Astérisque

ALAIN PAJOR

Volumes mixtes et sous-espaces ℓ_1^n des espaces de Banach

Astérisque, tome 131 (1985), p. 401-411

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__401_0>

VOLUMES MIXTES ET SOUS-ESPACES ℓ_1^n DES ESPACES DE BANACH.

Alain PAJOR

INTRODUCTION : Cet exposé se compose de deux parties. Dans la première partie, nous présenterons, en les résumant, les principaux résultats concernant les plongements de ℓ_1^k ou de ℓ_1 dans les espaces de Banach. Nous y dégagerons les outils combinatoires qui permettent l'extraction de bases équivalentes à la base canonique de ℓ_1^k ou de ℓ_1 dans le cas infini dimensionel. Dans une seconde partie, nous développerons une méthode géométrique utilisant notamment la théorie des volumes mixtes et qui permettra, au moyen d'un nouveau lemme combinatoire, la construction de cubes dans une projection canonique de "grande" dimension, d'un convexe de $\mathbb{R}^n$.

I - EXTRACTION DE BASES ÉQUIVALENTES À LA BASE ℓ_1^k.

Pour tout ensemble fini A, nous noterons $|A|$, le cardinal de A. Si E et M sont des ensembles, pour toute partie I de M, nous noterons P^I (sans préciser E et M) la projection naturelle de E^M sur E^I.

Nous commençons par le cas infini dimensionel. Le résultat remarquable de Rosenthal [18] est bien connu.

THÉORÈME 1.- (Rosenthal [18], Dor [5] dans le cas complexe).

Soit (f_n) une suite bornée d'un espace de Banach. Elle admet alors une sous-suite de Cauchy faible ou une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_1.

Farahat [7] a donné du théorème 1, une démonstration utilisant la propriété de Ramsey des sous-ensembles analytiques de l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$. Le lemme clé ([18] thm 2, voir également [9]) est le résultat combinatoire que l'on peut énoncer de la manière suivante :

LEMME 1.- *Soit* $S \subset \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant la propriété suivante* : *Pour toute partie infinie* M *de* $\mathbb{N}$, *il existe un élément* $s = (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S$ *tel que les ensembles* $\{i \in M\ ;\ s_i = -1\}$ *et* $\{i \in M\ ;\ s_i = +1\}$ *soient infinis. Alors il existe une partie infinie* M_o *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $P^I S \supset \{-1,1\}^I$ *pour toute partie finie* I *de* M_o.

Pour introduire le problème fini dimensionel, prenons le cas particulier d'une suite $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ de n fonctions sur un ensemble T, ne prenant que les valeurs ± 1 et commençons par cette remarque simple : étudier les parties I de $\{1,2,\ldots,n\}$ pour lesquelles la base $(f_i)_{i\in I}$ (considérée pour la norme uniforme sur T) est isométrique à la base canonique de $\ell_1^{|I|}$, c'est rechercher les parties I pour lesquelles : pour tout choix de signes $(\varepsilon_i)_{i\in I} \in \{-1,1\}^I$, il existe $t \in T$ tel que $f_i(t) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in I$.

Soit alors S une partie de $\{-1,1\}^n$; définissons la densité de S (au sens de [19]) comme le plus grand cardinal des parties I de $\{1,2,\ldots,n\}$ pour lesquelles $P^I S = \{-1,1\}^I$. Le lemme combinatoire suivant a été démontré indépendamment et dans des langages différents par Sauer [19], Shelah [20], Vapnik et Cervonenkis [21].

LEMME 2.- *Soit* $S \subset \{-1,1\}^n$. *Si* $|S| > \sum_{i<k} \binom{n}{i}$, *alors il existe une partie I de* $\{1,2,\ldots,n\}$ *avec* $|I| \geq k$, *telle que* $P^I S = \{-1,1\}^I$.

Autrement dit, si d désigne la densité de S, on a :

$$|S| \leq \sum_{i\leq d} \binom{n}{i}.$$

Un calcul simple permet également de voir que si $|S| \geq \exp(\alpha n)$, alors $d \geq c(\alpha)n$, où $c(\alpha)$ ne dépend que de α.

Le théorème suivant s'appuie sur le lemme 2, il donne un type d'estimation qui a été inspiré par un résultat [15] sur les ensembles de Sidon.

<u>THÉORÈME</u> 2.- (<u>Milman</u> [10], <u>Pisier</u> [17]). <u>Soient</u> $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ n <u>fonctions sur un ensemble</u> T, <u>ne prenant que les valeurs</u> ± 1. <u>Posons</u> $M = 2^{-n} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \|_\infty$, <u>alors il existe une partie I de</u> $\{1,2,\dots,n\}$ <u>telle que</u> :

$(f_i)_{i\in I}$ <u>est isométrique à la base canonique de</u> $\ell_1^{|I|}$ <u>et</u> $|I| \geq c\, M^2/n$, <u>où</u> c <u>est une constante universelle</u>.

Dans une première version, Milman obtenait $|I| \geq c\, M^2/n\mathrm{Log}\, n$, l'amélioration que l'on énonce est due à Pisier. On notera que cette estimation est semblable à celle obtenue dans [15] pour des caractères (ensemble de Sidon).

Abandonnant le problème isométrique, Elton [6] a démontré le résultat suivant :

<u>THÉORÈME</u> 3.- (<u>Elton</u> [6] <u>dans le cas réel</u>, <u>Pajor</u> [12] <u>dans le cas complexe</u>). <u>Pour tout</u> $\delta \in \,]0,1]$, <u>il existe deux constantes</u> $c = c(\delta) > 0$ <u>et</u> $\beta = \beta(\delta) > 0$, <u>telles que si</u> $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ <u>sont des vecteurs de la boule unité d'un espace de Banach</u>, <u>vérifiant</u> $2^{-n} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \| \geq \delta n$, <u>alors il existe une partie I de</u> $\{1,2,\dots,n\}$ <u>telle que</u> $|I| \geq cn$ <u>et</u> $\| \sum_{i\in I} a_i f_i \| \geq \beta \sum_{i\in I} |a_i|$ <u>pour toute suite de scalaires</u> $(a_i)_{i\in I}$.

Ce théorème améliore considérablement un résultat plus ancien [16]. Dans le cas réel, l'outil combinatoire est encore le lemme 2. On démontrait dans [13] un lemme généralisant le lemme 2 (cas $p = 1$) et qui simplifie l'argument combinatoire dans la démonstration du théorème 3 :

<u>LEMME</u> 3.- ([13]). <u>Soient</u> n <u>et</u> p <u>des entiers</u>, $n \geq 1$, $p \geq 1$ <u>et</u> $S \subset \{1,2,\dots,2^p\}^n$. <u>Si</u> $|S| > \left[\sum_{i<k} \binom{n}{i}\right]^p$, <u>alors il existe une partie I de</u> $\{1,2,\dots,n\}$, <u>avec</u> $|I| \geq k$ <u>et telle que</u> : <u>Pour toute partie J de I, il existe</u> $s = (s_i)_{i=1}^{i=n}$ <u>et</u> $t = (t_i)_{i=1}^{i=n}$ <u>dans</u> S <u>vérifiant</u> : $\begin{cases} s_i - t_i > 0 & \text{pour } i \in J \\ s_i - t_i < 0 & \text{pour } i \in I\setminus J \end{cases}$.

Il est intéressant de lire ce lemme dans le langage introduit par Rosenthal [18]. Le théorème 3 apparaît comme une version fini-dimensionelle du théorème 1. Notons $A_i = \{(s,t) \in S \times S \; ; \; s_i - t_i > 0\}$ et $B_i = \{(s,t) \in S \times S \; ; \; s_i - t_i < 0\}$, le lemme 3 qui représente une situation discrétisée, donne une estimation du cardinal des parties I telles que $(A_i,B_i)_{i\in I}$ soit booléenement indépendante. Précisément, si d est le plus grand cardinal de ces parties, on a :

$$|S| \leqslant \Big[\sum_{i\leqslant d} \binom{n}{i}\Big]^p .$$

Néanmoins, si ce lemme permet de construire de "grandes" parties I pour lesquelles on a tous les choix de signes, ici des différences, et donc de construire des bases $\ell_1^{|I|}$, il ne permet pas de contrôler la distance à la base canonique de $\ell_1^{|I|}$. Elton [6] résout ce problème par une méthode très intéressante "d'écartement". Nous aborderons ce problème dans la deuxième partie de cet exposé, mais d'un point de vue géométrique.

La démonstration du théorème 3, dans le cas complexe, nécessite un nouveau lemme combinatoire que nous annoncions dans [12]. Introduisons pour l'énoncer ces quelques notations :

Soit E un ensemble fini et (E^-,E^+) une partition de E avec $|E^-| = p \geqslant 1$, $|E^+| = q \geqslant 1$. On définit $\Pi : E^n \to \{-1,1\}^n$ par :

$$(\Pi x)_i = 1 \text{ si } x_i \in E^+ \text{ et } (\Pi x)_i = -1 \text{ si } x_i \in E^-,\ x_n = (x_i)_{i=1}^{i=n} \in E^n,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

<u>LEMME</u> 4.- [12]. <u>Avec les notations précédentes, il existe une constante</u> $c = c(p,q) > 0$ <u>telle que si</u> S <u>est une partie de</u> E^n <u>qui vérifie</u> $\Pi(S) = \{-1,1\}^n$, <u>alors il existe</u> $e^- \in E^-$, $e^+ \in E^+$ <u>et une partie I de</u> $\{1,2,\dots,n\}$ <u>tels que</u> $|I| \geqslant cn$ <u>et</u> $P^I S \supset \{e^-,e^+\}^I$.

On notera que l'on peut donner de ce lemme une version infinie. La méthode de démonstration dans le cas complexe [12], permet également de retrouver le résultat de Dor (cas complexe du théorème 1). Signalons d'autres généralisations du lemme 2, dans des directions diverses, par Karpovsky et Milman [8], Alon et Milman [1], et Assouad [2].

<u>REMARQUE</u> : Signalons l'amélioration suivante [14], du théorème 3, qui donne également comme corollaire le théorème 2.

<u>THÉORÈME</u> 4.- [14]. <u>Soient</u> $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ n <u>fonctions uniformément bornées par 1 sur un ensemble</u> T. <u>Posons</u> $M = 2^{-n} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i\|_\infty$, <u>alors il</u>

existe une partie I de $\{1,2,\ldots,n\}$, $|I| \geq c\, M^2/n$, telle que $(f_i)_{i\in I}$ possède la propriété suivante : Pour tout choix de signes $(\varepsilon_i)_{i\in I} \in \{-1,1\}^I$, il existe $s,t \in T$ tels que pour tout $i \in I$, $|f_i(t)-f_i(s)| \geq \mu(M/n)^6$ et $\mathrm{sign}(f_i(t)-f_i(s)) = \varepsilon_i$ (où c et μ sont des constantes universelles).

II - VOLUMES MIXTES ET CONSTRUCTION DE CUBES.

En dualisant, le problème d'extraction de base ℓ_1^k, se pose en termes de projection et de boule ℓ_∞^k. En effet si $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ sont des vecteurs de la boule unité d'un espace de Banach réel et si T est la boule unité du dual, on considère l'enveloppe convexe équilibrée fermée S de $\{(f_i(t))_{i=1}^{i=n} ; t \in T\} \subset [-1,1]^n$. Alors la propriété :

$$\|\sum_{i\in I} a_i f_i\| \geq c \sum_{i\in I} |a_i| \quad \text{pour toute suite } (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I,$$

signifie exactement que $P^I S \supset c[-1,1]^I$.

Nous présentons dans cette partie, un point de vue géométrique sur les convexes compacts de $\mathbb{R}^n$. Donnons auparavant quelques notations :

NOTATIONS. Nous noterons $K_m = [-1,1]^m$ la boule unité de ℓ_∞^m, K quand il n'y aura pas de confusion possible. Une boule ℓ_∞^m de rayon a est donc un translaté de $aK_m = [-a,a]^m$. Nous écrirons $\mathrm{vol}_m A$, le volume m-dimensionel de $A \subset \mathbb{R}^m$ (vol A s'il n'y a pas de confusion). Si A et B sont des convexes de $\mathbb{R}^n$ et a,b des nombres réels, on note : $aA + bB = \{ax+by ; x \in A \text{ et } y \in B\}$. Rappelons que pour toute partie I de $\{1,2,\ldots,n\}$, P^I désigne la projection naturelle de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^I$ et pour simplifier, nous noterons P^{-i} la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i\}}$.

Le principal résultat de cette section est le suivant :

THÉORÈME 5.- Pour tout $a \in]0,1]$, $t > 0$ et $\varepsilon \in]0,1]$, il existe $c = c(a,t,\varepsilon) > 0$ tel que : Pour tout entier $n \geq 1$ et tout convexe compact S de $\mathbb{R}^n$, $S \subset [-1,1]^n$ et vérifiant $\mathrm{Vol}(S+tK) \geq 2^n(t+a)^n$, alors il existe une partie I de $\{1,2,\ldots,n\}$ telle que $P^I S$ contienne une boule $\ell_\infty^{|I|}$ de rayon $a(1-\varepsilon)$ et $|I| \geq cn$.

REMARQUE : On notera que si $\mathrm{Vol}\, S = (2a)^n$, d'après le théorème de Brunn-Minkowski, S vérifie l'inégalité : $\mathrm{Vol}(S+tK) \geq 2^n(t+a)^n$. Le cas $S = [-a,a]^n$ montre que l'estimation $a(1-\varepsilon)$ est dans un certain sens la meilleure possible. D'autre part, si S est en outre symétrique et si $P^I S$ contient une boule $\ell_\infty^{|I|}$ de rayon $a(1-\varepsilon)$, alors $P^I S \supset a(1-\varepsilon)[-1,1]^I$.

Notre point de départ est le théorème de Minkowski sur les volumes mixtes qui exprime que $\mathrm{Vol}(S+tK)$, pour $t \geq 0$, est un polynôme en t de degré n. Nous ne développerons pas ici la théorie des volumes mixtes (voir l'exposé de Milman [11] dans ce même volume). Nous noterons simplement le résultat de Minkowski dans la situation particulière où nous nous plaçons :

Soit S un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $t \geq 0$:

(Minkowski) $$\mathrm{Vol}(S+tK) = \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n}{i} V_{n-i}(S,K)\, t^i.$$

Les coefficients $V_m(S,K)$ sont, par définition, les volumes mixtes de (S,K). Si les volumes mixtes de (S,D), où D est la boule euclidienne, sont bien connus (formule de Steiner, voir [11]), il ne semble pas que l'on se soit intéressé aux volumes mixtes de (S,K). On a pourtant le résultat simple qui suit :

THÉORÈME 6.- Soit S un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\mathrm{Vol}(S+tK) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{|I|=n-k} \mathrm{Vol}_{n-k} P^I S \Big) 2^k t^k .$$

Autrement dit $V_m(S,K) = 2^{n-m}\Big(\sum_{|I|=m} \mathrm{Vol}_m P^I S \Big) / \binom{n}{m}$.

L'outil principal dans la démonstration (par récurrence) de la formule de Steiner est la formule de Cauchy. Nous utiliserons ici un résultat très général dû à Minkowski.

Soit S un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses faces et pour toute face $F \in \mathcal{F}$, notons n_F le vecteur unitaire, normal, extérieur à la face F du polyèdre S. On a alors le résultat suivant.

LEMME 5.- (Minkowski, voir [4] p. 42). Pour tout convexe C de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\mathrm{Vol}(S+tC) - \mathrm{Vol}(S))/t = \sum_{F \in \mathcal{F}} \sup\{(x,n_F) ; x \in C\} . \mathrm{vol}_{n-1}(F).$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.- Nous démontrerons le résultat par récurrence sur n et pour S polyèdre convexe, le cas général s'obtenant par un procédé classique de passage à la limite. Le cas $n = 1$ étant clair, nous supposons vraie la formule au rang $n-1$. Soit $F \in \mathcal{F}$ et $n_F = (n_F^i)_{i=1}^{i=n}$, on a alors, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$|n_F^i| \mathrm{Vol}_{n-1}(F) = \mathrm{Vol}_{n-1} P^{-i}(F)$$

et on peut voir, pour un polyèdre convexe, l'égalité :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} |n_F^i| \mathrm{Vol}_{n-1}(F) = 2\mathrm{Vol}_{n-1} P^{-i}(S), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Si donc on applique le lemme 5 à $C = K$, on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}(S+tK)\right)_{t=0} = \sum_{F \in \mathcal{F}} \|n_F\|_{\ell_1^n} \mathrm{Vol}_{n-1}(F) = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{Vol}_{n-1} P^{-i}(S).$$

Mais puisque S et K sont des polyèdres, on a :

$$\left(\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}(S+tK)\right)_{t=t_o} = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{Vol}_{n-1} P^{-i}(S+t_oK)$$

et $\mathrm{Vol}(S+tK) - \mathrm{Vol}(S) = 2 \int_o^t \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{Vol}_{n-1}(P^{-i}(S) + u\,K_{n-1})du.$

Maintenant pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(P^{-i}(s) + u\,K_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{\substack{|I|=n-k-1 \\ i \notin I}} \mathrm{Vol}_{n-k-1} P^I S \Big) 2^k u^k,$$

$$\text{et} \quad 2 \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{Vol}_{n-1}(P^{-i}(S)+uK_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{|I|=n-k} \mathrm{Vol}_{n-k} P^I S \Big) 2^k k u^{k-1}.$$

Le résultat est obtenu après intégration.

On déduit du théorème 6 une estimation du volume de certaines projections de S.

LEMME 6.- *Soient* $S \subset [-1,1]^n$ *un convexe compact*, $t > 0$ *et* $b > 0$. *Si* $\mathrm{Vol}(S+tK) > 2^n(t+b)^n + 2^n \sum_{i<k} \binom{n}{i} t^{n-i}$, *alors il existe une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$ *telle que* : $|I| = k$ *et* $\mathrm{Vol}_k P^I S > (2b)^k$.

DÉMONSTRATION : Notons $a_m = \left[\sum_{|I|=m} \mathrm{Vol}_m P^I S / \binom{n}{m}\right]^{1/m}$. On peut voir que a_m est une fonction décroissante de m, en outre $a_m \leqslant 2$, on obtient ainsi :

$$\mathrm{Vol}(S+tK) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i^i 2^{n-i} t^{n-i} \leqslant 2^n \sum_{i<k} \binom{n}{i} t^{n-i} + \sum_{i \geqslant k} \binom{n}{i} a_k^i (2t)^{n-i}$$

d'où : $\quad \mathrm{Vol}(S+tK) \leqslant 2^n \sum_{i<k} \binom{n}{i} t^{n-i} + 2^n (t+a_k/2)^n$.

Le résultat découle de cette dernière inégalité.

La deuxième étape de notre démarche est de nature combinatoire. Nous aurons besoin auparavant d'une estimation, en fonction du volume de A, du nombre de points de A qui sont dans un ∂-réseau. On utilise le résultat simple :

LEMME 7.- (Blichfeldt [3]). *Soient* A *une partie mesurable de* $\mathbb{R}^n$ *et* m *un entier*.

Si $\mathrm{Vol}(A) > m$, *alors il existe un point* $x \in [0,1[^n$ *tel que* $A+x$ *contienne au moins* $m+1$ *points à coordonnées entières*.

DÉMONSTRATION : On écrit $|(A+x) \cap \mathbb{Z}^n| = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} 1_A(z-x)$, puis intégrant sur $[0,1[^n$, on obtient $\int_{[0,1[^n} |(A+x) \cap \mathbb{Z}^n| dx = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1[^n} 1_A(z-x) dx =$

$= \int 1_A(x) dx = \mathrm{Vol}\, A > m$. On a donc bien $|(A+x) \cap \mathbb{Z}^n| > m$ pour au moins un point $x \in [0,1[^n$.

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme combinatoire suivant :

LEMME 8.- [12]. *Soient* p *un entier*, $p \geqslant 2$ *et* $\alpha > 0$. *Il existe* $c = c(p,\alpha) > 0$ *vérifiant la propriété suivante* : *Pour tout entier* $n \geqslant 1$ *et pour toute partie* S *de* $\{1,2,\dots,p\}^n$ *telle que* $|S| \geqslant 2^{\alpha n}$, *il existe une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$ *et deux entiers distincts* ℓ *et* m *compris entre* 1 *et* p *tels que* : $\quad |I| \geqslant cn$ *et* $P^I S \supset \{\ell,m\}^I$.

<u>DÉMONSTRATION DU THÉORÈME</u> 5.- Soit S un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème 5. Soit b tel que $a(1-\varepsilon) < b < a$.

On montre d'abord qu'il existe une partie I de $\{1,2,\dots,n\}$ telle que :

$$|I| = n' \geqslant c_1 n \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}_{n'} P^I S > (2b)^{n'} ,$$

où c_1 ne dépend que de (a,b,t).

En effet, supposons $t \leqslant 1$, (on procède de même pour $t \geqslant 1$) et notons l'inégalité :

$$\sum_{i\leqslant k} \binom{n}{i} \leqslant (ne/k)^k , \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Il est clair qu'il existe $c > 0$ (dépendant de a,b,t) tel que

$$(t+b) > t^{1-c}(e/c)^c .$$

On a alors :

$$\sum_{i<cn} \binom{n}{i} t^{n-i} < (t+b)^n .$$

Pour n assez grand, $n \geqslant N(a,b,t)$, $(t+a)^n \geqslant 2(t+b)^n$, et on a donc

$$\mathrm{Vol}(S+tK) \geqslant 2^n(t+a)^n > 2^n(t+b)^n + 2^n \sum_{i<cn} \binom{n}{i} t^{n-i}.$$

La conclusion résulte alors du lemme 6 et la restriction, $n \geqslant N(a,b,t)$ est supprimée en diminuant au besoin la constante c, ce qui nous donne c_1. Maintenant, I étant déterminé, posons $\delta = 2a(1-\varepsilon)$ et $A = \delta^{-1} P^I S$. Soit $\alpha > 0$ tel que $2^\alpha = b/_{a(1-\varepsilon)}$ (rappelons que $b > a(1-\varepsilon)$) et remarquons que

$$\mathrm{Vol}_{n'} A > (b/a(1-\varepsilon))^{n'} = 2^{\alpha n'} .$$

Appliquant le lemme 7 à A dans $\mathbb{R}^I$, on en déduit l'existence d'un point $x \in [0,\delta]^I$ tel que $B = P^I S + x$ contienne au moins $[2^{\alpha n'}]+1$ points du réseau $(\delta\mathbb{Z})^I$. Il est clair, pour conclure la démonstration, qu'il suffit de construire une boule $\ell_\infty^{|J|}$ de rayon $\delta/2$ dans une projection $P^J B$ avec $|J| \geqslant c_2 |I|$ (où c_2 ne dépend que de a,b,t,ε). Or $B \subset [-1,1+\delta]^I$ et contient plus de $2^{\alpha n'}$ points du réseau $(\delta\mathbb{Z})^I$. Il suffit donc, en prenant l'ordre naturel sur chaque coordonnées, d'identifier les points du réseau $(\delta\mathbb{Z})^I$ qui sont dans $[-1,1+\delta]^I$ à l'ensemble $\{1,2,\dots,p\}^I$ (où p ne dépend que de δ, $2/\delta < p \leqslant 2 + 2/\delta$) et d'appliquer le lemme 8.

La démonstration est achevée en utilisant la convexité de S.

REMARQUE : Reprenant le schéma de la démonstration précédente, on peut montrer le résultat suivant : Soit $\alpha > 0$ et $a > 0$, il existe $c = c(a,\alpha) > 0$ tel que si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, $A \subset [-a,a]^n$ et vérifie $\mathrm{Vol}\, A > \exp(\alpha n)$, alors il existe une partie I de $\{1,2,\dots,n\}$, un point $x \in [0,1[^I$ et deux entiers distincts ℓ et m de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$|I| \geq cn \qquad \text{et} \qquad P^I A + x \supset \{\ell,m\}^I.$$

RÉFÉRENCES

[1] N. ALON and V.D. MILMAN - Embeddings of ℓ_∞^k in finite dimensional Banach Spaces, à paraître.

[2] P. ASSOUAD - Sur le lemme de Sauer et un calcul d'entropie, C.R.A.S. Paris 297 (1983), 17-19.

[3] H.F. BLICHFELDT - A new principle in the geometry of numbers with some applications, Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), 227-235.

[4] T. BONNESEN und W. FENCHEL - Theorie der Konvexen Körper - Berlin, 1934.

[5] L.E. DOR - On sequences spanning a complex-ℓ_1-space, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 515-516.

[6] J. ELTON - Sign-embeddings of ℓ_1^n, Trans.AMS 279 (1983), 113-124.

[7] J. FARAHAT - Espaces de Banach contenant ℓ_1, d'après Rosenthal, Séminaire Maurey-Schwartz, école polytechnique 1973-74.

[8] M.G. KARPOVSKY and V.D. MILMAN - Coordinate density of sets of vectors, Discrete Math. 24 (1978), 177-184.

[9] B. MAUREY - Sous-espaces ℓ^p des espaces de Banach, Séminaire Bourbaki, 1982-83, 608.

[10] V.D. MILMAN - Some remarks about embeddings of ℓ_1^k in finite dimensional spaces, Isr. J. Math. 43 (1982), 129-138.

[11] V.D. MILMAN - Geometrical inegalities and mixed volumes in local theory of Banach spaces, dans ce même volume.

[12] A. PAJOR - Plongement de ℓ_1^k dans les espaces de Banach complexes, C.R.A.S. Paris 296 (1983), 741-743.

[13] A. PAJOR - Plongement de ℓ_1^k dans les espaces de Banach, Séminaire d'analyse fonctionnelle, Paris VII, 1982-83.

[14] A. PAJOR - Densité combinatoire et entropie, à paraître.

[15] G. PISIER - De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon, Advances in Math. (supplementary studies) vol. 7B (1981), 685.

[16] G. PISIER - Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément de ℓ_1^n, C.R.A.S. Paris 277 (1973), 991-993.

[17] G. PISIER - Remarques sur les classes de Vapnik et Cervonenkis, à paraître.

[18] H.P. ROSENTHAL - A characterization of Banach spaces containing ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71 (1974), 2411-2413.

[19] N. SAUER - On the density of families of Sets, J. Comb. Th. A 13 (1972), 145-147.

[20] S. SHELAH - A combinatorial problem : Pacific J. Math. 41 (1972), 247-261.

[21] V.N. VAPNIK and A. Ya. CERVONENKIS - On the uniform convergence of relatives frequencies of events to their probabilities, Theor. Prob. Appl. 16 (1971), 264-280.

Equipe d'analyse

Equipe de recherche
associée au C.N.R.S. N° 294

Université Paris VI

4, place Jussieu

Tour 46-0 - 4ème étage

75230 - PARIS CEDEX 05