Astérisque

G. LAUMON

Transformations canoniques et spécialisation pour les $\mathcal{D}$-modules filtrés

Astérisque, tome 130 (1985), p. 56-129

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__56_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRANSFORMATIONS CANONIQUES ET SPÉCIALISATION POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES FILTRÉS

G. Laumon(*)

0. Introduction.

Ce travail est le résultat de mes efforts pour comprendre certains travaux de Brylinski, Kashiwara, Laurent,... En tant que tel, il ne présente pas de résultats nouveaux.

Je me place résolument dans le cadre algébrique et j'essaie dans la mesure du possible de rendre plus "naturelles" un certain nombre de constructions : transformations canoniques à la Brylinski, spécialisation d'un $\mathcal{D}$-Module, microlocalisation et deuxième microlocalisation (il s'agit là, bien entendu, d'un point de vue personnel).

Le plan de cet exposé est le suivant.

Au numéro 2, je rappelle et complète les résultats de finitude "non caractéristiques" pour les $\mathcal{D}$-Modules filtrés.

Le numéro 3 est consacré au résultat de Brylinski pour les transformations canoniques d'origine géométrique.

Au numéro 4, j'explicite les liens "bien connus" entre déformation au cône normal le long d'une sous-variété et filtration de l'Anneau $\mathcal{D}$ par l'ordre d'annulation le long de cette sous-variété.

Les résultats du numéro 4 rendent "naturelle" la notion de déformation au cône normal le long d'une sous-variété d'un $\mathcal{D}$-Module filtré ; c'est ce que j'explique au numéro 5.

Au numéro 6, je présente ma façon de voir la deuxième microlocalisation de Laurent, tout au moins sa partie algébrique.

(*) Equipe de recherche associée au CNRS n° 653

Les numéros 7 et 8 font le lien avec le point de vue local qui précède et le point de vue microlocal, en particulier, pour ce qui concerne la définition de l'ordre d'une section d'un $\mathcal{D}$-Module holonome le long d'une sous-variété.

Dans le numéro 9, j'indique un certain nombre de questions que, soit par manque de courage soit surtout par manque de compréhension, je n'ai pas abordées.

Dans un appendice, je donne une construction algébrique des opérateurs microdifférentiels formels ; cette construction est due essentiellement à Gabber.

Je tiens à remercier tout particulièrement Ofer Gabber, Luc Illusie et Yves Laurent qui m'ont aidé à corriger certaines erreurs et à surmonter un bon nombre d'obstacles. Je remercie aussi très chaleureusement Madame Bonnardel pour la frappe du manuscrit.

1. Notations.

On désigne par k un corps de caractéristique zéro ; le mot "variété" signifiera toujours "k-schéma séparé, de type fini et lisse" et un morphisme (de variétés) sera toujours un k-morphisme séparé.

Pour toute variété X, on notera $d_X : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction localement constante dimension de X/k, $\omega_X = \Omega^{d_X}_{X/k}$ le $\mathcal{O}_X$-Module inversible dualisant de X/k, $\mathcal{T}_X$ le $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang d_X des champs de vecteurs sur X (dual de $\Omega^1_{X/k}$) et

$$\pi_X : T^*X = \mathbb{V}(\mathcal{T}_X) \longrightarrow X$$

le fibré cotangent de X/k.

A tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, on associera le diagramme usuel de "l'application cotangente"

$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[rr, bend left, "\pi_X"] & T^*Y \times_Y X \arrow[l, "F"'] \arrow[r, "\pi_f"'] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & T^*Y \arrow[r, "\pi_Y"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

(F est l'application cotangente à f, le carré est cartésien et

$$T^*Y \times_Y X = \mathbb{V}(f^*\mathcal{T}_Y) \xrightarrow{\pi_f} X) \ ;$$

on notera en outre $d_f = d_X - d_Y \circ f$ la fonction localement constante dimension relative de X sur Y et $\omega_{X/Y} = f^{-1}(\omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \omega_X$ le $\mathcal{O}_X$-Module inversible dualisant relatif de f.

Pour toute variété X, on notera $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i})$ l'Anneau des opérateurs différentiels linéaires sur X relativement à k, muni de sa filtration canonique par l'ordre des opérateurs ; on a

$$(\pi_X)_* \mathcal{O}_{T^*X} = \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_X \ ;$$

on se reportera à [19] 4 pour la définition des catégories $MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, $AF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, $D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, $MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, $AF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, $D^bF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ et des foncteurs "oubli de la filtration" et $\widetilde{\mathrm{gr}}$.

2. Images inverses et directes d'un complexe de $\mathcal{D}$-Modules filtrés par un morphisme de variétés.

A tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, Kashiwara (cf. [11]4, [12]4) associe un $(\mathcal{D}_X, f^{-1}\mathcal{D}_Y)$-bi-Module

$$\mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$$

et un $(f^{-1}\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X)$-bi-Module

$$\mathcal{D}_{Y \longleftarrow X} = f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \omega_X$$

et des foncteurs "image inverse"

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} \sqcup f^* &: D(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D(\mathcal{D}_X) \\ \sqcup f^* \mathcal{N}^\cdot &= \mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} \overset{\sqcup}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{N}^\cdot \end{aligned}$$

et "image directe"

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} \int_f &: D(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D(\mathcal{D}_Y) \\ \int_f \mathcal{M}^\cdot &= \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_{Y \longleftarrow X} \overset{\sqcup}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\cdot) \ . \end{aligned}$$

Ces deux foncteurs admettent une variante filtrée (cf. [19]5 pour $\int_f$; pour $\sqcup f^*$, on procède de la même façon, en filtrant successivement les foncteurs f^{-1} et $\mathcal{D}_{X \longrightarrow Y} \overset{\sqcup}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} (-)$).

Plus précisément, on a les résultats suivants :

Construction 2.3.1. Pour tout morphisme de variétés $f : X \longrightarrow Y$, il existe un foncteur

$$\sqcup f^* : D^b F_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D^b F_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$$

tel que les carrés de foncteurs ci-dessous "commutent" (1) :

$$\begin{array}{ccc} D^b F_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) & \xrightarrow{\sqcup f^*} & D^b F_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) & \xrightarrow{\sqcup f^*} & D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \end{array}$$

(1) i.e. commute à un isomorphisme canonique près.

où les flèches verticales sont des flèches d'oubli de la filtration, et

$$\begin{array}{ccc} D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) & \xrightarrow{\mu f^*} & D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \\ \widetilde{gr}\downarrow & & \downarrow\widetilde{gr} \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*Y}) & \xrightarrow{F_*\mu\bar{f}^*} & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X}) \end{array} .$$

De plus, pour tout morphisme $g : Y \longrightarrow Z$, on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\mu(g\circ f)^* \simeq \mu f^* \circ \mu g^* : D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Z) \longrightarrow D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$$

avec la condition de cocycle usuelle.

Construction 2.3.2. Pour tout morphisme de variétés $f : X \longrightarrow Y$, il existe un foncteur

$$\int_f : D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$$

tel que les carrés de foncteurs ci-dessous "commutent" (1) :

$$\begin{array}{ccc} D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{\int f} & D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{\int f} & D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches d'oubli de la filtration, et

$$\begin{array}{ccc} D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{\int f} & D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \\ \widetilde{gr}\downarrow & & \downarrow\widetilde{gr} \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X}) & \xrightarrow{R\bar{f}_*(F^*(-)\otimes_{\mathcal{O}_{T^*Y\times_Y X}}\pi_f^*\omega_{X/Y})} & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*Y}) \end{array} .$$

De plus, pour tout morphisme $g : Y \longrightarrow Z$, on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\int_{g\circ f} \simeq \int_g \circ \int_f : D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Z)$$

avec la condition de cocycle usuelle.

Compte-tenu de [19] (4.4.3) et des théorèmes de finitude pour les $\mathcal{O}$-Modules, on obtient alors les énoncés de finitude pour les $\mathcal{D}$-Modules filtrés :

<u>Proposition</u> 2.4.1. <u>Pour tout morphisme</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>et pour tout</u> $(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot) \in \text{ob } D^b F_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ <u>tels que</u>

$$F|\bar{f}^{-1}(\text{Supp } \widetilde{gr}\, \mathcal{N}^\cdot) \quad (2)$$

<u>soit propre</u> (i.e. <u>fini ici puisque</u> F <u>est affine</u>), <u>on a</u>

$$\mathbb{L} f^*(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot) \in \text{ob } D^b F_{parf}(\mathcal{D}_X) \ .$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> f <u>est lisse</u>, $\mathbb{L} f^*$ <u>envoie</u> $D^b F_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ <u>dans</u> $D^b F_{parf}(\mathcal{D}_X)$.

<u>Proposition</u> 2.4.2. <u>Pour tout morphisme</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>et pour tout</u> $(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \in \text{ob } D^b F_{parf}(\mathcal{D}_X)$ <u>tels que</u>

$$\bar{f}|F^{-1}(\text{Supp } \widetilde{gr}\, \mathcal{M}^\cdot) \quad (2)$$

<u>soit propre</u>, <u>on a</u>

$$\int_f (\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{M}_i^\cdot) \in \text{ob } D^b F_{parf}(\mathcal{D}_Y) \ .$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> f <u>est propre</u>, $\int_f$ <u>envoie</u> $D^b F_{parf}(\mathcal{D}_X)$ <u>dans</u> $D^b F_{parf}(\mathcal{D}_Y)$.

Compte-tenu de [19] 5.7.2 et [19] (4.4.4), ces propositions impliquent les énoncés de finitude de Kashiwara pour les $\mathcal{D}$-Modules :

<u>Corollaire</u> 2.5.1. <u>Pour tout morphisme</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>et pour tout</u> $\mathcal{N} \in \text{ob } D^b_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ <u>tels que</u>

$$F|\bar{f}^{-1}(|\text{Car } \mathcal{N}^\cdot|) \quad (3)$$

<u>soit propre</u> (i.e. <u>fini ici puisque</u> F <u>est affine</u>), <u>on a</u>

$$\mathbb{L} f^* \mathcal{N}^\cdot \in \text{ob } D^b_{parf}(\mathcal{D}_X)$$

<u>et</u>

$$|\text{Car } \mathbb{L} f^* \mathcal{N}^\cdot| \subset F(\bar{f}^{-1}(|\text{Car } \mathcal{N}^\cdot|)) \quad (3)$$

---

(2) Par définition, le support d'un objet de $D^b_{parf}(\mathcal{O}_T)$, pour un schéma T, est la réunion des supports de ses faisceaux de cohomologie.

<u>En particulier</u>, <u>si</u> f <u>est lisse</u>, $\mathbb{L}f^*$ <u>envoie</u> $D^b_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ <u>dans</u> $D^b_{parf}(\mathcal{D}_X)$.

<u>Corollaire</u> 2.5.2. <u>Pour tout morphisme</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>et pour tout</u> $\mathcal{M}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{parf}(\mathcal{D}_X)$ <u>tels que</u>

$$\bar{f}|F^{-1}(|\mathrm{Car}\, \mathcal{M}^\cdot|) \quad (3)$$

<u>soit propre</u>, <u>on a</u>

$$\int_f \mathcal{M}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{parf}(\mathcal{D}_Y)$$

<u>et</u>

$$|\mathrm{Car}(\int_f \mathcal{M}^\cdot)| \subset \bar{f}(F^{-1}(|\mathrm{Car}(\mathcal{M}^\cdot)|)) \quad (3).$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> f <u>est propre</u>, $\int_f$ <u>envoie</u> $D^b_{parf}(\mathcal{D}_X)$ <u>dans</u> $D^b_{parf}(\mathcal{D}_Y)$.

2.6. En général, il n'y a pas d'adjonction naturelle entre les foncteurs $\int_f$ et $\mathbb{L}f^*$, même à un décalage près : en effet, $\int_f$ joue le rôle d'un foncteur image directe ordinaire, alors que $\mathbb{L}f^*(-)[d_f]$ joue le rôle d'un foncteur image inverse extraordinaire (c'est tout au moins le cas si on se limite aux $\mathcal{D}$-Modules holonomes). Cependant pour f lisse (resp. f propre), on s'attend à ce qu'il existe des flèches d'adjonction, sur $D^b_{qcoh}(\mathcal{D})$,

$$\text{(2.6.1)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{id} \longrightarrow \int_f \mathbb{L}f^*(-)[-d_f] \\ &\mathbb{L}f^* \int_f (-)[-d_f] \longrightarrow \mathrm{id} \end{aligned}$$

(resp.

$$\text{(2.6.2)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{id} \longrightarrow \mathbb{L}f^* \int_f (-)[d_f] \\ &\int_f \mathbb{L}f^*(-)[d_f] \longrightarrow \mathrm{id}) \ . \end{aligned}$$

(3) Pour $\mathcal{M}^\cdot \in \mathrm{ob}\, D^b_{parf}(\mathcal{D}_X)$, $|\mathrm{Car}(\mathcal{M}^\cdot)|$ désigne la réunion des supports des cycles caractéristiques des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}^\cdot)$, $n \in \mathbb{Z}$.

On s'attend de plus à ce que ces flèches d'adjonction admettent des variantes filtrées qui induisent par passage aux gradués les composés de flèche d'adjonction usuelles, sur $D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*})$

$$\text{(2.6.3)} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{id} \longrightarrow \mathbb{R}\bar{f}_* F^! F_{*\sqcup} \bar{f}^* \\ F_{*\sqcup} \bar{f}^* \mathbb{R}\bar{f}_* F^! \longrightarrow \mathrm{id} \end{array}$$

(resp.

$$\text{(2.6.4)} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{id} \longrightarrow F_* \bar{f}^! \mathbb{R}\bar{f}_* F^* \\ \mathbb{R}\bar{f}_* F^* F_* \bar{f}^! \longrightarrow \mathrm{id}) \end{array}$$

(on a F fini (resp. $\bar{f}$ propre)).

Pour obtenir de telles flèches d'adjonction filtrées, il suffit de définir des flèches filtrées

$$\text{(2.6.5)} \qquad \begin{array}{l} f^{-1}\mathcal{D}_Y \longrightarrow \mathcal{D}_Y \longleftarrow X \overset{\sqcup}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow Y[-d_f] \\ \mathcal{D}_X \longrightarrow Y \overset{\sqcup}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_Y \longleftarrow X[-d_f] \longrightarrow \mathcal{D}_X \end{array}$$

(resp.

$$\text{(2.6.6)} \qquad \begin{array}{l} \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow Y \overset{\sqcup}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathbb{R}f_*\mathcal{D}_Y \longleftarrow X[d_f] \\ \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_Y \longleftarrow X \overset{\sqcup}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow Y)[d_f] \longrightarrow \mathcal{D}_Y) \end{array}$$

dans une catégorie dérivée convenable de $(\mathcal{D},\mathcal{D})$-bi-Modules filtrés induisant les flèches d'adjonction (2.6.3) (resp. (2.6.4)) évaluées sur $\mathcal{O}_{T^*}$.

J'avoue n'avoir eu ni le courage, ni les idées assez claires pour définir (2.6.5) (resp. (2.6.6)) ; comme la littérature est sur ce point étrangement muette (même si on néglige dans un premier temps les filtrations), la question de l'existence de telles flèches reste ouverte.

3. Transformations canoniques à la Brylinski.

3.0. Soient X, Y, Z trois variétés et

$$i : Z \hookrightarrow X \times_k Y$$

une immersion fermée ; on note

(3.0.1)
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ X & X \times_k Y \arrow[l, "pr_X"] \arrow[r, "pr_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

les projections canoniques et on considère le foncteur

(3.0.2)
$$\Phi_{X|Y} = \int_{p_Y} \amalg p_X^* : D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$$

et sa variante filtrée, notée encore Φ ,

(3.0.3)
$$\Phi_{X|Y} = \int_{p_Y} \amalg p_X^* : D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \ .$$

A (3.0.1), on peut associer le diagramme

(3.0.4)
$$\begin{tikzcd} & T^*_Z(X \times_k Y) \arrow[dl, "r_X"'] \arrow[dr, "r_Y"] \arrow[ddll, bend right, "q_X"'] \arrow[ddrr, bend left, "q_Y"] & \\ T^*X \times_X Z \arrow[dl, "\bar{p}_X"'] \arrow[dr, "p_X"] & & T^*Y \times_Y Z \arrow[dl, "p_Y"'] \arrow[dr, "\bar{p}_Y"] \\ T^*X & T^*Z & T^*Y \end{tikzcd}$$

où $(p_X, \bar{p}_X)$ et $(p_Y, \bar{p}_Y)$ sont associés à p_X et p_Y respectivement comme en (1.1) et où le carré est cartésien et provient de la suite exacte de fibrés sur Z

$$0 \longrightarrow T^*_Z(X \times_k Y) \longrightarrow i^*T^*(X \times_k Y) \longrightarrow T^*Z \longrightarrow 0$$

$(T^*(X \times_k Y) = T^*X \times_k T^*Y)$.

On notera encore

(3.0.5)
$$\rho = \pi_{p_X} \circ r_X = \pi_{p_Y} \circ r_Y : T^*_Z(X \times_k Y) \longrightarrow Z$$

la projection canonique.

<u>Lemme</u> 3.0.6. $\omega_{T_Z^*(X\times_k Y)} = \rho^*\omega_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_{T_Z^*(X\times_k Y)}} \rho^*\omega_{Z/Y}$.

<u>Preuve de</u> 3.0.6. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow i^*\Omega^1_{X\times_k Y/k} \longrightarrow \Omega^1_{Z/k} \longrightarrow 0$$

et $T_Z^*(X\times_k Y) = \mathbb{V}(\mathcal{N}^\vee)$, donc

$$\begin{aligned}\omega_{T_Z^*(X\times_k Y)} &= \rho^*(\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \det(\mathcal{N}^\vee))\\ &= \rho^*(\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} i^*\omega^{-1}_{X\times_k Y})\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

3.1. Le résultat principal de ce numéro est le suivant :

<u>Théorème</u> 3.1.1. <u>Le carré de foncteurs</u>

$$\begin{tikzcd} D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "\Phi_{X|Y}"] \arrow[d, "\widetilde{gr}"'] & D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \arrow[d, "\widetilde{gr}"] \\ D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X}) \arrow[r, "\mathbb{R}q_{Y*}(\mathbb{L}q_X^*(-)\otimes_{\mathcal{O}_{T_Z^*(X\times_k Y)}}\rho^*\omega_{Z/Y})"] & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*Y}) \end{tikzcd}$$

<u>est</u> "<u>commutatif</u>".

3.1.2. En particulier, soient $V_X \subset T^*X$, $V_Y \subset T^*Y$ et $V \subset T_Z^*(X\times_k Y)$ des ouverts tels que

$$V = q_X^{-1}(V_X) = q_Y^{-1}(V_Y)$$

et que

$$q_X|V : V \longrightarrow V_X \quad \text{et} \quad q_Y|V : V \longrightarrow V_Y$$

sont des isomorphismes ; notons

(3.1.2.1) $$\theta_{X|Y} : V_X \xrightarrow{\sim} V_Y$$

l'isomorphisme composé $(q_Y|V)\circ(q_X|V)^{-1}$ et posons

(3.1.2.2) $$\widetilde{\omega}_{X|Y} = (q_Y|V)_*(\rho^*\omega_{Z/Y}|V) \ ;$$

alors on déduit immédiatement de 3.1.1 le :

<u>Corollaire</u> 3.1.2.3. <u>Le carré de foncteurs</u>

$$\begin{tikzcd}
D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "\Phi_{X|Y}"] \arrow[d, "\widetilde{gr}(-)|V_X"'] & D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_Y) \arrow[d, "\widetilde{gr}(-)|V_Y"] \\
D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{V_X}) \arrow[r, "(\theta_{X|Y})_*(-)\otimes_{\mathcal{O}_{V_Y}}\widetilde{\omega}_{X|Y}"] & D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{V_Y})
\end{tikzcd}$$

<u>est</u> "<u>commutatif</u>".

<u>Remarque</u> 3.1.2.4. $(\theta_{X|Y})_*(-)\otimes_{\mathcal{O}_{V_Y}}\widetilde{\omega}_{X|Y}$ est une équivalence de catégorie de quasi-inverse $(\theta_{Y|X})_*(-)\otimes_{\mathcal{O}_{V_X}}\widetilde{\omega}_{Y|X}$ obtenue en permuttant X et Y ($\theta_{Y|X} = (\theta_{X|Y})^{-1}$ et lemme 3.0.6, compte-tenu du fait que ω_{T^*X} et ω_{T^*Y} sont triviaux).

3.1.3. <u>Prouvons</u> 3.1.1. Compte-tenu de 2.3.1 et 2.3.2, il suffit de montrer que la flèche de changement de base

$$\mathbb{L}P_Y^*RP_{X*} \longrightarrow \mathbb{R}r_{Y*}\mathbb{L}r_X^*$$

relative au carré cartésien du diagramme (3.0.4) est un isomorphisme de foncteurs de $D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*X\times_X Z})$ dans $D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{T^*Y\times_Y Z})$; pour cela, il suffit, d'après [SGA 6] IV 3.1.0, de montrer que $T^*X\times_X Z$ et $T^*Y\times_Y Z$ sont tor-indépendants sur T^*Z ; ce dernier point résulte du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 3.1.3.1. <u>Soit</u>

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
S' \arrow[r, "\alpha"] & S
\end{tikzcd}$$

<u>un carré cartésien de schémas séparés</u>, <u>de type fini sur un corps</u> k . <u>Supposons que</u> :

(i) X, S, S', X' <u>sont lisses sur</u> k , <u>purement de dimensions</u> $d_X, d_S, d_{S'}, d_{X'}$ <u>respectivement</u>,

(ii) $d_X - d_{X'} = d_S - d_{S'}$.

<u>Alors</u>, X <u>et</u> S' <u>sont tor-indépendants sur</u> S .

<u>Preuve de</u> 3.1.3.1. En factorisant α par son graphe, on se ramène à montrer 3.1.3.1 dans les deux cas suivants : α est lisse et α est une immersion fermée. Le cas "α lisse" est trivial. Supposons donc que α est une immersion fermée ; puisque S et S' sont lisses sur k , α est une immersion régulière ; le problème étant local sur S , on peut supposer que S est affine et que S' est définie dans S par une suite régulière ; vu l'hypothèse (ii) et la lissité de X sur k , cette suite régulière induit sur X une suite régulière définissant X' dans X ; on peut donc appliquer [SGA 6] VII (1.2.2) pour $n = 0$, d'où la conclusion.

3.2. Comme application de 3.1.1, nous allons retrouver par voie algébrique un résultat de Brylinski sur les transformations canoniques (cf. [6] 2.7).

Si T est une variété, on notera Z(T) le groupe des cycles algébriques de T . Pour toute variété X et tout $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}$, le <u>cycle caractéristique de</u> $\mathcal{M}$, $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \in Z(T^*X)$, est le cycle associé au $\mathcal{O}_{T^*X}$-Module cohérent $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$, pour n'importe quelle filtration $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ avec $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ \mathrm{MF}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_X)$ (le support de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$, $|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|$, est le support de $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$ et les multiplicités de $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$ sont les longueurs de $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$ aux points génériques de son support) ; on fera attention au fait que $\mathrm{Car} : \mathrm{M}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow Z(T^*X)$ n'est pas additive.

Reprenons les notations de 3.0 et 3.1.2 ; $\theta_{X|Y} : V_X \longrightarrow V_Y$ induit un isomorphisme $(\theta_{X|Y})_* : Z(V_X) \longrightarrow Z(V_Y)$. Alors, le résultat [6] 2.7 de Brylinski est le suivant :

<u>Théorème</u> 3.2.1. <u>Si</u> $\mathcal{M}$ <u>est un</u> $\mathcal{D}_X$-<u>Module</u> <u>cohérent tel que</u>

$$q_Y|q_X^{-1}(|\mathrm{Car}(\mathcal{M})|)$$

<u>soit propre</u>, <u>alors</u>, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{Z}$, <u>on a dans</u> $Z(V_Y)$

$$\mathrm{Car}(\mathcal{H}^n(\Phi_{X|Y}(\mathcal{M})))|V_Y = \begin{cases} (\theta_{X|Y})_*(\mathrm{Car}(\mathcal{M})|V_X) & \text{si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$

<u>et</u>, <u>en particulier</u>,

$$|\mathrm{Car}(\mathcal{H}^n(\Phi_{X|Y}(\mathcal{M})))| \subset T^*Y - V_Y ,$$

<u>pour tout</u> $n \neq 0$.

<u>Remarque</u> 3.2.2. Si p_X est lisse et p_Y est propre, $q_Y : T^*_Z(X \times_k Y) \longrightarrow T^*Y$ est propre.

<u>Preuve de</u> 3.2.1. Choisissons une filtration $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ telle que $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ soit un objet de $MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ (cf. [19] 5.7.2) et soit

$$(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot) = \Phi_{X|Y}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) .$$

D'après 3.1.1, on a $(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot) \in \mathrm{ob}\, D^bF_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ et, d'après 3.1.2, on a

$$(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{N}^\cdot)|V_Y = (\theta_{X|Y})_*((\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{M})|V_X) \otimes_{\mathcal{O}_{V_Y}} \widetilde{\omega}_{X|Y} ,$$

i.e.

$$\mathcal{H}^n(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{N}^\cdot)|V_Y = \begin{cases} (\theta_{X|Y})_*((\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{M})|V_X) \otimes_{\mathcal{O}_{V_Y}} \widetilde{\omega}_{X|Y} & \text{si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \neq 0 . \end{cases}$$

Il nous reste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathcal{H}^n(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{N}^\cdot)|V_Y \simeq \widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{H}^n(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot)|V_Y .$$

Faute d'avoir démontré la dégénérescence de la suite spectrale associée à un objet de $D^bF_{parf}(\mathcal{D}_Y)$ (cf. [19] (3.5.5)), nous utiliserons la t-structure de coeur $AF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$ introduite sur $D^bF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$ en [19]3 : chaque $\mathcal{H}^n_\tau(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot)$ est dans $AF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ (cf. [19] (4.4.3)) et admet une suite spectrale qui dégénère (cf. [19] 4.3.1). Les suites exactes courtes de $\mathcal{O}_{T^*Y}$-Modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{H}^n_\tau(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot)) \longrightarrow \mathcal{H}^n(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{N}^\cdot) \longrightarrow \mathcal{H}^{-1}(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{H}^{n+1}_\tau(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot)) \longrightarrow 0$$

(cf. [19] preuve de 4.2.5) montrent alors que

$$\mathcal{H}^i(\widetilde{\mathrm{gr}}\, \mathcal{H}^n_\tau(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot))|V_Y = 0$$

pour $(i,n) \neq (0,0)$ et $(-1,1)$, de sorte que, pour tout n , la suite spectrale

$$\widetilde{E}^\cdot_r(\mathcal{H}^n_\tau(\mathcal{N}^\cdot, \mathcal{N}_i^\cdot))|V_Y$$

dégénère en $r = 1$ et donc que, pour tout n ,

$$\mathcal{H}^0(\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathcal{H}^n_\tau(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot_i))|V_Y \simeq \widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathcal{H}^0(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot_i)|V_Y$$

et

$$\mathcal{H}^{-1}(\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathcal{H}^n_\tau(\mathcal{N}^\cdot,\mathcal{N}^\cdot_i))|V_Y = 0 \ .$$

La conclusion s'obtient alors par regroupement de toutes ces informations.

3.3. Gardons toujours les notations de 3.0 et 3.1.2 et supposons de plus p_X et p_Y propres et lisses, de sorte que $\Phi_{X|Y}$ et $\Phi_{Y|X}$ envoient D^b_{parf} et D^bF_{parf} dans D^b_{parf} et D^bF_{parf} .

Soit $M_{parf}(\mathcal{D}_X,V_X)$ la catégorie quotient de $M_{parf}(\mathcal{D}_X)$ par la sous-catégorie épaisse formée des $\mathcal{D}_X$-Modules cohérents tels que

$$|\mathrm{Car}(\mathcal{M})| \cap V_X = \emptyset \ ;$$

par symétrie, on a une catégorie analogue $M_{parf}(\mathcal{D}_Y,V_Y)$ pour Y . D'après 3.2.1 et 3.2.2, on a des foncteurs

$$M_{parf}(\mathcal{D}_X,V_X) \longrightarrow M_{parf}(\mathcal{D}_Y,V_Y),\ \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{H}^0(\Phi_{X|Y}(\mathcal{M}))$$

$$M_{parf}(\mathcal{D}_Y,V_Y) \longrightarrow M_{parf}(\mathcal{D}_X,V_X),\ \mathcal{N} \longmapsto \mathcal{H}^0(\Phi_{Y|X}(\mathcal{N})) \ .$$

Le lecteur courageux qui aura résolu nos perplexités de 2.6, déduira de 3.2.1 et 3.2.2 le théorème de Brylinski suivant (cf. [6] 2.8) :

<u>Théorème</u> 3.3.1. <u>Les foncteurs ci-dessus sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre</u> $M_{parf}(\mathcal{D}_X,V_X)$ <u>et</u> $M_{parf}(\mathcal{D}_Y,V_Y)$.

4. Déformation au cône normal et filtration de $\mathcal{D}$ par l'ordre d'annulation le long d'une sous-variété.

4.0. On considère dans tout ce numéro une variété X et une sous-variété fermée $i : Y \hookrightarrow X$ définie par un $\mathcal{O}_X$-Idéal $\mathcal{J}$.

On note t une indéterminée sur $\mathcal{O}_X$ et on considère la $\mathcal{O}_X[t]$-Algèbre quasi-cohérente (*)

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}^{-j}t^j \subset \mathcal{O}_X[t,t^{-1}] \tag{4.0.1}$$

(avec $\mathcal{J}^{-j} = \mathcal{O}_X$ pour tout $j \geqslant 0$) ; son spectre

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} = \operatorname{Spec}(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}^{-j}t^j) \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "q"] & \\ X \times_k \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X[t]) \arrow[r, "pr_{\mathbb{A}^1_k}"'] \arrow[d, "pr_X"] & \mathbb{A}^1_k \\ X \arrow[uu, bend left, "p"] & \end{tikzcd} \tag{4.0.2}$$

est un $X \times_k \mathbb{A}^1_k$-schéma affine, appelé la <u>déformation au cône normal de</u> $Y \xhookrightarrow{i} X$ et introduit par Baum, Fulton et Macpherson (cf. [1] I 5) et Verdier (cf. [21] §2) ; son appellation est justifiée par les faits suivants : q est plat, r induit un $\mathbb{G}_{m,k}$-isomorphisme de $q^{-1}(\mathbb{G}_{m,k})$ sur $X \times_k \mathbb{G}_{m,k}$, $q^{-1}(0)$ est canoniquement isomorphe au <u>cône normal de</u> $Y \subset X$

$$\begin{tikzcd} T_Y X = \operatorname{Spec}(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}^{-j}/\mathcal{J}^{-j+1}) \arrow[d, "p_o"] & \\ Y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd} \tag{4.0.3}$$

et r admet une section au-dessus de $Y \times_k \mathbb{A}^1_k$

$$s : Y \times_k \mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \tilde{X} \tag{4.0.4}$$

telle que $s_o = s|Y \times_k \{0\}$ s'identifie à la section nulle du cône normal. On a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

(*) cf. D. Rees.- A-transforms of ideals and a theorem on multiplicities of ideals, Proc. of the Cambridge Phil. Soc., vol. 57 (1961) pp. 8-17.

$$
(4.0.5)\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y\times_k \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, hook] \arrow[dl, "i\times id"'] \arrow[d, "s"'] & Y\times_k \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[l, hook'] \arrow[d, "s_o"'] \\
X\times_k \mathbb{G}_{m,k} \arrow[dr, "pr_{\mathbb{G}_{m,k}}"'] & q^{-1}(\mathbb{G}_{m,k}) \arrow[l, "r"'] \arrow[r, hook, "\beta"] \arrow[d, "q"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "q"'] & T_YX \arrow[l, hook', "\alpha"'] \arrow[d, "q_o"'] \\
 & \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^1_k & \{0\} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

En coordonnées locales $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $\widetilde{X} = \{(\widetilde{x},y,t)\}$, $T_YX = \{(y;\widetilde{x})\}$, on a

$$(4.0.6)\qquad r(\widetilde{x},y,t) = ((t.\widetilde{x},y),t)$$

(bien entendu x et y sont des n-uples pour $n = d_X - d_Y$ et $n = d_Y$ respectivement).

4.1. Pour $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ comme en 4.0, Kashiwara a introduit une nouvelle filtration croissante, indéxée par $\mathbb{Z}$, de $\mathcal{D}_X$,

$$\cdots \subset V_{-1}\mathcal{D}_X \subset V_o\mathcal{D}_X \subset V_1\mathcal{D}_X \subset \cdots \subset \mathcal{D}_X$$

définie par

$$(4.1.1)\qquad V_j\mathcal{D}_X = \{P \in \mathcal{D}_X \mid P(\mathcal{J}^k) \subset \mathcal{J}^{k-j},\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

(cf. [13] ; Kashiwara la note plutôt $F^{-j}\mathcal{D}_X$).

En coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, on a

$$(4.1.2)\qquad V_j\mathcal{D}_X = \Big\{ \sum_{|\alpha|-|\beta| \leqslant j} a_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\partial_y^{\gamma}\, x^{\beta}\, \partial_x^{\alpha} \Big\} .$$

<u>Lemme</u> 4.1.3 (i) <u>Chaque</u> $V_j\mathcal{D}_X$ <u>est un sous-</u>$\mathcal{O}_X$<u>-Module quasi-cohérent de</u> $\mathcal{D}_X$ (<u>à gauche et à droite</u>).

(ii) <u>La filtration</u> $V.\mathcal{D}_X$ <u>est séparée et exhaustive</u>.

(iii) <u>Pour tous</u> $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$V_{j_1}\mathcal{D}_X . V_{j_2}\mathcal{D}_X \subset V_{j_1+j_2}\mathcal{D}_X$$

<u>avec égalité si</u> $j_1 . j_2 \geqslant 0$.

(iv) <u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$V_j\mathcal{D}_X = \mathcal{J}^{-j} . V_o\mathcal{D}_X . \mathcal{D}_{X,j}$$

(v) <u>On a</u> $\mathcal{O}_X \subset V_o\mathcal{D}_X$.

<u>Preuve</u>. (iv) résulte de la description en coordonnées locales (4.1.2) de $V_j\mathcal{D}_X$. Les autres assertions sont soit triviales soit conséquences de (iv).

4.2. Considérons alors la $\mathcal{O}_X[t]$-Algèbre quasi-cohérente (à gauche et à droite)

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X.t^j \subset \mathcal{D}_X[t,t^{-1}] \tag{4.2.1}$$

(t commutant aux sections locales de $\mathcal{D}_X$). Cette $\mathcal{O}_X[t]$-Algèbre opère sur

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}^{-j}.t^j = p_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$$

de manière évidente et s'interprète naturellement comme l'Algèbre des opérateurs différentiels de $p_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ relatifs à $k[t]$; autrement dit, on a canoniquement :

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X.t^j = p_*\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} , \tag{4.2.2}$$

où $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$ est la $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-Algèbre des opérateurs différentiels sur $\tilde{X}$ relatifs à $\mathbb{A}^1_k$, via la projection $q : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$.

Tout comme $\mathcal{D}_X$, $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$ est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs,

$$--- \; 0 = \mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,-1} \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,o} \subset \mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,1} \subset --- \subset \mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$$

et on a en fait

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i}).t^j = p_*\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,i} , \tag{4.2.3}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Par restriction à $T_YX \subset \tilde{X}$, on obtient l'identification canonique

$$gr^V\mathcal{D}_X \underset{\text{dfn}}{=} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (V_j\mathcal{D}_X/V_{j-1}\mathcal{D}_X) = i_*p_{o*}\mathcal{D}_{T_YX} \tag{4.2.4}$$

(on a

$$gr^V\mathcal{D}_X = (\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X.t^j)/t.(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X.t^j)$$

et

$$\alpha^*\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} = \alpha^{-1}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}/t.\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}) = \mathcal{D}_{T_YX}) \ .$$

De plus, la filtration par l'ordre des opérateurs sur $\mathcal{D}_X$ induit sur $\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X$ une filtration

$$--- \ 0 = (\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X)_1 \subset (\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X)_o \subset (\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X)_1 \subset --- \subset \mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X$$

avec

$$(4.2.5) \qquad (\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X)_i = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i})/(V_{j-1}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i})$$

et cette filtration coïncide avec la filtration induite par (4.2.3) ; par suite, on a canoniquement

$$(4.2.6) \qquad (\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X)_i = i_*p_{o*}\mathcal{D}_{T_YX,i} \ ,$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Passant aux gradués associés, on déduit des identifications canoniques (4.2.3) et (4.2.6) les identifications canoniques suivantes

$$(4.2.7) \qquad \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} [(V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i})/(V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i-1})]t^j = p_*\tilde{\varpi}_*\mathcal{O}_{T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k)} \ ,$$

où

$$(4.2.8) \qquad \tilde{\varpi} \ : T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k) \longrightarrow \tilde{X}$$

est le fibré cotangent relatif de $q : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$, et

$$(4.2.9) \qquad \mathrm{gr}\ \mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X = i_*p_{o*}\tilde{\varpi}_{o*}\mathcal{O}_{T^*(T_YX)}$$

où

$$(4.2.10) \qquad \tilde{\varpi}_o \ : T^*(T_YX) \longrightarrow T_YX$$

est la fibre en "$t = 0$" de $\tilde{\varpi}$, i.e. la projection canonique du fibré tangent de T_YX ($\tilde{\varpi}_o = \pi_{T_YX}$).

<u>Remarque</u> 4.2.11. La filtration $V.\mathcal{D}_X$ de $\mathcal{D}_X$ induit une filtration $V.\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$ sur $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$, avec

$$V_j\ \mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathcal{D}_{X,i} \cap V_j\mathcal{D}_X)/(\mathcal{D}_{X,i-1} \cap V_j\mathcal{D}_X) \ ,$$

et il est facile de vérifier que

$$\mathrm{gr}^V \mathrm{gr}\, \mathcal{D}_X = \mathrm{gr}\, \mathrm{gr}^V \mathcal{D}_X ,$$

en tant que $\mathcal{O}_X$-Algèbres bigraduées (en i et j).

En coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $\tilde{X} = \{(\tilde{x},y,t)\}$ et $T_Y X = \{y;\tilde{x})\}$, on a

$$(4.2.12) \quad \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i})t^j = \Big\{ \sum_{\substack{|\alpha|+|\gamma|\leqslant i \\ |\alpha|-|\beta|\leqslant j}} a_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\partial_y^\gamma x^\beta \partial_x^\alpha t^j \Big\}$$

et

$$(4.2.13) \quad \mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,i} = \Big\{ \sum_{|\alpha|+|\gamma|\leqslant i} b_{\alpha,\gamma}(\tilde{x},y,t)\partial_y^\gamma \partial_{\tilde{x}}^\alpha \Big\} ,$$

l'identification (4.2.3) étant donnée par

$$(4.2.14) \quad a_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\partial_y^\gamma x^\beta \partial_x^\alpha t^j \longmapsto a_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\tilde{x}^\beta t^{j+|\beta|-|\alpha|}\partial_y^\gamma \partial_{\tilde{x}}^\alpha$$

$(x \longmapsto t.\tilde{x}$ et $\partial_x \longmapsto t^{-1}.\partial_{\tilde{x}}$; $j+|\beta|-|\alpha| \geqslant 0\}$.

4.3. On considèrera aussi la $\mathcal{O}_X[t]$-Algèbre quasi-cohérente (à gauche et à droite)

$$(4.3.1) \qquad \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{X,j}\, t^j \subset \mathcal{D}_X[t,t^{-1}] ;$$

on notera $\mathcal{B}_X$ la $\mathcal{O}_{X\times_k \mathbb{A}^1_k}$-Algèbre quasi-cohérente (à gauche et à droite) caractérisée par

$$(4.3.2) \qquad \mathrm{pr}_{X*}\mathcal{B}_X = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{X,j}\, t^j .$$

L'inclusion

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{X,j}\, t^j \subset \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X\, t^j$$

(cf. 4.1.3 (iv) et (v)) induit un homomorphisme

$$(4.3.3) \qquad r^{-1}\mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} .$$

$\mathcal{B}_X$ admet une filtration

$$---0 = \mathcal{B}_{X,-1} \subset \mathcal{B}_{X,o} \subset \mathcal{B}_{X,1} \subset --- \subset \mathcal{B}_X$$

définie par

(4.3.4) $$\mathrm{pr}_{X*}\mathcal{B}_{X,i} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\mathcal{D}_{X,j} \cap \mathcal{D}_{X,i}).t^j$$

et l'homomorphisme (4.3.3) envoie $r^{-1}\mathcal{B}_{X,i}$ dans $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,i}$, i.e. est filtré. Passant au spectre du gradué, (4.3.3) induit un $X\times_k\mathbb{A}^1_k$-morphisme : on a un carré commutatif de morphismes de variétés

(4.3.5) $$\begin{array}{ccc} T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k) & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \tilde{X} \\ \rho\downarrow & & \downarrow r \\ \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\,\mathcal{B}_X) & \xrightarrow{\pi} & X\times_k\mathbb{A}^1_k \end{array} .$$

4.4. Faisons le lien entre nos constructions géométriques et celles utilisés par Laurent dans sa deuxième microlocalisation (cf. [16], [17] et [18]).

Pour $Y\subset X$ comme en 4.0, on dispose aussi du conormal à Y dans X, $T^*_YX\subset T^*X$; l'immersion fermée $i' : T^*_YX \hookrightarrow T^*X$ est définie par un $\mathcal{O}_{T^*X}$-Idéal $\mathcal{J}'$ et on peut lui associer sa déformation au cône normal (cf. 4.0)

(4.4.1) $$\begin{array}{c} \widetilde{T^*X} = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}'^{-j}\, t^j) \\ \downarrow r'=(p',q') \\ T^*X\times_k\mathbb{A}^1_k \end{array} .$$

Le résultat clé est alors le suivant :

<u>Proposition</u> 4.4.2. <u>Il existe des isomorphismes canoniques</u> $\theta : \widetilde{T^*X} \xrightarrow{\sim} T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k)$ <u>et</u> $\varphi : T^*X\times_k\mathbb{A}^1_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathcal{B}_X)$ <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

(i) <u>le carré</u>

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{T^*X} & \xrightarrow{\theta} & T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k) \\ r'\downarrow & & \downarrow\rho \\ T^*X\times_k\mathbb{A}^1_k & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\,\mathcal{B}_X) \end{array}$$

<u>est commutatif</u>,

(ii) $\tilde{\omega}\circ\theta : \widetilde{T^*X} \longrightarrow \tilde{X}$ <u>est le morphisme de fonctorialité de la déformation au cône normal pour</u> $\pi_X : (T^*_YX \xhookrightarrow{i'} T^*X) \longrightarrow (Y \xhookrightarrow{i} X)$,

(iii) $\pi\circ\varphi : T^*X\times_k \mathbb{A}^1_k \longrightarrow X\times_k \mathbb{A}^1_k$ <u>est la projection canonique</u> $\pi_X\times id$.

<u>Preuve</u>. Partons du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_j gr_i \mathcal{D}_X)\, t^j & \xrightarrow{\theta^*} & gr\, \mathcal{D}_X[t,t^{-1}] \\ \rho^* \uparrow & & \uparrow \nu \\ \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\leqslant j}} gr_i \mathcal{D}_X)\, t^j & \xrightarrow{\varphi^*} & gr\, \mathcal{D}_X[t] \end{array}$$

où ρ^* est l'inclusion induite par (4.3.3) (si $i\leqslant j$, on a $\mathcal{D}_{X,i-1}\subset \mathcal{D}_{X,i}\subset V_j\mathcal{D}_X$ et donc

$$gr_i\mathcal{D}_X = V_j gr_i\mathcal{D}_X = (V_j\mathcal{D}_X\cap \mathcal{D}_{X,i})/(V_j\mathcal{D}_X\cap \mathcal{D}_{X,i-1})) ,$$

où ν est l'inclusion naturelle et où θ^* (resp. φ_*) envoie $P_{i,j}\, t^j$ sur $P_{i,j}\, t^{j-i}$, pour $P_{i,j}\in V_j gr_i\mathcal{D}_X$ et tout i,j (resp. $P_{i,j}\in gr_i\mathcal{D}_X$ et tout $i\leqslant j$) ; θ^* et φ^* sont clairement injectives, de plus, φ^* est surjective et donc un isomorphisme.

D'autre part, $\pi_{X*}\mathcal{J}'\subset \pi_{X*}\mathcal{O}_{T^*X} = gr\,\mathcal{D}_X$ est un idéal et

$$\pi_{X*}p'_*\mathcal{O}_{T^*X} = \bigoplus_j (\pi_{X*}\mathcal{J}')^{-j}\, t^j \subset gr\,\mathcal{D}_X[t,t^{-1}] ;$$

il reste donc à voir que

$$\bigoplus_j (\pi_{X*}\mathcal{J}')^{-j}t^j = Im(\theta^*) \subset gr\,\mathcal{D}_X[t,t^{-1}] ,$$

ce qui résulte aussitôt du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 4.4.3. <u>Pour tout entier</u> $n\geqslant 0$, $(\pi_{X*}\mathcal{J}')^n$ <u>est un</u> $gr\,\mathcal{D}_X$-<u>Idéal gradué et sa composante de degré</u> i <u>coïncide avec</u> $V_{i-n}gr_i\mathcal{D}_X\subset gr_i\mathcal{D}_X$.

<u>Preuve</u>. Nous nous limiterons au cas $n=1$ et nous travaillerons en coordonnées locales, $X=\{(x,y)\}$, $Y=\{y\}=\{x=0\}$, $T^*X=\{(x,y;\xi,\eta)\}$, $T^*_YX=\{(y;\xi)\}=\{x=\eta=0\}$; soit $P\in\mathcal{D}_{X,i}$ d'image $\sigma(P)$ dans $gr_i\mathcal{D}_X$, on a en écritures locales

$$P = \sum_{|\alpha|+|\gamma|\leqslant i} a_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\partial_y^\gamma x^\beta \partial_x^\alpha$$

et

$$\sigma(P) = \sum_{|\alpha|+|\gamma|=i} a_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\eta^\gamma x^\beta \xi^\alpha ;$$

alors $\sigma(P)$ s'annule sur $T^*_Y X \subset T^*X$ si et seulement si $a_{\alpha,0,0}(y) = 0$ pour tout α avec $|\alpha| = i$, donc si et seulement si $a_{\alpha,\beta,\gamma}(y) \neq 0$ implique $|\alpha| - |\beta| \leqslant i-1$ (cette inégalité est automatique pour $|\alpha| \leqslant i-1$ car $|\beta| \geqslant 0$) ; par suite, $\sigma(P)$ s'annule sur $T^*_Y X \subset T^*X$ si et seulement si $P \in V_{i-1}\mathcal{D}_X$, ce qui, pour $n = 1$, est la conclusion demandée.

Par restriction à "t=0", on obtient un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} T_{T^*_Y X}(T^*X) \arrow[rr, "\theta_o", "\sim"'] \arrow[dr, "(1)"'] & & T^*(T_Y X) \arrow[dl, "(2)"] \\ & T^*_Y X \times_Y T_Y X & \end{tikzcd} \tag{4.4.4}$$

où (1) a pour composantes r'_o et $(\varpi \circ \theta)_o$ et où (2) a pour composantes $(\varphi^{-1} \circ \rho)_o$ et ϖ_o.

En coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $T^*X = \{(x,y;\xi,\eta)\}$, $T^*_Y X = \{(y;\xi)\} = \{x=\eta=0\}$, $\tilde{X} = \{(\tilde{x},y,t)\}$, $\widetilde{T^*X} = \{(\tilde{x},y,\xi,\tilde{\eta},t)\}$ et $T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k) = \{(\tilde{x},y,t;\zeta,\eta)\}$, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \theta(\tilde{x},y,\xi,\tilde{\eta},t) &= (\tilde{x},y,t;\xi,\tilde{\eta}) \\ r'(\tilde{x},y,\xi,\tilde{\eta},t) &= ((t.\tilde{x},y;\xi,t.\tilde{\eta}),t) \\ \varpi \circ \theta(\tilde{x},y,\xi,\tilde{\eta},t) &= (\tilde{x},y,t) \\ \varphi^{-1} \circ \rho(\tilde{x},y,t;\zeta,\eta) &= ((t.\tilde{x},y;\zeta,t.\eta),t) \end{aligned} \right. \tag{4.4.5}$$

et, avec $T_Y X = \{(y;\tilde{x})\}$, $T^*(T_Y X) = \{(\tilde{x},y;\zeta,\eta)\}$ et $T_{T^*_Y X}(T^*X) = \{(y,\xi;\tilde{\eta},\tilde{x})\}$, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_o(y,\xi;\tilde{\eta},\tilde{x}) &= (\tilde{x},y;\xi,\tilde{\eta}) \\ (1)(y,\xi;\tilde{\eta},\tilde{x}) &= ((y;\xi),(y;\tilde{x})) \\ (2)(\tilde{x},y;\zeta,\eta) &= ((y;\zeta),(y;\tilde{x})) \end{aligned} \right. \tag{4.4.6}$$

4.5. Les graduations ou bigraduations apparues sur les Algèbres introduites précédemment se traduisent sur les spectres de ces Algèbres par des actions de $\mathbb{G}_{m,k}$ ou $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$, que nous allons maintenant expliciter.

(4.5.1) $\mathbb{G}_{m,k}$ opère sur $\tilde{X} \xrightarrow{q} \mathbb{A}^1_k$ de telle sorte que :

(i) l'action sur $\mathbb{A}^1_k$ est l'action naturelle,

(ii) $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ est $\mathbb{G}_{m,k}$-équivariant pour l'action triviale sur X ,

(iii) l'action de $\mathbb{G}_{m,k}$ induite sur $T_Y X \subset \tilde{X}$ est l'inverse de l'action usuelle de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur le fibré vectoriel $T_Y X \longrightarrow Y$,

(iv) en coordonnées locales, $X = \{x,y\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $\tilde{X} = \{(\tilde{x},y,t)\}$ et $\mathbb{G}_{m,k} = \{\mu\}$, cette action est donnée par

$$\mu.(\tilde{x},y,t) = (\mu^{-1}.\tilde{x},y,\mu.t) .$$

(4.5.2) $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$ opère sur $T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k)$ de telle sorte que :

(i) l'action du premier facteur est l'action usuelle de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur le fibré vectoriel $T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k) \longrightarrow \tilde{X}$,

(ii) l'action du second facteur est l'action cotangente à l'action (4.5.1),

(iii) en coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $T^*(\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k) = \{(\tilde{x},y,t;\zeta,\eta)\}$ et $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k} = \{(\lambda,\mu)\}$, cette action est donnée par

$$(\lambda,\mu).(\tilde{x},y,t;\zeta,\eta) = (\mu^{-1}\tilde{x},y,\mu t;\lambda\mu\zeta,\lambda\eta) .$$

(4.5.3) $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$ opère sur $T^*(T_Y X)$ via l'action induite par (4.5.2) ; en particulier, en coordonnées locales, $f \in i_* p_{o*} \varpi_{o*} \mathcal{O}_{T^*(T_Y X)}$ est de bidegré (i,j), i.e. est dans $gr_i gr^V_j \mathcal{D}_X$, si et seulement si

$$f(\mu^{-1}.\tilde{x},y;\lambda\mu\zeta,\lambda\eta) = \lambda^i \mu^j f(\tilde{x},y;\zeta,\eta) .$$

(4.5.4) $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$ opère sur T^*X de telle sorte que :

(i) l'action du premier facteur est induite par fonctorialité de la déformation au cône normal de l'action de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur $(T^*_Y X \hookrightarrow T^*X)$ qui est l'action usuelle de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur le fibré vectoriel $T^*X \longrightarrow X$,

(ii) l'action du second facteur est celle décrite en (4.5.1) mais pour X remplacé par T^*X ,

(iii) en coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $T^*X = \{(\tilde{x},y,\xi,\tilde{\eta},t)\}$ et $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k} = \{(\lambda,\mu)\}$, cette action est donnée par

$$(\lambda,\mu).(\tilde{x},y,\xi,\tilde{\eta},t) = (\mu^{-1}.\tilde{x},y,\lambda\xi,\lambda.\mu^{-1}.\tilde{\eta},\mu.t) .$$

(4.5.5) $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$ opère sur $T_{T^*_Y X}(T^*X)$ via l'action induite par (4.5.4).

On fera alors attention au fait que θ (resp. θ_o) n'est pas $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$-équivariant pour les actions décrites ci-dessus mais que θ (resp. θ_o) échange l'action de (λ,μ) sur $\widetilde{T^*X}$ (resp. $T_{T^*_Y X}(T^*X)$) avec celle de $(\lambda\mu^{-1},\mu)$ sur $T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k)$ (resp. $T^*(T_Y X)$). De plus, si (λ,μ) opère sur $T_{T^*_Y X}(T^*X)$ via (4.5.5), $(\lambda\mu^{-1},\mu)$ opère sur $T^*(T_Y X)$ via (4.5.3), λ opère sur le fibré $T^*_Y X \longrightarrow Y$ de manière usuelle et μ opère sur le fibré $T_Y X \longrightarrow Y$ par l'inverse de l'opération usuelle, alors le triangle (4.4.4) est $\mathbb{G}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$-équivariant.

4.6. Soient S une variété (cf. 1) et $E \xrightarrow{\pi} S$ un fibré vectoriel, de dual $E' \xrightarrow{\pi'} S$; rappelons la définition de l'isomorphisme canonique (cf. [6] ; M. Kashiwara et P. Schapira, Microlocal Study of Sheaves I, 5.1.3, Université Paris-Nord (1983))

$$T^*E' \xrightarrow{\sim} T^*E \ . \tag{4.6.1}$$

On a $E = \mathbb{V}(\mathcal{E})$ et $E' = \mathbb{V}(\mathcal{E}\ )$, pour un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre de rang fini $\mathcal{E}$ et pour $\mathcal{E}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E},\mathcal{O}_S)$, de sorte que

$$\pi_*\mathcal{O}_E = \mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \pi'_*\mathcal{O}_{E'} = \mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}^\vee) \ . \tag{4.6.2}$$

L'Algèbre de Weyl de E, $\mathcal{W}_E$, est par définition la $\mathcal{O}_S$-Algèbre quasi-cohérente à gauche et à droite

$$\mathcal{W}_E = \pi_*\mathcal{D}_E = \mathrm{Diff}_k(\mathrm{Sym}^{\cdot}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})) \ ; \tag{4.6.3}$$

elle est munie d'une filtration

$$0 = \mathcal{W}_{E,-1} \subset \mathcal{W}_{E,o} \subset \mathcal{W}_{E,1} \subset \cdots \subset \mathcal{W}_E \tag{4.6.4}$$

et d'une graduation

$$\mathcal{W}_E = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{W}^j_E \ , \tag{4.6.5}$$

par des sous-$\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents à droite et à gauche, définies par

$$\mathcal{W}_{E,i} = \pi_*\mathcal{D}_{E,i}$$

et

$$\mathfrak{w}_E^j = \{P \in \mathfrak{w}_E \mid P.\mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Sym}^{n-j}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \ , \ \forall n \in \mathbb{Z}\} \ ;$$

de plus, ces deux structures sont compatibles au sens où

$$\mathfrak{w}_{E,i} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{w}_E^j \cap \mathfrak{w}_{E,i}) \ , \tag{4.6.6}$$

pour tous $i \in \mathbb{Z}$.

<u>L'opérateur d'Euler de</u> E est la section globale

$$\underline{eu} \in \Gamma(E, \mathcal{T}_{E/S}) = \Gamma(S, \pi_* \mathcal{T}_{E/S}) \subset \Gamma(S, \pi_* \mathcal{T}_E) \subset \Gamma(S, \mathfrak{w}_{E,1}) \tag{4.6.7}$$

correspondant à id_E via la bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_S(E,E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\pi^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_E) = \Gamma(E, \pi^*\mathcal{E}^\vee)$$

et l'isomorphisme canonique $\mathcal{T}_{E/S} \simeq \pi^*\mathcal{E}^\vee$. On vérifie aussitôt que

$$\mathfrak{w}_E^j = \{P \in \mathfrak{w}_E \mid [P, \underline{eu}] = j.P\} \ , \tag{4.6.8}$$

que les flèches canoniques $\mathcal{E} \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_S$ et $\mathcal{E}^\vee \longrightarrow \pi_*\mathcal{T}_E$ induisent des isomorphismes

$$\alpha : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{w}_E^{-1} \cap \mathfrak{w}_{E,o} \tag{4.6.9}$$

$$\beta : \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathfrak{w}_E^{1} \cap \mathfrak{w}_{E,1} \tag{4.6.10}$$

et que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{w}_E^o \cap \mathfrak{w}_{E,1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{T}_S \longrightarrow 0 \tag{4.6.11}$$

où $\gamma(e \otimes e^\vee) = \alpha(e).\beta(e^\vee)$; on remarque en outre que $\mathfrak{w}_E^o \cap \mathfrak{w}_{E,1}$ n'est autre que l'espace des dérivations relatives à k et graduées de $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$, i.e. l'espace des k-endomorphismes gradués

$$D = \bigoplus_{n \geqslant 0} D_n : \mathrm{Sym}^\bullet_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Sym}^n_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}) \circlearrowleft \ ,$$

espace qui s'identifie à l'espace des couples $(D_o : \mathcal{O}_S \circlearrowleft, D_1 : \mathcal{E} \circlearrowleft)$, où D_o est une k-dérivation de $\mathcal{O}_S$ et D_1 un k-endomorphisme de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$D_1(a.e) = a.D_1(e) + D_o(a).e$$

pour tous $a \in \mathcal{O}_S$, $e \in \mathcal{E}$ (D_n pour $n \geqslant 2$ est uniquement déterminé par D_1 et D_o).

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.6.12. Il existe un unique isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbres

$$\mathfrak{F} : \mathbb{W}_E \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}_{E'} ,$$

dit de Fourier ayant les propriétés suivantes :

(i) pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$,

$$\mathfrak{F}(\mathbb{W}_E^j \cap \mathbb{W}_{E,i}) = \mathbb{W}_{E'}^{-j} \cap \mathbb{W}_{E',i-j}$$

(ii) $\mathfrak{F} \circ \alpha = \beta' \circ \varepsilon$ et $\mathfrak{F} \circ \beta = \alpha'$, où $\varepsilon : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\vee\vee}$ est l'isomorphisme canonique, i.e. est défini par $\varepsilon(e)(e^\vee) = -e^\vee(e)$ (α' et β' sont bien entendu les isomorphismes (4.6.9) et (4.6.10) pour $E^\vee$).

(iii) $\mathfrak{F}(D_o,D_1) = (D_o',D_1')$, où $D_o' = D_o$ et où

$$D_1'(e^\vee)(e) = -e^\vee(D_1(e)) + D_o(e^\vee(e)) ,$$

pour tous $e \in \mathcal{E}$, $e^\vee \in \mathcal{E}^\vee$ (une section de $\mathbb{W}_E^o \cap \mathbb{W}_{E,1}$ étant identifiée à un couple (D_o,D_1) comme ci-dessus et idem pour E').

Corollaire 4.6.13. $\mathfrak{F}$ induit un isomorphisme, noté encore $\mathfrak{F}$, de fibrés vectoriels sur S

$$\mathfrak{F} : T^*E' \xrightarrow{\sim} T^*E ;$$

de plus, si σ et σ' sont les sections nulles de E et E' respectivement, $\mathfrak{F}$ identifie $T^*_{\sigma'(S)}(E')$ et $T^*_{\sigma(S)}(E)$ aux sections nulles de T^*E et T^*E' respectivement.

En coordonnées locales, $S = \{s\}$, $E = \{(s,x)\}$, $E' = \{(s,x')\}$, on a

$$\mathfrak{F}(x) = -\partial_{x'} , \quad \mathfrak{F}(\partial_x) = x'$$

et

$$\mathfrak{F}(s) = s , \quad \mathfrak{F}(\partial_s) = \partial_s ,$$

de sorte que, pour $T^*E = \{(s,x;\sigma,\xi)\}$ et $T^*E' = \{(s,x';\sigma,\xi')\}$, on a

$$\mathfrak{F}(s,x';\sigma,\xi') = (s,-\xi';\sigma,x')$$

4.7. Donnons maintenant une autre description de θ_o .

Rappelons la définition de l'isomorphisme hamiltonien (cf. [10] Ch. VII) : le crochet de Poisson,

$$\{\ ,\ \} : \mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X \otimes_k \mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X ,$$

est défini par k-bilinéarité à partir de

$$\{\sigma_i(P),\sigma_j(Q)\} = \sigma_{i+j-1}([P,Q]) ,$$

pour tous $P \in \mathcal{D}_{X,i}$ et $Q \in \mathcal{D}_{X,j}$, où $\sigma_k : \mathcal{D}_{X,k} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_k\mathcal{D}_X$ est la projection canonique ; il existe alors un unique isomorphisme de $\mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X$-Module

$$H^* : \Omega^1_{\mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X/k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}er_k(\mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X) ,$$

tel que

$$H^*(df)(g) = \{f,g\} ,$$

pour tous $f,g \in \mathrm{gr}\ \mathcal{D}_X$, et l'isomorphisme hamiltonien est l'isomorphisme de fibrés vectoriels sur T^*X ,

$$H : T^*(T^*X) \xrightarrow{\sim} T(T^*X) , \tag{4.7.1}$$

induit par H^* .

Pour $Y \hookrightarrow X$ comme en 4.0, (4.7.1) induit un isomorphisme (cf. [16] 2.9)

$$\begin{array}{ccc} T^*(T^*X)\times_{T^*X} T^*_YX & \twoheadrightarrow & T^*(T^*_YX) \\ H\downarrow\wr & & H\downarrow\wr \\ T(T^*X)\times_{T^*X} T^*_YX & \twoheadrightarrow & T_{T^*_YX}(T^*X) \end{array} \tag{4.7.2}$$

entre quotients de fibrés vectoriels sur T^*_YX . En coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$, $Y = \{y\} = \{x=0\}$, $T^*X = \{(x,y;\xi,\eta)\}$, $T^*_YX = \{(y;\xi)\} = \{x=\eta=0\}$, $T^*(T^*_YX) = \{(y,\xi;\eta,x')\}$ et $T_{T^*_YX}(T^*X) = \{(y,\xi;\tilde{\eta},\tilde{x})\}$, on a

$$H(y,\xi;\eta,x') = (y,\xi;-x',\eta) . \tag{4.7.3}$$

Alors, on a :

<u>Lemme</u> 4.7.4. <u>Le composé</u>

$$T^*(T^*_Y X) \xrightarrow{-H} T_{T^*_Y X}(T^*X) \xrightarrow{\theta_o} T^*(T_Y X)$$

<u>n'est autre</u> $\mathfrak{F}$ <u>pour</u> $(E \longrightarrow S) = (T_Y X \longrightarrow Y)$ (cf. 4.6.13).

<u>Preuve</u>. En coordonnées locales, on a

$$(-H)(y,\xi;\eta,x') = (y,\xi;x',-\eta)$$

$$\theta_o(y,\xi;x',-\eta) = (-x',y;\xi,\eta) = (y,-x';\eta,\xi)$$

d'où le lemme.

5. Déformation au cône normal d'un $\mathcal{D}$-Module filtré.

5.0. Après les longs préparatifs géométriques du numéro 4, nous sommes en mesure d'aborder la construction du spécialisé d'un $\mathcal{D}_X$-Module filtré. Nous gardons dans ce numéro les notations et les hypothèses du numéro 4.

Soit $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ un objet de $MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, on introduit une nouvelle filtration croissante, indéxée par $\mathbb{Z}$, associée à $Y \xhookrightarrow{i} X$,

$$\cdots \subset V_{-1}\mathcal{M} \subset V_0\mathcal{M} \subset V_1\mathcal{M} \subset \cdots \subset \mathcal{M},$$

en posant

$$V_j\mathcal{M} = \sum_{k+i\leqslant j} V_k\mathcal{D}_X\,\mathcal{M}_i \;; \tag{5.0.1}$$

on a trivialement :

<u>Lemme</u> 5.0.2. <u>La filtration</u> $V.\mathcal{M}$ <u>de</u> $\mathcal{M}$ <u>a les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>chaque</u> $V_j\mathcal{M}$ <u>est un sous-</u>$\mathcal{O}_X$<u>-Module quasi-cohérent de</u> $\mathcal{M}$,

(ii) <u>pour tout</u> $j\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_j \subset V_j\mathcal{M}$ <u>et en particulier</u> $V.\mathcal{M}$ <u>est exhaustive</u>,

(iii) <u>pour tous</u> $j_1,j_2\in\mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$V_{j_1}\mathcal{D}_X.V_{j_2}\mathcal{D}_X \subset V_{j_1+j_2}\mathcal{M}\,.$$

<u>Remarques</u> 5.0.3 (a) $V.\mathcal{M}$ n'est pas séparée en général.

(b) Si $\mathcal{M}_i=0$ pour $i<i_0$ et si $\mathcal{M}_i = \mathcal{D}_{X,i-i_1}.\mathcal{M}_{i_1}$ pour $i\geqslant i_1$, on a

$$V_j\mathcal{M} = \sum_{i=i_0}^{i_1} V_{j-i}\mathcal{D}_X.\mathcal{M}_i\,.$$

(c) Si $(\mathcal{N}_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents de $\mathcal{M}$ et si $(j_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'entiers de même ensemble d'indices, la filtration de $\mathcal{M}$

$$\Big(\sum_{\alpha\in A} V_{j-j_\alpha}\mathcal{D}_X.\mathcal{N}_\alpha\Big)_{j\in\mathbb{Z}}$$

est du type $V.\mathcal{M}$ pour $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\mathcal{M}_i = \sum_{\alpha\in A} \mathcal{D}_{X,i-j_\alpha}\cdot\mathcal{N}_\alpha$$

car

$$\sum_{k+i\leqslant j} V_k\mathcal{D}_X\cdot\mathcal{D}_{X,i-j_\alpha} = V_{j-j_\alpha}\mathcal{D}_X$$

pour tout $\alpha\in A$.

Alors, $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{M}.t^j$ est un $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X.t^j$-Module quasi-cohérent et donc il existe un unique $\mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$-Module quasi-cohérent

$$Df = Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$$

tel que

$$p_*Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{M}.t^j \tag{5.0.4}$$

et que l'on appellera la <u>déformation au cône normal de</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$.

On peut encore interpréter comme suit la construction de $Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$: à $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$, on associe le $\mathcal{B}_X$-Module quasi-cohérent caractérisé par

$$pr_{X*}\mathcal{N} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_j.t^j \tag{5.0.5}$$

(cf. (4.3.2)), alors, on a :

<u>Lemme</u> 5.0.6. $Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>est l'image de la flèche d'adjonction</u>

$$\mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathcal{B}_X} r^{-1}\mathcal{N} \longrightarrow \beta_*\beta^*(\mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathcal{B}_X} r^{-1}\mathcal{N})$$

(cf. (4.0.5) <u>et</u> (4.3.3)).

<u>Preuve</u>. Il suffit de remarquer que $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{M}.t^j$ est l'image de la flèche "multiplication"

$$(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j\mathcal{D}_X.t^j) \otimes_{(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{X,j}.t^j)} (\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_j.t^j) \longrightarrow \mathcal{M}[t,t^{-1}] .$$

<u>Corollaire</u> 5.0.7. <u>Si</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)\in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, $Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>est</u> $\mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$-<u>cohérent</u>.

<u>Preuve</u>. Si $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, $\mathcal{N}$ est $\mathcal{B}_X$-cohérent, donc $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathcal{B}_X} r^{-1}\mathcal{N}$ est $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$-cohérent et Df est un quotient quasi-cohérent de ce dernier module.

<u>Remarques</u> 5.0.8 (a) Df est aussi l'unique quotient q-plat de $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathcal{B}_X} r^{-1}\mathcal{N}$ qui coïncide avec $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathcal{B}_X} r^{-1}\mathcal{N}$ au-dessus de $\tilde{X}-T_YX$ (cf. [EGA IV] 2.8.1).

(b) Même pour $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{M}_i = \mathcal{O}_X$ pour $i \geqslant 0$, $\mathcal{M}_i = 0$ pour $i < 0$, $Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ n'est pas égal à $\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathcal{B}_X} r^{-1}\mathcal{N}$: ce produit tensoriel contient en général de la t-torsion qu'il faut tuer pour obtenir Df ; d'autre part, pour $n > 0$, les

$$\mathrm{Tor}_n^{r^{-1}\mathcal{B}_X}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}, r^{-1}\mathcal{N})$$

sont entièrement de t-torsion.

(c) Vu le lemme 5.0.6, il est clair que le foncteur $Df_{Y|X} : MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow M_{qcoh}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$ n'a aucune propriété d'exactitude raisonnable.

<u>Définition</u> 5.0.9. <u>Le spécialisé le long de</u> $Y \hookrightarrow X$ <u>de</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$ <u>est le</u> $\mathcal{D}_{T_YX}$-<u>Module quasi-cohérent</u>

$$Sp = Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = \alpha^* Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$$

(cf. (4.0.5)).

On a bien entendu

$$i_* p_{o*} Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = gr^V \mathcal{M} \tag{5.0.10}$$

en tant que $i_* p_{o*} \mathcal{D}_{T_YX}$ $(= gr^V \mathcal{D}_X)$-Module et il résulte de 5.0.7 que $Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ est $\mathcal{D}_{T_YX}$-cohérent pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$.

5.1. Toujours pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, nous allons voir que $Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ et $Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ sont canoniquement munis de structure de $\mathcal{D}$-Module filtré.

Pour cela, posons, pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$,

$$(5.1.1) \qquad (V_j\mathcal{M})_i = \sum_{\substack{i_1+i_2 \leqslant i \\ j_1+j_2 \leqslant j}} (V_{j_1}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i_1}).(\mathcal{M}_{j_2} \cap \mathcal{M}_{i_2}) \ ;$$

on vérifie facilement :

<u>Lemme</u> 5.1.2 (i) <u>Pour tous</u> $i,j \in \mathbb{Z}$, $(V_j\mathcal{M})_i$ <u>est un sous-</u>$\mathcal{O}_X$<u>-Module quasi-cohérent de</u> $\mathcal{M}$.

(ii) <u>Pour tous</u> $i,j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$(V_j\mathcal{M})_i \subset V_j\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_i \ ,$$

<u>et, en particulier, si</u> $\mathcal{M}_i = 0$ <u>dès que</u> $i < i_o$, <u>on a aussi</u> $(V_j\mathcal{M})_i = 0$ <u>dès que</u> $i < i_o$.

(iii) <u>Pour tous</u> $i,j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$\bigcup_{j' \in \mathbb{Z}} (V_{j'}\mathcal{M})_i = \mathcal{M}_i \quad \text{\underline{et}} \quad \bigcup_{i' \in \mathbb{Z}} (V_j\mathcal{M})_{i'} = V_j\mathcal{M} \ .$$

(iv) <u>Pour tous</u> $i_1,i_2,j_1,j_2 \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$(V_{j_1}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i_1}).(V_{j_2}\mathcal{M})_{i_2} \subset (V_{j_1+j_2}\mathcal{M})_{i_1+i_2} \ .$$

On munit alors $Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = Df$ de la filtration $(Df_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$(5.1.3) \qquad p_*Df_i = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (V_j\mathcal{M})_i.t^j \ ;$$

il résulte aussitôt de 5.1.2 que (Df,Df_i) est un objet de $MF_{qcoh}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$. Le lemme 5.0.6 admet alors la variante filtrée suivante

<u>Lemme</u> 5.1.4. (Df,Df_i) <u>est la coimage dans</u> $MF_{qcoh}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$ <u>de la flèche d'adjonction</u>

$$(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k},\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,i}) \otimes_{r^{-1}(\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_{X,i})} r^{-1}(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$$
$$\longrightarrow \beta_*\beta^*[(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k},\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k,i}) \otimes_{r^{-1}(\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_{X,i})} r^{-1}(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)]$$

(cf. (4.0.5) <u>et</u> (4.3.4)), <u>où</u> $\mathcal{N}_i$ <u>est défini par</u>

$$\mathrm{pr}_{X*}\mathcal{N}_i = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_i).t^j$$

<u>pour tout</u> $i \in \mathbb{Z}$.

<u>Preuve</u>. Compte-tenu de 5.0.6, le lemme résulte de la définition de $(V_j\mathcal{M})_i$ et de celle du produit tensoriel filtré.

<u>Corollaire</u> 5.1.5. <u>En tant que</u> $\mathcal{O}_{T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k)}$-<u>Module</u>, $\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathrm{Df}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>est un quotient de</u>

$$\theta_* r'^*(\mathrm{pr}_{T^*X})^*\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathcal{M}$$

(cf. (4.4.1) et 4.4.2) ; <u>en particulier</u>, <u>si</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ \mathrm{MF}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_X)$, $(\mathrm{Df},\mathrm{Df}_i)$ <u>est un objet de</u> $\mathrm{MF}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$.

<u>Preuve du corollaire</u>. D'après 5.1.4, gr Df est un quotient de $\mathrm{gr}\ \mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \otimes_{r^{-1}\mathrm{gr}\ \mathcal{B}_X} r^{-1}\mathrm{gr}\ \mathcal{N}$ en tant que $\mathrm{gr}\ \mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$-Module et, avec les notations 4.4.2, on a

$$\mathrm{gr}\ \mathcal{N} = \pi_*\varphi_*(\mathrm{pr}_{T^*X})^*\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathcal{M}$$

en tant que $\mathrm{gr}\ \mathcal{B}_X$-Module ; d'où la conclusion, compte-tenu de 4.4.2.

Sur $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = \alpha^*\mathrm{Df}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$, la filtration $(\mathrm{Df}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ définie ci-dessus induit une filtration $(\mathrm{Sp}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et on a

(5.1.6) $$i_*p_{o*}\mathrm{Sp}_i = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (V_j\mathcal{M})_i/(V_{j-1}\mathcal{M} \cap (V_j\mathcal{M})_i) \ ;$$

$(\mathrm{Sp},\mathrm{Sp}_i)$ est un objet de $\mathrm{MF}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D}_{T_YX})$.

Notons

(5.1.7) $$T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k) - T^*(T_YX) \xhookrightarrow{\bar\beta} T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k) \xhookleftarrow{\bar\alpha} T^*(T_YX)$$

les inclusions, déduites de α , β par le changement de base $T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k) \longrightarrow \widetilde{X}$; le lemme suivant résulte aussitôt des définitions et de 5.1.5 :

<u>Lemme</u> 5.1.8. <u>En tant que</u> $\mathcal{O}_{T^*(T_YX)}$-<u>Module</u>, $\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathrm{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>est un quotient de</u>

$$\bar\alpha^*\widetilde{\mathrm{gr}}\ \mathrm{Df}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \ ;$$

<u>en particulier</u>, <u>si</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, (Sp,Sp_i) <u>est un objet de</u> $MF_{parf}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$.

5.2. On peut aussi déformer au cône normal les $\mathcal{O}$-Modules quasi-cohérents (cf. [21] 6.2) et en particulier déformer le $\mathcal{O}_{T^*X}$-Module quasi-cohérent $\widetilde{gr}\,\mathcal{M}$ au cône normal de $i' : T^*_Y X \hookrightarrow T^*X$. La construction est la suivante : notons

$$(5.2.1) \qquad \widetilde{T^*X - T_{T^*_Y X}(T^*X)} \xrightarrow{\beta'} \widetilde{T^*X} \xleftarrow{\alpha'} T_{T^*_Y X}(T^*X)$$

les inclusions (θ induit un isomorphisme entre les diagrammes (5.2.1) et (5.1.7)), alors, la <u>déformation au cône normal de</u> $\widetilde{gr}\,\mathcal{M}$ est le $\mathcal{O}_{\widetilde{T^*X}}$-Module quasi-cohérent,

$$(5.2.2) \qquad \delta f = \delta f_{T^*_Y X | T^*X}(\widetilde{gr}\,\mathcal{M}) ,$$

image de la flèche d'adjonction

$$r'^*(pr_{T^*X})^*\widetilde{gr}\,\mathcal{M} \longrightarrow \beta'_*\beta'^* r'^*(pr_{T^*X})^*\widetilde{gr}\,\mathcal{M} ;$$

on vérifie immédiatement que

$$(5.2.3) \qquad r'^{\delta}_* f_{T^*_Y X | T^*X}(\widetilde{gr}\,\mathcal{M}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{J}'^{-j}\ \widetilde{gr}\,\mathcal{M}\ t^j$$

en tant que $\mathcal{O}_{T^*X}[t]$-Module (cf. 4.4). Ce $\mathcal{O}_{\widetilde{T^*X}}$-Module est q'-plat, i.e. sans t-torsion ; de plus, si $\widetilde{gr}\,\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_{T^*X}$-cohérent, de support $|Car(\mathcal{M})|$, δf est $\mathcal{O}_{\widetilde{T^*X}}$-cohérent de support la <u>déformation au cône normal de</u> $|Car(\mathcal{M})|$, i.e. l'adhérence dans $\widetilde{T^*X}$ de

$$\beta'^{-1} r'^{-1} (pr_{T^*X})^{-1}(|Car(\mathcal{M})|) .$$

Le <u>spécialisé de</u> $\widetilde{gr}\,\mathcal{M}$ <u>le long de</u> $T^*_Y X \xrightarrow{i'} T^*X$ est le $\mathcal{O}_{T_{T^*_Y X}(T^*X)}$-Module quasi-cohérent

$$(5.2.4) \qquad \sigma p = \sigma p_{T^*_Y X | T^*X}(\widetilde{gr}\,\mathcal{M}) = \alpha'^* \delta f_{T^*_Y X | T^*X}(\widetilde{gr}\,\mathcal{M}) .$$

Si $\widetilde{gr}\,\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_{T^*X}$-cohérent, de support $|Car(\mathcal{M})|$, σp est $\mathcal{O}_{T_{T^*_Y X}(T^*X)}$-cohérent, de support <u>le cône normal</u> $C_{T^*_Y X}(|Car(\mathcal{M})|)$ <u>de</u> $|Car(\mathcal{M})|$ <u>le long de</u> $T^*_Y X$, i.e. l'intersection avec $T_{T^*_Y X}(T^*X)$ de la déformation au cône normal de $|Car(\mathcal{M})|$.

<u>Lemme</u> 5.2.4. <u>On a des épimorphismes canoniques de</u> $\mathcal{O}_{T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k)}$-Modules

$$\theta_* r'^*(pr_{T^*X})^* \widetilde{gr}\, \mathcal{M} \twoheadrightarrow \widetilde{gr}\, Df_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \twoheadrightarrow \theta_* \delta f_{T^*_Y X|T^*X}(\widetilde{gr}\, \mathcal{M}) \ .$$

<u>Preuve</u>. Compte-tenu de la définition de δf , il suffit de remarquer que le premier de ces quotients, défini en 5.1.5, est un isomorphisme au-dessus de $T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k) - T^*(T_Y X)$.

Par restriction à "$t = 0$", on a donc le diagramme d'épimorphismes de $\mathcal{O}_{T^*(T_Y X)}$-Modules suivant

$$\begin{tikzcd}
\theta_{o*} r_o'^* i'^* \widetilde{gr}\, \mathcal{M} \arrow[d, two heads, bend right] \arrow[r, two heads] \arrow[rr, two heads, bend left] & \bar{\alpha}^* \widetilde{gr}\, Df_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \widetilde{gr}\, Sp_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \\
\theta_{o*} \delta f_{T^*_Y X|T^*X}(\widetilde{gr}\, \mathcal{M}) & &
\end{tikzcd} \tag{5.2.5}$$

diagramme qui établit un premier lien entre $\theta_{o*} \delta f_{T^*_Y X|T^*X}(\widetilde{gr}\, \mathcal{M})$ que l'on comprend bien géométriquement et $\widetilde{gr}\, Sp_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ que l'on comprend beaucoup moins. Le but du numéro suivant est de préciser ce lien.

6. Les bifiltrations (r,s) d'un $\mathcal{D}$-Module filtré.

6.0. On garde les hypothèses et notations de 4 et 5 ; de plus, on note Σ l'ensemble des couples (r,s) de l'un des types suivants

(i) $r,s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et $1 \leqslant s < r \leqslant \infty$,

(ii) $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $r > 1$ et $s = .$,

(iii) $r = .$ et $s \in \mathbb{Q}$, $s \geqslant 1$.

Pour chaque couple $(r,s) \in \Sigma$, on munit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'une relation d'ordre, notée $<_{(r,s)}$ et définie comme suit : si (r,s) est de type (i), on pose

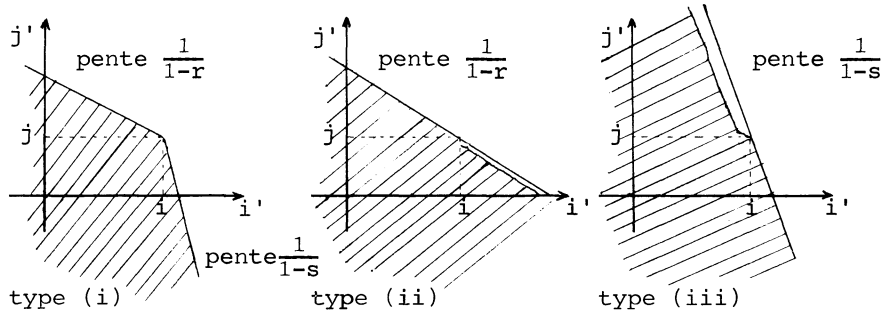
$$(6.0.1) \qquad (i',j') \leqslant_{(r,s)} (i,j) \iff \begin{cases} j' \leqslant j + \dfrac{i'-i}{1-r} \\ \quad \text{et} \\ i'-i \leqslant (1-s)(j'-j) \end{cases}$$

et, si (r,s) est de type (ii) ou (iii), on pose

$$(6.0.2) \qquad (i',j') \leqslant_{(r,.)} (i,j) \iff \begin{cases} j' \leqslant j + \dfrac{i'-i}{1-r} \text{ avec} \\ \text{inégalité stricte} \\ \text{si } i' > i \end{cases}$$

$$(6.0.3) \qquad (i',j') \leqslant_{(.,s)} (i,j) \iff \begin{cases} i'-i \leqslant (1-s)(j'-j) \text{ avec} \\ \text{inégalité stricte} \\ \text{si } j' > j \end{cases}$$

(comme d'habitude, on écrira "$(i',j') <_{(r,s)} (i,j)$" à la place de "$(i',j') \leqslant_{(r,s)} (i,j)$ et $(i',j') \neq (i,j)$". Géométriquement, on a $(i',j') \leqslant_{(r,s)} (i,j)$ si et seulement si (i',j') est dans la partie hachurée du plan ci-dessous :



Pour tout couple $(r,s) \in \Sigma$, on pose alors

$$(6.0.4) \qquad \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} = \sum_{(i',j') \leqslant_{(r,s)} (i,j)} (V_{j'}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i'}) \subset \mathcal{D}_X \ ;$$

on a trivialement :

<u>Lemme</u> 6.0.5 (i) <u>Chaque</u> $\mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]}$ <u>est un sous-</u>$\mathcal{O}_X$<u>-Module quasi-cohérent</u> (<u>à gauche et à droite</u>) <u>de</u> $\mathcal{D}_X$.

(ii) <u>Pour tout</u> $(i_1,j_1) \leqslant_{(r,s)} (i,j)$, <u>on a</u> $\mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i_1,j_1]} \subset \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]}$.

(iii) $\bigcap_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} = \{0\}$ <u>et</u> $\bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} = \mathcal{D}_X$.

(iv) <u>Pour tous</u> (i_1,j_1), (i_2,j_2) <u>dans</u> $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$\mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i_1,j_1]} . \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i_2,j_2]} \subset \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i_1+i_2,j_1+j_2]} \ .$$

(v) $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[0,0]}$.

Par suite, si l'on pose, pour tout (i,j),

$$(6.0.6) \qquad gr^{(r,s)}_{[i,j]}\mathcal{D}_X = \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} \Big/ \sum_{(i_1,j_1) <_{(r,s)} (i,j)} \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i_1,j_1]}$$

et

$$(6.0.7) \qquad gr^{(r,s)}\mathcal{D}_X = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} gr^{(r,s)}_{[i,j]}\mathcal{D}_X \ ,$$

on voit que $gr^{(r,s)}\mathcal{D}_X$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente (bigraduée).

On vérifie en outre que, pour tout (i,j), on a

$$(6.0.8) \qquad \mathcal{D}^{(\infty,1)}_{X[1,j]} = V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i} \ ,$$

que, pour tous $r,r',s,s' \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ avec $1 \leqslant s \leqslant s' < r' \leqslant r \leqslant \infty$ et pour tout (i,j), on a

$$(6.0.9) \qquad \mathcal{D}^{(\infty,1)}_{X[i,j]} \subset \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} \subset \mathcal{D}^{(r',s')}_{X[i,j]}$$

et que, pour tout $(r,s) \in \Sigma$ et tout (i,j), on a

$$(6.0.10) \qquad \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} \subset \mathcal{D}^{(r,.)}_{X[i,j]} \quad \text{si} \quad r \neq . \ ,$$

$$(6.0.11) \qquad \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} \subset \mathcal{D}^{(.,s)}_{X[i,j]} \quad \text{si} \quad s \neq . \ .$$

Le lemme facile suivant est cependant essentiel pour ce qui va suivre.

<u>Lemme</u> 6.0.12. $\mathrm{gr}^{(\infty,1)}\mathcal{D}_X$ <u>s'identifie canoniquement à</u> $\mathrm{gr}\,\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X = i_*p_{o*}\tilde{\omega}_{o*}\mathcal{O}_{T^*(T_YX)}$ <u>et, pour tout</u> $(r,s)\in\Sigma$, <u>les inclusions canoniques ci-dessus induisent un isomorphisme de</u> $\mathcal{O}_X$-<u>Algèbres quasi-cohérentes bigraduées</u>

$$\mathrm{gr}^{(\infty,1)}\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X \ ;$$

<u>en particulier</u>, $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X$ <u>est commutative</u>.

<u>Preuve</u>. On a encore

$$\mathrm{gr}^{\{r,s\}}_{[i,j]}\mathcal{D}_X = \frac{V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i}}{(V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i}) \cap \sum_{(i_1,j_1) <_{(r,s)} (i,j)} (V_{j_1}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i_1})}$$

soit encore

$$\mathrm{gr}^{\{r,s\}}_{[i,j]}\mathcal{D}_X = \frac{V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i}}{(V_{j-1}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i}) + (V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i-1})}$$

puisque, pour $(i_1,j_1) <_{(r,s)} (i,j)$, on a $i_1 \leqslant i-1$ ou $j_1 \leqslant j-1$.

6.1. Soit $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ un objet de $\mathrm{MF}_{\mathrm{qcoh}}(\mathcal{D}_X)$; pour tout $(r,s)\in\Sigma$ et tout $(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, on pose

$$\mathcal{M}^{\{r,s\}}_{[i,j]} = \sum_{(i',j') <_{(r,s)} (i,j)} (V_j\mathcal{M})_i \subset \mathcal{M}, \tag{6.1.1}$$

où $(V_j\mathcal{M})_i$ est défini en (5.0.1) ; on a trivialement :

<u>Lemme</u> 6.1.2 (i) <u>Chaque</u> $\mathcal{M}^{\{r,s\}}_{[i,j]}$ <u>est un sous-</u>$\mathcal{O}_X$-<u>Module quasi-cohérent de</u> $\mathcal{M}$.

(ii) <u>Pour tous</u> $(i_1,j_1) \leqslant_{(r,s)} (i,j)$, <u>on a</u> $\mathcal{M}^{(r,s)}_{[i_1,j_1]} \subset \mathcal{M}^{\{r,s\}}_{[i,j]}$.

(iii) $\bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^{\{r,s\}}_{[i,j]} = \mathcal{M}$.

(iv) <u>Pour tous</u> (i_1,j_1), (i_2,j_2) <u>dans</u> $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$\mathcal{D}_{X[i_1,j_1]}^{(r,s)} . \mathcal{M}^{(r,s)}_{[i_2,j_2]} \subset \mathcal{M}^{(r,s)}_{[i_1+i_2,j_1+j_2]} .$$

Par suite, si l'on définit $\mathrm{gr}\left[\begin{smallmatrix} r,s \\ i,j \end{smallmatrix}\right]\mathcal{M}$ et $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{M}$ de manière analogue à (6.0.6) et (6.0.7), on voit que $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{M}$ est un $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X$-Module quasi-cohérent, qui compte-tenu de 6.0.12, induit un $\mathcal{O}_{T^*(T_Y X)}$-Module quasi-cohérent $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M}$ caractérisé par

$$\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{M} = i_* p_{o*} \widetilde{\omega}_{o*} \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M} \tag{6.1.3}$$

en tant que $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X$ $(= i_* p_{o*} \widetilde{\omega}_{o*} \mathcal{O}_{T^*(T_Y X)})$-Module.

On vérifie en outre que, pour tout (i,j), on a

$$\mathcal{M}\left[\begin{smallmatrix} \infty,1 \\ i,j \end{smallmatrix}\right] = (V_j \mathcal{M})_i \tag{6.1.4}$$

et que les inclusions (6.0.9), (6.0.10) et (6.0.11) valent tout aussi bien pour $\mathcal{M}$ à la place de $\mathcal{D}_X$ et induisent, pour $r,s \in \mathbb{Q}$, avec $1 < s < r$, le diagramme commutatif de $\mathcal{O}_{T^*(T_Y X)}$-Modules suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{gr}}^{(\infty,1)}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{gr}}^{(\infty,s)}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{gr}}^{(\infty,r)}\mathcal{M} \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{gr}}^{(\infty,.)}\mathcal{M} \\
\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,1)}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,.)}\mathcal{M} & \\
\widetilde{\mathrm{gr}}^{(s,1)}\mathcal{M} \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{gr}}^{(.,s)}\mathcal{M} & & \\
\widetilde{\mathrm{gr}}^{(.,1)}\mathcal{M} & & &
\end{tikzcd} \tag{6.1.5}$$

<u>Lemme</u> 6.1.6 (i) <u>Toutes les flèches de</u> (6.1.5) <u>sont des épimorphismes, tout comme la flèche canonique</u> $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r',s')}\mathcal{M}$ <u>pour</u> $r,r',s,s' \in \mathbb{Q}$ <u>avec</u> $1 < s \leqslant s' < r' \leqslant s$.

(ii) <u>Pour</u> $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $r > 1$, <u>et</u> $s \in \mathbb{Q}$, $s \geqslant 1$, <u>on a</u>

$$\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,.)}\mathcal{M} = \varinjlim_{\substack{s \to r \\ s < r}} \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M}$$

<u>et</u>

$$\widetilde{\mathrm{gr}}^{(.,s)}\mathcal{M} = \varinjlim_{\substack{r \to s \\ r > s}} \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M}$$

(iii) <u>Le diagramme d'épimorphismes</u> (cf. (6.1.5))

$$\widetilde{\mathrm{gr}}^{(\cdot,1)}\mathcal{M} \twoheadleftarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{(\infty,1)}\mathcal{M} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{(\infty,\cdot)}\mathcal{M}$$

<u>s'identifie canoniquement au diagramme</u>

$$\theta_{o*}{}^{\delta} f_{T^*_Y X|T^*X}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}) \twoheadleftarrow \bar{\alpha}^*\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathrm{Df}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \twoheadrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathrm{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$$

<u>défini en</u> (5.2.5).

<u>Preuve</u>. On a encore, pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}r,s\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i}{(V_j\mathcal{M})_i \cap \sum_{(i_1,j_1) < (r,s)(i,j)} (V_{j_1}\mathcal{M})_{i_1}}$$

et, en particulier,

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}\cdot,1\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i}{(V_{j-1}\mathcal{M})_i + ((V_j\mathcal{M})_i \cap \mathcal{M}_{i-1})},$$

ou

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}\cdot,1\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i/((V_j\mathcal{M})_i \cap \mathcal{M}_{i-1})}{(V_{j-1}\mathcal{M})_i/((V_{j-1}\mathcal{M})_i \cap \mathcal{M}_{i-1}},$$

avec

$$\frac{(V_j\mathcal{M})_i}{(V_j\mathcal{M})_i \cap \mathcal{M}_{i-1}} = \mathrm{Im}\left(\frac{(V_j\mathcal{M})_i}{(V_j\mathcal{M})_{i-1}} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{M}_{i-1}}\right),$$

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}\infty,1\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i}{(V_{j-1}\mathcal{M})_i + (V_j\mathcal{M})_{i-1}},$$

ou

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}\infty,1\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i/(V_j\mathcal{M})_{i-1}}{(V_{j-1}\mathcal{M})_i/(V_{j-1}\mathcal{M})_{i-1}},$$

et

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}\infty,\cdot\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i}{(V_j\mathcal{M})_{i-1} + ((V_j\mathcal{M})_i \cap V_{j-1}\mathcal{M})}$$

ou

$$\mathrm{gr}\begin{bmatrix}\infty,\cdot\\ i,j\end{bmatrix}\mathcal{M} = \frac{(V_j\mathcal{M})_i/((V_j\mathcal{M})_i \cap V_{j-1}\mathcal{M})}{(V_j\mathcal{M})_{i-1}/((V_j\mathcal{M})_{i-1} \cap V_{j-1}\mathcal{M})},$$

d'où la conclusion.

<u>Corollaire</u> 6.1.7. <u>Si</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ \mathrm{MF}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_X)$, <u>chaque</u> $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M}$, $(r,s) \in \Sigma$, <u>est cohérent sur</u> $\mathcal{O}_{T^*(T_Y X)}$ <u>et, pour tout</u> $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $r > 1$ (<u>resp.</u> <u>tout</u> $s \in \mathbb{Q}$, $s \geqslant 1$), <u>il existe</u> $s \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant s < r$ (<u>resp.</u> $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $r > s$) <u>tel que la flèche canonique</u>

$$\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s')}\mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,\cdot)}\mathcal{M}$$

(<u>resp.</u>
$$\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r',s)}\mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{gr}}^{(\cdot,s)}\mathcal{M})$$

<u>soit un isomorphisme, pour tout</u> $s' \in \mathbb{Q} \cap [s,r[$ (<u>resp.</u> <u>tout</u> $r' \in (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}) \cap]s,r]$).

6.2. Etudions en particulier les $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M}$ pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = (\mathcal{D}_X/\mathcal{J}\ ,\ \mathcal{D}_{X,i}/(\mathcal{J} \cap \mathcal{D}_{X,i}))$ pour un $\mathcal{D}_X$-Idéal (à gauche) $\mathcal{J}$. Dans ce cas particulier, on vérifie facilement que

$$V_j\mathcal{M} = V_j\mathcal{D}_X/(\mathcal{J} \cap V_j\mathcal{D}_X)$$

et que

$$(V_j\mathcal{M})_i = (V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i})/(\mathcal{J} \cap V_j\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i})$$

pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$, de sorte que

$$\mathcal{M}^{(r,s)}_{[i,j]} = \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]}/(\mathcal{J} \cap \mathcal{D}^{(r,s)}_{[i,j]}) \tag{6.2.1}$$

pour tous $(r,s) \in \Sigma$ et $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

<u>Définition</u> 6.2.2. <u>Pour tout</u> $(r,s) \in \Sigma$, <u>on dira qu'une section locale</u> P <u>de</u> $\mathcal{D}_X$ <u>admet un symbole</u> (r,s) <u>s'il existe</u> $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ <u>tel que</u>

$$P \in \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i,j]} - \sum_{(i_1,j_1) <_{(r,s)} (i,j)} \mathcal{D}^{(r,s)}_{X[i_1,j_1]}\ ;$$

<u>s'il en est ainsi, on appellera</u> (i,j) <u>le bidegré</u> (r,s) <u>de</u> P <u>et on appellera symbole</u> (r,s) <u>de</u> P <u>l'image, notée</u> $\sigma^{(r,s)}(P)$, <u>de</u> P <u>dans</u> $\mathrm{gr}^{(r,s)}_{[i,j]}\mathcal{D}_X \subset \mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X = i_* p_{o*} \widetilde{\omega}_{o*} \theta_{T^*(T_Y X)}$. <u>Pour tout</u> $(r,s) \in \Sigma$ <u>et pour tout</u> $\mathcal{D}_X$-<u>Idéal</u> <u>à gauche</u> $\mathcal{J}$, <u>on notera</u> $\sigma^{(r,s)}(\mathcal{J})$ <u>le</u> $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X$-<u>Idéal</u> <u>engendré par les symboles</u> (r,s) <u>des sections locales de</u> $\mathcal{J}$ <u>qui veulent bien en admettre un</u> (<u>le</u> $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X$-<u>Idéal</u> <u>engendré par la famille vide de sections locales de</u> $\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X$ <u>est</u> $\{0\}$!).

Il résulte aussitôt de (6.2.1) et de la définition ci-dessus que :

Lemme 6.2.3. Pour tout $\mathcal{D}_X$-Idéal à gauche $\mathcal{J}$ et pour tout $(r,s) \in \Sigma$, on a

$$\mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{M} = \mathrm{gr}^{(r,s)}\mathcal{D}_X/\sigma^{(r,s)}(\mathcal{J}) ,$$

avec $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) = (\mathcal{D}_X/\mathcal{J} , \mathcal{D}_{X,i}/(\mathcal{J} \cap \mathcal{D}_{X,i}))$.

6.3. Pour tous $(r,s) \in \Sigma$ et $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on note $S^{(r,s)}_{[i,j]} \subset \mathbb{R}^2$ le secteur formé des $(i',j') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(i',j') \leqslant_{(r,s)} (i,j)$ (cf. (6.0.1), (6.0.2) et (6.0.3)).

Définition 6.3.1. Pour P une section locale de $\mathcal{D}_X$, on appellera polygône de Newton de P et on notera $N(P)$ la frontière dans $\mathbb{R}^2$ de l'intersection des $S^{(r,s)}_{[i,j]}$ pour les $(r,s) \in \Sigma$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tels que P admette un symbole (r,s) de bidegré (i,j).

Le lecteur vérifiera sans peine les propriétés suivantes des symboles (r,s) et du polygône de Newton :

Lemme 6.3.2 (i) Pour toute section locale P de $\mathcal{D}_X$, $P \neq 0$, $N(P)$ est un polygône concave, à sommets dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ et à un nombre fini $\ell+2$, $\ell \geqslant 0$, de côtés de pentes

$$0 = k_0 > k_1 > \ldots > k_\ell > k_{\ell+1} = -\infty$$

avec $k_1,\ldots,k_\ell \in \mathbb{Q}$.

(ii) Une section locale $P \neq 0$ de $\mathcal{D}_X$ admet un symbole $(r,s) \in \Sigma$, avec r et $s \neq .$, si et seulement si il existe $\lambda \in \{0,1,\ldots,\ell\}$ tel que

$$k_{\lambda+1} \leqslant \frac{1}{1-s} < \frac{1}{1-r} \leqslant k_\lambda$$

et alors le bidegré de $\sigma^{(r,s)}(P)$ est le sommet de $N(P)$ commun aux côtés de pentes k_λ , $k_{\lambda+1}$.

(iii) Une section locale $P \neq 0$ de $\mathcal{D}_X$ admet toujours un symbole $(r,.) \in \Sigma$ (resp. $(.,s) \in \Sigma$) et le bidegré de $\sigma^{(r,.)}(P)$ (resp. de $\sigma^{(.,s)}(P)$) est le sommet de $N(P)$ commun aux côtés de pentes k_λ , $k_{\lambda+1}$ avec

$$k_{\lambda+1} < \frac{1}{1-r} \leqslant k_\lambda$$

(<u>resp</u>. $k_{\lambda+1} \leqslant \frac{1}{1-s} < k_\lambda$).

(iv) <u>Pour toute section locale</u> $P \neq 0$ <u>de</u> $\mathcal{D}_X$, <u>de polygône de Newton</u> $N(P)$ <u>de pentes</u> $(k_\lambda)_{\lambda=0,\ldots,\ell+1}$ <u>et pour tous</u> $r,s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ <u>et tout</u> $\lambda \in \{0,1,\ldots,\ell\}$ <u>avec</u>

$$k_{\lambda+1} \leqslant \frac{1}{1-s} < \frac{1}{1-r} \leqslant k_\lambda$$

<u>on a</u>

$$\sigma^{(r,s)}(P) = \sigma^{(r,.)}(P) = \sigma^{(.,s)}(P)$$
$$= \sigma^{(r_\lambda,s_\lambda)}(P) = \sigma^{(r_\lambda,.)}(P) = \sigma^{(.,s_\lambda)}(P) ,$$

<u>où</u>

$$r_\lambda = 1 - \frac{1}{k_\lambda} \quad \text{et} \quad s_\lambda = 1 - \frac{1}{k_{\lambda+1}}$$

(<u>tous les symboles ci-dessus étant bien définis</u>).

On a aussi facilement :

<u>Lemme</u> 6.3.3. <u>Si</u> P <u>et</u> Q <u>sont deux sections locales de</u> $\mathcal{D}_X$, P <u>et</u> $Q \neq 0$, <u>pour tous</u> $(r,s) \in \Sigma$, PQ <u>admet un symbole</u> (r,s) <u>si et seulement si</u> P <u>et</u> Q <u>en admettent un et on a alors</u>

$$\sigma^{(r,s)}(P.Q) = \sigma^{(r,s)}(P).\sigma^{(r,s)}(Q) ;$$

<u>en particulier</u>, $\sigma^{(r,s)}(\mathcal{D}_X.P) = \{0\}$ <u>si</u> P <u>n'admet pas de symbole</u> (r,s) <u>et</u> $\sigma^{(r,s)}(\mathcal{D}_X.P) = gr^{(r,s)}\mathcal{D}_X.\sigma^{(r,s)}(P)$ <u>si</u> P <u>en admet un</u>.

7. Le point de vue microlocal.

7.0. On garde les notations et les hypothèses des numéros 4 et 5. On a vu comment Kashiwara associe à $i : Y \hookrightarrow X$ une filtration $(V_j\mathcal{D}_X)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{D}_X$. On va maintenant décrire la filtration $(V_j\mathcal{E}_X)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{E}_X$ que Kashiwara et Oshima (cf. [15]) associe à $i' : T^*_Y X \hookrightarrow T^*X$.

Sur T^*X, on dispose de l'Anneau filtré $(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X,i})$, microlocalisé (formel) de l'Anneau filtré $(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i})$ au sens algébrique (cf. A.3.4); on notera $(\dot{\mathcal{E}}_X, \dot{\mathcal{E}}_{X,i})$ la restriction de cet Anneau filtré à

(7.0.1)
$$\begin{tikzcd} \dot{T}^*X = T^*X - \sigma_X(X) \arrow[r, hook, "\gamma_X"] \arrow[dr, "\dot{\pi}_X"'] & T^*X \arrow[d, "\pi_X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

où $\sigma_X : X \longrightarrow T^*X$ est la section nulle ; on a des isomorphismes canoniques

(7.0.2)
$$(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i}) \xrightarrow{\sim} \pi_{X*}(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X,i})$$
$$(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i}) \xrightarrow{\sim} \sigma_X^{-1}(\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X,i})$$

et une flèche de recollement

(7.0.3)
$$(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i}) \longrightarrow \sigma_X^{-1}\gamma_{X*}(\dot{\mathcal{E}}_X, \dot{\mathcal{E}}_{X,i}) .$$

Posons, pour tout $j \in \mathbb{Z}$

(7.0.4)'
$$V'_j\mathcal{E}_X = \sum_{i+k\leqslant j} \mathcal{E}_{X,i} . \pi_X^{-1}(V_k\mathcal{D}_X)$$

(7.0.4)"
$$V''_j\mathcal{E}_X = \sum_{i+k\leqslant j} \pi_X^{-1}(V_k\mathcal{D}_X) . \mathcal{E}_{X,i}$$

de sorte que

$$(\mathcal{E}_X, V'_j\mathcal{E}_X) = (\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X,i}) \otimes_{\pi_X^{-1}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i})} \pi_X^{-1}(\mathcal{D}_X, V_j\mathcal{D}_X)$$

et

$$(\mathcal{E}_X, V''_j\mathcal{E}_X) = \pi_X^{-1}(\mathcal{D}_X, V_j\mathcal{D}_X) \otimes_{\pi_X^{-1}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_{X,i})} (\mathcal{E}_X, \mathcal{E}_{X,i})$$

et que $V'_{\cdot}\mathcal{E}_X$ (resp. $V''_{\cdot}\mathcal{E}_X$) est une filtration croissante de $\mathcal{E}_X$ par des sous-$\mathcal{E}_{X,o}$-Modules quasi-cohérents à gauche (resp. à droite).

<u>Lemme</u> 7.0.5 (i) <u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$V'_j\mathcal{E}_X = \begin{cases} \mathcal{E}_{X,j}.\pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X) & \text{si } j \geqslant 0 \\ \sum_{j \leqslant i \leqslant 0} \mathcal{E}_{X,i}.\pi_X^{-1}(V_{j-i}\mathcal{D}_X) & \text{si } j \leqslant 0 \end{cases}$$

<u>et</u>

$$V''_j\mathcal{E}_X = \begin{cases} \pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X).\mathcal{E}_{X,j} & \text{si } j \geqslant 0 \\ \sum_{j \leqslant i \leqslant 0} \pi_X^{-1}(V_{j-i}\mathcal{D}_X).\mathcal{E}_{X,i} & \text{si } j \leqslant 0 \end{cases}$$

(ii) <u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u> $V'_j\mathcal{E}_X = V''_j\mathcal{E}_X$.

<u>Preuve</u>. La partie (i) résulte aussitôt des égalités

$$V_k\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{X,k}.V_o\mathcal{D}_X = V_o\mathcal{D}_X.\mathcal{D}_{X,k} \text{ , pour } k \geqslant 0 \text{ ,}$$

et

$$\mathcal{E}_{X,i} = \mathcal{E}_{X,o}.\pi_X^{-1}(\mathcal{D}_{X,i}) = \pi_X^{-1}(\mathcal{D}_{X,i}).\mathcal{E}_{X,o} \text{ , pour } i \geqslant 0 \text{ .}$$

Pour la partie (ii), remarquons tout d'abord que

$$\mathcal{E}_{X,j}.\pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1}) = \pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1}).\mathcal{E}_{X,j}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$ (si $P \in \mathcal{E}_{X,j}$, $Q \in \pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1})$, on a $[P,Q] \in \mathcal{E}_{X,j}$; d'autre part, $1 \in V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1}$). Comme $V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1}$ engendre la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $V_o\mathcal{D}_X$, on en déduit que

$$\mathcal{E}_{X,j}.\pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X) = \pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X).\mathcal{E}_{X,j}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Il ne reste plus qu'à démontrer l'assertion (ii) pour $j \leqslant 0$: sur la section nulle, on a

$$\sigma_X^{-1}(V'_j\mathcal{E}_X) = V_j\mathcal{D}_X = \sigma_X^{-1}(V''_j\mathcal{E}_X)$$

puisque $\sigma_X^{-1}(\mathcal{E}_{X,i}) = 0$ si $i \leqslant 0$ et $\sigma_X^{-1}(\mathcal{E}_{X,o}) = \mathcal{O}_X$; on aura donc terminé si l'on montre de plus que, sur $\dot{T}^*X$, on a

$$V'_j\dot{\mathcal{E}}_X = \dot{\mathcal{E}}_{X,j}.\dot{\pi}_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X) \quad \text{et} \quad V''_j\dot{\mathcal{E}}_X = \dot{\pi}_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X).\dot{\mathcal{E}}_{X,j} \ ;$$

or, ces deux dernières égalités résultent aussitôt de l'égalité $\dot{\mathcal{E}}_{X,i} = \dot{\mathcal{E}}_{X,j}.\dot{\pi}_X^{-1}(\mathcal{D}_{X,i-j})$ pour $i \geqslant j$ et des inclusions $\mathcal{D}_{X,i-j}.V_{j-i}\mathcal{D}_X \subset V_o\mathcal{D}_X$ et $V_{j-i}\mathcal{D}_X.\mathcal{D}_{X,i-j} \subset V_o\mathcal{D}_X$, d'où le lemme.

On posera alors

$$V_j\mathcal{E}_X = V'_j\mathcal{E}_X = V''_j\mathcal{E}_X \tag{7.0.6}$$

de sorte que

$$---\subset V_{-1}\mathcal{E}_X \subset V_o\mathcal{E}_X \subset V_1\mathcal{E}_X \subset --- \subset \mathcal{E}_X$$

est une filtration croissante de $\mathcal{E}_X$ par des sous-$\mathcal{E}_{X,o}$-Modules quasi-cohérents (à gauche et à droite) qui vérifie clairement les propriétés suivantes :

<u>Lemme</u> 7.0.7 (i) <u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u> $\mathcal{E}_{X,j} \subset V_j\mathcal{E}_X$, <u>de sorte que</u> $V.\mathcal{E}_X$ <u>est exhaustive</u>, <u>et les isomorphismes canoniques</u> (7.0.2) <u>induisent des isomorphismes</u>

$$V_j\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} \pi_{X*}V_j\mathcal{E}_X$$

<u>et</u>

$$V_j\mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} \sigma_X^{-1}V_j\mathcal{E}_X \ .$$

(ii) <u>Pour tous</u> $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$V_{j_1}\mathcal{E}_X.V_{j_2}\mathcal{E}_X \subset V_{j_1+j_2}\mathcal{E}_X$$

<u>avec égalité sur</u> $\dot{T}^*X$ <u>quelque soient</u> j_1 , j_2 <u>et avec égalité sur</u> T^*X <u>tout entier pour</u> $j_1.j_2 \geqslant 0$.

(iii) <u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$V_j\mathcal{E}_X|T^*X - T^*_YX = \mathcal{E}_X|T^*X - T^*_YX \ .$$

En coordonnées locales, $X = \{(x,y)\}$ et $Y = \{y\} = \{x=0\}$, on a

$$V_j\mathcal{E}_X = \sum_{\beta,\gamma \geqslant 0} \mathcal{E}_{X,j+|\beta|}\, x^\beta \partial_y^\gamma = \sum_{\beta,\gamma \geqslant 0} x^\beta \partial_y^\gamma \mathcal{E}_{X,j+|\beta|} \ , \tag{7.0.8}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

<u>Remarque</u> 7.0.9. Kashiwara et Oshima ([15]) définissent, sur $\dot{T}^*X$, $\mathcal{E}_\Lambda \subset \dot{\mathcal{E}}_X$, pour $\Lambda = \dot{T}^*_Y X$, comme la sous-$\dot{\mathcal{E}}_{X,o}$-Algèbre engendrée par $\dot{\sigma}_1^{-1}(\mathcal{J}')$, où $\dot{\sigma}_1 : \dot{\mathcal{E}}_{X,1} \twoheadrightarrow gr_1\dot{\mathcal{E}}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\dot{T}^*X}$ est le symbole principal de degré 1 et où $\mathcal{J}'$ est le $\mathcal{O}_{T^*X}$-Idéal définissant $T^*_Y X \subset T^*X$; en fait, on a (cf. 4.4.3)

$$\dot{\sigma}_1^{-1}(\mathcal{J}') = \dot{\mathcal{E}}_{X,o}.\dot{\pi}_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1}) = \dot{\pi}_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,1}).\dot{\mathcal{E}}_{X,o} ,$$

de sorte que $V_o\dot{\mathcal{E}}_X = \mathcal{E}_\Lambda$ et que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_j\dot{\mathcal{E}}_X = \mathcal{E}_\Lambda(j)$, avec les notations de loc. cit.

Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, posons

$$(7.0.10)' \qquad (V_j\mathcal{E}_X)'_i = \sum_{\substack{i_1+i_2 \leqslant i \\ j_1+j_2 \leqslant j}} (\mathcal{E}_{X,j_1} \cap \mathcal{E}_{X,i_1}).\pi_X^{-1}(V_{j_2}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i_2})$$

et

$$(7.0.10)'' \qquad (V_j\mathcal{E}_X)''_i = \sum_{\substack{i_1+i_2 \leqslant i \\ j_1+j_2 \leqslant j}} \pi_X^{-1}(V_{j_2}\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i_2}).(\mathcal{E}_{X,j_1} \cap \mathcal{E}_{X,i_1}) ;$$

on a clairement

$$\mathcal{E}_{X,j} \cap \mathcal{E}_{X,i} \subset (V_j\mathcal{E}_X)'_i \subset V_j\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i}$$

$$\mathcal{E}_{X,j} \cap \mathcal{E}_{X,i} \subset (V_j\mathcal{E}_X)''_i \subset V_j\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i}$$

et en fait :

<u>Lemme</u> 7.0.11. <u>Pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u>

$$(V_j\mathcal{E}_X)'_i = V_j\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i} = (V_j\mathcal{E}_X)''_i .$$

<u>Preuve</u>. Les égalités ci-dessus sont triviales sur $T^*X - T^*_Y X$, sur $T^*_X X$ et, pour $i \leqslant j$, sur T^*X tout entier. Il reste donc à les vérifier, pour $i > j$, sur $\dot{T}^*_Y X$. On se ramène alors facilement au cas où $j = 0$ (en un point de $\dot{T}^*_Y X$, il existe toujours une équation locale de Y, x, en l'image de ce point dans X, telle que ∂_x soit inversible dans $\mathcal{E}_X$) et alors il suffit de montrer, par exemple pour la seconde égalité, que

$$V_o\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i} = \sum_{i' \geqslant i} \pi_X^{-1}(V_o\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_{X,i'}).\mathcal{E}_{X,i-i'} \ ;$$

ce dernier point résulte facilement de l'écriture en coordonnées locales (7.0.8).

7.1. Rappelons que l'on a attaché à $Y \hookrightarrow X$ le diagramme commutatif suivant

(7.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{T^*X} \arrow[rr, "\theta", "\sim"'] \arrow[dl, "r'"] \arrow[ddl, bend right, "p'"'] & & T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1) \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dr, "\widetilde{\omega}"] & \\
 & T^*X \times_k \mathbb{A}_k^1 \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dl, "pr_{T^*X}"] \arrow[ddrr, "\pi_X \times id"'] & & \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\ \mathcal{B}_X) \arrow[dr, "\pi"] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "r"'] \arrow[ddl, bend left, "p"] \\
T^*X \arrow[drrr, "\pi_X"'] & & & & X \times_k \mathbb{A}_k^1 \arrow[d, "pr_X"] & \\
 & & & & X &
\end{tikzcd}$$

Considérons sur $T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1)$ l'Anneau filtré $(\mathcal{E}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1}, \mathcal{E}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1,i})$, microlocalisé (formel) de $(\mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1}, \mathcal{D}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1,i})$, au sens algébrique (cf. A.3.4). Le monomorphisme d'Anneaux (filtrés) $\bigoplus_j V_j\mathcal{D}_X.t^j \subset \mathcal{D}_X[t,t^{-1}]$ induit par microlocalisation un monomorphisme d'Anneaux (filtrés)

$$\mathcal{E}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1} \hookrightarrow \bar{\beta}_*\mathcal{E}_{X \times_k \mathbb{G}_{m,k}/\mathbb{G}_{m,k}}$$

et donc un monomorphisme d'Anneaux (filtrés)

(7.1.2)
$$p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1} \hookrightarrow (pr_{T^*X})_*\mathcal{E}_{X \times_k \mathbb{G}_{m,k}/\mathbb{G}_{m,k}}$$

(rappelons que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T^*X \times_k \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, hook, "\beta'"] \arrow[d, equal] & T^*X \arrow[d, "\wr\ \theta"] \\
T^*(X \times_k \mathbb{G}_{m,k}/\mathbb{G}_{m,k}) \arrow[r, hook, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "\widetilde{\omega}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}_k^1) \arrow[d, "\widetilde{\omega}"] \\
X \times_k \mathbb{G}_{m,k} \arrow[r, hook, "\beta"] & \widetilde{X}
\end{tikzcd}$$
).

D'autre part, considérons l'Anneau filtré $(\bigoplus_j V_j\mathcal{E}_X.t^j$, $\bigoplus_j (V_j\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i}).t^j)$ sur X. On a clairement les inclusions d'Anneaux

filtrés

(7.1.3) $$\bigoplus_j V_j\mathcal{E}_X.t^j \subset \mathcal{E}_X[t,t^{-1}] \subset (pr_{T^*X})_*\mathcal{E}_{X\times_k \mathbb{G}_{m,k}/\mathbb{G}_{m,k}}$$

$((pr_{T^*X})_*\mathcal{E}_{X\times_k \mathbb{G}_{m,k}/\mathbb{G}_{m,k}}$ est le sous-Anneau $\varinjlim_i \varprojlim_n (\mathcal{E}_{X,i}[t,t^{-1}]/\mathcal{E}_{X,i-n}[t,t^{-1}]) \subset \prod_j \mathcal{E}_X.t^j)$.

<u>Lemme</u> 7.1.4 (i) <u>L'inclusion</u> (7.1.3) <u>se factorise</u>, <u>via</u> (7.1.2), <u>en un monomorphisme d'Anneaux filtrés</u>

(7.1.4.1) $$(\bigoplus_j V_j\mathcal{E}_X.t^j\ ,\ \bigoplus_j (V_j\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i}).t^j) \longrightarrow p'_*\theta^{-1}(\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}, \mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_{k,i}})\ .$$

(ii) <u>Le monomorphisme</u> (7.1.4.1) <u>est strict</u>, <u>son but est complet</u> (<u>au sens ind-pro</u>, cf. A.1.0) <u>et il identifie</u> $p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$ <u>au complété</u> (<u>ind-pro</u>) <u>de</u> $\bigoplus_j V_j\mathcal{E}_X.t^j$.

<u>Preuve</u>. (i) La flèche canonique $\tilde{\omega}^{-1}\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \longrightarrow \mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$ induit, via $\pi_X^{-1}p_* \longrightarrow p'_*\theta^{-1}\tilde{\omega}^{-1}$, un morphisme (d'Anneaux filtrés)

(7.1.4.2) $$\pi_X^{-1}(\bigoplus_j V_j\mathcal{D}_X.t^j) \longrightarrow p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}\ ;$$

d'autre part, sur Spec(gr $\mathcal{B}_X$), on dispose du microlocalisé $(\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_{X,i})$ (au sens algébrique) de $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_{X,i})$ (cf. A.3.3) et, par fonctorialité de la microlocalisation, d'un morphisme

$$\rho^{-1}\mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}\ ;$$

ce dernier morphisme induit, via $(pr_{T^*X})_*\varphi^{-1} \longrightarrow p'_*r'^{-1}\varphi^{-1} = p'_*\theta^{-1}\rho^{-1}$, un morphisme

$$(pr_{T^*X})_*\varphi^{-1}\mathcal{C}_X \longrightarrow p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}\ ;$$

enfin, on a clairement un morphisme

$$\bigoplus_j \mathcal{E}_{X,j}.t^j \longrightarrow (pr_{T^*X})_*\varphi^{-1}\mathcal{C}_X$$

et, donc, par composition, un morphisme (d'Anneaux filtrés)

(7.1.4.3) $$\bigoplus_j \mathcal{E}_{X,j}.t^j \longrightarrow p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}\ .$$

Par construction, (7.1.4.2) et (7.1.4.3) coïncident sur $\pi_X^{-1}(\bigoplus_j \mathcal{D}_{X,j}.t^j)$, de sorte que l'on peut considérer leur produit tensoriel filtré au-dessus de ce dernier Anneau ; comme ce produit tensoriel filtré admet comme quotient strict la source de (7.1.4.1) (cf. (7.0.6) et (7.0.11)), on a gagné pour (i).

Pour la partie (ii), on remarque tout d'abord que (7.1.4.1) est strict car (7.1.3) l'est ; cela étant, pour montrer que (7.1.4.1) induit un isomorphisme par passage aux complétés (ind-pro), il suffit de montrer que (7.1.4.1) induit un isomorphisme

$$\text{(7.1.4.4)} \qquad \mathrm{gr}(\bigoplus_j V_j\mathcal{E}_X.t^j) \longrightarrow \mathrm{gr}\ p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$$

par passage aux gradués ; on sait déjà que (7.1.4.4) est un monomorphisme ; d'autre part, pour montrer que le but de (7.1.4.1) est complet (ind-pro), il suffit de montrer que l'application canonique

$$\text{(7.1.4.5)} \qquad \mathrm{gr}\ p'_*\theta^{-1}\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k} \longrightarrow p'_*\theta^{-1}\mathrm{gr}\ \mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$$

est un isomorphisme ; il est clair que (7.1.4.5) est injective ; donc, pour achever la preuve du lemme, il reste à montrer que le composé de (7.1.4.4) et (7.1.4.5) est un épimorphisme. Or $\mathrm{gr}(\bigoplus_j V_j\mathcal{E}_X.t^j)$ est un quotient de

$$\mathrm{gr}(\bigoplus_j \mathcal{E}_{X,j}.t^j)\otimes_{\pi_X^{-1}\mathrm{gr}(\bigoplus_j \mathcal{D}_{X,j}.t^j)} \pi_X^{-1}\ \mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X$$

et il reste à montrer que ce dernier produit tensoriel s'envoie surjectivement sur $p'_*\theta^{-1}\mathrm{gr}\ \mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k}$, ce que nous laissons au lecteur (cf. 4.4).

<u>Corollaire</u> 7.1.5. <u>La flèche</u> (7.1.4.1) <u>induit un isomorphisme du complété</u> (<u>au sens ind-pro</u>) <u>de</u> $(\mathrm{gr}^V\mathcal{E}_X,(\mathrm{gr}^V\mathcal{E}_X)_i)$ <u>sur</u> $i'_*p'_{o*}\theta_o^{-1}(\mathcal{E}_{T_YX},\mathcal{E}_{T_YX,i})$.

<u>Remarque</u> 7.1.6. Kashiwara et Kawai (cf. [14] I.5.1) notent $\mathcal{A}$ l'Algèbre $i'^{-1}\mathrm{gr}^V\mathcal{E}_X$ sur T^*_YX et l'identifient, localement sur T^*_YX à $\mathrm{Diff}(\sqrt{\omega_{T^*_YX/T^*X}})$; de notre point de vue, c'est (7.1.5), conjugué au fait que

$$\tilde{\omega}_{o*}\mathcal{E}_{T_YX} = \mathcal{D}_{T_YX}\ ,$$

qui jouera le rôle de l'identification ci-dessus.

7.2. Soit de plus $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, on peut lui attacher :

- sa déformation au cône normal pour $Y \hookrightarrow X$, i.e. $(Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i), Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)_i)$ dans $MF_{qcoh}(\mathcal{D}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$ et le microlocalisé au sens algébrique de (Df,Df_i) (cf. A.3.2) que l'on notera $(\check{D}f,\check{D}f_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{E}_{\tilde{X}/\mathbb{A}^1_k})$

- son microlocalisé au sens algébrique (cf. A.3.2), $(\check{\mathcal{M}},\check{\mathcal{M}}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{E}_X)$.

De la même manière qu'à $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ on associe des filtrations $V_j\mathcal{M}$ et $(V_j\mathcal{M})_i$, à $(\check{\mathcal{M}},\check{\mathcal{M}}_i)$, on associe des filtrations

$$V_j\check{\mathcal{M}} = \sum_{k+i\leqslant j} V_k\mathcal{E}_X.\mathcal{M}_i \tag{7.2.1}$$

$$(V_j\check{\mathcal{M}})_i = \sum_{\substack{i_1+i_2\leqslant i\\ j_1+j_2\leqslant j}} (V_{j_1}\mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,i_1}).(\check{\mathcal{M}}_{j_2} \cap \check{\mathcal{M}}_{i_2}) \tag{7.2.2}$$

et on a alors :

<u>Lemme</u> 7.2.3. <u>Pour</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, <u>on dispose d'un monomorphisme de Modules filtrés au-dessus de</u> (7.1.4.1),

$$(\bigoplus_j V_j\check{\mathcal{M}}.t^j\ ,\ \bigoplus_j (V_j\check{\mathcal{M}})_i.t^j) \longrightarrow p'_*\theta^{-1}(\check{D}f,\check{D}f_i)\ . \tag{7.2.3.1}$$

<u>De plus, si</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, <u>ce monomorphisme est strict, son but est complet (au sens ind-pro) et</u> (7.2.3.1) <u>identifie</u> $p'_*\theta^{-1}(\check{D}f)$ <u>au complété (ind-pro) de</u> $\bigoplus_j V_j\check{\mathcal{M}}.t^j$.

<u>Corollaire</u> 7.2.4. <u>Pour</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, <u>la flèche</u> (7.2.3.1) <u>induit un isomorphisme du complété (ind-pro) de</u> $(\mathrm{gr}^V\check{\mathcal{M}},(\mathrm{gr}^V\check{\mathcal{M}})_i)$ <u>sur</u> $i'_*p'_{o*}\theta_o^{-1}(Sp,Sp_i)$, <u>où</u> (Sp,Sp_i) <u>est le microlocalisé au sens algébrique</u> (cf. A.3.2) <u>de</u> $(Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i),Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)_i)$.

8. B-fonctions locales et microlocales.

8.0. La proposition suivante est due à Björk (cf. [4]) :

Proposition 8.0.1. Soient $x \in Y \subset X$, $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ un objet de $MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ et n_o un entier. Alors, si

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{D}_{X,x}}(\mathcal{M}_x, \mathcal{D}_{X,x}) = 0$$

pour tout $n < n_o$, on a aussi

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_{X,x}}(\mathrm{gr}^V\mathcal{M}_x, \mathrm{gr}^V\mathcal{D}_{X,x}) = 0$$

pour tout $n < n_o$.

En particulier, si l'on suppose de plus $\mathcal{M}$ holonome, $\mathrm{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ est encore un $\mathcal{D}_{T_YX}$-Module holonome.

Remarque 8.0.2. Un résultat similaire (cf. [18] 1.4.2) permet de montrer que, pour $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\, MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, avec $\mathcal{M}$ holonome, la dimension des supports des $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,.)}\mathcal{M}$ et $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(.,s)}\mathcal{M}$ $(r \in]1, \infty[\cap \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $s \in [1, \infty[\cap \mathbb{Q})$ dans $T^*(T_YX)$ sont au plus $\dim X$; en fait, comme les supports des $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,s)}\mathcal{M}$ sont tous involutifs (cf. [16]), les supports de $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(r,.)}\mathcal{M}$ et $\widetilde{\mathrm{gr}}^{(.,s)}\mathcal{M}$ sont lagrangiens.

8.1. Dans $(\mathrm{gr}^V_o\mathcal{D}_X)_1 \subset p_{o*}\mathcal{D}_{T_YX,1}$, on dispose de l'opérateur d'Euler $\underline{eu}$ (cf. (4.6.7)) ; on définit alors, pour $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\, MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$,

(8.1.1) $$\underline{Eu} \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}_{T_YX}}(\mathrm{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i))$$

comme suit :

$$p_{o*}\underline{Eu} : \mathrm{gr}^V\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{gr}^V\mathcal{M}$$

envoie $\bigoplus_j m_j$ sur $\bigoplus_j (\underline{eu}+j).m_j$ (que $p_{o*}\underline{Eu}$ soit $\mathrm{gr}^V\mathcal{D}_X$-linéaire résulte aussitôt de (4.6.8)).

D'après Bernstein, on a (cf. [2]) :

Proposition 8.1.2. Pour tout $\mathcal{D}_{T_YX}$-Module holonome $\mathcal{P}$, $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_{T_YX}}(\mathcal{P})$ est un k-vectoriel de dimension finie.

Par suite, pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, avec $\mathcal{M}$ holonome, il résulte de 8.0.1 et 8.1.2 que $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_{T_YX}}(Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i))$ est un k-vectoriel de dimension finie et donc qu'il existe $\varphi(s) \in k[s]$, unitaire, avec $\varphi(\underline{Eu}) = 0$. On en déduit aussitôt le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 8.1.3. <u>Soient</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, <u>avec</u> $\mathcal{M}$ <u>holonome, et</u> η <u>un point de</u> X . <u>Alors, l'ensemble des</u> $\varphi(s) \in k[s]$ <u>tels qu'il existe</u> U <u>voisinage ouvert de Zariski de</u> η <u>dans</u> X , <u>avec</u> $Y = U \cap \overline{\{\eta\}}$ <u>lisse sur</u> k <u>et</u>

$$\varphi(\underline{Eu}) = 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad \mathrm{End}_{\mathcal{D}_{T_YU}}(Sp_{Y|U}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i))$$

<u>est un idéal de</u> $k[s]$ <u>non réduit à</u> 0.

<u>Définition</u> 8.1.4. <u>Pour</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>et</u> η <u>comme en</u> 8.1.3, <u>on appelle</u> B-<u>fonction locale de</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>en</u> η <u>et on note</u> $b_\eta(s;(\mathcal{M},\mathcal{M}_i))$ <u>ou simplement</u> $b_\eta(s)$ <u>le générateur unitaire de l'idéal considéré en</u> 8.1.3.

8.2. Pour $Y \subset X$ et $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{qcoh}(\mathcal{D}_X)$, notons $(\check{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i), \check{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)_i)$ le microlocalisé (au sens algébrique) de $(Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i), Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)_i)$. L'opérateur $\underline{Eu}$ (cf. (8.1.1)) induit un opérateur

$$\check{\underline{Eu}} \in \mathrm{End}_{\mathcal{E}_{T_YX}}(Sp_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)) \tag{8.2.1}$$

et si, pour un $\varphi(s) \in k[s]$, $\varphi(\underline{Eu}) = 0$, on a aussi $\varphi(\check{\underline{Eu}}) = 0$.

D'autre part, $\underline{eu}$ vit aussi dans $\Gamma(T^*X, gr^V\mathcal{E}_X) = \Gamma(X, gr^V\mathcal{D}_X)$ et, si $(\check{\mathcal{M}},\check{\mathcal{M}}_i)$ est le microlocalisé (au sens algébrique de $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$, on dispose encore de

$$\check{\underline{eu}} \in \mathrm{End}_{gr^V\mathcal{E}_X}(gr^V\check{\mathcal{M}}) \tag{8.2.2}$$

qui envoie $\bigoplus_j \check{m}_j$ sur $\bigoplus_j (\underline{eu}+j).\check{m}_j$.

On vérifie alors facilement que la flèche canonique, induite par (7.2.3.1),

$$gr^V\check{\mathcal{M}} \longrightarrow i'_*p'_{o*}\theta_o^{-1}\check{Sp}_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$$

commute aux opérateurs $\check{\underline{Eu}}$ (8.2.1) et (8.2.2) et, il résulte de 7.2.4 que, pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ parfait, on a $\varphi(\check{\underline{Eu}}) = 0$ sur $gr^V\check{\mathcal{M}}$ si et

seulement si on a $\varphi(\underline{\check{E}u}) = 0$ sur $i'_* p'_{o*} \theta_o^{-1} \check{Sp}$.

De plus, l'isomorphisme (cf. (4.4.4))

$$\theta_o : T_{T_Y^* X}(T^* X) \xrightarrow{\sim} T^*(T_Y X)$$

envoie la section nulle $T_Y^* X$ de $T_{T_Y^* X}(T^* X)$ sur le conormal $T_Y^*(T_Y X)$ à la section nulle Y de $T_Y X$ et, si η est un point générique de Y , si δ' est le point générique de $T_Y^* X$ au-dessus de η et si δ est le point générique de $T_Y^*(T_Y X)$ au-dessus de η , on a $\theta_o(\delta') = \delta$ et le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 8.2.3. <u>Pour</u> $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\, MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, <u>avec</u> $\mathcal{M}$ <u>holonome</u>, <u>on a</u>

$$\theta_o(p_o'^{-1}(\delta')) \cap |\mathrm{Car}(Sp_{Y|X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i))| \subset \{\delta\}$$

<u>et la flèche canonique</u>

$$(p'_{o*} \theta_o^{-1}(\check{Sp}))_{\delta'} \longrightarrow (\check{Sp})_\delta$$

<u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u>. Pour tout fermé $Z \subset T_Y X$, homogène pour l'action naturelle de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur $T_Y X \longrightarrow Y$, on a

$$\theta_o(p_o'^{-1}(\delta')) \cap T_Z^*(T_Y X) \subset \{\delta\}$$

(si $Z \subset T_Y X$ est homogène, le symbole principal du champ d'Euler du fibré $T_Y X \longrightarrow Y$, vu comme fonction sur $T^*(T_Y X)$, s'annule sur $T_Z^*(T_Y X)$).

Regroupant toutes les informations dégagées ci-dessus, on obtient :

<u>Proposition</u> 8.2.4. <u>Soient</u> $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\, MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, <u>avec</u> $\mathcal{M}$ <u>holonome</u>, <u>et</u> δ' <u>un point de</u> $T^* X$, <u>d'image</u> η <u>dans</u> X , <u>tel que</u> $\overline{\{\delta'\}}$ <u>soit un fermé lagrangien de</u> $T^* X$. <u>Alors</u>, <u>les deux sous-ensembles de</u> $k[s]$ <u>ci-dessous coïncident et sont des idéaux de</u> $k[s]$, <u>contenant</u> $b_\eta(s; (\mathcal{M}, \mathcal{M}_i))$ <u>et donc non réduit à</u> 0 :

- <u>l'ensemble des</u> $\varphi(s) \in k[s]$ <u>tel qu'il existe un voisinage ouvert de Zariski</u> U <u>de</u> η <u>avec</u> $Y = U \cap \overline{\{\eta\}}$ <u>lisse sur</u> k <u>et</u>

$$\varphi(\underline{\check{E}u}) = 0 \quad \underline{\text{dans}} \quad \mathrm{End}_{\mathcal{D}_{T_Y U, \delta}}(\check{Sp}_{Y|U}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i))$$

où δ est le point générique de $T^*_Y(T_Y U)$,

- l'ensemble des $\varphi(s) \in k[s]$ tel qu'il existe un voisinage ouvert de Zariski U de η avec $Y = U \cap \overline{\{\eta\}}$ lisse sur k et

$$\varphi(\underline{Eu}^{\vee}) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{End}_{\mathrm{gr}^V \mathcal{E}_{U,\delta'}}((\mathrm{gr}^V \check{\mathcal{M}})_{\delta'})$$

où $(V_j \mathcal{E}_U)_{j \in \mathbb{Z}}$ est la filtration V relative à $Y \subset U$.

Définition 8.2.5. Pour $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ et δ' comme en 8.2.4, on appelle B-fonction microlocale de $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i)$ en δ' et on note $b_{\delta'}(s;(\mathcal{M},\mathcal{M}_i))$, ou simplement $b_{\delta'}(s)$, le générateur unitaire de l'idéal de $k[s]$ considéré en 8.2.4.

On a, d'après 8.2.4,

$$b_{\delta'}(s;(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)) \mid b_\eta(s;(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)) \tag{8.2.6}$$

pour δ' dans T^*X d'image η dans X.

Remarque 8.2.7. Si $\Theta \in V_0 \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,1}$ est un relèvement (local) de $\underline{eu}$, on a donc

$$b_{\delta'}(\Theta).(V_0 \check{\mathcal{M}})_{\delta'} \subset (V_{-1} \check{\mathcal{M}})_{\delta'}$$

pour $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\, MF_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_X)$, avec $\mathcal{M}$ holonome, pour $Y \subset X$ et pour δ' un point générique de $T^*_Y X \subset T^*X$; d'autre part, si d est la codimension de Y dans X en l'image η de δ', $\theta = -\Theta - \frac{d}{2}$ vérifie les conditions (1.5.3) à (1.5.8) de [14] I-5 et donc $b_{\delta'}(-s-\frac{d}{2})$ n'est autre que la B-fonction $b(s, V_0 \mathcal{M})$ définie dans [14] I-5.2. On remarquera de plus que le décalage de $\frac{d}{2}$ est précisément le décalage qu'utilise Brylinski dans sa définition conjecturale de la filtration de Hodge d'un $\mathcal{D}_X$-Module RS ([7]).

8.3. Soient $Y \subset X$ comme précédemment, δ' un point générique de $T^*_Y X$ d'image η dans X et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module holonome.

Définition 8.3.1. L'ordre en δ' d'une section m de $\mathcal{M}_\eta$ est le sous-ensemble fini

$$\mathrm{ord}_{\delta'}(m) \subset k$$

constitué par l'ensemble des racines de la B-fonction microlocale $b_{\delta'}(s;\mathcal{D}_U.m, \mathcal{D}_{U,i}.m))$, où U est un voisinage ouvert de Zariski arbi-

<u>traire de</u> η <u>dans</u> X <u>tel que</u> $m \in \mathcal{M}(U)$.

9. Quelques questions.

9.1. Laurent démontre par voie analytique (cf. [16] 3.1.12 et [18]) que les supports des $\widetilde{gr}^{(r,s)}\mathcal{M}$, pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ (cf. 6.1), sont tous involutifs et que ceux des $\widetilde{gr}^{(r,.)}\mathcal{M}$ et $\widetilde{gr}^{(.,s)}\mathcal{M}$, pour $\mathcal{M}$ holonome, sont lagrangiens. Peut-on démontrer ces résultats par voie algébrique (cf. la preuve de l'involutivité des caractéristiques de Gabber [9] et 8.0.1) ? Le cas de $\widetilde{gr}^{(\infty,1)}\mathcal{M}$ a été traité par T. Monteiro.

9.2. Peut-on traduire, pour $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in \mathrm{ob}\ MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$ avec $\mathcal{M}$ holonome, la notion de régularité de $\mathcal{M}$ le long de $T^*_Y X$ au point générique δ' de $T^*_Y X$ en terme de <u>platitude sur</u> $\mathbb{A}^1_k$ <u>du support</u> de $\widetilde{gr}\ Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ (cf. 5.1) au point générique de $T^*_Y(T_Y X) \subset T^*(T_Y X)$? (cf. [16] 3.1.7).

9.3. Ayant choisi une section de $k \longrightarrow k/\mathbb{Z}$ et utilisant la notion d'ordre d'une section d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome donnée en 8.3.1, on peut définir une filtration globale canonique d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome RS (cf. [7] 1.2.2 et [14] 5.1.11) ; il est prouvé par voie analytique que cette filtration est une bonne filtration (cf. [14] 5.1.11) et Gabber (cf. son exposé dans cette conférence) a fourni l'ingrédient essentiel pour une preuve algébrique ; cependant cette preuve algébrique reste à écrire.

9.4. Si $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \in MF_{parf}(\mathcal{D}_X)$, avec $\mathcal{M}$ holonome RS, est-il vrai que, pour tout $Y \subset X$, le support de $\widetilde{gr}\ Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ dans $T^*(\widetilde{X}/\mathbb{A}^1_k)$ est plat sur $\mathbb{A}^1_k$? Si oui, pour $\mathcal{M}$ holonome RS, existe-t-il une bonne filtration $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ (style la filtration canonique, cf. 9.3) telle que, pour $Y \subset X$, $\widetilde{gr}\ Df_{Y|X}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ soit en fait déjà plat sur $\mathbb{A}^1_k$, i.e. sans t-torsion ? (la filtration pouvant éventuellement dépendre de Y).

Appendice. Construction algébrique du faisceau des opérateurs micro-différentiels formels.

A.0. Dans sa preuve de l'involutivité des caractéristiques (cf. [9] 4), O. Gabber construit une variante algébrique de la fibre en un point de $T^*X - T^*_X X$ du faisceau d'anneaux $\mathcal{E}_{X,o}/\mathcal{E}_{X,-2}$. En fait, la construction de O. Gabber se faisceautise et fournit, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, une variante algébrique du faisceau abélien $\mathcal{E}_{X,i}/\mathcal{E}_{X,i-n}$. Passant à la limite projective sur n, puis à la limite inductive sur i, on obtient ainsi une variante algébrique de $(\hat{\mathcal{E}}_X, \hat{\mathcal{E}}_{X,i})$.

Dans cet appendice, j'explicite cette construction dans un cadre plus général, dégagé par M. Raynaud (cf. son exposé au groupe de travail sur les $\mathcal{D}$-Modules, Orsay, 1982-83). O. Gabber a par ailleurs exposé dans cette conférence une construction similaire, mais conduisant à une variante algébrique de "$\hat{\mathcal{E}}$ non homogène".

A.1. Anneaux filtrés et modules filtrés (cf. [20] I, [3] §2, [5] chapitre III,...).

A.1.0. Un anneau filtré (A, A_i) est un anneau A, unitaire, non nécessairement commutatif, muni d'une filtration croissante, indexée par $\mathbb{Z}$, $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, par des sous-groupes additifs, telle que $1 \in A_o$ et $A_i . A_j \subset A_{i+j}$, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$; un (A, A_i)-module filtré (à gauche) (M, M_i) est un A-module (à gauche) M, muni d'une filtration croissante, indexée par $\mathbb{Z}$, $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, par des sous-groupes additifs, telle que $A_i . M_j \subset M_{i+j}$, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$.

Soit (A, A_i) un anneau filtré, le séparé-complété ind-pro de (A, A_i) est l'anneau filtré $(\hat{A}, \hat{A}_i)$ défini comme suit : pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, $\hat{A}_i$ est le groupe additif

$$\hat{A}_i = \varprojlim_n A_i/A_{i-n} ,$$

i.e. le séparé-complété usuel de A_i muni de la filtration décroissante $(A_{i-n})_{n\in\mathbb{N}}$; les inclusions $A_i \subset A_j$, pour $i \leqslant j$, induisent des homomorphismes $\hat{A}_i \longrightarrow \hat{A}_j$ formant un système inductif, le groupe additif sous-jacent à l'anneau $\hat{A}$ est

$$\hat{A} = \varinjlim_{i} \hat{A}_i \ ;$$

les flèches de transition de ce système inductif sont clairement injectives, ce qui nous permet d'identifier $\hat{A}_i$ à son image canonique dans $\hat{A}$; les flèches de multiplication $A_i \times A_j \longrightarrow A_{i+j}$ $(i,j \in \mathbb{Z})$ induisent des flèches $\hat{A}_i \times \hat{A}_j \longrightarrow \hat{A}_{i+j}$ et une multiplication sur $\hat{A}$. Un anneau filtré (A,A_i) est dit <u>séparé-complet ind-pro</u> s'il est canoniquement isomorphe à son séparé-complété ind-pro, i.e. si $A = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ et si chaque A_i est séparé-complet au sens usuel pour la filtration $(A_{i-n})_{n\in\mathbb{N}}$; bien entendu, pour un tel anneau, on a $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} A_i = \{0\}$. Ces notions s'étendent immédiatement aux modules filtrés sur (A,A_i). <u>Dans la suite de cet appendice, on dira simplement complété et complet à la place de séparé-complété ind-pro et de séparé-complet ind-pro</u>.

Soit (M,M_i) un module filtré sur un anneau filtré (A,A_i) ; la filtration $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de M est dite <u>bonne</u> s'il existe une famille finie $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de M qui engendrent le A-module M et une famille d'entiers $(i_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ayant même ensemble d'indices telles que

$$M_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} A_{i-i_\lambda}.m_\lambda \ , \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z} \ ;$$

supposons que la filtration de A est exhaustive, alors deux bonnes filtrations $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $(M'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sur un même A-module sont <u>comparables</u>, i.e. il existe $r,s \in \mathbb{Z}$ tels que $M_i \subset M'_{i+r}$, $M'_i \subset M_{i+s}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$; un A-module de type fini admet des bonnes filtrations.

Le <u>gradué d'un anneau filtré</u> (A,A_i) est l'anneau $\mathbb{Z}$-gradué unitaire

$$\mathrm{gr}.A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_i A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i/A_{i-1}$$

$(1 \in \mathrm{gr}_0 A$ et $\mathrm{gr}_i A.\mathrm{gr}_j A \subset \mathrm{gr}_{i+j} A$, pour tous $i,j \in \mathbb{Z})$ et le <u>gradué d'un</u> (A,A_i)-<u>module filtré</u> (M,M_i) est le $\mathrm{gr}.A$-module gradué (à gauche)

$$\mathrm{gr}.M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_i M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i/M_{i-1}$$

$(\mathrm{gr}_i A.\mathrm{gr}_j M \subset \mathrm{gr}_{i+j} M$, pour tous $i,j \in \mathbb{Z})$; on note $\mathrm{gr}\ A$ (resp. $\mathrm{gr}\ M$) l'anneau (resp. le module) non gradué sous-jacent à $\mathrm{gr}.A$ (resp. $\mathrm{gr}.M$).

Proposition A.1.1. Soient (A,A_i) un anneau filtré complet et (M,M_i) un (A,A_i)-module filtré. Considérons les conditions suivantes :

(i) $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une bonne filtration

(ii) $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} M_i = M$ et gr M est un gr A-module de type fini.

Alors (i) $\Longrightarrow$ (ii) et ((ii) et $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} M_i = 0$) $\Longrightarrow$ (i). De plus, si on a (i) et si gr M est de présentation finie sur gr A , on a $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} M_i = 0$. En particulier, si gr A est noethérien (à gauche), alors on a (i) $\Longleftrightarrow$ ((ii) et $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} M_i = 0$) et sous ses conditions équivalentes, (M,M_i) est complet et M est de type fini sur A .

Corollaire A.1.1.1. Si (A,A_i) est un anneau filtré complet et si gr A est noethérien, à gauche et à droite, il en est de même de A_o et de A .

Corollaire A.1.1.2. Si (A,A_i) est un anneau filtré complet, avec gr A noethérien (à gauche), si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de A-modules et si $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une bonne filtration de M , alors M' est fermé dans M , $(M'_i = M' \cap M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une bonne filtration de M' et $(M''_i = M_i/M'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une bonne filtration de M".

Corollaire A.1.1.3. Si $(A,A_i) \longrightarrow (B,B_i)$ est un homomorphisme d'anneaux filtrés complets à gradués gr A , gr B noethériens (à gauche et à droite) et si gr f : gr A $\longrightarrow$ gr B est plat (à gauche, resp. à droite), il en est de même de $f : A \longrightarrow B$.

De plus, si gr f : gr A $\longrightarrow$ gr B est plat (à droite) et si (M,M_i) est un (A,A_i)-module filtré, à filtration exhaustive, la flèche canonique $\mathrm{gr}\, B \otimes_{\mathrm{gr}\, A} \mathrm{gr}\, M \longrightarrow \mathrm{gr}(B \otimes_A M)$ (où $B \otimes_A M$ est filtré par $(B \otimes_A M)_i = \sum_{j+k\leqslant i} \mathrm{Im}(B_j \otimes M_k)$) est un isomorphisme.

A.1.2. Soit (A,A_i) un anneau filtré et soit $A[\nu,\nu^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent en une variable ν sur A , gradué par le degré en ν ($\deg(\nu) = 1$ et $a.\nu = \nu.a$, pour tout $a \in A$) et on note $\underline{A}_.$ le sous-anneau gradué de $A[\nu,\nu^{-1}]$ suivant :

$$\underline{A}_. = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i.\nu^i \subset A[\nu,\nu^{-1}]$$

ν est donc un élément central et non diviseur de zéro dans $\underline{A}$, de degré 1 dans $\underline{A}_.$; à tout (A,A_i)-module filtré (M,M_i), on associe

alors le $\underline{A}_\cdot$-module gradué

$$\underline{M}_\cdot = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i.\nu^i \subset M\otimes_A A[\nu,\nu^{-1}]$$

ν est encore non diviseur de zéro dans $\underline{M}_\cdot$ et le foncteur $(M,M_i) \longmapsto \underline{M}_\cdot$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des (A,A_i)-modules filtrés, <u>à filtration exhaustive</u>, et la catégorie des $\underline{A}_\cdot$-modules gradués avec ν non diviseur de zéro.

Pour (A,A_i) un anneau filtré et tout entier $n \geqslant 1$, on notera $\underline{A}_{\cdot,n}$ l'anneau gradué $\underline{A}_\cdot/\nu^n\underline{A}_\cdot$ et ν_n l'image de ν dans $\underline{A}_\cdot$; les $\underline{A}_{\cdot,n}$ forment un système projectif d'anneaux gradués

(A.1.2.1) $\dashrightarrow \underline{A}_{\cdot,n+1} \twoheadrightarrow \underline{A}_{\cdot,n} \twoheadrightarrow\dashrightarrow \underline{A}_{\cdot,1} = \mathrm{gr}.A$

et $\varprojlim_n \underline{A}_{i,n} = \hat{A}_i$, pour tout $i\in\mathbb{Z}$, et $\hat{A} = \varinjlim_i \varprojlim_n \underline{A}_{i,n}$, avec $\hat{A}_i \hookrightarrow \hat{A}_{i+1}$, $(a_n) \longmapsto (\nu_n a_n)$; de même, pour (M,M_i) un (A,A_i)-module filtré et pour tout entier $n \geqslant 1$, on notera $\underline{M}_{\cdot,n}$ le $\underline{A}_{\cdot,n}$-module gradué $\underline{M}_\cdot/\nu^n\underline{M}_\cdot$; les $\underline{M}_{\cdot,n}$ forment, en un sens évident, un système projectif de modules gradués sur le système projectif d'anneaux (A.1.2.1),

(A.1.2.2) $\dashrightarrow \underline{M}_{\cdot n+1} \twoheadrightarrow \underline{M}_{\cdot,n} \twoheadrightarrow\dashrightarrow \underline{M}_{\cdot,1} = \mathrm{gr}.M$

et $\varprojlim_n \underline{M}_{i,n} = \hat{M}_i$, pour tout $i\in\mathbb{Z}$, et $\hat{M} = \varinjlim_i \varprojlim_n \underline{M}_{i,n}$, avec $\hat{M}_i \hookrightarrow \hat{M}_{i+1}$, $(x_n) \longmapsto (\nu_n x_n)$.

<u>Lemme</u> A.1.2.3 (i) <u>Pour tout module filtré</u> (M,M_i) <u>sur un anneau filtré</u> (A,A_i), <u>le système projectif</u> (A.1.2.2) <u>vérifie</u> :

(a) $\underline{M}_{\cdot,n} = \underline{M}_{\cdot,n+1}/\nu_{n+1}^n\underline{M}_{\cdot,n+1}$, <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$,

(b) <u>si</u> $x\in\underline{M}_{\cdot,n+1}$, <u>pour un</u> $n \geqslant 1$, <u>et si</u> $\nu_{n+1}.x = 0$ <u>dans</u> $\underline{M}_{\cdot,n+1}$, <u>alors</u> x <u>a pour image</u> 0 <u>dans</u> $\underline{M}_{\cdot,n}$.

(ii) <u>La donnée d'un anneau filtré complet</u> (A,A_i) <u>est équivalente aux données d'un système projectif d'anneaux gradués</u> (A.1.2.1) <u>et, pour chaque</u> $n \geqslant 1$, <u>d'un élément central</u> ν_n <u>de degré</u> 1 <u>de</u> $\underline{A}_{\cdot,n}$, <u>ces données étant assujetties aux conditions suivantes</u> :

(a) <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$, ν_{n+1} <u>a pour image</u> ν_n <u>dans</u> $\underline{A}_{1,n}$,

(b) <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$, $\underline{A}_{\cdot,n} = \underline{A}_{\cdot,n+1}/\nu_{n+1}^n\underline{A}_{\cdot,n+1}$

(c) si $a \in \underline{A}_{\cdot,n+1}$, pour un $n \geqslant 1$, et si $\nu_{n+1} \cdot a = 0$ dans $\underline{A}_{\cdot,n+1}$, alors a a pour image 0 dans $\underline{A}_{\cdot,n}$.

(iii) Si (A,A_i) est un anneau filtré complet, la catégorie des (A,A_i)-modules complets est équivalente à la catégorie des systèmes projectifs de modules gradués sur le système projectif d'anneaux (A.1.2.1) qui vérifient les conditions (a) et (b) de (i).

A.2. Localisation dans les anneaux filtrés.

A.2.0. Soient A un anneau (unitaire, non nécessairement commutatif) et $S \subset A$ une partie multiplicative ; un anneau de fractions de A à dénominateurs dans S (à gauche et à droite) est un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow A'$ vérifiant les conditions suivantes :

(α) si $s \in S$, $\varphi(s)$ est inversible dans A',

(β) tout élément de A' est de la forme $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ et de la forme $\varphi(b)\varphi(t)^{-1}$ pour $a,b \in A$ et $s,t \in S$,

(γ) si $\varphi(a) = 0$, pour un $a \in A$, il existe $s,t \in S$ tels que $sa = 0$ et $at = 0$.

Une telle paire vérifie automatiquement la propriété universelle suivante :

(δ) pour tout homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ tel que $f(s)$ soit inversible dans B pour tout $s \in S$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $f' : A' \longrightarrow B$ tel que $f = f' \circ \varphi$.

En particulier, si $\varphi : A \longrightarrow A'$ existe, φ est unique à unique isomorphisme près.

Les propositions suivantes sont démontrées dans [5] II §2, exercice 22 et [8] 3.6.

Proposition A.2.1. Si $S \subset A$ est une partie multiplicative d'un anneau A et si, pour tous $s \in S$ et $a \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{ad}(s)^n(a) = 0$ $(\mathrm{ad}(s)(a) = sa - as)$, alors A admet un anneau de fractions à dénominateurs dans S .

Proposition A.2.2. Si $S \subset A$ est une partie multiplicative d'un anneau A et si $\varphi : A \longrightarrow A'$ est un anneau de fractions de A à dénominateurs dans S , φ est plat (à gauche et à droite).

A.2.3. Soient (A, A_i) un anneau filtré complet, à gradué $\mathrm{gr}.A$ commutatif, et $S_1 \subset \mathrm{gr}.A$ une partie multiplicative formée d'éléments homogènes. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n \subset \underline{A}_{\cdot,n}$ la partie multiplicative formée des éléments homogènes de $\underline{A}_{\cdot,n}$ qui relève les éléments (homogènes) de $S_1 \subset \mathrm{gr}.A = \underline{A}_{\cdot,1}$ et on note $S \subset A$ la partie multiplicative formée des éléments $s \in A$ tels qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ avec

$s \in A_i$ et s d'image dans S_1 par la projection canonique $A_i \longrightarrow gr_i A$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $s \in S_n$, on a $ad(s)^n = 0$ sur $\underline{A}_{\cdot,n}$ ($gr_\cdot A$ est commutatif), donc $\underline{A}_{\cdot,n}$ admet un anneau de fractions à dénominateurs dans S_n , qui est gradué car S_n est formée d'éléments homogènes (cf. A.2.1), notons le $\varphi_{\cdot,n} : \underline{A}_{\cdot,n} \longrightarrow \underline{A}'_{\cdot,n}$; les $\varphi_{\cdot,n}$ forment un système projectif (cf. A.2.1 (δ)),

$$\text{(A.2.3.1)} \qquad \begin{tikzcd} \arrow[r, dashed, two heads] & \underline{A}_{\cdot,n+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & \underline{A}_{\cdot,n} \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, "\varphi_n"] & \underline{A}_{\cdot,1} = gr_\cdot A \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \arrow[r, dashed, two heads] & \underline{A}'_{\cdot,n+1} \arrow[r, two heads] & \underline{A}'_{\cdot,n} \arrow[r, two heads, dashed] & \underline{A}'_{\cdot,1} = S_1^{-1} gr_\cdot A \end{tikzcd}$$

<u>Lemme</u> A.2.3.2. <u>Le système projectif d'anneaux gradués des</u> $\underline{A}'_{\cdot,n}$ <u>ci-dessus et la collection des</u> $\varphi_n(\nu_n) = \nu'_n$, <u>vérifient les conditions</u> (a), (b) <u>et</u> (c) <u>de</u> A.1.2.3 (ii).

On notera (A',A'_i) l'anneau filtré <u>complet</u> associé au système $(\underline{A}'_{\cdot,n},\nu'_n)$ (cf. A.1.2.3 (ii)), de sorte que $A'_i = \varprojlim_{n\to\infty} A'_{i,n}$ et $A' = \varinjlim_{i\to\infty} \varprojlim_{n\to\infty} A'_{i,n}$, avec $A'_i \hookrightarrow A'_{i+1}$, $(a'_n) \longmapsto (\nu'_n a'_n)$; on a un homomorphisme naturel d'anneaux filtrés $\varphi : (A,A_i) \longrightarrow (A',A'_i)$ qui a les propriétés suivantes :

<u>Proposition</u> A.2.3.3 (i) $\varphi : (A,A_i) \longrightarrow (A',A'_i)$ <u>induit par passage au gradué la flèche canonique</u> $gr_\cdot A \longrightarrow S_1^{-1} gr_\cdot A = gr_\cdot A'$.

(ii) <u>Si</u> $s \in S$, $\varphi(s)$ <u>est inversible dans</u> A'.

(iii) <u>Pour tout morphisme d'anneaux filtrés complets</u> $f : (A,A_i) \longrightarrow (B,B_i)$ <u>tel que, pour tout</u> $n \in \mathbb{Z}$ <u>et tout</u> $s \in S \cap (A_n - A_{n-1})$, $f(s)$ <u>soit inversible dans</u> B <u>d'inverse</u> $f(s)^{-1} \in B_{-n}$, <u>il existe un unique morphisme d'anneaux filtrés</u> $f' : (A',A'_i) \longrightarrow (B,B_i)$ <u>tel que</u> $f = f' \circ \varphi$.

<u>Remarque</u> A.2.3.4. Si (A,A_i) est un anneau filtré complet et si $a \in A_i$, pour un $i \in \mathbb{Z}$, a une image dans $gr_i A$ inversible dans $gr_\cdot A$, alors a est inversible dans A , d'inverse $a^{-1} \in A_{-i}$.

<u>Corollaire</u> A.2.3.4. <u>Supposons de plus</u> $gr\, A$ <u>noethérien</u>, <u>alors on a</u>

(i) $gr\, A'$, A'_0 et A' <u>sont noethériens</u>, <u>à gauche et à droite</u>.

(ii) $\varphi : A \longrightarrow A'$ <u>est plat</u>, <u>à gauche et à droite</u>.

On appellera $\varphi : (A,A_i) \longrightarrow (A',A'_i)$ <u>l'anneau filtré de fractions</u> de (A,A_i) <u>relatif à</u> $S_1 \subset \mathrm{gr}.A$ et on le notera encore $\varphi : (A,A_i) \longrightarrow (A,A_i)_{S_1}$.

La construction précédente marche tout aussi bien pour les (A,A_i)-modules filtrés complets et permet d'associer à tout (A,A_i)-module filtré complet (M,M_i) un (A',A'_i)-module filtré complet (M',M'_i) muni d'une flèche canonique $\varphi : (M,M_i) \longrightarrow (M',M'_i)$ de (A,A_i)-modules filtrés vérifiant des propriétés analogues à A.2.3.3 (i) et (iii).

<u>Lemme</u> A.2.3.5. <u>Le</u> (A',A'_i)-<u>module</u> <u>filtré complet</u> (M',M'_i) <u>est canoniquement isomorphe au complété du</u> (A',A'_i)-<u>module</u> <u>filtré</u> $(A',A'_i)\otimes_{(A,A_i)}(M,M_i) = (A'\otimes_A M, (A'\otimes_A M)_i)$, <u>avec</u>, <u>pour tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, $(A'\otimes_A M)_i = \sum_{j+k\leqslant i} \mathrm{Im}(A'_j \otimes M_k)$.

<u>Corollaire</u> A.2.3.6. <u>Si l'on suppose de plus que</u> gr A <u>est noethérien et que</u> $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ <u>est une bonne filtration</u>, <u>il en est de même de</u> $(M'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ <u>et en fait</u> (M',M'_i) <u>est canoniquement isomorphe à</u> $(A',A'_i)\otimes_{(A,A_i)}(M,M_i)$.

On appellera $\varphi : (M,M_i) \longrightarrow (M',M'_i)$ le localisé filtré de (M,M_i) relatif à $S_1 \subset \mathrm{gr}.A$ et on le notera encore $\varphi : (M,M_i) \longrightarrow (M,M_i)_{S_1}$.

A.3. Microlocalisation algébrique.

A.3.0. Soit $R_. = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$ un anneau gradué commutatif, à degrés positifs ($1 \in R_o$ et $R_i.R_j \subset R_{i+j}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$) ; on note R l'anneau (non gradué) sous-jacent à $R.$ et on pose $X = \mathrm{Spec}(R_o)$, $V = \mathrm{Spec}(R)$ et $P = \mathrm{Proj}(R.)$; on a alors un diagramme commutatif canonique

(A.3.0.1)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left, "p"] & V-s(X) = \dot{V} \arrow[r, "q"] \arrow[d] & P \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ & X \arrow[ul, shift left, "s"] & \end{tikzcd}$$

où $p^* : R_o \longrightarrow R$ et $s^* : R \longrightarrow R_o$ sont respectivement l'inclusion et l'augmentation canonique (cf. [EGA II] 8.3).

On notera $\varepsilon : V \longrightarrow V'$ le morphisme d'espaces topologiques défini comme suit : ensemblistement, $V' = V$ et ε est l'identité ; la topologie de V' est celle engendrée par la base d'ouverts $\{D(f) \mid f \in R$, f homogène$\}$, où $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$; ε est bien une application continue. Il est clair que la projection p se factorise par ε en $p' : V' \longrightarrow X$, que, pour $s' = \varepsilon \circ s$, $\dot{V}' = V'-s'(X) \hookrightarrow V'$ est un ouvert de V' ($\dot{V}'$ est la réunion des $D(f)$ pour $f \in R$, f homogène de degré > 0) et que q se factorise par $\dot{\varepsilon} : \dot{V} \longrightarrow \dot{V}'$ en $q' : \dot{V}' \longrightarrow P$.

Pour tout espace topologique T, notons $\mathrm{Ouv}(T)$ la catégorie des ouverts, alors le foncteur continu (cf. [SGA 4] III),

$$\varepsilon^{-1} : \mathrm{Ouv}(V') \longrightarrow \mathrm{Ouv}(V)$$

admet un adjoint à gauche $\varepsilon_.$, tel que, pour tout $U \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Ouv}(V)$, $\varepsilon^{-1}\varepsilon_.(U)$ soit le saturé de U pour l'action naturelle de $\mathbb{G}_{m,X}$ sur V. Plus précisément, on a un isomorphisme de schémas au-dessus de X,

$$\mu : \mathbb{G}_{m,X} \times_X V \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{m,X} \times_X V$$

tel que $pr_1 \circ \mu = pr_1$ et $(pr_2 \circ \mu)^* : R. \longrightarrow R.[t,t^{-1}]$ envoie $f \in R_i$ sur $f.t^i$, et

$$\varepsilon^{-1}\varepsilon_.(U) = pr_2 \circ \mu \circ pr_2^{-1}(U) .$$

Lemme A.3.0.2. Le foncteur $\varepsilon. : \mathrm{Ouv}(V) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(V')$ est lui aussi continu. Par suite, pour tout faisceau $\mathcal{F}'$ sur V' et tout $U \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Ouv}(V)$, on a $(\varepsilon^{-1}\mathcal{F}')(U) = \mathcal{F}'(\varepsilon.(U))$ et la flèche d'adjonction $\mathcal{F}' \longrightarrow \varepsilon_*\varepsilon^{-1}\mathcal{F}'$ est un isomorphisme.

Preuve. Le seul point non trivial à vérifier est que, pour $U_1, U_2 \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Ouv}(V)$, on a $\varepsilon.(U_1) \cap \varepsilon.(U_2) \subset \varepsilon.(U_1 \cap U_2)$; or, si $v \in V$ est tel que $\mathrm{pr}_2^{-1}(v) \cap \mu(\mathrm{pr}_2^{-1}(U_i)) \neq \emptyset$ $(i = 1,2)$, on a aussi $\mathrm{pr}_2^{-1}(v) \cap \mu(\mathrm{pr}_2^{-1}(U_1)) \cap \mu(\mathrm{pr}_2^{-1}(U_2)) \neq \emptyset$ par irréductibilité de $\mathrm{pr}_2^{-1}(v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{m,v}$, d'où la conclusion.

Lemme A.3.0.3. Pour tout faisceau $\mathcal{F}'$ sur V', la flèche canonique

$$p'_*\mathcal{F}' \longrightarrow s'^{-1}\mathcal{F}'$$

$(p'_* \longrightarrow p'_*s'_*s'^{-1} = s'^{-1})$ est un isomorphisme.

Preuve. Pour $x \in X$, les $p'^{-1}(U)$, U voisinage ouvert de x dans X, forment un système cofinal de voisinages de $s'(x)$ dans V', d'où l'énoncé.

Corollaire A.3.0.4. Pour tout faisceau $\mathcal{F}'$ sur V', la flèche canonique

$$p_*\varepsilon^{-1}\mathcal{F}' \longrightarrow s'^{-1}\mathcal{F}'$$

$(p_*\varepsilon^{-1} \longrightarrow p_*s_*s^{-1}\varepsilon^{-1} = s'^{-1})$ est un isomorphisme.

On munira V' du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{V'} = \varepsilon_*\mathcal{O}_V$, de sorte que, pour $f \in R$, f homogène, on a $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{V'}) = S_f^{-1}R$, où $S_f = \{f^m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Les applications continues ε, s', p', q' se prolongent naturellement en des morphismes d'espaces annelés ($\varepsilon_\natural : \mathcal{O}_{V'} \longrightarrow \varepsilon_*\mathcal{O}_V$ est l'identité,...).

Lemme A.3.0.5 (i) Le faisceau $\mathcal{O}_{V'}$ admet une décomposition canonique

$$\mathcal{O}_{V'} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{V'}(i)$$

en somme directe de $p'^{-1}\mathcal{O}_X$-Modules sur V', qui en fait une $p'^{-1}\mathcal{O}_X$-Algèbre graduée.

(ii) Pour tout $i < 0$, $p'_*\mathcal{O}_{V'}(i) \xrightarrow{\sim} s'^{-1}\mathcal{O}_{V'}(i) = 0$ et, pour tout $i \geqslant 0$, $p'_*\mathcal{O}_{V'}(i) \xrightarrow{\sim} s'^{-1}\mathcal{O}_{V'}(i)$ est le $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent

<u>associé au</u> R_o-<u>module</u> R_i .

(iii) <u>Le morphisme d'adjonction</u>

$$q'^{-1}q'_*\mathcal{O}_{\dot{V}'} \longrightarrow \mathcal{O}_{\dot{V}'}$$

<u>est un isomorphisme de faisceaux d'anneaux gradués, la graduation de la source étant induite par la graduation canonique</u>

$$q'_*\mathcal{O}_{\dot{V}'} = q_*\mathcal{O}_{\dot{V}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_P(i)$$

<u>et la graduation du but étant induite par la graduation de</u> $\mathcal{O}_{V'}$ <u>de la partie</u> (i).

<u>Preuve</u>. Si $f \in R$, f homogène, $S_f^{-1}.R$ est canoniquement gradué et on définit $\mathcal{O}_{V'}(i)$ par

$$\Gamma(D(f),\mathcal{O}_{V'}(i)) = (S_f^{-1}.R)_i \ .$$

A.3.1. Dans toute la suite (A,A_i) désignera un anneau filtré vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $A_i = 0$ si $i < 0$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i = A$, de sorte que (A,A_i) est complet (au sens ind-pro),

(ii) gr.A est commutatif, de sorte que A_o est commutatif.

Ces propriétés assurent que A admet un anneau de fractions (à droite et à gauche) relativement à toute partie multiplicative S_o de A_o et que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $S_o^{-1}A_i = A_iS_o^{-1}$ dans $S_o^{-1}A = AS_o^{-1}$ (on a, pour tout $s \in A_o$, $ad(s)^n = 0$ sur A_i/A_{i-n} et donc $ad(s)^{i+1} = 0$ sur A_i ; cf. [8] 3.6).

Posons $X = \mathrm{Spec}(A_o)$; il existe alors une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente (à gauche et à droite) $\mathcal{A}$, munie d'une filtration croissante, indexée par $\mathbb{Z}$, $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, par des sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents (à gauche et à droite), telle que, pour tout $a_o \in A_o$, on ait :

$$\Gamma(D(a_o),\mathcal{A}) = S_{a_o}^{-1}A = AS_{a_o}^{-1} \ ,$$

$$\Gamma(D(a_o),\mathcal{A}_i) = S_{a_o}^{-1}A_i = A_iS_{a_o}^{-1} \ ,$$

quelque soit $i \in \mathbb{Z}$ $(D(a_o) = \{\mathfrak{p} \in X | a_o \notin \mathfrak{p}\}$ et $S_{a_o} = \{a_o^m | m \in \mathbb{N}\} \subset A_o)$; bien entendu, on a $\mathcal{A}_i = 0$ pour $i < 0$, $\mathcal{A}_o = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i+1}$, $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$, pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$. On définit $\underline{\mathcal{A}}.$ et $\underline{\mathcal{A}}._{,n}$ comme en A.1.2.

On utilisera librement les notations de A.3.0 pour $R. = gr.A$, $R_o = A_o$, de sorte que $V = \mathrm{Spec}(gr\ A)$, $P = \mathrm{Proj}(gr.A)$,---.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $\underline{\mathcal{B}}'._{,n}$ le faisceau d'anneaux gradués associé au préfaisceau

$$D(f) \longmapsto \underline{A}'._{,n}(f)$$

sur la base d'ouverts de V' formée des $D(f)$, $f \in gr.A$, f homogène, où $\underline{A}'._{,n}(f)$ est l'anneau de fractions de $\underline{A}._{,n}$ à dénominateurs dans $S_n(f)$, avec $S_1(f) = \{f^m | m \in \mathbb{N}\} \subset gr.A$ (cf. A.2.3).

<u>Lemme</u> A.3.1.1. <u>Pour tout entier</u> $n \geqslant 1$ <u>et tout</u> $f \in gr.A$, f <u>homogène</u>, <u>la flèche canonique</u>

$$\underline{A}'._{,n}(f) \longrightarrow \Gamma(D(f), \underline{\mathcal{B}}'._{,n})$$

<u>est un isomorphisme d'anneaux gradués</u>.

<u>Preuve</u>. On recopie la démonstration de [EGA I] 1.3.7.

Les $\underline{\mathcal{B}}'._{,n}$ $(n \geqslant 1)$ forment clairement un système projectif d'Anneaux gradués sur V', muni d'un isomorphisme canonique

$$(\underline{\mathcal{A}}._{,n})_n \xrightarrow{\sim} p'_*((\underline{\mathcal{B}}'._{,n})_n)$$

de tels systèmes, et la section centrale ν_n de $\underline{\mathcal{A}}._{,n}$ de degré 1, induit une section centrale ν'_n de $\underline{\mathcal{B}}'._{,n}$ de degré 1, via l'isomorphisme ci-dessus ; $(\underline{\mathcal{B}}'._{,n})_n$ et les ν'_n vérifient les conditions A.1.2.3 (ii) (a), (b), (c) et donc définissent un Anneau filtré complet $(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_i)$ sur V' ; d'après A.3.1.1, on a, pour tout $f \in gr.A$, f homogène, un isomorphisme canonique

$$(A, A_i)_{S_1(f)} \xrightarrow{\sim} \Gamma(D(f), (\mathcal{B}', \mathcal{B}'_i)) \tag{A.3.1.2}$$

d'anneaux filtrés complets et on a un isomorphisme canonique

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \xrightarrow{\sim} p'_*(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_i) \tag{A.3.1.3}$$

d'Anneaux filtrés sur X.

Définition A.3.1.4. On appellera microlocalisé de (A,A_i) ou de $(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)$ l'Anneau filtré $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$ sur V' et l'Anneau filtré $(\mathcal{B},\mathcal{B}_i) = \varepsilon^{-1}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$ sur V, munis des morphismes canoniques

$$\varphi' : p'^{-1}(\mathcal{A},\mathcal{A}_i) \longrightarrow (\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$$

et

$$\varphi : p^{-1}(\mathcal{A},\mathcal{A}_i) \longrightarrow (\mathcal{B},\mathcal{B}_i)$$

(φ' provient par adjonction de (A.3.1.3) et $\varphi = \varepsilon^{-1}\varphi'$).

Remarque A.3.1.5. Tout comme (A.3.1.3), les flèches canoniques

$$(\mathcal{A},\mathcal{A}_i) \longrightarrow p_*(\mathcal{B},\mathcal{B}_i)$$

$$(\mathcal{A},\mathcal{A}_i) \longrightarrow s'^{-1}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$$

$$(\mathcal{A},\mathcal{A}_i) \longrightarrow s^{-1}(\mathcal{B},\mathcal{B}_i)$$

sont des isomorphismes (cf. A.3.0.2, A.3.0.3 et A.3.0.4).

Proposition A.3.1.6 (i) L'isomorphisme canonique $\mathrm{gr}\,\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} p'_*\mathcal{O}_{V'}$ provient via p'_* d'un isomorphisme d'Anneaux gradués

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \sigma_i : \mathrm{gr}.\mathcal{B}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{V'} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{V'}(i)$$

(ii) Pour tout point v de V', $b \in \mathcal{B}'_{i,v} - \mathcal{B}'_{i-1,v}$ est inversible dans $\mathcal{B}'_v$ si $\sigma_i(b)$ l'est dans $\mathcal{O}_{V',v}$ (et réciproquement, pour $\mathrm{gr}\,A$ intègre).

(iii) Si $f : p'^{-1}(\mathcal{A},\mathcal{A}_i) \longrightarrow (\mathcal{C}',\mathcal{C}'_i)$ est un homomorphisme d'Anneaux filtrés complets (au sens ind-pro) sur V' tel que, pour tous $v \in V$ et $a \in \mathcal{A}_{i,p'(v)} - \mathcal{A}_{i-1,p'(v)}$, avec $\sigma_i(\varphi'(a))$ inversible dans $\mathcal{O}_{V',v}$, on ait $f(a)$ inversible dans $\mathcal{C}'_v$ d'inverse $f(a)^{-1} \in \mathcal{C}'_{-i,v}$, alors il existe un unique homomorphisme d'Anneaux filtrés $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i) \xrightarrow{g} (\mathcal{C}',\mathcal{C}'_i)$ sur V' tel que $f = g\circ\varphi$.

Preuve. Voir A.2.3.3.

Corollaire A.3.1.7. Supposons de plus $\mathrm{gr}\,A$ noethérien, alors on a :

(i) $\mathcal{O}_{V'}$, $\mathcal{B}'_0$ et $\mathcal{B}'$ sont des Anneaux cohérents, noethériens (à gauche et à droite) (cf. [14] 1.1.1),

(ii) $\varphi' : p'^{-1}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}'$ est plat (à gauche et à droite).

<u>Preuve</u>. Voir A.2.3.4.

<u>Remarque</u> A.3.1.8. Sous les hypothèses du corollaire, $\mathcal{O}_V$, $\mathcal{B}_o$ et $\mathcal{B}$ sont aussi des Anneaux cohérents et $\varphi : p^{-1}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est plat (pour $U \in \mathrm{ob}\ \mathrm{Ouv}(V)$ et pour $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ des faisceaux sur V', la donnée d'un morphisme $(\varepsilon^{-1}\mathcal{F}')|U \longrightarrow (\varepsilon^{-1}\mathcal{G}')|U$ équivaut à la donnée d'un morphisme $\mathcal{F}'|\varepsilon_{\cdot}(U) \longrightarrow \mathcal{G}'|\varepsilon_{\cdot}(U)$ et le noyau du premier est la restriction à U de ε^{-1} du noyau du second, cf. A.3.0.2).

A.3.2. Fixons (A,A_i) comme en A.3.1 et soit (M,M_i) un (A,A_i)-module filtré (à gauche) vérifiant $M_i = 0$ pour $i \ll 0$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} M_i = M$, de sorte que (M,M_i) est complet (au sens ind-pro).

Sur $X = \mathrm{Spec}(A_o)$, il existe alors un $(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)$-Module filtré quasi-cohérent $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ (chaque $\mathcal{M}_i$, ainsi que $\mathcal{M}$, est $\mathcal{O}_X$-quasi-cohérent) tel que

$$\Gamma(D(a_o),(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)) = (S_{a_o}^{-1}M, S_{a_o}^{-1}M_i)$$

pour tout $a_o \in A_o$.

La construction de $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$ s'adapte aussitôt à $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ et fournit un $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$-Module filtré complet (au sens ind-pro) $(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$ tel que

$$\Gamma(D(f),\underline{\mathcal{N}}'_{\cdot,n}) = S_n(f)^{-1}\underline{M}_{\cdot,n}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout $f \in \mathrm{gr}_{\cdot}A$, f homogène, muni d'un isomorphisme canonique

$$(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \xrightarrow{\sim} p'_*(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i) \tag{A.3.2.1}$$

au-dessus de (A.3.1.3).

<u>Définition</u> A.3.2.2. <u>On appellera microlocalisé de</u> (M,M_i) <u>ou de</u> $(\mathcal{M},\mathcal{M}_i)$ <u>le</u> $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$-<u>Module filtré</u> $(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$ <u>et le</u> $(\mathcal{B},\mathcal{B}_i)$-<u>Module filtré</u> $(\mathcal{N},\mathcal{N}_i) = \varepsilon^{-1}(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$, <u>munis des morphismes canoniques</u>

$$\varphi' : p'^{-1}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$$

<u>et</u>

$$\varphi : p^{-1}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$$

au-dessus des φ' et φ de A.3.1.4 (φ' provient par adjonction de (A.3.2.1) et $\varphi = \varepsilon^{-1}\varphi'$).

Remarque A.3.2.3. Tout comme (A.3.2.1) les flèches canoniques

$$(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow p_*(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$$

$$(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow s'^{-1}(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$$

$$(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \longrightarrow s^{-1}(\mathcal{N},\mathcal{N}_i)$$

sont des isomorphismes.

Proposition A.3.2.4 (i) φ' induit un isomorphisme de $\mathrm{gr}.\mathcal{B}'(\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{V'})$-Modules gradués

$$\mathrm{gr}.\mathcal{B}' \otimes_{p'^{-1}\mathrm{gr}.\mathcal{A}} p'^{-1}\mathrm{gr}.\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}.\mathcal{N}'$$

et un isomorphisme de $\mathcal{O}_V$-Modules

$$\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varepsilon^*\mathrm{gr}\,\mathcal{N}' = \mathcal{O}_V \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{V'}} \mathrm{gr}\,\mathcal{N}',$$

où $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M}$ est le $\mathcal{O}_V$-Module quasi-cohérent tel que $p_*\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} = \mathrm{gr}\,\mathcal{M}$.

(ii) Le $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$-Module filtré $(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$ est canoniquement isomorphe au complété (ind-pro) du $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i)$-Module filtré

$$(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_i) \otimes_{p'^{-1}(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)} p'^{-1}(\mathcal{M},\mathcal{M}_i) \ ;$$

de plus, si $\mathrm{gr}\,M$ est de présentation finie sur $\mathrm{gr}\,A$, de sorte que $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une bonne filtration (cf. A.1.1), le produit tensoriel ci-dessus est déjà complet (au sens ind-pro) et coïncide donc avec $(\mathcal{N}',\mathcal{N}'_i)$ (et idem sans les ').

Preuve. Voir A.2.3.5 et A.2.3.6.

Proposition A.3.2.5. Supposons de plus $\mathrm{gr}\,A$ noethérien et $\mathrm{gr}\,M$ de type fini sur $\mathrm{gr}\,A$ alors $\mathcal{N}'$ est un $\mathcal{B}'$-Module cohérent et chaque $\mathcal{N}'_i$ est un $\mathcal{B}'_o$-$\mathrm{gr}\,A$-Module cohérent (et idem sans les ').

A.3.3. Les constructions de A.3.1 sont clairement fonctorielles en (A,A_i) et se globalisent sur un schéma X qui n'est plus supposé nécessairement affine (X est un schéma, $(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)$ une $\mathcal{O}_X$-Algèbre

filtrée quasi-cohérente à gauche et à droite, avec $\mathcal{A}_o = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}_i = 0$ pour $i < 0$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i+1}$, $\bigcup_i \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$, pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$ et gr $\mathcal{A}$ commutative ; V = Spec(gr $\mathcal{A}$), P = Proj(gr.$\mathcal{A}$), ...).

A.3.4. L'exemple type sera pour nous le suivant. Soient S un schéma de caractéristique nulle et $f : X \longrightarrow S$ un S-schéma lisse, de type fini ; la $\mathcal{O}_X$-Algebre filtree $(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)$ est alors $(\mathcal{D}_{X/S}, \mathcal{D}_{X/S,i})$ (les opérateurs différentiels relatifs à S) et $V = T^*(X/S) = \mathbb{V}((\Omega^1_{X/S})^\vee)$ est le fibré cotangent, relatif à S , de X; le microlocalisé algébrique $(\mathcal{B},\mathcal{B}_i)$ de $(\mathcal{A},\mathcal{A}_i)$ est appelé dans ce cas l'Anneau filtré des opérateurs microdifférentiels sur X relatifs à S et noté

$$(\mathcal{E}_{X/S}, \mathcal{E}_{X/S,i})$$

(il s'agit d'opérateurs microdifférentiels formels, i.e. sans conditions de convergence au sens analytique du terme).

Bibliographie

[1] P. BAUM, W. FULTON et R. MACPHERSON.- Riemann-Roch for Singular Varieties. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 45 (1975) pp. 101-146.

[2] J. BERNSTEIN.- Algebraic Theory of $\mathcal{D}$-Modules, dans cette conférence.

[3] J.-E. BJÖRK.- Rings of Differential Operators. North-Holland (1979).

[4] J.-E. BJÖRK.- Nouveau livre à paraître.

[5] N. BOURBAKI.- Algèbre Commutative, chapitres II et III, Hermann.

[6] J.-L. BRYLINSKI.- Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques. Prépublication de l'Ecole Polytechnique (1983), à paraître dans Astérisque.

[7] J.-L. BRYLINSKI.- Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II, dans Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II-III). Astérisque 101-102 (1983) pp. 75-117.

[8] J. DIXMIER.- Algèbres enveloppantes. Gauthier-Villars (1974).

[9] O. GABBER.- The Integrability of the Characteristic Variety. American Journal of Math. 103 (1981), pp. 445-468.

[10] C. GODBILLON.- Géométrie différentielle et mécanique analytique. Hermann (1969).

[11] M. KASHIWARA.- B-Functions and Holonomic Systems. Inventiones Math. 38 (1976), pp. 33-53.

[12] M. KASHIWARA.- On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations II. Inventiones Math. 49 (1978), pp. 121-135.

[13] M. KASHIWARA.- Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, dans Algebraic Geometry. Lecture Notes in Math. 1016, Springer-Verlag (1983), pp. 134-142.

[14] M. KASHIWARA et T. KAWAÏ.- On Holonomic Systems of Microdifferential Equations III. Systems with Regular Singularities. Publications of the R.I.M.S. Kyoto University 17 (1981) 813-979.

[15] M. KASHIWARA et T. OSHIMA.- Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. of Math. 106 (1977) pp. 145-200.

[16] Y. LAURENT.- Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe : opérateurs 2-microdifférentiels. Thèse d'Etat de l'Université Paris-Sud (Orsay) (1982).

[17] Y. LAURENT.- Deuxième microlocalisation. Lecture Notes in Physics 126. Springer-Verlag (1980) pp. 77-89.

[18] Y. LAURENT.- Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes, dans cette conférence.

[19] G. LAUMON.- Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-Modules filtrés dans Algebraic Geometry. Lecture Notes in Math. 1016, Springer-Verlag (1983) pp. 151-237.

[20] P. SCHAPIRA.- Une introduction à l'étude des systèmes d'équations microdifférentielles, dans Analytic solutions of partial differential equations. Astérisque 89-90 (1981) pp. 45-84.

[21] J.-L. VERDIER.- Le théorème de Riemann-Roch pour les intersections complètes, dans Séminaire de géométrie algébrique. Astérisque 36-37 (1976) pp. 189-228.

[EGA J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK.- Eléments de Géométrie Algébrique : I] Sringer-Verlag (1971) ; II], IV], Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n°s 8, 20, 24, 28, 32.

[SGA Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie :
4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER. Lecture Notes in Math. 269, 270 et 305, Springer Verlag ;
6] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK et L. ILLUSIE. Lecture Notes in Math. 225, Springer Verlag.

G. Laumon
Université de Paris-Sud
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY (France)