

# *Astérisque*

YVES COLIN DE VERDIÈRE

**Théorie spectrale des surfaces de Riemann d'aire infinie**

*Astérisque*, tome 132 (1985), p. 259-275

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_132\\_\\_259\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__259_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# THÉORIE SPECTRALE DES SURFACES

## DE RIEMANN D'AIRE INFINIE

par Yves COLIN de VERDIÈRE

Soit  $H = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$  le demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique  $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  et  $\Gamma$  un sous groupe discret du groupe des isométries de  $H$ . Si  $z_0, z_1$  sont deux points de  $H$ , on introduit la fonction de dénombrement orbital  $N_\Gamma(z_0, z_1; r) = \text{Cardinal} \{\gamma \in \Gamma \mid d(z_0, z_1) \leq r\}$  où  $d$  est la distance hyperbolique.

Remarquons que, si  $\Gamma$  opère sans points fixes,  $H/\Gamma$  est lisse et pour chaque couple  $m_0 = \Gamma.z_0, m_1 = \Gamma.z_1$  de  $H/\Gamma$ , on a une bijection naturelle entre  $\Gamma$  et les géodésiques qui joignent  $m_0$  à  $m_1$  dans  $H/\Gamma$ ;  $N_\Gamma$  dénombre ainsi les géodésiques de longueurs  $\leq r$  qui joignent  $m_0$  à  $m_1$ .

Le problème du comportement asymptotique de  $N_\Gamma$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  a été résolu par H. Huber (H) dans le cas où  $H/\Gamma$  est compacte. La méthode classique, utilisée pour l'analogie euclidien de ce problème, ne marche pas à cause de la croissance exponentielle de l'aire des disques de rayon  $r$  dans le  $\frac{1}{2}$  plan de Poincaré. On peut ainsi seulement obtenir une estimation du type  $N_\Gamma = O(e^r)$ .

Pour obtenir le comportement asymptotique plus précis de la fonction  $N_\Gamma$ , on doit faire appel à la théorie spectrale de  $H/\Gamma$ . Dans cet exposé, nous obtenons un résultat, généralisant celui d'Huber, valable pour tout groupe  $\Gamma$  de type fini.

On introduit une série de Poincaré  $P_\Gamma(z_0, z_1; s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-sd(z_0, \gamma.z_1))$  transformée de Laplace de  $dN_\Gamma$ . Il est facile (§ 1) de relier  $P_\Gamma$  à la résolvante du laplacien sur  $H/\Gamma$ , et cela permet par des arguments de théorie spectrale et d'analyse fonctionnelle, d'obtenir le prolongement méromorphe de la somme  $P_\Gamma$ , convergente pour  $\text{Re}(s) > \delta_\Gamma \geq 0$  au demi-plan  $\text{Re}(s) > 0$  (§ 2 et 3). L'existence de ce prolongement méromorphe s'obtient en adaptant la méthode utilisée par Faddeev [F, L2] dans le cas des surfaces d'aire finie.

Par application du théorème taubérien d'Ikehara, on obtient un résultat du type  $N_\Gamma \sim C e^{\delta_\Gamma r}$ , généralisant celui d'Huber.

Dans le § 5, nous étudions la singularité de la série de Poincaré en  $s = \delta_\Gamma = 1$ , pour une classe d'exemple où  $H/\Gamma$  admet une action isométrique de  $\mathbb{Z}^d$  avec un quotient compact.

Enfin, dans le § 6, nous dressons une liste de problèmes. (\*)

### 1. L'EXPOSANT $\delta_\Gamma$

L'exposant  $\delta_\Gamma$ , abscisse de convergence absolue de la série de Poincaré  $P_\Gamma$ , qui mesure la grosseur de  $\Gamma$ , a été étudié notamment par Beardon [BN 1,2], Patterson [P 4,5] et Sullivan [S 1,2,3,4].

Voici quelques résultats :

---

(\*) Durant le colloque, A. Unterberger m'a indiqué un article récent de Lax et Phillips : The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and Non-Euclidean Spaces (Journal of Functional Analysis 46, 280-350 (1982)), qui traite le même problème pour un groupe  $\Gamma$  avec un domaine fondamental qui est un polyèdre géodésique fini. Ils utilisent l'équation des ondes et obtiennent le comportement asymptotique avec majoration du reste lorsque  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}(\dim(H/\Gamma) - 1)$ .

- a)  $0 \leq \delta_\Gamma \leq 1$
- b) Si  $\Gamma$  de type fini,  $\delta_\Gamma = 1$  si et seulement si  $\text{aire}(H/\Gamma) < +\infty$ .
- c) Si  $\Gamma$  est de type fini,  $\delta_\Gamma = 0$  si et seulement si  $\Gamma$  est élémentaire au sens qu'il contient, outre des éléments elliptiques, uniquement un groupe cyclique hyperbolique.
- d) Si  $H/\Gamma$  a une pointe et que  $\Gamma$  n'est pas à un groupe fini près un groupe cyclique parabolique,  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$ .

Outre les relations avec la théorie spectrale dont nous parlons plus bas, Patterson [P2] et Sullivan [S1], ont pu relier  $\delta_\Gamma$  à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite  $\mathcal{L}_\Gamma \subset \mathbb{R} \cup \infty$  de  $\Gamma(\mathcal{L}_\Gamma)$  est l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de  $\Gamma$ ) :  $\delta_\Gamma$  est, lorsque  $\Gamma$  est de type fini, égal à cette dimension de Hausdorff.

Mais ce qui nous intéresse le plus ici est la relation avec la théorie spectrale de  $H/\Gamma$ . Si  $L^2(H/\Gamma)$  est l'espace des fonctions  $\Gamma$ -automorphes de carré intégrable sur un domaine fondamental et  $\Delta = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$  le laplacien hyperbolique opérant sur  $C_0^\infty(H/\Gamma)$ , cet opérateur est essentiellement autoadjoint, on note  $\Delta_\Gamma$  son extension autoadjointe.

Pour  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$  et  $s(1-s) \notin \text{spectre}(\Delta_\Gamma)$ , désignons par  $R_\Gamma(z_0, z_1, s)$  le noyau de la résolvante  $(\Delta_\Gamma - s(1-s))^{-1}$ , on a alors le :

Théorème :  $P_\Gamma(z_0, z_1; s) - 2^{2(1-s)} \cdot \pi \frac{\Gamma(2s)}{(\Gamma(s))^2} \tilde{R}_\Gamma(z_0, z_1, s)$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\text{Re}(s) > 0$ . Ici  $\tilde{R}_\Gamma = R_\Gamma + \frac{1}{2\pi} \text{Log } d(z_0, z_1)$  désigne la résolvante d'où l'on a ôté la singularité logarithmique.

Preuve : Le noyau  $R_{\text{Id}}$  de la résolvante du laplacien sur  $H$  est donné (E,L2,LV) en terme de fonctions hypergéométriques par :

$$R_{\text{Id}}(z_0, z_1; s) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} \sigma^{-s} F(s, s, 2s; \sigma^{-1}) \text{ où } \sigma = \frac{1}{2} (\text{ch } d(z_0, z_1) - 1) .$$

La fonction hypergéométrique admet le développement limité quand  $u \rightarrow 0^+$  :

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) = 1 + O(u) .$$

Donc, pour  $\operatorname{Re}(s) >> 0$ , on a :

$$R_{\Gamma}(z_0, z_1; s) = C(s) \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \left[ e^{-sd(z_0, \gamma z_1)} + O(e^{-(s+1)d(z_0, \gamma z_1)}) \right] .$$

On en déduit le résultat annoncé car la série de Poincaré converge toujours pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

En particulier, on en déduit le :

Théorème : Si  $\delta_{\Gamma} > \frac{1}{2}$ ,  $\inf(\text{spectre } (\Delta_{\Gamma})) = \delta_{\Gamma}(1-\delta_{\Gamma})$ , alors que si  
 $\delta_{\Gamma} \leq \frac{1}{2}$ ,  $\inf(\text{spectre } (\Delta_{\Gamma})) = \frac{1}{4}$  .

Preuve : La série de Poincaré qui est une série de Dirichlet à termes positifs admet nécessairement une singularité en  $s = \delta_{\Gamma}$  . Donc si  $\delta_{\Gamma} > \frac{1}{2}$ , la résolvante est holomorphe sur  $\operatorname{Re}(s) > \delta_{\Gamma}$  et a une singularité en  $s = \delta_{\Gamma}(1-\delta_{\Gamma})$  est donc bien la borne inférieure du spectre. Si, au contraire  $\delta_{\Gamma} \leq \frac{1}{2}$ , la résolvante n'admet pas de singularité pour  $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ , donc le spectre est minoré par  $\frac{1}{4}$  ; il est facile de voir que le spectre commence effectivement à  $\frac{1}{4}$ . Bien remarquer que, lorsque  $\delta_{\Gamma} < \frac{1}{2}$ , la série  $\sum_{\gamma \in \Gamma} R_{\text{Id}}(z_0, \gamma z_1; s)$  ne définit la résolvante de  $\Delta_{\Gamma}$  que pour  $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ . Pour  $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$ , ce n'est pas le noyau d'un opérateur continu sur  $L^2(H/\Gamma)$  (même pour  $\Gamma = \{\text{Id}\}$ ).

Remarque 1 : Le résultat précédent montre aussi que si  $\delta_{\Gamma} < \frac{1}{2}$ ,  $\Delta_{\Gamma}$  ne peut pas avoir de valeurs propres, ni de spectre singulier : en effet le noyau de la résolvante admet alors un prolongement holomorphe sur  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ . C'est en particulier le cas pour les groupes élémentaires.

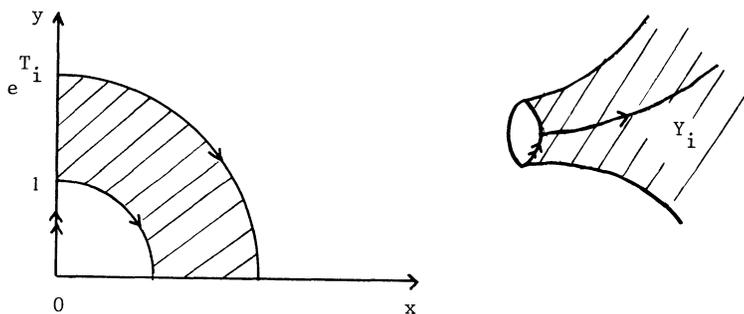
Remarque 2 : Lorsque  $\delta_{\Gamma} < 1$ , la série de Poincaré converge en  $s = 1$ . Lorsque  $\delta_{\Gamma} = 1$ , la divergence de la série de Poincaré en  $s = 1$ , équivaut à la non existence

d'une fonction de Green sur  $H/\Gamma$ , qui est elle-même équivalente à l'ergodicité du flot géodésique sur  $H/\Gamma$  [S 2,3,4]. Voir § 5 pour des exemples où  $\delta_\Gamma = 1$  et la série de Poincaré converge en  $s = 1$ .

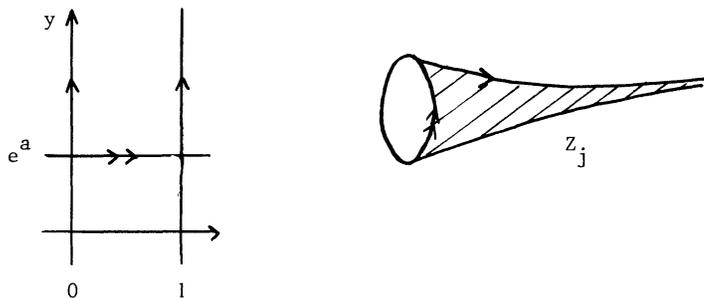
2. SPECTRE DE  $H/\Gamma$  POUR  $\Gamma$  DE TYPE FINI.

Il est classique (GG) (mais non vrai en dimension  $\geq 3$ ) que  $\Gamma$  de type fini équivaut à  $\Gamma$  admet un polygone fondamental de Dirichlet avec un nombre fini de côtés : on dit alors que  $\Gamma$  est "géométriquement fini" ; en dimension  $\geq 3$ , c'est surtout cette hypothèse qui remplace  $\Gamma$  de type fini. Plus précisément, on peut montrer [P 2] que  $H/\Gamma$  a la structure suivante :

$H/\Gamma = X_0 \cup_{i=1}^k Y_i \cup_{j=1}^l Z_j$  où  $X_0$  est compacte ;  $Y_i$  est isométrique à un demi-hyperboloïde  $\mathbb{R}/T_i \times \mathbb{Z} \times [0, +\infty[$  avec la métrique  $dr^2 + ch^2 r \cdot d\theta^2$  ;



$Z_j$  est un cusp  $\mathbb{R}/Z \times [a, +\infty[$  avec la métrique  $dr^2 + e^{-2r} d\theta^2$ .



La théorie de  $H/\Gamma$  est bien connue lorsque  $\text{aire}(H/\Gamma) < +\infty$  (i.e.  $k=0$ ); rappelons qu'alors  $\Delta_\Gamma$  admet un nombre fini ou infini de valeurs propres  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  ne s'accroissent éventuellement qu'en  $+\infty$  et un spectre continu  $[\frac{1}{4}, +\infty[$  de multiplicité finie  $\ell$ . (Voir [CV] et les références dans cet article).

Dans le cas  $k \geq 1$ , on a le :

Théorème : Le spectre de  $H/\Gamma$  se compose, lorsque  $\Gamma$  est de type fini et  $k \geq 1$  (i.e.  $\text{aire}(H/\Gamma) = +\infty$ ) d'un spectre absolument continu de multiplicité infinie  $[\frac{1}{4}, +\infty[$  et, si  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$ , d'un nombre fini de valeurs propres  $\lambda_1 = \delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma) < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N < \frac{1}{4}$  (si  $\delta_\Gamma \leq \frac{1}{2}$ , il n'y a aucune valeur propre).

Preuve : Si  $X$  est une variété riemannienne, on note  $H^1(X)$  l'espace de Sobolev des fonctions  $L^2$  dont le gradient est de carré intégrable. On a l'inclusion naturelle évidente

$$H^1(H/\Gamma) \subset H^1(X_0) \oplus_{i=1}^k H^1(Y_i) \oplus_{j=1}^{\ell} H^1(Z_j).$$

Soit  $q_0$  (resp.  $q_i, q_j$ ) les formes quadratiques fermées de domaine

$$H^1(X_0) \text{ (resp. } H^1(Y_i), H^1(Z_j)) \text{ définies par } q_0(f) = \int_{X_0} \|df\|^2$$

(resp.  $q_i(f) = \int_{X_i} \|df\|^2$ ,  $q_j(f) = \int_{Z_j} \|df\|^2$ ) et  $Q = q_0 \oplus q_i \oplus q_j$ ; la restriction

de  $Q$  à  $H^1(H/\Gamma)$  est la forme quadratique  $q(f) = \int_{H/\Gamma} \|df\|^2$ . Le principe du

minimax peut donc s'appliquer : le spectre de  $q_0$  (resp.  $q_i, q_j$ ) est le spectre de  $\Delta$  sur  $X_0$  (resp.  $Y_i, Z_j$ ) avec les conditions aux limites de Neumann ; on en déduit

aisément que le spectre de  $Q$  est formé de  $N_1$  valeurs propres  $< \frac{1}{4}$  et de l'intervalle  $[\frac{1}{4}, +\infty[$ , avec  $N_1 = \ell + (\text{Nombre de valeurs propres de } q_0 < \frac{1}{4})$ . Le minimax

permet de conclure que spectre  $(\Delta_\Gamma) \cap [0, \frac{1}{4}[$  est constitué uniquement d'un

nombre  $\leq N_1$  de valeurs propres qui sont  $\geq$  à celles de  $Q$ .

Remarque : On aurait des majorations de ces valeurs propres en considérant le problème de Dirichlet sur  $X_0$  et l'inclusion  $H_0^1(X_0) \subset H^1(H/\Gamma)$ .

L'étude précise du spectre continu résultera du paragraphe suivant et des résultats généraux sur la théorie de la diffusion [R-S III, § XI.3 et XIII.6]. L'absence de valeurs propres  $\geq \frac{1}{4}$  a déjà été remarquée, voir par ex. [P1].

On déduit aisément du théorème précédent, que, même si  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$ ,  $R_\Gamma$  (et donc  $P_\Gamma$ ) est méromorphe pour  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$  avec des pôles simples aux  $s_i$  tels que  $s_i(1-s_i) = \lambda_i$  et comme résidus les noyaux de projecteurs sur les espaces propres  $E_{\lambda_i}$ .

### 3. PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE LA RÉSOUVANTE

Nous avons vu au paragraphe précédent que, si  $\Gamma$  est de type fini, la résolvante  $R_\Gamma$  est méromorphe (à valeurs dans  $\mathcal{L}(L^2(H/\Gamma), L^2(H/\Gamma))$ ) pour  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ . Nous allons maintenant prouver le

Théorème : Si  $\Gamma$  est de type fini, le noyau  $R_\Gamma(z, z'; s)$  (et donc la série de Poincaré  $P_\Gamma$ ) admet un prolongement méromorphe à la région  $\text{Re}(s) > 0$  avec un pôle simple en  $s = \delta_\Gamma$ .

Remarque : Il y a, à ma connaissance, au moins deux méthodes générales dans la théorie de la diffusion pour prouver des résultats de prolongement méromorphe de la résolvante.

La méthode de Lax-Phillips (L-P) qui vaut par exemple pour l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^3$  avec un potentiel à support compact ou pour les surfaces de Riemann d'aire finie ; cette méthode, lorsqu'elle donne des prolongements méromorphes permet de prolonger à  $\mathbb{C}$  entier, elle ne peut donc s'appliquer lorsque un tel prolongement n'existe pas !

La méthode, dite de l'espace auxiliaire (R-S III, p.112) qui vaut pour l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^n$  avec un potentiel à décroissance exponentielle

à  $l^\infty$  et qui donne seulement un prolongement méromorphe dans une bande au delà du spectre : c'est elle qui a été utilisée par Faddeev [F,L 2] dans le cas des surfaces de Riemann d'aire finie et que nous allons utiliser ici.

Comme Faddeev a traité le cas des cusps qui créent en fait le plus de difficultés, nous nous bornerons ici au cas où  $H/\Gamma = X = X_0 \cup Y_1$  ( $k=1, \ell=0$ ).

Nous désignerons par  $R$  (resp.  $R_\Gamma; R_\infty$ ) les noyaux des résolvantes sur  $H$  (resp. sur  $H/\Gamma; Y_1$  avec conditions limites de Dirichlet). Pour  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$  et  $s(1-s) \notin \text{spectre}(\Delta_\Gamma)$ , on a l'équation résolvante :

$$(1) \quad R_\Gamma(s) = R_\Gamma(s_0) + \omega(s) R_\Gamma(s_0) R_\Gamma(s) \quad (s_0 \gg 0)$$

avec  $\omega(s) = s(1-s) - s_0(1-s_0)$ . On prolonge  $R_\infty(z_0, z_1; s)$  par 0 si  $z_0$  ou  $z_1 \notin Y_1$  et on pose :  $R_\Gamma(s_0) = R_\infty(s_0) + V$  ; on peut alors réécrire (1) sous la forme :

$$(\text{Id} - \omega(s) R_\infty(s_0)) \circ R_\Gamma(s) = R_\Gamma(s_0) + \omega(s) V \circ R_\Gamma(s).$$

L'équation résolvante de  $R_\infty$  peut s'écrire :

$$(\text{Id} + \omega(s) R_\infty(s))(\text{Id} - \omega(s) R_\infty(s_0)) = \text{Id}.$$

D'où l'on tire

$$(2) \quad (\text{Id} - H(s)) \circ R_\Gamma(s) = W(s) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} H(s) = \omega(s)(\text{Id} + \omega(s) R_\infty(s)) \circ V \\ W(s) = (\text{Id} + \omega(s) R_\infty(s)) \circ R_\Gamma(s_0) \end{cases}.$$

Si on fixe  $z_0 \in H/\Gamma$  et que l'on pose  $r_\Gamma(s) = R_\Gamma(\cdot, z_0; s)$  et  $w(s) = W(\cdot, z_0; s)$ , cette équation s'écrit :

$$(3) \quad (\text{Id} - H(s)) r_\Gamma(s) = w(s).$$

Cette équation dans  $L^2(H/\Gamma)$  détermine  $r_\Gamma(s)$  pour  $s \gg 0$ , car elle équivaut à (1).

On introduit alors un espace de Banach  $\mathfrak{B}$ , l' "espace auxiliaire", tel que : (i)  $H(s)$  est pour  $\text{Re}(s) > 0$  une famille holomorphe d'opérateurs compacts

de  $\mathfrak{B}$ , avec  $H(s_0) = 0$ .

(ii)  $w(s)$  est holomorphe sur  $\text{Re}(s) > 0$  à valeurs dans  $\mathfrak{B}$ .

Un théorème général [L2, appendice 3] assure alors que  $(\text{Id} - H(s))^{-1}$  est méromorphe à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ , ce qui permet de conclure la preuve.

L'espace de Banach  $\mathfrak{B}$ : les fonctions de  $\mathfrak{B}$  sont les fonctions continues sur  $H/\Gamma - \{z_0\}$ , admettant en  $z_0$  une singularité logarithmique, et bornées au voisinage de l'infini. Si on pose  $L_{z_0}(z) = |\text{Log}(d(z_0, z))| \cdot \varphi(d(z_0, z))$  avec  $\varphi \in C_0^\infty([0, +], [0, 1])$ ,  $\varphi \equiv 1$  au voisinage de 0, on définit

$$\|f\|_{\mathfrak{B}} = \sup_{z \in H/\Gamma - \{z_0\}} \left| \frac{f(z)}{L_{z_0}(z) + 1} \right|.$$

La preuve de (i) et (ii) résulte alors de quelques majorations regroupées dans le :

Lemme : a)  $\forall \sigma_0, \sigma_1 > 0, \exists C$  telle que,  $\forall s$  avec  $\sigma_0 \leq \text{Re}(s) = \sigma \leq \sigma_1$ , on ait :

$$|R_\infty(z, z'; s)| \leq C(\exp(-\frac{\sigma}{2} d(z, z')) + L_z(z')).$$

b) Pour  $s_0 \gg 0$ , il existe  $C$  telle que :

$$|R_\Gamma(z, z'; s_0)| \leq C(\exp(-\frac{s_0}{2} d(z, z')) + L_z(z')).$$

c) Pour  $s_0 \gg 0$ , on a :

$$|V(z, z')| \leq C \left[ \exp(-\frac{s_0}{4} (d(z, X_0) + d(z', X_0))) + L_z(z') \chi(z) \chi(z') \right],$$

où  $\chi \in C_0^\infty(X)$  est égale à 1 sur  $X_0$ .

(dans ce lemme,  $d$  est la distance dans  $H/\Gamma$ ).

Preuve :

a) Identifiant  $Y_1$  à  $H/\Lambda_\Gamma$  où  $\Gamma_\infty = \{z \longmapsto \mu^n \cdot z \mid n \in \mathbb{Z}\}$  ( $\mu = e^{2\pi i}$ )

et  $\hat{\Gamma}_\infty = \Gamma_\infty \cup \{j \circ \sigma \mid \sigma \in \Gamma_\infty\}$  avec  $j(z) = \bar{z}$ , on peut poser  $\tilde{R}_\infty(z, z'; s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty} R(z, \gamma z'; s)$

et alors

$R_\infty(z, z'; s) = \tilde{R}_\infty(z, z'; s) - \tilde{R}_\infty(z, jz'; s)$ . Il nous suffit donc de majorer  $\tilde{R}_\infty$ , ce que l'on fait à partir de la majoration

$$|R(z, z'; s)| \leq C(\exp(-\sigma \hat{d}(z, z')) + L_z(z')) \quad , \quad (\hat{d} = \text{distance sur } H)$$

obtenue à partir de l'expression explicite de R à l'aide de fonctions hypergéométriques.

En effet, pour  $\text{Re}(s) \geq \sigma_0 > 0$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\frac{\sigma}{2} d(z, \mu^n z')) = O(1)$  et donc

$$|\tilde{R}_\infty(z, z'; s)| \leq C(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\frac{\sigma}{2} \hat{d}(z, \mu^n z'))) \cdot \sup_n [(\exp(-\frac{\sigma}{2} \hat{d}(z, \mu^n z')) + L_{z'}(\mu^n z))] .$$

D'où l'on déduit la majoration, car  $d(z, z') = \inf_H \hat{d}(z, \mu^n z')$ .

b) La majoration s'obtient par un procédé analogue au a). On peut aussi l'obtenir à partir de majorations générales du noyau de la chaleur sur  $H/\Gamma$ ,

du type  $e_\Gamma(t, z, z') \leq C_1/t \cdot e^{C_2 t} \cdot \exp(-C_3 d^2(z, z')/t)$  (D, C-L-Y) et de l'écriture

$$R_\Gamma(s_0) = \int_0^{+\infty} e^{+s_0(1-s_0)t} e^{-t\Delta_\Gamma} dt \quad (s_0 \gg 0) .$$

c) Pour obtenir cette dernière majoration, on part de l'écriture, valable lorsque  $z$  et  $z' \in X_0$  (auquel cas la majoration b) convient),

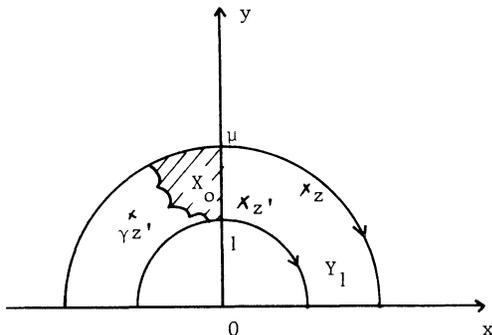
$$V(z, z') = \left[ \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty - \{\text{Id}\}} \tilde{R}_\infty(z, z'; s_0) \right] + \tilde{R}_\infty(z, jz'; s_0) .$$

On obtient ainsi, grâce à a),

$$|V(z, z')| \leq C \left[ \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty - \{\text{Id}\}} \exp(-\frac{\sigma}{2} \hat{d}(z, \gamma z')) + \exp(-\frac{\sigma}{2} \hat{d}(z, jz')) \right]$$

On utilise alors l'inégalité évidente

$$\hat{d}(z, \gamma z') \geq d(z, X_0) + d(z', \gamma^{-1} X_0)$$



et on est ramené à majorer des sommes du type  $\sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\infty - \{Id\}} \exp(-\frac{s_0}{2} \hat{d}(z', \gamma X_0))$

que l'on traite comme en a).

On peut sans doute ainsi obtenir cette majoration à partir de l'interprétation probabiliste du noyau de  $e^{-t\Delta_\Gamma} - e^{-t\Delta_\infty}$  en termes du mouvement brownien sur  $H/\Gamma$  et des majorations a priori au noyau de la chaleur (cf. b)).

Il reste à vérifier à l'aide du lemme que  $w(s) \in \mathfrak{B}$  et que  $H(s)$  est un opérateur compact de  $\mathfrak{B}(\text{Re}(s) > 0)$ .

Pour cela, on utilise une estimée générale sur les produits de convolution:

$$\int_{H/\Gamma} \exp(-Ad(z, z'') - Bd(z'', z')) \cdot d\mu(z'') = o(\exp(-Ad(z, z')))$$

où  $A > 0$  et  $B > 1 + A$ .

Le théorème d'Ascoli permet alors de prouver qu'un opérateur ayant un noyau continu majoré par  $C \exp(-Ad(z, X_0) - Bd(z', X_0))$  avec  $B > 1$  et  $A > 0$  est compact dans  $B$ . Les singularités logarithmiques ne causent pas d'ennui particulier.

On peut en fait préciser le résidu de  $R_\Gamma$  en  $s = \delta_\Gamma$ ; il est de la forme  $\Phi(z)\Phi(z')$  où  $\Phi$  est l'unique (à scalaire près) solution  $> 0$  de  $(\Delta_\Gamma - \delta_\Gamma(1 - \delta_\Gamma))\Phi = 0$  (voir [S4] à ce sujet) : en fait via une représentation intégrale des solutions, la preuve utilise l'ergodicité de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}U^\infty$  pour la  $\delta_\Gamma$ -mesure de Hausdorff canonique.

4. APPLICATION A LA FONCTION DE DÉNOMBREMENT ORBITAL

En appliquant le théorème taubérien d'Ikehara [L 1] à la série de Poincaré, on obtient le résultat suivant :

Théorème : Si la série de Poincaré n'a pas d'autres pôles sur la droite  $\text{Re}(s)=\delta_\Gamma$  (c'est toujours le cas si  $\delta_\Gamma \geq \frac{1}{2}$  ) que le point  $\delta_\Gamma$  , on a  $N_\Gamma(z_0, z_1; r) \sim \Phi(z_0)\Phi(z_1)e^{\delta_\Gamma r}$  , où  $\Phi(z)$  est l'unique (à scalaire près) solution positive  $\Gamma$ -automorphe de  $(\Delta - \delta_\Gamma(1-\delta_\Gamma)\Phi) = 0$ .

Lorsque  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$ ,  $\Phi \in L^2(H/\Gamma)$  et si on pose  $\Phi = \sqrt{C} \cdot \Phi_0$  avec  $\|\Phi_0\|_{L^2(H/\Gamma)} = 1$ ,

on a  $C = \frac{2^{2(1-s)} \pi}{s(2s-1)} \Gamma(2s)/(\Gamma/s)^2$ ,

(donc  $C(1) = 2\pi$ , ce qui redonne le résultat de Huber).

Lorsque  $\delta_\Gamma < \frac{1}{2}$ , il peut y avoir d'autres pôles sur la droite  $\text{Re}(s) = \delta_\Gamma$  que le point  $\delta_\Gamma$ , on a seulement une densité "analytique"

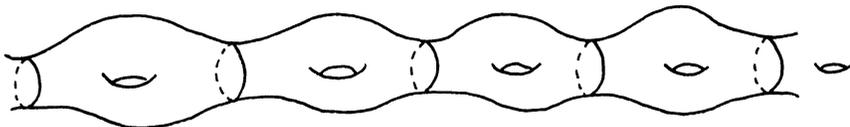
$\int_0^{+\infty} e^{-st} dN_\Gamma(z_0, z_1; t) \sim \frac{\Phi(z)\Phi(z')}{s - \delta_\Gamma} (s \rightarrow \delta_\Gamma^+)$ , mais on peut prévoir un équivalent du type  $N_\Gamma(r) \sim C e^{\delta_\Gamma r} (1 + \sum a_j \cos \mu_j(r-r_j))$  où  $\delta_\Gamma \pm i\mu_j$  sont les autres pôles.

Il serait intéressant de comprendre si cela peut effectivement avoir lieu.

5. UN EXEMPLE OÙ  $\Gamma$  N'EST PAS DE TYPE FINI.

Nous nous intéressons à la situation où  $\Gamma$  est un sous-groupe distingué d'un groupe  $\Gamma_0$  discret tel que  $\Gamma_0/\Gamma$  soit isomorphe à  $\mathbb{Z}^d$  et que  $H/\Gamma_0$  soit compact (ou d'aire finie, ou même plus généralement de type fini avec  $\delta_{\Gamma_0} > \frac{1}{2}$ )

Exemple 1 : tore avec une infinité de trous et une action de  $\mathbb{Z}$



Exemple 2 :  $H/\Gamma_0$  est la sphère à 3 points munie de la métrique d'aire finie ;  $\Gamma_0$  est alors un groupe libre à 2 générateurs et on considère le sous-groupe  $\Gamma$  des commutateurs de  $\Gamma_0$ , on a alors évidemment  $\Gamma_0/\Gamma \approx \mathbb{Z}^2$ .

On est amené à étudier d'une manière générale la théorie spectrale et la résolvente d'une variété riemannienne complète  $X$  munie d'une action isométrique et proprement discontinue de  $\mathbb{Z}^d$  telle que le quotient  $X_0 = X/\mathbb{Z}^d$  est compact.

On utilise pour cela une décomposition intégrale du laplacien par rapport aux caractères de  $\mathbb{Z}^d$ . Si on note  $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$  le groupe de caractères de  $\mathbb{Z}^d$  définis par  $\chi_\alpha(n_1, \dots, n_d) = \exp(2\pi i(n_1\alpha_1 + \dots + n_d\alpha_d))$ , toute fonction  $f \in C_0^\infty(X)$  s'écrit  $f(x) = \int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}_\alpha(x) d\alpha$  où

$$\hat{f}_\alpha(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n \cdot x) \overline{\chi_\alpha(n)} \quad \text{et donc} \quad \hat{f}_\alpha(n \cdot x) = \chi_\alpha(n) \hat{f}_\alpha(x).$$

Cette décomposition est compatible avec la structure de  $L^2(X)$ ,

$$\|f\|_{L^2(X)}^2 = \int_{\mathbb{T}^d} \left[ \int_{X_0} |\hat{f}_\alpha(x)|^2 dx \right] d\alpha.$$

Donc si on note  $\Delta_\alpha$  le laplacien sur  $L^2(X_0)$  avec les conditions aux limites

$$f(T_j \cdot x) = \exp(2\pi i \alpha_j) f(x) \quad (T_j \cdot x = (0, \dots, 1, \dots, 0) \cdot x),$$

j<sup>ème</sup> place

on a :

$$\Delta_X = \int_{\mathbb{T}^d} \Delta_\alpha d\alpha, \quad \text{au sens des intégrales hilbertiennes}$$

([R-S IV p. 279 et sv<sup>tes</sup>]).

En particulier si  $(\lambda_n(\alpha), \varphi_n(\cdot, \alpha))$  est la décomposition spectrale de l'opérateur  $\Delta_\alpha$  (à résolvente compacte), on a :

$$\left[ (\lambda - \Delta_X)^{-1} \right] (x, y) = \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x, \alpha) \varphi_n(y, \alpha)}{\lambda - \lambda_n(\alpha)} d\alpha.$$

On a alors besoin de :

Théorème : Pour  $\alpha \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ ,  $\Delta_\alpha > 0$  et  $\lambda_\alpha(\alpha) = \inf(\text{spectre } \Delta_\alpha)$  admet en  $\alpha = 0$  un minimum absolu non dégénéré. En particulier cela implique que, lorsque  $d \geq 3$ ,  $X$  admet une fonction de Green  $G(x,y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} [(\lambda - \Delta)^{-1}](x,y)$ , alors que, si  $d = 1$  (resp. 2), on a :

$$\left[ (\lambda - \Delta_X)^{-1} \right] (x,y) - \frac{1}{2\pi} \log(d(x,y)) \sim \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}} \text{ (resp. } C \log|\lambda|) \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0^-$$

(on a supposé  $\dim(X) = 2$  pour simplifier l'écriture).

Corollaire : Dans le cas  $X = H/\Gamma$ , la série de Poincaré admet, lorsque  $s \rightarrow 1^+$  une limite finie si  $d \geq 3$ , et un équivalent en  $\frac{C}{\sqrt{s-1}}$  (resp.  $C \log|s-1|$ ) lorsque  $d = 1$  (resp. 2).

D'où en particulier l'ergodicité du flot géodésique si  $d = 1$  ou 2.

Preuve du Théorème : Soit  $f_j \in C^\infty(X)$  telle que  $f_j(T_i x) = f_j(x) + \delta_{i,j}$  et  $\omega_j^1 = df_j \in \Omega^1(X_0)$  la forme fermée  $\omega_j^1$  est cohomologue à une forme harmonique  $\omega_j$  et on peut modifier  $f_j$  de façon que  $df_j = \omega_j$ .

Soit  $j_\alpha : C^\infty(X_0) \rightarrow C^\infty(X_0)$  défini par :

$j_\alpha(f) = f \exp(-2\pi i(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_d f_d))$ , l'opérateur  $\Delta_\alpha$  se transporte sur  $L^2(X_0)$  en l'opérateur  $L_\alpha$  associé à la forme quadratique fermée de domaine  $H^1(X_0)$  définie par  $q_\alpha(f) = \int_{X_0} \|df - i\omega_\alpha f\|^2 dx$  où  $\omega_\alpha = 2\pi \sum_{j=1}^d \alpha_j \omega_j$ ; on a donc, en utilisant le

fait que  $\omega(\alpha)$  est harmonique  $L_\alpha(f) = \Delta_{X_0} f - 2i \langle df | \omega_\alpha \rangle + \|\omega_\alpha\|^2 f$ .

Il est facile de vérifier que  $q_\alpha(f) > 0$  si  $\alpha \neq 0$  et de calculer le comportement asymptotique quand  $\alpha \rightarrow 0$  de  $\lambda_\alpha(L_\alpha)$

$$\lambda_\alpha(L_\alpha) \sim \frac{4\pi^2}{\text{vol}(X_0)} \int_{X_0} \|\sum \alpha_j \omega_j\|^2 dx \quad (\alpha \rightarrow 0)$$

ce qui achève la preuve du Théorème.

Cette situation a été étudiée très en détail en dimension 3 dans la thèse de C.L. Epstein (New York U. 1983) intitulée : The spectral theory of geometrically periodic hyperbolic 3-manifolds.

6. PROBLÈMES

1) Inégalités isopérimétriques : Appliquer les inégalités isopérimétriques (B) pour obtenir des estimations sur  $\delta_\Gamma$  et sur le nombre de valeurs propres  $< 1/4$ . On doit pouvoir notamment retrouver des résultats du type : si  $H/\Gamma$  a une pointe et  $\Gamma$  non élémentaire,  $\delta_\Gamma > \frac{1}{2}$  (BN 1,2 ; P 4,5).

2) Formule de traces : On peut développer des formules de traces à la Selberg pour calculer  $\text{Tr}(f(\Delta_\Gamma) - f(\Delta_\infty))$  où  $\Delta_\infty$  est le laplacien avec conditions de Dirichlet sur  $UY_1$  (lorsqu'il n'y a pas de cups) ; cela est analogue à ce qui est fait dans (G) pour l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^n$ . On doit ainsi obtenir des estimations sur le comportement asymptotique des longueurs de géodésiques périodiques (comme dans le cas compact).

3) Extension aux dimensions  $d \geq 3$  : La structure géométrique de  $H/\Gamma$ , même en supposant  $\Gamma$  "géométriquement fini" n'est pas aussi simple que pour  $d = 2$ .

4) Problème des résonances non réelles sur la droite critique  $\text{Re}(s) = \delta_\Gamma < \frac{1}{2}$  et théorèmes taubériens "ad hoc".

\*  
\* \* \*

BIBLIOGRAPHIE

- [BN] A. BEARDON : 1. The exponent of convergence of Poincaré series. Proc. London Math. Soc. 18, 461-483 (1968).  
2. Inequalities for certain Fuchsian groups, Acta Math. 127, 221-258 (1971).
- [B] P. BUSER : On Cheeger's inequality  $\lambda_1 \geq h^2/4$ . Proc. Symp. in Pure Math., 36, 29-77 (1980).

- [CV] Y. COLIN de VERDIÈRE : Pseudo-laplaciens, II. Ann. Inst. Fourier, 33 (1983) p. 87-113.
- [C-L-Y] S. CHENG, P. LI et S. YAU : On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold. American J. of Math., 103, p. 1021-1063 (1981).
- [D] H. DONNELLY : Spectral geometry for certain non compact Riemannian manifolds. Math. Z. 169, p. 63-76 (1979).
- [DG] Discrete groups and Automorphic Functions, Proc. Conf. London Math., Soc., edited by W. Harvey. Academic Press (1977).
- [E] J. ELSTRODT : Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene I, II, et III.  
Math. Annalen 203, 295-330 (1973) ,  
Math. Z. 132, 99-134 (1973) ,  
Math. Annalen 208, 99-132 (1974).
- [F] L. FADDEEV : Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator .. A.M.S. Transl. Trudy (1967), 357-386.
- [G] L. GUILLOPÉ : Une formule de traces pour l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^n$ . Thèse de 3ème cycle, Grenoble (1981).
- [GG] L. GREENBERG : Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups [DG], 199-255.
- [H] H. HUBER : Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. Math. Ann. 138, 1-26 (1956).
- [L] S. LANG : 1. Algebraic numbers, Addison-Wesley (1964).  
2.  $SL_2(\mathbb{R})$ , Addison-Wesley (1975).
- [L-P] P. LAX, R. PHILLIPS : Scattering theory - Academic Press (1967).
- [LV] N. LEBEDEV : Special functions and their applications, Dover Publ. (1972).
- [LR] LEHNER : 1. Discontinuous groups and automorphic functions. A.M.S. (1964).  
2. Dans [DG] p., Automorphic Forms, 73-119.
- [P] S. PATTERSON : 1. The Laplacian operator on a Riemann surface. Compositio Math. 31, 83-107, (1975) ; 32, 71-112 (1976) ; 33, 227-259 (1976).  
2. The limit set of a Fuchsian group. Acta Math. 136, 241-273 (1976).  
3. Spectral theory and Fuchsian groups. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 81, 59-75 (1977).  
4. The exponent of convergence of Poincaré series, Monatsh. Math. 82 (1976), 297-315.  
5. Some example of Fuchsian groups. Proc. of the London Math. Soc. 39, 276-298 (1979).

- [R-S] REED - B. SIMON : Methods of Modern Mathematical Physics, I, II, III et IV. Academic Press.
- [S] D. SULLIVAN : 1. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. Publ. Math. I.H.E.S. 50, 419-450 (1979).
2. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. Ann. of Math. Studies, 97, Princeton (1981), p. 465-496.
3. Discrete conformal groups and measurable dynamics. Bull. AM.S. 6, 57-73 (1982).
4.  $\lambda$ -potential theory, hyperbolic geometry and general Riemannian manifolds. Preprint I.H.E.S. .

\*  
\* \*  
\*

Université de Grenoble  
Institut Fourier  
B.P. 74,  
38402 SAINT-MARTIN-d'HERES