M. EMERY

Convergence des martingales dans les variétés

Astérisque, tome 132 (1985), p. 47-63

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__47_0>

CONVERGENCE DES MARTINGALES DANS LES VARIÉTÉS

M.Emery

0 - INTRODUCTION ET NOTATIONS

Les martingales à valeurs dans une variété ont été définies par Bismut [1] et Meyer [11], ainsi que Darling [3]. En adoptant la définition de Meyer, qui repose sur l'idée de Schwartz d'identifier l'accroissement infinitésimal d'une semimartingale à un vecteur tangent du second ordre [15], nous allons présenter ici deux types de questions. D'abord les problèmes de convergence : A quelle condition peut-on affirmer que les martingales X_t à valeurs dans une variété riemannienne qui ont une limite X_∞ quand $t\to\infty$ sont exactement celles dont la "variation quadratique riemannienne" $\lim_\sigma \sum_n d^2(X_{t_n},X_{t_{n+1}})$ est finie ? Que peut-on dire d'analogue pour $t\to-\infty$? Puis le problème de non-confluence : Deux martingales dans une variété qui prennent la même valeur à un instant T sont-elles identiquement égales sur tout l'intervalle $[0,T]$, comme dans le cas des martingales uniformément intégrables à valeurs réelles ?

Faute d'apporter des réponses complètes à ces questions, nous énoncerons des conjectures, et nous indiquerons des résultats partiels.

Nos processus seront définis sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une(*) filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ (famille croissante et continue à droite de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, qui contiennent tous les événements négligeables). Tous les énoncés seront invariants par changement de loi (remplacement de P par une autre probabilité ayant mêmes événements négligeables), sauf pour ce qui est de la définition des martingales ; on pourrait donc ne se donner que la classe d'équivalence de P (comme le fait Schwartz [16]), et nos énoncés s'appliqueraient aux processus qui sont des martingales pour au moins une probabilité de la classe. (En fait, la famille des semimartingales qui sont suffisamment proches des martingales pour partager leurs propriétés trajectorielles reste à définir, même dans le cas des processus à valeurs réelles.) Deux processus X et Y seront considérés comme

(*) sauf dans le contre-exemple final, où il nous faudra deux filtrations.

égaux si $P\{\exists t : X_t \neq Y_t\} = 0$ (c'est l'égalité trajectorielle, bien plus forte que l'égalité en loi).

Les processus que nous considèrerons seront tous des semimartingales continues, à valeurs soit réelles, soit dans une variété V à d dimensions (d fini). Cette variété sera toujours supposée C^∞ , et munie d'une connexion affine, elle aussi de classe C^∞ , que l'on supposera sans torsion (on peut encore définir les martingales quand la connexion est tordue, mais ajouter une torsion ne change pas les martingales : le gain en généralité est illusoire).

Si X est un processus à valeurs dans V , nous noterons X^i les coordonnées de X dans une carte locale $(x^i)_{1\leq i\leq d}$; elles sont définies seulement dans l'ouvert aléatoire $\{t\geq 0 : X_t \in \text{domaine de la carte}\}$, mais ce caractère local ne présente que des difficultés techniques (voir Schwartz [14] ou Meyer-Stricker [13]), d'autant plus aisées à surmonter que nous ne considérons ici que des processus continus. Si X est une semimartingale dans V et a un tenseur deux fois covariant sur V , on définit un processus réel à variation finie $A_t = \int_0^t a(dX_s, dX_s)$ par $A_0 = 0$ et $dA_t = a_{ij}(X_t)d\langle X^i, X^j\rangle_t$ (*) dans l'ouvert aléatoire $X^{-1}(U)$, U étant le domaine d'une carte locale (x^i) . Si l'on préfère localiser l'espace V plutôt que le temps, on peut se donner un atlas $(U^\alpha, (x^{\alpha i})_{1\leq i\leq d})$ et une partition de l'unité (φ^α) subordonnée au recouvrement (U^α) ; on a alors

$$A_t = \int_0^t \sum_\alpha \varphi^\alpha(X_s)\, a^\alpha_{ij}(X_s)\, d\langle X^{\alpha i}, X^{\alpha j}\rangle_s \quad .$$

Ce processus A est noté $a\bullet X$ par Schwartz [15] et $\int_{X_0^t} a$ par Meyer [11] ; ces auteurs considèrent des êtres a plus généraux que les tenseurs deux fois covariants. La propriété suivante est tout-à-fait classique ; nous l'utiliserons souvent.

LEMME 0. <u>Si le tenseur</u> a <u>est symétrique et de type positif</u> (<u>éventuellement dégénéré</u>), <u>le processus</u> $\int_0^t a(dX_s, dX_s)$ <u>est croissant</u>.

<u>Démonstration</u>. Par localisation, on se ramène à vérifier que, <u>si</u> $X^1, \ldots, X^d$ <u>sont des semimartingales réelles et</u> $(Q_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ <u>un processus prévisible localement</u>

(*) Nous utilisons, ici et dans la suite, la convention de sommation d'Einstein.

borné à valeurs dans les matrices symétriques de type positif, le processus $\int_0^t Q_{ij}(s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s$ est croissant. Soit R la racine carrée symétrique de type positif de Q ; comme l'application $Q \longmapsto R$ est continue, R est prévisible et localement borné. Soit Y_t^i la semimartingale $\sum_j \int_0^t R_{ij}(s)\,dX_s^j$; le résultat découle de $\int_0^t Q_{ij}(s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s = \sum_i \langle Y^i,Y^i\rangle_t$. □

Nous ferons souvent dans la suite l'hypothèse supplémentaire que V est riemannienne, de tenseur métrique g ; la connexion sera toujours dans ce cas la connexion canonique (de Levi-Civita) attachée à la structure riemannienne. Si X est une semimartingale dans V riemannienne, le processus croissant $\int_0^t g(dX_s,dX_s)$ sera noté $\langle X,X\rangle_t$ et appelé la variation quadratique de X (c'est d'ailleurs la limite en probabilité, pour n tendant vers l'infini, de $\sum_i d^2(X_{t_i^n},X_{t_{i+1}^n})$, où d désigne la distance riemanienne sur V et $(t_i^n)_{0\leq i<2^n}$ la $n^{\text{ième}}$ subdivision dyadique de l'intervalle $[0,t]$).

D'autres tenseurs deux fois covariants que nous utiliserons seront définis à partir d'une fonction C^2 f sur la variété. Il s'agit de $a = df\otimes df$ (en coordonnées locales $a_{ij} = D_i f\, D_j f$) et de $a = \text{Hess}\, f$, défini par $\text{Hess}\, f_x(u,v) = (\nabla_u df, v)$ pour u et v dans l'espace tangent $T_x V$. Grâce à l'absence de torsion, $\text{Hess}\, f$ est symétrique ; $\text{Hess}\, f$ est caractérisé par $\text{Hess}\, f_x(u,u) = (f\circ\varphi)''(0)$, où φ est "la" géodésique telle que $\varphi(0)=x$, $\dot\varphi(0)=u$; en coordonnées locales, $(\text{Hess}\, f)_{ij} = D_{ij} f - \Gamma_{ij}^k D_k f$, où les fonctions Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion.

La définition suivante, inspirée de Meyer [11], est finalement très proche de celle de Darling [3] (toutes sont bien sûr équivalentes).

DÉFINITION. <u>Une semimartingale</u> X <u>à valeurs dans</u> V <u>est une martingale si, pour toute fonction</u> f <u>de classe</u> C^2 ,

$$f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \text{Hess}\, f\,(dX_s,dX_s)$$

<u>est une martingale locale (continue) réelle</u>.

Il suffit en réalité de le vérifier en prenant pour f des fonctions coordonnées locales : X est une martingale si et seulement si chaque

$$dX_t^i + \tfrac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(X_t)\, d\langle X^j, X^k\rangle_t$$

est une différentielle de martingale locale (dans l'ouvert aléatoire correspondant à la carte). On remarquera l'ambiguïté du vocabulaire : quand $V = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, les "martingales" ainsi définies sont exactement ce que l'on désigne d'ordinaire par "martingales locales continues".

Noter que, si X est une martingale dans V et f une fonction C^2, la martingale locale réelle $M_t = f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f\,(dX_s, dX_s)$ a pour variation quadratique $\langle M,M\rangle_t = \int_0^t (df \otimes df)(dX_s, dX_s)$, car M a même variation quadratique que $f \circ X$.

I - CONVERGENCE DES MARTINGALES QUAND $t \to \infty$

Soit X une martingale dans une variété riemannienne V. Si $V = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ il est bien connu (Lenglart [10]) que les événements suivants sont égaux (modulo les négligeables) : $\{\langle X,X\rangle_\infty < \infty\}$, $\{\lim_{t\to\infty} X_t$ existe dans $\mathbb{R}\}$, $\{\lim_{t\to\infty} X_t$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}\}$, $\{\overline{\lim}_{t\to\infty} X_t < \infty\}$; chacun d'entre eux est essentiellement le plus gros événement sur lequel X soit une semimartingale jusqu'à l'infini. Notre propos est d'étendre au cas riemannien ce type de propriétés. Les travaux de Darling [4] et Zheng [19] (voir aussi Meyer [12]) ont montré que, en posant

$\Omega_1 = \{\lim_{t\to\infty} X_t$ existe dans $V\}$,

$\Omega_2 =$ plus grand événement sur lequel X est une semimartingale jusqu'à l'infini,

$\Omega_3 = \{\langle X,X\rangle_\infty < \infty\}$,

$\Omega_4 = \{\lim_{t\to\infty} X_t$ existe dans le compactifié d'Aleksandrov $\hat{V}$ de $V\}$,

on a $\Omega_1 = \Omega_2$ (Zheng ; cette égalité ne nécessite qu'une connexion, et non une structure riemannienne), $\Omega_2 \subset \Omega_3$ (trivial) et $\Omega_3 \subset \Omega_4$ (Darling).

Lorsque V est compacte, $V = \hat{V}$ et les quatre Ω_i sont égaux. Mais, on vient de le voir pour $V = \mathbb{R}$, ceci peut se produire aussi si V n'est pas compacte.

Un problème naturel est de chercher les variétés riemanniennes V telles que, pour (tout Ω et) toute martingale X (sur Ω) on ait $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$.

DÉFINITION. <u>De telles variétés riemanniennes seront dites stochastiquement complètes</u>. (Ce terme de stochastiquement complète est parfois employé en géométrie différentielle stochastique dans un sens un peu moins fort : on demande seulement que la durée de vie avant explosion des mouvements browniens sur V soit infinie, ce qui revient à exiger $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$ seulement pour les martingales X qui sont des mouvements browniens changés de temps. Nous dirons alors que V est <u>faiblement stochastiquement complète</u>.)

PROPOSITION 1.1. <u>Toute variété riemannienne stochastiquement complète est complète</u>.

<u>Démonstration</u>. Supposons V non complète. Il existe une géodésique maximale $\varphi(t)$ définie sur un intervalle $]\alpha,\beta[$ où $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta < \infty$ (la non-complétude se traduit par la finitude de β). Soit M une martingale locale continue réelle, issue de zéro, à valeurs dans $]\alpha,\beta[$, telle que $M_\infty = \lim_t M_t$ existe et soit dans $\mathbb{R} \cap \{\alpha,\beta\}$ (par exemple un mouvement brownien changé de temps de telle sorte que l'instant d'atteinte de $\{\alpha,\beta\}$ soit renvoyé à l'infini). Posons $X_t = \varphi(M_t)$. Puisque φ est affine de $]\alpha,\beta[$ dans V, X est une martingale ; bien que X_∞ n'existe pas dans V (car $M_\infty \notin]\alpha,\beta[$), on a $\langle M,M\rangle_\infty < \infty$ (car $M_\infty \in \mathbb{R}$), donc

$$\langle X,X\rangle_\infty = \int_0^\infty \|\dot\varphi(M_s)\|^2 \, d\langle M,M\rangle_s = \|\dot\varphi\|^2 \langle M,M\rangle_\infty$$

est p.s. fini. Ainsi, pour X, $P(\Omega_1) = 0$ et $P(\Omega_3) = 1$; donc V n'est pas stochastiquement complète. □

La réciproque est fausse : On connaît des variétés complètes qui ne sont pas stochastiquement complètes, ni même faiblement stochastiquement complètes (voir Debiard-Gaveau-Mazet [5]). Mais on sait (Yau [18]) que si la courbure de Ricci de V est minorée et si V est complète, V est faiblement stochastiquement complète.

CONJECTURE 1. <u>Toute variété riemannienne complète à courbure sectionnelle minorée est stochastiquement complète</u>. **(Maintenant démontrée : voir l'Addendum.)**

La minoration de la courbure sectionnelle signifie qu'il existe un réel a tel que, pour tout x de V et tout 2-plan $P \subset T_x V$, la courbure sectionnelle de V en x selon P est au moins égale à a. Nous pensons que l'hypothèse de minoration de la courbure de Ricci n'est pas suffisante, les martingales pouvant filer à l'infini en utilisant préférentiellement les directions de l'espace selon lesquelles la courbure est très négative, contrairement aux mouvements browniens, qui eux sont isotropes.

PROPOSITION 1.2. Soit V une variété riemannienne. On suppose qu'il existe une fonction f positive de classe C^2 sur V telle que

(i) f est propre : si x s'éloigne à l'infini dans V, $f(x) \to \infty$;

(ii) le gradient de f est borné : $\|\operatorname{grad} f\| \leq c$;

(iii) la hessienne de f est dominée par un multiple de la forme métrique : $\operatorname{Hess} f(u,u) \leq c \|u\|^2$.

Alors V est stochastiquement complète.

REMARQUES. a) La conjecture 1 peut être précisée : Nous pensons que si V est complète et à courbure sectionnelle minorée, il existe toujours une fonction possédant les propriétés ci-dessus.

b) La proposition reste vraie si la constante c figurant en (ii) et (iii) est autorisée à dépendre de x, mais avec une croissance linéaire par rapport à f : on peut remplacer c par $c(1+f(x))$. Ceci peut se voir soit en modifiant la démonstration par un argument d'équation différentielle stochastique, soit plus simplement en remarquant qu'alors la fonction $\tilde{f} = \operatorname{Log}(1+f)$ vérifie (ii) et (iii) avec c constant.

c) Le résultat subsiste si la fonction f est définie seulement sur un voisinage $V-K$ de l'infini (K compact) ; la condition (i) : f est propre doit être remplacée par (i') : l'image réciproque d'une partie bornée est bornée pour que l'on ait encore $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$. En effet, on peut alors appliquer la proposition à une fonction C^2 partout définie et égale à f hors d'un voisinage compact de K.

d) Nous n'avons pas explicitement supposé V complète ; mais cela résulte immédiatement de (i) et (ii).

<u>**Démonstration de la proposition 1.2.**</u> Soit X une martingale à valeurs dans V. Nous voulons montrer que sur $\Omega_3 = \{<X,X>_\infty < \infty\}$, X_∞ existe et est dans V. Grâce au théorème de Darling ($\Omega_3 \subset \Omega_4$ p.s.), il suffit de le démontrer sur $\Omega_3 \cap \Omega_4$. Sur cet événement, $f(X)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers une limite ; il suffit (hypothèse (i)) de vérifier que cette limite est finie. On écrit $f\circ X = M + A$, avec M martingale locale telle que $<M,M>_t = \int_0^t (df\otimes df)(dX_s, dX_s)$ et $A_t = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Hess}\, f\,(dX_s, dX_s)$. Mais les deux formes quadratiques $df\otimes df$ et $\mathrm{Hess}\, f$ sont dominées par un multiple de la forme métrique g ($\mathrm{Hess}\, f$ par hypothèse et $df\otimes df$ par

$$(df\otimes df)(u,u) = (df,u)^2 = <\mathrm{grad}\, f, u>^2 \leq \|\mathrm{grad}\, f\|^2\, \|u\|^2 \quad).$$

D'après le lemme 0, les processus $c<X,X> - <M,M>$ et $c<X,X> - A$ sont croissants. Sur $\Omega_3 \cap \Omega_4$, on a donc d'une part $<M,M>_\infty < \infty$, ce qui entraîne $\overline{\lim_{t\to\infty}} M_t < +\infty$, et d'autre part $\overline{\lim_{t\to\infty}} A_t < +\infty$. Ainsi, $f\circ X_\infty$ est fini. □

PROPOSITION 1.3. <u>**La conjecture 1 est vraie si la variété possède un pôle**</u> (au sens de Greene et Wu [7]) ; <u>**dans ce cas il suffit même que la courbure radiale soit minorée.**</u>

<u>**Démonstration.**</u> Nous allons appliquer la proposition précédente à la distance au pôle (fonction ρ de Greene et Wu). Elle n'est pas différentiable au pôle, et sa Hessienne n'est pas dominée par la métrique au voisinage du pôle, mais la remarque c) ci-dessus permet d'y remédier. Les propriétés (i) et (ii) sont trivialement vérifiées ; reste (iii).

Soient $-a^2$ un minorant de la courbure radiale et V' l'espace hyperbolique à d dimensions, à courbure constante $-a^2$. Le théorème de comparaison de Greene et Wu (Théorème A page 19 de [7]) montre que $\mathrm{Hess}\,\rho_x$ est dominé par $\mathrm{Hess}\,\rho'_{x'}$, où $\rho(x) = \rho'(x')$ et où les espaces euclidiens T_xV et $T_{x'}V'$ sont identifiés en faisant coïncider la direction radiale. En d'autres termes, pour contrôler $\mathrm{Hess}\,\rho$, on peut supposer la courbure sectionnelle constante et égale à $-a^2$. Un calcul direct fournit alors $\mathrm{Hess}\,\rho\,(u,u) = a \coth a\rho\, \|u^\perp\|^2$, où $u^\perp$ est la composante orthoradiale du vecteur u. Donc $\mathrm{Hess}\,\rho\,(u,u) \leq a \coth a\rho\,\|u\|^2$ et l'on obtient le résultat désiré : Hors d'un voisinage du pôle, la condition (iii) est satisfaite. □

PROPOSITION 1.4. <u>La conjecture 1 est vraie si le rayon d'injectivité n'est pas nul</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $\varepsilon>0$ un réel plus petit que le rayon d'injectivité. Pour x dans V, la fonction $h(y) = r^2(y) = d^2(x,y)$ (où d est la distance riemannienne) est C^2 dans la boule $B(x,\varepsilon)$ et y vérifie $\mathrm{grad}\,h = 2r\,\mathrm{grad}\,r$, donc $\|\mathrm{grad}\,h\| \leq 2\varepsilon$, et $\mathrm{Hess}\,h = 2\,(r\,\mathrm{Hess}\,r + dr\otimes dr)$, donc $\mathrm{Hess}\,h\,(u,u) \leq 2(a\varepsilon \coth a\varepsilon + 1)\,\|u\|^2$ (où $-a^2$ est un minorant de la courbure ; voir la démonstration précédente).

Soit X une martingale dans V ; définissons une suite croissante de temps d'arrêt par $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{t \geqq T_n : d(X_{T_n}, X_t) = \varepsilon\}$. Posons $T_\infty = \sup_n T_n$; sur $[\![0,T_\infty[\![$ on peut définir une semimartingale continue Z par

$$Z_t = n\,\varepsilon^2 + d^2(X_{T_n}, X_t) \quad \text{pour} \quad T_n \leqq t \leqq T_{n+1} \quad .$$

Si $M+A$ est la décomposition de Z, on peut écrire, sur l'intervalle $[\![T_n, T_{n+1}]\!]$,

$$d\langle M,M\rangle_t = (dh\otimes dh)(dX_t, dX_t) \leq \|\mathrm{grad}\,h\,(X_t)\|^2\, d\langle X,X\rangle_t$$

$$dA_t = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Hess}\,h\,(dX_t, dX_t) \quad ,$$

où $h = d^2(X_{T_n}, \cdot)$, donc, en utilisant les majorations ci-dessus et le lemme 0,

$$d\langle M,M\rangle \leqq c\, d\langle X,X\rangle \quad ; \quad dA \leqq c\, d\langle X,X\rangle \ .$$

On en déduit que sur $\{\langle X,X\rangle_\infty < \infty$ et X_∞ existe dans $\hat{V}\}$, M_{T_∞} existe dans $\mathbb{R}$ et A_{T_∞} dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Donc Z_{T_∞}, la somme des deux, existe aussi dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$; comme Z est positive, Z_{T_∞} est fini et il existe un entier aléatoire N tel que $\varepsilon^{-2} Z_{T_\infty} < N$. On a alors $T_N = \infty$ et $T_\infty = \infty$. Il s'ensuit que X reste dans la boule (aléatoire) $B(X_0, N\varepsilon^2)$, et X_∞ est donc dans V. □

REMARQUE. Il peut se trouver que les hypothèses des propositions 1.3 et 1.4 ne soient pas satisfaites par la variété V mais le soient par son revêtement universel V^u. Cela suffit : <u>Si V^u est stochastiquement complète, V l'est aussi</u>. Soit en effet X une martingale dans V ; notons X^u un relèvement de X dans V^u. Comme $\langle X,X\rangle = \langle X^u,X^u\rangle$, sur $\{\langle X,X\rangle_\infty < \infty\}$ X^u a une limite dans V^u, et donc X a une limite dans V.

COROLLAIRE 1.5. Toute variété riemannienne complète à courbure bornée est stochastiquement complète.

En effet, puisque la courbure est majorée, le revêtement universel a un rayon d'injectivité non nul ; la remarque ci-dessus et la proposition 1.4 s'appliquent.

II - CONVERGENCE DES MARTINGALES QUAND $t \to 0$

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des processus $(X_t)_{0<t<\infty}$ qui sont des martingales au sens suivant : Pour tout $\varepsilon > 0$, le processus $(X_{\varepsilon+t})_{t\geq 0}$ est une martingale ordinaire (pour la filtration $(\underline{\underline{F}}_{\varepsilon+t})_{t\geq 0}$ bien sûr). Les instants ε figurant dans cette définition peuvent être remplacés par des temps d'arrêt : voir Meyer-Stricker [13]. Quand $V = \mathbb{R}$, les problèmes de convergence pour $t \to 0$ de ces processus ont été étudiés par Sharpe [17], Meyer-Stricker [13], Calais-Génin [2]. Pour une telle martingale X, on ne peut pas en général définir le crochet $\langle X,X\rangle_t$ de façon adaptée ; seuls les accroissements $\langle X,X\rangle_t - \langle X,X\rangle_s$, que l'on note $\langle X,X\rangle_s^t$, sont donc pris en considération. De même, si f est C^2,

$$M_s^t = f(X_t) - f(X_s) - \frac{1}{2}\int_s^t \mathrm{Hess}\, f\,(dX_u, dX_u)$$

est ce que Sharpe nomme " local martingale increment process " et Meyer-Stricker " martingale locale-mesure " ; il n'existe pas toujours un processus adapté N dont M_s^t soit la différence $N_t - N_s$. Si X est la restriction à $]0,\infty[$ d'une martingale au sens usuel sur $[0,\infty[$, nous dirons que X est une vraie martingale ; nous parlerons de même de vraies semimartingales (dans V ou réelles).

Les théorèmes de Zheng et Darling s'étendent sans difficulté à cette situation. Pour le voir, posons

$$\Omega_1' = \{ \lim_{t\to 0} X_t \text{ existe dans } V \} \quad ,$$

$$\Omega_2' = \text{plus petit événement sur lequel } X \text{ est une vraie martingale} \quad ,$$

$$\Omega_3' = \{ \lim_{s\to 0} \langle X,X\rangle_s^t \text{ existe et est finie}\} \quad (\text{ça ne dépend pas de } t\ ) \quad ,$$

$$\Omega_4' = \{ \lim_{t\to 0} X_t \text{ existe dans } \hat{V} \} \quad ;$$

comme dans le paragraphe précédent, on a $\Omega_1' = \Omega_2' \subset \Omega_3' \subset \Omega_4'$.

Démonstration de $\Omega_1^! = \Omega_2^!$ (la variété n'est pas supposée riemannienne).

L'inclusion $\Omega_2^! \subset \Omega_1^!$ est triviale. Réciproquement, puisque $\Omega_1^!$ est dans $\underline{\underline{F}}_0$, on peut, par conditionnement, supposer $P(\Omega_1^!) = 1$ et il faut démontrer que X est une vraie martingale dans V.

Il existe une suite (K_n) de compacts dont les intérieurs recouvrent V et tels que toute fonction C^2 sur un voisinage de K_n s'écrive comme différence de deux fonctions C^2, convexes(*) sur K_n (en effet, on vérifie, à l'aide d'une carte normale par exemple, que tout point de V a un voisinage possédant cette propriété). Par conditionnement et par arrêt, on peut supposer que X prend ses valeurs dans l'un des K_n.

Soit f une fonction C^2 sur V ; nous allons montrer que $f\circ X$ est une vraie semimartingale. Puisque f est différence de deux fonctions convexes sur K_n, on peut supposer que f elle-même est convexe. Le processus réel $(f\circ X_t)_{t>0}$ est alors une sous-martingale locale, bornée, et pourvue d'une limite pour $t \to 0$. C'est donc une vraie sous-martingale (théorème de convergence des surmartingales inverses), cequi montre que $f\circ X$ est une vraie semimartingale, et X est une vraie semimartingale.

C'est en fait une vraie martingale, car pour f de classe C^2, le processus $f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Hess}\, f\,(dX_s, dX_s)$ est une vraie semimartingale et une martingale locale continue sur $]0,\infty[$, donc une vraie martingale locale. $\square$

Ceci établit $\Omega_1^! = \Omega_2^!$; l'inclusion $\Omega_2^! \subset \Omega_3^!$ est triviale.

Démonstration de $\Omega_3^! \subset \Omega_4^!$. Il suffit d'établir que, pour f C^2 à support compact dans V, $f(X_t)$ converge p.s. sur $\Omega_3^!$ quand t tend vers zéro. Mais $f(X_t) - f(X_s)$ se décompose en $M_s^t + A_s^t$, où M_s^t est une mesure-martingale locale et où $A_s^t = \frac{1}{2}\int_s^t \mathrm{Hess}\, f\,(dX_u, dX_u)$. Comme f est à support compact, les formes quadratiques $cg - \frac{1}{2}\mathrm{Hess}\, f$ et $cg + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}\, f$ sont positives si la constante c est choisie assez grande ; ceci entraîne $|A_s^t| \leq c\,\langle X,X\rangle_s^t$, ce qui montre que, sur $\Omega_3^!$, A_s^t a une

---

(*) Rappelons qu'une fonction f est convexe si $\mathrm{Hess}\, f$ est de type positif.

limite pour $s \to 0$. De même, $cg - df \otimes df$ est positive, donc $\langle M,M\rangle_s^t \leq c \langle X,X\rangle_s^t$, ce qui montre que sur $\Omega_3^!$ $\langle M,M\rangle_s^t$ a une limite pour $s \to 0$, donc aussi M_s^t (voir Sharpe [17]). D'où le résultat. □

A quelle condition a-t-on $\Omega_1^! = \Omega_2^! = \Omega_3^!$? Il n'est plus nécessaire que V soit complète, contrairement au paragraphe précédent. Par exemple, si V est une demi-droite ouverte, ou un intervalle borné, on a $\Omega_1^! = \Omega_2^! = \Omega_3^! = \Omega_4^!$ pour toute martingale dans V . Par contre, quand V est le plan privé d'un point, le fait que $\Omega_2^! \neq \Omega_3^!$ pour les mouvements browniens issus de ce point est certainement dû au défaut de complétude de V !

CONJECTURE 2. <u>Soient</u> V <u>une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle majorée et</u> $(X_t)_{0<t<\infty}$ <u>une martingale dans</u> V . <u>Alors</u> $\Omega_1^! = \Omega_2^! = \Omega_3^!$.

Dans la conjecture 1, la minoration de la courbure servait à empêcher les martingales de partir trop vite à l'infini (par rapport à leur horloge naturelle $d\langle X,X\rangle$). Ici, nous pensons que la majoration les empêche de venir de l'infini en " temps " fini. Contrairement à la conjecture 1, celle-ci pourrait même être vraie en toute généralité, sans l'hypothèse sur la courbure : si la courbure augmente au voisinage de l'infini, la variété tend à se refermer sur elle-même, et il semble difficile de venir du point à l'infini...

PROPOSITION 2. <u>Sur</u> V <u>riemannienne et complète, on suppose qu'il existe une fonction</u> f <u>positive et</u> C^2 , <u>propre</u> ($f(\infty_V)=\infty$), <u>à gradient borné</u> ($\|\operatorname{grad} f\| \leq c$) <u>et dont la hessienne est minorée par un multiple de la forme métrique</u> ($\operatorname{Hess} f(u,u) \geq -c\|u\|^2$). <u>Alors, pour toute martingale</u> $(X_t)_{0<t<\infty}$ <u>dans</u> V , <u>on a</u> $\Omega_1^! = \Omega_2^! = \Omega_3^!$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer que, sur $\Omega_3^! \cap \Omega_4^!$, $\lim_{t\to 0} f(X_t)$ est finie. Mais

$$f(X_t) - f(X_s) = M_s^t + \tfrac{1}{2}\int_s^t \operatorname{Hess} f(dX_u, dX_u) \quad ;$$

la majoration du gradient entraîne

$$\langle M,M\rangle_s^t = \int_s^t (df \otimes df)(dX_u, dX_u) \leq c \langle X,X\rangle_s^t ,$$

donc, sur $\Omega_3^!$, $\lim_s \langle M,M\rangle_s^t$, et aussi, d'après Sharpe [17] $\lim_s M_s^t$ existent dans

$\mathbb{R}$. De même, la minoration de la hessienne fournit $\int_s^t \mathrm{Hess}\, f\,(dX_u, dX_u) \geqq -c\,\langle X,X\rangle_s^t$, donc sur Ω'_3 , $\liminf_{s\to 0} \int_s^t \mathrm{Hess}\, f\,(dX_u, dX_u) > -\infty$. En définitive, sur $\Omega'_3 \cap \Omega'_4$, $\liminf_{s\to 0} (f(X_t) - f(X_s)) > -\infty$, donc $\limsup_{t\to 0} f(X_t) < +\infty$. □

REMARQUE. La conjecture 2 peut être précisée : nous conjecturons qu'une telle fonction f existe dès que la courbure sectionnelle est majorée ; il semble même plausible qu'on puisse construire une telle f sur toute variété riemannienne complète.

III - NON-CONFLUENCE DES MARTINGALES

Dans les deux paragraphes précédents, nous nous sommes demandé si le comportement trajectoriel des martingales dans V ressemble à celui des martingales locales dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. Dans celui-ci, nous allons comparer les propriétés des martingales dans une petite partie de V à celles des martingales bornées réelles. Nous nous replaçons dans les conditions de l'introduction : V est toujours munie d'une connexion, sans être nécessairement riemannienne ; les processus sont indexés par le fermé $[0,\infty[$.

DÉFINITION. Nous dirons que V possède la propriété de non-confluence (en abrégé la PNC) si pour tout espace filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P, (\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ et toutes martingales X et Y définies sur Ω et à valeurs dans V , on a, pour tout temps d'arrêt fini T

$$X_T = Y_T \ \text{p.s.} \quad \Rightarrow \quad X = Y \ \text{sur} \ [\![0,T]\!] \quad .$$

En considérant le premier instant où $X = Y$ et en effectuant un changement de temps (voir [6]), on se ramène sans peine au cas où T est constant : V a la PNC si et seulement si pour toutes martingales X et Y telles que $X_{1983} = Y_{1983}$, on a $X = Y$ sur $[\![0,1983]\!]$.

Il est clair que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ ne possède pas la PNC ; en revanche, tout ouvert borné de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ la possède, ainsi que certains ouverts non bornés (par exemple les demi-droites, ou, dans le plan, les angles saillants). Il n'est pas vrai non plus que toute variété compacte, ou riemannienne bornée, ait la PNC ; la sphère S^1, et, plus généralement, toute variété sur laquelle une géodésique a un point double, fournissent des contre-exemples.

CONJECTURE 3. <u>Soit</u> V <u>une variété munie d'une connexion sans torsion</u>. <u>Tout point de</u> V <u>a un voisinage jouissant de la PNC</u>.

Plus généralement, nous conjecturons que, si W est une sous-variété totalement géodésique de V et x un point de W, il existe un voisinage U de x dans V tel que, si X est une martingale dans U avec $X_T \in W$ pour un temps d'arrêt fini T, tout le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est dans W. La conjecture 3 en découlerait en prenant pour W la diagonale dans le produit $V \times V$.

PROPOSITION 3. a) <u>S'il existe une fonction</u> f <u>positive</u>, C^2, <u>bornée et convexe sur</u> $V \times V$, <u>qui vérifie</u> $f(x,y) = 0 \iff x = y$, <u>alors</u> V <u>possède la PNC</u>.

b) <u>Toute variété riemannienne bornée</u>, <u>convexe et à courbure sectionnelle négative possède la PNC</u>.

Dans cet énoncé, V convexe signifie que deux points quelconques de V peuvent être joints par une géodésique et une seule, qui dépend de façon C^∞ des deux points.

Le point b) entraîne en particulier que la conjecture 3 est vraie pour les variétés à courbure négative ; pour les variétés de Cartan-Hadamard (complètes, simplement connexes, à courbure négative), on obtient même la PNC pour tout ouvert borné, car les boules sont convexes.

<u>Démonstration de la proposition 3</u>. a) Soient X et Y deux martingales dans V et T un temps d'arrêt tel que $X_T = Y_T$. Comme (X,Y) est une martingale dans $V \times V$ (pour la connexion produit), $Z = f(X,Y)$ est une sous-martingale locale réelle, bornée car f l'est, donc une vraie sous-martingale positive. Puisque $Z_T = 0$, Z est nulle sur $[\![0,T]\!]$, donc, sur cet intervalle, $X = Y$.

b) Il suffit de vérifier que le carré de la distance $f(x,y) = d^2(x,y)$ satisfait les hypothèses du a). Seule la convexité n'est pas triviale. Comme f est C^2, il suffit de vérifier la convexité de f hors de la diagonale (car son complémentaire est un ouvert dense). Finalement, d étant positive, il suffit d'établir la convexité de d hors de la diagonale. Soient donc $x(t)$ et $y(t)$ deux géodésiques de V telles que $x(0) \neq y(0)$; nous voulons montrer que la dérivée seconde en 0 de $t \longmapsto d(x(t),y(t))$ est positive ou nulle. Le calcul de cette dérivée seconde est classique (c'est la formule de la variation seconde de la longueur ; voir Kobayashi-Nomizu [9] ou Klingenberg [8]). On trouve

$$\int_0^r [\, g(R(U,T)U,T) \; + \; \|\nabla_T U\|^2 \; - \; g(\nabla_T U,T)^2 \,]\, ds \quad ,$$

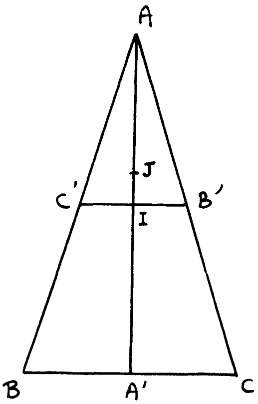
où $r = d(x(0),y(0))$, s est l'abscisse curviligne sur la géodésique joignant $x(0)$ à $y(0)$, T la vitesse de cette géodésique, et U le champ de Jacobi le long de cette géodésique tel que $U(0) = \dot{x}(0)$; $U(r) = \dot{y}(0)$. En d'autres termes, $U(s)$ est la vitesse pour $t = 0$ de la courbe $z_s(t)$ ainsi définie : $s \longrightarrow z_s(t)$ est la géodésique telle que $z_0(t) = x(t)$ et $z_r(t) = y(t)$.

Comme la courbure est négative, $g(R(U,T)U,T)$ est positif ou nul ; l'inégalité de Schwarz donne $g(\nabla_T U,T)^2 \leq \|T\|^2 \, \|\nabla_T U\|^2 = \|\nabla_T U\|^2$, et l'intégrale est non négative. $\square$

La démonstration le montre bien, ce résultat est finalement un théorème de comparaison. Dans une variété à courbure négative, la fonction distance est plus convexe que dans l'espace plat $\mathbb{R}^d$, et les martingales n'en ont que plus tendance à s'éloigner les unes des autres. Mais le rapprochement avec $\mathbb{R}^d$ ne peut pas être poussé trop loin ; dans le cas euclidien, pour $s < t$, on calcule X_s connaissant X_t par la formule $X_s = E[X_t | \underline{\underline{F}}_s]$; dans les variétés, même vérifiant la PNC, la connaissance de X_t et $\underline{\underline{F}}_s$ ne suffit pas à déterminer X_s : il faut connaître en outre toute la filtration $(\underline{\underline{F}}_u)_{s \leq u \leq t}$.

Pour illustrer ceci, voici un exemple de deux martingales X et Y, pour des filtrations différentes $(\underline{\underline{F}}_t)$ et $(\underline{\underline{G}}_t)$, telles que $\underline{\underline{F}}_0 = \underline{\underline{G}}_0$, $\underline{\underline{F}}_2 = \underline{\underline{G}}_2$, $X_2 = Y_2$ et cependant $X_0 \neq Y_0$. Ces deux processus sont à valeurs dans un ouvert arbitrairement petit U d'une variété riemannienne de dimension 2 à courbure constante négative ; remarquer que U possède la PNC.

EXEMPLE. Soit, dans le plan hyperbolique, ABC un triangle isocèle en A ; on désigne par A', B' et C' les milieux des côtés, par J le milieu de AA' et par I celui de $B'C'$. Comme la courbure est négative, un peu de géométrie hyperbolique montre que $J \neq I$: J se trouve en fait sur le segment AI. Si P, Q et R sont trois points de U tels que Q est le milieu de PR, on notera a_{PQR} l'application affine (c'est-à-dire la géodésique) de $[-1,1]$ dans U telle que $a_{PQR}(-1) = P$, $a_{PQR}(0) = Q$ et $a_{PQR}(1) = R$.



Soit $(M_t)_{0\leq t\leq 1}$ une martingale continue à valeurs dans $[-1,1]$ telle que $M_0 = 0$ et $M_1 = 1$ ou -1 avec probabilités $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (par exemple $M_t = B_{t/1-t}$, où B est un mouvement brownien arrêté au premier instant où $|B| = 1$). Donnons-nous, sur un espace probabilisé Ω, deux copies indépendantes M' et M'' de M.

Par définition, $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ sera l'image de (M'_t) par $a_{C'IB'}$;
si $X_1 = C'$, $(X_t)_{1\leq t\leq 2}$ sera l'image de (M''_{t-1}) par $a_{BC'A}$, et
si $X_1 = B'$, $(X_t)_{1\leq t\leq 2}$ sera l'image de (M''_{t-1}) par $a_{CB'A}$.
Par définition, $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ sera l'image de (M''_t) par $a_{A'JA}$;
si $Y_1 = A'$, $(Y_t)_{1\leq t\leq 2}$ sera l'image de (M'_{t-1}) par $a_{B'AC}$, et
si $Y_1 = A$, $(Y_t)_{1\leq t\leq 2}$ sera constamment égal à A.

On vérifie sans peine que X et Y sont des martingales pour leurs filtrations respectives, telles que $X_0 = I$, $Y_0 = J$, $\underline{\underline{F}}_0 = \underline{\underline{G}}_0$ est la tribu engendrée par les événements négligeables, et cependant

$$X_2 = Y_2 = \begin{cases} A & \text{si } M''_1 = 1 \\ B & \text{si } M''_1 = -1,\ M'_1 = -1 \\ C & \text{si } M''_1 = -1,\ M'_1 = 1\ . \end{cases}$$

ADDENDUM (Septembre 1983)

Nous remercions le Professeur H. Wu qui nous a fourni une démonstration de la conjecture 1, sous la forme forte qui suit la proposition 1.2 :

THÉORÈME. Sur une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle minorée, il existe toujours une fonction vérifiant les conditions de la proposition 1.2 (et la variété est donc stochastiquement complète).

Démonstration de H. Wu. Choisissons a dans V et soit $h(x) = d(a,x)$. Le théorème 3 page 77 de " An elementary Method in the Study of nonnegative Curvature " (H. Wu, Acta Math. 142, 1979) montre que la hessienne généralisée Ch de h est majorée hors d'une boule de centre a . Il reste à régulariser h ; la proposition 2.3 de " C^∞ Approximations of convex, subharmonic and plurisubharmonic Functions " (H. Wu, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 12, 1979) permet d'approcher h (fonction 1-lipschitzienne et $(-k)$-convexe hors d'un voisinage borné de a) par une fonction f , C^∞, $(1+\varepsilon)$-lipschitzienne et $(-k-\varepsilon)$-convexe loin de a , d'où le résultat. □

M. Emery
IRMA (Laboratoire associé au CNRS)
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg-Cedex

RÉFÉRENCES

[1] J.H. BISMUT. Conférence au Séminaire de Probabilités de Paris (Janvier 1980).

[2] J.Y. CALAIS et M. GENIN. Sur les martingales locales continues indexées par]0, ∞[. Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes 986, Springer 1983.

[3] R.W.R. DARLING. Martingales in manifolds — Definition, examples and behaviour under maps. Séminaire de Probabilités XVI, Supplément Géométrie différentielle stochastique, Lectures Notes 921, Springer 1982.

[4] R.W.R. DARLING. Convergence of martingales in a Riemannian manifold. A paraître.

[5] A. DEBIARD, B. GAVEAU et E. MAZET. Temps d'arrêt des diffusions riemanniennes. CRAS Paris 278 (1974) 723-725.

[6] M. EMERY. Une propriété des temps prévisibles. Séminaire de Probabilités XIV, Lecture Notes 784, Springer 1980.

[7] R.E. GREENE and H. WU. Function theory on manifolds which possess a pole. Lecture Notes 699, Springer 1979.

[8] W. KLINGENBERG. Riemannian geometry. de Gruyter, Berlin 1982.

[9] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU. Foundations of differential geometry. Vol. 2. Interscience, New York 1969.

[10] E. LENGLART. Sur la convergence presque sûre des martingales locales. CRAS Paris 284 (1977) 1085-1088.

[11] P.A. MEYER. Géométrie stochastique sans larmes. Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes 850, Springer 1981.

[12] P.A. MEYER. Le théorème de convergence des martingales dans les variétés riemanniennes. Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes 986, Springer.

[13] P.A. MEYER et C. STRICKER. Sur les semimartingales au sens de L. Schwartz. Mathematical Analysis and Applications, part B ; Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol. 7B (1981) 577-601.

[14] L. SCHWARTZ. Semi-martingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes 780, Springer 1980.

[15] L. SCHWARTZ. Géométrie différentielle du 2ième ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle. Séminaire de Probabilités XVI, Supplément Géométrie différentielle stochastique. Lecture Notes 921, Springer 1982.

[16] L. SCHWARTZ. Semi-martingales formelles. Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes 850, Springer1981.

[17] M.J. SHARPE. Local time and singularities of continuous local martingales. Séminaire de Probabilités XIV, Lecture Notes 784, Springer 1980.

[18] S.T. YAU. On the heat kernel of a complete Riemannian manifold. J. Math Pures Appl. 57 (1978) 191-201.

[19] W.A. ZHENG. Sur la convergence des martingales dans une variété riemannienne. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 63 (1983) 511-515.