

# Astérisque

J. L. BRYLINSKI

**La classe fondamentale d'une variété algébrique engendre le  $\mathcal{D}$ -module qui calcule sa cohomologie d'intersection (d'après Masaki Kashiwara)**

*Astérisque*, tome 130 (1985), p. 260-271

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_130\\_\\_260\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__260_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA CLASSE FONDAMENTALE D'UNE VARIÉTÉ ALGÈBRE ENGENDRE  
LE  $\mathcal{D}$ -MODULE QUI CALCULE SA COHOMOLOGIE D'INTERSECTION

(d'après Masaki KASHIWARA)

J.L. BRYLINSKI

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique  
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex

"Unité Associée au C.N.R.S. n° 169"

INTRODUCTION

Dans une lettre (datée du 16 mai 1983), Kashiwara m'a donné la démonstration d'un résultat que j'avais eu la faiblesse de croire conjectural. Le résultat est le suivant ; supposons pour simplifier que  $Y$  est une hypersurface irréductible dans la variété algébrique lisse  $X$ , d'équation  $F$ , et soit  $\mathcal{L}(Y, X) \subset H_Y^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(*Y)/\mathcal{O}_X$  le sous  $\mathcal{O}_X$ -Module tel que  $DR\mathcal{L}(Y, X) = \underline{IC}_Y^*$  (voir [5], [4]). Si  $\xi$  est un champ de vecteurs sur  $X$  tel que  $\xi(F)$  ne s'annule pas sur  $Y$ , alors la classe de  $\left[ \frac{\xi(F)}{F} \right]$  dans  $H_Y^1(\mathcal{O}_X)$  est un générateur de  $\mathcal{L}(Y, X)$ . Comme exposé plus bas, la démonstration est une application facile d'un théorème profond de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber.

Dans le cas analytique complexe, Vilonen déduit ce résultat, pour  $Y$  à singularités isolées, des résultats de sa thèse sur la caractérisation des éléments  $\left[ \frac{g}{F^n} \right]$  de  $\mathcal{L}(Y, X)$  par la nullité de certaines intégrales  $\int_Y \frac{g \cdot \omega}{F^n}$ . Voir [11] pour ses méthodes, qui devraient pouvoir se généraliser.

Bien que cela n'intéresse sans doute personne, je tiens à préciser comment j'avais rencontré  $\frac{\xi(F)}{F}$  au cours de mes travaux sur la transformation de Radon, à l'automne 1982. Supposons  $X = \mathbb{C}^2$  et  $Y$  unibranche, de sorte que  $\mathcal{L}(Y, X) = H_Y^1(\mathcal{O}_X)$ . Soient  $(x, y)$  des coordonnées linéaires sur  $\mathbb{C}^2$ , alors  $\int_Y \mathcal{L}(Y, X)$  contient  $\mathcal{O}_{\Delta^1}$ . Si l'on traduit cela, il doit exister un élément  $v$  de  $\mathcal{L}(Y, X)$ , tel que  $\frac{\partial v}{\partial y}$  soit de la forme  $\frac{\partial w}{\partial x}$  pour un  $w \in \mathcal{L}(Y, X)$ , mais tel que  $v$  ne soit pas de cette forme. Il s'impose alors de prendre

$$v = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ F \end{array} \right].$$

Les classes  $\left[ \frac{\xi(F)}{F} \right]$  sont des contractions de la classe fondamentale  $\left[ \frac{dF}{F} \right]$  de  $Y$  dans  $X$ , en cohomologie de Hodge à

support  $H_Y^1(X, \Omega_X^1)$ . Le résultat général de Kashiwara est que la classe fondamentale  $c_{Y/X} \in H_Y^d(X, \Omega_X^d)$  vit dans  $\Omega_X^d \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(Y, X)$  pour  $Y$  purement de codimension  $d$  dans  $X$  lisse.

Malgré la limpidité de sa démonstration, ce résultat m'est encore obscur. Cela explique, voire excuse, la vacuité métaphysique de ma rédaction.

Je remercie Kashiwara de son enseignement et de sa confiance à mon égard. A Angéniol, qui m'a expliqué la classe fondamentale naguère et a le premier compris que les  $\mathcal{D}$ -modules jouaient un rôle central dans sa théorie, vont mes très vifs remerciements. La thèse de Kari Vilonen a encore stimulé mon intérêt pour ce sujet ; de nombreuses discussions avec lui m'ont été très utiles. Barlet et Kashiwara viennent de m'informer qu'ils ont obtenu la description de  $\mathcal{L}(Y, X)$  dans le cadre complexe-analytique en terme de la classe fondamentale de  $Y$ , par une méthode purement analytique.

I - RAPPELS SUR LA CLASSE FONDAMENTALE

1) Pour toute variété algébrique  $Y$  sur un corps parfait  $k$ , El Zein [6] définit une section canonique  $C_Y$  du bicomplexe  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y^*, K_Y^*)$ , où  $K_Y^*$  est le complexe résiduel de  $Y$ , au sens de [8] :  $K_Y^* = p^! \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ , où  $p : Y \rightarrow \text{Spec}(k)$  est le morphisme structural.  $C_Y$  est fermé relativement à chacune des différentielles du double complexe.

Lorsque  $Y$  est purement de dimension  $m$ ,  $K_Y^*$  est concentré en degrés  $[-m, 0]$ , et  $C_Y$  est de degré total  $-2m$ . Si  $Y$  est lisse,  $K_Y^*$  est le complexe de Cousin de  $\mathcal{O}_{Y/k}^m[m]$ ; pour tout  $j \in [0, m]$ , on a donc :

$$K_Y^{j-m} = \sum_{\substack{x \in X \\ \text{cd } Y(x)=j}} i_x H_x^j(\mathcal{O}_Y^m)$$

avec la convention suivante : pour  $G$  un groupe abélien, et pour  $x \in X$ ,  $i_x G$  est le prolongement par zéro du faisceau (de Zariski) constant sur  $\{\bar{x}\}$ , de fibre  $G$ .

Plus généralement, soit  $i = Y \hookrightarrow X$  une immersion fermée, avec  $X$  lisse. On a bien sûr  $K_Y^* = i^! K_X^* = i^* \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, K_X^*)$  [3], [5], de sorte que pour  $j \in [0, n]$ , on a (avec  $n = \dim(X)$ )

$$K_Y^{j-n} = \sum_{\text{cd}_X(x)=j} i_x \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x}, H_x^j(\mathcal{O}_X^n))$$

En fait, ce groupe est nul sauf pour  $j \in [n-m, n]$ . On peut interpréter  $C_Y$  comme un morphisme  $\mathcal{O}_Y^m \xrightarrow{C_Y} K_Y^m = \sum_{\eta} i_{\eta} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,\eta}}(\mathcal{O}_{Y,\eta}, H_{\eta}^{n-m}(\mathcal{O}_X^n))$ , où  $\eta$  parcourt l'ensemble des points génériques de  $Y$ .

Le fait que  $C_Y$  soit fermé relativement à chacune des différentielles de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y, K_Y^*)$  se traduit ainsi :

(a) Le composé de la restriction  $\Omega_X^m \rightarrow \Omega_Y^m$  et de  $C_Y$  est donné par un élément de  $\Sigma \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,n}}(\mathcal{O}_{Y,n}, H_n^{n-m}(\Omega_X^{n-m}))$  ; cet élément habite en fait dans  $\Sigma \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, H_n^{n-m}(\Omega_{X,c1}^{n-m}))$ , où  $\Omega_{X,c1}^{n-m} = \ker[\Omega_X^{n-m} \xrightarrow{d} \Omega_X^{n-m+1}]$

(b)  $C_Y$  est à valeurs dans  $\text{Ext}_X^{n-m}(\mathcal{O}_Y, \Omega_X^n)$ .

En combinant (a) et (b), on associe à  $C_Y$  un élément canonique de  $\text{Ext}_X^{n-m}(\mathcal{O}_Y, \Omega_{X,c1}^{n-m})$ , qui sera noté  $C_{Y/X}$ . On donnera le même nom à l'élément correspondant de  $\text{Ext}_X^{n-m}(\mathcal{O}_Y, \tau_{\geq n-m}^* \Omega_{X,c1}^*)$ .

Si  $Y$  est réunion de sous-variétés  $Y_i$  de même dimension  $m$ , telles que pour  $i \neq j$ ,  $Y_i \cap Y_j$  soit de dimension  $\leq m-1$ , on a  $C_{Y/X} = \Sigma_i C_{Y_i/X}$  en un sens évident.

Si  $Y$ , sous-variété fermée de  $X$  lisse, est définie schématiquement par  $d$  équations  $F_1, \dots, F_d$  (où  $d = n-m$  est la codimension de  $Y$  dans  $X$ ), on dispose du quasi-isomorphisme de Koszul :  $\Lambda_k^{*-1}(E) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ , où  $E$  est l'espace vectoriel sur  $k$  de base  $F_1, \dots, F_d$ ,  $C_{Y/X}$  est la classe du cocycle qui envoie  $F_1 \wedge \dots \wedge F_d \in \Lambda^d(E)$  sur  $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_d \in \Omega_{X,c1}^d$ . Par conséquent, si pour  $i \in \{1, \dots, d\}$

on dénote  $V_i$  l'ouvert  $F_i \neq 0$  de  $X$ , les  $V_i$  forment un recouvrement ouvert affine de  $X - Y$  ; soit  $j = X - Y \hookrightarrow X$  l'inclusion, de sorte que  $R^{d-1} j^*(\Omega_{X,c1}^d)$  est le  $(d-1)$ -ème faisceau de cohomologie du complexe

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_X^d(*Z_i) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq d} \Omega_X^d(*Z_{i_1} \cup Z_{i_2}) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^d(*Y)$$

où  $Z_i = X - Y_i$ . De cette façon,  $C_{Y/X}$  correspond à la classe de

$$\frac{dF_1}{F_1} \wedge \dots \wedge \frac{dF_d}{F_d} \text{ dans le quotient de } \Omega_X^d(*Y) \text{ par } \bigoplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_X^d(*(\overline{Y-Z_i})).$$

Ces observations permettent d'ailleurs de construire élémentairement  $C_{Y/X}$  lorsque  $Y$  est intersection complète non nécessairement réduite, donc lorsque  $Y$  est localement intersection complète (on vérifie en effet sans peine que

$$\text{Ext}_X^{n-m}(\mathcal{O}_Y, \Omega_{X,cl}^{n-m}) = H^0(X, \underline{\text{Ext}}_X^{n-m}(\mathcal{O}_Y, \Omega_{X,cl}^{n-m}))$$

Localement,  $Y$ , sous-variété irréductible de  $X$  lisse, est composante irréductible d'un sous-schéma intersection complète  $Z$ . On peut alors, si  $k$  est de caractéristique zéro, définir  $C_{Y/X}$  comme la partie de  $C_{Z/X}$  supportée par  $Y$ , divisée par la multiplicité de  $Y$  dans  $Z$ . Comme le problème de construire  $C_{Y/X}$  est local sur  $Y$ , une fois la construction faite sur le lien lisse de  $Y$ , il est donc soluble.

2) Les rappels précédents sont essentiellement valables pour les variétés analytiques complexes. Dans ce cas,  $C_{Y/X}$  est la classe du courant d'intégration  $\int_Y$  sur  $Y$ . C'est un courant de type

$(d,d)$ , tel que  $\partial(\int_Y) = \bar{\partial}(\int_Y) = 0$ . On a la résolution de Dolbeault :  $\Omega_X^* \rightarrow \mathcal{D}_X^{*,*}$ , où  $\mathcal{D}_X^{p,q}$  est le faisceau des courants de type  $(p,q)$ .

Par troncation bête, on obtient une résolution :  $\tau_{\geq d}(\Omega_X^*) \rightarrow \tau_{\geq d}(\mathcal{D}_X^{*,*})$

(où sur  $\mathcal{D}_X^{*,*}$ , on tronque en le premier degré). Comme les faisceaux

$\mathcal{D}_X^{p,q}$  sont fins, on calcule  $H_Y^d(X, \tau_{\geq d} \Omega_X^*)$  comme cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe  $\Gamma_Y(X, \tau_{\geq d} \mathcal{D}_X^{*,*})$ , plus précisément, comme le noyau de  $\Gamma_Y(X, \mathcal{D}_X^{d,d}) \xrightarrow{(\partial, \bar{\partial})} \Gamma_Y(X, \mathcal{D}_X^{d+1,d}) \oplus \Gamma_Y(X, \mathcal{D}_X^{d,d+1})$ .

En ce sens, la classe de cohomologie de  $\int_Y$  correspond à  $\frac{1}{(2\pi i)^d} C_{Y/X}$ .

3) Revenons au cas algébrique, et considérons une immersion fermée  $i = Y \hookrightarrow X$ , avec  $X$  lisse,  $Y$  purement de codimension  $d$  dans  $X$ .

Gillet [7] a construit une classe fondamentale dans  $H_Y^d(X, \underline{K}_d)$ , où  $\underline{K}_d$  est le faisceau associé au préfaisceau  $U \rightarrow K_d(U)$  (K-théorie algébrique à la Quillen). Par le symbole  $\underline{K}_d \rightarrow \Omega_{X,cl}^d$ , on obtient la classe  $C_{Y/X}$ .

Cela ne servira pas dans la suite.

4) La connaissance de  $C_{Y/X}$  permet aussi de construire la classe fondamentale de  $Y$  dans  $X$ , comme élément de  $H_Y^{2d}(X, \underset{\text{degré } 0}{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^{d-1})$  (cohomologie de Beilinson-Deligne). Voir à ce sujet [2].

## II - CLASSE FONDAMENTALE ET COMPLEXE D'INTERSECTION

On considère une variété algébrique complexe équidimensionnelle  $Y$ , et un plongement fermé  $i : Y \hookrightarrow X$ , où  $X$  est lisse purement de dimension  $n$ . Soit  $d$  la codimension de  $Y$  dans  $X$ . On considère  $C_{Y/X}$  comme un élément de  $H_Y^d(X, \Omega_X^d) = \Gamma(X, \underline{H}_Y^d(\Omega_X^d))$ .

On rappelle que  $\underline{H}_Y^d(\mathcal{O}_X)$  est un  $\mathcal{D}_X$ -Module (à gauche) holonorme, à singularités régulières [10] ; son socle  $\mathcal{L}(Y, X)$  (somme de ses sous  $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents irréductibles) correspond, par la correspondance de Riemann-Hilbert, au complexe d'intersection  $i_* \underline{IC}_Y^*$  :  $DR \mathcal{L}(Y, X) = i_* \underline{IC}_Y^*$ .

Théorème :  $C_{Y/X}$  est une section de

$$\Omega_X^d \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(Y, X) \subset \Omega_X^d \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{H}_Y^d(\mathcal{O}_X) = \underline{H}_Y^d(\Omega_X^d).$$

Démonstration : Il s'agit de prouver que le morphisme  $C_Y$ , vu comme morphisme  $C_Y : \Omega_Y^m \rightarrow \underline{H}_Y^d(\Omega_X^n) = \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \underline{H}_Y^d(\mathcal{O}_X)$  se factorise à travers  $\Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(Y, X)$ . On exhibera d'abord un morphisme de faisceaux

sur  $Y: \Omega_Y^m \rightarrow \Omega_X^n \otimes \mathcal{L}(Y, X)$ . Soit  $f: Y' \rightarrow Y$  une résolution des

singularités.

Le théorème de décomposition de Beilinson - Bernstein - Deligne - Gabber [3], traduit en termes de  $\mathcal{D}$ -modules holonormes réguliers à droite (c'est ici - comme souvent - plus naturel, comme Schapira me l'a fait remarquer) fournit en particulier un morphisme de  $\mathcal{D}_X$ -Modules à droite

$$\varphi: \int_{i \circ f} \Omega_{Y'}^m \rightarrow \Omega_X^n \otimes \mathcal{L}(Y, X)$$

tel que  $DR(\varphi)$  est la projection :  $R(i \circ f)_* \mathbb{C}_{Y'} \rightarrow i_* \underline{IC}_Y^*$  dont le théorème en question assume l'existence. On considère alors le morphisme composé

$$\begin{aligned} \Omega_Y^m \rightarrow f_* \Omega_{Y'}^m &\rightarrow R f_* (\Omega_{Y'}^m) \rightarrow R f_* (\Omega_{Y'}^m, \otimes_{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y'} \rightarrow X) \\ &\rightarrow R f_* (\Omega_{Y'}^m, \otimes_{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y'} \rightarrow X) = \int_{i \circ f} \Omega_{Y'}^m \xrightarrow{\varphi} \Omega_X^n \otimes \mathcal{L}(Y, X) \end{aligned}$$

où on a utilisé la section canonique de  $(i \circ f)^* \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{Y'} \hookrightarrow X$  à savoir 1..

Pour vérifier que le composé de ce morphisme avec l'inclusion de  $\Omega_X^n \otimes \mathcal{L}(Y, X)$  dans  $\Omega_X^n \otimes H_Y^d(\mathcal{O}_X)$  est égal à  $C_Y$ , on utilise le fait qu'un élément de  $H_Y^d(\mathcal{O}_X)$  est déterminé par sa valeur aux points génériques de  $Y$ . Ceci permet de supposer  $Y$  lisse, et de conclure par un calcul stupide.

Corollaire : Supposons  $Y$  irréductible ; soit  $\xi$  une section de  $A^d(T_X)$  (où  $T_X$  est le fibré tangent à  $X$ ), telle que  $\xi \cdot C_{Y/X}$  soit une section non nulle de  $\mathcal{L}(Y, X)$ . Alors  $\xi \cdot C_{Y/X}$  engendre  $\mathcal{L}(Y, X)$  comme  $\mathcal{D}_X$ -Module.

Preuve :  $\mathcal{D}_X \cdot (\xi \cdot C_{Y/X})$  est un sous  $\mathcal{D}_X$ -Module cohérent non nul de  $\mathcal{L}(Y, X)$ , donc égal à  $\mathcal{L}(Y, X)$  d'après [5].

Considérons le cas particulier où  $Y$  est une hypersurface d'équation  $F$ . On trouve que pour  $v$  un champ de vecteurs tel que  $v(F)$  ne s'annule pas sur  $Y$ , la classe de  $\frac{v(F)}{F}$  modulo  $\mathcal{O}_X$  engendre  $\mathcal{L}(Y, X) \subset H_Y^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(*Y)/\mathcal{O}_X$ . Dans ce cas, le corollaire résultait, pour  $Y$  à singularités isolées, de la thèse de Vilonen [11]. Vilonen en a donné une démonstration basée sur un calcul de résidus dans l'esprit de Griffiths ; dans [12], il la généralise aux intersections complètes à singularités isolées.

De façon plus mystérieuse, je signale que  $\frac{v(F)}{F} = v(\log F)$ , où  $\log F$  est la section canonique de  $[\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{L}(Y, X)]/T^*X - T^*X$  définie ainsi : pour  $(x, \xi) \in T^*X$ , il existe  $v$  tel que  $(\xi, v)$  soit non nul en  $x$  ; alors  $v \in \mathcal{E}_X$  est inversible près de  $(x, \xi)$  et on pose  $\log F = v^{-1} \left[ \frac{v(F)}{F} \right]$ . L'existence de cette section canonique m'a été signalée il y a longtemps par Schapira.

On peut traduire diverses propriétés de stabilité des complexes d'intersection en termes des classes fondamentales. Voici un exemple typique. Supposons que 2 sous-variétés irréductibles,  $Y$  et  $Z$  de la variété lisse  $X$  s'intersectent transversalement, dans le sens que la diagonale  $X = \Delta_X \hookrightarrow X \times X$  soit transverse à toutes les strates du produit d'une stratification de Whitney de  $Y$  par une stratification de Whitney de  $Z$ . On a alors

$$\mathbb{L} \frac{IC_Y^*}{Y} \otimes \frac{IC_Z^*}{Z} = \frac{IC_{Y \cap Z}^*}{Y \cap Z} \quad \text{ce qui se traduit ainsi : on a}$$

$$\mathbb{L} \mathcal{L}(Y \times Z, X \times X) = \mathbb{L} \mathcal{L}(Y, X) \boxtimes \mathbb{L} \mathcal{L}(Z, X), \text{ et}$$

$$\mathbb{L} \mathcal{L}(Y \cap Z, X \times X) = \mathbb{L} \mathcal{L}(Y \times Z, X \times X) \otimes \mathbb{L} \mathcal{L}(\Delta_X, X \times X) = \dots \quad \text{On a en}$$

effet avec des notations très abusives,

$$\mathcal{D}_{X \times X}(C_{Y \times Z}, X \times X) = \mathcal{D}_X(C_{Y, X}) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \mathcal{D}_X(C_{Z, X}); \text{ par ailleurs}$$

$$C_{Y \cap Z}, X \times X = (C_{Y \times Z}, X \times X) \cdot C_{\Delta_X}, X \times X \quad [6, \text{Théorème p. 43}].$$

Le  $\mathcal{D}_{X \times X}$ -Module  $\mathcal{L}(Y \times Z, X \times X) \otimes \mathcal{L}(\Delta_X, X \times X)$  est engendré par

$$(C_{Y \times Z}, X \times X) \cdot (C_{\Delta_X}, X \times X), \text{ donc s'identifie à } \mathcal{L}(Y \cap Z, X \times X).$$

Mais aucun miracle n'a résulté de ce genre de petit jeu.

III - QUESTIONS OUVERTES

Conjecture 1 : Soit  $Y$  irréductible, de codimension  $d$  dans  $X$  lisse. Alors  $C_{Y/X} \in \Gamma(X, \Omega_X^d \otimes \mathcal{L}(Y, X))$  est de filtration de Hodge égale à  $d$ , au sens de [4].

Cela serait nécessaire pour que les conjectures de loc. cit. aient un sens.

Conjecture 2 : Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Y, X)$  et pour tout  $n$ , soit  $\mathcal{L}_n$  le sous-faisceau des  $u \in \mathcal{L}$  qui sont microlocalement du type  $n = \sum P_i(\xi_i(C_{Y/X}))$ , où  $P_i \in \mathcal{E}_X(n)$ ,  $\xi_i \in \Lambda^d(T_X)$ . La filtration  $(\mathcal{L}_n)$  de  $\mathcal{L}$  est la filtration de Hodge introduite dans loc. cit.

Cette conjecture est due à Angéniol.

Conjecture 3 : Soit  $J$  l'annulateur de  $C_{Y/X}$  dans l'algèbre  $\mathcal{D}_X(\Omega_X^d)$  des opérateurs différentiels du faisceau localement libre  $\Omega_X^d$  dans lui-même, et soit  $\text{gr}(J)$  l'idéal gradué de  $p^*(\mathcal{O}_{T^*X} \otimes \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^d))$  ( $p : T^*X \rightarrow X$ ) correspondant. Alors  $\text{gr}(J)$  est un idéal premier (voire complètement premier ?)

Cette conjecture n'a été incluse que par souci esthétique.

Voici enfin quelques questions encore plus vagues :

- calculer le front d'onde du courant  $C_{Y/X}$ , et comprendre mieux la variété caractéristique de  $\mathcal{L}(Y, X)$ .
- $C_{Y/X}$  existe en cohomologie de de Rham-Witt. Qu'en faire ?
- Angéniol et Elzein ont construit une classe fondamentale relative [1]. Existe-t-il une théorie de cohomologie d'intersection relative ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Angéniol et F. El Zein : La classe fondamentale d'un cycle  
Mémoire S.M.F. n° 58 (1978), p. 67-93.
- [2] A. Beilinson : Higher regulators and values of L-functions.  
preprint Moscow 1978.
- [3] A. Beilinson, I.N. Bernstein et P. Deligne : Faisceaux pervers,  
Astérisque n° 100, 1982.
- [4] J.L. Brylinski : Modules holonomes à singularités régulières  
et filtration de Hodge (I : Springer Lecture Notes in Math  
n° 961 (1982)  
II : Astérisque, vol. 101(1982), p. 75-117).
- [5] J.L. Brylinski et M. Kashiwara : Kazhdan-Lusztig conjecture  
and holonomic systems, Invent. Math. 64 (1981) p. 387-410.
- [6] F. El Zein : Complexes dualisants et applications à la classe  
fondamentale d'un cycle, Mémoire S.M.F. n° 58 (1978), p. 4-66.
- [7] H. Gillet : Universal cycle classes, Composition math. 49 (1983),  
p. 3-49.
- [8] R. Hartshorne : Residues and duality, Springer Lecture Notes  
in Math. vol. 20 (1966).
- [9] M. Kashiwara et T. Kawai : On holonomic systems of micro-  
differential equations. III - Systems with regular singula-  
rities, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. vol. 17, p. 813-979 (1981).
- [10] Z. Mebkhout : Une autre équivalence de catégories, Compositio  
Math. 51 (1984), p. 63-88.
- [11] K. Vilonen, Ph. D. Thesis, Brown University, 1983.
- [12] K. Vilonen, Intersection homology  $\mathcal{D}$ -module on local complete inter-  
sections with isolated singularities, preprint, 1984.