JEAN-LOUIS VERDIER

Prolongement des faisceaux pervers monodromiques

Astérisque, tome 130 (1985), p. 218-236
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__218_0>

PROLONGEMENT DES FAISCEAUX PERVERS MONODROMIQUES

Jean-Louis VERDIER

0.- INTRODUCTION

Dans [8] on démontre que le problème du prolongement d'un faisceau pervers se ramène au problème du prolongement à un cône C de sommet X d'un faisceau pervers monodromique donné sur $C - X$. On étudie ici ce dernier problème de prolongement. Celui-ci se ramène en dernière analyse à un problème de factorisation dans la catégorie des faisceaux pervers sur $L - X$ où L est un fibré de rang 1 convenable sur X (Th.6.6). Il convient donc d'étudier ces catégories de faisceaux pervers. Ce qu'on fait sous l'avatar de modules holonomes monodromiques dans les n°1 2 et 3. Dans le n°4, on généralise au cas d'un fibré vectoriel L de rang 1 quelconque la construction des cycles proches et évanescents et on donne la description des modules holonomes modérés monodromiques sur L en termes de modules sur $L - X$. On reprend cette question dans le n°5, dans les différents cadres pervers : analytique, algébrique complexe, algébrique. Enfin, dans le n°6, on donne le théorème de prolongement.

1.- ALGÈBRE DE BEILINSON-BERNSTEIN

Soient X une variété algébrique complexe quasi-projective et lisse, $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang 1. On note $B(E)$ le faisceau d'algèbres sur X des opérateurs différentiels algébriques sur E (ou $E - X$) homogènesde degré 0, filtré par le degré des opérateurs. Le centre de $B(E)$ est $\mathbb{C}[eu]$ où eu est l'opérateur d'Euler de degré 1, décrivant l'action infinitésimalede $\mathbb{C}^*$. On dispose d'une surjection filtrée $B(E) \longrightarrow \mathcal{D}_X$ qui annule eu et d'isomorphismes locaux $B(E) \simeq \mathbb{C}[eu] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$ définis par des sections de $E - X \longrightarrow X$ sur des ouverts de Zariski.

PROPOSITION 1.1- a) $B(E)$ *est isomorphe à* $B(E')$ *(par un isomorphisme filtré préservant* eu *et les surjections* $B(E)\longrightarrow\mathcal{D}_X$, $B(E')\longrightarrow\mathcal{D}_X$) *si et seulement si* $\mathrm{Hom}(E,E')$ *admet une connexion (algébrique) intégrable.*

b) *Lorsque* X *est projective,* $B(E)$ *est isomorphe à* $B(E')$ *si et seulement si* $c_1(E)=c_1(E')$ *où* c_1 *désigne la classe de Chern rationnelle c'est à dire à valeurs dans* $H^2(X,\mathbb{Q})$.

Notons $B^i(E)$, $i\in\mathbb{N}$, le sous-faisceau des opérateurs de degré $\leqq i$. On a $B^\circ(E)=O_X$, et une suite exacte

$$0\longrightarrow O_X\longrightarrow B^1(E)\longrightarrow T(E)\longrightarrow 0$$

où $T(E)$ est le O_X-module des champs de vecteurs tangents sur E homogène de degré 0. Un isomorphisme de $B(E)$ sur $B(E')$ détermine et est uniquement déterminé par un isomorphisme de $T(E)$ sur $T(E')$ qui commute au crochet des champs de vecteurs. C'est un exercice que de constater qu'un tel isomorphisme correspond à une connexion intégrable sur $\mathrm{Hom}(E,E')$. Démontrons b). En vertu de a), il suffit de montrer qu'un fibré L de rang 1 sur X admet une connexion intégrable si et seulement si $c_1(L)=0$. C'est un énoncé qui est classique mais fautes de références, donnons-en ici la démonstration.

En interprétant $c_1(L)$ comme la classe d'Atiyah de L à valeurs dans $H^1(X,\Omega^1)$, on sait que $c_1(L)=0$ si et seulement si L admet une connexion. Il reste donc à montrer que si L admet une connexion il admet une connexion intégrable. On a sur X_{an} la variété analytique correspondante une suite exacte de faisceaux

$$0\longrightarrow\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathcal{O}^*_{an}\xrightarrow{d\log}d\mathcal{O}_{an}\longrightarrow 0$$

où $d\mathcal{O}_{an}$ est le faisceau des formes différentielles fermées. On a la décomposition de Hodge $H^1(X_{an},d\mathcal{O}_{an})=H^\circ(X_{an},\Omega^2)\oplus H^1(X_{an},\Omega^1)$ et l'homomorphisme canonique $H^1(X_{an},d\mathcal{O}_{an})\longrightarrow H^2(X_{an},\mathbb{C})$ est injectif. Donc la classe d'isomorphisme $[L]\in H^1(X_{an},\mathcal{O}^*)$ s'annule dans $H^1(X_{an},d\mathcal{O})$ donc provient d'un élément de $H^1(X,\mathbb{C}^*)$. En d'autres termes L_{an} peut être décrit par une carte vectorielle à fonctions de transitions constantes. Donc L_{an} possède une connexion analytique intégrable. On sait déjà que L possède une connexion algébrique ∇ . Comme L_{an} possède une connexion analytique intégrable, il existe une forme différentielle de degré 1, analytique α telle que $\nabla+\alpha$ soit intégrable. Comme toute forme différentielle globale est algébrique, L possède une connexion algébrique intégrable.

REMARQUE 1.2 : Il résulte de la proposition 1.1, b), que si E et E' sont deux fibrés vectoriels sur une variété projective topologiquement isomorphes, alors $B(E)$ est isomorphe à $B(E')$.

1.3 : Lorsque E est trivialisable, un isomorphisme $B(E)\simeq\mathbb{C}[eu]\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{D}_X$ est déterminé par une section σ de $E - X$, ou, ce qui revient au même, une décomposition $E \simeq X \times \mathbb{C}$. Cet isomorphisme dépend effectivement du choix de cette section.

Notons $W^n(E)$ (resp. $W^n(E-X)$) le faisceau sur X des opérateurs différentiels homogène de degré n sur E (resp. $E-X$), de sorte que l'on a $B(E) = W^\circ(E) = W^\circ(E-X)$. C'est un $B(E)$-module bilatère. Considérons O_X comme le sous-anneau de $B(E)$ formé des opérateurs de degré 0. On a, en notant $\tilde{\check{E}}$ le O_X-faisceau des fonctions linéaires sur E, des isomorphismes

$$(1.4)\qquad \begin{cases} W^n(E) \simeq B(E) \underset{O_X}{\otimes} \tilde{E}^n \simeq \tilde{E}^n \otimes B(E) & \text{pour } n \geqq 0 \\ W^n(E) \simeq eu^{-n} B(E) \underset{O_X}{\otimes} \tilde{E}^n \simeq \tilde{E}^n \underset{O_X}{\otimes} B(E) eu^{-n} & \text{pour } n \leqq 0 \\ W^n(E-X) \simeq B(E) \underset{O_X}{\otimes} \tilde{E}^n \simeq \tilde{E}^u \underset{O_X}{\otimes} B(E) & \text{pour tout } n\ . \end{cases}$$

On a des injections canoniques $W^n(E) \hookrightarrow W^n(E-X)$ qui sont des isomorphismes pour $n \geqq 0$ et qui, pour $n \leqq 0$, correspondent aux injections $eu^{-n}\mathbb{C}[eu] \to \mathbb{C}[eu]$.

L'algèbre $W(E) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} W^n(E)$ (resp. $W(E-X) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} W^n(E-X)$) est *l'algèbre de Weyl* de E (resp. $E-X$). On a dans $W(E-X)$ les relations

$$(1.5.)\qquad eu\, s = ns + s\, eu$$

pour tout n et toute section locale s de $\tilde{E}^n$. En particulier si s est une section locale inversible on a dans $W(E-X)$,

$$(1.6)\qquad s^{-1}\, eu\, s = n + eu\ .$$

Soit s une section locale inversible de $\tilde{\check{E}}$. Alors s définit un isomorphisme local s^{-1} de $X \times \mathbb{C}'$ sur E . Notons $\frac{\partial}{\partial s}$ le champ de vecteurs sur E image du champ de vecteurs vertical canonique sur $X \times \mathbb{C}'$ par s^{-1} . On a alors

$$(1.7)\qquad s\frac{\partial}{\partial s} = eu$$

$$(1.8)\qquad \frac{\partial}{\partial s} eu = \frac{\partial}{\partial s} + eu\frac{\partial}{\partial s}\ .$$

Pour tout polynome $P \in \mathbb{C}[Y]$ on pose $B_P(E) = B(E)/P(eu)\,B(E)$. Localement sur X, on a $B_P(E) = \mathbb{C}[eu]/P\mathbb{C}[eu] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{D}_X$. C'est donc localement un $\mathcal{D}_X$-module libre de type fini, lorsque $P \neq 0$. Lorsque $P = Y$, on a $B_Y(E) = \mathcal{D}_X$. Lorsque $P = Y - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $B_{Y-\alpha}(E)$ est localement isomorphe à $\mathcal{D}_X$. Lorsque $\alpha \neq 0$, l'algèbre $B_{Y-\alpha}(E)$ n'est isomorphe à $\mathcal{D}_X$ que si E admet une connexion intégrable. Si E n'admet pas de telles connexions, les algèbres $B_{Y-\alpha}(E)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont deux à deux non-isomorphes.

2.- MODULES HOLONOMES MONODROMIQUES MODÉRÉS

Soit Y une variété algébrique complexe lisse quasi-projective. Un $\mathcal{D}_Y$-module sera dit *holonome modéré* s'il est holonome et s'il est à singularité régulière à distance finie et à l'infini de Y , c'est à dire si son image directe (algébrique) dans une compactification $\overline{Y}$ de Y est à singularité régulière [3] . La correspondance de Riemann-Hilbert établit une équivalence de catégorie entre la catégorie des modules holonomes modérés et la catégorie des faisceaux pervers algébriquement constructible [3] .

Soit M un $\mathcal{D}_E$-module cohérent. Son image directe sur X est un W(E)-module cohérent. Nous identifierons M à son image directe sur X que nous noterons encore M . On dit que M est *monodromique* si pour toute section locale m de M , l'espace vectoriel complexe engendré par les $eu^n m$, $n \in \mathbf{N}$, est de dimension finie. Comme M est localement de type fini sur W(E) , il suffit de vérifier cette propriété sur des générateurs locaux de M en vertu des formules (1.4) et (1.5).

Soit M un W(E)-module cohérent monodromique. Alors pour tout m , section locale de M , $\exp 2i\pi\, eu\, m$ est défini. On définit ainsi un endomorphisme de faisceau

$$T : M \longrightarrow M$$

Il résulte aussitôt des formules (1.5) et (1.8) que T est un automorphisme de W(E)-module que nous appellerons automorphisme de *monodromie*. Tout morphisme $u : M \longrightarrow N$ de W(E)-modules monodromique commute à T .

Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, posons $M^\alpha = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \ker(eu-\alpha)^n$, et pour tout $\beta \in \mathbf{C}^*$, posons

$$M_\beta = \bigoplus_{\exp 2i\pi\alpha = \beta} M^\alpha .$$

Lorsque M est monodromique, on a ,

$$(2.1) \begin{cases} M = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{C}} M^\alpha \\ M = \bigoplus_{\beta \in \mathbf{C}^*} M_\beta . \end{cases}$$

L'algèbre B(E) est le centraliseur de eu , par suite pour tout α , M^α est un B(E) sous-module de M . Il résulte des formules (1.5) et (1.8) que pour tout $\beta \in \mathbf{C}^*$, M_β est un sous W(E)-module. En vertu de 2.1, M_β est un sous W(E)-module cohérent et on a $M_\beta = 0$ sauf pour un nombre fini de β .

L'automorphisme de monodromie T respecte la décomposition en somme directe $M = \bigoplus_{\beta \in \mathbf{C}^*} M_\beta$. On a pour tout $\beta \in C^*$

$$M_\beta = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \ker(T-\beta)^n .$$

3.- MODULES ÉVANESCENTS

En accord avec [7] nous dirons qu'un $W(E)$-module M est *évanescent* si pour toute section locale inversible s de $\check{E}$, la multiplication par s est un isomorphisme. Soit P un $W(E-X)$-module. Alors le $W(E)$-module déduit de P par la restriction des scalaires $W(E) \hookrightarrow W(E-X)$ est évanescent. Réciproquement un $W(E)$-module évanescent M possède une unique structure de $W(E-X)$-module compatible à l'inclusion $W(E) \hookrightarrow W(E-X)$. On obtient ainsi une équivalence de catégorie entre la catégorie des $W(E-X)$-modules monodromiques modérés et la catégorie des $W(E)$-modules monodromiques modérés évanescents.

Soient M un $W(E)$-module monodromique et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, M^{α} le $B(E)$-module défini au numéro 2. Il résulte des formules (1.5) et (1.8) que, pour toute section locale inversible s de $\check{E}$, la multiplication par s induit un homomorphisme de M^{α} dans $M^{\alpha+1}$ et la multiplication par $\frac{\partial}{\partial s}$ induit un homomorphisme de M^{α} dans $M^{\alpha-1}$. Il résulte alors de (1.7) et de la définition des M^{α} que la multiplication par s induit un isomorphisme de M^{α} sur $M^{\alpha+1}$ sauf pour $\alpha=-1$, et que la multiplication par $\frac{\partial}{\partial s}$ induit un isomorphisme de M sur $M^{\alpha-1}$ sauf pour $\alpha=0$. Il en résulte en particulier que pour tout $\beta \neq 1$, M_{β} est un $W(E)$-module monodromique évanescent, et que M, où ce qui revient au même, M_1. est évanescent si et seulement si les multiplications par les sections locales inversibles induisent des isomorphismes locaux de M^{-1} sur M°.

Soit $\sigma : \mathbb{C}^{*} \mapsto \mathbb{C}$, une section de l'application $Z \longrightarrow e^{2i\pi Z}$. Nous dirons qu'un $B(E)$-module N est *σ-monodromique* si pour toute section locale n de N il existe un polynome non nul $P \in \mathbb{C}[T]$ dont les racines sont dans $\operatorname{Im}\sigma$ et tel que $P(eu)n=0$. Lorsque, de plus N est un $B(E)$-module *cohérent*, il existe donc un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[T]$ tel que $P(eu)N=0$ et par suite N est un $B_P(E)$-module (cf N°1). Supposons donné un isomorphisme $E \simeq \mathbb{A} \times X$ par une section de $E-X$. Alors $B(E)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[eu] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{D}_X$ et par suite

$$B_P(E) = \mathbb{C}[eu]/P(eu)\mathbb{C}[eu] \underset{C}{\otimes} \mathcal{D}_X \quad .$$

Un $B_P(E)$-module cohérent N n'est autre qu'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent N muni d'un endomorphisme eu, tel que $P(eu)=0$. Nous dirons alors que N est un $B(E)$-module *holonome modéré* s'il l'est en tant que $\mathcal{D}_X$-module.

Dans le cas général, c'est à dire lorsque E n'est pas trivialisé, il existe des trivialisations locales de E qui permettent d'associer localement à un $B(E)$-module N, σ-monodromique, des $\mathcal{D}_X$-modules sur des ouverts de X formant un recouvrement. Nous dirons alors que N est $B(E)$-module holonome modéré si ces $\mathcal{D}_X$-modules locaux sont holonomes et modérés. On constate que cela ne dépend pas des trivialisations locales choisies.

Reformulons alors les résultats de [3] .

PROPOSITION 3.1.- 1) *Le foncteur*

$$M \longmapsto \mathrm{Sol}(M) = R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{E,an}}(M^{an}, \mathcal{O}_{E^{an}})\ [\dim X + 1]$$

établit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des modules holonomes modérés monodromiques évanescents et la catégorie des faisceaux pervers algébriquement constructibles monodromiques et évanescents.

2) *Le foncteur* $M \longmapsto W(E-X) \underset{B(E)}{\otimes} N$ *établit une équivalence de catégories entre la catégorie des* $B(E)$*-modules holonomes modérés* σ*-monodromiques et la catégorie des modules holonomes modérés monodromiques évanescents.*

3) *Supposons que* $E = \mathbb{A} \times X$, *et soit* $s : X \longrightarrow E - X$ *la section constante de valeur* 1 . *Le foncteur qui à un* $B(E)$*-module* σ*-monodromique* N *associe le* $\mathcal{D}_X$*-module* N , *muni de l'automorphisme* $T = \exp 2i\pi\, eu$ *est une équivalence de catégorie entre la catégorie des* $B(E)$*-modules holonomes modérés* σ*-monodromiques et la catégorie des* $\mathcal{D}_X$*-modules holonomes modérés muni d'un automorphisme* T . *Posons* $M = W(E-X) \underset{B(E)}{\otimes} N$. *Le* $\mathcal{D}_X$*-module* N *muni de l'automorphisme* T *s'identifie canoniquement à* (s^*M, s^*T) .

4) *Le foncteur qui à un* $\mathcal{D}_X$*-module* N *muni d'un automorphisme* T *associe* $\mathrm{Sol}(N)$, *muni de l'automorphisme* $\mathrm{Sol}(T)$ *est une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des* $\mathcal{D}_X$*-modules holonomes modérés munis d'un automorphisme et la catégore des faisceaux pervers algébriquement constructibles muni d'un automorphisme.*

La première assertion est démontrée dans [3] au remplacement près du foncteur Sol par le foncteur "complexe de De Rham" qui se correspondent par dualité. La caractérisation des $\mathcal{D}_E$-modules holonomes dont la restriction (au sens dérivé) à la section nulle est nulle par le fait que la multiplication par s est inversible, est élémentaire. Démontrons 2). Le foncteur inverse est $M \longmapsto \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Im}\sigma} M^{\alpha}$.
Le fait que ces foncteurs préservent la monodromie et la modération est démontré dans [5] . Pour démontrer la première assertion de 3), on remarque que le faisceau des endomorphismes d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome modéré N est algébriquement constructible d'après la correspondance de Riemann-Hilbert. Par suite tout automorphisme T d'un tel module possède un polynome minimal. Donc on a $T = \exp 2i\pi\, eu$ où $eu \in \mathbb{C}[T]$ est un endomorphisme du $\mathcal{D}_X$-module N annulé par un polynome non nul dont les racines sont dans $\mathrm{Im}\sigma$. L'endomorphisme eu est uniquement déterminé par ces propriétés. La deuxième assertion de 3) résulte de la description de s^*[2] . Enfin 4) résulte de la correspondance de Riemann-Hilbert.

4.- LES FONCTEURS $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ ET LA VARIATION POUR LES MODULES HOLONOMES

Soit M un W(E)-module cohérent.

On pose

$$\tilde{\Phi}(M) = \mathcal{H}om_{W(E)}(W(E-X),M) \quad ,$$

$$\tilde{\Psi}(M) = W(E-X) \underset{W(E)}{\otimes} M \quad .$$

Ce sont des W(E)-modules évanescents (*). L'inclusion $W(E) \hookrightarrow W(E-X)$ fournit des homomorphismes fonctoriels $\alpha : \tilde{\Phi}(M) \longrightarrow M$ et $\beta : M \longrightarrow \tilde{\Psi}(M)$. Notons $can : \tilde{\Phi}(M) \rightarrow \tilde{\Psi}(M)$ l'homomorphisme composé. L'homomorphisme $\alpha : \tilde{\Phi}(M) \longrightarrow M$ (resp. $\beta : M \longrightarrow \tilde{\Psi}(M)$) possède la propriété universelle par rapport aux homomorphismes des modules évanescents dans M (resp. par rapport aux homomorphismes de M dans les modules évanescents). Par suite, lorsque M est évanescent, α,β et can sont des isomorphismes.

PROPOSITION 4.1.- *Supposons que* M *soit holonome, modéré, monodromique. Alors*

1) $\tilde{\Phi}(M)$ *et* $\tilde{\Psi}(M)$ *le sont.*

2) *Par le foncteur* Sol, *le foncteur* $\tilde{\Psi}$ *correspond à* $j_! j^*$ *où* $j : E - X \hookrightarrow E$ *est l'injection canonique.*

3) *Par le foncteur* Sol , *le foncteur* $\tilde{\Phi}$ *correspond au foncteur* Ev *agissant sur les faisceaux pervers monodromiques décrit dans* [7].

4) *L'homomorphisme* $\alpha : \tilde{\Phi}(M) \longrightarrow M$ *induit un isomorphisme* $\alpha^{-1} : \tilde{\Phi}(M)^{-1} \xrightarrow{\sim} M^{-1}$ (2.1). *On a un isomorphisme canonique* $\tilde{\Phi}(M)_1 \simeq W(E-X) \underset{B(E)}{\otimes} M^{-1}$. *En identifiant ces modules par cet isomorphisme, l'homomorphisme* $\alpha_0 : \tilde{E} \underset{O_X}{\otimes} M^{-1} \longrightarrow M^0$ *n'est autre que celui donné par les multiplications par les sections de* $\tilde{E} \subset W(E)^1$.

5) *L'homomorphisme* $\beta : M \longrightarrow \tilde{\Psi}(M)$ *induit un isomorphisme* $\beta^\circ : M^\circ \longrightarrow \tilde{\Psi}(M)^\circ$. *On a un isomorphisme canonique* $\tilde{\Psi}(M)_1 \simeq \mathcal{H}om_{B(E)}(W(E-X),M^\circ)$.

6) *Les foncteurs* $\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}$ *sont exacts sur la catégorie des modules holonomes monodromiques modérés.*

Soient M un module holonome modéré monodromique et $M = \underset{B\in\mathbb{C}^*}{\oplus} M$ sa décomposition suivant les valeurs propres de T . Pour tout $\beta \neq 1$, M_β est évanescent par suite $\tilde{\Psi}(M_\beta)$, $\tilde{\Phi}(M_\beta)$ sont isomorphes à M_β et sont donc holonomes modérés monodromiques. Supposons donc que $M = M_1$. On sait que les multiplications par les sections locales de $\tilde{E}$ induisent des morphismes $\tilde{E} \underset{O_X}{\otimes} M^n \longrightarrow M^{n+1}$ qui sont des isomorphismes pour $n < -1$ et $n \geq 0$. Il en résulte que l'homomorphisme canonique

(*) $\tilde{\Phi}(M)$ est un W(E)-module à gauche via la structure de W(E)-module à droite de W(E-X) .

$W(E) \underset{B(E)}{\otimes} M^{-1} \longrightarrow M$ se prolonge d'une manière unique en un homomorphisme $W(E-X) \underset{B(E)}{\otimes} M^{-1} \longrightarrow M$ qui possède la propriété universelle pour les morphismes des modules évanescents dans M. On en déduit 4). Comme M est holonome monodromique modéré, tous les M^{λ}, $\lambda \in \mathbb{C}$, sont des $B(E)$-modules holonomes monodromiques modérés [5], et par suite $\tilde{\Phi}(M)$ est holonome monodromique modéré (3.1).
De même, l'homomorphisme canonique $M \longrightarrow \mathcal{H}om_{B(E)}(W(E), M°)$ se prolonge de manière unique en en homomorphisme $M \longrightarrow \mathcal{H}om_{B(E)}(W(E-X), M°)$, qui possède la propriété universelle pour les morphismes de M dans les modules évanescents. On en déduit 5) et le fait que $\tilde{\Psi}(M)$ est holonome monodromique modéré. Les assertions 2), 3) résultent alors du fait que Sol est une anti-équivalence de catégorie qui fait correspondre les modules évanescents aux objets pervers évanescents. Pour démontrer 6), il suffit de remarquer que les foncteurs $M \longmapsto M°$ et $M \longmapsto M^{-1}$ sont exacts.

PROPOSITION 4.2.- *Il existe un morphisme de foncteurs et un seul sur la catégorie des modules holonomes modérés monodromiques*

$$\mathrm{var} : \tilde{\Psi} \longrightarrow \tilde{\phi} \quad ,$$

tel que

$$\begin{cases} \mathrm{var} \circ \mathrm{can} = T-1 \ / \ \tilde{\Phi} \ , \\ \mathrm{can} \circ \mathrm{var} = T-1 \ / \ \tilde{\Psi} \ . \end{cases}$$

Lorsque $M = M_{\beta}$, $\beta \neq 1$, il existe un seul morphisme $\mathrm{var}(M_{\beta}) : \tilde{\Psi} M_{\beta} \longrightarrow \tilde{\Phi} M_{\beta}$ qui possède la propriété demandée car $T-1$ et can sont dans ce cas inversibles. On peut donc se restreindre aux modules M tels que $M = M_1$. On a $(\tilde{\Phi}(M))° = (\tilde{E} \otimes_{O_X} M^{-1})$ et

$$\mathrm{can}° : \tilde{E} \otimes_{O_X} M^{-1} \longrightarrow M°$$

n'est autre que le morphisme défini par les sections locales de $\tilde{E} \subset W(E)$ (4.1). On a

$$T° = \exp 2i\pi\, \mathrm{eu}°$$

où l'action de eu sur $M°$ est définie par sa structure de $B(E)$-module, (on notera que eu est un opérateur nilpotent sur $M°$). Notons

$$\partial° : M° \longrightarrow \tilde{E} \underset{O_X}{\otimes} M^{-1} \ ,$$

le morphisme de $B(E)$-modules défini par les dérivations associées aux sections locales inversibles de $\tilde{E}$ (cf. 1.8). On a d'après 1.7

$$\mathrm{eu}° = \mathrm{can}° \circ \partial° \ .$$

Soit alors $h(Y)$ la série formelle $\dfrac{e^{2i\pi Y}-1}{Y}$. Posons

(4.3) $\qquad \mathrm{var}^\circ = \partial^\circ \circ h(\mathrm{eu}^\circ)$,

et soit $\mathrm{var}: \tilde{\Psi}(M) \longrightarrow \tilde{\phi}(M)$ le morphisme correspondant (3.1). On obtient un morphisme fonctoriel qui possède les propriétés annoncées. Il reste à démontrer l'unicité. Lorsque $M = M_\beta$, $\beta \neq 1$, l'unicité est claire. Supposons que $M = M_1$. Notons $\rho^\circ(M)$, $\rho^1(M)$, le noyau et le conoyau respectivement de l'homomorphisme.

$$\beta : M \longrightarrow \tilde{\Psi}(M) \quad .$$

<u>LEMME 4.4</u>.- *Lorsque* $E = \mathbb{A} \times X$; *pour tout* M , *il existe un module holonome modéré monodromique* M' *tel que* $\rho^1(M') = 0$ *et une injection* $M \hookrightarrow M'$.

Le lemme sera démontré à la fin de ce numéro. Montrons comment le lemme 4.4 entraine l'unicité de var . Supposons tout d'abord que $E = \mathbb{A} \times X$. Soit $\widetilde{\mathrm{var}} : \tilde{\Psi}(M) \longrightarrow \tilde{\phi}(M)$ un autre morphisme fonctoriel possédant les propriétés demandées. Comme $\tilde{\Psi}(M)$ est évanescent, l'égalité $\gamma = \alpha_\circ(\mathrm{var} - \widetilde{\mathrm{var}}) = 0$ entraine $\mathrm{var} - \widetilde{\mathrm{var}} = 0$ (propriété universelle de α) . On a $\beta \circ \gamma = \mathrm{can} \circ \mathrm{var} - \mathrm{can} \circ \widetilde{\mathrm{var}} = 0$. Montrons que $\gamma \circ \beta = 0$. Il suffit pour cela de voir que les morphismes

$$(\gamma \circ \beta)^\circ : M^\circ \longrightarrow M^\circ$$

$$(\gamma \circ \beta)^{-1} : M^{-1} \longrightarrow M^{-1}$$

sont nuls. Par suite, il suffit de montrer que $\tilde{\Psi}(\gamma \circ \beta)$ et $\tilde{\phi}(\gamma \circ \beta)$ sont nuls (4.1) où encore, par les propriétés universelles de α et β , dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Phi}(M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\Phi}(\gamma\circ\beta)"'] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma\circ\beta"] & \tilde{\Psi}M \arrow[d, "\tilde{\Psi}(\gamma\circ\beta)"] \\
\tilde{\Phi}(M) \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & \tilde{\Psi}M
\end{tikzcd} ,$$

il suffit de montrer que $\beta \circ (\gamma \circ \beta) = 0$ et $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = 0$.
Or $\beta \circ (\gamma \circ \beta) = (\beta \circ \gamma) \circ \beta$ est nul d'après ce qui précède et on a $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ \mathrm{can} = \alpha \circ (\mathrm{var} - \widetilde{\mathrm{var}}) \circ \mathrm{can} = \alpha \circ (\mathrm{var} \circ \mathrm{can} - \widetilde{\mathrm{var}} \circ \mathrm{can}) = 0$.
Le morphisme $\gamma_M : \mathrm{Ev}_! M \longrightarrow M$ provient donc d'un morphisme fonctoriel $\tilde{\gamma}_M : \rho^1(M) \longrightarrow \rho^\circ(M)$ et il suffit de montrer qu'un tel morphisme est nécessairement nul. Soit alors $M \xrightarrow{u} M'$ comme dans le lemme. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\rho'(M) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_M"] \arrow[d, "\rho'(u)"'] & \rho^\circ(M) \arrow[d, "\rho^\circ(u)"] \\
0 = \rho'(M') \arrow[r, "\tilde{\gamma}_{M'}"] & \rho^\circ(M')
\end{tikzcd} ,$$

et donc on a $\tilde{\gamma}_M = 0$; ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Dans le cas général, soit $U \subset X$, un ouvert de Zariski sur lequel E_U soit trivialisable. Notons $i : E_U \hookrightarrow E$ l'injection canonique. Pour tout M holonome modéré monodromique sur E_U, $i_! M$ est holonome modéré monodromique sur E et $i^* i_! M = M$. Soit var un morphisme fonctoriel défini sur E. La formation des $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ est locale sur X (4.1), par suite, on a $i^* \tilde{\Psi} i_! M = \tilde{\Psi} M$ et $i^* \tilde{\Psi} i_! M = \tilde{\Psi} M$. La restriction de var à U fournit donc un morphisme fonctoriel sur E_U qui est uniquement déterminé d'après ce qui précède. Donc var est uniquement déterminé.

Le morphisme var est appelé le *morphisme de variation*. Il correspond par Riemann-Hilbert au morphisme de variation des faisceaux constructibles monodromiques [7] comme on le voit en utilisant l'unicité de la variation.

Considérons alors la catégorie dont les objets sont des quadruples (M,P,u,v) où M et P sont des modules holonomes modérés monodromiques évanescents, et $u : M \longrightarrow P$, $v : P \longrightarrow M$ des morphismes tels que $v \circ u = T_M - \mathrm{id}$, $n \circ v = T_p - \mathrm{id}$. Les morphismes de cette catégorie sont les morphismes de diagramme. On dispose d'un foncteur qui à tout module holonome modéré monodromique M associe $(\tilde{\Phi}(M), \tilde{\Psi}(M), \mathrm{can}, \mathrm{var})$.

PROPOSITION 4.5.- *Le foncteur* $M \longmapsto (\tilde{\Phi}(M), \tilde{\Psi}(M), \mathrm{can}, \mathrm{var})$ *est une équivalence de catégories.*

Avant de démontrer 4.5, donnons des énoncés équivalents en utilisant (3.1). Soit $\sigma : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une section de $Z \longmapsto \exp 2i\pi Z$. Pour tout module holonome modéré monodromique M, posons

$$\tilde{\Psi}_\sigma(M) = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Im} \alpha} \tilde{\Psi}(M)^\alpha$$

$$\tilde{\Phi}_\sigma(M) = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Im} \alpha} \tilde{\Phi}(M)^\alpha \ .$$

On obtient ainsi des $B(E)$-modules holonomes modérés, σ-monodromiques. Notons encore $\mathrm{can}_\sigma : \Phi_\sigma(M) \longrightarrow \tilde{\Psi}_\sigma(M)$, $\mathrm{var}_\sigma : \tilde{\Psi}_\sigma(M) \longrightarrow \tilde{\Phi}_\sigma(M)$ les homomorphismes de $B(E)$-modules induits par can et var. Considérons alors la catégorie dont les objets sont des quadruples (N,Q,u,v) où N et Q sont des $B(E)$-modules holonomes modérés, σ-monodromiques, et où $u : N \longrightarrow Q$, $v : Q \longrightarrow N$ sont des morphismes tels que $v \circ u = T_N - \mathrm{id}$, $u \circ v = T_Q - \mathrm{id}$, les morphismes de cette catégorie étant les morphismes de diagrammes.

COROLLAIRE 4.6.- *Le foncteur* $M \longmapsto (\tilde{\Phi}_\sigma(M), \tilde{\Psi}_\sigma(M), \mathrm{can}_\sigma, \mathrm{var}_\sigma)$ *est une équivalence de catégories.*

Supposons maintenant que $E = \mathbb{A} \times X$ et soit $s : X \longrightarrow E$ la section constante de valeur 1. La donnée de cette section, fournit un isomorphisme

$$B(E) = \mathbb{C}[eu] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{D}_X$$

et en particulier une section $\mathcal{D}_X \longrightarrow B(E)$. Pour tout module holonome modéré monodromique M , notons $\Psi(M)$ et $\Phi(M)$ respectivement les $\mathcal{D}_X$-modules déduits de $\tilde{\Psi}_\sigma(M)$ et $\tilde{\phi}_\sigma(M)$ par restriction des scalaires et notons can et var les morphismes déduits de can_σ et var_σ .

Les $\mathcal{D}_X$-modules $\Psi(M)$ et $\phi(M)$ sont holonomes modérés ; ils ne dépendent pas du choix de σ mais dépendent du choix de la section trivialisante. On a des isomorphismes canoniques

$$\Psi(M) \simeq s^*(\tilde{\Psi}(M)) \simeq s^*(M) \ ,$$

$$\phi(M) \simeq s^*(\tilde{\Phi}(M)) \ ,$$

et des égalités

$$\mathrm{can} = s^*(\mathrm{can}),\ \mathrm{var} = s^*(\mathrm{var}) \ .$$

Considérons alors la catégorie dont les objets sont les quadruples (R,S,u,v) où R et S sont des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes modérés et où $u : R \to S$, $v : S \to R$ sont des homomorphismes tels que $\mathrm{Id} + u \circ v$ et $\mathrm{Id} + v \circ u$ soient des isomorphismes. On remarquera d'ailleurs que si $\mathrm{Id} + u \circ v$ est un isomorphisme, $\mathrm{Id} + v \circ u$ l'est aussi en vertu de la formule

$$(\mathrm{Id} + v \circ u)^{-1} = \mathrm{Id} - v \circ (\mathrm{Id} + n \circ v)^{-1} \circ u \ .$$

Les morphismes de cette catégorie sont les morphismes de diagrammes.

COROLLAIRE 4.7.- *Le foncteur* $M \mapsto (\Phi(M), \Psi(M), \mathrm{can}, \mathrm{var})$ *est une équivalence de catégories.*

Ce corollaire résulte immédiatement de 4.5 et de 3.1.

Démontrons maintenant (4.5) où ce qui revient au même le corollaire (4.6) dans le cas où $\sigma(1) = 0$. Lorsque $M = M_\lambda$, $\lambda \neq 1$, les morphismes can_σ , var_σ sont des isomorphismes et on a un isomorphisme canonique $M \xrightarrow{\sim} \tilde{\Psi}_\sigma(M)$. Il suffit donc d'examiner le cas où $M = M_1$. D'après 4.2, on a

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_\sigma(M) = \tilde{E} \underset{O_X}{\otimes} M^{-1} \ , \\ \\ \tilde{\Psi}_\sigma(M) = M^\circ \ . \end{cases}$$

La donnée de $(\tilde{\Phi}_\sigma(M), \tilde{\Psi}_\sigma(M), \mathrm{can}_\sigma, \mathrm{var}_\sigma)$, nous permet de reconstituer M°, M^{-1}, can° et ∂° par la relation (cf.4.3) :

(4.8) $$\mathrm{var}^\circ = \partial^\circ \circ \frac{e^{2i\pi eu^\circ} - 1}{eu^\circ} \ ;$$

on remarquera que eu° étant nilpotent, $\dfrac{e^{2i\pi eu^\circ} - 1}{eu^\circ}$ est inversible.

Les multiplications par les sections locales et inversibles de E , fournissent des isomorphismes

$$(4.9)\qquad \begin{cases} M^{-n} \xrightarrow{\sim} (\tilde{E})^{n-1} \underset{O_X}{\otimes} M^{-1} \ , & \text{pour} \quad n>0 \ , \\ \\ M^{n} \xrightarrow{\sim} (\tilde{E})^{n} \underset{O_X}{\otimes} M^{\circ} \ , & \text{pour} \quad n \geq 0 \ . \end{cases}$$

Comme l'action de eu sur M^{-n}, $n<0$, et M^n, $n>0$, est un automorphisme, les isomorphismes ci-dessus permettent de reconstituer l'action des $\partial/\partial s$ (1.7), et par suite M est déterminé à isomorphisme unique près par $(\tilde{\phi}_\sigma(M), \tilde{\Psi}_\sigma(M), \mathrm{can}_\sigma, \mathrm{var}_\sigma)$.

Démontrons le lemme 4.4. Nous utiliserons le corollaire 4.7. Si à M correspond par l'équivalence de 4.7, $(\phi,\Psi, \mathrm{can},\mathrm{var})$, à $\tilde{\Psi}(M)$ correspond $(\Psi,\Psi,\mathrm{Id},T-1)$ et l'homomorphisme canonique $M \longrightarrow \tilde{\Psi}(M)$ correspond à $(\mathrm{can},\mathrm{Id})$. Donc à $\rho^1(M)$ correspond $(\mathrm{coker\ can}, 0,0,0)$ et par suite $\rho^1(M)=0$ si et seulement si can est surjectif. Soit M' l'objet correspondant à $(\Phi\oplus\Psi, \Psi, (\mathrm{can},\mathrm{Id}), \binom{\mathrm{var}}{0})$. On a $\rho^1(M')=0$ d'après ce qui précède et $(\binom{\mathrm{id}}{0},\mathrm{id})$ correspond à un morphisme injectif de M dans M'.

5.- FAISCEAUX PERVERS MONODROMIQUES SUR UN FIBRÉ VECTORIEL DE RANG 1

Dans ce numéro, nous nous placerons dans une des situations suivantes :

(I) X est un espace analytique,

(II) X est une variété algébrique complexe quasi-projective,

(III) X est une variété algébrique sur un corps K algébriquement clos.

On utilise un corps de coefficients A pour les faisceaux et dans le cas (III) A est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_\ell$ où $\mathbb{Z}/\ell$ avec $(\ell, \mathrm{car}\, k)=1$.

Soit C un cône [7,p.357] de sommet X. On pose $C^*=C-X$ où X est identifié au lieu des sommets de C. La catégorie $\mathrm{Per\,mon}(C,A)$ (resp. $\mathrm{Per\,Mon}(C^*,A)$) désigne alors :

(I) La catégorie des complexes de faisceaux de A-module sur C (resp. C*), à cohomologie *analytiquement constructible* [ ] *et monodromique* [7], et qui satisfont aux hypothèses de *perversité* pour la perversité moitié [1] .

(II) La catégorie des complexes de faisceaux de A-modules sur C (resp. C*) pour la topologie transcendante, à cohomologie *algébriquement constructible et monodromique*, et qui satisfont de plus aux hypothèses de *perversité* pour la perversité moitié.

(III) La catégorie des complexes de faisceaux de A-modules sur C (resp.C*) pour la topologie étale, à cohomologie *constructible et monodromique modérée* [7], et qui satisfait de plus aux hypothèses de *perversité* pour la perversité moitié. On voudra bien oublier que lorsque A est une extension de $\mathbb{Q}_\ell$, un faisceau de A-module sur X est un objet compliqué qui se décrit par passage à la limite sur des systèmes projectifs de faisceaux à coefficients finis.

Rappelons que lorsque X est une variété algébrique projective, les catégories $\mathrm{Per\,mon}(C_{an},A)$ et $\mathrm{Per\,mon}(C,A)$ coïncident et lorsque X est une variété algébrique et A une extension finie de $\mathbb{Z}/\ell$ au $\mathbb{Q}_\ell$, les catégories $\mathrm{Per\,mon}(C,A)$ au sens (II) et (III) sont naturellement équivalentes.

De même lorsque X est une variété algébrique lisse et C un fibré vectoriel la catégorie $\mathrm{Per\,mon}(C,\mathbb{C})$ est équivalente par le foncteur "solution" à l'opposée de la catégorie des modules, holonomes modérés et monodromiques [3].

On peut montrer que lorsque X est une variété analytique compacte lisse et lorsque C est un fibré vectoriel E , la catégorie $\mathrm{Per\,mon}(C,\mathbb{C})$ est équivalente par le foncteur "solution" à l'opposée de la catégorie des W(E)-modules holonomes réguliers et monodromiques.

Les objets de $\mathrm{Per\,mon}(C,A)$, $\mathrm{Per\,mon}(C^*,A)$ sont appelés faisceaux pervers monodromiques.

Notons $j : C^* \hookrightarrow C$ l'inclusion canonique. Le foncteur image inverse transforme les faisceaux pervers monodromiques en faisceaux pervers monodromiques et induit un foncteur exact $j^* : \mathrm{Per\,mon}(C,A) \longrightarrow \mathrm{Per\,mon}(C^*,A)$.

Dans la suite de ce numéro nous supposerons que C est un fibré vectoriel de *rang* 1 sur X noté E. Alors les foncteurs image directe j_*, prolongement par zéro $j_!$,transforment faisceaux pervers en faisceaux pervers car j est un morphisme affine [1]. Ils induisent donc des foncteurs encore notés

$$j_* : \mathrm{Per\,mon}(E^*A) \longrightarrow \mathrm{Per\,mon}(E,A) ,$$

$$j_! : \mathrm{Per\,mon}(E^*A) \longrightarrow \mathrm{Per\,mon}(E,A) .$$

Les foncteurs j_*, $j_!$ sont pleinement fidèles et se correspondent l'un à l'autre par dualité. L'image essentielle de $j_!$ (resp. j_*) est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Per\,mon}(E,A)$ engendrée par les faisceaux *évanescents* [7] (resp. co-évanescent).

Rappelons que les complexes monodromiques sont munis d'un automorphisme canonique T appelé automorphisme *de monodromie* [7] . Cet automorphisme correspond au "tour dans le sens positif" pour les cas (I) et (II). Il dépend dans le cas (III) du choix d'un générateur topologique du groupe de Tate.

Soit $s : X \longrightarrow E$ une section partout non nulle, définissant un isomorphisme $\mathbb{A} \times X \longrightarrow E$.

PROPOSITION 5.1.- 1) *Pour tout* M *objet* Per Mon(E*,A), $s^*M[1]$ *est pervers.*

2) *Le foncteur* $M \longmapsto (s^*M[-1], s^*T[-1])$ *est une équivalence de catégories de* Per mon(E*,A) *sur la catégorie des faisceaux pervers sur* X , *munis d'un automorphisme.*

Par définition de la perversité, on a $\dim \sup \mathcal{H}^i(M) \leq -i$. Donc $s^*M[1] \in {}^pD^+(X,A)$, [1] . On a $Ds^*M = s^!DM$ et comme pour tout i , $\mathcal{H}^i(M)$ est transverse à $s(X)$, on a $s^!DM = s^*(DM)(-2)$. Donc on a $D(s^*M[1]) = (Ds^*M)\ [+1] = (s^*DM)\ [-1]$, et par suite $D(s^*M[-1]) \in {}^pD^+(X,A)$. Donc $s^*M[-1]$ est pervers d'où 1). Exhibons un foncteur en sens inverse. Nous nous placerons dans le cas (I), la démonstration pouvant s'adapter dans les autres cas. Le foncteur en sens inverse s'obtient alors en observant que les objets pervers étant locaux, ils peuvent se construire par recollement [1] .

Soient (P,T) un objet pervers sur X muni d'un automorphisme T , $Q = pr_1^*P$ où $pr_1 : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ est la projection, τ la translation $Z \longmapsto Z + 2i\pi$. Comme $\tau^*Q = Q$, on peut définir un automorphisme de recollement $pr_1^*T : \tau^*Q \longrightarrow Q$ ce qui fournit un objet pervers monodromique sur $\mathbb{C}/\{\tau\} \times X = \mathbb{C}^* \times X$.

On remarquera que, en général, le couple (s^*M, s^*T) dépend de la section s choisie et que même la classe d'isomorphisme de s^*M dépend de s ainsi qu'on le voit aussitôt en prenant $X = \mathbb{C}^*$. Soient donc s_1 et s_2 deux sections inversibles de $E \longrightarrow X$. On a $s_1 = \varphi . s_2$ où $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une fonction inversible. Notons L le $A[T,T^{-1}]$-module localement libre sur $\mathbb{C}^*$ image directe à support propre par $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, du faisceau constant A sur $\mathbb{C}$.
Notons L_φ l'image inverse de L par φ . On a alors des isomorphismes canoniques

$$(5.2) \qquad \begin{cases} s_1^*M \xrightarrow{\sim} s_2^*M \underset{A[T,T^{-1}]}{\otimes} L_\varphi \\ \\ s_1^*T \simeq s_2^*T \otimes T \end{cases}$$

Ces résultats restent essentiellement valables dans le cas III.

Dans le cas général, c'est à dire lorsque E n'est pas nécessairement trivialisable, la catégorie Per mon(E*,A) peut se décrire, en prenant des sections locales de E et en procédant à des recollements grâce à (5.2). Nous n'insisterons pas sur ces constructions et nous considérerons plutôt dans la suite Per mon(E*,A) comme un objet élémentaire dont la description se ramène par recollement à Per(X) et qui est utile pour la description de Per mon(E,A) .

Soit M un complexe constructible monodromique sur E . On a construit dans [7] un triangle distingué

$$\begin{tikzcd} & RC(M) \arrow[dl] & \\ M \arrow[rr, "\alpha"] & & Ev(M) \arrow[ul, "+1"'] \end{tikzcd}$$

où $Ev(M)$ est évanescent et $RC(M)$ relativement constant, c'est à dire isomorphe à l'image inverse par $p : E \longrightarrow X$ d'un complexe constructible sur X (*). Supposons maintenant M *pervers*. Alors $Ev(M)$ est *pervers*. En effet, comme X est défini par une équation dans E, $RC(M)$ est d'amplitude perverse $[0,1]$ [1] et par suite $Ev(M)$ est d'amplitude perverse négative. On obtient alors la perversité en dualisant.

De plus dans loc. cit. on a construit un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{var} : Ev(M) \longrightarrow M$$

tel que

$$\begin{cases} \alpha \circ \mathrm{var} = T - 1 \\ \mathrm{var} \circ \alpha = T - 1 \end{cases} .$$

Posons alors pour tout faisceau monodromique pervers M ,

$$(5.3) \qquad \begin{cases} \tilde{\Phi}(M) = j^* Ev(M) \\ \tilde{\Psi}(M) = j^* M \\ \mathrm{can} = j^* \alpha \\ \mathrm{var} = j^* \mathrm{var} \end{cases}$$

Supposons que $E = \mathbb{A} \times X$ et soit $s : X \longrightarrow E$ la section constante de valeur $s \in \mathbb{A}$. On dispose alors des foncteurs Ψ : cycles proches et Φ : cycles évanescents, pour la première projection. On a alors des isomorphismes canoniques et des égalités

$$(5.4) \qquad \begin{cases} \Psi(M) = s^* \tilde{\Psi}(M), \\ \Phi(M) = s^* \tilde{\Phi}(M), \\ \mathrm{can} = s^* \mathrm{can}, \\ \mathrm{var} = s^* \mathrm{var} \end{cases} .$$

De même, supposons qu'on soit dans la situation II. La correspondance de Rieman Hilbert donne une anti-équivalence entre la catégorie des modules modérés monodromiques et la catégorie des faisceaux pervers monodromiques. Cette correspondance transforme les foncteurs $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\Psi}$ définis au n°4 en les foncteurs $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\Psi}$ définis ci-dessus ainsi qu'il résulte immédiatement de leurs propriétés universelles.

Introduisons la catégorie dont les objets sont les quadruples $(P,Q,\mathrm{can},\mathrm{var})$, où P,Q sont des objets pervers monodromiques sur E^*, can et var des morphismes de P dans Q et Q dans P respectivement tels que $\mathrm{var} \circ \mathrm{can} = T - 1$ et $\mathrm{can} \circ \mathrm{var} = T - 1$ et dont les morphismes sont les morphismes de diagrammes.

(*) $RC(M)$ est l'image inverse sur E de la restriction de M à X .

PROPOSITION 5.5.- *Le foncteur* $M \longmapsto (\tilde{\Psi}(M), \tilde{\phi}(M), \mathrm{can}, \mathrm{var})$ *est une équivalence de catégories.*

Lorsque E admet une section inversible cette proposition se ramène par (5.1) et (5.4) à la proposition démontrée dans [8] . On peut en déduire la proposition 5.5, dans le cas général en prenant des sections locales de E et en recollant. Lorsqu'on est dans la situation II, on peut aussi déduire la proposition 5.5 de la proposition 4.5 par la correspondance de Riemann-Hilbert.

Dans le cas où E est trivialisée, la démonstration de 5.5 proposée par Deligne procède par dévissage de M en objets simples. En admettant la proposition 5.5 nous allons indiquer comment on peut reconstruire M connaissant $(\tilde{\Psi}(M), \tilde{\phi}(M), \mathrm{can}, \mathrm{var})$. Cette reconstruction de M pourrait être à la base d'une autre démonstration de 5.5, ne faisant pas appel à un dévissage et que nous laissons au lecteur le soin de mettre au point. Si à M correspond par 5.4 $(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}, \mathrm{can}, \mathrm{var})$, on voit facilement qu'on a les correspondances suivantes, en notant $j : E - X \hookrightarrow E$ l'injection canonique

$$
\begin{array}{ll}
j_!\tilde{\Psi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}, \mathrm{Id}, \mathfrak{t}), \\
j_*\tilde{\Psi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}, \mathfrak{t}, \mathrm{Id}), \\
j_!\tilde{\Phi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (\tilde{\Phi}, \tilde{\phi}, \mathrm{Id}, \mathfrak{t}), \\
j_*\tilde{\phi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (\tilde{\phi}, \tilde{\phi}, \mathfrak{t}, \mathrm{Id}),
\end{array}
$$

où $\mathfrak{t} = T - 1$, T transformation de monodromie.

On a alors quatre morphismes

$$
\begin{array}{ll}
a : j_!\tilde{\Psi} \longrightarrow M & \ldots\ldots\ldots (\mathrm{Id}, \mathrm{can}), \\
b : j_*\tilde{\Phi} \longrightarrow M & \ldots\ldots\ldots (\mathrm{van}, \mathrm{Id}), \\
c : M \longrightarrow j_*\tilde{\Psi} & \ldots\ldots\ldots (\mathrm{Id}, \mathrm{var}), \\
d : M \longrightarrow j_!\tilde{\Phi} & \ldots\ldots\ldots (\mathrm{can}, \mathrm{Id}) \ ;
\end{array}
$$

d'où deux morphismes :

$$
j_!\tilde{\Psi} \otimes j_*\Phi \xrightarrow{(a,b)} M \xrightarrow{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} j_*\tilde{\Psi} \oplus j_!\tilde{\phi} \quad .
$$

On constate que (a,b) est *surjectif* et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ *injectif* (au sens pervers). Le morphisme composé a pour matrice

$$
\begin{pmatrix} \iota & j_*\mathrm{var} \\ j_!\mathrm{can} & \bar{\mathfrak{t}} \end{pmatrix} : j_!\tilde{\Psi} \oplus j_*\tilde{\Phi} \longrightarrow j_*\tilde{\Psi} \oplus j_!\tilde{\Phi}
$$

où $\iota : j_!\tilde{\Psi} \longrightarrow j_*\tilde{\Psi}$ est le morphisme canonique et $\bar{\mathfrak{t}} : j_*\tilde{\Phi} \longrightarrow j_!\tilde{\Phi}$ est l'unique morphisme, fonctoriel en $\tilde{\Phi}$, dont la restriction à $E - X$ soit $\mathfrak{t} : \tilde{\Phi} \longrightarrow \tilde{\Phi}$

Le foncteur en sens inverse peut donc se décrire comme l'image du morphisme $\begin{pmatrix} \iota & j_*\mathrm{var} \\ j_!\mathrm{can} & \bar{t} \end{pmatrix}$ entre les objets objets pervers $j_!\tilde{\Psi} \oplus j_*\tilde{\Phi}$ et $j_*\tilde{\Psi} \oplus j_!\tilde{\Phi}$.

6.- PROLONGEMENT DE FAISCEAUX PERVERS MONODROMIQUE

On se place dans la situation II et III du n°5 : X est une variété algébrique quasi-projective. Soit C un cône de sommet X , $\Delta \subset C$ un sous-cône diviseur de C, L la restriction à X du fibré normal de Δ dans C. Comme Δ est un sous-cône, $\Delta \times_X L$ est le cône normal de Δ dans C .

Soit M un faisceau pervers monodromique sur $C - X$ (resp.C). Son spécialisé le long de Δ est un faisceau pervers Sp(M) sur $\Delta \times_X L - X$ (resp.$\Delta \times_X L$) , monodromique pour la première projection $\Delta \times_X L - X \longrightarrow \Delta$. Posons

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \tilde{\Psi}_\Delta(M) = \mathrm{Sp}(M)\,|\,\Delta \times_X (L - X) \\ \tilde{\Phi}_{\Delta - X}(M) = \tilde{\Phi}(\mathrm{Sp}(M)\,|\,(\Delta - X) \times_X L) \\ (\text{resp. } \tilde{\Phi}_\Delta(M) = \tilde{\Phi}(\mathrm{Sp}(M))), \end{cases}$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'opération définie en 5.3. Ces objets sont des faisceaux pervers monodromiques sur $\Delta \times_X (L - X)$ et $(\Delta - X) \times_X (L - X)$ respectivement. Nous dirons que Δ est *transverse à* M ou encore que M est *transverse à* Δ si $\tilde{\phi}_{\Delta - X}(M) = 0$ (resp. si $\tilde{\Phi}_\Delta(M)\,|\,(\Delta - X) \times_X L = 0$ ou encore si $M|C - X$ est transverse à Δ). La sous-catégorie pleine de Per mon(C -X,A) (resp. Per mon(C,A)) engendrée par les faisceaux pervers monodromiques transverses à Δ est une sous-catégorie abélienne stable par extension, car $\tilde{\Phi}$ est un foncteur exact. Elle est notée $\mathrm{Per\,mon}_\Delta(C - X, A)$ (resp. $\mathrm{Per\,mon}_\Delta(C, A)$) .

Soit M un faisceau pervers monodromique sur $C - X$, transverse à Δ .

Identifions L à la restriction de $\Delta \times_X L$ à $X \subset \Delta$. Il résulte de [8] et de 5.5 que se donner un prolongement $\bar{M}$ de M à C revient à se donner un faisceau pervers monodromique Q sur $L - X$, deux morphismes $a : \tilde{\Psi}_\Delta(M) \longrightarrow Q$, $b : Q \longrightarrow \tilde{\Psi}_\Delta(M)$ $a \circ b = t$ et $b \circ a = t$ (où t =Monodromie-Identité). Mais comme Q est à support dans L , le morphisme a se factorise par ${}^{p}\iota_*\tilde{\Psi}_\Delta(M)$ et b par ${}^{p}\iota_!\tilde{\Psi}_\Delta(M)$ où $\iota : L_* \longrightarrow \Delta \times_X (L - X)$ est l'inclusion. Posons alors pour tout M objet de $\mathrm{Per\,mon}_\Delta(C - X, A)$

$$(6.2)\qquad \begin{cases} P(M) = {}^{p}\iota^*\tilde{\Psi}_\Delta(M), \\ R(M) = {}^{p}\iota^!\tilde{\Psi}_\Delta(M) \end{cases} .$$

Ce sont deux foncteurs à valeurs dans $\mathrm{Per\,mon}(L-X,A)$. Le morphisme $\mathfrak{t}:\widetilde{\Psi}_\Delta(M)\longrightarrow\widetilde{\Psi}_\Delta(M)$ s'annule sur $(\Delta-X)\times_X(L-X)$ par hypothèse de transversalité et par suite se factorise en un morphisme noté :

6.3 $$t : P(M)\longrightarrow R(M)$$

Notons

6.4 $$s : R(M)\longrightarrow P(M) \quad ,$$

le morphisme composé des morphismes canoniques $R(M)\longrightarrow\widetilde{\Psi}_\Delta(M)$ et $\widetilde{\Psi}_\Delta(M)\longrightarrow P(M)$.
Introduisons alors la catégorie dont les objets sont des quadruples $(M,Q,\ c : P(M)\longrightarrow Q\ ,\ v : Q\longrightarrow R(M))$ où M est un objet de $\mathrm{Per\,mon}_\Delta(C-X,A)$, Q est un objet de $\mathrm{Per\,mon}(L-X,A)$, c et v des morphismes tels que

6.5 $$\begin{cases} v\circ c=t\ , \\ c\circ s\circ v=\mathfrak{t}\ ; \end{cases}$$

et dont les morphismes sont les morphismes de diagrammes.

Il résulte alors de et 5.5 qu'on a

THÉORÈME 6.6.- *Le foncteur qui à* N *objet de* $\mathrm{Per\,mon}_\Delta(C,A)$ *associe* $(N|C-X,\Phi_\Delta(N),c,v)$ *est une équivalence de catégories.*

Le théorème 6.6 ramène donc le problème du prolongement à C à un problème de factorisation dans $\mathrm{Per\,mon}(L-X,A)$. Mais pour appliquer le théorème 6.6 à un faisceau pervers monodromique M sur $C-X$, il faut disposer d'un diviseur conique $\Delta\subset C$ transverse à M. Un tel diviseur existe toujours dans la situation II, c'est à dire lorsque X est algébrique complexe quasi-projective et M algébriquement constructible pervers monodromique sur X_{an} .

PROPOSITION 6.7.- *Mettons-nous dans la situation* II *du n°5. Soit* M *un faisceau pervers monodromique sur* $C-X$. *Il existe un diviseur conique* $\Delta\subset C$ *transverse à* M .

Le faisceau sur X des fonctions sur C homogène et de degré 1, est un O_X-module cohérent qui est donc isomorphe à un quotient de module localement libre car X est quasi-projective. Donc C est un sous-cône d'un fibré vectoriel E. En remplaçant M par son image directe dans $E-X$, on se ramène au cas où C est un fibré vectoriel et nous allons montrer qu'il existe un sous-fibré vectoriel $\Delta\subset E$ de corang 1, transverse à M. Soit E' le fibré dual de E ; trouver Δ revient à trouver un sous-fibré de rang 1, L' de E'. Il existe un ouvert de Zariski conique $U'\subset E'-X$, tel que toute section de E' définie sur un ouvert W de X et à valeurs dans U' corresponde à un sous-fibré Δ_W de E/W transverse à $M/(E/W)$. En utilisant la quasi-projectivité, on montre alors qu'il existe un sous-fibré $L'\subset E'$ de rang 1 tel que $L'-X$ soit contenu dans U' et par suite L' correspond à un sous-fibré $\Delta\subset E$ transverse à M. L'existence de l'ouvert U' s'obtient en utilisant une stratification de Whitney conique convenable de M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE - *Faisceaux pervers*. Astérisque n°100.

[2] J. BERNSTEIN - *Note de cours*

[3] J.L BRYLINSKI - *Transformations canoniques, Dualité projective, Théorie de Lefschetz, Transformation de Fourier et Sommes trigonométriques*. Astérisque à paraître.

[4] M. KASHIWARA - *Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations*. Colloque franco-japonais de Géométrie Algébrique. Springer Lecture Notes n°1016, (1983).

[5] M. KASHIWARA et T. KAWAI - *Second microlocalisation and asymptotic expansions*. Springer Lect. Notes in Physics, n°126 (1980) p. 21-76.

[6] B. MALGRANGE - *Polynômes de Bernstein-Sato et évanescence*. Astérisque n°101-102 (1983), p. 243-267.

[7] J.L VERDIER - *Spécialisation de faisceaux et monodromie modéré*. Astérisque n°101-102 (1983), p. 332-364.

[8] J.L VERDIER - *Extension of a perverse sheaf over a closed subspace*. Dans ce recueil de notes.

J.L. VERDIER
Centre de Mathématiques ERA 589
E.N.S. 45, rue d'Ulm
75230 - PARIS CEDEX 05