Astérisque

ANDRÉ UNTERBERGER

L'opérateur de Laplace-Beltrami du demi-plan et les quantifications linéaire et projective de $SL(2, \mathbb{R})$

Astérisque, tome 131 (1985), p. 255-275

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__255_0>

L'OPÉRATEUR DE LAPLACE-BELTRAMI DU DEMI-PLAN ET LES QUANTIFICATIONS LINÉAIRE ET PROJECTIVE DE SL(2, $\mathbb{R}$)

par André Unterberger

Table des matières

0. Introduction

Deux espaces homogènes du groupe SL(2, $\mathbb{R}$) sont, on le verra, susceptibles de servir d'espaces de phase en vue de la mise en place d'un calcul des opérateurs analogue à celui de Weyl : si G=KAN est la décomposition d'Iwasawa de ce groupe, et si M est le sous-groupe de G réduit à $\pm I$, ce sont les espaces de classes à gauche $\Theta = G/MN$ et $\Pi = G/K$. Le premier peut être identifié au quotient de $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ par l'équivalence antipodale, sur lequel G opère linéairement : c'est également l'espace des horicycles du demi-plan de Poincaré. Quant à Π, c'est le demi-plan de Poincaré lui-même, sur lequel G opère par transformations homographiques.

Sans chercher à axiomatiser de façon précise la notion qui suit, mais pour donner une idée de la démarche adoptée, nous appellerons quantification d'un espace homogène E du groupe G la donnée d'un espace de Hilbert H, d'une règle de correspondance (un "calcul des opérateurs pseudo-différentiels") entre des fonctions sur E et des opérateurs sur H, et d'une représentation unitaire de G dans H : on suppose que la correspondance entre les fonctions sur E (les "symboles") et les opérateurs sur H jouit d'une propriété de covariance à l'égard de l'action de G dans H fournie par la représentation donnée et de l'action de G sur E attachée à la structure d'espace homogène de E. Le cas le plus connu est celui où $E = \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, G opérant linéairement sur E, où $H = L^2(\mathbb{R})$, où la représentation de G dans $L^2(\mathbb{R})$ est la représentation métaplectique, et où enfin la règle de correspondance est celle du calcul de Weyl des opérateurs pseudo-différentiels : bien entendu, on a coutume dans ce calcul de considérer les symboles comme des fonctions sur $\mathbb{R}^2$ plutôt que sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, mais cela ne fait pas de différence si l'on se limite, dans un premier temps, à des symboles de carré sommable. La propriété de covariance annoncée s'appelle dans ce cas la formule de Segal : on sait que la représentation métaplectique de G dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est qu'une représentation projective, i.e. une représentation "à un nombre complexe de module un près", d'ailleurs toujours égal ici à ± 1 ;

dans ce qui suit, nous ne considérerons que des représentations projectives, ce qui permettra d'indexer la série discrète de représentations de G par un paramètre $\lambda > 0$ sans propriétés arithmétiques particulières. Revenons aux espaces Θ et Π définis plus haut. La quantification de Θ n'est autre qu'une restriction de celle de Weyl, les fonctions sur Θ étant identifiées aux fonctions paires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: il est commode de prendre pour espace de Hilbert le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ réduit, au choix, aux fonctions paires ou impaires. Le demi-plan de Poincaré Π est un espace hermitien symétrique : à ce titre, on peut le quantifier par la méthode proposée par l'auteur dans [16], et développée en collaboration avec J. Unterberger, dans le cas particulier qui nous intéresse ici, dans [17] ; l'espace de Hilbert est un espace H_λ dépendant d'un paramètre $\lambda > 0$.

Il se présente alors le fait remarquable que $H_{\frac{1}{2}}$, muni de son groupe de transformations unitaires, peut être identifié à la partie impaire de $L^2(\mathbb{R})$, munie du groupe métaplectique. Disposant de deux calculs différents pour traiter des opérateurs sur $H_{\frac{1}{2}}$, basés sur le choix de Θ ou de Π comme espace de phase, on peut construire une isométrie, possédant de nombreuses propriétés intéressantes, entre des espaces de Hilbert de symboles de l'un et l'autre types. On retrouvera ainsi, à la modification près due au choix des coordonnées linéaires sur Θ (la notion liée de norme symplectique est particulièrement adaptée aux situations dans lesquelles les deux actions, linéaire et projective, du groupe G, sont étroitement mêlées) des propriétés de la transformation de Radon non-euclidienne obtenues par Helgason ([5], [6] et [7]) dans le cadre de son étude générale de la dualité des espaces symétriques, et étudiées également par Lax et Phillips ([9] et [10]). Certains faits recevront de la théorie de la quantification une explication à notre avis particulièrement satisfaisante, par exemple la raison pour laquelle l'image de cette transformation contient exactement une fonction sur quatre. De nouvelles transformations intégrales associées à la transformation de Radon se présenteront également. Enfin, rien n'oblige, dans la quantification de Π, à se limiter à la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre λ : on ne pourra, faute de place, qu'évoquer très brièvement dans cet article les possibilités de généraliser le calcul de Weyl issues de cette observation.

1. Les espaces homogènes du groupe SL(2, ℝ) ; les opérateurs de Poisson et de Radon

On désigne par Π le demi-plan droit constitué des points $X = x+i\xi$ avec $x > 0$: cet espace a une structure kählérienne canonique dont le ds^2 est $x^{-2}(dx^2+d\xi^2)$ et dont on note $d\mu(X)$ la mesure associée $x^{-2}dx\,d\xi$. Soient $G = SL(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels, de déterminant 1, et $g \longmapsto [g]$ l'application canonique de G sur son quotient $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$.
Le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ opère sur Π par

$$[g](X) = \frac{aX-bi}{icX+d} ,$$

ce qui permet d'identifier Π à l'espace homogène $G/K = \{gK,\ g\in G\}$ en attachant à g le point $[g](1)$ et en désignant par K le sous-groupe de G constitué des matrices

$$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}, \quad -2\pi < \theta \le 2\pi.$$

Il est traditionnel également d'introduire, pour r et ξ réels, les matrices

$$a_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad n_\xi = \begin{pmatrix} 1 & -\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et de désigner par N(resp. MN) le sous-groupe de G constitué des matrices n_ξ (resp. $\pm n_\xi$).

Le groupe G opère linéairement sur $\mathbb{R}^2$ puis, par restriction et passage au quotient, il opère sur l'espace Θ, quotient de $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ par la relation d'équivalence qui confond x et -x : attachant à $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la classe dans Θ du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on peut identifier Θ à l'espace $G/_{MN} = \{gMN\ ;\ g\in G\}$. Nous appellerons coordonnées linéaires sur Θ les coordonnées (x_1,x_2) telles que $(x_1,x_2) = \pi^{-\frac{1}{2}}(a,c)$: elles ne sont bien entendu définies qu'au changement près de (x_1,x_2) en $(-x_1,-x_2)$; il sera utile de considérer également les coordonnées (p,ζ), non ambiguës cette fois, et qualifiées de projectives, liées aux précédentes par les relations $p = \pi(x_1^2+x_2^2)$ et $\zeta = -\dfrac{x_1}{x_2}$, la première variant sur $\mathbb{R}^+_*$ et la seconde sur la droite projective. Si $g = k_\theta\, a_r\, n_\xi$, les coordonnées projectives de l'image de g dans Θ sont $p = e^r$ et $\zeta = \operatorname{cotg}\theta/2$ et l'on sait que, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, le point $[g\, n_t](1)$ parcourt un horicycle du demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire un cercle euclidien tangent (au point $i\zeta$) à la droite $i\,\mathbb{R}$. Dans l'identification qui en résulte de Θ avec l'espace des horicycles, les coordonnées projectives sont très proches de celles utilisées par Eymard ([3]) ou par Lax et Phillips ([10]).

Soit $x \longmapsto |x|_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$: à tout point $Y = [g](1)$ de Π, on attachera la norme $x \longmapsto |x|_Y$ définie par

$$(1) \qquad |x|_Y = |g^{-1}x|_1 \ .$$

Cette formule permet d'identifier Π à l'ensemble des normes symplectiques sur $\mathbb{R}^2$, en entendant par là toute norme se déduisant de la norme canonique par une transformation linéaire de déterminant un : les généralisations à plusieurs dimensions et au groupe symplectique de cette notion sont utiles dans le calcul de Weyl (voir [14] ou [15]). Avec $Y = y+i\eta$, on peut prendre $g = \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & -y^{-\frac{1}{2}}\eta \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, ce qui conduit à la relation

$$(2) \qquad |x|_Y^2 = y^{-1}(x_1+\eta\, x_2)^2 + y\, x_2^2 \ .$$

Définition 1.1 : Soit x^0 le point de Θ de coordonnées linéaires $(\pi^{-\frac{1}{2}},0)$ et, pour tout $g\in G$, soit $\{g\}$ la transformation de Θ qui lui correspond : rappelons que l'on note $[g]$ la transformation de Π attachée à g, et que l'on a choisi 1 comme point central de Π. A toute fonction a continue sur Π, à valeurs complexes, on associe la fonction Va définie sur Θ, lorsque l'intégrale a un sens, par

$$(Va)(\{g\}(x^0)) = \int_{\mathbb{R}} a([g\, n_\xi](1))d\xi,$$

et l'on appelle transformation de Radon la transformation V ainsi définie. A toute fonction f continue sur Θ, on associe la fonction V^*f sur Π définie par

$$(V^*f)([g](1)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\{g\, k_\theta\}(x^0))\, d\theta,$$

et l'on appelle opérateur de Poisson l'opérateur V^* ainsi défini.

Remarques : les opérateurs de Radon et de Poisson apparaissent ainsi comme les opérateurs de N-normalisation et de K-normalisation sur les fonctions sur G, restreints aux fonctions qui sont K-invariantes ou MN-invariantes. Rappelons que, si d est la distance sur Π, on a $\operatorname{ch} d(1,X) = (2x)^{-1}(1+x^2+\xi^2)$. Il en résulte que si $\mu > \frac{1}{2}$, et si $|a(Y)|\le C(\operatorname{ch} d(1,Y))^{-\mu}$ pour une certaine constante $C>0$, l'intégrale qui définit Va a un sens et l'on a

$$|(Va)(\{k_\theta a_r\}(x^0))| \le C\int_{\mathbb{R}}(\operatorname{ch} d(e^r(1+i\xi),1))^{-\mu}\, d\xi \le C\int_{\mathbb{R}}(\operatorname{ch} r+\frac{e^r}{2}\xi^2)^{-\mu}d\xi \le C_1 e^{-r/2}(\operatorname{ch} r)^{\frac{1}{2}-\mu}$$

et par suite $Va\in L^2(\Theta)$ pour la mesure naturelle sur Θ qui sera précisée sous peu.

Indiquons sans détailler le calcul, pour justifier la terminologie adoptée, que si la fonction f est écrite dans les coordonnées projectives (p,ζ) sur Θ, et si l'on appelle (v. par exemple [3]) noyau de Poisson la fonction P définie sur le produit de Π par la droite projective par la formule

$$P(Y,\zeta) = \frac{y(1+\zeta^2)}{y^2+(\eta-\zeta)^2} \qquad (Y = y+i\eta),$$

on a alors

$$(V^*f)(Y) = \int_{\mathbb{R}} f(P(Y,\zeta),\zeta)\,\frac{d\zeta}{\pi(1+\zeta^2)}.$$

Il reste à justifier en quoi les opérateurs de Radon et de Poisson sont formellement adjoints l'un de l'autre. Avec une normalisation convenable, la mesure de Haar dg sur $SL(2,\mathbb{R})$ s'écrit $e^{-r}dr\, d\xi\, d\theta$ si $g = n_\xi\, a_r\, k_\theta$ (avec $Y=[g](1)=e^r+i\xi$, cela correspond à $d\mu(Y)\, d\theta$) : comme elle est invariante par $g\longmapsto g^{-1}$, $e^{-r}dr\, d\xi\, d\theta$ est aussi la mesure pour les coordonnées relatives à la décomposition $g=k_{-\theta}a_{-r}\, n_{-\xi}$; les coordonnées projectives du point de Θ correspondant sont $p=e^{-r}$, $\zeta=-\operatorname{cotg}\theta/2$, d'où $dg = 2(1+\zeta^2)^{-1}\, dp\, d\zeta\, d\xi$. Enfin, compte tenu du lien entre les coordonnées projectives et linéaires sur Θ, donné par les formules $p=\pi|x|^2$, $\zeta=-\frac{x_1}{x_2}$, d'où $\frac{D(p,\zeta)}{D(x_1,x_2)} = 2\pi(1+\zeta^2)$, on a $dg = 2\pi\, dx_1\, dx_2\, d\xi$ si l'on entend par $dx_1\, dx_2$ la mesure sur Θ définie par $f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx$ une fois que l'on a identifié f à une fonction paire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Cela étant, soient a et f deux fonctions continues sur Π et Θ respectivement, relevées en des fonctions de mêmes noms sur G, respectivement K et MN-invariante, et supposons que a vérifie l'inégalité mentionnée plus haut avec $\mu > 1$ et que f soit bornée : alors a est sommable sur Π puisque, en coordonnées normales (r,φ) au point 1, la mesure $d\mu(Y)$ s'écrit sh r dr $d\varphi$. Si $Y \longmapsto g_Y$ est un relèvement continu de $\Pi = G/_K$ dans G, on a

$$\int_\Pi (V^*f)(Y)\bar{a}(Y)d\mu(Y) = \int_\Pi \bar{a}(Y)d\mu(Y)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(g_Y\, k_\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_G \bar{a}(g)\ f(g)\ dg$$

compte-tenu de la K-invariance de a; également, en désignant par $g_x (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ un relèvement borélien dans SL(2, ℝ) de la classe de x dans Θ, on obtient l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \overline{Va}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx \int_{\mathbb{R}} \bar{a}(g_x n_\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_G f(g)\ \bar{a}(g)\ dg.$$

Comme il est bien connu, la transformation de Radon consiste en l'intégration sur les horicycles. Le noyau de Poisson vérifie l'identité $P(1,\zeta) = 1$, d'où il résulte que, si l'on regarde f comme une fonction paire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\pi^{-1}(V^*f)(1)$ est la moyenne de f sur le cercle C_1 centré en O de rayon $\pi^{-\frac{1}{2}}$: on peut vérifier que $\pi^{-1}(V^*f)(Y)$ est la moyenne de f sur le cercle C_Y défini de même par référence à la norme euclidienne $x \longmapsto |x|_Y$ sur $\mathbb{R}^2$; ainsi, la transformation de Poisson consiste-t-elle à intégrer sur des ellipses centrées en O. Enfin, puisque V, comme V^*, échange les actions linéaire (sur Θ) et projective (sur Π) de G, ces deux transformations échangent les fonctions sur Θ qui ne dépendent que de $p = \pi|x|^2$ (on écrira abusivement $f = f(p)$) et les fonctions sur Π qui ne dépendent que de $\delta = \operatorname{ch} d(1,Y)$ (on écrira abusivement $a = a(\delta)$) : pour calculer Va (resp. V^*f) dans ces cas, on peut dans les formules de définition se contenter de prendre $g = a_r$. On obtient alors facilement les relations suivantes : si $a = V^*f$, on a

(3) $$a(\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta + \sqrt{\delta^2-1}\ \cos\ \theta)\ d\theta \qquad (\delta \geq 1)\ ;$$

si $f = Va$, on a

(4) $$f(p) = p^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} a(\tfrac{1}{2}(p + p^{-1} + \xi^2))\ d\xi.$$

La deuxième de ces formules n'est autre, d'ailleurs, que la transformation bien connue de Harish-Chandra (voir [8]).

2. Remarques sur la quantification de Weyl

L'article [15] contient des informations plus détaillées sur certaines notions introduites ici : quelques changements de notations ont du être effectués.

A tout point x de $\mathbb{R}^2$ on associe la transformation unitaire involutive σ_x^W

de $L^2(\mathbb{R})$ définie par

$$(\sigma_x^W u)(t) = u(2x_1 - t) \exp 4i\pi(x_1 - t)x_2 \quad .$$

Le lien entre une fonction a sur $\mathbb{R}^2$ et l'opérateur $A = \mathrm{Op}(a)$ sur $L^2(\mathbb{R})$ de symbole de Weyl a est donné par les formules équivalentes

$$A = 2 \int a(x)\, \sigma_x^W\, dx \qquad \text{et} \qquad a(x) = 2\ \mathrm{Tr}(\sigma_x^W A).$$

La correspondance Op est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R})$ et se prolonge en une bijection de l'espace de distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ sur l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La formule de Segal exprime que si $M \longmapsto \widetilde{M}$ est l'homomorphisme canonique du groupe métaplectique sur G, on a alors $M\,\mathrm{Op}(a)\,M^{-1} = \mathrm{Op}(a \circ \widetilde{M}^{-1})$ pour tout $a \in L^2(\mathbb{R}^2)$. La fonction de Wigner de deux fonctions u et $v \in L^2(\mathbb{R})$ est la fonction $H(u,v)$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $(H(u,v))(x) = 2(\sigma_x^W u, v)$: c'est donc le symbole de l'opérateur $w \longmapsto (w,v)u$.

Pour tout $R = r+i\rho \in \Pi$, on appelle oscillateur harmonique attaché à R l'opérateur différentiel L_R^W sur $L^2(\mathbb{R})$ dont le symbole est la fonction $x \longmapsto \pi\|x\|_R^2$, avec (d'après [15]) $\|x\|_R^2 = r^{-1}[(r^2+\rho^2)x_1^2 + 2\rho\, x_1 x_2 + x_2^2]$: la comparaison avec (2) montre que l'on a $\|x\|_R = |x|_{\bar{R}^{-1}}$ ou encore $\|(x_1,x_2)\|_R = |(x_2,x_1)|_R$. Il convient d'introduire également l'opérateur différentiel, dit "de création"

$$A_R = \pi^{\frac12}\, r^{-\frac12}(\bar{R}t - \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt})$$

et la fonction $\psi_R \in L^2(\mathbb{R})$ définie par

$$\psi_R(t) = 2^{\frac14}\, r^{\frac14}\, e^{-\pi R t^2}.$$

La résolution spectrale de L_R^W est alors donnée par la formule

$$L_R^W u = \sum_{j\geq 0} (\tfrac12 + j)(u, \psi_R^j)\, \psi_R^j \quad ,$$

où $(\psi_R^j)_{j\geq 0}$ est la base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ définie par $\psi_R^j = (j!)^{-\frac12} A_R^j\, \psi_R$.

Soit S un autre point de Π. D'après les résultats de [14], la fonction de Wigner $(H(\psi_R,\psi_S))(x)$ s'écrit $2(\psi_R,\psi_S)\exp -2q_{R,S}(x)$, où la forme quadratique $q_{R,S}$ se calcule comme suit : étant donné $x \in \mathbb{R}^2$, soit $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x-y\|_R^2 + \|y\|_S^2$ soit minimum : alors $q_{R,S}(x) = 2\pi(\|x-y\|_R^2 + \|y\|_S^2 - i(-x_1y_2 + x_2y_1))$.

Si l'on observe que, par définition des fonctions ψ_R et ψ_S, la fonction $(H(\psi_R,\psi_S))(x)$ doit être le produit d'une fonction indépendante de x par une fonction holomorphe des variables R et $\bar{S}$, et que par ailleurs on a $q_{R,R}(x) = \pi\|x\|_R^2$, on obtient aisément la relation

$$q_{R,S}(x) = \frac{2\pi}{R+\bar{S}}(Rx_1 + i\,x_2)(\bar{S}\,x_1 - i\,x_2). \tag{5}$$

Il sera nécessaire plus loin de connaître aussi la fonction de Wigner $H(\psi_R^1, \psi_S^1)$: d'après [15], si l'on pose $a_R(x) = \pi^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}(\bar{R}\, x_1 - i\, x_2)$ (c'est le symbole de A_R), si l'on introduit la coordonnée complexe $X_R = \pi^{-\frac{1}{2}} \bar{a}_R$ sur $\mathbb{R}^2$ et les opérateurs différentiels $\mathcal{A}_R$ et $\bar{\mathcal{A}}_R$ définis par

$$\mathcal{A}_R = \pi^{\frac{1}{2}} \bar{X}_R - \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial X_R} \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathcal{A}}_R = \pi^{\frac{1}{2}} X_R - \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \bar{X}_R},$$

on a

$$H(\psi_R^1, \psi_S^1) = \mathcal{A}_R\, \bar{\mathcal{A}}_S (H(\psi_R, \psi_S)).$$

A l'aide de la relation

$$\bar{a}_R = \frac{R+\bar{S}}{2(rs)^{\frac{1}{2}}}\, \bar{a}_S + \frac{R-S}{2(rs)^{\frac{1}{2}}}\, a_S ,$$

des formules $\pi^{-\frac{1}{2}} \dfrac{\partial \bar{a}_R}{\partial \bar{X}_S} = \dfrac{R-S}{2(rs)^{\frac{1}{2}}}$ et $\pi^{-\frac{1}{2}} \dfrac{\partial a_S}{\partial X_R} = \dfrac{\bar{S}-\bar{R}}{2(rs)^{\frac{1}{2}}}$ qui en résultent, et des relations

$$\bar{a}_S + \frac{R-S}{2(rs)^{\frac{1}{2}}}(\psi_R, \psi_S)^2\, a_S = \bar{a}_S + \frac{R-S}{R+\bar{S}}\, a_S = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}}{R+\bar{S}}\,(Rx_1 + ix_2) = (\psi_R, \psi_S)^2\, \bar{a}_R ,$$

on peut vérifier que l'on a

$$\mathcal{A}_R\, \bar{\mathcal{A}}_S(\exp -2q_{R,S}) = (\psi_R, \psi_S)^2 (4q_{R,S} - 1)\exp -2q_{R,S} .$$

Résumons les formules obtenues :

<u>Proposition 2.1</u> : <u>soient</u> R <u>et</u> S $\in \Pi$. <u>On a</u>

$$(\psi_R, \psi_S) = \left(\frac{2(rs)^{\frac{1}{2}}}{R+\bar{S}}\right)^{\frac{1}{2}} \ \underline{\text{et}}\ (\psi_R^1, \psi_S^1) = (\psi_R, \psi_S)^3.$$

<u>Par ailleurs on a</u>

$$H(\psi_R, \psi_S) = 2(\psi_R, \psi_S)\exp -2q_{R,S}$$

<u>et</u>

$$H(\psi_R^1, \psi_S^1) = 2(\psi_R^1, \psi_S^1)(4q_{R,S} - 1)\exp -2q_{R,S}.$$

Pour clore cette section, voici quelques remarques sur la décomposition du calcul de Weyl en ses parties paire et impaire (les sous-espaces irréductibles de la représentation métaplectique).

Avec $\check{u}(t) = u(-t)$, on a les relations $\sigma_x^W \check{u} = (\sigma_{-x}^W u)^{\vee}$, d'où il résulte que pour tout symbole a pair (i.e. vérifiant $a(x) = a(-x)$), l'opérateur Op(a) transforme toute fonction paire (resp. impaire) en une fonction paire (resp. impaire) : nous ne considérerons pas d'autres symboles dans le reste de cet article, mais il serait intéressant de le faire. Le symbole de l'opérateur $u \longmapsto \check{u}$ est la moitié de la distribution de Dirac en 0, et la formule de composition des symboles de Weyl montre que si $A = Op(a)$, le symbole de l'opérateur $u \longmapsto A\check{u}$ est la fonction $\mathcal{G}a$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(6) \qquad (\mathcal{G}a)(x) = 2 \int a(y)\, e^{-4i\pi[x,y]}\, dy,$$

où l'on a posé $[x,y] = -x_1 y_2 + x_2 y_1$.

La transformation unitaire $\mathcal{G}$ ressemble à la transformation de Fourier, mais avec la différence essentielle que l'on a $\mathcal{G}^2 = I$. Pour tout symbole pair a sur $\mathbb{R}^2$, on appelle partie paire-paire (resp. impaire-impaire) de a la fonction $\frac{1}{2}(a+\mathcal{G}a)$ (resp. $\frac{1}{2}(a-\mathcal{G}a)$). On voit immédiatement que l'opérateur dont le symbole est la partie paire-paire (resp. impaire-impaire) de a s'annule sur toutes les fonctions impaires (resp. paires). En particulier, la norme dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la partie paire-paire (resp. impaire-impaire) de a est la norme de Hilbert-Schmidt de la restriction de $Op(a)$ à la partie de $L^2(\mathbb{R})$ constituée des fonctions paires (resp. impaires).

3. La quantification du demi-plan de Poincaré

On ne donne ici que les définitions et résultats essentiels : plus de détails se trouvent dans [17].

Soient $\lambda > 0$, et H_λ l'espace de Hilbert des classes (pour l'égalité presque partout) de fonctions u mesurables sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs complexes, telles que

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_0^\infty |u(t)|^2 t^{-\lambda} dt < \infty.$$

La représentation unitaire projective $g \longmapsto M_g^\lambda$ du groupe opposé à G dans H_λ considérée ici (elle vérifie $M_g^\lambda M_{g'}^\lambda = \rho\, M_{g'g}^\lambda$ avec $\rho \in \exp 2i\pi\lambda\, \mathbb{Z}$) a une définition naturelle via la transformée de Laplace de $u \in H_\lambda$. Contentons-nous de rappeler que si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$(M_g^\lambda u)(s) = e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}} \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty u(t) \left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2} \left(\exp -2i\pi\, \frac{at+ds}{c}\right) J_\lambda\!\left(\frac{4\pi}{c}(st)^{\frac{1}{2}}\right) dt$$

si $c > 0$ (J_λ étant la fonction de Bessel) et, si $c = 0$ et $d > 0$:

$$(M_g^\lambda u)(s) = a^{\lambda-1} \left(\exp -2i\pi\, \frac{b}{a} s\right) u(a^{-2}s).$$

L'opérateur de Laguerre L_1^λ au point $1 \in \Pi$ est l'opérateur

$$L_1^\lambda = -\frac{1}{4\pi}\, t\, \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\lambda-1}{4\pi} \frac{d}{dt} + \pi t$$

sur H_λ ; si $Y = [g](1)$, on peut également définir l'opérateur $L_Y^\lambda = (M_g^\lambda)^{-1} L_1^\lambda M_g^\lambda$: cet opérateur joue ici le même rôle que l'oscillateur harmonique dans le calcul de Weyl. On définit la "symétrie de phase" $\sigma_Y^{(\lambda)}$ par la relation

$$\sigma_Y^{(\lambda)} = \exp i\pi(L_Y^\lambda - \frac{\lambda+1}{2}). \tag{7}$$

C'est un opérateur unitaire involutif sur H_λ : on a, de façon explicite :

$$(\sigma_Y^{(\lambda)}u)(s) = 2\pi y \int_0^\infty e^{-2i\pi(s-t)\eta} \left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2} J_\lambda(4\pi y(st)^{\frac{1}{2}})u(t)\, dt \tag{8}$$

si $Y = y + i\eta$ et $u \in H_\lambda$.

Une fonction propre correspondant à la plus petite valeur propre $\frac{\lambda+1}{2}$ de L_Y^λ est la fonction $\varphi_Y^{(\lambda)}$ telle que

$$\varphi_Y^{(\lambda)}(t) = 2^{\lambda+1}\pi^{(\lambda+1)/2}(\Gamma(\lambda+1))^{-\frac{1}{2}}\, y^{(\lambda+1)/2}\, t^\lambda\, e^{-2\pi Yt} \quad : \tag{9}$$

elle jouera un rôle capital dans la suite.

Pour toute fonction $a \in L^1(\Pi, d\mu)$, on appelle opérateur de symbole actif a l'opérateur

$$Q(a) = 2 \int_\Pi a(Y)\, \sigma_Y^{(\lambda)}\, d\mu(Y) \tag{10}$$

sur H_λ : on appelle symbole passif d'un opérateur à trace A la fonction b sur Π telle que $b(Y) = 2\, \mathrm{Tr}(\sigma_Y^{(\lambda)}A)$ pour tout $Y \in \Pi$. Si u et v appartiennent à H_λ, on appelle fonction de Wigner active de u et v, et l'on note $W_\lambda^{\#}(u,v)$, le symbole actif, s'il existe, de l'opérateur $w \longmapsto (w,v)u$; le symbole passif de cet opérateur s'appelle la fonction de Wigner passive de u et v et se note $W_\lambda(u,v)$.

Pour tout couple (X,Z) de points de Π, on pose

$$\delta_{X,Z}(Y) = (y(X+\bar{Z}))^{-1}(y^2+(X-i\eta)(\bar{Z}+i\eta)) \quad : \tag{11}$$

en particulier $\delta_{X,X}(Y) = \mathrm{ch}\, d(X,Y)$. On a alors les relations

$$W_\lambda(\varphi_X^{(\lambda)}, \varphi_Z^{(\lambda)}) = 2(\varphi_X^{(\lambda)}, \varphi_Z^{(\lambda)})\, (\delta_{X,Z})^{-\lambda-1} \quad , \tag{12}$$

$$W_\lambda^{\#}(\varphi_X^{(\lambda)}, \varphi_Z^{(\lambda)}) = \frac{\lambda+1}{2\pi}(\varphi_X^{(\lambda)}, \varphi_Z^{(\lambda)})\, (\delta_{X,Z})^{-\lambda-2} \quad , \tag{13}$$

et

$$(\varphi_X^{(\lambda)}, \varphi_Z^{(\lambda)}) = \left(\frac{2(xz)^{\frac{1}{2}}}{X+\bar{Z}}\right)^{\lambda+1} \quad . \tag{14}$$

Soit $-y^2\Delta - \frac{1}{4} = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) - \frac{1}{4}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami de Π : son spectre est $[0,\infty[$ et l'on peut définir l'opérateur $Z' = \frac{1}{2} + i(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$, ainsi que l'opérateur (borné sur $L^2(\Pi, d\mu)$ pour $\lambda > 0$)

$$F_\lambda = 2\pi \frac{\Gamma(\frac{\lambda+Z'}{2})\ \Gamma(\frac{\lambda+1-Z'}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+Z'+1}{2})\ \Gamma(\frac{\lambda-Z'}{2}+1)} \quad . \tag{15}$$

Le noyau de cet opérateur est la fonction k sur $\Pi \times \Pi$ définie par $k(Y,Y') = 2(\mathrm{sh}\, d(Y,Y'))^{-1} \exp -\lambda d(Y,Y')$. Si $\lambda > 1$, l'opérateur de symbole actif a est, pour tout $a \in L^2(\Pi,d\mu)$, un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H_λ dont la norme de Hilbert-Schmidt est $(F_\lambda a,a)^{\frac{1}{2}}$; son symbole passif est la fonction $b = F_\lambda a$.

Considérons l'isométrie $\Phi : H_{\frac{1}{2}} \to L^2_{\mathrm{impair}}(\mathbb{R})$ définie par

$$(\Phi u)(t) = 2^{-\frac{1}{4}}\, u(\tfrac{1}{2}t^2)\ \mathrm{sgn}\, t\ .$$

Sous cette isométrie, l'opérateur de Laguerre $L_1^{\frac{1}{2}}$ se transforme en la restriction à $L^2_{\mathrm{impair}}(\mathbb{R})$ de $\frac{1}{2} L_1^W$, où L_1^W est l'oscillateur harmonique rappelé dans la section qui précède. En conséquence, l'opérateur $i\sigma_1^{(\frac{1}{2})} = i \exp i\pi(L_1^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4})$ se transforme en $\exp \frac{i\pi}{2}(L_1^W - \frac{1}{2}) = \mathcal{F}^{-1}$, l'inverse de la transformation de Fourier. Par ailleurs, pour tout $Y \in \Pi$, on a

$$\varphi_Y^{(\frac{1}{2})}(t) = 4\pi^{\frac{1}{2}}\, y^{3/4}\, t^{\frac{1}{2}}\, e^{-2\pi Y t}\ ,$$

et les résultats de la section précédente fournissent l'importante relation $\Phi\, \varphi_Y^{(\frac{1}{2})} = \psi_Y^1$. Signalons que la partie paire de $L^2(\mathbb{R})$ pourrait être identifiée de la même façon à $H_{-\frac{1}{2}}$, mais nous n'utiliserons pas ce fait ici.

Le résultat qui suit prépare des calculs de la section suivante :

Proposition 3.1 : soient R et $S \in \Pi$, et posons, pour $x \in \mathbb{R}^2$,

$$p_{R,S}(x) = \frac{2\pi}{R+\bar{S}}\,(R\, x_2 + i\, x_1)(\bar{S}\, x_2 - i\, x_1), \tag{16}$$

c'est-à-dire $p_{R,S}(x_1,x_2) = q_{R,S}(x_2,x_1)$ si l'on fait référence à (5). Soient $\mu > \frac{1}{2}$ et $a = \delta_{R,S}^{-\mu}$, où la fonction $\delta_{R,S}$ sur Π a été définie en (11). Sa transformée de Radon Va est donnée, en coordonnées linéaires x sur Θ, par

$$(Va)(x) = 2^{\mu}(\Gamma(\mu))^{-1}\, \Gamma(\mu - \tfrac{1}{2})\, \pi^{\frac{1}{2}} (p_{R,S}(x))^{\mu-1} (p^2_{R,S}(x)+1)^{\frac{1}{2}-\mu}\ . \tag{17}$$

Preuve : remarquons d'abord que le second membre de (17), compris comme détermination principale, est bien défini puisque l'on a $\mathrm{Re}\, p_{R,S}(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ ainsi qu'on le vérifie aisément. Dans le cas où $R = S = 1$, la formule (17) résulte immédiatement de (4), et la covariance de la transformation V à l'égard des actions linéaire (sur Θ) et projective (sur Π) de G montre qu'elle reste valable plus généralement toutes les fois que $R = S$. Dans le cas général, soit T le milieu de RS au sens de la géométrie du demi-plan : l'inégalité $|\delta_{R,S}(Y)| \geq (\mathrm{ch}\, \frac{d(R,S)}{2})^{-1}\ \mathrm{ch}\, d(T,Y)$, établie dans [17], entraîne la convergence de l'intégrale qui définit Va, et comme $\delta_{R,S}(Y)$ est une fonction holomorphe de R et de $\bar{S}$, le prolongement analytique assure la validité de (17) dans tous les cas.

4. L'opérateur d'Euler sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

C'est l'opérateur $Z = -\frac{1}{2}(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$, dont l'adjoint formel est 1-Z et dont le spectre est la droite $\frac{1}{2} + i\,\mathbb{R}$. La transformation de Fourier sur chaque rayon relativement à la variable $\log|x|$ le transforme en l'opérateur unitairement équivalent de multiplication par $\frac{1}{2} + it$ sur le cylindre constitué des couples $(e^{i\theta}, t) \in S^1 \times \mathbb{R}$. Par suite, l'identité de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est la limite forte, quand $\epsilon \to 0$, du projecteur spectral E_ϵ correspondant à la partie du spectre constituée des points $\frac{1}{2} + it$ avec $\epsilon \leq |t| \leq \epsilon^{-1}$: cette remarque permettra d'effectuer de façon purement formelle des calculs sur certaines fonctions de l'opérateur d'Euler, puisque celles que nous aurons à considérer seront bornées et inversibles lorsqu'on les restreindra à l'image de E_ϵ. Pour tout $t > 0$, on définit l'opérateur t^Z au sens des semi-groupes, i.e. par la relation $(t^Z f)(x) = f(t^{-\frac{1}{2}}x)$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{R}_\lambda = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+Z}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda-Z}{2}+1)} . \tag{18}$$

La formule $(2\pi)^{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{|y|\to\infty} |\Gamma(x+iy)|\, e^{\frac{\pi}{2}|y|} |y|^{\frac{1}{2}-x}$ (cf.[12], p. 13)

montre que $\mathcal{R}_\lambda$ est, pour tout $\epsilon > 0$, borné sur l'image de E_ϵ ; en outre, il est borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ si $\lambda \neq -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ D'après [12], p. 91, on a, si $\lambda > -\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{R}_\lambda = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty (\tfrac{t}{2})^{Z-1} J_\lambda(t)\, dt. \tag{19}$$

Signalons également la formule

$$\mathcal{R}_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \pi^{-1}(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{Z}{2}) \int_0^\infty (\tfrac{t}{2})^{-Z} \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}} . \tag{20}$$

On pose $T = 2^{-\frac{1}{2}} \Gamma(Z) (\Gamma(Z - \frac{1}{2}))^{-1}$ soit, d'après une formule sur la fonction bêta :

$$T = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(Z - \tfrac{1}{2}) \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-Z-\frac{1}{2}} dt \quad : \tag{21}$$

c'est le produit de $Z - \frac{1}{2}$ par un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. On utilisera également les adjoints formels $\mathcal{R}_\lambda^*$ et T^* obtenus en changeant Z en 1-Z.

Introduisons maintenant l'opérateur de symétrie $\mathcal{K}$ sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ lié à la transformation $\mathcal{G}$ définie en (6) par

$$\mathcal{K} = \Gamma(1-Z)(\Gamma(Z))^{-1}\, 2^{2Z-1} \mathcal{G}. \tag{22}$$

Il résulte aisément de la relation $\mathcal{G} Z = (1-Z)\mathcal{G}$ que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^* = \mathcal{K}^{-1}$, que $\mathcal{K} Z \mathcal{K}^{-1} = 1-Z$ et que $\mathcal{K}$ commute avec TT^*. En outre, toujours par un calcul purement formel mais utilisant cette fois la formule de duplication de la fonction gamma

$$\Gamma(\zeta)\ \Gamma(\zeta+\tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}\ 2^{1-2\zeta}\ \Gamma(2\zeta),$$

on vérifie que l'opérateur $T\mathcal{K}T^{-1}$ est unitaire, involutif, et que

$$T\mathcal{K}T^{-1} = \mathcal{R}_{-\frac{1}{2}}^{-1}\,\mathcal{G}\,\mathcal{R}_{-\frac{1}{2}} = -\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}^{-1}\,\mathcal{G}\,\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}\ . \tag{23}$$

<u>Proposition 4.1</u> : <u>soit</u> $x \longmapsto |x|$ <u>une norme symplectique sur</u> $\mathbb{R}^2$, <u>soit</u> $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ <u>une fonction continue ne dépendant que de</u> $|x|$, i.e. $f(x) = g(\pi|x|^2)$. <u>On a</u> $(\mathcal{K}f)(x) = h(\pi|x|^2)$ <u>avec</u> $h(p) = p^{-1}g(p^{-1})$. <u>En outre les transformées de Poisson de</u> f <u>et de</u> $\mathcal{K}f$ <u>coïncident</u>.

<u>Preuve</u> : comme $\mathcal{G}$ commute avec l'action linéaire du groupe G sur $\mathbb{R}^2$, et que la transformation de Poisson V^* échange les actions linéaire et projective de G, on peut supposer que $|\ \ |$ est la norme canonique. On a alors $(\mathcal{G}f)(x) = 2\hat{f}(x) = k(\pi|x|^2)$ où, d'après la formule de transformation de Fourier des fonctions radiales, l'on a ([13], p. 115)

$$k(p) = 4\pi\int_0^\infty g(\pi t^2)t\ J_0(4t(\pi p)^{\frac{1}{2}})\ dt = \frac{1}{4p}\int_0^\infty g(\frac{s^2}{16p})\ J_0(s)\ s\ ds = 4\int_0^\infty h(\frac{16p}{s^2})\ J_0(s)\ \frac{ds}{s}.$$

La formule $\dfrac{\Gamma(Z)}{\Gamma(1-Z)} = \int_0^\infty (\frac{s}{2})^{2Z-1}\ J_0(s)\ ds$, analogue à (19), montre la première partie. La seconde résulte alors de (3), à condition d'y effectuer le changement de variable involutif défini par $\cos\varphi = -(\delta + \sqrt{\delta^2-1}\cos\theta)^{-1}\ (\delta\cos\theta + \sqrt{\delta^2-1})$.

Il faut maintenant effectuer quelques calculs sur les fonctions de Wigner écrites en (13) : remarquons que sur les fonctions sur Θ considérées comme des fonctions paires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, l'opérateur Z devient $-p\frac{\partial}{\partial p}$ dans les coordonnées projectives (p,ζ), puisque $p = \pi|x|^2$.

<u>Proposition 4.2</u> : <u>soit</u> δ <u>la fonction sur</u> Π <u>telle que</u> $\delta(Y) = \mathrm{ch}\ d(1,Y)$. <u>On a les relations</u>

$$TV((4\pi)^{-1}\ \delta^{-3/2}) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{4}[(p-i)^{-3/2} + (p+i)^{-3/2}], \tag{24}$$

$$TV(3(4\pi)^{-1}\ \delta^{-5/2}) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2i}\ (Z-\tfrac{1}{2})[(p-i)^{-3/2} - (p+i)^{-3/2}], \tag{25}$$

<u>et</u>

$$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}\ TV(3(4\pi)^{-1}\ \delta^{-5/2}) = 2(4p-1)\ e^{-2p}, \tag{26}$$

<u>étant entendu que les déterminations de</u> $(p \pm i)^{\frac{1}{2}}$ <u>sont choisies dans le secteur du plan complexe défini par</u> $|\mathrm{Arg}\, z| < \frac{\pi}{4}$.

<u>Preuve</u> : d'après la proposition 3.1, on a

$$V((4\pi)^{-1}\delta^{-3/2}) = 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-1}p^{\frac{1}{2}}(p^2+1)^{-1},$$

d'où, d'après (21),

$$TV((4\pi)^{-1}\delta^{-3/2}) = \pi^{-3/2}(Z-\tfrac{1}{2})\ \{p^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\,[p^2(1+t)^2+1]^{-1}\,dt\}\ .$$

L'intégrale, évaluée par la méthode des résidus, vaut $2^{-1}\pi i p^{-\frac{1}{2}}[(p+i)^{-\frac{1}{2}}-(p-i)^{-\frac{1}{2}}]$, ce qui conduit à (24) ; (25) s'obtient de façon analogue. D'après (19), puis [12], p. 105 et p. 73, on a

$$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}V(3(4\pi)^{-1}\delta^{-5/2}) = 2^{11/2}\ \pi^{-\frac{1}{2}}p^{3/2}\int_0^\infty t^{3/2}(t^2+4p^2)^{-2}J_{\frac{1}{2}}(t)\ dt = 8p^{\frac{1}{2}}e^{-2p}.$$

En appliquant à nouveau (21), on obtient sans difficultés la relation

$$T\ \mathcal{R}_{\frac{1}{2}}V(3(4\pi)^{-1}\delta^{-5/2}) = 4(-p\ \frac{\partial}{\partial p}-\frac{1}{2})e^{-2p} = 2(4p-1)\ e^{-2p},$$

puis l'on observe que les opérateurs T et $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$ commutent.

<u>Proposition 4.3</u> : <u>on a les relations</u>

(27)
$$\mathcal{R}^{-1}_{-\frac{1}{2}}(2\ e^{-2p}) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{4}\,[(p-i)^{-3/2}+(p+i)^{-3/2}],$$

(28)
$$V^*T^*\mathcal{R}^{-1}_{-\frac{1}{2}}\ (2e^{-2p}) = (4\pi)^{-1}\ \delta^{-3/2}$$

<u>et</u>

(29)
$$V^*T^*TV\ (3(4\pi)^{-1}\delta^{-5/2}) = 3(4\pi)^{-1}\delta^{-5/2}.$$

<u>Preuve</u> : la relation (20) et la formule

$$\int_0^\infty e^{-tp}\ t^{-\frac{1}{2}}\ \sin t\ dt = 2\pi^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-\pi(p-i)s^2}ds = \pi^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{Im}(p-i)^{-\frac{1}{2}}$$

fournissent (27). Les relations

(30)
$$T^* = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-Z)\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{Z-3/2}\ dt$$

et

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}(p-i(1+t))^{-3/2}dt = 2\ e^{\frac{3i\pi}{4}}\ (1+ip)^{-1}$$

permettent d'obtenir

$$T^*\ \mathcal{R}^{-1}_{-\frac{1}{2}}(2e^{-2p}) = \mathrm{Re}\ 2^{-\frac{1}{2}}\ \pi^{-1}\ e^{\frac{3i\pi}{4}}\ [-\frac{1}{2}(1+ip)^{-1}+(1+ip)^{-2}]\ .$$

Il ne reste plus alors qu'à appliquer (3) et les formules de [12], p. 184, qui définissent les fonctions de Legendre $\mathfrak{P}_{-1} = \mathfrak{P}_o$ et $\mathfrak{P}_{-2} = \mathfrak{P}_1$ pour obtenir (28). En partant de (25), on obtient

$$T^*TV(3(4\pi)^{-1}\ \delta^{-5/2}) = 2^{\frac{1}{2}}\ \pi^{-1}\mathrm{Im}[e^{\frac{3i\pi}{4}}\ (-\ \tfrac{1}{4}(1+ip)^{-1} + 2(1+ip)^{-2} - 2(1+ip)^{-3})]$$

d'où l'on déduit (29) comme précédemment, en utilisant en outre l'expression intégrale de $\mathfrak{P}_{-3} = \mathfrak{P}_2$.

Pour tout R fixé, les six formules des propositions 4.2 et 4.3 restent valables si l'on remplace $\delta(Y)$ par $\delta_R(Y) = \mathrm{ch}\ d(R,Y)$ et p par $p_R = \pi|x|_R^2$; en utilisant le prolongement holomorphe en R, $\overline{S}$, on voit qu'elles restent valables si l'on remplace δ par $\delta_{R,S}$ (voir (11)) et p par $p_{R,S}$ (voir (16)). Pour gagner de la place, les références à (24), (25), (26), (27), (28) et (29) pourront signaler, en fait, qu'il convient d'utiliser les extensions de ces identités que nous venons d'indiquer.

5. Comparaison des quantifications linéaire et projective de G.

Proposition 5.1 : lorsque R et S parcourent Π, les fonctions $\delta_{R,S}^{-5/2}$ forment un système total dans $L^2(\Pi,d\mu)$; de plus, les fonctions $TV(\delta_{R,S}^{-5/2})$ sont paires et invariantes par $T\kappa T^{-1}$.

Preuve : pour tout $a \in L^2(\Pi,d\mu)$, l'opérateur Q(a) défini par référence à la quantification de la section 3 avec $\lambda = 3/2$ est de Hilbert-Schmidt et l'on a

$$(Q(a)\ \varphi_R^{(3/2)}, \varphi_S^{(3/2)}) = \int_\Pi a(Y)\ W_{3/2}(\varphi_R^{(3/2)}, \varphi_S^{(3/2)})(Y)\ d\mu(Y).$$

La première partie résulte donc de (12). La formule (26) (ou plutôt son extension, voir plus haut), la proposition 2.1 et la relation $p_{R,S} = q_{\overline{S}^{-1},\overline{R}^{-1}}$ montrent que $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}TV(\delta_{R,S}^{-5/2})$ est un symbole de Weyl impair-impair, se changeant en son opposé sous l'action de $\mathcal{G}$: l'une des relations (23) permet de conclure.

Proposition 5.2 : Posons $f_{R,S} = TV(3(4\pi)^{-1}\delta_{R,S}^{-5/2})$. Pour toute fonction $a \in L^2(\mathbb{R}^2)$ impaire-impaire, on a

$$\|a\|_{L^2}^2 = (8\pi)^{-2} \int_{\Pi\times\Pi} |(a, \mathcal{R}_{\frac{1}{2}}\ f_{R,S})|^2\, |(\psi_R^1, \psi_S^1)|^2\ d\mu(R)\ d\mu(S),$$

où les produits scalaires intervenant dans l'intégrale sont respectivement ceux de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve : d'après [17], on a, pour toute fonction $u \in H_{\frac{1}{2}}$:

$$\|u\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 = (8\pi)^{-1} \int_\Pi |(u, \varphi_R^{(\frac{1}{2})})|^2\ d\mu(R).$$

A l'aide de l'isométrie Φ de $H_{\frac{1}{2}}$ sur $L^2_{\mathrm{impair}}(\mathbb{R})$ décrite dans la section 3, on obtient, pour toute fonction $v \in L^2_{\mathrm{impair}}(\mathbb{R})$:

(31) $$\|v\|^2_{L^2} = (8\pi)^{-1} \int_{\Pi} |(v,\psi^1_R)|^2 \, d\mu(R).$$

Si $|||A|||$ est la norme de Hilbert-Schmidt de $A = Op(a)$, on en déduit

$$|||A|||^2 = (8\pi)^{-1} \int_{\Pi} \|A^* \psi^1_R\|^2 \, d\mu(R) = (8\pi)^{-2} \int_{\Pi\times\Pi} |(A^* \psi^1_R, \psi^1_S)|^2 d\mu(R) d\mu(S).$$

D'après les résultats de la section 2, on a

$$(A^* \psi^1_R, \psi^1_S) = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{a}(x) H(\psi^1_R, \psi^1_S)(x) \, dx$$

avec

$$H(\psi^1_R, \psi^1_S) = 2(\psi^1_R, \psi^1_S)(4q_{R,S} - 1) \exp -2q_{R,S} .$$

Nous avons déjà signalé que $q_{R,S} = p_{\bar{S}^{-1},\bar{R}^{-1}}$; par ailleurs l'égalité $|(\psi^1_{\bar{S}^{-1}}, \psi^1_{\bar{R}^{-1}})| = |(\psi^1_R, \psi^1_S)|$ résulte de la proposition 2.1. En utilisant (26), on obtient alors

$$\|a\|^2 = |||A|||^2 = (8\pi)^{-2} \int_{\Pi\times\Pi} |(\psi^1_{\bar{S}^{-1}}, \psi^1_{\bar{R}^{-1}})|^2 \, |(a, \mathfrak{R}_{\frac{1}{2}} f_{\bar{S}^{-1},\bar{R}^{-1}})|^2 \, d\mu(R) \, d\mu(S),$$

d'où l'on déduit la proposition 5.2 par un simple changement de variables d'intégration.

Proposition 5.3 : lorsque R et S parcourent Π, les fonctions $g_{R,S} = TV((4\pi)^{-1} \delta^{-3/2}_{R,S})$ forment un système total dans le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^2)$ constitué des fonctions paires invariantes par $T\varkappa T^{-1}$.

Preuve : soit $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ paire invariante par $T\varkappa T^{-1}$. Comme $\mathcal{G}$ commute avec le projecteur spectral E_ε (section 4), on peut approcher g par une fonction h dans l'image de ce projecteur et possédant les mêmes symétries. Un calcul formel montre

que $\quad f = 4(2\pi)^{\frac{1}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{Z}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4} - \frac{Z}{2})} h \quad$ est un symbole impair-impair : la proposition 5.2

permet alors d'approcher f par des combinaisons linéaires des fonctions $\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}} f_{R,S}$, et l'on peut appliquer à ce résultat l'opérateur (borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$)
$\frac{1}{4}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{3}{4} - \frac{Z}{2})(\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{Z}{2}))^{-1}$. Par suite h est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de combinaisons linéaires de fonctions du type

$$\frac{1}{4}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{3}{4} - \frac{Z}{2})(\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{Z}{2}))^{-1}(2(4p_{R,S} - 1) \exp -2p_{R,S}) \quad :$$

or, compte-tenu de la relation

$$2(Z-\frac{1}{2})(2\exp -2p_{R,S}) = 2(4p_{R,S}-1)\exp -2p_{R,S},$$

la fonction que nous venons d'écrire n'est autre que $\mathfrak{R}_{-\frac{1}{2}}^{-1}(2\exp -2p_{R,S})$ ou encore $TV((4\pi)^{-1}\delta_{R,S}^{-3/2})$.

Dans l'énoncé du théorème qui suit, nous regardons l'opérateur TV comme défini a priori sur l'espace des fonctions a continues sur Π vérifiant $|a| \le C\ \delta^{-\mu}$ pour un certain $\mu > \frac{1}{2}$, à valeurs dans l'espace des distributions d'ordre 1, paires, sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Quant à l'opérateur V^*T^*, la formule (30) permet de le regarder, a priori, comme un opérateur défini sur l'espace des fonctions g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, paires, telles que g et Zg soient bornées, à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur Π.

Théorème 5.1 : l'opérateur TV se prolonge en une isométrie de $L^2(\Pi,d\mu)$ sur le sous-espace W de $L^2(\mathbb{R}^2)$ constitué des fonctions paires invariantes par $T\varkappa T^{-1}$. L'opérateur V^*T^* se prolonge sur W en l'inverse de TV, et s'annule sur l'espace (supplémentaire du précédent) des fonctions $a \in L^2(\mathbb{R}^2)$ paires vérifiant $T\varkappa T^{-1}a=-a$. De plus, l'isométrie TV échange les actions projective (sur Π) et linéaire (sur $\mathbb{R}^2$) du groupe G, et transforme l'opérateur $-y^2\Delta-\frac{1}{4}$ sur Π en l'opérateur $-(Z-\frac{1}{2})^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve : soient $f_{R,S}$ et $g_{R,S}$ les fonctions introduites dans l'énoncé des propositions 5.2 et 5.3. La formule (29) montre que TV est une isométrie lorsqu'on restreint cet opérateur au sous-espace engendré par les fonctions $\delta_{R,S}^{-5/2}$: d'après la proposition 5.1, TV se prolonge donc en une isométrie de $L^2(\Pi,d\mu)$ sur un sous-espace de W. La proposition 5.3 et les relations (24), (27) et (28) montrent de même que V^*T^* s'étend en une isométrie de W sur un sous-espace de $L^2(\Pi,d\mu)$. Les relations qui précèdent montrent aussi que TV et V^*T^* sont inverses l'un de l'autre lorsque V^*T^* est restreint à W. Le fait que V^*T^* s'annule sur les fonctions paires vérifiant $T\varkappa T^{-1}a=-a$ est une conséquence de la proposition 4.1 et de quelques calculs d'approximation que nous ne détaillerons pas, cette propriété n'étant pas utilisée plus loin. Par définition, les opérateurs de Poisson et de Radon échangent les actions linéaire et projective de G, et l'opérateur Z et ses fonctions commutent avec l'action linéaire de G sur $\mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à montrer que V^*T^* fait passer de $-(Z-\frac{1}{2})^2$ à $-y^2\Delta-\frac{1}{4}$. Or, d'après (26), on a

$$\mathfrak{R}_{\frac{1}{2}}\, f_{R,S} = 2(4p_{R,S}-1)\exp -2p_{R,S} = 2(Z-\frac{1}{2})(2\exp -2p_{R,S})$$

et comme par ailleurs $g_{R,S} = \mathfrak{R}_{-\frac{1}{2}}^{-1}(2\exp -2p_{R,S})$, on voit, en utilisant la formule des compléments, que l'on a

$$g_{R,S} = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{tg}\pi(\frac{1}{4}-\frac{Z}{2})}{\frac{1}{4}-\frac{Z}{2}}\,f_{R,S} \tag{32}$$

(remarquer que l'opérateur qui intervient ici est borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$). Rappelons que l'on a

$$V^*T^* g_{R,S} = \frac{1}{4\pi}\,\delta_{R,S}^{-3/2} \qquad \text{et} \qquad V^*T^* f_{R,S} = \frac{3}{4\pi}\,\delta_{R,S}^{-5/2}\,.$$

D'après la relation, rappelée dans la section 3, entre les symboles actif et passif des opérateurs sur $H_{\frac{1}{2}}$, on a $F_{\frac{1}{2}}(3(4\pi)^{-1}\,\delta_{R,S}^{-5/2}) = 2\,\delta_{R,S}^{-3/2}$, où, d'après (15) et la formule des compléments, on peut écrire $F_{\frac{1}{2}} = 2\pi(\frac{1}{4}-\frac{Z'}{2})^{-1}\operatorname{tg}\pi(\frac{1}{4}-\frac{Z'}{2})$ avec $Z' = \frac{1}{2} + i(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$. On passe donc de $V^*T^*\, f_{R,S}$ à $V^*T^*\, g_{R,S}$ par l'opérateur $(8\pi)^{-1}\, F_{\frac{1}{2}}$. Soit ψ la fonction holomorphe et bornée dans un voisinage de la demi-droite $]-\infty,0]$ définie par $\psi(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta^{\frac{1}{2}})^{-1}\operatorname{tg}\frac{\pi\,\zeta^{\frac{1}{2}}}{2}$.

D'après ce que nous venons de voir, on a $\psi((Z'-\frac{1}{2})^2)\,V^*T^* = V^*T^*\psi((Z-\frac{1}{2})^2)$, et comme la fonction ψ est strictement monotone sur $]-\infty,0]$, on en déduit la relation $\chi(-y^2\Delta-\frac{1}{4})\,V^*T^* = V^*T^*\chi(-(Z-\frac{1}{2})^2)$ pour toute fonction χ continue et bornée sur $[0,\infty[$: en particulier on a $(-y^2\Delta-\frac{1}{4})\,V^*T^* = V^*T^*(-(Z-\frac{1}{2})^2)$ sur le domaine du générateur infinitésimal du groupe unitaire $t \longmapsto \exp it(Z-\frac{1}{2})^2$.

<u>Théorème 5.2</u> : <u>pour tout</u> $a \in L^1(\Pi, d\mu)$, <u>posons</u>

$$f(x) = 2^{3/2}\int_{\Pi} a(Y)\,\sin(2\pi\,\|x\|_Y^2 - \frac{\pi}{4})\,d\mu(Y).$$

<u>On a</u>

$$\|f\|_{L^2}^2 = (F_{\frac{1}{2}}a,a)_{L^2(\Pi,d\mu)} = 4\pi\Big(\Big(\frac{\operatorname{th}\frac{\pi}{2}(-y^2\Delta-\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}{(-y^2\Delta-\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}\Big)a,\ a\Big)_{L^2(\Pi,d\mu)}$$

<u>et l'opérateur</u> $a \longmapsto f$ <u>s'étend en une isométrie de l'espace des</u> $a \in L^2(\Pi,d\mu)$ <u>tels que</u> $F_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\, a \in L^2(\Pi,d\mu)$ <u>sur le sous-espace de</u> $L^2(\mathbb{R}^2)$ <u>constitué des symboles impairs-impairs</u>.

<u>Preuve</u> : soit Φ l'isométrie de $H_{\frac{1}{2}}$ sur L^2_{impair} décrite dans la section 3. Les formules (13), (14) et (26), les propositions 2.1 et 5.1 et le théorème 5.1 montrent que le symbole impair-impair de $\Phi\,Q(a)\,\Phi^{-1}$ est la fonction $(\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}TV\, a) \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs on a

$$\Phi(i\sigma_Y^{(\frac{1}{2})})\,\Phi^{-1} = e^{-\frac{i\pi}{4}}\exp\frac{i\pi}{2}L_Y^W\,,$$

opérateur dont le symbole de Weyl est, d'après [15], la fonction $2^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \exp 2i\pi \|x\|_Y^2$; on vérifie sans peine que les parties paire-paire et impaire-impaire de $\exp 2i\pi\|x\|_Y^2$ sont $e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{\pi}{4} \pm 2\pi\|x\|_Y^2)$. Il en résulte que le symbole impair-impair de $\Phi\, Q(a)\, \Phi^{-1}$ est aussi f. On en déduit l'égalité

$$\|f\|^2_{L^2} = \|\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} TV\, a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (\mathcal{R}^*_{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} TV\, a,\ TV\, a)_{L^2(\mathbb{R}^2)} ,$$

et le théorème 5.1 montre que $\mathcal{R}^*_{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} TV = TV\, F_{\frac{1}{2}}$, d'où $\|f\|^2_{L^2} = (TV\, F_{\frac{1}{2}}\, a,\ TV\, a)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ $= (F_{\frac{1}{2}}\, a, a)_{L^2(\Pi, d\mu)}$. La surjectivité de l'opérateur $a \longmapsto f$ résulte de la proposition 5.2.

<u>Remarques</u> : le théorème 5.2 conduit sans peine à la formule d'inversion

$$a(Y) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\pi} \frac{(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{th} \frac{\pi}{2}(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \sin(2\pi\|x\|_Y^2 - \frac{\pi}{4})\, dx\right] .$$

Par ailleurs, signalons que si l'on pose

$$g(x) = 2^{3/2} \int_\Pi a(Y) \sin(2\pi\|x\|_Y^2 + \frac{\pi}{4})\, d\mu(Y),$$

alors g est un symbole pair-pair et l'on a

$$\|g\|^2_{L^2} = 4\pi\left(\frac{(\operatorname{th} \frac{\pi}{2}(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}})^{-1}}{(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}\, a,\ a\right)_{L^2(\Pi, d\mu)}$$

lorsque le second membre a un sens.

Dans toutes ces formules, on peut si l'on veut remplacer partout $\|x\|_Y$ par $|x|_Y$.

Voici une dernière transformation intégrale du même genre. Supposons $\lambda > 0$, et soit

$$h(x) = 4\pi \int_\Pi a(Y)\, J_\lambda(2\pi|x|_Y^2)\, d\mu(Y).$$

Alors on a

$$a(Y) = (-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \operatorname{th} \pi(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} F_\lambda^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^2} h(x)\, J_\lambda(2\pi|x|_Y^2)\, dx\right).$$

Cela résulte de ce que le noyau de l'opérateur $\mathcal{R}_\lambda V$ est la fonction k sur $\mathbb{R}^2 \times \Pi$ telle que $k(x,Y) = 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} J_\lambda(2\pi|x|_Y^2)$: la preuve de ce dernier fait nécessite encore quelques calculs.

6. Généralisations du calcul de Weyl

Proposition 6,1 : soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur Σ_λ (sur la réunion pour $\epsilon > 0$ des images de projecteurs spectraux E_ϵ) par la formule

$$\Sigma_\lambda = \mathcal{R}_\lambda\, T\, \varkappa\, T^{-1}\, \mathcal{R}_\lambda^{-1}\,. \tag{33}$$

Alors Σ_λ se prolonge en un opérateur unitaire involutif sur $L^2(\mathbb{R}^2)$; on a $\Sigma_{-\frac{1}{2}} = \mathcal{G}$ et $\Sigma_{\frac{1}{2}} = -\mathcal{G}$. De plus, pour toute fonction $a \in L^2(\Pi, d\mu)$, la fonction $\mathcal{R}_\lambda TV\, a$ est invariante par Σ_λ.

Preuve : le premier point se démontre formellement à l'aide de la formule de duplication de la fonction gamma ; le reste résulte de (23) ou du théorème 5.1.

Définition 6.1 : Supposons $\lambda > 0$, et soit A un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H_λ : rappelons que son symbole passif est la fonction $b \in L^2(\Pi, d\mu)$ définie par $b(Y) = 2\, \mathrm{Tr}(\sigma_Y^{(\lambda)} A)$. Nous appellerons vrai symbole de A la distribution f paire sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f = \mathcal{R}_\lambda^{*-1} TV\, b$: la formule (18) montre que $\mathcal{R}_\lambda^{*-1}$ est le produit de $(\lambda+1-Z)$ par un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 6.1 : l'application "vrai symbole" est, pour tout $\lambda > 1$, une isométrie de l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H_λ sur le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^2)$ constitué des fonctions paires invariantes par Σ_λ.

Preuve : supposons d'abord que l'opérateur de Hilbert-Schmidt A appartienne à l'espace engendré par les opérateurs de rang un $u \longmapsto (u, \varphi_R^{(\lambda)})\, \varphi_S^{(\lambda)}$: ceux-ci admettent des symboles actifs $a \in L^1(\Pi, d\mu)$, et nous avons rappelé dans la section 3 la relation $b = F_\lambda\, a$. La formule (15) montre que F_λ est une fonction paire de $(-y^2\Delta - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$: d'après le théorème 6.1, les opérateurs TV et $V^* T^*$ échangent donc F_λ et l'opérateur

$$2\pi\, \frac{\Gamma(\frac{\lambda+Z}{2})\ \Gamma(\frac{\lambda+1-Z}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+Z+1}{2})\ \Gamma(\frac{\lambda-Z}{2}+1)} = \mathcal{R}_\lambda^* \mathcal{R}_\lambda\,.$$

En désignant par $|||A|||$ la norme de Hilbert-Schmidt de A, on a

$$|||A|||^2 = \mathrm{Tr}(Q(a)Q(a)^*) = \mathrm{Tr}(Q(a)Q(\bar a)) = \int_\Pi a(Y)(F_\lambda \bar a)(Y)\, d\mu(Y) = (a, F_\lambda a)_{L^2(\Pi, d\mu)}$$

$$= (TV\, a,\ TV\, F_\lambda\, a)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (TV\, a, \mathcal{R}_\lambda^* \mathcal{R}_\lambda\, TV\, a)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\mathcal{R}_\lambda\, TV\, a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

On a par ailleurs

$$\mathcal{R}_\lambda TV\, a = \mathcal{R}_\lambda^{*-1}(\mathcal{R}_\lambda^* \mathcal{R}_\lambda) TV\, a = \mathcal{R}_\lambda^{*-1} TV\, F_\lambda a = \mathcal{R}_\lambda^{*-1}\, TV\, b.$$

Comme les opérateurs de rang un indiqués forment un système total dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt, il ne reste plus qu'à prouver la densité de l'image de l'application "vrai symbole", ce qui se fait en notant qu'un inverse de cette application est fourni, sur les fonctions paires sur $\mathbb{R}^2$ qui sont dans l'image du projecteur spectral E_ϵ , par la correspondance qui à f associe $Q(V^* T^* \mathcal{R}_\lambda^{-1} f)$.

Remarques et conclusion : comme tous les opérateurs intervenant ici sont réels (i.e. commutent avec la conjugaison complexe), on voit que l'on a $\mathrm{Tr}\, AB = \int_{\mathbb{R}^2} a(x)\, b(x)\, dx$ si A et B ont pour vrais symboles a et b. L'application "vrai symbole" est covariante à l'égard de la représentation de G dans H_λ rappelée dans la section 3 et de l'action habituelle de G sur les fonctions sur $\mathbb{R}^2$. La restriction $\lambda > 1$ est certainement trop forte et est liée aux méthodes employées dans [17]. Dans le présent papier, une identification convenable de $L^2(\mathbb{R})$ avec $H_{-\frac{1}{2}} \oplus H_{\frac{1}{2}}$ a joué le rôle fondamental. D'autres valeurs de λ peuvent intervenir naturellement : ainsi, l'étude des opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ qui commutent avec l'action du groupe de rotations SO(2) opérant sur les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ suggère comme il est bien connu (transformation de Fourier-Bessel) de décomposer $L^2(\mathbb{R}^2)$ à l'aide des espaces H_n (n entier ≥ 0).

La généralisation de [17] et du présent article au cas du groupe $Sp(n, \mathbb{R})$ n'est qu'ébauchée dans [16] : on peut s'attendre dans cette extension à un travail assez long, mais non nécessairement à de très grandes difficultés. Enfin, il serait intéressant de savoir si la théorie de la quantification, développée dans un cadre arithmétique approprié, est susceptible de compléter les méthodes de Lax et Phillips [11] en vue de l'étude de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans un domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{Z})$: nous n'avons encore dans cette direction que des résultats trop fragmentaires pour le dire.

André Unterberger
Département de Mathématiques
Université de Reims
Moulin de la Housse
B.P. 347
F 51062-Reims-Cedex

Bibliographie

[1] BEREZIN, F.A., Quantization, Izv. Akad. Nauk SSSR, 38 (1974), n° 5 ; Math. USSR Izvestija 8 (1974), n° 5, p. 1109-1165.

[2] BEREZIN, F.A., Quantization in Complex Symmetric Spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR 39 (1975), n° 2 ; Math. USSR Izvestija 9 (1975), n° 2, p. 341-379.

[3] EYMARD, P., Le noyau de Poisson et l'analyse harmonique non euclidienne, Conférences à l'Istituto Matematico Politecnico de Turin (Italie), 1982.

[4] GELFAND, I.M., GRAEV, M.I., PYATETSKII-SHAPIRO, I.I, Representation theory and automorphic functions, W. B. Saunders Co, 1969.

[5] HELGASON, S., Duality and Radon transform for symmetric spaces, Amer. J. Math. 85 (1963), p. 667-692.

[6] HELGASON, S. The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces, Ann. Math. 98 (1973), p. 451-479.

[7] HELGASON, S. Harmonic analysis on homogeneous spaces Proc. Symp. in Pure Math. 26 (1973), p. 101-146.

[8] LANG, S., SL(2, ℝ), Addison-Wesley, 1975.

[9] LAX, P.D. et PHILLIPS, R.S., Translation representation for the solution of the non-euclidean wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), n° 5, p. 617-667.

[10] LAX, P.D. et PHILLIPS, R.S., A local Paley-Wiener theorem for the Radon transform of L_2 functions in a non-euclidean setting, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), n° 4, p. 531-554.

[11] LAX, P.D. et PHILLIPS, R.S., Scattering theory for automorphic functions, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1976.

[12] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. et SONI R.P., Formulas and theorems for the special functions of Mathematical Physics, 3ème édition, Springer-Verlag, 1966.

[13] SCHWARTZ, L., Théorie des distributions, tome 2, Hermann (1959), Paris.

[14] UNTERBERGER, A., Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, Ann. Inst. Fourier 29 (1979), n° 3, p. 201-221.

[15] UNTERBERGER, A., Les opérateurs métadifférentiels, Lecture Notes in Physics 126 (1980), p. 205-241.

[16] UNTERBERGER, A. Quantification de certains espaces hermitiens symétriques, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, exposé 16, Ecole Polytechnique.

[17] UNTERBERGER, A. et J. La série discrète de SL(2, ℝ) et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite. Note CRAS, t. 67, séance du 21 février 1983 ; également article à paraître sous le même titre.