Astérisque

YVES MEYER

Le lemme de Cotlar et Stein et la continuité L^2 des opérateurs définis par des intégrales singulières

Astérisque, tome 131 (1985), p. 115-125

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__115_0>

Le lemme de Cotlar et Stein
et la continuité L^2 des opérateurs
définis par des intégrales singulières

Yves MEYER

Soit, avec les notations usuelles, $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu. Un théorème célèbre de L. Schwartz nous apprend qu'il existe une distribution unique $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, appelée le noyau-distribution de T et telle que $\langle Tf, g\rangle = \langle K, f\otimes g\rangle$. Nous avons noté $\langle .,.\rangle$ la forme bilinéaire de dualité entre distributions et fonctions de test.

Un problème fondamental est la recherche de conditions nécessaires et suffisantes portant sur le noyau-distribution $K(x,y)$ de T et entraînant la continuité L^2 de T : c'est à dire l'existence d'une constante $C \geq 0$ telle que $\|T(f)\|_2 \leq C \|f\|_2$, en posant $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

Cette question est beaucoup trop vaste pour recevoir une réponse satisfaisante autre que tautologique. Nous allons structurer ce problème en introduisant des conditions supplémentaires, définies par A.P. Calderón et A. Zygmund, et portant sur la nature de la singularité de $K(x,y)$ au voisinage de la diagonale Δ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} ; y = x\}$ et $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} ; y \neq x\}$ est l'ouvert complémentaire. La condition de Calderón-Zygmund décrit la restriction à Ω de la distribution $K(x,y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$:

(*) <u>il existe un exposant</u> $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$ <u>et une constante</u> $C \geq 0$ <u>tels que la restriction à</u> Ω <u>de la distribution</u> $K(x,y)$ <u>soit une fonction continue vérifiant les propriétés</u> (1), (2) <u>et</u> (3) <u>suivantes</u>

(1) $$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n} \quad \text{pour tout } (x,y) \in \Omega$$

(2) $$|K(x',y) - K(x,y)| \leq C|x-x'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon}$$ <u>pour tout</u> $(x,y) \in \Omega$ <u>et tout</u> x' <u>tel que</u> $|x-x'| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

(3) $$|K(x,y)-K(x,y')| \leq C|y-y'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon}$$ <u>pour tout</u> $(x,y) \in \Omega$ <u>et tout</u> y' tel que $|y-y'| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

Définition 1 . Un opérateur linéaire continu $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund si le noyau-distribution $K(x,y)$ de T vérifie $(*)$ et si T est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Avant de poursuivre la discussion, donnons des exemples d'opérateurs de Calderón-Zygmund.

Soit $\sigma(x,\xi) \in S^o_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un symbole vérifiant $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$. L'opérateur pseudo-différentiel correspondant $\sigma(x,D) = T$ est défini par $T(e^{i\xi.x}) = \sigma(x,\xi)e^{i\xi.x}$. Alors T est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Un second exemple est celui des opérateurs para-différentiels de J.M. Bony. Rappelons que ces opérateurs sont définis à l'aide de symboles $\sigma(x,\xi) \in S^o_{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire vérifiant $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$ et ayant la propriété supplémentaire suivante : il existe une constante $r \ge 0$, $r < 1$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier de la fonction $x \longmapsto \sigma(x,\xi)$ soit portée par la boule $|\eta| \le r\,|\xi|$. Ceci, en appelant η la variable duale de x .

Un troisième exemple, dû à A.P. Calderón, se situe "au-delà des opérateurs pseudo-différentiels". On désigne par $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne : $|A(t)-A(s)| \le C|t-s|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $s \in \mathbb{R}$ et, si $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose $K(x,y) = F(\frac{A(x)-A(y)}{x-y})\frac{1}{x-y}$ si $x \ne y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Ce noyau est impair et vérifie (1), (2) et (3) avec $\varepsilon = 1$. Il permet de définir la distribution v.p.$K(x,y)$ par le procédé usuel et un opérateur $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$. La continuité de T sur $L^2(\mathbb{R})$ est aujourd'hui établie après plus de quinze ans d'efforts ([3]).

Les opérateurs de Calderón et les nouveaux opérateurs que nous allons construire remplacent les opérateurs pseudo-différentiels classiques lorsque l'absence de régularité ne permet pas d'utiliser ces derniers ([10]).

L'importance des opérateurs de Calderón-Zygmund vient de ce que les méthodes de variable réelle de A.P. Calderón, A. Zygmund et de leurs élèves peuvent être appliquées et conduisent aux estimations $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$.

Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par T_ε l'opérateur dont le noyau-distribution est $K_\varepsilon(x,y) = K(x,y)\,\mathbb{1}_{\{|x-y| \ge \varepsilon\}}$ et l'on pose $T_*f(x) = \sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|$.

Alors, si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, $T_* : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ est borné lorsque $1 < p < \infty$. Les cas limites $p = 1$ ou $p = +\infty$ donnent lieu aux deux résultats suivants : T_* est continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans L^1-faible, T est continu de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ de Stein et Weiss (défini ci-dessous) dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et, de même, T

est continu de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$.

La continuité L^2 des opérateurs continus $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dont le noyau vérifie (*) est restée, jusqu'aujourd'hui, une propriété mystérieuse.

Pour étudier ce dernier problème, M. Cotlar et E.M. Stein ont inventé le lemme de "presque-orthogonalité" suivant (souvent appelé lemme de Cotlar).

1. Le lemme de Cotlar

lemme 1. Soient H un espace de Hilbert, $T_j : H \longrightarrow H$ des opérateurs linéaires continus indexés par $j \in \mathbb{Z}$, T_j^* leurs adjoints et $\omega : \mathbb{Z} \longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on ait

$$\|T_j^* T_k\| \leq \omega(j-k) \text{ et } \|T_j T_k^*\| \leq \omega(j-k).$$

Supposons que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\omega(j)} = \sigma < +\infty$. Alors, pour tout entier $m \geq 1$, on a $\|\sum_{-m}^{m} T_j\| \leq \sigma$.

Pour le voir, on appelle S la somme $\sum_{-m}^{m} T_j$ et l'on a $\|S\|^2 = \|S^*S\|$ puis, pour tout entier $N \geq 1$, $\|S\|^{2N} = \|(S^*S)^N\| \leq \sum_{j_1}\sum_{k_1}\ldots\sum_{j_N}\sum_{k_N}\|T_{j_1}^* T_{k_1}\ldots T_{j_N}^* T_{k_N}\|$.

En groupant les termes de deux en deux en paires (j_q,k_q), on majore cette norme par $\omega(j_1-k_1)\omega(j_2-k_2)\ldots\omega(j_N-k_N)$. En groupant les termes de deux en deux en paires (k_q,j_{q+1}), on majore la même norme par $\sqrt{\omega(0)}\ \omega(k_1-j_2)\ldots\omega(k_{N-1}-j_N)\sqrt{\omega(0)}$

La moyenne géométrique entre ces deux estimations donne $\sqrt{\omega(0)}\sqrt{\omega(j_1-k_1)}\sqrt{\omega(k_1-j_2)}\ldots\sqrt{\omega(j_N-k_N)}$. En sommant par rapport à k_N, puis $j_N,\ldots$ puis k_1, on obtient σ^{2N-1}. Il reste à sommer cette estimation par rapport à j_1 : on obtient $(2m+1)\sqrt{\omega(0)}\ \sigma^{2N-1}$ dont la racine $2N$-ième tend vers σ lorsque m étant fixé, N tend vers l'infini.

Citons Charles Fefferman ([8]) "When neither the Plancherel theorem nor Cotlar's lemma applies, L^2-boundedness of singular operators presents very hard problems, each of which must (so far) be dealt with on its own terms......Both Carleson's convergence theorem and the Calderón-Coifman-Meyer results are stated purely in terms of L^2, but, at least as far as we know today, purely L^2 methods are not strong enough for the proofs...In any event, our understanding of L^2 boundedness of variable-coefficient operators is still rudimentary".

2 . Le théorème de Guy David et Jean-Lin Journé.

David et Journé viennent de résoudre complètement le problème, suggéré dans les quelques lignes de C. Fefferman que nous venons de citer, de déterminer les noyaux-distribution $K(x,y)$ des opérateurs de Calderón-Zygmund. C'est-à-dire que ces auteurs ont découvert la condition nécessaire et suffisante (**) entraînant la continuité L^2 d'un opérateur $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dont le noyau-distribution $K(x,y)$ vérifie (*).

De plus et, contrairement à ce que pensait C. Fefferman, ceci peut se faire en utilisant la voie royale : le lemme de Cotlar.
Par ailleurs, comme l'écrivait C. Fefferman, le problème de la continuité L^2 des opérateurs intégraux singuliers (c'est-à-dire des opérateurs dont le noyau vérifie (*)) nous force à sortir de l'espace L^2 et à introduire l'espace BMO de John et Nirenberg.
Rappelons qu'une(classe de) fonction $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $BMO(\mathbb{R}^n)$ si b est localement intégrable et s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^n$, de volume $|B| > 0$, il existe une constante $\gamma(B)$ telle que
$\frac{1}{|B|}\int_B |b(x)-\gamma(B)|dx \leq C$.
Le rôle joué par BMO dans l'étude des opérateurs de Calderón-Zygmund est expliqué par le théorème suivant de Fefferman et Stein : tout opérateur de Calderón-Zygmund T est continu de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$. Désignons par 1 la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^n$. Si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, $T(1)$ appartient donc à $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution vérifie la propriété (*). Alors $T(1)$ peut être canoniquement définie comme une forme linéaire continue sur le sous-espace $\mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de test φ telles que $\int \varphi(x)dx = 0$.

En effet soit $\varphi \in \mathcal{D}_o$ et $1 = \alpha + \beta$ où $\alpha \in \mathcal{D}$ et $\alpha = 1$ au voisinage du support de φ. Alors $< T(\alpha),\varphi >$ a un sens par hypothèse. Pour définir $< T(\beta),\varphi >$ on appelle $T^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ le transposé de T : $< T^* u,v > = < u,Tv >$ si u et v appartiennent à $\mathcal{D}$. Alors on observe que la distribution $T^*(\varphi)$, restreinte au complémentaire du support de φ, est en fait une fonction continue et $O(|x|^{-n-\varepsilon})$ à l'infini.
L'intégrale $< \beta,T^*(\varphi) > = \int\beta(x)(T^*\varphi)(x)dx$ est donc absolument convergente.
Rappelons maintenant la définition de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ de Stein et Weiss. Un atome $a(x)$ est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dont le support est contenu dans une boule B, de volume $|B|$, telle que $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{|B|}$ et d'intégrale nulle.
L'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ est par définition le sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ défini comme l'ensemble des fonctions $f(x)$ admettant (au moins) une décomposition

$f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k a_k(x)$ où les $a_k(x)$ sont des atomes et $\sum_0^\infty |\lambda_k| < +\infty$. La norme de f dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_0^\infty |\lambda_k|$ correspondantes.

Un théorème célèbre de Fefferman et Stein est que cet espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ est également l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \le j \le n$. Les transformations de Riesz R_j sont $D_j(-\Delta)^{-1/2}$ où $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ et où Δ est le Laplacien usuel.

Enfin $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense.

Quelques autres notations sont nécessaires à l'énoncé du théorème 1 . Nous désignons par G le groupe des isomorphismes de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de la forme $(g\varphi)(x) = \varphi(\frac{x-u}{\delta})$, $\delta > 0$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2. <u>Une application linéaire continue</u> $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>est d'ordre 0 si pour toute partie bornée</u> $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, <u>il existe une constante</u> $C(\mathcal{B})$ <u>telle que pour tout</u> $g \in G$ <u>défini à l'aide du couple</u> (u,δ), <u>toute fonction</u> $\varphi_1 \in \mathcal{B}$ <u>et toute fonction</u> $\varphi_2 \in \mathcal{B}$, <u>on ait</u>

$$|\langle T(g\varphi_1), g\varphi_2 \rangle| \le C\delta^n . \tag{4}$$

On vérifie sans peine que l'existence d'une constante $C \ge 0$ telle que $\|T(e^{i\xi.x})\|_\infty \le C$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ entraîne que T est d'ordre 0 . Un opérateur d'ordre 0 n'est pas nécessairement continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ mais tout opérateur continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est automatiquement d'ordre 0 . Enfin il existe des opérateurs de Calderón-Zygmund (donc des opérateurs d'ordre 0) tels que $T(1)$ n'appartienne pas à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dans l'énoncé qui suit, $T^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le transposé de T : le noyau distribution de T^* est $K^*(x,y) = K(y,x)$ si $K(x,y)$ est le noyau-distribution de T .

Théorème 1 (David et Journé, Janvier 1983).

<u>Soit</u> $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution</u> $K(x,y)$ <u>vérifie</u> (*). <u>Alors les propriétés</u> (5) <u>et</u> (**) <u>sont équivalentes</u>

$$T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \ \underline{\text{est continu}} \tag{5}$$

$$(**)\quad \begin{cases} T(1) \in BMO(\mathbb{R}^n) \\ T^*(1) \in BMO(\mathbb{R}^n) \\ T \ \underline{\text{est d'ordre}}\ 0 \end{cases}$$

Il peut sembler lamentable que la condition (**) comporte trois propriétés. Nous allons, dans la preuve du théorème 1 donnée au paragraphe suivant, vérifier que ces trois conditions sont indépendantes : deux parmi ces trois n'entraînent pas la troisième. Nous montrerons également que les deux fonctions $\beta = T(1)$ et $\gamma = T^*(1)$ sont en fait deux fonctions arbitraires de $BMO(\mathbb{R}^n)$. Cette affirmation, qui sera prouvée, est d'ailleurs le point de départ de la preuve du théorème 1 . Il existe, en effet, pour tout couple $(\beta,\gamma) \in BMO(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$, un opérateur de Calderón-Zygmund $L_{(\beta,\gamma)}$ tel que $L_{(\beta,\gamma)}(1) = \beta$, $L^*_{(\beta,\gamma)}(1) = \gamma$.

Une fois $L_{(\beta,\gamma)}$ construit, le lemme de Cotlar s'appliquera à la différence $T-L_{(\beta,\gamma)}$.

3. Le schéma de la preuve du théorème 1.

L'idée de base est de créer de <u>nouveaux produits entre fonctions</u> permettant, par exemple, de multiplier une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ par une fonction de $BMO(\mathbb{R}^n)$ et d'obtenir encore une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$. La multiplication usuelle ne convient pas mais une des formes de la "para-multiplication" de J.M. Bony fournit l'opération désirée.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ vaut 1 sur la boule $|\xi| \le 1$ et 0 hors de la boule $|\xi| \le 2$. Posons, si $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_k(x) = 2^{kn}\varphi(2^k x)$ et soit $S_k : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de convolution avec φ_k . On pose $\Delta_k = S_{k+1} - S_k$. Alors le "paraproduit" $\pi(u,v)$ entre deux fonctions $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$\pi(u,v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{k-3}(u)\,\Delta_k(v) \ . \tag{6}$$

Cette opération possède les propriétés suivantes

$$\|\pi(u,v)\|_2 \le C\|u\|_2\|v\|_{BMO} \tag{7}$$

(8) si $v \in BMO$ est fixée, l'opérateur $T_v : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par $T_v(f) = \pi(f,v)$ est un opérateur de Calderón-Zygmund

$$\pi(1,v) = v \ . \tag{9}$$

Pour démontrer le théorème 1, on pose $\beta = T(1)$ et $\gamma = T^*(1)$. On forme alors

$L_{(\beta,\gamma)} = \pi(.,\beta) + (\pi(\gamma,.))^*$. Cet opérateur $L_{(\beta,\gamma)}$ est une copie-conforme de T car $L_{(\beta,\gamma)}(1) = \beta$, $(L_{(\beta,\gamma)})^*(1) = \gamma$ et $L_{(\beta,\gamma)}$ est un opérateur de Calderón-Zygmund.
On désigne par R la différence $T - L_{(\beta,\gamma)}$.
Nous savons que $R(1) = R^*(1) = 0$ et que le noyau-distribution $R(x,y)$ de R vérifie (*). Nous devons prouver la continuité de l'opérateur R sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Elle résulte du lemme de Cotlar. On décompose en effet R en

(10) $$R = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_k R \Delta_k + \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k RS_k + \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k R \Delta_k .$$

Il est alors remarquable que le lemme de Cotlar s'applique à chacune des trois séries du membre de droite de (10).

Pour formuler géométriquement ce que nous venons de faire, désignons par E l'espace vectoriel des opérateurs de Calderón-Zygmund et par $A \subset E$ le sous-espace des opérateurs $T \in E$ tels que $T(1) = T^*(1) = 0$.
Une belle observation de Pierre-Gilles Lemarié est que E n'est pas une algèbre mais que A en est une. C'est d'ailleurs une des raisons pour laquelle le lemme de Cotlar s'applique à l'algèbre (auto-adjointe) A . Finalement la démonstration précédente consiste à construire l'isomorphisme

(11) $$\boxed{E \simeq A \oplus BMO(\mathbb{R}^n) \oplus BMO(\mathbb{R}^n)}$$

décrivant explicitement la structure des opérateurs de Calderón-Zygmund.

4. Applications du théorème 1.

A la lumière du théorème 1, les recherches que R. Coifman et moi avons menées depuis 1974 paraissent singulièrement maladroites et naïves. Revenons aux noyaux $L_k(x,y) = (A(x)-A(y))^k(x-y)^{-k-1}$, définis sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ à l'aide d'une fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Ces noyaux, introduits par A.P. Calderón sont antisymétriques et vérifient (*). Les noyaux-distribution correspondants v.p. $L_k(x,y)$ définissent des opérateurs $\mathcal{L}_k : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La continuité L^2 de $\mathcal{L}_k$ est immédiate en utilisant le théorème 1 . En effet $\mathcal{L}_0$ est la transformation de Hilbert. Si $\mathcal{L}_k$ est continu alors la continuité de $\mathcal{L}_{k+1}$ s'obtiendra en montrant que $\mathcal{L}_{k+1}(1) \in BMO$. En effet tout noyau antisymétrique vérifiant (*) conduit à un opérateur d'ordre 0 .
Finalement $\mathcal{L}_{k+1}(1) = \mathcal{L}_k(A') \in BMO$ d'après l'hypothèse de récurrence et le théorème de Fefferman-Stein.
Donc tous les $\mathcal{L}_k$ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ et ce raisonnement conduit à l'estimation $\|\mathcal{L}_k\| \le C^k\|A'\|_\infty^k$ où $C > 1$ est une constante absolue. En fait nous savons aujourd'hui

([4]) que $\|\mathcal{L}_k\| \le C_o(1+k)^4\|A'\|_\infty^k$

Nous allons utiliser le théorème 1 pour construire de nouvelles actions holomorphes, commutant avec les translations et les dilatations, de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dans tout ce qui suit $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ prennent des valeurs réelles ou complexes. Désignons par $\mathcal{A} = \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus, munie de la topologie forte des opérateurs (que nous noterons $\mathcal{C}$). Rappelons qu'une suite $T_j \in \mathcal{A}$ converge au sens de $\mathcal{C}$ si, pour toute fonction $f \in L^2$, $T_j(f)$ converge dans L^2 (pour la norme). Appelons G le groupe des isomorphismes g : $L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ de la forme $(g\varphi)(x) = \varphi(\frac{x-u}{\delta})$, $\varphi \in L^2$, et $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes intérieurs associés de $\mathcal{A}$, de la forme $T \longmapsto g\,Tg^{-1}$, $g \in G$. Désignons par $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ la sous-algèbre des opérateurs de multiplication ponctuelle par les fonctions mesurables et bornées $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Les nouveaux opérateurs que nous allons construire sont définis par le programme suivant. Soit $r > 0$, $\Gamma_r \subset \mathcal{B}$ la boule $\|b\|_\infty \le r$ munie de la topologie $\mathcal{C}$. On cherche à analyser puis à synthétiser les applications $F : \Gamma_r \longmapsto \mathcal{A}$, continues lorsque Γ_r et $\mathcal{A}$ sont munies de la topologie $\mathcal{C}$, holomorphes et commutant avec l'action de $\mathcal{G}$.
On observe que, si T est l'opérateur de multiplication ponctuelle par $b \in L^\infty$, alors $g\,Tg^{-1}$ est l'opérateur de multiplication ponctuelle par gb . La dernière condition sur F s'écrit $F(gb) = gF(b)g^{-1}$; ou encore $F(gb)[gf] = gF(b)[f]$, en notant $F(b)[f]$ l'action de $F(b)$ sur $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Ces actions holomorphes s'analysent à l'aide d'opérateurs multilinéaires

(12) $$T_k : L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times L^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{A}$$

commutant avec l'action de $\mathcal{G}$ et continues pour la topologie forte des opérateurs.

Nos actions holomorphes s' écrivent finalement

(13) $$F(b) = \sum_0^\infty T_k(b,\ldots,b)$$

pour un choix convenable d'opérateurs multilinéaires T_k . Le drame est que notre savoir s'arrête là. Nous ne savons pas synthétiser les T_k .
La seule chose dont nous soyons capables à l'heure actuelle est de donner des exemples de tels opérateurs multilinéaires. Ces exemples sont tous construits à l'aide du théorème 1 . Voici la recette. On appelle $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction d'intégrale nulle, telle que $|\psi(x)| \le C|x|^{-n+1}$ si $|x| \le 1$ et $|\psi(x)| \le C_m|x|^{-m}$ pour tout entier $m \ge 1$ et tout $|x| \ge 1$. On suppose les conditions analogues sur $\nabla\psi$: $|\nabla\psi(x)| \le C|x|^{-n}$ sur la boule unité et $|\nabla\psi(x)| \le C_m|x|^{-m}$ sur le complémentaire. On pose

$\psi_t(x) = t^{-n}\,\psi(x/t)$ et l'on appelle $Q_t : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de convolution avec ψ_t .

Soit $\sigma(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction nulle en 0 et admettant à l'infini un développement asymptotique en symboles homogènes

$$(14) \qquad \sigma(\xi) \sim \sigma_o(\xi) + \sigma_{-1}(\xi) + \sigma_{-2}(\xi) + \dots$$

On désigne, pour tout $t > 0$, par $S_t : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur dont le symbole est $\sigma(t\xi)$ et par S_∞ l'opérateur de symbole $\sigma_o(\xi)$.

Si $b_1,\dots,b_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si $B_1,\dots,B_k : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ sont les opérateurs de multiplication ponctuelle correspondants on forme

$$(15) \qquad T_k(b_1,\dots,b_k) = \int_0^\infty Q_t\, B_1\, S_t \dots B_k\, S_t \,\frac{dt}{t} \quad .$$

Pour étudier T_k on appelle Γ_t l'opérateur de symbole $\exp(-t^2|\xi|^2)$ et $\tilde{T}_k(b_1,\dots,b_k)$ l'opérateur défini par (15) lorsque le dernier S_t est remplacé par Γ_t . Pour relier T_k à $\tilde{T}_k$, on appelle $\tilde{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction ayant les mêmes propriétés que ψ et $\tilde{Q}_t$ l'opérateur associé par la règle définissant Q_t . Si $L_t \in \mathcal{A}$, $\|L_t\| \le 1$ et si L_t dépend mesurablement de t , alors $\int_0^\infty Q_t\, L_t\, \tilde{Q}_t \,\frac{dt}{t}$ appartient à $\mathcal{A}$. Cette observation banale résulte de l'inégalité $\int_0^\infty \|Q_t f\|_2^2 \,\frac{dt}{t} \le C\, \|f\|_2^2$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Alors $T_k + \tilde{T}_k\, S_\infty = \int_0^\infty Q_t\, L_t\, \tilde{Q}_t \,\frac{dt}{t} + T_{k-1}\, B_k\, S_\infty$ avec $L_t = B_1\, S_t \dots B_k$. Cette remarque ramène l'étude de T_k à celle de T_{k-1} et de $\tilde{T}_k$.

On utilise alors le théorème suivant

Théorème 2 (Journé, Mars 1983).

<u>L'opérateur $\tilde{T}_k$ est un opérateur de Calderón-Zygmund et</u> $\|\tilde{T}_k\| \le C^k \| b_1\|_\infty \dots \| b_k\|_\infty$ <u>où</u> $C = C(n,\psi,\sigma)$. <u>De plus le noyau-distribution</u> $T_k(x,y)$ <u>de</u> T_k <u>vérifie</u>

$$(16) \qquad \int_{|x-y|\ge 2|x-x'|} |T_k(x',y) - T_k(x,y)|\,dy \le C_o^k \|b_1\|_\infty \dots \|b_k\|_\infty \quad .$$

Dans cet énoncé, tout ce qui touche aux noyaux se vérifie directement (sans récurrence). La continuité de $\tilde{T}_k$ et de T_k sur L^2 s'obtient alors à l'aide du théorème 1 , par récurrence sur k . L'opérateur $\tilde{T}_o$ est, par définition $\int_0^\infty Q_t \,\frac{dt}{t}$; c'est un opérateur de convolution dont le symbole $\int_0^\infty \hat{\psi}(t\xi) \,\frac{dt}{t}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On a ensuite à calculer $\widetilde{T}_k(1) = T_{k-1}(b_k)$. La continuité de T_{k-1} sur L^2 fait partie de l'hypothèse de récurrence. Le théorème de Fefferman et Stein ([8]) utilise seulement la continuité de T_{k-1} sur L^2 et (16) pour T_{k-1}. On conclut que $T_{k-1}(b_k) \in BMO$. On a $(T_k)^*(1) = 0$ et la propriété d'ordre 0 de $\widetilde{T}_k$ est immédiate. Les détails se trouvent dans [9]. Les applications du théorème 2 à la conjecture de Kato et aux équations aux dérivées partielles ont été principalement développées par E. Fabes, D. Jerison, C. Kenig et leurs élèves [6], [7] et [10] .

Y.MEYER
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau cedex
France

[1] A.P. Calderón, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, Proc.I.C.M. Helsinki 1978, Vol.1, 84-96.

[2] R. Coifman et Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudo-differentiels, Astérisque 57, Société Mathématique de France (1978).

[3] R. Coifman, G. David et Y. Meyer, La solution des conjectures de Calderón, à paraître aux Advances in Mathematics.

[4] R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer, L'intégrale de Cauchy sur les courbes Lipschitziennes, Annals of mathematics, 116 (1982) 361-387.

[5] G. David et J.L. Journé, Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Note aux C.R.A.S. Paris, à paraître.

[6] E. Fabes, D. Jerison et C. Kenig, Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations, Proc.NAS 79 (1982) 5746-5750.

[7] E. Fabes, D. Jerison et C. Kenig, "Necessary and sufficient conditions for absolute continuity of elliptic harmonic measure", à paraître aux Annals of Mathematics.

[8] C. Fefferman, Recent progress in classical Fourier analysis, ICM Vancouver (1974), Vol 1, 95-118.

[9] Y. Meyer, Lemme de Cotlar, opérateurs définis par des intégrales singulières et applications aux équations aux dérivées partielles, à paraître aux publications de l'Université Autonome de Madrid.

[10] G. Verchota, Layer potentials and Toundary value problems for Laplace's equation on Lipschitz domains, Thesis, University of Minnesota, Minneapolis.