JEAN-LOUIS KOSZUL

Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie

Astérisque, tome S131 (1985), p. 257-271

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__S131__257_0>

Société Mathématique de France
Astérisque, hors série, 1985, p. 257-271

CROCHET DE SCHOUTEN-NIJENHUIS ET COHOMOLOGIE

PAR

Jean-Louis KOSZUL

C'est dans sa note de 1928 sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos que É. CARTAN esquisse la méthode reposant sur la considération des invariants intégraux ([1]). Dans son mémoire à la Société Polonaise de Mathématiques en 1929 ([2]), il montre que cette méthode s'applique aux espaces clos homogènes et il indique alors explicitement comment construire, dans ce cas, le complexe des formes différentielles invariantes. Le complexe $\Lambda(\mathbf{g}')$ des formes alternées sur une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ est un cas particulier de cette construction. A vrai dire, dans cet article, É. CARTAN ne fait pas explicitement mention de $\Lambda(\mathbf{g}')$, car il traite les groupes comme des espaces symétriques et s'intéresse donc aux formes différentielles qui sont invariantes à la fois par les translations à gauche et les translations à droite, ce qui correspond aux éléments de $\Lambda(\mathbf{g}')$ invariants par le prolongement de la représentation coadjointe. Néanmoins, on peut dire que dès 1929 une pièce essentielle de la théorie cohomologique des algèbres de Lie était en place. Cette théorie a pris la forme que nous lui connaissons en 1948 avec l'article où C. CHEVALLEY et S. EILENBERG définissent le complexe des formes alternées sur une algèbre de Lie $\mathbf{g}$ à valeurs dans un $\mathbf{g}$-module. Dans ce contexte, on trouve notamment deux extensions naturelles du complexe $\Lambda(\mathbf{g}')$ qui ont un support géométrique limpide, et que nous allons rappeler.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe de Lie et soit $\mathbf{g}$ son algèbre de Lie, identifiée à l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. L'algèbre de fonctions $C^\infty(G)$ est un $\mathbf{g}$-module et le complexe $\Omega(G)$ des formes différentielles extérieures sur G s'identifie au complexe $C^\infty(G) \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$ des formes alternées sur $\mathbf{g}$ à valeurs dans $C^\infty(G)$. C'est une première extension du complexe $\Lambda(\mathbf{g}')$. Si l'on s'intéresse à la géométrie de la représentation coadjointe, on est conduit à considérer cette fois $\Lambda(\mathbf{g}')$ comme l'algèbre des tenseurs contravariants antisymétriques invariants par translations sur l'espace vectoriel $\mathbf{g}'$, c'est-à-dire comme une sous-algèbre de l'algèbre $C^\infty(\mathbf{g}')\otimes\Lambda(\mathbf{g}')$ de tous les tenseurs contravariants antisymétriques sur $\mathbf{g}'$. De ce point de vue, $\Lambda(\mathbf{g}')$ est un sous-complexe du complexe $C^\infty(\mathbf{g}') \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$ des formes alternées sur $\mathbf{g}'$ à valeurs dans le $\mathbf{g}$-module $C^\infty(\mathbf{g}')$ défini par l'action coadjointe. Notons que les espaces $H^2(\mathbf{g}, C^\infty(\mathbf{g}'))$ et $H^2(\mathbf{g}, C^\infty(\mathbf{g}'))$ interviennent par exemple dans le problème de la linéarisation d'une structure de Poisson (*cf.* [5], [14]).

Avec $C^\infty(G)\otimes\Lambda(\mathbf{g}')$ et $C^\infty(\mathbf{g}')\otimes\Lambda(\mathbf{g}')$, on a deux extensions du complexe $\Lambda(\mathbf{g}')$ de nature bien différente. Dans $C^\infty(\mathbf{g}') \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$ est défini le crochet de Schouten-Nijenhuis $[\ ,\ ]_S$ qui en fait une algèbre de Lie graduée, les éléments de degré p étant ceux de $C^\infty(\mathbf{g}')\otimes\Lambda^{p+1}(\mathbf{g}')$ ([9], [13]). L'opérateur différentiel d de ce complexe est de la forme $\mathrm{ad}_S(w)$ où $w \in \mathbf{g} \otimes \Lambda^2(\mathbf{g}')$ et $[w, w]_S = 0$. Ce tenseur w est la structure de Poisson standard sur $\mathbf{g}'$. De l'identité de Jacobi pour $[\ ,\ ]_S$, il résulte que

$$d[a, b]_S = [da, b]_S + (-1)^{p-1}[a, db]_S$$

quels que soient $a \in C^\infty(\mathbf{g}') \otimes \Lambda pP(\mathbf{g}')$ et $b \in C^\infty(\mathbf{g}') \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$. Par suite, le crochet de Schouten-Nijenhuis induit un crochet dans $H^*(\mathbf{g}, C^\infty(\mathbf{g}'))$.

Soit $S(\mathbf{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathbf{g}$, identifiée à un sous-module de $C^\infty(\mathbf{g}')$. Le sous-complexe $S(\mathbf{g}') \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$ est stable par le crochet de Schouten-Nijenhuis, qui induit donc aussi un crochet dans $H^*(\mathbf{g}, S(\mathbf{g}))$. Ce dernier applique $H^p(\mathbf{g}, S^r(\mathbf{g})) \times H^q(\mathbf{g}, S^s(\mathbf{g}))$ dans $H^{p+q-1}(\mathbf{g}, S^{r+s-1}(\mathbf{g}))$. En particulier, on trouve une structure d'algèbre de Lie graduée dans $H^*(\mathbf{g}, \mathbf{g})$. Cette structure a été mise en évidence et utilisée par D.S. RIM dans son travail sur les déformations des algèbres de Lie filtrées ([11]). Elle comporte une application quadratique $Sq : H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \to H^3(\mathbf{g}, \mathbf{g})$ qui joue un rôle important dans l'étude des déformations de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ (*cf.* G. RAUCH [10]).

Toute structure de Poisson sur une variété donne de même un complexe muni du crochet de Schouten-Nijenhuis (*cf.* LICHNEROWICZ, [8], [15]). Dans ce qui suit, on indique des cas où ce crochet induit le crochet nul dans la cohomologie. Pour ce faire, il est utile d'exprimer le crochet de Schouten-Nijenhuis au moyen d'opérateurs différentiels d'ordre ≤ 2 dans l'algèbre des tenseurs contravariants antisymétriques; c'est à cela que sont consacrés les paragraphes 1 et 2.

1. Les opérateurs différentiels dans le contexte gradué

Soit $A = \bigoplus_{p\geq 0} A^p$ une algèbre graduée, avec degrés dans $\mathbf{Z}$, sur un corps de caractéristiques $\neq 2$. On suppose que A est $\mathbf{Z}_2$ *commutative*, c'est-à-dire que $ab = (-1)^{pq} ba$ lorsque $a \in A^p$ et $b \in A^q$. Soit $\mathrm{End}^k(A)$ l'espace vectoriel des endormorphismes de degré k de A. Sur $\mathrm{End}(A) = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathrm{End}^k(A)$ on définit un crochet en posant

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - (-1)^{pq} D_2 D_1$$

pour $D_1 \in \mathrm{End}^P(A)$ et $D_2 \in \mathrm{End}^q(A)$. Avec ce crochet, $\mathrm{End}^*(A)$ est une algèbre de Lie graduée.

Quels que soient $p \in \mathbf{Z}$ et $r > 0$, on note $\mathcal{D}_r^p$ l'espace des opérateurs différentiels de degré p et d'ordre $\leq r$ dans A. L'espace $\mathcal{D}_0^p$ est l'espace, isomorphe à A^p, des endomorphismes de la forme $b \to ab$ où $a \in A^p$. Quels que soient $p, q \in \mathbf{Z}$ et $r, s > 0$, on a

$$\mathcal{D}_r^p \mathcal{D}_s^q \subset \mathcal{D}_{r+s}^{p+q}, \qquad [\mathcal{D}_r^p, \mathcal{D}_s^q] \subset \mathcal{D}_{r+s-1}^{p+q}.$$

En particulier, si D est un opérateur différentiel d'ordre r de degré impair k, alors $D^2 = \frac{1}{2}[D, D]$ est de degré $2k$ et d'ordre $\leq 2r - 1$.

Comme dans le cas non gradué, on caractérise les opérateurs différentiels d'ordre $\leq r$ en associant à tout endomorphisme de A une $(r+1)$-forme sur A à valeurs dans A. Soit λ l'application linéaire de A dans $A \otimes A$ définie par $\lambda(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ pour tout a. On munit $A \otimes A$ du produit qui en fait une algèbre $\mathbf{Z}_2$-commutative. Alors

$$\lambda(a)\lambda(b) = (-1)^{pq} \lambda(b)\lambda(a)$$

pour $a \in A^p$ et $b \in A^q$. Pour tout $r > 0$, soit λ^r l'application linéaire de $\bigotimes^r A$ dans $A \otimes A$ telle que

$$\lambda^r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = \lambda(a_1) \ \ldots \ \lambda(a_r).$$

Pour tout endomorphisme D de A et tout entier $r > 0$, on notera Φ_D^r la r-forme sur D à valeurs dans A définie par

$$\Phi_D^r(a_1, \ldots, a_r) = m \circ (D \otimes id_A) \lambda^r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r),$$

où $m(a \otimes b) = ab$.

Si $a, b, c \in A$ sont de degrés respectifs p, q, r, on a

$$\Phi_D^1(a) = D(a) - D(1)a, \tag{1.1}$$

$$\Phi_D^2(a,b) = D(ab) - D(a)b - (-1)^{pq} D(b)a + D(1)ab, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \Phi_D^3(a,b,c) = D(abc) - D(ab)c - (-1)^{p(q+r)} D(bc)a \\ - (-1)^{r(p+q)} D(ca)b + D(a)bc + (-1)^{p(q+r)} D(b)ca \\ + (-1)^{r(p+q)} D(c)ab - D(1)abc. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pour tout $r > 1$, la forme Φ_D^r s'exprime au moyen de Φ_D^{r-1}. Ainsi

$$\Phi_D^3(a,b,c) = \Phi_D^2(a,bc) - \Phi_D^2(a,b)c - (-1)^{qr}\Phi_D^2(a,c)b. \tag{1.4}$$

Un calcul un peu laborieux donne la relation suivante :

(1.5) LEMME. — *Si $D \in \mathrm{End}^*(A)$ est de degré impair et si $D(1) = 0$, on a*

$$\sum_{\text{circ}} (-1)^{|a|(|c|+1)}\Phi_D^2(a, \Phi_D^2(b,c))$$
$$= D\Phi_D^3(a,b,c) - \Phi_{D^2}^3(a,b,c) + \sum_{\text{circ}} (-1)^{|a||c|}\Phi_D^3(D(a),b,c),$$

où $|a|$, $|b|$, $|c|$ désignent respectivement les degrés de a, b, c et où $\sum_{\text{circ}}$ indique une somme sur les permutations circulaires de a, b, c.

Soit $D \in \mathcal{D}_2^k$ un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2, de degré impair k et tel que $D(1) = 0$. On lui associe un crochet $[\ ,\ ]_D$ dans A en posant

$$[a,b]_D = (-1)^p\Phi_D^2(a,b)$$

pour tout $a \in A^p$ et tout $b \in A$. Ce crochet ne dépend que de la classe de D modulo $\mathcal{D}_1^k$. Il est de degré k, mais de degré 0 si on adopte le degré $q+k$ sur A^q. Si $a \in A^p$ et $b \in A^q$, on a

$$[a,b]_D = -(-1)^{(p+k)(q+k)}[b,a]_D. \tag{1.6}$$

Vis à vis du produit dans A, le comportement de ce crochet est donné par la relation (1.4). Puisque $\Phi_D^3 = 0$,

$$[a,bc]_D = [a,b]_Dc + (-1)^{(p+k)q}b[a,c]_D \tag{1.7}$$

pour $a \in A^p$, $b \in A^q$ et $c \in A$. Cela signifie que l'endomorphisme $\mathrm{ad}_D(a)$: $b \to [a,b]_D$ est une $\mathbf{Z}_2$-dérivation de degré $p+k$ de l'algèbre graduée A.

Compte tenu du lemme (1.5), on a d'autre part

$$\sum_{\text{circ}} (-1)^{(|a|+k)(|c|+k)}[a,[b,c]_D]_D = -(-1)^{|a|+|b|+|c|}\Phi_D^3(a,b,c).$$

Or l'identité de Jacobi pour le crochet $[\ ,\ ]_D$ s'obtient en annulant le premier membre de cette égalité. Par conséquent, *une condition nécessaire et suffisante pour que $[\ ,\ ]_D$ vérifie l'identité de Jacobi est que l'opérateur différentiel D^2* (qui est a priori d'ordre ≤ 3) *soit d'ordre* ≤ 2. Compte tenu de

(1.6), lorsque cette condition est vérifiée, et en particulier lorsque $D^2 = 0$, le crochet $[\ ,\ ]_D$ est une structure d'algèbre de Lie graduée sur l'espace gradué $\bigoplus_{p \geq k} \hat{A}^p$ où $\hat{A}^p = A^{p-k}$.

Compte tenu de (1.2), si D est un endomorphisme de A de degré impair k et si $D(1) = 0$, alors

$$\Phi^2_{D^2}(a,b) = D\Phi^2_D(a,b) + \Phi^2_D(D(a),b) + (-1)^p \Phi^2_D(a, D(b)),$$

quels que soient $a \in A^p$ et $b \in A$. Par conséquent, si de plus $D^2 = 0$, on a

$$D[a,b]_D = [Da,b]_D + (-1)^{p+k}[a, D(b)]_D, \tag{1.8}$$

ce qui signifie que D est une dérivation de degré k de l'algèbre de Lie graduée définie par $[\ ,\ ]_D$.

Exemple. — Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Lie et soit $A = \Lambda(\mathbf{g})$. L'opérateur différentiel du complexe $\Lambda(\mathbf{g}')$ est un opérateur de degré 1, d'ordre ≤ 1 et de carré nul. Son transposé ∂ est un opérateur différentiel dans A de degré -1, d'ordre ≤ 2 et de carré nul. Le crochet $[\ ,\ ]_\partial$ définit donc une structure d'algèbre de Lie graduée dans $\hat{A} = \bigoplus_{p \geq -1} \hat{A}^p$, où $\hat{A}^p = \Lambda^{p+1}(\mathbf{g})$. Sa restriction à $\mathbf{g}$ coïncide avec le crochet de $\mathbf{g}$. Cette propriété et les identités (1.6) et (1.7) le caractérisent. Cet exemple m'a été signalé par M. DUFLO. Si $\mathbf{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G, le crochet $[\ ,\ ]_\partial$ est la restriction du crochet de Schouten-Nijenhuis aux tenseurs contravariants antisymétriques invariants par translations à gauche sur G.

2. Crochet de Schouten-Nijenhuis et connexions

On désigne par M une variété différentielle paracompacte de dimension n et par $A(M) = \bigoplus_{p \geq 0} A^p(M)$ l'algèbre des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur M. C'est une algèbre $\mathbf{Z}_2$-commutative graduée engendrée par $A^0(M) = C^\infty(M)$ et par $A^1(M)$ qui est le module des champs de vecteurs sur M. Le crochet de Schouten-Nijenhuis dans $A(M)$ est une application $\mathbf{R}$-bilinéaire

$$[\ ,\ ]_S : A(M) \times A(M) \to A(M)$$

de degré -1 qui est caractérisée par les propriétés suivantes (*cf.* [9], [13]) :

(i) pour tout $X \in A^1(M)$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}_S(X) : u \to [X,u]_S$ est la dérivation de Lie par rapport au champ X,

(ii) si $u \in A^p(M)$ et $v \in A^q(M)$, on a

$$[u,v]_S = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[v,u]_S.$$

(iii) si $u \in \Lambda^p(M)$, $\mathrm{ad}_S(u)$ est une dérivation de degré $p-1$ de l'algèbre $A(M)$.

Avec le crochet de Schouten-Nijenhuis, l'espace gradué

$$\hat{A}(M) = \bigoplus_{p \geq -1} \hat{A}^p(M)$$

où $\hat{A}^p(M) = A^{p+1}(M)$, est une algèbre de Lie graduée.

On dira qu'un opérateur différentiel D dans $A(M)$ *engendre le crochet de Schouten-Nijenhuis* si D est d'ordre ≤ 2, de degré -1, et si $[\ ,\ ]_D = [\ ,\ ]_S$, autrement dit si

$$[u,v]_S = (-1)^p(D(uv) - D(u)v - (-1)^p uD(v))$$

quels que soient $u \in A^p(M)$ et $v \in A(M)$. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 1, puisque $[\ ,\ ]_S$ vérifie l'identité de Jacobi, si D engendre $[\ ,\ ]_S$, alors D^2 est d'ordre ≤ 2. Dans ce paragraphe, on va voir que les opérateurs différentiels qui engendrent $[\ ,\ ]_S$ correspondent à des connexions linéaires dans le fibré vectoriel $\Lambda^n TM$.

Soit ∇ une connexion linéaire dans le fibré tangent TM. Pour tout champ de vecteurs X sur M, $Y \to [X,Y] - \nabla_X(Y)$ est un endomorphisme du module $A^1(M)$, autrement dit un tenseur de type (1,1) sur M. On notera $\mathrm{div}_\nabla(X)$ sa trace.

(2.1) LEMME. — *Pour toute connexion linéaire ∇ de torsion nulle dans TM, il existe un opérateur différentiel D_∇ qui engendre $[\ ,\ ]_S$ et un seul, tel que $D_\nabla(X) = -\mathrm{div}_\nabla(X)$ pour tout champ de vecteurs X sur M.*

En effet, si D_∇ engendre $[\ ,\ ]_S$, quels que soient $X, Y \in A^1(M)$, on a

$$[X,Y] = [X,Y]_S = -(D_\nabla(XY) - D_\nabla(X)Y + D_\nabla(Y)X),$$

donc

$$D_\nabla(XY) = \mathrm{div}_\nabla(Y)X - \mathrm{div}_\nabla(X)Y - [X,Y].$$

Puisque D_∇ est d'ordre ≤ 2 et de degré -1, il est déterminé par ses restrictions à $A^1(M)$ et $A^2(M)$, et ceci prouve l'unicité. Pour montrer l'existence de D_∇, on procède localement. Soit U un ouvert de M et soit $X_1, \ldots, X_n$ une base du module $A^1(U)$ des champs de vecteurs sur U. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ la base duale dans le module des 1-formes sur U. Alors

$$D_U = -\sum_{i=1}^{i=n} i(\alpha_i)\nabla_{X_i}$$

est un opérateur différentiel de degré -1, d'ordre ≤ 2 dans $A(U)$, indépendant du choix de la base (X_i). Quels que soient $X, Y \in A^1(U)$, on a

$$\begin{aligned} D_U(X) &= -\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i(\nabla_{X_i} X) = -\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i(\nabla_X X_i - [X, X_i]) = -\operatorname{div}_\nabla(X), \\ D_U(XY) &= D_U(X)Y - XD_U(Y) + \nabla_Y(X) - \nabla_X(Y) \\ &= D_U(X)Y - XD_U(Y) - [X,Y]. \end{aligned}$$

Par suite, le crochet $[\ ,\ ]_{D_U}$ coïncide avec le crochet de Schouten-Nijenhuis sur $(A^0(U) + A^1(U))^2$. Par recollement, on obtient un opérateur D_∇ dans $A(M)$ qui engendre $[\ ,\ ]_S$ et tel que $D_\nabla(X) = -\operatorname{div}_\nabla(X)$ pour tout $X \in A^1(M)$.

Soit ∇ une connexion linéaire de torsion nulle dans TM. Puisque D_∇ engendre $[\ ,\ ]_S$, on sait que D^2_∇ est d'ordre ≤ 2. Or D^2_∇ est de degré -2. Par conséquent D^2_∇ est le produit intérieur par une 2-forme différentielle sur M. Il est facile d'expliciter cette forme au moyen du tenseur de courbure R_∇ de ∇. On a

$$D^2_\nabla = i(\operatorname{Tr} R_\nabla), \tag{2.2}$$

où $\operatorname{Tr} R_\nabla$ est la 2-forme sur M telle que $(\operatorname{Tr} R_\nabla)(X,Y) = \operatorname{Trace} R_\nabla(X,Y)$ quels que soient $X, Y \in A^1(M)$.

On a donc une application canonique de l'espace affine des connexions linéaires de torsion nulle dans TM dans l'ensemble des opérateurs différentiels qui engendrent le crochet de Schouten-Nijenhuis. Cette application est surjective. En effet, si D est un opérateur qui engendre $[\ ,\ ]_S$ et si ∇° est une connexion linéaire de torsion nulle dans TM, $D - D_{\nabla^\circ}$ est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1, de degré -1. Par conséquent, $D - D_{\nabla^\circ}$ est un produit intérieur $i(\alpha)$, où α est une 1-forme sur M. Il existe une 1-forme β sur M à valeurs dans le fibré $\operatorname{End}(TM)$ telle que $\beta(X) = \operatorname{Trace} \alpha(X)$ et $\beta(X)Y = \beta(Y)X$ quels que soient $X, Y \in A^1(M)$. Soit ∇ la connexion linéaire dans TM définie par $\nabla_X Y = \nabla^\circ_X Y - \beta(X)Y$. Sa torsion est nulle et $D(X) = D_\nabla(X)$ pour tout $X \in A^1(M)$. Puisque D et D_∇ engendrent $[\ ,\ ]_S$, ceci entraîne que $D = D_\nabla$.

Soient maintenant ∇ et ∇' deux connexions linéaires de torsion nulle dans TM. Pour que $D_\nabla = D_{\nabla'}$, il faut et il suffit que ∇ et ∇' induisent la même connexion linéaire dans le fibré $\Lambda^n TM$. En effet, la relation $D_\nabla = D_{\nabla'}$ est visiblement équivalente à $\operatorname{div}_\nabla = \operatorname{div}_{\nabla'}$.

En observant que toute connexion linéaire dans $\Lambda^n TM$ est induite par une connexion linéaire dans TM, on arrive finalement au résultat suivant.

(2.3) PROPOSITION. — *L'application $\nabla \to D_\nabla$ se factorise en l'application qui associe à une connexion de torsion nulle dans TM la connexion induite dans $\Lambda^n TM$ et une bijection canonique de l'espace affine des connexions linéaires dans $\Lambda^n TM$ sur l'ensemble des opérateurs différentiels qui engendrent le crochet de Schouten-Nijenhuis. Dans cette bijection, les connexions de courbure nulle dans $\Lambda^n TM$ ont pour images les opérateurs de carré nul.*

Par exemple, si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique riemannienne sur M, D_∇ est de carré nul. Si M est orientable et si v est une section sans zéro de $\Lambda^n TM$, alors v détermine une connexion plate dans $\Lambda^n TM$ dont l'image est un opérateur de carré nul qui engendre le crochet de Schouten-Nijenhuis.

Soit D un opérateur différentiel qui engendre le crochet de Schouten-Nijenhuis. Pour toute p-forme différentielle ω sur M, le produit intérieur $i(\omega)$ est un opérateur de degré $-p$ et d'ordre $\leq p$, donc $[D, i(\omega)] = Di(\omega) - (-1)^p i(\omega)D$ est de degré $-(p+1)$ et d'ordre $\leq p+1$. C'est donc un produit intérieur par une $(p+1)$-forme. On constate que

$$Di(\omega) - (-1)^p i(\omega) D = -i(d\omega), \tag{2.4}$$

où $d\omega$ est la différentielle extérieure de ω. Si D' est un autre opérateur qui engendre le crochet $[\ ,\ ]_S$, alors $D' = D + i(\alpha)$, où α est une 1-forme, et la relation (2.4) montre que $(D')^2 = D^2 - i(d\alpha)$.

3. Le complexe associé à une structure de Poisson

Rappelons qu'une structure de Poisson sur la variété M est un 2-tenseur contravariant antisymétrique w tel que $[w, w]_S = 0$, ([8], [15]). On notera F_w le sous-module du module des champs de vecteurs sur M dont les éléments sont les $i(\alpha)w$, où α est une 1-forme sur M. Ce module est engendré par les champs hamiltoniens $[w, f]_S = i(df)w$ où $f \in C^\infty(M)$. Comme le crochet de deux champs hamiltoniens est hamiltonien, F_w est une sous-algèbre de Lie de $A^1(M)$. Pour tout point $p \in M$, les valeurs en p des éléments de F_w sont les vecteurs tangents en p à la "feuille symplectique" contenant p ([14]). Tout champ appartenant à F_w est ainsi tangent aux feuilles. Lorsque le rang de w est constant, cette propriété caractérise les éléments de F_w.

Soient w une structure de Poisson sur M et D un opérateur différentiel qui engendre le crochet de Schouten-Nijenhuis. Alors $D(w)$ est un champ de vecteurs sur M qui est déterminé, *modulo* F_w, par le tenseur w. La relation (1.2) montre que

$$2[D(w), w]_S = 2D^2(w)w - D^2(w^2).$$

Par conséquent, si $D^2 = 0$, le champ $D(w)$ est un automorphisme infinitésimal de la structure de Poisson. Quel que soit le choix de D, le champ $D(w)$ normalise le module F_w. Si le rang de w est constant sur un ouvert U de M, alors en tout point de U, le champ $D(w)$ est tangent aux feuilles symplectiques.

On notera d_w l'endomorphisme $\mathrm{ad}_S(w)$ de $A(M)$. C'est une dérivation de degré 1. Puisque

$$2\,\mathrm{ad}_S(w)^2 = [\mathrm{ad}_S(w), \mathrm{ad}_S(w)] = \mathrm{ad}_S([w,w]_S) = 0,$$

on a $d_w^2 = 0$. On notera $H_w^*(M)$ l'algèbre de cohomologie du complexe $(A(M), d_w)$. Cette cohomologie a été définie par A. LICHNEROWICZ dans [8] sous le nom de G-cohomologie. De l'identité de Jacobi, il résulte que

$$d_w[a,b]_S = [d_w(a),b]_S + (-1)^{p-1}[a,d_w(b)]_S$$

pour tout $a \in A^p(M)$ et tout $b \in A(M)$. Le crochet de Schouten-Nijenhuis induit donc un crochet dans $H_w^*(M)$. Ce crochet est une structure d'algèbre de Lie graduée dans

$$\hat{H}_w^*(M) = \bigoplus_{p \geq -1} \hat{H}_w^p(M),$$

où

$$\hat{H}_w^p(M) = H_w^{p+1}(M)$$

(*cf.* [8]). Il vérifie de plus la relation (1.7).

Puisque $[w,w]_S = 0$, w est un cocycle dont la classe appartient évidemment au *centre* de l'algèbre de Lie graduée $\hat{H}_w^*(M)$. Si D est un opérateur qui engendre le crochet $[\ ,\ ]_S$ et si $D^2 = 0$, alors (1.8),

$$D[w,b]_S = [D(w),b]_S - [w,D(b)]_S$$

pour tout $b \in A(M)$, donc $Dd_w + d_wD = \mathrm{ad}_S(D(w))$. Cela montre que la classe du cocycle $D(w)$ appartient également au *centre* de $\hat{H}_w^*(M)$.

Soit $\Omega(M) = \bigoplus_{p\geq 0} \Omega^p(M)$ l'algèbre des formes différentielles extérieures sur M et soit d la différentiation extérieure dans $\Omega(M)$. A la structure de Poisson w sur M, on associe l'opérateur

$$\Delta = [i(w), d] = i(w)d - di(w)$$

dans $\Omega(M)$. C'est un opérateur différentiel de degré -1 et d'ordre ≤ 2. On a visiblement

$$[d, \Delta] = d\Delta + \Delta d = 0. \tag{3.1}$$

Quels que soient $a, b \in A(M)$, on a $[[i(a), d], i(b)] = i([a,b]_S)$. Par suite

$$(3.2) \qquad [\Delta, i(w)] = \Delta i(w) - i(w)\Delta = i([w,w]_S) = 0.$$

Des relations (3.1) et (3.2) résulte que $\Delta^2 = 0$. On définit donc dans $\Omega(M)$ un crochet $[\ ,\ ]_w$ de degré -1 qui donne une structure d'algèbre de Lie graduée dans $\hat{\Omega}(M)$ en posant

$$[\alpha,\beta]_w = [\alpha,\beta]_\Delta = (-1)^p \left(\Delta(\alpha\beta) - \Delta(\alpha)\beta - (-1)^p\alpha\Delta(\beta)\right)$$

pour tout $\alpha \in \Omega^p(M) = \hat{\Omega}^{p-1}(M)$ et tout $\beta \in \Omega(M)$. De la relation (3.1) résulte que pour $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega(M)$, on a

$$d[\alpha,\beta]_w = [d\alpha,\beta]_w + (-1)^{p-1}[\alpha, d\beta]_w.$$

Si $d\alpha = d\beta = 0$,

$$\begin{aligned} [\alpha,\beta]_w &= (-1)^{p-1} d\left(i(w)(\alpha\beta) - (i(w)\alpha)\beta - \alpha(i(w)\beta)\right) \\ &= (-1)^{p-1} d\Phi^2_{i(w)}(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Ceci montre que $[\ ,\ ]_w$ *induit le crochet nul dans* $H^*(\Omega(M)) = H^*(M)$. On remarque que si $f, g \in C^\infty(M)$, on a $[df, dg]_w = d\Phi^2_{i(w)}(df, dg) = -d\{f,g\}_w$, où $\{\ ,\ \}_w$ est le crochet de Poisson relatif à w.

La structure de Poisson w détermine d'autre part un homomorphisme γ_w de l'algèbre $\Omega(M)$dans l'algèbre $A(M)$. Cet homomorphisme est caractérisé par les conditions $\gamma_w(f) = f$ pour $f \in \Omega^0(M)$ et $\gamma_w(\alpha) = -i(\alpha)w$ pour $\alpha \in \Omega^1(M)$. L'image de γ_w est donc la sous-algèbre de $A(M)$ engendrée par les fonctions et le module F_w. Quelles que soient les formes $\alpha, \beta \in \Omega(M)$, on a

$$(3.3) \qquad [\gamma_w(\alpha), \gamma_w(\beta)]_S = \gamma_w([\alpha,\beta]_w).$$

Cela se démontre en vérifiant la relation lorsque α et β sont des fonctions ou des 1-formes exactes. Pour tout $f \in \Omega^0(M)$, on a

$$(d_w\gamma_w - \gamma_w d)(f) = d_w(f) + i(df)w = 0.$$

Or le noyau de $d_w\gamma_w - \gamma_w d$ est une sous-algèbre de $\Omega(M)$ stable par d. Par conséquent $d_w\gamma_w = \gamma_w d$. Ainsi γ_w est un homomorphisme du complexe de de Rham dans le complexe $(A(M), d_w)$ et il induit donc un homomorphisme $H(\gamma_w) : H^*(M) \to H^*_w(M)$.

Le noyau de $\gamma_w : \Omega(M) \to A(M)$ est stable par $i(w)$. Il existe donc un opérateur différentiel K et un seul dans l'algèbre image de γ_w tel que

$K\gamma_w = \gamma_w i(w)$. Cet opérateur est de degré -2 et d'ordre ≤ 2. Posons $D = Kd_w - d_w K$. Il résulte de (3.3) que si a, b appartiennent à l'image de γ_w et si a est de degré p, alors $[a,b]_S = (-1)^p \Phi^2_D(a,b)$. Par conséquent, si de plus $d_w(a) = d_w(b) = 0$, alors $[a,b]_S = (-1)^{p+1} d_w \Phi^2_K(a,b)$. Ainsi, *le crochet de Schouten-Nijenhuis induit le crochet nul dans la cohomologie du sous-complexe* $\gamma_w(\Omega(M)) \subset A(M)$. A fortiori, le crochet induit par $[\ ,\ ]_S$ dans $H^*_w(M)$ a une restriction nulle sur l'image de $H(\gamma_w) : H^*(M) \to H^*_w(M)$.

Supposons maintenant la structure de Poisson w de rang égal en tout point à la dimension $n = 2m$ de M. Alors γ_w est un isomorphisme et la 2-forme ω telle que $\gamma_w(\omega) = w$ est une structure symplectique sur M. Pour toute p-forme α sur M, on a $i(\alpha)\gamma_w = (-1)^p \gamma_w i(\gamma_w(\alpha))$, par conséquent $i(\omega)\gamma_w = \gamma_w i(w)$ ou encore $K = i(\omega)$. On obtient donc un opérateur D qui engendre le crochet de Schouten-Nijenhuis en posant $D = i(\omega)d_w - d_w i(\omega)$. Cette formule est la réplique contravariante d'une formule usuelle en géométrie kaehlérienne. Les connexions linéaires ∇ de torsion nulle sur M telles que $D_\nabla = D$ sont les connexions pour lesquelles la différentielle covariante de la forme volume ω^m est nulle. Compte tenu de ce qui a été vu plus haut (*cf.* LICHNEROWICZ, [8]), *$H(\gamma_w)$ est un isomorphisme de $H^*(M)$ sur $H^*_w(M)$ et le crochet de Schouten-Nijenhuis induit le crochet nul dans $H_w(M)$*. Si $x_1, \ldots, x_{2m}$ sont des coordonnées symplectiques sur un ouvert U de M et si $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=m} dx_i dx_{m+i}, \qquad w = \sum_{i=1}^{i=m} \xi_i \xi_{m+i}$$

et

$$d_w(x_i) = -\xi_{m+i}, \qquad d_w(x_{m+i}) = \xi_i, \qquad d_w(\xi_i) = 0, \qquad d_w(\xi_{m+i}) = 0,$$

pour $1 \leq i \leq m$. Si l'on considère les x_i et les ξ_i comme des coordonnées respectivement paires et impaires sur la supervariété $(M, A(M))$, on a

$$D = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

É. CARTAN adoptait parfois cette manière d'écrire; on en trouve un bel exemple dans [3].

4. Le cas linéaire

Dans ce paragraphe, on désigne par $\mathbf{g}$ une algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbf{R}$ et par $\mathbf{g}'$ l'espace dual de $\mathbf{g}$. On identifie $\mathbf{g}$ à l'espace des fonctions linéaires sur $\mathbf{g}'$ et on identifie $\mathbf{g}'$ à l'espace des champs de vecteurs invariants par translations sur $\mathbf{g}'$. L'algèbre $A(\mathbf{g}')$ des tenseurs contravariants antisymétriques sur $\mathbf{g}'$ est alors $C^\infty(\mathbf{g}')\otimes\Lambda(\mathbf{g}')$. Soit $x_1,\ldots,x_n$ une base de $\mathbf{g}$ et $\xi_1,\ldots,\xi_n$ la base duale. On note D l'opérateur différentiel qui engendre le crochet de Schouten-Nijenhuis dans $A(\mathbf{g}')$ et qui est associé à la connexion plate naturelle dans $T\mathbf{g}'$ (*cf.* § 2). En considérant les x_i et ξ_i comme des coordonnées, on a

$$D = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On notera w la structure de Poisson standard sur $\mathbf{g}'$ donnée par la théorie de Kostant-Kirillov-Souriau ([6], [7], [12], [15]). C'est le tenseur qui correspond au crochet $[\ ,\ ] : g\times g\to g$. On a

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}[x_i,x_j]\xi_i\xi_j.$$

Par suite

$$D(w) = -\sum_{i,j=1}^{i,j=n} \xi_i([x_i,x_j])\xi_j = \sum_{j=1}^{j=n}(\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(x_j))\xi_j.$$

Le champ de vecteurs $D(w)$ est donc la forme Tr ad, considérée comme champ de vecteurs invariant par translations sur $\mathbf{g}'$. L'opérateur différentiel d_w est tel que

$$d_w(f) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n}[x_i,x_j]\xi_i\frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad d_w(\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{i,j=n}\xi([x_i,x_j])\xi_i\xi_j.$$

pour tout $f\in C^\infty(\mathbf{g}')$ et tout $\xi\in\mathbf{g}'$. Ces formules montrent que, si l'on considère $A(\mathbf{g}')$ comme l'algèbre des formes alternées sur $\mathbf{g}$ à valeurs dans $C^\infty(\mathbf{g}')$, alors quels que soient $x,y,\in\mathbf{g}$, $(d_w(f))(x)$ est la dérivée de Lie de f par rapport au champ $-[w,x]_S$ et $(d_w(\xi)(x,y) = -\xi([x,y])$. Par suite *le complexe $(A(\mathbf{g}'),d_w)$ est le complexe des formes alternées sur $\mathbf{g}$ à valeurs dans le $\mathbf{g}$-module $C^\infty(\mathbf{g}')$ défini par la représentation coadjointe.* Pour tout $x\in\mathbf{g}$, on notera $\theta(x)$ la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteurs

$-[w,x]_S$. On a $\theta(x) = -\operatorname{ad}_S([w,x]_S) = d_w i(x) + i(x) d_w$ où $i(x) = -\operatorname{ad}_S(x)$ est le produit intérieur par x dans le facteur $\Lambda(\mathbf{g}')$ de $A(\mathbf{g}')$. En coordonnées,

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{k=n} [x, x_k] \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j=1}^{i,j=n} \xi_j([x_i, x]) \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}. \tag{4.1}$$

Dans la suite, nous identifions l'algèbre symétrique $S(\mathbf{g})$ à la sous-algèbre de $C^\infty(\mathbf{g}')$ formée par les fonctions polynômiales sur $\mathbf{g}'$. Alors $S(\mathbf{g}) \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$ est une sous-algèbre de $A(\mathbf{g}')$ stable par d_w, par les $\theta(x)$ et par l'opérateur D. C'est donc aussi une sous-algèbre de Lie de $A(\mathbf{g}')$ pour le crochet de Schouten-Nijenhuis, qui induit par conséquent un crochet dans la cohomologie du complexe $(S(\mathbf{g}) \otimes \Lambda(\mathbf{g}'), d_w)$ c'est-à-dire dans $H^*(\mathbf{g}, S(\mathbf{g}))$.

(4.2) PROPOSITION. — *Si* $\mathbf{g}$ *est une algèbre de Lie semi-simple, le crochet de Schouten-Nijenhuis dans* $S(\mathbf{g}) \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$ *induit le crochet nul dans* $H^*(\mathbf{g}, S(\mathbf{g}))$.

Démonstration. — Si $\mathbf{g}$ est semi-simple, le $\mathbf{g}$-module $S(\mathbf{g})$ est somme directe de la sous-algèbre $S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$, intersection des noyaux des $\theta(x) \mid S(\mathbf{g})$, et du sous-module $\theta(\mathbf{g})S(\mathbf{g})$, somme des $\theta(x)S(\mathbf{g})$ où x parcourt $\mathbf{g}$. On sait d'autre part que

$$H^*(\mathbf{g}, S(\mathbf{g})) = S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}} \otimes H^*(\mathbf{g}, \mathbf{R}) = S(\mathbf{g}^{\mathbf{g}} \otimes \Lambda(\mathbf{g}')^{\mathbf{g}}.$$

L'algèbre $H^*(\mathbf{g}, S(\mathbf{g}))$ est donc engendrée par les classes des cocycles appartenant à $S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$ et à $\Lambda(\mathbf{g}')^{\mathbf{g}}$. Compte tenu de la relation (1.7), il suffit de montrer que $[u,v]_S$ est un cobord lorsque u et v appartiennent à $S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$ ou $\Lambda(\mathbf{g}')^{\mathbf{g}}$. Puisque $[u,v]_S = 0$ lorsque $u, v \in \Lambda(\mathbf{g}')$, on se limitera au cas $u \in S^p(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$ et $v \in \Lambda(\mathbf{g}')^{\mathbf{g}}$. Dans ce cas

$$[u,v]_S = (-1)^p \left(D(uv) - D(u)v - (-1)^p u D(v)\right) = (-1)^p D(uv)$$

et par suite

$$(-1)^p [u,v]_S = \sum_{i=1}^{i=n} [\xi_i, u]_S \frac{\partial v}{\partial \xi_i}.$$

Puisque $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = \mathbf{g}$, tout $\eta \in \mathbf{g}'$ est de la forme

$$\eta = -\sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \operatorname{ad}(z_k) = -\sum_{k=1}^{k=n} [[w, z_k]_S, \xi_k]_S$$

et par conséquent

$$[\eta, u]_S = \sum_{k=1}^{k=n} \theta(z_k) \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Il en résulte que $[\xi_i, u]_S \in \theta(\mathbf{g})S(\mathbf{g})$ pour tout i et que

$$[u,v]_S \in \theta(\mathbf{g})S(\mathbf{g}) \otimes \Lambda(\mathbf{g}').$$

Puisque $\mathbf{g}$ est semi-simple, la cohomologie du sous-complexe $\theta(\mathbf{g})S(\mathbf{g})\otimes\Lambda(\mathbf{g}')$ est nulle et $[u,v]_S$ est donc un cobord.

On peut aussi démontrer cela par une méthode plus proche de ce qui a été fait au §3, en s'appuyant sur une formule qui exprime D comme crochet de d_w et d'un opérateur différentiel d'ordre 3, *modulo un opérateur nul sur* $S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}} \otimes \Lambda(\mathbf{g}')$. Soit B la forme de Killing de $\mathbf{g}$ et soit x'_i $(1 \leq i \leq n)$ la base de $\mathbf{g}$ telle que $B(x_i, x'_j) = \delta_{ij}$.

Soit

$$L = \sum_{i,j,k=1}^{i,j,k=n} B([x'_i, x'_j], x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 3 et de degré -2 dans $A(\mathbf{g}')$. Pour tout $x \in \mathbf{g}$, soit

$$\theta^S(x) = \sum_{k=1}^{k=n} [x, x_k] \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

C'est la dérivation de $A(\mathbf{g}')$ nulle sur $\Lambda(\mathbf{g}')$ qui coïncide avec $\theta(x)$ sur $C^\infty(\mathbf{g}')$ (*cf.* (4.1)).

(4.3) PROPOSITION. — *Avec les notations qui précèdent, on a*

$$D = Ld_w - d_w L - 2P,$$

où

$$P = \sum_{i,j,k}^{i,j,k} \xi_k([x_i, x_j]) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \theta^s(x'_j).$$

Notons $C^\infty(\mathbf{g}')^{\mathbf{g}}$ la sous-algèbre des fonctions invariantes par la représentation coadjointe. La proposition montre que si

$$a, b \in C^\infty(\mathbf{g}')^{\mathbf{g}} \otimes \Lambda(\mathbf{g}') \quad \text{et si} \quad d_w(a) = d_w(b) = 0,$$

alors

$$[a,b]_S = (-1)^{p-1} d_w \Phi^2_L(a,b),$$

où p désigne le degré de a. Le crochet des classes de a et de b est donc nul et l'opérateur L permet de donner une primitive canonique du cocycle $[a,b]_S$.

REFERENCES

[1] CARTAN (É.). — Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **87**, 1928, p. 196–198.

[2] CARTAN (É.). — Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, *Ann. Soc. Pol. Math.*, t. **8**, 1929, p. 181–225.

[3] CARTAN (É.). — Sur les transformations de Bäcklund, *Bull. Soc. Math. France*, t. **43**, 1915, p. 6–24.

[4] CHEVALLEY (C.) et EILENBERG (S.). — Cohomology Theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, t. **63**, 1948, p. 85–124.

[5] CONN (J-F.). — Normal forms for analytic Poisson structures (preprint).

[6] KOSTANT (B.). — Orbits, symplectic structures and representation Theory, *Proc. U.S. Japan Seminar in Diff. Geometry*, [Kyoto, 1965]. — Tokyo, Nippon Hyoronisha, 1965.

[7] KIRILLOV (A.A). — *Éléments de la théorie des représentations.* — Mir, Moscou, 1974.

[8] LICHNEROWICZ (A.). — Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential Geometry*, t. **12**, 1977, p. 253–300.

[9] NIJENHUIS (A.). — Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields, I, *Indag. Math.*, t. **17**, 1955, p. 390–403.

[10] RAUCH (G.). — Effacement de déformation, *Ann. Inst. Fourier*, t. **221**, 1972, p. 239–269.

[11] RIM (D.S). — Deformation of transitive Lie algebras, *Ann. of Math.*, t. **83**, 1966, p. 339–357.

[12] SOURIAU (J-M.). — Quantification géométrique, *Comm. Math. Phys.*, t. **1**, 1966, p. 374–398.

[13] SCHOUTEN (J.A.). — On the differential operators of first order in tensor calculus, *Convegno Int. Geom. Diff. Italia*, [1953], p. 1–7. — Roma, Ed. Cremonese, 1954.

[14] WEINSTEIN (A.). — The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geometry*, t. **18**, 1983, p. 523–557.

[15] LICHNEROWICZ (A.). — Déformations de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique, *Pub. del V congreso de la Ag. de Matemáticos de Expresión Latina*, [1977], p. 194–206. — Madrid, 1978.

Jean-Louis KOSZUL,
Institut Fourier,
Université de Grenoble I,
B. P. 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex.