Astérisque

JEAN-MICHEL BISMUT

Transformations différentiables du mouvement Brownien

Astérisque, tome 131 (1985), p. 61-87

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__61_0>

TRANSFORMATIONS DIFFÉRENTIABLES DU MOUVEMENT BROWNIEN

Jean-Michel BISMUT

Il est impossible de présenter rapidement le mouvement Brownien. Par ses liens avec les opérateurs différentiels du deuxième ordre, les théories du potentiel correspondantes, une grande partie des résultats de l'analyse classique ont une formulation ou une interprétation probabiliste. Le développement de la théorie des martingales en a fait l'un des outils essentiels de l'analyse harmonique. Dans l'étude de l'équation de Schrödinger [55], l'utilisation de la formule de Feynman-Kac a permis l'obtention de très nombreux résultats sur le spectre de $-\Delta + V$ ...

La difficulté essentielle est que, dans le même objet -le mouvement Brownien- sont présentes un si grand nombre de propriétés et de symétries qu'il est, d'une part, extrêmement difficile de distinguer quelle est la propriété spécifique qui explique à elle seule tel résultat, d'autre part, que les spécialistes ou utilisateurs du mouvement Brownien peuvent, à propos du même objet, parler des langages apparemment disjoints.

Dans cet exposé, nous allons passer en revue un certain nombre de propriétés du mouvement Brownien qui en font le prototype d'une classe beaucoup plus large de processus, et décrire un certain nombre de ses caractéristiques analytiques et probabilistes.

Ainsi, dans la section 1, le mouvement Brownien est successivement décrit comme mesure gaussienne cylindrique, comme processus à accroissements indépendants et stationnaires, comme martingale, comme processus de Markov, enfin comme modèle des diffusions unidimensionnelles continues. Nous n'examinons aucune des propriétés fines du mouvement Brownien dégagées par P. Lévy [38], Itô-McKean [29], etc.

Dans la section 2, sont introduites l'intégrale stochastique de Itô, les temps locaux du mouvement Brownien et la théorie des excursions.

L'intégrale de Itô permet le développement d'un nouveau calcul différentiel sur les trajectoires du mouvement Brownien qui en fait le représentant type des semi-martingales continues [45], qui sont la classe des processus à laquelle s'étend naturellement le calcul de Itô. La notion de temps local, dégagée par P. Lévy [38] est étroitement liée aux propriétés fines des trajectoires du mouvement Brownien, et permet le développement de la théorie des excursions [29] [63] [65], qui fait du mouvement Brownien le prototype des processus de Poisson ponctuels [30] (qui sont des processus de sauts...).

On voit donc ainsi apparaître l'une des difficultés principales dans l'étude du mouvement Brownien, à savoir l'existence d'une infinité de descriptions possibles, étroitement liées au choix de la "filtration" choisie pour le décrire. Le choix de telle ou telle désintégration de la mesure Brownienne , ou ce qui est équivalent, le grossissement de la "filtration" naturelle [31],[32],[66] modifie complètement l'appareil analytique de description du mouvement Brownien.

Non seulement l'appareil analytique de description du mouvement Brownien est flexible, mais encore les trajectoires elles-mêmes peuvent être déformées. Dans une partie de la section 3, on décrit des transformations qui laissent invariante ou quasi-invariante la mesure Brownienne, les classes de transformation étant adaptées à la filtration choisie. Malliavin [40] a en effet constaté que la possibilité de déformer transversalement les trajectoires du mouvement Brownien permet d'obtenir des résultats d'analyse classique à partir des caractéristiques qualitatives et quantitatives des trajectoires du mouvement Brownien. Après une présentation des équations différentielles stochastiques, de leurs flots, et de certains aspects géométriques du calcul stochastique (voir Schwartz [52] [53], l'exposé de Meyer dans ce volume), nous donnons une présentation rapide du calcul de Malliavin.

Les trajectoires du mouvement Brownien et plus généralement des diffusions, ne sont plus une simple "idéalisation" d'un semi-groupe d'opérateurs opérant sur des espaces fonctionnels, mais c'est plutôt l'inverse qui se produit, à savoir que certains résultats d'analyse apparaissent comme le reflet du comportement des trajectoires. Les calculs stochastiques, les techniques de grossissement, et le calcul des variations stochastique sont évidemment étroitement liés.

Nous renvoyons à [67] pour un exposé d'introduction plus complet au calcul stochastique, et à [8] pour le calcul des variations.

Notre exposé est par ailleurs très incomplet. Nous avons laissé de côté tout ce qui concerne la formule de Feynman-Kac [55], les chaos de Wiener et l'espace de Fock [24], [55] . Les références sont elles-mêmes très incomplètes.

1. LE MOUVEMENT BROWNIEN : DÉFINITIONS

Dans cette section, nous donnons une construction rapide du mouvement Brownien, et décrivons ensuite certaines de ses propriétés fondamentales qui, en général, s'étendent à une classe beaucoup plus large de processus.

En a), nous construisons le mouvement Brownien en tant que mesure cylindrique sur l'espace de Hilbert $L_2(R^+;R)$. En b), on définit les trajectoires du mouvement Brownien. En c), le mouvement Brownien est caractérisé en tant que processus à accroissements indépendants et stationnaires, en d) en tant que martingale continue, en e) comme processus de Markov, en f) comme modèle général des diffusions continues à valeurs réelles.

Soit $\mathcal{C}(R^+;R)$ l'espace des fonctions continues définies sur R^+ à valeurs dans R. Soit w l'élément général de $\mathcal{C}(R^+;R)$.

$\mathcal{C}(R^+;R)$ est muni naturellement d'une suite croissante de σ-algèbres $\{F_t\}_{t\geq 0}$ définie par :

$$F_t = \mathcal{B}(w_s \mid s \leq t) \quad . \tag{1.1}$$

Ce que nous écrirons dans la suite ne sera complètement correct que si la filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$ est convenablement régularisée à droite et complétée, comme dans [15].

a) Le mouvement Brownien comme mesure cylindrique.

On va tout d'abord donner une première définition élémentaire du mouvement Brownien.

Soit H l'espace de Hilbert $L_2(R^+;R)$.

Définition 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{G}, Q)$ un espace de probabilité. On suppose que, pour chaque $f \in H$, est définie une variable aléatoire $\varphi(f)$ sur Ω. On dit que $\{\varphi(f)\}_{f\in H}$ définit une mesure gaussienne cylindrique sur H, si :

a) pour $f, g \in H, \lambda \in R$, $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ p.s., $\varphi(\lambda f) = \lambda\, \varphi(f)$ p.s. ;

b) pour tout $f \in H$, $\varphi(f)$ a pour loi une gaussienne centrée de variance égale à $\|f\|^2$.

THÉORÈME 1.2. Il existe une mesure gaussienne cylindrique sur H. La loi des $\{\varphi(f)\}_{f\in H}$ est unique.

Preuve. Soit $\{e_n\}$ une base orthonormale de H, $\{X_n\}_{n\in N}$ une famille de gaussiennes indépendantes centrées et de variance 1 sur un espace $(\Omega, \mathcal{G}, Q)$. Si $f \in H$ s'écrit :

(1.2) $$f = \sum_1^{+\infty} f_n e_n \quad ,$$

on pose :

(1.3) $$\varphi(f) = \sum_1^{+\infty} f_n X_n \quad .$$

La série (1.3) converge dans $L_2(Q)$. Elle converge même p.s. par le théorème des martingales [15] . On vérifie que le système $\{\varphi(f)\}_{f\in H}$ satisfait aux conditions de la définition 1.1. L'unicité est un résultat facile. □

Remarque 1. Comme $P[|X_n| \geq 1] = c > 0$, le lemme de Borel-Cantelli montre que $P[\bigcap_n \bigcup_{m\geq n} (|X_m| \geq 1)] = 1$, et donc que :

(1.4) $$\sum_1^N X_n^2 \to +\infty \text{ p.s.}$$

On en déduit que p.s., la suite $(X_1,\ldots,X_n,\ldots) \notin \ell_2$, et donc que $\varphi(f)$ ne peut pas être défini comme le produit scalaire de f et d'un vecteur X de H .

H est donc de "mesure nulle" pour la mesure cylindrique. Par contre, on vérifie trivialement que :

(1.5) $$\sum_1^N \frac{X_n^2}{n^2} \text{ converge p.s.}$$

La suite :

(1.6) $$Y_N = \sum_1^N X_n e_n$$

converge donc p.s. dans un espace de Hilbert H' qui contient strictement H .

b) Le mouvement Brownien comme processus.

On suppose construite la mesure gaussienne cylindrique sur H . Pour $t \geq 0$, on pose :

(1.7) $$w_t = \varphi(1_{s\leq t}) \quad .$$

THEORÈME 1.3. On peut modifier les variables aléatoires $\{w_t\}_{t\in R^+}$ de telle sorte que p. s., $t \to w_t$ soit un processus continu.

Preuve. Pour $0 \leq s \leq t$, $w_t - w_s$ est une gaussienne centrée de variance $t-s$, et donc :

(1.8) $$E\,|w_t - w_s|^4 = 3\,|t-s|^2 \quad .$$

Le critère de Kolmogorov [21] donne alors le résultat cherché (qui résulte aussi d'un théorème de plongement de Sobolev). □

Définition 1.4. On appelle mesure Brownienne sur $C(R^+;R)$ et on note P la loi du processus w .

On peut donc maintenant parler des trajectoires de w, qui sont continues. Nous avons vu à la Remarque 1 que si dw est la dérivée de w au sens des distributions, P p.s. $dw \notin L_2(R^+;R)$. Par contre, (1.5) montre que p.s. la restriction de dw à $[0,1]$ est dans l'espace de Sobolev $H_{-1}[0,1]$.

Les trajectoires de w sont très irrégulières. Il existe différentes mesures de cette irrégularité. En particulier, P p.s. $t \to w_t$ n'est différentiable en aucun $t \in R^+$ [47].

De plus, par [39], pour tout t et toute partition $0 = t_1 \dots < t_n = t$ de $[0,t]$, dont le diamètre tend vers 0 :

$$\sum_{1}^{n-1} |w_{t_{i+1}} - w_{t_i}|^2 \longrightarrow t \quad \text{p.s.} \tag{1.9}$$

La variation quadratique du mouvement Brownien est donc p.s. non nulle.

c) Le mouvement Brownien comme processus à accroissements indépendants et stationnaires.

On vérifie immédiatement que w_t est à accroissements indépendants et stationnaires, i.e. :

1) Pour $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les variables aléatoires $(w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1} \dots w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.

2) Pour $0 < s < t$, la loi de $w_t - w_s$ ne dépend que de $t - s$.

On a la réciproque très importante suivante :

THÉORÈME 1.5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ un espace de probabilité. Si X_t est un processus continu à valeurs réelles, à accroissements indépendants et stationnaires, si $X_0 = 0$, alors il existe un mouvement Brownien w_t, et des constantes a, b, telles que

$$X_t = at + bw_t .$$

Preuve. Voir [21].

Moralement, le théorème central limite contraint X_t à avoir des accroissements gaussiens.

Pour $t > 0$, $x \in R$, on pose :

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} . \tag{1.10}$$

La loi de w_t est exactement $g_t(x)\,dx$. Pour $t \in R^+$, $g_t(x)$ forme un semi-groupe de convolution, i.e. :

(1.11) $\quad g_t * g_{t'} = g_{t+t'}$.

(1.11) est naturellement lié au Théorème 1.5 ; $g_t(x)$ vérifie l'équation de la chaleur :

(1.12) $$\frac{\partial g_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_x g_t(x) .$$

d) Le mouvement Brownien comme martingale.

On vérifie immédiatement que w_t est une martingale relativement à la filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$, i.e. que pour $0 \leq s \leq t$, si E^{F_s} est l'opérateur d'espérance conditionnelle relativement à F_s :

(1.13) $$E^{F_s} w_t = w_s \quad .$$

De même, $w_t^2 - t$ est aussi une martingale relativement à $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

On a alors la réciproque suivante de Lévy [38] , Kunita-Watanabe [36] :

THEORÈME 1.6. Soit $(\Omega, \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}, Q)$ un espace de probabilité filtré. Soit M_t une martingale continue de carré intégrable, telle que $M_0 = 0$, et que $M_t^2 - t$ est aussi une martingale. Alors, M_t est un mouvement Brownien.

Preuve. La preuve repose sur le calcul stochastique sur les martingales continues (voir Meyer [45]). □

A partir du mouvement Brownien, on peut en fait construire toutes les martingales continues.

Rappelons tout d'abord la définition des temps d'arrêt.

Définition 1.7. Soit $(\Omega, \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0})$ un espace de probabilité filtré. On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $R^+ \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt, si pour tout $t \in R^+$, $(T \leq t) \in \mathcal{G}_t$. On appelle tribu des évènements antérieurs à T , et on note $\mathcal{G}_T$ l'ensemble des A de $\mathcal{G}_\infty$ tels que pour tout $t \in R^+$, $A \cap (T \leq t) \in \mathcal{G}_t$.

Soit alors M une martingale continue sur $(\Omega, \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}, Q)$. En utilisant des résultats de Meyer [15] , on sait qu'il existe un processus croissant continu $\langle M,M\rangle_t$ adapté à $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ (i.e. tel que pour tout $t \in R^+$, $\langle M,M\rangle_t$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable) tel que :

(1.14) $$M'_t = M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$$

est une martingale locale (c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $T_n \to +\infty$ p.s. telle que pour tout $n \in N$, $M'_{t \wedge T_n}$ est une martingale).

Pour $t \in R^+$, soit A_t le temps d'arrêt :

(1.15) $$A_t = \inf \{s \geq 0 \; ; \; \langle M,M\rangle_s > t\} \quad .$$

En utilisant le théorème 1.6, on peut montrer :

THÉORÈME 1.8. M_{A_t} est une martingale continue relativement à la filtration $\{\mathcal{G}_{A_t}\}_{t\geq 0}$. En loi, M_{A_t} est un mouvement Brownien arrêté au $\{\mathcal{G}_{A_t}\}_{t\geq 0}$-temps d'arrêt $\langle M,M\rangle_\infty$.

Remarque 2. La filtration $\{\mathcal{G}_{A_t}\}_{t\geq 0}$ contient en général plus d'information que M_{A_t}. Pour une description précise des relations exactes entre martingales continues et mouvement Brownien, voir [61].

Remarque 3. Soit $T_1, \dots T_n, \dots$ une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose :

(1.16)
$$S_n = T_1 + \dots + T_n$$
$$N_t = \sum_1^{+\infty} 1_{S_n \leq t} \quad .$$

Alors, N_t est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, et $M_t = N_t - t$ est une martingale telle que $M_t^2 - t$ est aussi une martingale. Les théorèmes 1.5 et 1.6 sont donc en défaut sans hypothèse de continuité.

On vérifie sans difficulté que, dans (1.1), la loi de N_t est une loi de Poisson de paramètre t, i.e. pour $n \in N$:

(1.17)
$$P[N_t = n] = e^{-t}\frac{t^n}{n!} \quad .$$

Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant ([15], [36], [45]) qui est l'analogue du Théorème 1.6 pour les processus à sauts unité .

THÉORÈME 1.9. Soit N'_t un processus à accroissements indépendants et stationnaires croissant, purement discontinu, à sauts égaux à $+1$, tel que $N'_0 = 0$. Il existe $\lambda \geq 0$ tel que le processus N'_t a même loi que le processus $N_{\lambda t}$.

Preuve. La preuve est basée sur les propriétés de stationnarité des lois exponentielles.

e) Le mouvement Brownien comme processus de Markov.

Jusqu'à présent nous avons supposé que $w_0 = 0$. On peut définir le mouvement Brownien partant de $x \in R$ par la relation :

(1.18)
$$x_t = x + w_t \qquad (\text{où } w_0 = 0) \quad .$$

Soit P_x la loi de x sur $C(R^+; R)$. Naturellement, $P_0 = P$.

Définition 1.10. Pour tout $t \geq 0$, θ_t est l'application de $C(R^+; R)$ dans $C(R^+; R)$ définie par :

(1.19) $\theta_t(x) = x_{\cdot+t}$.

On a alors [29] :

THÉORÈME 1.11. Le système de mesures $\{P_x\}_{x\in R}$ sur $C(R^+;R)$ définit un processus fortement Markovien, i.e. pour tout $x \in R$, tout $\{F_t\}_{t\geq 0}$-temps d'arrêt T, pour tout $A \in F_\infty$:

(1.20) sur $(T < +\infty)$, $P_x(\theta_T^{-1}A \mid F_T) = P_{x_T}(A)$ P_x p.s.

Preuve. Si T est un temps constant, (1.20) découle facilement des résultats de c). Quand T est un temps d'arrêt général, on utilise la propriété de Feller du semi-groupe de convolution g_t défini en (1.10) [29] .

f) Le mouvement Brownien comme modèle des diffusions unidimensionnelles continues.

A la suite de la classification par Feller des générateurs infinitésimaux de processus de Markov à trajectoires continues sur R, Itô et McKean ont en particulier montré dans [29] que toute diffusion continue peut s'obtenir à partir du mouvement Brownien par :
- un changement d'échelle, i.e. un changement de coordonnées sur R ;
- un changement de vitesse.

Les résultats de Itô-McKean [29] sont bien plus généraux que ceux que nous avons indiqués.

2. LE MOUVEMENT BROWNIEN : CARACTÉRISATIONS TRAJECTORIELLES ET ANALYTIQUES.

Dans cette section, nous décrirons certaines caractérisations trajectorielles et analytiques du mouvement Brownien. Ces caractérisations font encore du mouvement Brownien le modèle pour le développement de théories qui s'appliquent à des processus beaucoup plus généraux.

Dans a), nous introduisons l'intégrale stochastique de Itô. L'intégrale de Itô, qui est l'un des instruments majeurs de calcul sur le mouvement Brownien, permet le développement d'un calcul différentiel stochastique le long des trajectoires du mouvement Brownien, qui diffère du calcul différentiel ordianire, essentiellement à cause de la propriété (1.9) sur la variation quadratique du mouvement Brownien.

En b), on caractérise le mouvement Brownien comme solution d'un problème de martingales. Cette caractérisation permet de relier la propriété de semi-groupe du noyau de la chaleur $g_t = e^{t\Delta/2}$ au calcul différentiel de Itô sur le mouvement Brownien.

La méthode du problème des martingales a été développée par Stroock et Varadhan [60] et appliquée à une classe très large de processus à valeurs dans des espaces de dimension finie ou infinie.

En c), on introduit les temps locaux du mouvement Brownien. En d), on donne la caractérisation de Skorokhod du mouvement Brownien réfléchi.

En e), on introduit la théorie des excursions du mouvement Brownien. L'existence du temps local en 0 qui "compte" (en les renormalisant de manière adéquate), les passages en 0 du mouvement Brownien, permet de donner une description complètement différente du mouvement Brownien, en prenant comme nouveau temps le temps local. On définit ainsi un nouveau processus à valeurs dans un espace d'excursions (de dimension infinie), qui est le prototype des processus ponctuels (discontinus !!) de Poisson. Ce point de vue développé par Lévy [38] et Itô [29] permet d'une part de construire une très large classe de processus de sauts à l'aide du mouvement Brownien ([7], [9], [26]) -les processus de sauts sont ainsi des processus continus avec des trous- d'autre part de construire explicitement certains opérateurs pseudo-différentiels (qui apparaissent dans des problèmes aux limites) à l'aide d'excursions de processus plus généraux.

a) Calcul différentiel stochastique et mouvement Brownien : l'intégrale de Itô.

Soit $f \in L_2(R^+; R)$. On notera désormais :

$$(2.1) \qquad \varphi(f) = \int_0^{+\infty} f \, . \, dw \quad .$$

Le membre de droite n'est pas une véritable intégrale puisque $dw \notin L_2(R^+; R)$. Il n'est défini que p.s. par la série (1.3). Naturellement si $f \in H_1^0([0,1])$, comme $dw \in H_{-1}([0,1])$ p.s., on peut écrire :

$$(2.2) \qquad \varphi(f) = -\int_0^1 w f' \, ds \quad .$$

Naturellement, (2.2) garde un sens même si f est un élément aléatoire de $H_1^0([0,1])$.

De même, si f_s est une fonction en escalier de $L_2(R^+; R)$ constante sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ où $0 = t_1 < t_2 \ldots < t_n = +\infty$, on peut poser, pour $t > 0$:

$$(2.3) \qquad \int_0^t f \, dw = \sum_{i=1}^{n-1} f_{t_i} (w_{t \wedge t_{i+1}} - w_{t \wedge t_i}) \quad .$$

(2.3) définit un processus continu. De plus, Itô constate que si pour tout i, f_{t_i} est

F_{t_i}-mesurable, $\int_0^t f\,dw$ est une $\{F_t\}_{t\geq 0}$-martingale, et que de plus :

$$E\,\Big|\int_0^{+\infty} f\,dw\Big|^2 = E\int_0^{+\infty} f^2\,ds \qquad (2.4)$$

Cette relation, qui était vraie par définition pour les f déterministes, s'étend donc à certaines f aléatoires. (2.4) indique clairement que les conditions sont réunies pour un prolongement de type hilbertien de la définition de l'intégrale stochastique à des f plus généraux que les f étagés ([26], [36], [37], [43], [44], [45]).

Définition 2.1. On appelle $L_2^{\mathcal{P}}$ le sous-espace de $L_2(R^+ \times \mathcal{C}(R^+; R), dt\otimes dP)$ formé des $f_t(w)$ tels que, pout tout t, f_t est F_t-mesurable.

On vérifie facilement que $L_2^{\mathcal{P}}$ est exactement l'adhérence dans $L_2(R^+ \times \mathcal{C}(R^+;R); dt \otimes dP)$ de l'ensemble des $f_t(w)$ étagés ayant la propriété d'adaptation décrite précédemment.

En utilisant l'inégalité de Doob [15], qui permet de montrer que la propriété de continuité p.s. de (2.3) passe convenablement à la limite, on peut donc définir :

Définition 2.2. Pour $f \in L_2^{\mathcal{P}}$, on note $\int_0^t f\,\delta w$ la martingale continue de carré intégrable obtenue par prolongement Hilbertien à $L_2^{\mathcal{P}}$ de (2.3).

La transformation de d en δ signale que l'intégrale de Itô se comporte de manière non orthodoxe par changement de variable.

On a en effet la célèbre formule de Itô ([26], [36], [43], [45]) que nous ne donnons que sous une forme partielle.

THÉORÈME 2.3. Si $f \in L_2^{\mathcal{P}}$, si M_t est la martingale :

$$M_t = \int_0^t f\,\delta w \; ; \qquad (2.5)$$

si $g \in C_b^2(R)$, alors :

$$g(M_t) = g(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^t g''(M_s)\,f^2\,ds + \int_0^t g'(M_s)\,f\,\delta w\,. \qquad (2.6)$$

Dans le cas où $f = 1$, le terme (à première vue surprenant) $\frac{1}{2}\int_0^t g''(w_s)ds$ s'explique par le fait que la variation quadratique de w au temps t est exactement t.

Naturellement la formule (2.6) a de nombreuses extensions [45]. Notons que, si on applique (2.6) à $g(x) = x^2$ (qui n'est pas dans $C_b^2(R)\ldots$), on voit que, au sens de (1.14), si M est défini par (2.5) :

$$\langle M,M\rangle_t = \int_0^t f^2\,ds\,. \qquad (2.7)$$

Par le théorème 1.8, $M_t = \int_0^t f\,\delta w$ est un mouvement Brownien chargé de temps. On peut donc intégrer stochastiquement par rapport à M, dans des conditions qui sont pratiquement les mêmes que pour l'intégrale par rapport à w (voir Meyer [45]).

Une propriété essentielle de l'intégrale de Itô est donnée par le théorème suivant ([36], [45]).

THÉORÈME 2.4. Soit M_t $(t \in [0,+\infty])$ une F_t-martingale de carré intégrable sur $(C(R^+;R),P)$ telle que $M_0 = 0$. Il existe $f \in L_2^{\rho}$ unique tel que :

(2.8) $$M_t = \int_0^t f\,\delta w \ .$$

Preuve. On peut démontrer (2.8) en utilisant le fait que les polynômes d'Hermite forment un système total dans $L_2(R;\, e^{-|x|^2/2}\,dx)$.

b) Le mouvement Brownien comme solution d'un problème de martingales.

En utilisant (1.10), il est très facile de vérifier que, si $g \in C_b^{\infty}(R)$:

(2.9) $$g(w_t) - \tfrac{1}{2}\int_0^t g''(w_s)\,ds$$

est une martingale. Naturellement, la formule de Itô du théorème 2.3 indique que cette martingale est exactement l'intégrale de Itô $\int_0^t g'(w_s)\,\delta w_s$.

On a alors une autre caractérisation du mouvement Brownien.

THÉORÈME 2.5. Soit Q une mesure de probabilité sur $C(R^+;R)$ telle que :

a) $Q(w_0=0) = 1$;

b) Pour tout $g \in C_b^{\infty}(R)$:

(2.10) $$g(w_t) - \tfrac{1}{2}\int_0^t g''(w_s)\,ds$$

est une $\{F_t\}_{t\geq 0}$-martingale.

Alors, $Q = P$.

Preuve. Si on étend la propriété (2.10) à $g(x) = x$ et à $g(x) = x^2$, le théorème 2.5 résulte immédiatement du théorème 1.6. L'extension de (2.10) à de tels g ne présente aucune difficulté.

Remarque 1. L'intérêt du théorème 2.5 est que Stroock et Varadhan [60] ont montré que sa formulation s'étend à des diffusions beaucoup plus générales (voir section 3.B).

c) Temps local.

P. Lévy [38] a découvert que le mouvement Brownien possède un temps local. Nous suivrons la présentation de Meyer [45], Yor [68].

Soit en effet $a \in R$. $(w_t - a)^+$ est alors une sous-martingale i.e. pour $0 \leq s \leq t$

$$E^{F_s}(w_t - a)^+ \geq (w_s - a)^+ \quad . \tag{2.10}$$

La sous-martingale $(w_t - a)^+$ possède une décomposition de Meyer qui s'écrit :

$$(w_t - a)^+ = (-a)^+ + M_t^a + \tfrac{1}{2} L_t(a) \quad , \tag{2.11}$$

où M_t^a est une martingale, et $L_t(a)$ un processus continu adapté croissant nul en 0. On montre facilement que M_t^a est exactement l'intégrale stochastique :

$$M_t^a = \int_0^t 1_{w_s > a}\, \delta w_s$$

i.e. on a la formule de Tanaka ([45], [67]) :

$$(w_t - a)^+ = (-a)^+ + \int_0^t 1_{w_s > a}\, \delta w_s + \tfrac{1}{2} L_t(a) \quad , \tag{2.12}$$

et donc, comme $w_t - a$ est une martingale, on trouve :

$$(w_t - a)^- = (-a)^- - \int_0^t 1_{w_s \leq a}\, \delta w_s + \tfrac{1}{2} L_t(a) \tag{2.13}$$

$$|w_t - a| = |a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(w_s - a)\, \delta w_s + L_t(a) \quad .$$

De plus, le support du processus croissant dL_t^a est exactement l'ensemble $(w_s = a)$.

On a le résultat de Trotter ([29], [62], [68]).

THÉORÈME 2.6. Il existe une version continue en (a,t) de $L_t(a)$.

Preuve. La preuve dans [68] repose sur une utilisation adéquate du lemme de Kolmogorov.

De la formule :

$$w_t^2 = 2\int_0^{+\infty} ((w_t - a)^+ + (w_t + a)^-)\, da \quad , \tag{2.14}$$

on tire que :

$$w_t^2 = 2\int_0^t w\, \delta w + \int_{-\infty}^{+\infty} L_t(a)\, da \quad . \tag{2.15}$$

Or, la formule de Itô du théorème 2.3 montre que :

$$w_t^2 = 2\int_0^t w\, \delta w + t \quad , \tag{2.16}$$

et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t(a)\, da = t \quad . \tag{2.17}$$

On en déduit :

THÉORÈME 2.7. Soit h une fonction mesurable bornée sur R . Alors, P p.s., on a :

$$\int_0^t h(w_s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, L_t(a)\, da \quad . \tag{2.18}$$

Preuve. Par (2.17), on a :

$$\int_0^t h(w_s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int h(w_s) d L_s(a) \quad . \tag{2.19}$$

Comme le support de $dL_s(a)$ est égal à $(w_s = a)$, on obtient bien (2.18).

Le théorème 2.7 permet d'interpréter le temps local en a comme une densité d'occupation de a par w . De (2.18), il découle immédiatement [29] :

$$g_t(a) = \frac{\partial}{\partial t} E^P[L_t(a)] \quad . \tag{2.20}$$

On vérifie très simplement que pour tout $a \in R$, $L_t(a)$ est une fonctionnelle additive de w , i.e. pour $0 \leq s \leq t$:

$$L_{t+s}(a) = L_s(a) + L_t(a) \circ \theta_s \quad . \tag{2.21}$$

Comme $L_t(a)$ a comme support $(w_s = a)$, un résultat de théorie probabiliste du potentiel montre que à une constante multiplicative près, $L_t(a)$ est complètement caractérisé par ces deux propriétés.

d) La caractérisation de Skorokhod du mouvement Brownien réfléchi.

De (2.13), on déduit :

$$|w_t| = \int_0^t \operatorname{sgn} w\, \delta w + L_t(0) \quad . \tag{2.22}$$

Le théorème 1.6 et (2.7) montrent que si

$$B_t = \int_0^t (\operatorname{sgn} w)\, \delta w \quad , \tag{2.23}$$

B_t est un mouvement Brownien. Comme $L_t(0)$ ne croit que sur $(w_t = 0)$, et comme $|w_t|$ est ≥ 0 , on déduit très facilement que :

$$L_t(0) = \sup_{0 \leq s \leq t} (-B_s) \quad . \tag{2.24}$$

Soit P^r la loi de $|w|$. On vérifie très simplement que $|w|$ est un processus de Markov.

Des considérations précédentes, on déduit le résultat de Skorokhod [26] .

THÉORÈME 2.8. Soit B un mouvement Brownien. Si L est un processus continu croissant, nul en 0, tel que si

(2.25) $$z_t = B + L ,$$

alors, z est ≥ 0 et que de plus le support de L est inclus dans $(z = 0)$, alors z a pour loi P^r.

Preuve. On a encore :

(2.26) $$L_t = \sup_{0 \leq s \leq t} (-B_s) .$$

Le résultat est alors immédiat. □

Des considérations précédentes, il résulte en particulier que le processus $\sup_{0 \leq s \leq t} w_s - w_t$ a pour loi P^r (i.e. a même loi que $|w_t|$), ce qui est un résultat de P. Lévy [29], [38].

e) Excursions.

On écrit désormais L_t au lieu de $L_t(0)$.

Définition 2.9. On pose : $A_t = \inf \{A ; L_A > t\}$.

Pout tout $t > 0$, A_t est un temps d'arrêt. De plus, comme le support de L est $(w_s = 0)$, $w_{A_t} = 0$. La propriété de Markov forte montre que, pour $0 < t_1 \ldots < t_n$, les processus $(w_s ; 0 \leq s \leq A_{t_1})$, $(w_{A_{t_1}+s} \mid 0 \leq s \leq A_{t_2} - A_{t_1})$ ... $(w_{A_{t_{n-1}}+s} \mid 0 \leq s \leq \leq A_{t_n} - A_{t_{n-1}})$ sont indépendants, et que leur loi ne dépend que de $t_1, t_2 - t_1 \ldots t_n - t_{n-1}$.

Définition 2.10. Soit $\mathfrak{W}$ l'espace des fonctions continues $e(s)$ de R dans R telles que $e(0) = 0$, qu'il existe σ avec $0 < \sigma \leq +\infty$ pour lequel, si $0 < s < \sigma$, $e(s) \neq 0$, et si, $s \geq \sigma$, $e(s) = 0$.

$\mathfrak{W}$ est un espace d'excursions hors de 0, et $\sigma(e)$ est la durée de vie de l'excursion considérée. δ désigne un point cimetière.

On va maintenant construire un nouveau processus à valeurs dans $\mathfrak{W} \cup \{\delta\}$ dit processus des excursions de w [26].

Définition 2.11. Pour $t \in R^+$, on pose :

(2.27)
$$\begin{aligned} &\text{Si } A_t^- = A_t , \quad e_t = \delta ; \\ &\text{Si } A_t^- < A_t , \quad e_t(s) = \begin{cases} w_{A_t^- + s} , & 0 \leq s \leq A_t - A_t^- \\ 0 , & s > A_t - A_t^- \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors un résultat fondamental qui fonde la théorie des excursions de Lévy [38], Itô [29

THÉORÈME 2. Soit H une partie mesurable de $\mathfrak{W}$. On pose :

$$N_t^H = \sum_{s \leq t} 1_{e_s \in H} . \tag{2.28}$$

Alors, soit P p.s., pour tout $t > 0$, $N_t^H = +\infty$, ou bien N_t^H est un processus de Poisson de paramètre $n(H) < +\infty$. Si $H_1 \ldots H_n$ sont des parties mesurables disjointes de $\mathfrak{W}$, les processus $N_{\cdot}^{H_1}, \ldots, N_{\cdot}^{H_n}$ sont indépendants.

Preuve. La première partie du théorème résulte facilement du théorème 1.9. Si $H^1 \ldots H^n$ sont disjoints, $N^{H_1} \ldots N^{H_n}$ sont à sauts disjoints. Un argument de théorie des martingales [45] montre qu'ils sont indépendants.

$H \to n(H)$ définit une mesure σ-finie sur $\mathfrak{W}$. e_t est un processus de Poisson ponctuel [30] de mesure caractéristique n (le processus est complètement "caractérisé" par n). Elle a été décrite par Lévy [38], Itô-McKean [29], Williams [64],[65], Rogers [51].

L'application de la loi des grands nombres permet à Itô-McKean [29] et Williams [65] de caractériser le temps local L par l'examen de la trajectoire de w.

Ainsi, si pour $b > 0$, on désigne par $\overline{M}_t^b$ le nombre de montées de w de 0 à b sur l'intervalle $[0,t]$, alors par Lévy [38], Williams [65], p.s., pour tout $t > 0$:

$$\lim_{b \downarrow\downarrow 0} b\, \overline{M}_t^b = \frac{L_t}{2} .$$

Remarque 2. Deux autres résultats sont particulièrement intéressants pour l'étude du mouvement Brownien :

- Le fait que si w est un mouvement Brownien arrêté au temps T_1 où il atteint 1, alors $1 - w_{T_1 - t}$ $(0 \leq t \leq T_1)$ est un processus de Bessel d'ordre 3 (i.e. le module d'un mouvement Brownien tridimensionnel) arrêté au dernier instant où il passe par 1.
- Le résultat de Pitman [48] qui indique que la loi de $|w_t| + L_t(0)$ est un processus de Bessel d'ordre 3.

Ces deux résultats sont directement liés [26], [65].

Remarque 3. Les résultats de la théorie des excursions permettent de plonger les processus de Poisson les plus généraux dans le mouvement Brownien. Relativement à la filtration $\{F_{A_t}\}_{t \geq 0}$, tous les instruments théoriques de la théorie générale des processus - tribus optionnelle, prévisible, temps d'arrêt totalement inaccessibles, calcul stochastique sur les sauts [15] [36] - ont une interprétation très naturelle liée à des coupures adéquates sur le mouvement Brownien. Pour ces questions, voir [7], [9], [26].

Pour d'autres résultats liés à la théorie des excursions, voir [26], [34], [42], [49], [50], [63].

3. SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS DU MOUVEMENT BROWNIEN.

Dans la section 2, nous avons vu, en examinant la théorie des excursions, que le mouvement Brownien avait plusieurs descriptions possibles.

Dans cette section, nous allons effectivement transformer physiquement les trajectoires du mouvement Brownien.

A) Transformations du mouvement Brownien unidimensionnel.

Nous commençons par examiner les transformations des trajectoires du mouvement Brownien à une dimension w, qui laissent invariante ou quasi-invariante la mesure Brownienne.

En a), on étudie les changements de temps, en b) la transformation de Girsanov ; en c), on indique la forme différentielle de la transformation de Girsanov, pour obtenir une formule d'intégration par parties sur l'espace de Wiener, et un résultat de représentation de martingale de Clark [13].

En d), on indique une transformation du processus ponctuel des excursions du mouvement brownien décrite dans Bismut [7] pour laquelle la mesure Brownienne est encore quasi-invariante.

a) Changement de temps.

THÉORÈME 3.1. Si c est une constante > 0, alors la loi de $c\,w_{\cdot/c^2}$ est égale à P_0. Plus généralement, si $f \in L_2^{\rho}$, si N_t est défini par :

$$N_t = \inf\{N > 0 \,;\, \int_0^N f^2 ds > t\} \quad ; \tag{3.1}$$

alors, $\int_0^{N_t} f\,\delta w$ est un mouvement Brownien arrêté en $\int_0^{+\infty} f^2 ds$.

Preuve. Ce résultat a été vu après la preuve du théorème 2.3.

Un résultat particulièrement utile est aussi :

THÉORÈME 3.2. $t w_{1/t}$ a pour loi P.

Preuve. $t w_{1/t}$ est un processus gaussien. On vérifie facilement qu'il a même covariance que w_t et donc même loi.

b) Quasi-invariance du mouvement Brownien : transformation de Girsanov.

La transformation de Girsanov est l'un des outils fondamentaux des probabilités modernes.

Reprenons le formalisme de la section 1 a). Soit $u \in H$. Posons :

$$\varphi^u(f) = \varphi(f) + \langle f,u \rangle \quad . \tag{3.2}$$

Il est très simple de vérifier la loi de $\{\varphi^u(f)\}_{f\in H}$ est équivalente à la loi de $\{\varphi(f)\}_{f\in H}$, et que la densité relative est donnée par :

$$\exp\{\varphi(u) - \tfrac{1}{2}|u|^2\} \quad . \tag{3.3}$$

En d'autres termes, si $X = (X_1 \dots X_n, \dots)$, la loi de $X+u$ est équivalente à la loi de X, avec une densité relative donnée par (3.3) (rappelons que p.s. $X \notin H$!).

Les propriétés énoncées en (3.2) et (3.3) sont vraies sur n'importe quel espace de Hilbert séparable H.

Cameron-Martin [12] et Girsanov ont donné un résultat beaucoup plus fort, qui utilise l'intégrale de Itô.

Rappelons qu'un processus mesurable u_t est dit adapté si, pour tout t, u_t est F_t-mesurable.

THÉORÈME 3.3. Soit u_t un processus mesurable adapté borné. Soit P^u la mesure de probabilités sur $C(R^+;R)$ définie par :

$$\frac{dP^u}{dP}\Big|F_t = \exp\left\{\int_0^t u\,\delta w - \tfrac{1}{2}\int_0^t u^2 ds\right\} \quad . \tag{3.4}$$

Alors, sous P^u, $w_t - \int_0^t u\,ds$ est une $\{F_t\}_{t\geq 0}$-martingale Brownienne.

Preuve. On utilise le calcul stochastique de Itô et le théorème 2.5 [60].

c) Transformation de Girsanov, représentations des martingales et intégrations par parties.

Nous allons maintenant appliquer le théorème 3.3 sous forme différentielle, et obtenir un résultat de représentation de martingales de Clark [13], Haussmann [23] (voir aussi [14]), qui est aussi un résultat d'intégration par parties (Bismut [5]) très utile pour le développement du calcul de Malliavin [40].

Soit g une fonction continue sur $C([0,1];R)$, bornée, dérivable (au sens de Fréchet), à dérivée bornée. Si $x \in C([0,1];R)$, $dg(x)$ est une mesure bornée $d\mu^x(t)$ sur $[0,1]$.

On a alors le résultat de Clark [13] :

THÉORÈME 3.4. Soit u_t un processus adapté borné. Alors, on a :

$$E^P \left[\int_{[0,1]} d\mu^w(t) \int_0^t u\,ds\right] = E\left[g(w) \int_0^1 u\,\delta w\right] . \tag{3.5}$$

Preuve. Du théorème 3.3, il découle que, pour $\ell \in R$:

$$E^P \left[\exp\left\{-\int_0^1 \ell u \delta w - \tfrac{1}{2}\ell^2 \int_0^1 u^2 ds\right\} g(w_\cdot + \ell \int_0^\cdot u\,ds)\right] = E^P[g(w_\cdot)] . \tag{3.6}$$

Par dérivation de (3.6) en $\ell = 0$, on obtient (3.5). □

COROLLAIRE. Si H_t est le processus

$$H_t = E^{F_t} \int_{[t,1]} d\mu^w(s) , \tag{3.7}$$

alors P p.s.

$$g(w) = E^P[g(H)] + \int_0^1 H_s\,\delta w_s . \tag{3.8}$$

Preuve. Par le théorème 2.4, on sait que $g(w)$ se représente par (3.8). (3.5) donne la valeur explicite de H. □

Remarque 1. (3.5) est un résultat d'intégration par parties, et (3.7) un résultat de représentation de martingales. Tous deux sont étroitement liés à la représentation des relations de commutation d'Heisenberg à l'aide des polynômes d'Hermite.

d) Quasi-invariance du mouvement Brownien : transformation des excursions.

Nous allons maintenant décrire une transformation du mouvement Brownien réfléchi utilisée dans Bismut [7] pour l'étude de processus de bord (qui sont des processus de sauts dont le générateur est un opérateur pseudo-différentiel construit à partir de certains problèmes aux limites).

z désigne un mouvement Brownien réfléchi sur $[0,+\infty[$. L désigne le temps local en 0 ; z s'écrit : $z_t = L_t + B_t$, où B_t est une martingale Brownienne.

Soit H_t un processus continu ≥ 0, nul quand $z_t = 0$, tel que :

$$H_t = \int_0^t K\,ds + \int_0^t E\,\delta B + \int_0^t R\,dL . \tag{3.9}$$

Si ℓ_t est le dernier zéro de $z < t$, on peut supposer que $R_t = R_{\ell_t}$. On montre dans [7] que R est ≥ 0. On suppose que $E \geq -\frac{1}{2}$ et que H, K, E, R sont bornés.

On pose :

(3.10) $$\tau_t = \inf\left\{\tau \geq 0 \; ; \int_0^\tau \left(\frac{1+E}{1+R}\right)^2 ds > t\right\} .$$

On a alors le résultat de Bismut [7] section 4 :

THÉORÈME 3.5. Soit Q la mesure sur $C(R^+; R)$ définie par :

(3.11) $$\frac{dQ}{dP^r} \Big| F_t = \exp\left\{-\int_0^t \frac{K}{1+E}\,\delta B - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{K}{1+E}\right)^2 ds\right\} .$$

Si

(3.12) $$z'_t = \left(\frac{z+H}{1+R}\right)\tau_t \; , \quad L'_t = L_{\tau_t} .$$

sous Q, z' est un mouvement Brownien réfléchi, dont le temps local en 0 est L'.

Preuve. La preuve de [7] utilise la caractérisation de Skorokhod de P^r. □

Remarque 2. Si on considère les processus des excursions e_t et e'_t de z et z' hors de 0, construits comme en 2.e) à l'aide de leur temps local L et L', on voit que e_t et e'_t ont les mêmes temps de sauts (ce qui se traduit par le fait que sur leurs parties plates, $L_.$ et $L'_.$ prennent les mêmes valeurs). On peut interpréter la transformation $z \to z'$ comme une transformation de chaque excursion de z prise individuellement, qui est du type considéré dans [6] pour le calcul des variations sur les processus de sauts.

Pour la forme différentielle du théorème 3.5, voir [7].

B). Equations différentielles stochastiques.

Nous considérons maintenant des transformations d'un mouvement Brownien m-dimensionnel, qui permettent de construire une très vaste classe de diffusions à valeurs dans R^n ou dans une variété à partir du mouvement Brownien euclidien.

En a), nous introduisons rapidement l'intégrale de Stratonovitch. En b), nous rappelons les difficultés liées à une formulation "invariante" du calcul stochastique sur une variété (voir Schwartz [52], [53] et l'exposé de Meyer dans ce volume). En c), nous indiquons le principe de construction des solutions des équations différentielles stochastiques et des flots associés. Enfin en d), nous donnons une introduction succinte au calcul de Malliavin.

a) L'intégrale de Stratonovitch.

Soit w un mouvement Brownien. Soit H un processus continu adapté à $\{F_t\}_{t\geq 0}$ qui s'écrit :

$$H_t = H_0 + A_t + \int_0^t f\,\delta w\ ,$$

où $H_0 \in R$, A est continu adapté à variation finie et f vérifie les conditions de 2.a). On pose la définition suivante [45] :

Définition 3.6. On appelle intégrale de Stratonovitch de H par rapport à w et on note $\int_0^t H\,dw$ le processus :

$$\int_0^t H\,dw = \int_0^t H\,\delta w + \tfrac{1}{2}\int_0^t f\,ds \quad . \tag{3.13}$$

Du théorème 2.3, on déduit que :

$$g\left(\int_0^t H dw\right) = g(0) + \int_0^t g'\left(\int_0^s H dw\right) H.dw \quad . \tag{3.14}$$

L'utilisation de l'intégrale de Stratonovitch permet le développement d'un calcul stochastique formellement identique au calcul différentiel ordinaire. Elle demande une régularité plus grande de l'intégrant H que l'intégrale de Itô.

b) Calcul différentiel stochastique sur une variété.

Lorsqu'on veut considérer des processus à valeurs dans une variété, se posent deux questions essentielles :

- Peut-on localiser convenablement les définitions des "bons" processus (i.e. l'analogue des semi-martingales continues dans R^n) ?

- Comment décrire les caractéristiques locales de ces processus ?

Dans [52], Schwartz a résolu complètement le point a). Il a aussi montré [53] que pour rendre invariants les différents objets apparaissant dans la formule de Itô multidimensionnelle, il suffit de développer un calcul différentiel d'ordre 2.

Dans la suite, nous utiliserons le calcul de Stratonovitch, aussi étudié par Schwartz [53]. Pour des questions liées, voir [1], [2], [3], [19].

c) Equations différentielles stochastiques de Itô.

Le mouvement Brownien multi-dimensionnel est un instrument essentiel de construction explicite des diffusions sur R^n ou sur des variétés.

Soit en effet $X_0(x), X_1(x) \ldots X_m(x)$ $m+1$ champs de vecteurs sur R^n, à composantes dans $C_b^\infty(R^n)$.

Soit $w = (w^1 \ldots w^m)$ un mouvement Brownien m-dimensionnel, i.e. $w^1 \ldots w^m$ sont m mouvements Browniens indépendants.

Pour $x_0 \in R^n$, on considère l'équation différentielle stochastique (Itô [27], [28]) :

(3.15) $$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x)\,ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t X_i(x)\,.\,dw^i \quad .$$

On montre très facilement par une méthode de point fixe que (3.15) a une solution unique.

Les résultats de [1], [3], [4], [18], [35], [40] et [46] montrent qu'on peut associer à (3.15) un flot continu de difféomorphismes C^∞ $\varphi_t(w,.)$ de R^n tel que, si $x_0 \in R^n$, $\varphi_t(w,x_0)$ est la solution de (3.15).

Les équations (3.15) ont (presque) toutes les propriétés des équations différentielles ordinaires : on peut les retourner aux temps constants, considérer $\varphi_t^{-1}(w,.)$, etc.

$\varphi_t(w,.)$ est un processus continu à valeurs dans le groupe $\mathcal{D}$ des difféomorphismes C^∞ de R^n (muni de la topologie C_K^∞). Par [3] et [19], $\varphi_t(w,.)$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (les "accroissements" sont calculés dans $\mathcal{D}$), ou encore une diffusion invariante à droite sur $\mathcal{D}$.

Le générateur infinitésimal de la diffusion (3.15) est l'opérateur qui s'écrit sous la forme de Hörmander [25] :

(3.16) $$\mathcal{L} = X_0 + \frac{1}{2}\sum_1^m X_i^2 \quad .$$

Si R^n est remplacé par une variété M, se pose la question de la non explosion de (3.15) qu'il vaut mieux écrire sous la forme différentielle :

(3.17) $$dx = X_0(x)\,dt + \sum_{i=1}^m X_i(x)\,.\,dw^i \ ; \ x(0) = x_0 \quad .$$

(3.17) montre que la courbe $t \to x_t$ est construite comme l'image du mouvement Brownien w à valeurs dans R^n par l'application $w \to \varphi_.(w,x_0)$.

Pour l'étude de diffusions à coefficients peu réguliers, pour la caractérisation de certaines lois de processus et pour l'étude de lois limites, la méthode du problème des martingales a été introduite par Stroock-Varadhan [60]. C'est l'extension naturelle de la méthode du Théorème 2.5 pour le mouvement Brownien.

d) Le calcul de Malliavin.

Dans [40], [41], Malliavin a introduit une méthode d'analyse de certaines questions aux dérivées partielles du deuxième ordre en transportant le problème sur l'espace du mouvement Brownien w.

Considérons en effet l'équation (3.15) et sa solution $\varphi_t(w,x_0)$. Si $p_t(dy)$ est la loi de $\varphi_t(w,x_0)$, $p_t(dy)$ est la solution de l'équation de Fokker-Planck :

(3.18) $$\frac{\partial}{\partial t}p_t = \mathcal{L}_y^* p_t \ , \ p_0 = \delta_{x_0} \ ,$$

où $\mathcal{L}^*$ est l'adjoint formel de $\mathcal{L}$. Si l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}^*$ (ou $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}$!) vérifie les conditions d'hypoellipticité de Hörmander [25], on sait que $p_t(dy) = g_t(y)\,dy$, où g est C^∞ sur $]0,+\infty[\times R^n$.

Pour étudier ce type de résultats, Malliavin [40] [41] utilise l'équation (3.15). On peut en effet montrer que l'application $w \to \varphi_t(w,x_0)$ est C^∞ dans les directions de $L^2(R^+;R^m) = H$ ([5], [26], [54], [57], [59]). On peut alors procéder comme en dimension finie, i.e. intégrer par parties sur l'espace $(\mathcal{C}(R^+;R^m), P\otimes\ldots P))$ pour montrer la régularité de la loi de $\varphi_t(w,x_0)$, d'où l'importance de l'étude, que nous avons effectuée précédemment, des transformations laissant invariante ou quasi-invariante la mesure Brownienne. En particulier, une condition naturelle pour la régularité de la loi de $\varphi_t(w,x_0)$ est que $\frac{\partial\varphi}{\partial w}t(w,x_0)_H$ soit de rang maximum n, ou encore que la matrice aléatoire :

$$C_t = \frac{\partial\varphi}{\partial w}t\,(w,x_0)_H \left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}t\,(w,x_0)_H\right]^*$$

appliquant $T^*_{\varphi_t(w,x_0)}R^n$ dans $T_{\varphi_t(w,x_0)}R^n$ soit inversible p.s.. Malliavin [40] [41] a montré que sous les hypothèses d'Hörmander, c'était précisément le cas (voir aussi [26], [59]).

Cette méthode permet l'obtention de résultats d'analyse en dimension finie, en remplaçant le problème par une étude qualitative et quantitative d'un processus associé.

Elle connaît actuellement plusieurs développements pour l'étude de processus en dimension infinie, de processus à générateur pseudo-différentiel [6], [7]), de problèmes de filtrage [10].

RÉFÉRENCES

[1] P. BAXENDALE, Wiener processes on manifolds of maps, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 87 A, 127-152 (1980).

[2] P. BAXENDALE, Measures and Markov processes on function spaces, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n° 46, 131-141 (1976).

[3] J.M. BISMUT, Mécanique aléatoire, Lecture Notes in Math. n° 866, Berlin Springer 1981.

[4] J.M. BISMUT, A generalized formula of Itô and some other properties of stochastic flows, Z. Wahrsch, 55, 331-350 (1981).

[5] J.M. BISMUT, Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions, Z. Wahrsch, 56, 469-505 (1981).

[6] J.M. BISMUT, Calcul des variations stochastique et processus de sauts, Z. Wahrsch, 63, 147-235 (1983).

[7] J.M. BISMUT, The calculus of boundary processes, Annales E.N.S., à paraître.

[8] J.M. BISMUT, An introduction to the stochastic calculus of variations, in "Stochastic differential systems", , N. Christopeit, M. Kohlmann ed., Lecture Notes Control Th. and Inf. Sciences, n° 43, 33-72, Berlin Springer 1982.

[9] J.M. BISMUT, Jump processes and boundary processes, Proc.. Conference Katata (1982), K. Itô ed., à paraître (1983).

[10] J.M. BISMUT, D. MICHEL, Diffusions conditionnelles, J. of Funct. Anal. Part I 44, 174-211 (1981), Part II 45, 274-292 (1982).

[11] Y.N. BLAGOVESCHENSKII, M.I. FREIDLIN, Certain properties of processes depending on parameters, Sov. Math. Dokl. 2, 633-636 (1961).

[12] R.H. CAMERON, W.T. MARTIN, Transformations of Wiener integrals under translations, Ann. Math. 45, 386-396 (1944).

[13] J.M.C. CLARK, The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, Ann. Math. Stat. 41, 1282-1295 (1970), 42, 1778 (1971).

[14] M.H.A. DAVIS, Functionals of Itô processes as stochastic integrals, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87, 157-166 (1980).

[15] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, Probabilités et potentiels, chap. I-IV : Paris Hermann 1975, chap. V-VIII : Paris Hermann 1980.

[16] J. EELLS, K.D. ELWORTHY, Wiener integration on certain manifolds, Problems in non linear Analysis, CIME IV, pp. 69-94, Rome, Ed. Cremonese 1971.

[17] K.D. ELWORTHY, Stochastic dynamical systems and their flows, In "Stochastic Analysis", A. Friedman and M. Pinsky ed. , 79-95, New York, Acad. Press 1978.

[18] K.D. ELWORTHY, Stochastic methods and differential geometry, In Séminaire Bourbaki, Lecture Notes in Math. n° 901, 95-110, Berlin, Springer 1981.

[19] K.D. ELWORTHY, Stochastic differential equations on manifolds, London Math. Soc., Lecture Notes Series n° 70, Cambridge, Cambridge Univ. Press 1982.

[20] K.D. ELWORTHY, Measures on infinite dimensional manifolds, Functional integration and its applications, A.M. Arthurs Ed., 60-68, Oxford, Clarendon Press 1975.

[21] I. GIHMAN, A.V. SKOROHOD, The theory of stochastic processes, vol. I,II, III, Grundl. Math. Wiss., band 210, Berlin, Springer 1974.

[22] I. GUIKMAN, A. SKOROKHOD, Introduction à la théorie des processus aléatoires, Editions Mir, Moscou 1980.

[23] U. HAUSSMANN, On the integral representation of Itô processes, Stochastics 3, 17-27 (1979).

[24] T. HIDA, Brownian motion, Applications of Mathematics n° 11, Berlin, Springer 1980.

[25] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119, 147-171 (1967) .

[26] N. IKEDA, S. WATANABE, Stochastic differential equations and diffusion processes, Amsterdam, North-Holland 1981.

[27] K. ITO, On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951).

[28] K. ITO, Stochastic differential equations in a differentiable manifold, Nagoya Math. J. 1, 35-47 (1950).

[29] K. ITO, McKEAN H., Diffusion processes and their simple paths, Grund. Math. Wiss., band 125, Berlin, Springer 1974.

[30] J. JACOD, Calcul stochastique et problème des martingales, Lecture Notes in Math. n° 714, Berlin, Springer 1979.

[31] T. JEULIN, Semi-martingales et grossissement d'une filtration, Lecture Notes in Math. n° 833, Berlin, Springer 1980.

[32] T. JEULIN, M. YOR, Grossissement d'une filtration et semi-martingales, Formules explicites, Séminaire de Probabilités n° XII, 78-97, Lecture Notes in Math. n° 649, Berlin, Springer 1978.

[33] T. JEULIN, M. YOR, Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement Brownien, Séminaire de Probabilités n° XV, 210-226, Lecture Notes in Math. n° 850, Berlin, Springer 1981.

[34] F. KNIGHT, Random walks and the sojourn density of Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 109, 56-86 (1963).

[35] H. KUNITA, On the decomposition of solutions of stochastic differential equations, In "Stochastic Integrals", D. Williams ed., 213-255, Lecture Notes in Math. n° 851, Berlin, Springer 1981.

[36] H. KUNITA, S. WATANABE, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30, 209-245 (1967).

[37] A.U. KUSSMAUL, Stochastic integrations and generalized martingales, Res. Notes Math. n° 11, Pitman, London 1977.

[38] P. LEVY, Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, Gauthier-Villars 1965.

[39] M. LOEVE, Probability Theory 1 and 2, Graduate texts in Math. vol. I and II, Berlin, Springer 1977.

[40] P. MALLIAVIN, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, Proc. of the Conf. on Stochastic differential equations of Kyoto (1976), p. 195-263, Tokyo, Kinokuniya and New York, Wiley 1978.

[41] P. MALLIAVIN, C^k hypoellipticity with degeneracy, In "Stochastic Analysis", A. Friedman and M. Pinsky ed., 199-214, New-York, Acad. Press 1978.

[42] P. McGILL, A direct proof of the Ray-Knight theorem, Séminaire de Prob. n° XV, pp. 206-209, Lecture Notes in Math. n° 850, Berlin, Springer 1981.

[43] H. McKEAN, Stochastic integrals, New-York, Acad. Press 1969.

[44] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, Stochastic integrals, New-York, Acad. Press, 1979.

[45] P..A. MEYER, Un cours sur les intégrales stochastiques, Séminaire de Probabilités, n° X, 245-400, Lecture Notes in Math. n° 511, Berlin, Springer 1976.

[46] P.A. MEYER, Flot d'une équation différentielle stochastique, Séminaire de Probabilités, n° XV, 103-117, Lecture Notes in Math. n° 850, Berlin, Springer 1981.

[47] R. PALEY, N. WIENER, A. ZYGMUND, Note on random functions, Math. Zeitsch. 37, 647-668 (1933).

[48] J. PITMAN, One dimensional Brownian motion and the three dimensional Bessel processes, Ad. Appl. Prob. 7, 511-526 (1975).

[49] J. PITMAN, M. YOR, A decomposition of Bessel bridges, Z. Wahrsch. 59, 425-457 (1982).

[50] D. RAY, Sojourn times of diffusion processes, Ill. J. of Math. 7, 615-630 (1963).

[51] L.C.G. ROGERS, Williams characterization of the Brownien excursion law : proof and applications, Séminaire de Probabilités n° XV, 227-250, Lecture Notes in Math. n° 850, Berlin, Springer 1981.

[52] L. SCHWARTZ, Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes, Lecture Notes n° 780, Berlin Springer 1980.

[53] L. SCHWARTZ, Géométrie différentielle du 2e ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle, Séminaire de Probabilités, n° XVI, 1-150, Lecture notes in Math. n° 921, Berlin, Springer 1982.

[54] I. SHIGEKAWA, Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures, J. Math. Kyoto Univ. 20, 263-289 (1980).

[55] B. SIMON, Functional integration and quantum physics, New-York, Acad. Press 1979.

[56] T. SHIGA, S. WATANABE, Bessel processes as a one parameter family of diffusion processes, Z. Wahrsch 27, 37-46 (1973).

[57] D. STROOCK, The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential equations, Math. Systems Theory, Part I 14, 25-65 (1981), Part II, 141-171 (1981).

[58] D. STROOCK, The Malliavin calculus : a functional analytic approach, J. Funct. Anal. 44, 212-257 (1981).

[59] D. STROOCK, Some applications of stochastic calculus to partial differential equations, Lecture Notes in Math. n° 976, 267-382, Berlin, Springer 1983.

[60] D. STROOCK, S.R.S. VARADHAN, Multidimensional diffusion processes, Grundlehren Math. Wissenschaften 233, Berlin, Springer 1979.

[61] D. STROOCK, M. YOR, On extremal solutions of martingale problems, Annales E.N.S., 13, 95-164 (1980).

[62] H.F. TROTTER, A property of Brownian motion paths, Ill. J. Math. 2, 425-433 (1958).

[63] J.B. WALSH, Excursions and local time, In "Temps locaux", J. Azema et M. Yor ed., p. 159-192, Astérisque n° 52-53, Paris SMF 1978.

[64] D. WILLIAMS, Path decompositions and continuity of local time for one dimensional diffusions, Proc. London Math. Soc. ser. 3, 28, 738-768 (1974).

[65] D. WILLIAMS, Diffusions, Markov processes and martingales, vol. 1 Foundations, New York, Wiley 1979, vol. 2, à paraître.

[66] M. YOR, Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux, Séminaire de Probabilités, n° XV, 61-69, Lecture notes in Math. n° 649, Berlin, Springer 1978.

[67] M. YOR, Introduction au calcul stochastique: , Séminaire Bourbaki, fév. 1982, Exposé n° 590, pp. 590-01-18.

[68] M. YOR, Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales, In "Temps locaux", J. Azéma et M. Yor ed., 23-35, Astérisque n° 52-53, Paris, SMF 1978.

Jean-Michel BISMUT

Université Paris-Sud
Mathématique, bâtiment 425
F - 91405 ORSAY cedex