset{X}{\times} Y))$

Démonstration

Montrons i) et ii) dans le cas où d=1 .

i) Comme $C^1_V(\mathcal{L}) \cap T_V(T^*X \underset{X}{\times} Y)$ est un ensemble analytique conique de $T_V(T^*X)$ l'hypothèse entraîne que la restriction de λ à

$C^1_V(\mathcal{L}) \cap T_V(T^*X \underset{X}{\times} Y)$ est propre et donc à fibre finie. Cela nous permet d'adapter la méthode de [20], lemme 3.5.2. . Plaçons nous au voisinage de $x^* \varepsilon (T^*X \underset{X}{\times} Y) \cap V$.

En coordonnées locales on peut se ramener comme dans le lemme 1.3.7. à Y défine par $x_1=0$, et V défine par :

$$\xi_1 = g_2 = \ldots = g_p = 0,$$

où les g_i sont indépendantes de (x_1,ξ_1) et $x^*=(x_o,\xi_o)$ avec $x_o=0$, $\xi_n=1$.

Le corollaire 1.3.5. entraîne alors comme dans [20] que l'opérateur :

$$x_1 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

est injectif et on peut donc se ramener au cas où $\mathcal{L} \simeq \dfrac{\mathcal{D}^1_V}{\mathcal{D}^1_V P}$ avec

$P(x,D_x) = D_1^m + \sum\limits_{o\leq j<m} A_j(x,D')D_1^j$. Remarquons que si $y^* \varepsilon V'$ alors

$\rho^{-1}(y^*) \cap V$ se réduit à un seul point et on à

$\mathcal{L}_Y \simeq \dfrac{\mathcal{D}^1_V}{x_1\mathcal{D}^1_V + \mathcal{D}^1_V P}$. Le théorème 1.3.3. permet alors d'appliquer la

méthode de [20] pour montrer que si u désigne le générateur de $\mathcal{L}$ alors $(1 \otimes u,\ldots,1 \otimes D_1^{m-1}\, u)$ est une base de $\mathcal{L}_Y$ sur $\mathcal{D}^1_{V'}$.

Pour montrer ii) on peut évidemment supposer $\mathcal{L}$ muni d'un seul générateur, $\mathcal{L} = \mathcal{D}^1_V u = \mathcal{D}^1_{V/\mathcal{J}}$. Comme Y <u>est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{L}$ il existe dans $\mathcal{J}$ un opérateur de type Weierstrass en D_1</u>, d'ordre $M\geq 0$:

$$P(x,D_x) = D_1^M + \sum_{o\leq j<M} A_j(x,D')\, D_1^j$$

Alors tout opérateur $Q \,\varepsilon\, \mathcal{D}^1_V$ s'écrit de manière unique :

$$Q = RP + \sum_{o\leq j<M} B_j(x,D')\, D_1^j$$

où les B_j ne dépendent pas de D_1 ce qui implique que $\mathcal{L}$ est engendré par $u,\dots,D_1^{M-1}u$ sur le sous anneau $\tilde{\mathcal{D}}_V^1$ de $\mathcal{D}_V^1$ des opérateurs indépendants de D_1. Munissons $\mathcal{L}$ de la bonne filtration :

$$\mathcal{L}_j=\mathcal{D}_V^1(j)u = \sum_{0\le \ell<M} \tilde{\mathcal{D}}_V^1(j-\ell)D_1^j u\ .$$

Soit $\tilde{\mathcal{E}}_X$ le sous anneau de $\mathcal{E}_X$ des opérateurs indépendants de D_1, $\tilde{\mathcal{F}}_V=\mathcal{F}_V\cap\tilde{\mathcal{E}}_X$ et posons, pour $j<0$, $\tilde{\mathcal{F}}_V^j=\tilde{\mathcal{E}}_X(j)$.
On a alors, pour tout $j\in\mathbb{Z}$, $\tilde{\mathcal{F}}_V^j=\tilde{\mathcal{D}}_V^1(j)=\mathcal{D}_V^1\cap\tilde{\mathcal{E}}_X(j)$.

Par suite $\forall k$, $\forall j\ge 0$, on a :

$$(*)\quad \mathcal{F}_V^j\mathcal{L}_k=\mathcal{L}_{j+k}=\sum_{0\le\ell<M}\tilde{\mathcal{F}}_V^{j+k-\ell}D_1^\ell u=\tilde{\mathcal{F}}_V^j\mathcal{L}_k\ .$$

Soient maintenant (x^*,θ) les coordonnées de $T_V(T^*X)$, (y^*,θ') celles de $T_{V'}(T^*Y)$ et soit $p=(y_0^*,\theta_0')\notin\lambda(C_V^1(\mathcal{L})\cap T_V(T^*X\underset{X}{\times}Y))$.

Comme λ est propre et $C_V^1(\mathcal{L})\cap T_V(T^*X\underset{X}{\times}Y)$ est un ensemble analytique algébrique en les fibres de $T_V(T^*X)\longrightarrow V$, $\lambda(C_V^1(\mathcal{L})\cap T_V(T^*X\underset{X}{\times}Y))$ est un ensemble analytique et il existe une fonction holomorphe $f(y^*,\theta')$ homogène, polynomiale en θ', vérifiant:

$$f(y_0^*,\theta_0')=0,\quad f\Big|_{C_V^1(\mathcal{L})\cap T_V(T^*X\underset{X}{\times}Y)}=0$$

On appliquera le lemme suivant :

<u>Lemme 1.3.10.</u> : <u>Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_V^1$-module cohérent muni d'une bonne filtration $\{\mathcal{L}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et soit $Q\in\mathcal{D}_V^1$, d'ordre m, tel que</u> :

$$\sigma_V^1(Q)\Big|_{C_V^1(\mathcal{L})\cap T_V(T^*X\underset{X}{\times}Y)}=0\ .$$

<u>Alors il existe $\ell_0\ge 0$ tel que $\ell\ge\ell_0$ entraîne</u>

$$Q^\ell\mathcal{L}_j\subset\mathcal{L}_{j+m\ell-1}+\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{L}_{j+\ell m+1}+x_1\mathcal{L}\ .$$

<u>Démonstration</u>

On peut écrire :

$$\sigma^1_V(Q) = g(x^*,\theta) + x_1\ h(x^*,\theta)$$

avec h et g holomorphes homogènes polynomiales em θ et g nulle sur $C^1_V(\mathcal{L})$.

Soit $N\geq 0$ tel que $g^N \in \mathrm{ann}\left[\mathcal{O}_{T_V(T^*X)} \underset{\pi_0^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \pi_0^{-1}(\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{gr}\mathcal{D}^1_V} \mathrm{gr}\mathcal{L})\right]$

et soit R un opérateur dans $\mathcal{D}^1_V$ d'ordre mN tel que

$$(**) \quad \sigma^1_V(R) = g^N.$$

Alors pour tout j, on a :

$$(***) \quad R\,\mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}_{j+mN-1} + \mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{L}_{j+mN+1}$$

et $\sigma^1_V(Q)^N = \sigma^1_V(Q^N) = \sigma^1_V(R) + x_1 h'$.

Soit $H \in \mathcal{D}^1_V$ tel que $\sigma^1_V(H) = h'$. Alors $Q^N - R - x_1 H$ appartient à $\mathcal{F}^{nN-1}_V + \mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{F}^{mN+1}_V$ et donc

$$Q^N\mathcal{L}_j \subset R\,\mathcal{L}_j + x_1\mathcal{L} + (\mathcal{F}^{mN-1}_V + \mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{F}^{mN+1}_V)\,\mathcal{L}_j$$

et il reste à appliquer l'inclusion (*) en posant $\ell_o = N$.

Q.E.D.

Soit maintenant $Q \in \mathcal{D}^1_{V'}$, d'ordre $m\geq 0$ avec $\sigma^1_{V'}(Q) = f$.

Il existe donc $\ell_o \geq 0$ tel que pour $\ell \geq \ell_o$ on ait :

$$(****) \quad Q^\ell\mathcal{L}_j \subset \tilde{\mathcal{F}}^{m\ell-1}_V\mathcal{L}_j + \mathcal{E}_X(-1)\tilde{\mathcal{F}}^{m\ell+1}_V\mathcal{L}_j + x_1\mathcal{L}.$$

Remarquons que pour tout k, on a :

$$(*****) \quad \mathcal{E}_X(-1)\mathcal{L}_k = \tilde{\mathcal{E}}_X(-1)\mathcal{L}_k$$

car on a: $\mathcal{E}_X(-1) = D_n^{-1}\mathcal{E}_X(0)$.

Soit maintenant $\mathcal{K}_j$ le $\mathcal{E}_Y(0)$-module $\dfrac{\mathcal{L}_j}{x_1\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_j}$.

Alors $\mathcal{K}_j$ est localement de type fini sur $\mathcal{E}_Y(0)$ car c'est un quo -

tient du $\mathcal{O}_Y(0)$-module localement de type fini $\dfrac{\mathcal{L}_j}{x_1\,\mathcal{L}_j}$.

Comme $\mathcal{L}_Y$ est $\mathcal{D}^1_{V'}$-cohérent les sous-modules $\mathcal{D}^1_{V'}\mathcal{K}_j$ sont cohérents et on a $C^1_{V'}(\mathcal{L}_Y) \subset \bigcup_j C^1_{V'}(\mathcal{D}^1_{V'}\mathcal{K}_j)$. On déduit alors de (****) et de (*****) que pour tout $j>>0$ et $\ell \geq \ell_0$, on a :

$$Q^\ell \mathcal{K}_j \subset \mathcal{F}^{m\ell-1}_{V'}\mathcal{K}_j + \mathcal{E}_Y(-1)\mathcal{F}^{m\ell+1}_{V'}\mathcal{K}_j \; .$$

On a donc trouvé un opérateur $\tilde{Q}=Q^{\ell_0} \in \mathcal{D}^1_{V'}$ tel que :

$$\forall j,\ \sigma^1_{V'}(\tilde{Q})\Big|_{C^1_{V'}(\mathcal{D}^1_{V'}\mathcal{K}_j)}=0$$

et $\sigma^1_{V'}(\tilde{Q})(y^*,\theta'_0)\neq 0$. Par conséquent $(y^*,\theta'_0) \not\in C^1_{V'}(\mathcal{L}_Y)$.

Q.E.D.

b) Supposons maintenant $d>1$ et le théorème vrai pour $d-1$. Alors il existe localement une sous variété Y' de codimension $d-1$ dans X contenant Y et orthogonale à V. Soient ρ' et ρ'' respectivement les projections :

$$T^*Y \underset{Y}{\times} Y' \xrightarrow{\rho'} T^*Y'$$

$$T^*Y' \underset{Y'}{\times} Y \xrightarrow{\rho''} T^*Y$$

Soit $V'_0 = \rho'(V \cap T^*X \underset{X}{\times} Y)$. On a :

$$\rho''(V'_0 \cap T^*Y' \underset{Y'}{\times} Y) = \rho(V \cap T^*X \underset{X}{\times} Y) = V' \; .$$

D'après le a) ii) Y est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{L}_{Y'}$ le long de V'_0 et comme Y est contenue dans Y', celle-ci est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{L}$ le long de V. L'hypothèse de récurrence et l'isomorphisme $(\mathcal{L}_{Y'})_Y \simeq \mathcal{L}_Y$ permettent alors de conclure successivement que $\mathcal{L}_Y$ est cohérent et

$$C^1_{V'}(\mathcal{L}_Y) \subset \lambda(C^1_V(\mathcal{L}) \cap T_V(T^*X \underset{X}{\times} Y))$$

ce qui achève le démonstration du lemme 1.3.9. .

Pour conclure la démonstration du théorème 1.3.8. il suffit, gracê au lemme précédent, de montrer que si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{D}^1_V$-sous module qui engendre $\mathcal{M}$ alors l'image de $\mathcal{L}_Y$ dans $\mathcal{M}_Y$ est un $\mathcal{D}^1_{V'}$-sous module qui l'engendre. Plaçons nous au voisinage de $x^* \in V$. On a un isomorphisme local:

$$\mathcal{E}_{Y\to X} \simeq \rho^{-1}\mathcal{E}_Y \underset{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y(0)}{\otimes} \mathcal{E}_{Y\to X}(0).$$

On en déduit :

$$\mathcal{M}_Y = \rho_*(\mathcal{E}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}) \simeq \rho_*\left[\mathcal{E}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} (\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}_X(0)} \mathcal{L})\right]$$

$$\simeq \rho_*\left[\rho^{-1}\mathcal{E}_Y \underset{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y(0)}{\otimes} \mathcal{E}_{Y\to X}(0) \otimes_{\mathcal{E}_X(0)} \mathcal{L}\right]$$

$$\simeq \mathcal{E}_Y \otimes_{\mathcal{E}_Y(0)} \mathcal{L}_Y .$$

Q.E.D.

§4.-Variété 1-microcaractéristique pour un couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ de $\mathcal{E}_X$-modules cohérents

M. Kashiwara et P. Schapira ont défini dans [12] la variété microcaractéristique $C(\mathcal{M},\mathcal{N})$ d'un couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ de $\mathcal{E}_X$-modules cohérents. Nous définirons de manière analogue la variété 1-microcaractéristique de $(\mathcal{M},\mathcal{N})$:

Soit Δ le fibré conormal à la diagonale de XxX. Alors Δ est une variété lagrangienne et on peut identifier $T_\Delta(T^*(X\times X))$ à $T(T^*X)$ par la première projection. Contrairement au §1., on note pour un $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}^* = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{E}_X) \underset{\pi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^{\otimes -1}$$

où Ω_X désigne le faisceau des n-formes différentielles holomorphes sur X. $\mathcal{M}^*$ est donc ici un $\mathcal{E}_X$-module à gauche.

Définition 1.4.1. : On appelle variété 1-microcaractéristique de $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ l'ensemble :

$$C^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) = C^1_\Delta(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*) .$$

C'est donc un sous ensemble analytique conique fermé de $T(T^*X)$ qui contient $C(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent de support V muni d'un générateur u et soit $\mathcal{J}$=ann u. On dira avec [20] que $\mathcal{M}$ est à caractéristiques simples pour u sur V (ou que u est un générateur simple de $\mathcal{M}$) si l'idéal engendré par les symboles de $\mathcal{J}$ est réduit .

Théorème 1.4.2. : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents . Supposons V maximalement dégénérée et $\mathcal{N}$ muni d'un générateur simple sur V. On a alors :

$$C^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) \supset C^1_V(\mathcal{M}) .$$

Démonstration

Soit p la codimension de V. On peut supposer V défine localement par $x_1=\ldots=x_\ell=\xi_{\ell+1}=\ldots=\xi_p=0$ dans $\dot{T}^*\mathbb{C}^n$, au voisinage de $\xi_1\neq 0$. Alors $\mathcal{N}$ est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X x_1+\ldots+\mathcal{E}_X x_\ell+\mathcal{E}_X D_{\ell+1}+\ldots+\mathcal{E}_X D_p}$$ et on a un quasi- isomorphisme:

$$\mathcal{N}^* \simeq \mathcal{N}[p] .$$

En raisonnant par récurrence sur le nombre de générateurs de on peut se ramener à $\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_{X/\mathcal{J}'}$.

Munissons $T^*(X\times X)$ des coordonnées (x,y,ξ,η). Alors Δ est définie par les équations $x_i=y_i$, $\xi_i=-\eta_i$ $(i=1,\ldots,n)$ et

$$\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^* \simeq \frac{\mathcal{E}_{X\times X}}{\mathcal{E}_{X\times X}\mathcal{J}'+(y_1,\ldots,y_\ell, D_{y_{\ell+1}}\ldots D_{y_p})}$$

où $(y_1,\ldots,y_\ell,D_{y_{\ell+1}},\ldots,D_{y_p})$ désigne l'idéal de $\mathcal{E}_{X\times X}$ engendré par

$y_1,\ldots,y_\ell,D_{y_{\ell+1}},\ldots,D_{y_p}$. Soit $P(x,D_x)$ un opérateur dans $\mathcal{F}'\cap\mathcal{D}^1_V$, d'ordre m, s'écrivant donc

$$P(x,D_x) = \sum_{\substack{o\leq|\alpha|\leq m\\ \alpha\in\mathbb{N}^p}} A_\alpha(x,D_x)(x_1D_{x_1})^{\alpha_1}\ldots(x_\ell D_{x_1})^{\alpha_\ell}\, D_{x_{\ell+1}}^{\alpha_{\ell+1}}\ldots D_{x_p}^{\alpha_p}$$

avec $A_\alpha \in \mathcal{E}_X(O)$. On lui associe l'opérateur :

$$\tilde{P}(x,y,D_x,D_y)=\sum_{o\leq|\alpha|\leq m} A_\alpha(x,D_x)\left[(x_1-y_1)D_{x_1}\right]^{\alpha_1}\ldots\left[(x_\ell-y_\ell)D_{x_1}\right]^{\alpha_\ell}\ldots$$

$$\ldots\ (D_{x_{\ell+1}}+D_{y_{\ell+1}})^{\alpha_{\ell+1}}\ \ldots\ (D_{x_p}+D_{y_p})^{\alpha_p}\ ,$$

qui appartient à $\mathcal{D}^1_\Delta$. Comme D_{x_1} commute avec D_{y_i} , i=1,...,n, on en déduit que $\tilde{P}$ -P appartient à $(y_1,\ldots y_\ell\ ,D_{y_{\ell+1}},\ldots,D_{y_p})$ et donc $\tilde{P}$ appartient à $\mathcal{E}_{X\times X}\mathcal{F}'+(y_1,\ldots,y_\ell,\ D_{y_{\ell+1}},\ldots,D_{y_p})$.

Soit γ la projection :

$$T_\Delta(T^*(X\times X)) \longrightarrow T_V(T^*X)$$

composée des projections $T_\Delta(T^*(X\times X)) \longrightarrow T(T^*X) \longrightarrow T_V(T^*X)$.

Pour achever la démonstration on remarque que pour tout $\theta\in T_\Delta(T^*(X\times X))$ on a par construction :

$$\sigma^1_\Delta(\tilde{P})(\theta) = \sigma^1_V(P)(\gamma(\theta)) \ .$$

Q.E.D.

CHAPITRE 2

Problème de Cauchy microdifférentiel

§1. - Théorème de Cauchy-Kowalewska pour un opérateur

Nous rappelons d'abord la méthode de P.Schapira [19] pour résoudre le problème de Cauchy pour un opérateur à valeurs dans un module microdifférentiel muni d'un générateur simple sur une variété lisse régulière .

Soit $(X_s)_{s\in[0,1[}$ une famille d'espace de Banach. On dit avec [22] que (X_s) définit une échelle d'espaces de Banach si :

a) $\forall s' \leq s$, X_s s'injecte dans $X_{s'}$ et la norme de cette injection est inférieure ou égale à 1.

Soit $\mathcal{L}(X_s, X_{s'})$ l'espace des applications linéaires continues $X_s \longrightarrow X_{s'}$ muni de la norme $\|\ \|_{s,s'}$ et soit $A(x_1)$ une fonction holomorphe dans $B(0,\varepsilon_0) = \{x_1 \in \mathbb{C},\ |x_1| < \varepsilon_0\}$ à valeurs dans $(X_s, X_{s'})$ pour tout $s'<s$ et vérifiant :

$$\|A(x_1)\|_{s,s'} \leq \frac{C}{s-s'}$$

pour une constante $C>0$ indépendante de s et s'. On a alors le théorème de Cauchy-Kowalewska précisé abstrait :

Théorème 2.1.1. [22] : Soit $v(x_1)$ une fonction holomorphe dans $B(0,\varepsilon)$ à valeurs dans X_s, pour tout $s<1$. Alors pour tout $s<1$ il existe une fonction (unique) $u(x_1)$ holomorphe dans le disque ouvert $B(0,\delta_0(1-s))$ à valeurs dans X_s, solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = A(x_1)\, u(x_1) + v(x_1) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

avec $\delta_0 = \inf\,(\varepsilon_0, (c\varepsilon)^{-1})$.

Soit $X = \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$, T^*X des coordonnées (x, ξ) avec $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ et soit V la sous variété de $\dot{T}^*\mathbb{C}^n$ définie par les équations $\xi_1 = \ldots = \xi_p = 0$ au voisinage du point x^* de coordonnées $x = 0$, $\xi_1 = \ldots \xi_{n-1} = 0$, $\xi_n = 1$.

Soit Y l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation $x_1 = 0$. Alors la variété $V' = \rho(V \cap T^*X \underset{X}{\times} Y)$ est définie dans T^*Y par les équations

$$\xi_2 = \ldots = \xi_p = 0 .$$

Soit $\mathcal{N} = \dfrac{\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}}{\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n} D_1 + \ldots + \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n} D_p}$. Le système induit $\mathcal{N}_Y$ est évidemment isomorphe à $\dfrac{\mathcal{E}_Y}{\mathcal{E}_Y D_2 + \ldots + \mathcal{E}_Y D_p}$. Posons, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{N}_j = \frac{\mathcal{E}_X(j)}{\mathcal{E}_X(j-1)\, D_1 + \ldots + \mathcal{E}_X(j-1)\, D_p} .$$

L'application naturelle $\mathcal{N}_j \longrightarrow \mathcal{N}$ est une injection et on a $\mathcal{N} = \bigcup_j \mathcal{N}_j$.

Remarquons que les opérateurs $D_1, \ldots, D_p$ opèrent à gauche sur $\mathcal{N}_j$ car on a pour tout $P \in \mathcal{E}_X(j)$, $D_i P = P D_i + [D_i, P]$ et $[D_i, P] \in \mathcal{E}_X(j)$. Par conséquent $\mathcal{N}_j$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_V^1$-module, donc cohérent car $\mathcal{N}_j$ est évidemment $\mathcal{E}_X(0)$-cohérent.

L'opérateur D_n étant inversible au voisinage de x^* (resp. de $y^* = \rho(x^*)$) on a des isomorphismes, $\forall j, k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{N}_j \simeq \mathcal{N}_k$$
$$\mathcal{N}_{Y_j} \simeq \mathcal{N}_{Y_k} \ .$$

Identifions $\mathcal{N}_o$ au sous faisceau de $\mathcal{E}_X(O)$ des opérateurs indépedants de $(D_1,\dots,D_p)$ (c'est-à-dire, qui commutent avec $x_1,\dots,x_p$).

Soit Σ la feuille de V passant par x^* et soit K un compact de Σ.

Pour chaque $s>O$ on peut donc munir $\mathcal{N}_o(K)$ de deux quasi-normes: celle induite par la norme formelle $N(K,.,s)$ de Boutet de Monvel et Krée dans $\mathcal{E}_X(O)$ ([23]) que l'on notera $N_V(K,.,s)$ et la norme quotient de $N(K,.,s)$ que l'on notera $\gamma(K,.,s)$.

<u>Lemme 2.1.2.</u> : <u>Pour toute section u de $\mathcal{N}_o$ au voisinage de K, on a</u> :

$$N_V(K,u,s) = \gamma(K,u,s) \ .$$

<u>Démonstration</u>

Ecrivons $u=Q(x,D_x) = Q(x,D_{p+1},\dots,D_n) = \sum_{k\geq o} Q_{-k}$

On a par définition

$$\gamma(K,u,s) = \inf_{R\in\mathcal{F}} N(K, Q+R, s)$$

où $\mathcal{F} = \mathcal{E}_X(-1)D_1 + \dots + \mathcal{E}_X(-1)D_p$ et

$$N_V(K,u,s) = \sum_{k,\alpha,\beta} \frac{2(2n)^{-k}\, k!}{(|\alpha|+k)!\,(|\beta|+k)!} \sup_K \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} Q_{-k}\right| s^{-2k+|\alpha|+|\beta|} \ .$$

Par conséquent

$$\gamma(K,u,s) \leq N_V(K,u,s).$$

Soit maintenant $R\in\mathcal{F}$ de symbole total $R = \sum_{k\geq o} R_{-k}$. Alors chaque R_{-k} ainsi que toutes ses dérivées en $\xi_{p+1},\dots,\xi_p$ sont nulles sur V et on en déduit:

$$\sup_K \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} (Q_{-k}+R_{-k})\right| =$$

$$=\begin{cases} \sup\limits_K |(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\beta Q_{-k}| & \text{si } \forall i \in \{1,\dots,p\},\ \beta_i=0 \\ \sup\limits_K |(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\beta R_{-k}| & \text{si } \ i \in \{1,\dots,p\},\ \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

Par conséquent $N(K,Q+R,s) = N(K,Q,s) + N(K,R,s)$ et donc $N_V(K,u,s) \leq \gamma(K,u,s)$.

Q.E.D.

Corollaire 2.1.3. : Soit $A \in \mathcal{E}_X(0)(K)$ et $f \in \mathcal{N}_0(K)$.

Alors $N_V(K,Af,s) << N(K,A,s)\, N_V(K,f,s)$.

Remarque 2.1.4. : Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on munit $\mathcal{N}_0^N$ de la quasi norme vectorielle obtenue de la norme de Boutet de Monvel et Krée (cf. [20]) que l'on notera encore $N_V(K,.,t)$ et on obtient l'analogue du lemme 2.1.2. . On notera, pour tout $t>0$

$$X(K,t) = \{f \in \mathcal{N}_0^N(K),\ N_V(K,f,t) < \infty\}$$

Lemme 2.1.5. : La norme $N_V(K,.,t)$ fait de $X(K,t)$ un espace de Banach .

Démonstration

On utilisera le lemme suivant :

Lemme 2.1.6. : Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\ \|$.
Pour tout $\rho>0$ soit $E(\rho)$ l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ d'éléments de E vérifiant :

$$(*) \quad \sum_n \|a_n\| \rho^n < \infty .$$

Alors $E(\rho)$ est un espace de Banach par rapport à la norme $\|(a_n)\|_\rho = \sum_n \|a_n\| \rho^n$.

Preuve

Soit $(a_n^\nu)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $E(\rho)$. Alors pour chaque n la suite (a_n^ν) est convergente dans E et définit donc un élément $b_n \in E$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\nu_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}, \nu, \mu \geq \nu_o$, $\sum_{n=o}^{N} \|a_n^\nu - a_n^\mu\| \rho^n < \varepsilon$ ce qui implique $\forall \nu \geq \nu_o$, $\sum_{n=o}^{\infty} \|a_n^\nu - b_n\| \rho^n < \varepsilon$ et donc (a_n^ν) tend vers (b_n) dans $E(\rho)$.

Q.E.D.

Démonstrons maintenant le lemme 2.1.5. . On peut évidemment se ramener à N=1. Soit $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $X(K,t)$, avec $f_\nu = \sum_{j \leq o} f_{\nu_j}$. Alors f_{ν_j} est une fonction holomorphe dans l'ouvert $K_{t/2} = \{x^* \in T^*X,\ d(x^*,K) < t/2\}$ où d désigne la distance euclidienne dans T^*X. Par suite f_{ν_j} appartient à l'espace de Banach des fonctions holomorphes dans $K_{t/3}$ et continues dans $\overline{K_{t/3}}$. On applique alors le lemme 2.1.5. .

Q.E.D.

Soit maintenant P un opérateur dans $\mathcal{D}_V^1$, d'ordre r et de type Weierstrass en D_1, s'écrivant :

$$(*) \quad P(x,D_x) = D_1^r + \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq r \\ \alpha_1 < r}} A_\alpha(x,D'_x)\, D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p}$$

où les opérateurs A_α sont d'ordre zéro et indépendants de D_1.

Remarquons que la feuille Σ' de V' passant par y^* est égale à $\rho(T^*X \underset{X}{\times} Y \cap \Sigma)$.

Soit $\beta(\rho)$ (resp. $B'(\rho)$) le polydisque de centre x^* (resp. de centre y^*) et rayon ρ contenu dans Σ (resp. dans Σ').

<u>Théorème 2.1.7.</u> : <u>Il existe</u> $\rho_o > 0$ <u>et</u> $\delta > 0$ <u>tels que pour tout</u> $\rho < \rho_o$, <u>si</u> $f \in \mathcal{N}_o\overline{(B(\rho))}$ <u>et</u> $(h) = (h_1,\ldots,h_r) \in \mathcal{N}_{Y_o}\overline{(B'(\rho))}^r$ <u>il existe une solution u unique appartenant à</u> $\mathcal{N}_o(\overline{B}(\delta\rho))$ <u>du problème de Cauchy</u> :

$$(**) \begin{cases} Pu = f \\ u|_Y = h_1, \ldots, D_1^{r-1} u|_Y = h_r . \end{cases}$$

Démonstration

On peut se ramener par des méthodes classiques à $(h)=0$. En adaptant la méthode de [22] dans le cas différentiel on peut ensuite se ramener au problème du premier ordre suivant:

Soit N le cardinal de $\{\alpha \in \mathbb{N}^p, |\alpha| \leq r-1\}$ et soit U un voisinage ouvert de x^* dans V. Soient A_j, $j=2,\dots,p$ et B des matrices $N\times N$ à coefficients dans $\mathcal{C}_X(0)(U)$ indépendantes de D_1 et soit :

$$\tilde{P}(x,D_x) = D_1 I + \sum_{j=2}^{p} A_j D_j + B,$$

où I désigne la matrice identité $N\times N$; sous ces hypothèses trouver $\rho_0>0$ et $\delta>0$ tels que $\overline{B}(\rho_0)\subset U$ et pour $\rho<\rho_0$, si $\vec{F}$ appartient à $\mathcal{N}_0(\overline{B}(\rho))^N$ il existe une solution unique $\vec{U} \in \mathcal{N}_0(\overline{B}(\delta\rho))^N$ du problème

$$(***) \begin{cases} \tilde{P}\,\vec{U} = \vec{F} \\ \vec{U}\big|_Y = 0 . \end{cases}$$

Posons pour $s \in [0,1]$ et $t \in]0,1[$

$$X_s^t = X(\overline{B'}(s),t) =$$

$$= \{\vec{G}\in\mathcal{N}_{Y_0}(\overline{B'}(s))^N, N_{V'}(\overline{B'}(s),\vec{G},t)<\infty\}$$

D'après le lemme 2.1.5. les espaces X_s^t sont des espaces de Banach ; de plus, pour $s'<s$, on a :

$$X_s^t \longrightarrow X_{s'}^t,$$

et la norme de cette injection est inférieure ou égale à un. On notera $\|\ \|_s^t$ la norme de X_s^t. On définit ainsi une famille d'échelles de Banach paramétrées par t.

Lemme 2.1.8. :

1) Soit $F(x_1,x',D'')$ (avec $D''=(D_{p+1},\dots,D_n)$) un élément de $\mathcal{N}_0(\overline{B}(s))^N$ et supposons

$$N_V(\overline{B}(s),F,t) < \infty ;$$

Alors l'application $x_1 \longmapsto F(x_1,x',D'')$ définit une fonction holomorphe de x_1 pour $|x_1|<s$ à valeurs dans X_s^t .

2) Réciproquement étant donnée une série

$$g(x_1) = \sum_{j\geq o} f_j\, x_1^j \quad \text{avec } f_j \in X_s^t$$

convergeant uniformément pour $|x_1|<\varepsilon$, alors g définit un élément de $\mathcal{N}_o^N$ défini au voisinage de

$$B(\varepsilon,s)=\{(x,\xi)\in V,\ |x_1|<\varepsilon,(x',\xi)\in B'(s)\}$$

Démonstration

On peut supposer $N=1$.

1) Soit $F(x,\xi)=\sum_{k\leq o} F_k(x_1,x',\xi")$ le symbole total de F. Alors les F_k sont des fonctions holomorphes dans $D_{s,t}=\{x^*\in V,\ d(x^*,\overline{B}(s))<t/2\}$. Posons $G_{kj}=\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j F_k(O,x',\xi")$. Alors les inégalités de Cauchy impliquent que le symbole formel $G_j=\sum_{k\leq o} G_{kj}$ définit un élément de $\mathcal{N}_{Y_o}(\overline{B}'(s))$ vérifiant :

$$(*) \qquad \|G_j\|_s^t \leq \frac{N_V(\overline{B}(s),F,t)}{s^j}$$

et donc G_j appartient à X_s^t. On déduit aussi de (*) que la série $\sum x_1^j\, G_j$ converge uniformément dans X_s^t, pour $|x_1|<s$ ce qui implique 1).

2) Supposons que :

$$(**) \qquad |x_1| < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{j\geq o} |x_1|^j\, \|f_j\|_s^t < \infty$$

et soit $f_j=\sum_{k\leq o} f_{jk}$ le symbole total de f_j. Alors la série formelle

$F_k(x,\xi) = \sum_{j\geq o} x_1^j\, f_j(x',\xi")$ converge uniformément dans l'ouvert de V

$D'_{s,t}=\{(x,\xi)\in V,\ |x_1|<\varepsilon,\ d((x',\xi"),\ \overline{B'(s)})<t/2\}$ qui est un voisinage

de $B(\varepsilon',s)$ pour tout $\varepsilon'<\varepsilon$.

Soit $t'<t$ et $\varepsilon'<\varepsilon$. On déduit de (**) l'existence d'une constante $C_{\varepsilon',t'}$ telle que

$$\sup_{D_{s',t'}} \left(\sum_j |x_\perp|^j \frac{|f_{jk}|}{(-k)!} t'^{-2k}\right) \leq C_{\varepsilon',t'}$$

et donc $\displaystyle \sup_{D'_{s',t'}} |F_k| \leq C_{\varepsilon',t'} \frac{(-k)!}{t'^{-2k}}$

ce qui implique que $F = \sum_{k\leq o} f_k$ définit une section de $\mathcal{N}_o$ au voisinage de $B(\varepsilon,s)$.

Q.E.D.

Lemme 2.1.9. : Soit A une matrice NxN à coefficients dans $\mathcal{E}_X(o)$ $(\overline{B}(s))$ ne dépendant pas de D_1. Alors :

1) pour tout x_1 avec $|x_1|\leq s$,

$A(x_1) = A(x_1,x',D')$

est une matrice NxN à coefficients dans $\mathcal{E}_Y(O)(\overline{B'}(s))$.

2) Supposons $N(\overline{B}(s),A,t)<\infty$. Alors $A(x_1)$ définit une fonction holomorphe de x_1 pour $|x_1|<s$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X_s^t,X_s^t)$ et la norme de $A(x_1)$ est majorée par une constante C uniforme en s et t.

Démonstration

1) Résulte immediatement de l'inégalité

$$N(\overline{B'(s)},\ A(x_1),t) \leq N(\overline{B(s)},A,t) .$$

2) Soit F un élément de X_s^t. D'après le corollaire 2.1.3., on a :

$$||A(x_1)F||_s^t \leq N(\overline{B'(s)},\ A(x_1),t)||F||_s^t \leq N(\overline{B(s)},A,t)||F||_s^t .$$

Q.E.D.

Lemme 2.1.10. : Soit $i=2,\ldots,p$. Alors D_i opère à gauche dans X_s^t et il existe une constante $C>0$ (indépendante de t) telle que pour tout $f\in X_s^t$ et pour $0\leq s'<s$ on ait :

$$||D_i\ f||_{s'}^t \leq \frac{C}{s-s'} ||f||_s^t$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate des inégalités de Cauchy car le symbole total de $D_i f$ est égal à $\sum_{k \leq o} \frac{\partial}{\partial x_i} f_k$.

Q.E.D.

Conclusion de la démonstration du théorème 2.1.7.

Soit $A(x_1) = \sum_{j=2}^{n} A_j(x_1, x', D')D_j + B(x_1, x', D')$.

Soit $\gamma > 0$ tel que $\overline{B}(\gamma)$ soit contenue dans U; alors, d'après les lemmes 2.1.9. et 2.1.10. $A(x_1)$ définit une fonction holomorphe de x_1, pour $|x_1| < \gamma$, à valeurs dans $(X^t_{s\gamma}, X^t_{s'\gamma})$, pour $0 \leq s' < s \leq 1$ et pour un t donné ne dépendant que de l'opérateur P, et la norme de $A(x_1)$ est majorée par $\frac{C}{s-s'}$ avec une constante C qui, elle aussi ne dépend que de P. Soit $\rho < \gamma$ et $\vec{F} \in \mathcal{N}_o(\overline{B}(\rho))^N$. D'après le lemme 2.1.8. 1) $\vec{F}$ défini une fonction holomorphe pour $|x_1| < \rho$ à valeurs dans $X^{t'}_{s\rho}$ pour un $t' > 0$ assez petit et pour tout $s < 1$. On peut supposer $t' < t$.

On peut donc appliquer le théorème 2.1.1. . Soit $\delta_o = \inf((C\varepsilon)^{-1}, \rho)$.

Alors il existe une fonction $\vec{U}(x_1)$ holomorphe en x_1 pour $|x_1| < \delta(1-s)$, unique, à valeurs dans $X^{t'}_{s\rho}$ pour tout $s < 1$, solution de

$$\begin{cases} \vec{P}\,\vec{U} = \vec{F}(x_1) \\ \vec{U}|_Y = 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 2.1.8. 2) $\vec{U}(x_1)$ définit un élément de $\mathcal{N}_o^N$ au voisinage de $B(\delta_o(1-s), s\rho)$ et on peut alors poser par exemple $\rho_o = (Ce)^{-1}$ et $\delta = 1/2$.

Q.E.D.

Corollaire 2.1.11. : Il existe $\rho_o > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout k, si $f \in \mathcal{N}_k$ est définie au voisinage de $\overline{B}(\rho)$ et $(h) \in (h_1, \ldots, h_r) \in \mathcal{N}_{Y_k}$ est définie au voisinage de $\overline{B}(\delta\rho)$ il existe une solution unique appartenant à $\mathcal{N}_k(\overline{B}(\delta\rho))$ de

$$\begin{cases} Pu = f \\ u|_Y = h_1, \ldots, D_1^{r-1} u|_Y = h_r \ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>

Munissons $T^*(X\times\mathbb{C}) = T^*(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})$ des coordonnées $(x,t;\xi,\tau)$ et soit $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \hat{\otimes} \mathcal{N} = \dfrac{\mathcal{E}_{X\times\mathbb{C}}}{\mathcal{E}_{X\times\mathbb{C}} D_1 + \ldots + \mathcal{E}_{X\times\mathbb{C}} D_P}$

au voisinage de $\tau \neq 0$.

Alors $\tilde{\mathcal{N}}$ est à caractéristiques simples sur la sous variété régulière $\tilde{V}$ de $T^*(X\times\mathbb{C})$

$$\tilde{V} = \{(x,t,\xi,\tau) \in T^*(X\times\mathbb{C}), \ (x,\xi/\tau) \in V\} \ .$$

En identifiant P à une section de $\mathcal{D}^1_{\tilde{V}}$ on peut appliquer le théorème 2.1.7. à Y,P et $\tilde{\mathcal{N}}_0$. Alors si $u \in \mathcal{N}_k$, $D_t^{-k}(u\otimes 1) \in \tilde{\mathcal{N}}_0$. Soit $\tilde{v}$ la solution de $P\tilde{v} = D_t^{-k}\, u \otimes 1$, $\tilde{v}|_Y = D_t^{-k}(h \otimes 1)$.

Alors comme P commute avec t et D_t par l'unicité du problème de Cauchy, comme $D_t^k\, \tilde{v}$ est solution de $P\tilde{w} = u \otimes 1$, $\tilde{w}|_Y = h \otimes 1$, $D_t^k\, \tilde{v}$ commute avec t et D_t et est donc de la forme $w \otimes 1$ avec $w \in \mathcal{N}_0$.

Q.E.D.

<u>Remarque</u> : Le théorème 2.1.7. peut aussi être démontré grâce aux résultats de [2].

Soit maintenant X une variété analytique complexe et soit V une sous variété involutive lisse conique de $\dot{T}^*X$. On notera $\mathcal{N} = \mathcal{E}_X\, u_0 = \mathcal{E}_X/\mathcal{J}$ un $\mathcal{E}_X$ -module cohérent muni d'un générateur u_0 simple sur V, et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{N}(k) = \mathcal{E}_X(k)\, u_0 = \dfrac{\mathcal{E}_X(k)}{\mathcal{E}_X(k) \cap \mathcal{J}}$.

Remarquons que si P appartient à $\mathcal{J}_V$, $\sigma_1(P)$ appartient à $gr(\mathcal{J})$ car par hypothèse I_V coincide avec l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_{T^*X}$ par $gr(\mathcal{J})$. On peut donc écrire $P = Q + R$ avec $R \in \mathcal{E}_X(0)$ et $Q \in \mathcal{J}$. Si T appartient à $\mathcal{E}_X(k)$ on aura

$$P\,T = [Q,T] + RT \mod \mathcal{J}$$

et donc

$$P\,T \in \mathcal{E}_X(k) \mod \mathcal{J}$$

ce qui implique que $\mathcal{N}(k)$ est un $\mathcal{D}^1_V$-module à gauche . On utilisera le lemme suivant dont la démonstration est laissée au soin du lecteur:

Lemme 2.1.12. : Soit Y une hypersurface de T^*X orthogonale à V, f une équation de Y avec f homogène de degré zéro et $df|_Y \neq 0$. Soit Q un opérateur d'ordre zéro tel que $\sigma_o(Q)=f$ et soit u une section de $\mathcal{N}$ au voisinage de Y.

Alors la condition "il existe une section v de $\mathcal{N}$ avec $u=Q^m\, v$" ne dépend que de Y.

Définition 2.1.13. : Soit u une section de $\mathcal{N}$. On dit que u est nulle à l'ordre m sur Y si la condition du lemme précédent est vérifiée.

Proposition 2.1.14. : Supposons V régulière et soit Y une hypersurface de X, P un óperateur dans $\mathcal{D}^1_V$ d'ordre $m \geq o$ défini au voisinage de $x^* \in (T^*X \times Y) \cap V$. Supposons Y non 1-microcaractéristique pour P sur V en x^*. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et toute section $v \in \mathcal{N}(k)$ au voisinage de x^* il existe une unique section $u \in \mathcal{N}(k)$ au voisinage de x^* solution de $Pu=v$, u nulle à l'ordre m sur $Y \times_X T^*X$. De plus si Σ désigne la feuille de V passant par x^* et si dans une carte locale de Σ v est définie au voisinage de la boule de centre de x^* de rayon r il existe localement une constante $\delta>0$ ne dépendant que de la carte et de P telle que u soit définie au voisinage de la boule de centre x^* et de rayon δr.

Démonstration

Ramarquons d'abord que l'on peut supposer $m>0$ car si $m=0$ l'opérateur P est inversible au voisinage de x^*. Si $m>0$, Y est orthogonale à V et la condition "u nulle à l'ordre m sur Y" a donc un sens.

On peut alors supposer localement Y définie par

$\xi_1 = \dots = \xi_p = 0$ avec $p<n$ au voisinage de x^*, $P=D_1^m + \sum_{o \leq j<m} A_j(x,D')D_1^j$ de

type Weierstrass en D_1 et on applique le corollaire 2.1.11. .

Q.E.D.

Corollaire 2.1.15. : Supposons V lagrangienne et soit Y une hypersurface de T^*X, P un opérateur dans $\mathcal{D}_V^1$ d'ordre $m \geq 0$ défini au voisinage de $x^* \in Y \cap V$ et Y non 1-microcaractéristique pour P le long de V. Alors pour tout $k \in Z$ et toute section v de $\mathcal{M}(k)$ au voisinage de x^* il existe une solution unique $u \in \mathcal{M}(k)$ de $Pu=v$, u nulle à l'ordre m sur Y définie au voisinage de x^*.

Démonstration

Supposons $m \geq 0$ comme dans la proposition précédente.

Soit ψ la projection de $T^*X \times \dot{T}^*\mathbb{C}$ sur T^*X:

$$\psi(x,t,\xi,\tau) = (x,\xi/\tau)$$

Identifions x^* à $\tilde{x}=(x^*,(0,1))$ et soit $\tilde{V}=\psi^{-1}(V)$, $\tilde{Y}=\psi^{-1}(Y)$ et $\tilde{\mathcal{M}}= \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{M}$.

Alors $\tilde{\mathcal{M}}$ est un module à caractéristique simples de générateur $u_0 \otimes 1$ sur la variété régulière $\tilde{V}$ et $\tilde{Y}$ est non 1-microcaractéristique pour P sur $\tilde{V}$ en $\tilde{x}$ car $\tilde{Y}$ et $\tilde{V}$ sont localement définies par les mêmes équations que Y et V. On peut alors supposer $\tilde{Y}$ définie par $x_1=0$ dans un système de coordonnées locales sur $T^*X \times \dot{T}^*\mathbb{C}$.
D'après la proposition 2.1.14. le corollaire est vérifié avec $\tilde{Y}$, $\tilde{V}$, P et $\tilde{\mathcal{M}}$.

Soit $\tilde{u}$ l'unique solution de $P\tilde{u}=v \otimes 1$ avec $\tilde{u}$ nulle à l'ordre m sur $\tilde{Y}$. D'après l'unicité $\tilde{u}$ doit commuter avec t et D_t et est donc de la forme $\tilde{u}=u \otimes 1$. De plus, si $u \otimes 1$ est égale à $x_1^m \tilde{v}$ avec $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{M}}$ alors $\tilde{v}$ commute avec t et D_t car x_1 opère injectivement dans $\tilde{\mathcal{M}}$. Par conséquent $\tilde{v}$ est de la forme $v \otimes 1$ avec $v \in \mathcal{M}$ et $u=x_1^m v$.

Q.E.D.

Corollaire 2.1.16. : Soit P un opérateur microdifférentiel dont le symbole principal $\sigma(P)$ s'annule exactement à l'ordre r sur V. Soit Y une hypersurface de X non 1-microcarctéristique pour P le long de V en $x^* \in V \cap (T^*X \underset{X}{\times} Y)$ et soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-module muni d'un générateur simple sur V. On a alors les isomorphismes naturels :

$$\begin{cases} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P, \mathcal{N})_{x^*} \simeq (\mathcal{E}_Y)^r_{\rho(x^*)} \\ \\ \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P, \mathcal{N})_{x^*} = 0 \end{cases}$$

Démonstration

Quitte à multiplier P par un ôperateur elliptique au voisinage de x^* on peut supposer que P appartient à $\mathcal{D}^1_V$ et que P n'appartient pas à $\mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V$. Soit m l'ordre de P . L'hypothèse entraîne m=r et on peut donc appliquer le corollaire 2.1.15. .

Q.E.D.

§2. - Théorème de Cauchy-Kowalewska pour les systèmes microdifférentiels .

On utilisera essentiellement les techniques mises au point par M.Kashiwara et P. Schapira dans [12] .

Soit Z une sous varété de X et $V=\dot{T}_Z X$ le fibré conormal à Z privé de la section nulle. On note $C_{Z|X}$(cf. [20]) le faisceau des microfonctions holomorphes d'ordre fini par rapport à Z. Si, en coordonnées locales, Z est définie par $x_1=\ldots = x_d=0$ dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$, alors $C_{Z|X}$ est isomorphe à

$$\frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X x_1+\ldots+\mathcal{E}_X x_d+ \mathcal{E}_X D_{d+1}+\ldots+ \mathcal{E}_X D_n}$$

C'est donc un $\mathcal{E}_X$-module à caractéristiques simples sur V. Remarquons que ce faisceau s'identifie, dans le cas où Z est une hypersurface et en dehors de la section nulle, au faisceau des fonctions à singularités méromorphes ou logarithmiques sur Z modulo les fonctions holomorphes.

Théorème 2.2.1. : (cf.Lemma 5.4. de [12]). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module

<u>cohérent et soit Y une sous variété non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur V en $x^* \in (T^*X \underset{X}{\times} Y) \cap V$, orthogonale à V. On a alors l'isomorphisme naturel:</u>

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{Z|X})_{x^*} \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_{Z\cap Y|Y})_{\rho(x^*)}$$

<u>Démonstration</u>

Soit d la codimension de Y. On va démontrer par récurrence sur d :

a) <u>Cas d=1</u>

Soit $(u_1,\ldots,u_\ell)$ un système local de générateurs de $\mathcal{M}$. Alors il existe $P_j \in \operatorname{ann} u_j$, $j=1,\ldots,\ell$, tels que Y soit non 1-microcaractéristique pour P_j sur V et le corollaire 2.1.14 implique que le théorème est vrai pour chaque module $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P_j$ et donc pour $\mathcal{L} = \overset{\ell}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P_j$. Soit $\mathcal{N}$ le noyau de la suite exacte

$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{L} \leftarrow \mathcal{N} \leftarrow 0$ (*).

On en déduit une suite exacte:

$$0 \leftarrow \mathcal{M}_Y \leftarrow \mathcal{L}_Y \leftarrow \mathcal{N}_Y \leftarrow 0 \quad (**)$$

Appliquons les foncteurs $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\cdot, C_{Z|X})$, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\cdot, C_{Z\cap Y|Y})$ respectivement à (*) et (**) . Soient $M^k = \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{Z|X})$, N^k et L^k, M^k_Y, N^k_Y et L^k_Y les modules définis de manière analogue pour $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_Y$, $\mathcal{N}_Y$ et $\mathcal{L}_Y$.

On obtient un diagramme commutatif de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M^k & \longrightarrow & L^k & \longrightarrow & N^k & \longrightarrow & M^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_k} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_k} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{k+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & M^k_Y & \longrightarrow & L^k_Y & \longrightarrow & N^k_Y & \longrightarrow & M^{k+1}_Y & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Comme γ_o et Φ_o sont injectiveset ω_o est un isomorphisme, γ_o et donc ϕ_o sont aussi des isomorphismes. On raisonne alors par récurrence sur k.

b) Cas $d > 1$

On suppose le théorème vrai pour toute sous variété de codimension infériure à d.

Soit Y' une telle sous variété avec

$$Y \subset Y' \subset X, \quad Y' \text{ orthogonale à } V.$$

Alors Y' est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ sur V et Y est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}_{Y'}$, sur $V' = \dot{T}^*_{Y' \cap Z} Y'$. Soit ρ' la projection :

$$T^*_Z X \underset{X}{\times} Y' \longrightarrow T^*_{Y' \cap Z} Y'$$

L'hypothèse de récurrence implique alors les isomorphismes :

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{Z|X})_{x^*} \simeq \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{E}_{Y'}}(\mathcal{M}_{Y'}, C_{Z \cap Y'|Y'})_{\rho'(x^*)} \simeq$$

$$\simeq \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{E}_X}((\mathcal{M}_{Y'})_Y, C_{Z\ Y|Y})_{\rho(x^*)}$$

Q.E.D.

On peut maintenant énoncer le théorème de Cauchy-Kowalewska pour un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ de $\mathcal{E}_X$-modules cohérents.

Soit Y une sous variété de X, ω la projection

$T^*X \underset{X}{\times} Y \longrightarrow T^*X$ et d la codimension de Y.

<u>Théorème 2.2.2</u>. (cf. [12] , théorème 3.1.)

<u>Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents définis dans un ouvert U de T^*X et supposons Y non 1-microcaractéristique pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sur $\omega^{-1}(U)$. On a alors l'isomorphisme naturel</u> :

$$\omega^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq$$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{E}_{X\leftarrow Y}) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y}{\otimes}} (\mathcal{E}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}) \quad [d]$$

(pour la définition de $\mathcal{E}_{Y\leftarrow X}$ voir [19] ou [20]).

<u>Démonstration</u>

Soit $x^* \in \dot{T}X \underset{X}{\times} Y$ et supposons $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ non nuls en x^*. on peut supposer :

$$SS(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(\rho(x^*)) = \{x^*\}$$

$$SS(\mathcal{N}) \cap \rho^{-1}(\rho(x^*)) = \{x^*\}$$

et on se ramène à démontrer l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})_{x^*} \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{N}_Y)_{y^*},$$

avec $y^*=\rho(x^*)$. Identifions X à la diagonale de X x X par la première projection ; on obtient les isomorphismes canoniques :

$$(*) \qquad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{X\times X}}(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*, C_{X|X\times X})$$

$$(**) \qquad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{N}_Y) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y\times Y}}(\mathcal{E}_Y \hat{\otimes} (\mathcal{N}_Y)^*, C_{Y|Y\times Y})$$

Soit $V=\dot{T}^*_X(X\times X)$. Par hypothèse, Y est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*$ sur V. De plus YxX est orthogonale à V.

On peut donc appliquer le théorème 2.2.1. et on en déduit l'isomorphisme :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{X\times X}}(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*, C_{X|X\times X})_{x^*} \simeq$$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y\times X}}((\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*)_{Y\times X}, C_{Y|Y\times X})_{\rho_1(x^*)}$$

où ρ_1 désigne la projection :

$$T^*(X\times X) \underset{X\times X}{\times} (Y\times X) \longrightarrow T^*(Y\times X).$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.3. ([20])

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et soient Y une sous variété de X non caractéristique pour $\mathcal{M}$, Z une sous variété de Y. On a alors l'isomorphisme canonique :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{Z|X}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_{Z|Y})\ [-d]$$

Comme Y est non caractéristique pour $\mathcal{M}$, Y x Y est une sous variété de YxX non caractéristique pour $\mathcal{M}_Y \hat{\otimes} \mathcal{N}^*$ et on peut appliquer le lemme 2.2.3. à :

$$Y \subset Y \times Y \subset Y \times X$$

(Y identifiée à la diagonale de YxY) et on obtient les isomorphismes

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y\times X}}((\mathcal{M} \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{N}^*)_{Y\times X}, C_{Y|Y\times X})_{\rho_1(x^*)} \simeq$$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y\times X}}(\mathcal{M}_Y \hat{\otimes} \mathcal{N}^*, C_{Y|Y\times X})_{\rho_1(x^*)} \simeq$$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y\times Y}}((\mathcal{M}_Y \hat{\otimes} \mathcal{N}^*)_{Y\times Y}, C_{Y|Y\times Y})_{\rho(x^*)}\ [-d]$$

et on applique alors l'isomorphisme :

$$(\mathcal{M}_Y \hat{\otimes} \mathcal{N}^*)_{Y\times Y} \simeq \mathcal{M}_Y \hat{\otimes} (\mathcal{N}_Y)^*\ [d]\ .$$

Q.E.D.

§3. - Applications

Le résultat suivant est l'analogue du théorème 3.3. de [12]. On peut, grâce à lui, obtenir une nouvelle approche du problème de Cauchy ramifié (cf. [5]). Nous ne donnerons qu'une esquisse très rapide de sa démonstration .

Théorème 2.3.1.

Soient Y une sous variété de X, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_X$-modules cohé - rents tels que Y soit non caractéristique pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Soit $\mathcal{N}'$ un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent et ψ un homomorphisme de $\mathcal{N}_Y$ dans $\mathcal{N}'$.

<u>Soit</u> $x_o \in Y$ <u>et supposons</u> :

a) $\forall x^* \in (T^*_{x_o}(Y) - \{0\}) \cap SS\,\mathcal{M}$

<u>l'homomorphisme induit par</u> ψ :

$$\mathcal{E}_{Y\to X,x^*} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_{X,x_o}}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{E}_{Y,\rho(x^*)} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_{Y,x_o}}{\otimes} \mathcal{N}'.$$

<u>est un isomorphisme,</u>

b) <u>Y est non 1-microcaractéristique pour</u>

$$(\mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M},\ \mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{N}) \text{ sur } T^*X - T^*_X X\ ,$$

c) <u>pour tout</u> j<u>, pour toute variété analytique complexe</u> W<u>, pour tout</u> $\omega \in W$<u>, l'application linéaire</u>

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{N} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{X\times W})_{(x_o,\omega)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N}' \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y\times W})_{(x_o,\omega)}$$

<u>est un isomorphisme.</u>

<u>Alors l'application naturelle</u> :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{x_o} \longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}_Y)_{x_o}$$

<u>est un isomorphisme.</u>

Un procédé de démonstration de ce résultat serait le suivant: déduire d'abord, grâce aux résultats de [6] et ([20], ch. II) l'existence du triangle.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}_X \arrow[dl, dashed] & \\
\mathbb{R}\,\pi^!_*(\mathcal{E}_X|_{T^*X - T^*_X X}) \arrow[rr, "+1"'] & & \mathcal{O}^{(o,n)}_{X\times X}|_X\,[-n] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

où π' désigne la projection $T^*X \to X$; raisonner ensuite exactement comme dans [12] .

Soit maintenant Z une hypersurface lisse de X, définie localement par l'équation $\phi(x)=0$. On note avec [12] $\mathcal{O}^1_{[Z|X]}$ le faisceau $\mathcal{D}_X \log \Phi$ qui ne dépend ni de ϕ ni de la détermination du logarithme choisie.

Pour $r>1$ et pour des hypersurfaces Z_i, $i=1,\ldots,r$, de X on note:

$$\sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{[Z_i|X]} \text{ le faisceau}$$

$$\frac{\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{[Z_i|X]}}{\psi(\mathcal{O}_X^{r-1})}$$ où $\psi = \mathcal{O}_X^{r-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X^r$ désigne l'application

$(f_1,\ldots,f_{r-1}) \longrightarrow (f_1,-f_1+f_2,\ldots,f_{r-1})$. On définit ainsi un $\mathcal{D}_X$-module cohérent dont la variété caractéristique coincide avec $\bigcup_{i=1}^{r} T^*_{Z_i} X \cup T^*_X X$.

On démontre alors à l'aide du théorème précédent l'analogue de la proposition 4.2. de [12] :

Proposition 2.3.2. : *Soient Y une sous variété de X, Z une hyper - surface de Y, Z_i $(i=1,\ldots,r)$ des hypersurfaces de Y transverses deux et à Y, telles que :*

$$\forall i,\ Z_i \cap Y = Z.$$

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent et supposons :

a) $SS(\mathcal{M}) \cap \rho^{-1}(T^*_Z Y) \subset \bigcup_{i=1}^{r} T^*_{Z_i} X$,

b) Y *non 1-microcaractéristique pour* $\mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M}$,

sur $\bigcup_{i=1}^{r} T^*_{Z_i} X - T^*_X X$.

Alors pour tout j, le morphisme :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^1_{[Z_i|X]})\Big|_Z \longrightarrow \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^1_{[Z|Y]})\Big|_Z$$

est un isomorphisme.

§4. - Propagation

a) Théorème d'existence et prolongement pour un opérateur

Soit X une variété analytique complexe de dimension n et soit V une sous variété conique lisse involutive de $\dot{T}^*X$. On notera Σ une feuille bicaractéristique de V.

Définition 2.4.1. : Soit Ω un ouvert de Σ de classe C^1 et $x^* \in \partial\Omega$. On dit que $\partial\Omega$ est non 1-microcaractéristique pour P sur V en x^* si pour toute fonction ϕ de classe C^1 telle que au voisinage de x^*.

$$\Omega = \{y^* \in \Sigma, \phi(y^*) < 0\} \quad , \ \partial\phi(x^*) \neq 0,$$

$\partial\phi$ est non 1-microcaractéristique pour P sur V. (on a noté $\partial\Omega$ le bord de Ω) .

Démontrons d'abord un théorème de prolongement. Soit p la codimension de V.

Théorème 2.4.2. : Supposons V régulière, soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent muni d'un générateur simple u_o sur V, P un opérateur d'ordre $m \geq 0$ dans $\mathcal{D}^1_V$, Ω un ouvert d'une feuille Σ de V, de classe C^1, situé localement d'un seul côté de $\partial\Omega$. Soit $x^* \in \partial\Omega$ et supposons $\partial\Omega$ non 1-microcaractéristique pour P sur V en x^*. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $u \in \mathcal{N}(k) = \mathcal{E}_X(k)u_o$ est défini au voisinage de Ω dans V et si Pu se prolonge en une section de $\mathcal{N}(k)$ au voisinage de x^* il en sera de même de u.

Démonstration

L'isomorphisme $H\big|_{T^*\Sigma} : T^*\Sigma \longrightarrow T_V(T^*X) \underset{V}{\times} \Sigma$ permet d'adapter les techniques mises au point par J.M. Bony, P.Schapira et M.Zerner dans le cas différentiel ([3]) $\mathcal{N}(k)$ remplaçant $\mathcal{O}_X$. Considérons une carte locale de Σ en x^* qui l'identifie à $\mathbb{C}^P$ muni des coordonnées $x'=(x_1,\dots,x_p)$.

Soit θ la conormal unitaire à Ω en x^*. On peut alors supposer $\theta=dx_1$ et le théorème se démontre exactement comme dans [3] à l'aide du théorème 2.1.14. .

Q.E.D.

<u>Corollaire 2.4.3.</u> : <u>Même énoncé que le théorème 2.3.2. mais avec l'hypothèse</u> V <u>lagrangienne remplaçant celle de</u> V <u>régulière</u>.

<u>Démonstration</u>

Munissons $T^*X \times \dot{T}^*\mathbb{C}$ des coordonnées $(x,t;\xi,\tau)$ au voisinage du point $\tilde{x}^*=(x_o,0,\xi_o,1)$ où $x^*=(x_o,\xi_o)$. Soit $\tilde{\mathcal{N}}=\mathcal{N}\hat{\otimes}\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$

$$\tilde{V}=\psi^{-1}(V)\,,\quad \tilde{\Omega}=\Omega\times\{(0,1)\}=\{(x,t,\xi,\tau),(x,\xi)\in\Omega, t=0,\ \tau=1\}$$

et $\tilde{V}=\psi^{-1}(V)$ où ψ désigne l'application $T^*X \times \dot{T}^*\mathbb{C} \longrightarrow T^*X$, $\psi(x,t,\xi,\tau)=(x,\xi/\tau)$. Alors V est régulière et $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de classe C^1 de la feuille Σ de $\tilde{V}$ passant par $\tilde{x}^*$ (Σ s'identifie évidemment à $V\times\{(0,1)\}$). De plus $\delta\tilde{\Omega}$ est non 1-microcaractéristique pour P en $\tilde{x}^*$. On peut donc appliquer le théorème 2.3.2. à Σ, P, $\tilde{\mathcal{M}}(k)$ et $\tilde{\Omega}$ avec $\tilde{u}$ de la forme $u\otimes 1$. en raisonnant comme dans la démonstration du corollaire 2.1.11. .

Q.E.D.

Ennonçons maintenant le résultat essentiel de ce paragraphe.

<u>Théorème 2.4.4.</u> : <u>Soit</u> V <u>une sous variété lagrangienne conique lisse de</u> $\dot{T}^*X$, Ω <u>un ouvert de</u> V <u>de classe</u> C^1 <u>localement situé du même côté de</u> $\partial\Omega$, P <u>un óperateur de</u> $\mathcal{E}^1_V$ <u>d'ordre</u> $m\geq 0$ <u>et supposons</u> $\partial\Omega$ <u>non 1-microcaractéristique pour</u> P <u>sur</u> V. <u>Soit</u> $\mathcal{M}_o=\mathcal{D}^1_V/\mathcal{D}^1_V P$ et $\mathcal{M}=\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$. <u>On a alors:</u>

i) $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^1_V}(\mathcal{M}_o, \mathcal{N}(k)))\big|_{\partial\Omega} = 0$

ii) $\quad \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))\big|_{\partial\Omega} = 0$

Démonstration

On ne démontrera que ii) car i) se démontre exactement de la même manière. On a :

$$\mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \simeq$$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\mathcal{N}))$$

et il faut donc montrer que P définit un quasi-isomorphisme :

$$\mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\mathcal{N})\big|_{\partial\Omega} \xrightarrow{P} \mathbb{R}\Gamma_{V-\Omega}(\mathcal{N})\big|_{\partial\Omega} \quad ,$$

ou encore que pour tout j, P définit un isomorphisme des groupes de cohomologie :

$$\mathcal{H}^j_{V-\Omega}(\mathcal{N})\big|_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathcal{H}^j_{V-\Omega}(\mathcal{N})\big|_{\partial\Omega} \quad .$$

Nous démontrerons d'abord les résultats préparatoires suivants :

Lemme 2.4.5. : Les faisceaux $\mathcal{N}(k)$ (et donc $\mathcal{N}$) vérifient le "principe du prolongement analytique" : soient $\omega \subset \Omega$ deux ouverts de V, Ω connexe et $\omega \neq \emptyset$, u une section de $\mathcal{N}(k)$ sur Ω. Si u est nulle sur ω, u est nulle.

Démonstration

Par une transformation canonique locale on peut supposer $V = \dot{T}^*_Z X$ où Z désigne l'hyperplan de $X = \mathbb{C}^n$ d'équation $x_n = 0$ et $\mathcal{N} = \mathcal{C}_{Z|X}$,

$$\mathcal{N}(k) = \mathcal{C}_{Z|X}(k) = \frac{\mathcal{E}_X(k)}{\mathcal{E}_X(k)x_n + \mathcal{E}_X(k-1)D_1 + \ldots + \mathcal{E}_X(k-1)D_{n-1}} \quad .$$

ce qui identifie toute section de $\mathcal{N}(k)$ à un opérateur de $\mathcal{E}_X(k)$ ne dépendant pas de $D_1,\dots,D_{n-1},x_n$ auquel cas le lemme est évident.

Q.E.D.

Soit maintenant Z une hypersurface de X et soit γ la projection de $\dot{T}^*X$ sur le fibré projectif P^*X. Identifions Z à $P^*_Z X$.

Lemme 2.4.6. : Soit $X=\mathbb{C}^n$, $Z=\{x_n=0\}$, $V=\dot{T}^*_Z X$. Alors :

1) Si Ω est un compact de V tel que la fibre de $\Omega \longrightarrow \gamma(\Omega)$ est contractile, on a :

$$\forall j,\ H^j(\Omega,\ C_{Z|X}) = \varinjlim_k H^j(\Omega,\ C_{Z|X}(k)) .$$

2) Si Ω est un ouvert de V tel que $\gamma(\Omega)$ est un ouvert de Stein de Z et la fibre de $\gamma:\Omega \longrightarrow \gamma(\Omega)$ est contractile, on a:

$$\forall k,\ \forall j>0, \qquad H^j(\Omega,\ C_{Z|X}(k)) = 0.$$

Démonstration

Remarquons d'abord que l'on a des isomorphismes d'espaces vectoriels (sur C) :

$$(*) \qquad C_{Z|X} \simeq \gamma^{-1}\mathcal{O}_Z[t] \oplus \gamma^{-1}\mathcal{O}_X\big|_Z$$

$$C_{Z|X}(k) \simeq \gamma^{-1}\mathcal{O}_Z[t]_k \oplus \gamma^{-1}\mathcal{O}_X\big|_Z$$

où $\mathcal{O}_Z[t]$ (resp. $\mathcal{O}_Z[t]_k$) désigne le faisceau des polynômes en t (resp. des polynômes en t) de degré $\leq k$ à coefficients dans $\mathcal{O}_Z$.

1) D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall j,\ H^j(\Omega,\ C_{Z|X}) = H^j(\gamma(\Omega),\ \mathcal{O}_Z[t] \oplus \mathcal{O}_X\big|_Z)$$

et $H^j(\Omega,\ C_{Z|X}(k)) = H^j(\gamma(\Omega),\ \mathcal{O}_Z[t]_k \oplus \mathcal{O}_X\big|_Z)$.

Comme $\gamma(\Omega)$ est compact on se ramène à démontrer que si Ω est un compact de Z, on a :

$$H^j(\Omega, \mathcal{O}_Z[t]) = \varinjlim_k H^j(\Omega, \mathcal{O}_Z[t]_k) \ .$$

Considérons une résolution flasque de $\mathcal{O}_Z$ qu'on notera $\mathcal{O}_Z^{\cdot}$. Les groupes $H^j(\Omega, \mathcal{O}_Z[t])$ sont donnés par la cohomologie du complexe $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}_Z^{\cdot}[t])$

et on remarque que si Ω est compact $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}_Z^{\cdot}[t]) = \varinjlim_k \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_Z^{\cdot}[t]_k)$

2) (cf. [9])

Comme $\gamma(\Omega)$ est de Stein il existe un système fondamental de voisinage ouverts de Stein $W_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, de $\gamma(\Omega)$.

Comme la fibre de $\gamma : \Omega \longrightarrow \gamma(\Omega)$ est contractile, on a :

$$\forall j, \ H^j(\Omega, C_{Z|X}(k)) = H^j(\gamma(\Omega), \mathcal{O}_Z[t]_k \oplus \mathcal{O}_{X|Z}) =$$

$$= H^j(\gamma(\Omega), \mathcal{O}_Z[t]_k) \oplus H^j(\gamma(\Omega), \mathcal{O}_{X|Z}) = 0$$

car $H^j(\gamma(\Omega), \mathcal{O}_{X|Z}) = 0$

par un théorème de Siu.

En particulier les convexes de $\dot{T}^*_Z X$ sont acycliques pour $C_{Z|X}(k)$.

Lemme 2.4.7. : Considérons comme au lemme précédent $X=\mathbb{C}^n$, $Z=\{x_n=0\}$, $V=\dot{T}^*_Z X$. Soient $\Omega_1 \subset \Omega_2$ deux convexes de V, Ω_2 ouvert, Ω_1 localement fermé dans Ω_2. Notons 1-microcar (Ω_2) l'adhérence dans $\mathbb{C}^n$ de l'ensemble des directions θ telles qu'il existe $x^* \in \Omega_2$ avec (x^*,θ) 1-microcaractéristique pour P sur V et supposons que tout hyperplan réel de normale appartenant à 1-microcar (Ω_2) qui coupe Ω_2 coupe Ω_1. Alors si u est une section de $C_{Z|X}$ sur Ω_1 et si Pu se prolonge en une section de $C_{Z|X}$ sur Ω_2 il en sera de même de u.

Démonstration

On reprend un argument dû à L.Hormander (cf. [3]) en utilisant le lemme 2.1.5. et le corollaire 2.3.3. exactement comme dans [3] .

Q.E.D.

Lemme 2.4.8. : Considérons la situation des lemmes précédents. Supposons $\theta\neq 0$ non microcaractéristique pour P sur V en $x^* \in V$. Il existe alors un voisinage W de x^* dans V, $\alpha > 0$ et $\varepsilon_0>0$ tels que si Γ est un cône réel ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ dont le polaire est contenu dans un voisinage d'ordre α de θ , si l'on désigne par $\Gamma_{x^*_0}$ le cône $x^*_0+\Gamma$ avec $x^*_0 \in W$, par K_ε et $\Gamma^+_{x^*_0,\varepsilon}$ les ensembles :

$$\begin{cases} K_\varepsilon = \Gamma_{x^*_0} \cap \{\mathrm{Re} < x^*,\theta >= -\varepsilon\} \\ \\ \Gamma^+_{x^*_0,\varepsilon} = \Gamma_{x^*_0} \cap \{\mathrm{Re} < x^*_1,\theta > > -\varepsilon\} \end{cases}$$

on ait pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

Pour tout Ω ouvert convexe dans $\Gamma^+_{x^*_0,\varepsilon}$ dont la frontière contient K_ε, P induit des isomorphismes des groupes de cohomologie $\begin{cases} H^j_{\Gamma^{+*}_{x_o,\varepsilon}-\Omega}(\Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon}, C_{Z|X}(k)) \\ H^j_{\Gamma^{+*}_{x_o,\varepsilon}-\Omega}(\Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon}, C_{Z|X}(k)). \end{cases}$ sur eux mêmes pour tout $j \geq 0$, $k \geq 0$

Démonstration

Comme d'après le lemme 2.4.6. 2) les convexes sont acycliques pour $C_{Z|X}(k)$ on se ramène à vérifier que P induit un isomorphisme de

$$\frac{H^o(\Omega, C_{Z|X}(k))}{H^o(\Gamma_{x^*_o,\varepsilon}, C_{Z|X}(k))} \text{ dans lui-même.}$$

L'injectivité résulte du lemme 2.4.7. pourvu que α et W soient assez petits.

Soit $\varepsilon'>\varepsilon$, $\tilde{\Omega}$ la réunion de Ω et de $\Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon'}-\Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon}$.

On a :

$$\tilde{\Omega} \cup \Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon} = \Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon'}$$

$$\tilde{\Omega} \cap \Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon} = \Omega$$

D'après le lemme 2.4.6. on a : $H^1(\Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon'}, C_{Z|X}(k))=0$ et donc toute section de $C_{Z|X}(k)$ sur Ω se prolonge à $\tilde{\Omega}$ (et donc au voisinage de K_ε) modulo une section de $C_{Z|X}(k)$ sur $\Gamma^+_{x^*_o,\varepsilon}$. Pour démontrer que P est surjectif il suffit alors de résoudre l'équation Pu=v au voisinage de K_ε.

Soit $H_\varepsilon=\Gamma_{x^*_o,\varepsilon} \cap \{x^* \in V, < x^*,\theta > = -\varepsilon\}$.

Alors d'après le corollaire 2.1.15. on peut résoudre Pu=v au voisinage de H_ε et il suffit de démontrer que tout hyperplan réel dont la normale ζ est 1-microcar ($\tilde{\Omega}$) et qui passe par x^*_o coupe H_ε.

On raisonne alors par l'absurde comme dans [3].

Q.E.D.

Conclusion de la démonstration du théorème 2.3.4.

Fixons des coordonnées locales au voisinage de $x^* \in \delta\Omega$ qui identifient X à $\mathbb{C}^n$, Z à l'hyperplan d'équation $x_n=0$ et V à $\dot{T}^*_Z X$.

Conservons les notations du lemme 2.4.2. : θ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ en x^*, $\Gamma_{x_1^*}$ désigne l'ouvert $x_1^* + \Gamma$ où Γ est un cône ouvert convexe de sommet zéro de $\mathbb{C}^n$ dont le polaire est un voisinage d'ordre α de θ (pour $\alpha>0$ assez petit) et $x_1^*=x^*+\nu\theta$ avec ν assez petit. On a :

$$\mathcal{H}^j_{V-\Omega}(C_{Z|X}(k))_{x^*} = \varinjlim_{W\ni x^*} H^j_{X-\Omega}(W, C_{Z|X}(k))$$

où W désigne un système fondamental de voisinage de x^* que l'on peut supposer convexes. Le lemme 2.4.5. entraîne que $\mathcal{H}^0_{V-\Omega}(C_{Z|X}(k))_{x^*}$ est nul. Comme les convexes sont acycliques pour $C_{Z|X}$ la suite exacte longue de cohomologie relative entraîne alors les isomorphismes

$$\forall j\ , \mathcal{H}^j_{V-\Omega}(C_{Z|X}(k))_{x^*} = \varinjlim_{W\ni x^*} \frac{H^{j-1}(W\cap\Omega, C_{Z|X}(k))}{H^{j-1}(W, C_{Z|X}(k))}$$

Prenons pour W l'ouvert $\Gamma^+_{x_1^*,\varepsilon}$ avec ε assez petit .

Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement de $W\cap\Omega$ par les convexes

$$W_{y^*} = \text{intérieur de l'enveloppe convexe}$$

de K_ε et de $y^* \in \partial\Omega \cap \Gamma^+_{x_1^*,\varepsilon}$ (qui sont contenus dans $W\cap\Omega$ pour α, ε assez petits).

Soit $\mathcal{U}'$ le recouvrement de W par les ouverts

$$\tilde{W}_{y^*} = \Gamma^+_{x_1^*,\varepsilon}$$

On a alors $\forall j$, $H^j(W\cap\Omega, C_{Z|X}(k)) = H^j(\dot{C}(\mathcal{U}, C_{Z|X}(k))$

$$H^j(W, C_{Z|X}) = H^j(\dot{C}(\mathcal{U}', C_{Z|X}(k))$$

où $\dot{C}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ désigne le complexe de Cech du recouvrement $\mathcal{U}$ à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}$. Comme pour $j \geq 1$, $H^j(W, C_{Z|X}) = 0$, on a l'isomorphisme:

$$\forall j\ ,\ \frac{H^j(\dot{C}(\mathcal{U}, C_{Z|X}(k))}{H^j(\dot{C}(\mathcal{U}', C_{Z|X}(k))} = H^j\left(\frac{\dot{C}(\mathcal{U}, C_{Z|X}(k)}{\dot{C}(\mathcal{U}', C_{Z|X}(k)}\right)$$

D'après le lemme 2.4.8. P induit un isomorphisme du complexe

$$\frac{\dot{C}(\mathcal{U}, C_{Z|X}(k)}{\dot{C}(\mathcal{U}', C_{Z|X}(k)} \text{ dans lui-même}$$

La première partie du théorème en résulte en prenant les limites inductives en ν et ε. La preuve pour $C_{Z|X}$ se remène à ce cas par méthode de Schapira dans [25].

Q.E.D.

<u>Théorème 2.4.9.</u> : <u>Soit</u> V <u>une variété involutive régulière de</u> $\dot{T}^*X$, Σ <u>une feuille de</u> V, Ω <u>un ouvert de</u> Σ, $\mathcal{N}$ <u>un système à caractéristique simples sur</u> V <u>de générateur</u> u_o <u>et</u>

$$\mathcal{M}_o = \frac{\mathcal{D}^1_V}{\mathcal{D}^1_V P}, \mathcal{M} = \frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X P}, \text{ avec } P \in \mathcal{D}^1_V .$$

<u>On suppose</u> $\partial\Omega$ <u>de classe</u> C^1, Ω <u>situé localement d'un seul coté de</u> $\partial\Omega$ <u>et</u> $\partial\Omega$ <u>non 1-microcaractéristique pour</u> P <u>le long de</u> V.

<u>Alors, pour tout</u> $k \in \mathbb{Z}$, $j > 0$, <u>on a</u> :

$$\mathbb{R}\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^1_V}(\mathcal{M}_o, \mathcal{N}(k)|_\Sigma)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}|_\Sigma))|_{\partial\Omega} = 0$$

<u>Démonstration</u>

La démonstration est formellement la même que celle du théorème 2.4.4. et on obtient les analogues des lemmes 2.4.5. ; 2.4.7. et 2.4.8., en remplaçant V par Σ, exactement par les mêmes méthodes. Il nous reste donc à démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.4.9'

a) Tout point x^* ε V admet un voisinage U tel que si Ω est un compact de la feuille Σ passant par x^* et est contenu dans U on ait :

$$\forall\ j \geq 0,\ H^j(\Omega,\mathcal{N}) = \varinjlim_k H^j(\Omega,\mathcal{N}(k))\ .$$

b) Tout point x^* ε V admet un voisinage U tel que si Ω est un ouvert d'holomorphie de la feuille Σ passant par x et est contenu dans U, on ait :

$$\forall\ j > 0,\ \forall k,\quad H^j(\Omega,\mathcal{N}(k)) = 0$$

Démonstration

On peut se ramener, localement, à

$V = \{(x,\xi)\ \varepsilon\ \dot{T}^*\ \mathbb{C}^n,\ \xi_1=\ldots=\xi_p=0\}$, $x^* = (0;\ 0,\ldots,0,1)$,

$\mathcal{N} = \dfrac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X D_1+\ldots+\mathcal{E}_X D_p}$. On a un isomorphisme de faisceaux d'espaces vectoriels $\mathcal{E}_X \simeq C_{X|X\times X}$ et, par une transformation de Legendre, $\mathcal{E}_X$ se transforme em $C_{Z|X\times X}$ (en tant que faisceau d'espaces vectoriels) où Z désigne une hypersurface de $X\times X$; on identifie alors $\mathcal{N}(k)$ à $C_{Z|Y}(k)$ où Y désigne la sous variété $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{2(n-p)-1} \times \mathbb{C}$ de $X\times X$, munie des coordonnées (x',y,t) et Z désigne l'hypersurface $t=0$.

La feuille Σ a alors pour équations $y=t=\xi'=\eta=0$, $\tau=1$.

On a, pour $k\geq 0$, $C_{Z|Y}(k)|_\Sigma \simeq \mathcal{O}_Z[t]_k \oplus \mathcal{O}_Y|_Z$. Soit donc Ω un ouvert de Stein de Σ. Alors Ω admet un système fondamental de voisinages de Stein dans Z, ainsi que dans Y et donc :

$$\forall j > 0,\ H^j(\Omega,\ \mathcal{O}_Z[t]_k \oplus \mathcal{O}_Y|_Z) = 0$$

et il reste à remarquer que l'on a, comme dans la preuve du lemme 2.4.6. :

$$\forall j,\ H^j(U,\ \mathcal{O}_Z[t]) = \varinjlim_k H^j(U,\ \mathcal{O}_Z[t]_k)$$

pour tout compact U dans Z

Q.E.D.

Soit maintenant V une sous variété lisse, involutive, conique de $\dot{T}^*X$. Notons $\tilde{X}=X \times \mathbb{C}$ muni des coordonnées (x,t), soient $(x,t;\xi,\tau)$ les coordonnées de $\dot{T}^*\tilde{X}$ et soit ψ l'application de $\dot{T}^*\tilde{X}$ sur T^*X qui à $(x,t;\xi,\tau)$ associe $(x,\xi/\tau)$. Alors $\tilde{V}=\psi^{-1}(V)$ est une sous variété involutive régulière de $\dot{T}^*X$ et $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ est un $\mathcal{E}_{\tilde{X}}$-module à caractéristique simples sur $\tilde{V}$ muni du générateur simple $u_o \otimes 1$ (cf. [19], [9]). On démontre alors dans [19] l'existence d'une suite exacte de $\psi^{-1}(\mathcal{E}_X)$-modules :

$$\text{(i)}\quad 0 \longrightarrow \psi^{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow[\lambda]{} \mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \xrightarrow[\mu]{} (\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{E}_{\mathbb{C}})^2 \longrightarrow \mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

où $\lambda(u)=u \otimes 1$, $\mu(\tilde{u}) = ([t,\tilde{u}], [D_t,\tilde{u}])$ et $\nu(\tilde{u},\tilde{v}) = [t,u] - [D_t,v]$.

Si Σ est la feuille de V passant par (x_o,ξ_o) et $p= (x_o,t_o;\xi_o,\tau_o)\in \tilde{V}$ la feuille de $\tilde{V}$ passant par P s'identifie à $\Sigma \times \{(t_o,\tau_o)\}$.

De plus, si $\partial\Omega$ est non 1-microcaractéristique pour P le long de V il en est de même de $\partial(\Psi^{-1}(\Omega))$ par rapport à P (identifié à un opérateur de $\mathcal{D}^1_{\tilde{V}}$) le long de $\tilde{V}$. On obtient alors le :

<u>Théorème 2.4.10.</u>

<u>Même énoncé que le théorème 2.3.8. en remplaçant l'hypothèse "V involutive régulière" par "V involutive".</u>

<u>Démonstration</u>

On applique la suite exacte (i) pour nous ramener au cas où V est involutive régulière et on applique alors le théorème 2.4.8. .

Q.E.D.

b) Théorème de propagation pour les systèmes

Les résultats de a) peuvent être facilement généralisés aux systèmes .

On supposera V involutive dans $\dot{T}^*X$; $\mathcal{N}$ désignera un $\mathcal{E}_X$-module muni d'un générateur simple sur V, et Σ une famille bicaractéristique de U.

Théorème 2.4.11.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent, Ω un ouvert de Σ de classe C^1 situé localement du même côté de $\delta\Omega$ et supposons $\partial\Omega$ non 1-micro caractéristique en x^* pour $\mathcal{M}$ le long de V. On a alors :

$$\mathbb{R}\,\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}|_\Sigma))\big|_{\delta\Omega} = 0 \ .$$

Démonstration

Soit $(u_i)_{i=1,\dots,\ell}$ un système local de générateurs de $\mathcal{M}$ et soient $P_i \in \mathcal{D}^1_V$, $i=1,\dots,\ell$ des opérateurs vérifiant $P_i u_i = 0$, $\partial\Omega$ non 1-microcaractéristique pour P_i sur V. Soit $\mathcal{M}'$ le $\mathcal{E}_X$-module $\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P_i$ et soit $\mathcal{L}$ le noyau de la suite exacte

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \longleftarrow \mathcal{M}' \longleftarrow \mathcal{L} \longleftarrow 0$$

On en déduit la suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathcal{N}|_\Sigma)) \longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}', \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathcal{N}|_\Sigma)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\,\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathcal{N}|_\Sigma)) \longrightarrow \mathcal{E}xt^{j+1}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma-\Omega}(\mathcal{N}|_\Sigma)) \longrightarrow \dots$$

Le résultat étant trivial pour $j<0$ on raisonne alors par récurrence sur j, en remarquant que $\mathcal{L}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathcal{M}$ et que d'après le théorème 2.4.10. $\mathcal{M}'$ vérifie le théorème.

Q.E.D.

Théorème 2.4.12. : Soit $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ un couple de $\mathcal{E}_X$-modules cohérents sur un ouvert $U \subset T^*X$. Soit Ω un ouvert de classe C^1 de U,

<u>localement situé du même côté de</u> $\partial\Omega$ <u>et supposons</u> $\partial\Omega$ <u>non 1-micro caractéristique pour</u> $(\mathcal{M},\mathcal{N})$. <u>On a alors</u> :

$$\mathbb{R}\Gamma_{U-\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}))\big|_{\partial\Omega} = 0$$

<u>Démonstration</u>

Identifions X à la diagonale de X x X.

La première projection de $\Delta = T^*_X(X \times X)$ sur T^*X permet d'identifier Ω à un ouvert de Δ .L'hypothèse signifie alors que la conormale à $\partial\Omega$ en $x^* \varepsilon\ \partial\Omega$ et non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*$ sur Δ et on peut appliquer le théorème 2.4.10. avec $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*$ remplaçant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} = C_{X|X\times X}$. On obtient :

$$\mathbb{R}\Gamma_{C\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}))\big|_{\partial\Omega} \simeq$$

$$\simeq \mathbb{R}\Gamma_{C\Omega}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{X\times X}}(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}^*, C_{X|X\times X}))\big|_{\partial\Omega} \simeq 0$$

Q.E.D.

Note : On peut donner une démonstration plus simple de théorème 2.44 en utilisant la notion de "microsupport" d'un faisceau de Kashiwara et Schapira [26]

Faculté des Sciences de Lisboa
Matemática Pura
Av. 24 de Julho
134, 3º
1300 LISBOA
P O R T U G A L

B I B L I O G R A P H I E

[1] - BJÖRK, J.E. : Rings of differential operators. North.Holland. Math.Library Series (1979)

[2] - BONY, J.M. : Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques.Soc.Math.France.Astérisque 34-35 (1976).

[3] - BONY, J.M. et SCHAPIRA, P. : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Invention. Math. 17,95-105 (1972).

[4] - GABBER,O. : The integrability of characteristic varieties. Preprint.

[5] - HAMADA, T., LERAY, J., WAGSCHAL, C. : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. J.Math.Pures Appl.55, 1976, p. 297-352.

[6] - KASHIWARA, M. : Exposé 19 au séminaire Goulaouic - Schwartz. 1979-1980.

[7] - KASHIWARA, M. : Thèse (en japonais).Etude algébrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

[8] - KASHIWARA, M. : Cours sur les systèmes microdifférentiels. Notes de Teresa Monteiro Fernandes.Pré Pub.Math. Université de Paris Nord. 1977.

[9] - KASHIWARA, M. et KAWAI, T. : Holonomic systems with regular singularities. R.I.M.S. 293 (1979).

[10]- KASHIWARA, M.et KAWAI, T.: Second microlocalisation and asymptotic expansions. R.I.M.S. 313 (1980) .

[11] - KASHIWARA, M. et OSHIMA, T. : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. of Maths 106, 145-200 (1977).

[12] - KASHIWARA, M. et SCHAPIRA, P. : Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe. Invention. Math. 46, 17-38 (1978).

[13] - KASHIWARA, M. et SCHAPIRA, P. : Microhyperbolic systems.Acta Math. 142, 1-55 (1979).

[14] - LAURENT, Y. : Deuxième microlocalisation. In Lecture Notes in Physics n° 126, 77-89 (1980).

[15] - MALGRANGE, B. : Séminaire à Grenoble (1976)

[16] - MONTEIRO-FERNANDES, T. : Variété 1-microcaractéristique pour les $\mathcal{E}_X$-modules cohérents, C.R.Acad.Sci.Paris, t. 290, Série A, 787-790 (1980).

[17] - MONTEIRO-FERNANDES, T. : Problème de Cauchy microdifférentiel et théorèmes de propagation. C.R. Acad.Sci. Paris, t. 290, Série A, 833-836 (1980).

[18] - SCHAPIRA, P. : Introduction à l'étude des systèmes micro - différentiels. Pré-Pub. U.P.N. Fascicule 19,1980.

[19] - SCHAPIRA, P. et HOUZEL, C. : Cours sur les systèmes micro-différentiels, à Paris VII-Paris XIII, 1978, à paraître.

[20] - SATO,M., KASHIWARA, M. et KAWAI, T. : Microfunctions and pseudodifferential equations, Lecture Notes in Math.287, Springer Verlag 265-529 (1973).

[21] - SERRE, J.P. : Algèbre locale, multiplicités. Lecture Notes in Math.11, Springer Verlag (1965).

[22] - TREVES, F. : Basic linear partial differential equations. New-York - Mathematics, 62, Academic Press.

[23] - BOUTET de MONVEL, L. et KREE, P. : Pseudodifferential operators and Gevrey Classes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 295-323 (1967) .

[24] - LAURENT, Yves : Thèse de Doctorat d'Etat.

[25] - SCHAPIRA, P. - Microdifferential systems in the complex domain- Grundlehren der math. Wissenchapten 269- Springer-Verlag.

[26] - KASHIWARA, M., SCHAPIRA, P. - Microlocal study of sheaves I. Preprint du RIMS, 1983.