Astérisque

C. SABBAH

Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux

Astérisque, tome 130 (1985), p. 161-192
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__161_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES REMARQUES SUR LA GÉOMÉTRIE
DES ESPACES CONORMAUX

C. SABBAH

INTRODUCTION

Dans son article sur les classes de Chern des variétés singulières([M]), R. Mac Pherson a introduit un isomorphisme, dit d'Euler, entre le groupe $\mathcal{Z}(X)$ des cycles analytiques sur un espace analytique réduit X et le groupe $\mathbb{F}(X)$ des fonctions constructibles à valeurs entières sur X : A tout cycle $Z = \Sigma\, n_i Z_i$ on associe la fonction constructible Eu_Z, et pour $x \in X$, $Eu_Z(x)$ est un entier défini à l'aide d'une classe d'obstruction (voir[M]). On peut aussi définir $Eu_Z(x)$ algébriquement (voir [G.V.], [L.T_1] , [Du] , et § 1)*.

Nous nous proposons ici d'expliciter certaines constructions géométriques sur $\mathcal{Z}(X)$ qui s'interprétent simplement dans le groupe $\mathbb{F}(X)$ via l'isomorphisme d'Euler :

. soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique. Alors $f^* : \mathbb{F}(Y) \to \mathbb{F}(X)$ est défini par $f^*\alpha = \alpha \circ f$.

. soit $f : X \to Y$ un morphisme propre. Alors $f_* : \mathbb{F}(X) \to \mathbb{F}(Y)$ est défini par : $(f_*\alpha)(y) = \chi(f^{-1}(y),\alpha)$, caractéristique d'Euler de $f^{-1}(y)$ pondérée par α (voir [M]).

. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ et K un compact dans $f^{-1}(0)$. Quitte à remplacer X par un voisinage de K dans X, on peut, pour t assez proche de 0 et $\neq 0$, définir la spécialisation sp : $\mathbb{F}(f^{-1}(t)) \to \mathbb{F}(f^{-1}(0))$ par $sp\,\alpha(x) = \chi(f^{-1}(t) \cap B_\varepsilon(x), \alpha)$ (voir [V_2]).

On notera de même les opérations correspondantes dans $\mathcal{Z}$.

On peut décrire combinatoirement ces opérations en utilisant des stratifications de Whitney. Cependant on ne distingue pas les strates qui interviennent effectivement. Pour comprendre les constructions dans $\mathcal{Z}$, on est amené à choisir

---

* Dans la suite, nous utiliserons l'entier $\check{Eu}_Z(x)$ (voir § 1.1) et l'isomorphisme associé.

un plongement de X dans une variété M (éventuellement local) et à considérer le groupe $\mathcal{Z}_{\ell,h}(T^*M)$ des cycles lagrangiens homogènes du fibré cotangent T^*M. On a un isomorphisme $\mathcal{Z}(M) \to \mathcal{Z}_{\ell,h}(T^*M)$ en associant à un sous-ensemble analytique irréductible Z de M son espace conormal $T^*_Z M$ (voir [H.M] et § 1). $\mathcal{Z}_{\ell,h}(T^*M)$ est le groupe abélien libre engendré par de tels espaces conormaux.

Nous remarquons ici que les opérations sur $\mathbb{F}(X)$ se traduisent par des opérations naturelles sur $\mathcal{Z}_{\ell,h}(T^*M)$ (intersection, spécialisation, intersection tordue (§5)). Cela découle des conditions de Whitney. En particulier cela montre que la théorie des classes de Chern de [M] se ramène à une théorie de Chow sur T^*M, qui ne fait intervenir que des classes fondamentales.

On peut appliquer ces résultats aux cycles caractéristiques des systèmes différentiels holonômes ou à ceux des faisceaux constructibles (§ 1.3).

L'image directe par un morphisme propre est décrite au § 2. Au § 3 nous donnons des résultats sur l'image directe locale par un morphisme sans éclatement en codimension 0. On peut en effet dans ce cas se débarasser de l'hypothèse de propreté. Ces résultats peuvent être utiles pour une théorie des cycles évanescents des faisceaux constructibles.

Au § 4 nous décrivons la spécialisation, qui n'est autre que la spécialisation géométrique dans $\mathcal{Z}_{\ell,h}(T^*M)$, et au § 5 l'image inverse. En appendice, nous rassemblons les résultats techniques que nous utilisons : le principal concerne la manière commutative de calculer des intersections. La théorie de l'intersection que nous utilisons ici, et qui nous semble bien adaptée à la situation, est celle développée par W. Fulton et R. Mac Pherson dans [F.M_1] (voir aussi [F_1] ,[F_2] ,[FM_2]), d'où l'utilisation constante de cônes normaux (et de cônes normaux itérés), ce qui rend cependant certaines démonstrations un peu lourdes . Ce texte est une version remaniée (et augmentée du § 3) de [S].

J. L. Brylinski m'a informé que V.Ginsburg annonce dans une lettre certains des résultats ci-dessous. Les méthodes employées semblent cependant différentes.

1. RAPPELS PRÉLIMINAIRES

1.1 Classe de Chern-Mather et obstruction d'Euler locale

Soit M une variété analytique complexe, et $Z \subset M$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible de M. Soit $\nu : N(Z) \to Z$ la modification de Nash de Z et T_Z le fibré canonique sur N(Z) qui prolonge le fibré tangent de la partie lisse de Z (voir par exemple [G.V]). La classe (totale) de Chern-Mather est une classe dans $H_*(Z,\mathbb{Z})$ (homologie de Borel-Moore) définie par :

$$c_M(Z) = \nu_*(c(T_Z).\ [N(Z)])$$

où [ ] désigne la classe fondamentale et c la classe de Chern totale. On définit aussi :

$$c^\vee_M(Z) = \nu_*(c(\check{T}_Z).[N(Z)])$$

où $\check{T}_Z$ désigne le fibré dual de T_Z .

A tout point $x \in Z$ est associé un entier, l'obstruction d'Euler locale noté $Eu_Z(x)$. On posera aussi $E\check{u}_Z(x) = (-1)^{\dim Z} Eu_Z(x)$. Cet entier admet une définition topologique ([M]) comme obstruction, et une définition algébrique ([G.V]) qui sont équivalentes ([G.V]). Elles utilisent la modification de Nash. On donnera ci-dessous les définitions correspondantes qui utilisent l'espace conormal, et on indiquera l'équivalence avec les premières. Au § 4.8, on donnera une démonstration directe de l'équivalence des définitions topologique et algébrique de Eu, à l'aide de l'espace conormal.

Un cas particulier du théorème principal de [M] est le résultat suivant : si Z est compact, la classe de degré 0, $c_{M,0}(Z)$ est un entier égal à $\chi(Z,Eu_Z)$, caractéristique d'Euler de Z pondérée par la fonction constructible Eu_Z (voir [M]). On a aussi $c^\vee_{M,0}(Z) = \chi(Z,E\check{u}_Z)$.

1.2 Modification de Nash Versus Espace Conormal ([H.M.S.] , [T])

Soit Z^o la partie lisse de Z, et $T^*_{Z^o}M$ le fibré conormal de Z^o dans M. On pose $T^*_Z M = \overline{T^*_{Z^o}M} \subset T^*M$. C'est un espace analytique réduit, conique sur Z. On considère aussi son projectifié $C(Z,M) = \mathbb{P}(T^*_Z M) \subset \mathbb{P}(T^*M)$. On appelle l'un ou l'autre espace conormal de Z dans M. Plus généralement, si on a un morphisme induit par une projection :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & S \times M \arrow[dl, "p"] \\ S & \end{tikzcd}$$

on peut définir de manière analogue $T^*_f X \subset S \times T^*M$ comme adhérence du fibré conormal aux fibres de $f|_{X^o}$, si $f|_{X^o}$ est partout de rang maximum.

Les résultats qui suivent se justifient en utilisant le diagramme commutatif ci-dessous (voir [H.M.S.] Lemme 2.2) :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} P(Z,M) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & C(Z,M) \arrow[d, "\tau"] \\ N(Z) \arrow[r, "\nu"'] & Z \end{tikzcd}$$

où $P(Z,M)$ est le transformé strict de $C(Z,M)$ par la modification ν . On remarque que le morphisme $P(Z,M) \xrightarrow{\lambda} N(Z)$ est le fibré projectif associé au fibré vectoriel noyau de $\nu^* T^* M \to \check{T}_Z \to 0$.

(1.2.1) <u>Lemme</u> : On a $c^{\vee}_M(Z) = \tau_*(c(\tau^* T^* M).c(\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.[C(Z,M)])$ où $\check{\mathcal{O}}(-1)$ est le fibré en droite tautologique sur $\mathbb{P}(T^* M)$. □

Soit $x \in Z$ et $E_x C(Z,M) \xrightarrow{\zeta} Z$ le morphisme composé de l'éclatement de l'image inverse de x dans $C(Z,M)$ et de τ . L'espace $\zeta^{-1}(x)$ est contenu dans $\mathbb{P}(T_x M) \times \mathbb{P}(T^*_x M)$. On note $\mathcal{O}(-1)$ (resp. $\check{\mathcal{O}}(-1)$) le fibré tautologique sur $\mathbb{P}(T_x M)$ (resp. $\mathbb{P}(T^*_x M)$) , ainsi que son image inverse sur le produit. En utilisant la définition algébrique de Eu ([G.V]), on a :

(1.2.2) <u>Lemme</u> : $$\begin{aligned} \check{Eu}_Z(x) &= -\zeta_*(c(\mathcal{O}(1))^{-1}.\ c(\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}\ [\zeta^{-1}(x)]) \\ &= -\deg(c(\mathcal{O}(1))^{-1}.c(\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.[\zeta^{-1}(x)]) \end{aligned}$$

où deg désigne le degré de la classe d'indice 0. □

(1.2.3) On peut définir $\check{Eu}_Z(x)$ comme une obstruction ([M]). Pour cela, soit $B_\varepsilon(x)$ une boule assez petite centrée en x, et soit $W = \tau^{-1}(B_\varepsilon(x) \cap Z)$ et $\partial W = \tau^{-1}(\partial B_\varepsilon \cap Z)$. On note E le fibré $(\tau^* T^* M/\mathcal{O}^\vee(-1))^\vee$ sur W. Dans une carte $\mathbb{C}^m$ de M, la fibre de E en $w \in W$ est l'hyperplan de $\mathbb{C}^m$ correspondant à w. On a une inclusion naturelle $E \hookrightarrow W \times \mathbb{C}^m$, et en choisissant une métrique hermitienne, on définit comme dans [M] ou [G.V.] une section $\theta : (W, \partial W) \longrightarrow (E, E \setminus W)$ en projetant sur E la section canonique de $W \times \mathbb{C}^m$. Si ω_E désigne la classe de Thom du fibré E, on obtient ainsi une classe $\theta^*(\omega_E) \in H^{2(m-1)}(W, \partial W)$.

(1.2.4) <u>Lemme</u> : L'évaluation sur la classe fondamentale $[W, \partial W]$ de $\theta^*(\omega_E)$ est égale à $(-1)^{\dim M-1}\, \check{Eu}_Z(x)$.

On peut démontrer ce lemme en utilisant le résultat de [G.V.] et le diagramme (*). On verra une autre démonstration au § 4.8.

(1.3) <u>Cycles caractéristiques des systèmes différentiels holonomes et des faisceaux constructibles.</u>

Soit $\mathcal{F}^\cdot$ un complexe borné à cohomologie constructible sur M. On peut définir la variété caractéristique (ou micro support) de $\mathcal{F}^\cdot$, notée $SS(\mathcal{F}^\cdot)$ comme dans [B] thm 4.2.8 , [L.M] § 1.2 (voir aussi [K.S.]). Si $\mathcal{M}^\cdot$ est un complexe borné de systèmes différentiels à cohomologie holonome, tel que le complexe des solutions $Sol(\mathcal{M}^\cdot)$ soit quasi-isomorphe à $\mathcal{F}^\cdot$, il résulte de [L.M] par exemple que $SS(\mathcal{M}^\cdot) = SS(\mathcal{F}^\cdot)$.

On peut aussi définir le cycle caractéristique (avec multiplicités) de $\mathcal{F}^\cdot$ ou $\mathcal{M}^\cdot$, de sorte que $Ch(\mathcal{F}^\cdot) = Ch(\mathcal{M}^\cdot)$ (voir [B] , [L.M.]).
Soit $Ch(\mathcal{F}^\cdot) = \sum_j m_j\, T^*_{Y_j} M$. On pose $\check{S}(\mathcal{F}^\cdot) = \sum m_j Y_j \in \mathcal{Z}(M)$. Soit $x \in M$. On pose $Ind_x(\mathcal{M}^\cdot) = \chi(\mathcal{F}^\cdot)(x) = \sum_i (-1)^i \dim \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\cdot)_x$. Le théorème de l'indice local ([B.D.K] , th. 4) montre que :

$$\chi(\mathcal{F}^\cdot)(x) = (-1)^{\dim M}\, \check{Eu}_{\check{S}(\mathcal{F}^\cdot)}(x) .$$

Les résultats qui suivent permettent de décrire le comportement de $Ch(\mathcal{F}^\cdot)$ par image directe par un morphisme propre, image inverse et spécialisation. Quand le foncteur des solutions commute à ces opérations (image directe par un

morphisme projectif [K] , image inverse d'un système holonôme régulier [Me](3.2)) on en déduit le comportement de $Ch(\mathcal{M}^{\cdot})$. Z. Mebkhout a remarqué que la méthode employée ici ne contrôle que le cycle $Ch(\mathcal{F}^{\cdot})$ et pas la variété caractéristique $SS(\mathcal{F}^{\cdot})$, qui contient peut être des composantes de multiplicité totale nulle." On ne précise donc les estimations déjà connues (voir [K], [K.S]) qu'au niveau des cycles.

2. IMAGE DIRECTE PAR UN MORPHISME PROPRE

2.1 Soit $f : X \to S$ un morphisme propre entre espaces analytiques réduits. On suppose X et S plongés dans des variétés M et N respectivement. Soit Z un sous-ensemble analytique fermé irréductible de X. On se propose de donner une construction du cycle f_*Z, qui est par définition l'unique cycle de S satisfaisant $E\check{u}_{f_*Z} = f_*E\check{u}_Z$, où le terme de droite est défini dans l'introduction.

Si X est lisse, on peut prendre M = X, et on considère le cycle intersection $f^*T^*N.T^*_Z X$ dans $H_*(|f^*T^*N \cap T^*_Z X|)$ (voir appendice, ou $[F.M_1]$). Si X n'est pas lisse, on considère le graphe de f :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \times N \arrow[dl, "q"] \\ N & \end{tikzcd}$$

et le cycle intersection $q^*T^*N.T^*_Z(M \times N)$ dans $H_*(|q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N)|)$. On note r la projection $q^*T^*N \to T^*N$.

(2.2) <u>Théorème</u> : Le cycle $T^*_{f_*Z}N$ a son support contenu dans $|r(q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N))|$ et c'est l'unique cycle lagrangien homogène dans ce sous-ensemble vérifiant l'égalité suivante dans $H_{2\dim N}(|r(q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N)|)$:

$$[T^*_{f_*Z} N] = r_*(q^*T^*N.T^*_Z(M \times N)).$$

(2.3) <u>Remarques</u> : 1) Il découle du lemme (2.4.2) ci-dessous que $|r(q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N))|$ est de dimension $\leqslant \dim N$ (voir aussi [K] , prop. 4.9). Par suite les composantes de $T^*_{f_*Z}N$ sont parmi les composantes de dimension dim N de $|r(q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N))|$.

Ce fait est déjà montré dans [K] pour les variétés caractéristiques des systèmes holonômes.

2) Cette formule est à rapprocher de la formule dûe à G. Laumon ([La]) pour le calcul de l'image directe d'un $\mathcal{D}$-module cohérent.

3) La démonstration du théorème est essentiellement analogue à celle du théorème principal de [M].

(2.4) Preuve du théorème

Pour calculer le cycle intersection $q^*T^*N.T^*_Z(M \times N)$ on commence par remplacer $T^*_Z(M \times N)$ par le cône normal de $q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N)$ dans $T^*_Z(M \times N)$ et on note $\mathcal{C}(Z,N)$ le cycle de $T^*(M \times N)$ associé à ce cône normal. Chaque composante de $\mathcal{C}$ est bihomogène par rapport à la décomposition

$$T^*(M \times N) = p^*T^*M \underset{M \times N}{\times} q^*T^*N$$

si p désigne la projection $M \times N \to M$.

Remarque : Si on considère l'analogue de la construction du graphe de [M] sur l'espace conormal $\mathbb{P}(T^*_Z(M \times N))$, le cycle spécial qu'on obtient n'est autre que $\mathbb{P}(\mathcal{C}(Z,N))$.

(2.4.1) Lemme : Soit $\mathcal{C}_i$ une composante irréductible de $\mathcal{C}(Z,N)$ et Z_i sa projection dans Z. On a

$$|\mathcal{C}_i \cap p^*T^*M| \subset T^*_f M|_{Z_i}$$

(2.4.2) Lemme : On suppose de plus qu'il existe un sous-ensemble analytique fermé T_i de N et un ouvert U_i de T tels que $U_i \subset f(Z_i) \subset T_i$ et que U_i soit un ouvert dense de $f(Z_i)$ (c'est le cas si f est propre). On a alors

$$|\mathcal{C}_i \cap q^*T^*N| \subset |Z_i \underset{T_i}{\times} T^*_{T_i} N|.$$

Remarque : Pour des raisons de dimension, on ne peut avoir l'inclusion $\mathcal{C}_i \subset p^*T^*M$ que pour au plus une composante $\mathcal{C}_i$. On a alors $\mathcal{C}_i = T^*_{f|Z} M$ et la dimension générique de la fibre de $f|Z$ doit être égale à dim Z - dim N.

Preuve de (2.4.1) : Soit $(x,\varphi) \in \mathcal{C}_i \cap p^*T^*M$. Il existe un chemin analytique $(x(s), \varphi'(s))$, $s \in \mathbb{D}$, dans $T^*_Z(M \times N)$ et un chemin $\lambda(s)$ dans $\mathbb{C}$, avec $\lambda(0) = 0$, tels que $\varphi = \lim_{s \to 0} \varphi'(s)(., \lambda(s).)$.

$$\text{On a alors } \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi \cap T_xM = (\lim_{s \to 0} \operatorname{Ker}\varphi'(s)(.,\lambda(s).)) \cap T_xM$$
$$= \lim_{s \to 0} [\operatorname{Ker}\varphi'(s)(.,\lambda(s).) \cap T_{x(s)}M]$$

et on remarque que l'espace entre crochets est un hyperplan tangent à $f^{-1}(f(x(s)))$ en $x(s)$.

Preuve de (2.4.2) : Il suffit de montrer, à cause de la bihomogénéité de $\mathcal{C}_i$, que la projection de $\mathcal{C}_i$ sur q^*T^*N est contenue dans $T^*_{T_i}N$, et il suffit aussi de montrer l'inclusion sur un ouvert dense de Z_i, de sorte qu'on peut supposer que le couple (Z_{lisse}, Z_i) satisfait la condition a de Whitney et que U_i est contenu dans la partie lisse de T_i. Soit $(x,\varphi) \in \mathcal{C}_i \cap q^*T^*N$. Alors, avec les notations ci-dessus, $h' = \lim_{s \to 0} \operatorname{Ker}\varphi'(s)$ contient T_xZ_i. Par suite $h = \operatorname{Ker}\varphi$ contient la projection de T_xZ_i dans $T_{f(x)}N$, c'est à dire $T_{f(x)}T_i$. □

On a maintenant $q^*T^*N.T^*_Z(M \times N) = q^*T^*N.\ \mathcal{C}(Z,N)$ dans $T^*(M \times N)$ (voir [F.M_1]). Pour calculer cette intersection, on considère le complété projectif $\bar{\mathcal{C}}(Z,N)$ de $\mathcal{C}(Z,N)$ dans $\mathbb{P}(p^*T^*M \oplus \mathbb{1}) \times q^*T^*N$ et on note encore V^M l'image inverse sur $\bar{\mathcal{C}}(Z,N)$ du fibré naturel de rang dim M sur $\mathbb{P}(p^*T^*M \oplus \mathbb{1})$ (voir appendice). On a alors ([F.M_1]) :

$$q^*T^*N.\ \mathcal{C}(Z,N) = \pi_*(c^m(V^M).\ [\bar{\mathcal{C}}(Z,N)]),$$

où c^m est la $m^{ème}$ classe de Chern de V^M ($m = \dim M$) et π est la projection sur q^*T^*N .

(2.4.3) Lemme : On a $r_*(q^*T^*N.\ \mathcal{C}(Z,N)) = r_*\ \pi_*(c(V^M).\ [\bar{\mathcal{C}}(Z,N)])$ où $c(V^M)$ désigne la classe de Chern totale du fibré V^M.

Preuve : Soit $\bar{\mathcal{C}}_i$ une composante de $\bar{\mathcal{C}}$, d'image Z_i dans Z et T_i dans N. On a $r_*\ \pi_*\ (c(V^M).\ [\bar{\mathcal{C}}_i]) \in H_{2\dim N + *}(r \circ \pi(\bar{\mathcal{C}}_i))$ avec $* \geqslant 0$.

En effet $c^k(V^M) = 0$ si $k > \dim M$, et donc

$$r_*\ \pi_*(c^k(V^M).\ [\bar{\mathcal{C}}_i]) \in H_{2\dim M + 2\dim N - 2k}(r \circ \pi(\bar{\mathcal{C}}_i))$$

On déduit maintenant le lemme (2.4.3) de ce résultat et du lemme (2.4.2). Notons $f_{\#}Z$ le cycle de N satisfaisant $[T^*_{f_{\#}Z}N] = r_*(q^*T^*N \,.\, \mathcal{C}(Z,N))$. Soit $y \in f(Z)$ et soit $i_{f^{-1}(y)} : f^{-1}(y) \hookrightarrow Z$ l'inclusion. Il existe un unique cycle de $f^{-1}(y)$, noté $i^*_{f^{-1}(y)} Z$ satisfaisant :

$$\check{Eu}_{i^*_{f^{-1}(y)} Z} = \check{Eu}_Z \big|_{f^{-1}(y)} .$$

ce cycle sera construit au § 5. Il reste alors à montrer (voir (1.1)).

(2.4.4) <u>Proposition</u> : On a $\check{Eu}_{f_{\#}Z}(y) = \check{c}_{M,O}(i^*_{f^{-1}(y)} Z)$.

La proposition sera montrée au § (5.6).

3. IMAGE DIRECTE PAR UN MORPHISME SANS ÉCLATEMENT EN CODIMENSION 0

On considère la même situation qu'au § précédent :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & M \times N \arrow[d, "q"] \\ & N \end{tikzcd}$$

où Z est irréductible et réduit.

(3.1) <u>Définition</u> (voir [H] , [H.M.S]) : On dit que $f : Z \to N$ est sans éclatement en codimension 0 si toutes les fibres du morphisme $f \circ \tau_f : T^*_f M \to Z \to N$ ont la même dimension (dim M). C'est le cas en particulier si dim N = 1 .

Rappelons le résultat suivant, conséquence d'un théorème d'Hironaka ([H]) :

(3.2) <u>Proposition</u> ([H.M.S.] , cor.4.2.1) : Soit $f : Z \to N$ sans éclatement en codim.O, $g : S \to N$ un morphisme analytique, et Γ une composante de $|T^*_f M \times_N S|$. Alors Γ s'identifie à l'espace conormal relatif au morphisme $f' : \tau'_f(\Gamma) \to S$. En particulier, la condition de non éclatement en codimension O est stable par

changement de base . □

On a la description suivante de $\mathcal{C}(Z,N)$, quand f est sans éclatement en codim 0.

(3.3) Proposition : 1) Soit $\mathcal{C}_i$ une composante irréductible de $\mathcal{C}(Z,N)$ et Z_i son image dans Z. Alors $f|_{Z_i}$ est sans éclatement en codim 0, et $\mathcal{C}_i \cap p^*T^*M = T^*_{f|Z_i} M$.

2) Si le morphisme f est propre, et si on pose $T_i = f(Z_i)$, $\mathcal{C}_i$ est la composante du produit fibré $T^*_{f|Z_i} M \underset{T_i}{\times} T^*_{T_i} N$ qui se projette sur Z_i. En particulier $r(q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N))$ est lagrangien.

3) On a le même résultat en remplaçant Z et N par des voisinages assez petits d'un points $x \in Z$ et de $f(x) \in N$.

Preuve : On sait d'après [H] qu'il existe un ouvert dense Z^o de Z et un ouvert dense Z_i^o de Z_i tels que le couple (Z^o, Z_i^o) satisfasse la condition A_f de Thom.

On en déduit que $\widehat{T^*_f M|_{Z_i}} \subset T^*_{f|Z_i} M$, où $\widehat{T^*_f M|_{Z_i}}$ désigne la réunion des composantes irréductibles de $T^*_f M|_{Z_i}$ qui se surjectent sur Z_i. On déduit du lemme (2.4.1) que

$$|\mathcal{C}_i \cap p^*T^*M| \subset T^*_{f|Z_i} M .$$

D'autre part, on voit que $\dim |\mathcal{C}_i \cap p^*T^*M| = \dim T^*_{f|Z_i} M$, ce qui montre que l'inclusion ci-dessus est une égalité. On en déduit aussi que $\widehat{T^*_f M|_{Z_i}} = T^*_{f|Z_i} M$ et donc $f|Z_i$ est sans éclatement en codim 0. On en déduit simplement le reste de la proposition. □

Remarque : Les ensembles Z_i sont liés aux cycles évanescents du morphisme f (voir § 4.9).

(3.4) Théorème d'image directe locale : Soit $f : Z \to N$ un morphisme sans éclatement en codimension 0 et soit $x \in Z$. Pour tout voisinage assez petit de x dans Z, de la forme $B_\varepsilon \times B'_\eta \cap Z$, avec $\eta \ll \varepsilon$, et qu'on notera encore $M \times N$, on a les propriétés suivantes :

1) La fonction $f_*(E\check{u}_Z)$ définie par $f_*(E\check{u}_Z)(y) = \chi(f^{-1}(y), E\check{u}_Z)$ est constructible sur N. On peut donc définir le cycle f_*Z comme l'unique cycle de N satisfaisant $E\check{u}_{f*Z} = f_*E\check{u}_Z$.

2) L'ensemble $r(q^*T^*N \cap T^*_Z(M \times N))$ est analytique fermé dans T^*N et lagrangien. De plus on peut définir naturellement un cycle lagrangien sur cet ensemble, dont la classe fondamentale est notée $r_*(q^*T^*N.T^*_Z(M \times N))$.

3) On a $[T^*_{f_*Z}N] = r_*(q^*T^*N.T^*_Z(M \times N))$.

On peut préciser le point 1) en utilisant un résultat de Kashiwara et Schapira ([K.S.] Prop. 8.5.4). Le théorème suivant se démontre de la même manière que [K.S], cor. 8.6.5.

(3.5) <u>Théorème</u> : Soit $\mathcal{F}^\cdot$ un complexe borné à cohomologie constructible sur $M \times N$. On suppose que pour toute composante $T^*_{Z_i}(M \times N)$ de $SS(\mathcal{F}^\cdot)$ $f|Z_i$ est sans éclatement en codim 0. Soit $x \in M \times N$ et $V = B_\varepsilon \times B'_\eta$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $\eta << \varepsilon$. Alors le complexe $\mathbb{R}(f|_V)_*(\mathcal{F}^\cdot)$ est constructible sur B'_η .

Le théorème (3.4) calcule donc le cycle caractéristique de $\mathbb{R}(f|_V)_*(\mathcal{F}^\cdot)$.

(3.6) <u>Remarque</u> : Dans $[F.M_2]$ est défini le groupe des fonctions constructibles bivariantes $\mathbb{F}(X \to S)$. On peut, en utilisant la prop. (3.2), définir un groupe $\mathcal{Z}(X \to S)$, une obstruction d'Euler relative, et montrer qu'on obtient un isomorphisme d'Euler $\mathcal{Z}(X \to S) \to \mathbb{F}(X \to S)$. Il est probable qu'on peut de cette manière montrer l'existence des "classes de Chern bivariantes". Nous ne développerons pas ce point ici et renvoyons à [Br] pour un autre point de vue sur cette théorie. Seul sera traité le cas dim S = 1 au § 4.

(3.7) <u>Exemple</u> : Soit $(Z,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe analytique de dimension pure d, et $p : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{d-k+1}$ une projection linéaire générique. Soit $P_k(Z)$ le germe de variété polaire associé, et $\Delta_k(Z) = p(P_k(Z))$. On sait (voir $[L.T_1]$) que $\Delta_k(Z)$ est un germe d'hypersurface réduit dans $(\mathbb{C}^{d-k+1},0)$. En prenant un représentant assez petit de Z, on a :

$$(p_*(Z),0) = \alpha(\mathbb{C}^{d-k+1},0) + (\Delta_k(Z),0),$$

où $\alpha = \chi(Z \cap p^{-1}(t), E\check{u}_Z)$ avec $t \in \mathbb{C}^{d-k+1} \setminus \Delta_k(Z)$.

On peut aussi calculer α en remarquant que

$$E\check{u}_{p_*Z}(0) = \chi(Z \cap p^{-1}(0), E\check{u}_Z) = (-1)^{d-k+1}\alpha + E\check{u}_{\Delta_k}(0) .$$

Comme $\chi(Z \cap p^{-1}(0), E\check{u}_Z) = E\check{u}_Z(0)$, on a $\alpha = (-1)^{d-k+1}(E\check{u}_Z(0) - E\check{u}_{\Delta_k}(0))$ c'est à dire $\alpha = E\check{u}_{Z \cap p^{-1}(0)}(0) + m_o(P_{k-1}(Z))$ d'après [L.T$_1$] , où $P_{k-1}(Z)$ est la variété polaire générique de codimension $k-1$ de Z en 0.

(3.8) Preuve du théorème (3.4)

Commençons par définir le cycle $r_*(p^*T^*N.T_Z^*(M \times N))$. Pour cela, considérons le fibré $V^M = (T^*M/\check{\mathcal{O}}(-1))^V$ sur $\mathbb{P}(p^*T^*M)$. On considère aussi le cône $\mathcal{C}(Z,N)$. Soit $\mathcal{C}_i$ une composante de $\mathcal{C}(Z,N)$, d'image Z_i dans Z et T_i dans N. Au moins sur un ouvert dense de T_i le morphisme $T^*_{f|Z_i}M \xrightarrow{\tau_f} Z_i \to T_i$ admet une classe fondamentale relative (voir [F.M.2]).

Si on note $\partial T^*_{f|Z_i}M = \tau_f^{-1}(Z_i \cap (\partial M \times N))$, on peut définir une classe d'obstruction $e(V^M) \in H^{2(\dim M-1)}(T^*_{f|Z_i}M, \partial T^*_{f|Z_i}M)$ comme au § 1.2.3 (voir aussi §4.7). Le cap-produit $e(V^M).[T^*_{f|Z_i} \to T_i]$ est donc un entier noté m_i . On pose $f_\# Z = \sum_i m_i T_i$ et $r_*(p^*T^*N . T_Z^*(M \times N)) = T^*_{f_\# Z} N$.

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que, pour tout $y \in N$, on a

$$\chi(f^{-1}(y), E\check{u}_Z) = E\check{u}_{f_\# Z}(y).$$

D'une part on a $\chi(f^{-1}(y), E\check{u}_Z) = \chi(f^{-1}(y), E\check{u}_{i^*_{f^{-1}(y)}Z})$

$$= \deg(e(V^M).[C(i^*_{f^{-1}(y)}Z, M)])$$

d'après [Du] thm IV, 4.1.2. et puisque f est sans éclatement en codimension 0 on a (voir § 5.5) :

$$\chi(f^{-1}(y), E\check{u}_Z) = \deg(e(V^M).c({}_N\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_N\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.[\overline{\mathcal{C}}(Z,N,M \times \{y\})]).$$

Il reste donc à montrer que pour tout i on a

$$m_i E\check{u}_{T_i}(y) = \deg(e(V^M).c({}_N\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_N\check{\mathcal{O}}(-1))[\overline{\mathcal{C}}_i(Z,N,M \times \{y\})]).$$

La preuve de ce fait est analogue à celle du lemme (5.4.3) démontré plus loin, et nous la laissons au lecteur. □

4. SPÉCIALISATION

On suppose dans ce paragraphe que la base du morphisme f est lisse de dimension 1. Soit $Z \subset M \times S$ un sous-ensemble analytique irréductible. On dira que $f|_Z$ est un cycle relatif si le morphisme $f : Z \to S$ est ouvert. On peut donc définir le groupe des cycles relatifs (ou bivariants) $\mathcal{Z}(M \times S \to S)$.

(4.1) Définition : Soit $s \in S$. On définit le cycle $j_s^* Z$ comme l'unique cycle de $f^{-1}(s)$ qui vérifie :

$$T^*_{j_s^* Z} M = (f \circ \tau_f)^{-1}(s).$$

Cette définition est justifiée par la proposition (3.2). On peut aussi définir l'obstruction relative :

(4.2) On pose $\check{Eu}_{f|Z}(x) = \check{Eu}_{j^*_{f(x)} Z}(x)$ et

$$Eu_{f|Z}(x) = Eu_{j^*_{f(x)} Z}(x) .$$

(4.3) Théorème : 1) $\check{Eu}_{f|Z}$ est une fonction constructible sur Z, génériquement (sur S) égale à $-\check{Eu}_Z$.

2) Pour tout $x \in Z$, on a

$$\check{Eu}_{f|Z}(x) = Sp(-\check{Eu}_Z)(x) \overset{\text{def}}{=} -\chi(F_x, \check{Eu}_Z)$$

où F_x est la fibre de Milnor de f en x.

(4.4) Conséquences: 1) Soit $\mathcal{F}^\cdot$ un complexe borné à cohomologie constructible sur $M \times S$, et $Ch(\mathcal{F}^\cdot)$ son cycle caractéristique, noté $T^*_Z(M \times S)$, avec $Z \in \mathcal{Z}(M \times S)$. Alors le cycle caractéristique du complexe $R\psi_f(\mathcal{F}^\cdot)$ défini sur $f^{-1}(s)$ (voir [D]) n'est autre que $T^*_{j_s^* Z} M$.

2) Soit Y une sous-variété de M et Z un cycle de M. On peut définir le spécialisé du cycle Z le long de Y comme un cycle du fibré

normal $N_Y M$ comme dans $[V_3]$: on note $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ la déformation de M sur $N_Y M$ obtenue en éclatant $Y \times \{0\}$ dans $M \times \mathbb{C}$, et en considérant une carte de l'éclaté. On pose $Sp_Y Z = j_o^* \mathcal{Z}$, si $\mathcal{Z}$ est le transformé strict du cycle $Z \times \mathbb{C}$ par la modification $\mathcal{M} \to M \times \mathbb{C}$.

Un calcul simple montre que $T^*_{Sp_Y Z}(N_Y M)$ est le cône normal de $T^*_Z M \cap T^*_Y M$ dans $T^*_Z M$ (ce fait a déjà été observé par V. Navarro [N] voir aussi [L] [L.T_2] et A4)

3) Les deux remarques précédents permettent de calculer le cycle caractéristique du complexe $Sp_Y \mathcal{F}^\cdot$ en fonction de celui de $\mathcal{F}^\cdot$ (voir $[V_3]$) :

$$Ch(Sp_Y \mathcal{F}^\cdot) = C_{Ch(\mathcal{F}^\cdot)} \cap T^*_Y M \; Ch(\mathcal{F}^\cdot) .$$

4) On déduit du théorème (4.3) et du théorème de spécialisation de la classe fondamentale (voir $[F.M_2]$ par exemple) le théorème de spécialisation des classes de Chern dû à Verdier ($[V_2]$) .

(4.5) <u>Théorème</u> : Soit $Z \subset M$ un sous-ensemble analytique réduit et irréductible et $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction analytique.

1) On suppose qu'au voisinage d'un point $x_o \in Z$, l'intersection de $T^*_Z M$ et Graphe(df) dans T^*M est réduite au point $(x_o, df(x_o))$. On a alors

$$(T^*_Z M . Gr(df))_{(x_o, df(x_o))} = E\check{u}_Z(x_o) + E\check{u}_{f|Z}(x_o) .$$

2) Si l'intersection $T^*_Z M \cap Gr(df)$ se projette sur un ensemble compact X de Z, alors $(T^*_Z M \cdot Gr(df))$ est encore défini (voir appendice) et on a :

$$(T^*_Z M . Gr(df)) = \chi(X, E\check{u}_Z + E\check{u}_{f|Z}) .$$

(4.6) <u>Remarques</u> : 1) On peut remplacer $T^*_Z M$ par $Ch(\mathcal{F}^\cdot)$ et dans ce cas $(E\check{u}_Z + E\check{u}_{f|Z})(x_o) = (-1)^{\dim M - 1} \chi(R\Phi_f(\mathcal{F}^\cdot))(x_o)$, où $R\Phi_f$ est défini dans [D].

2) Plusieurs personnes (Lê D.T., A. Dubson, J. L. Verdier) donnent une démonstration de ce résultat, qui avait été conjecturé par P. Deligne.

(4.7) Preuve du théorème (4.3)

1) On stratifie le morphisme f, de sorte que la stratification de Z satisfasse les conditions de Whitney (on se restreint éventuellement au voisinage d'un compact de Z pour l'existence d'une telle stratification). Soit S^o la strate dense de S et $Z^o = f^{-1}(S^o)$. On vérifie alors qu'on a un isomorphisme

$$T^*_{Z^o}(M \times S) \longrightarrow T^*_{f|_{Z^o}} M$$

(on associe à un hyperplan de $T_x(M \times S)$ sa trace sur T_xM). On en déduit la première partie du théorème.

2) On doit maintenant montrer que

$$E\check{u}_{f|Z}(x) = \chi(F_{x,s}, E\check{u}_{Z_s}(.))$$

où $F_{x,s}$ est la fibre de Milnor de $f|Z$ en x : $F_{x,s} = B_\varepsilon(x) \cap f^{-1}(s)$, et $Z_s = f|_Z^{-1}(s)$. On a en effet $E\check{u}_{Z_s} = -E\check{u}_{Z|_{f^{-1}(s)}}$.

On va démontrer ce résultat en utilisant la définition topologique de $E\check{u}_{f|Z}$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \times S \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

et on note d la dimension relative de f. Soit $\tau_f : \mathbb{P}(T^*_f M) \to Z$ le morphisme naturel. Soit B_ε une boule assez petite centrée en x dans M, et D_η une boule dans S centrée en f(x). On pose

$$W = \tau_f^{-1}((B_\varepsilon \times D_\eta) \cap Z) \quad \text{et} \quad \partial W = \tau_f^{-1}(\partial B_\varepsilon \times D_\eta \cap Z) .$$

On peut, comme au § 1 définir une section θ du fibré $E = (\tau_f^* T^*M/ \mathcal{O}(-1))^\vee$ et θ ne s'annule pas sur ∂W (on utilise la condition A_f de Thom). On définit donc une classe d'obstruction $\theta^*(\omega_E) \in H^{2(\dim M - 1)}(W, \partial W)$. On peut identifier ce dernier groupe au groupe de cohomologie à support propre sur S de $\mathring{W} = W \setminus \partial W$. On peut alors évaluer $\theta^*(\omega_E)$ sur la classe fondamentale relative $[\mathring{W} \to D_\eta]$, qui est une classe dans le groupe d'homologie bivariante $H_{2(\dim M-1)}(\mathring{W} \to D_\eta)$ (voir [F.M$_2$]), et on obtient un entier.

On peut calculer cet entier en restreignant toutes les classes au-dessus de f(x). On obtient alors $(-1)^{\dim M-1} E\check{u}_{f|Z}(x)$ d'après la définition de

$j^*_{f(x)}Z$ et d'après la définition topologique de $E\check{u}$.

On peut aussi calculer cet entier en restreignant toutes les classes au-dessus de $s \in D_\eta \setminus f(x)$. On obtient alors, d'après [Du] , th. IV.4.1.2, que cet entier est égal à $(-1)^{\dim M-1} \chi(F_{x,s}, E\check{u}_{Z_s})$.

4.8 Comportement des variétés polaires

Si $Z = \sum_i m_i Z_i$ est un cycle d'une variété M, et si $x \in |Z|$, on définit le germe de cycle polaire générique de dimension ℓ de Z en x par

$$P^\ell(Z,x) = \sum_i m_i P^\ell(Z_i,x) ,$$

où $P^\ell(Z_i,x) = P_{\dim Z_i - \ell}(Z_i,x)$ est le germe de variété polaire générique de Z_i en x (on prend le même drapeau pour chaque i) de codimension $\dim Z_i - \ell$ (voir [T], ou [H.M.S]), et $P_{\dim Z_i - \ell}(Z_i,x) = \emptyset$ si $\ell > \dim Z_i$.

Soit $f : Z \to S$ comme ci-dessus ($\dim S = 1$), et Z irréductible et réduit. Pour $x \in Z$, on peut aussi définir la variété polaire relative de dimension $\ell + 1$ en x, notée $P^\ell(f,x)$ ([T] ,[H.M.S.]), et on a ([H.M.S] 4.2.5) :

(4.8.1) Le (germe en x de) cycle $P^\ell(f,x) \cap f^{-1}(f(x))$ est le cycle $P^\ell(j^*_{f(x)}Z)$.
On déduit alors de [L.T$_1$] la formule suivante :

$$E\check{u}_{f|Z}(x) = \sum_k (-1)^{d-k} m_x(P_k(f,x) \cap f^{-1}(f(x))). \tag{4.8.2}$$

Appliquons ce résultat à la spécialisation le long d'une sous-variété $Y \hookrightarrow M$ (4.4) :

(4.8.3) Corollaire : 1) Pour tout $x \in Y \cap Z$, on a

$$P^\ell(Sp_Y Z,x) = C_{Y \cap P^\ell(Z,x)} P^\ell(Z,x)$$

2) Les multiplicités $m_x(P^\ell(Sp_Y Z,x))$ et $m_x(P^\ell(Z,x))$ sont égales.

3) On a $E\check{u}_{Sp_Y}(x) = E\check{u}_Z(x)$.

Preuve : 1) D'après ce qui précède, $P^\ell(Sp_Y Z,x)$ est la fibre spéciale de $P^\ell(\varphi,x)$, si φ est le morphisme de déformation sur le cône normal $C_{Y \cap Z}Z$. On remarque alors que $P^\ell(\varphi,x)$ est l'espace de la déformation de $P^\ell(Z,x)$ sur le cône normal de $Y \cap P^\ell(Z,x)$ dans $P^\ell(Z,x)$ (voir aussi [L.T$_2$]).

La preuve de 2) se fait en utilisant (A.3.1) avec les variétés $\{x\}$, Y, M et la définition de la multiplicité donnée dans [R] (autrement dit, en utilisant les notations de l'appendice, on a $m_x(P^\ell) = P^\ell.x$). On obtient alors 3) en utilisant $[L.T_1]$.

<u>Remarque</u> : J. L. Verdier a montré un résultat analogue.

A titre d'application, montrons maintenant que les définitions algébrique et topologique de $E\check{u}$ données au § 1.2 sont équivalentes. A l'aide du corollaire (4.8.3), et en utilisant un argument analogue à celui donné à la fin de la démonstration du théorème (4.3), on peut se ramener au cas où Z est un cône de sommet l'origine dans $\mathbb{C}^m$, et on évalue $E\check{u}_Z(0)$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^m) \times \mathbb{P}(\check{\mathbb{C}}^m) \supset \tilde{C}(Z,\mathbb{C}^m) \arrow[r, "e"] \arrow[d] \arrow[dr, "\zeta"] & C(Z,\mathbb{C}^m) = \mathbb{P}(T^*_Z\mathbb{C}^m) \arrow[d, "\tau"] \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}(\check{\mathbb{C}}^m) \\
\mathbb{C}^m \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^m) \supset \tilde{Z} \arrow[r, "e"'] & Z \subset \mathbb{C}^m
\end{tikzcd}$$

où e est l'éclatement de l'origine, et $\tilde{C}(Z,\mathbb{C}^m)$ le transformé strict de $C(Z,\mathbb{C}^m)$ par e. Puisque Z est un cône, on a une projection $p : \tilde{C}(Z,\mathbb{C}^m) \to \zeta^{-1}(0)$ qui est identique au fibré normal de $\zeta^{-1}(0)$.

On pose $\zeta^{-1}(0) = D$, $\tilde{C}(Z,\mathbb{C}^m) = L$ et on note E l'image inverse sur $C(Z,\mathbb{C}^m)$ du fibré $(\check{\mathbb{C}}^m/\check{\mathcal{O}}(-1))^\vee$ défini sur $\mathbb{P}(\check{\mathbb{C}}^m)$. La section θ de E définie au § 1 permet de définir une section σ de e^*E sur L. On a en fait le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
p^*L \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr] & & e^*E \arrow[dl] \\
& L \arrow[d, "p"] \arrow[ul, bend left, "\lambda"] \arrow[ur, bend right, "\sigma"'] & \\
& D &
\end{tikzcd}$$

où λ est la section canonique de p^*L, et on a $\sigma = i \circ \lambda$. On a par suite :

$$\sigma^*(\omega_{e^*E}) = c^{max}(e^*E/p^*L) \,.\lambda^*(\omega_{p^*L}) = c^{max}(e^*E/p^*L).\ \omega_{p^*L} \quad ,$$

où ω désigne la classe de Thom. En utilisant le langage de l'homologie bivariante ([F.M_2]), on doit maintenant montrer le résultat suivant :

$$\deg(c(\mathcal{O}(-1))^{-1}.c(\check{\mathcal{O}}(1))^{-1}.[D]) = \sigma^*(\omega_{e^*E}).\ [L] \ .$$

On écrit alors :

$$\sigma^*(\omega_{e^*E}) = c^{max}(e^*E|_D \ /L) \ .\ [D \hookrightarrow L]$$

et $[L] = [L \xrightarrow{p} D]$. $[D]$ (formule du produit pour les classes fondamentales).
On utilise enfin l'égalité $[D \hookrightarrow L]$. $[L \xrightarrow{p} D] = 1$. □

(4.9) <u>Preuve du théorème</u> (4.5)

On va montrer la deuxième partie, puisque la première en est un cas particulier. On se ramène d'abord facilement au cas où Z est contenu dans $M \times S$ et où f est la projection $M \times S \to S$, en posant $S = \mathbb{C}$. On a ensuite l'égalité

$$(T^*_Z(M \times S) \ .\ Gr(df)) = \mathcal{C}(Z,S).Gr(df)$$

où $\mathcal{C}(Z,S)$ est défini au § 2 (voir A.3). De plus, en utilisant (3.3) pour $f|_Z$, on voit qu'on peut écrire

$$\mathcal{C}(Z,S) = T^*_{f|_Z} M + \sum_i m_i \, T^*_{Z_i} M \times T^*_{s_i} S$$

où la somme est prise pour un nombre fini d'indices i, les Z_i sont compacts irréductibles, et contenus dans $f^{-1}(s_i)$. On a en effet supposé que $T^*_Z(M \times S) \cap Gr(df)$ se projette sur un ensemble compact X de $M \times S$, qui n'est autre que $\bigcup_i Z_i$.

On a donc

$$T^*_Z(M \times S).Gr(df) = \sum_i m_i (T^*_{Z_i} M \times T^*_{s_i} S).Gr(df) \ .$$

Comme par définition on a $T^*_{Z_i} M \times T^*_{s_i} S.Gr(df) = c^{\vee}_{M,O}(Z_i)$, il reste à montrer l'égalité

$$\sum_i m_i \, E\check{u}_{Z_i} = E\check{u}_Z + E\check{u}_{f|_Z} \, .$$

Pour cela, on va utiliser une formule donnant $E\check{u}_Z$ utilisant le fait que $f|_Z$ est sans éclatement en codimension 0 (voir § 5.5).

Soit $(x,s) \in Z$, et $\mathcal{C}(Z,S,M_s)$ le cône normal dans $\mathcal{C}(Z,S)$ de l'image inverse Λ_s de $f^*T^*S|_{M \times \{s\}} = M \times T^*_s S$ dans $\mathcal{C}(Z,S)$ par le morphisme naturel $\mathcal{C}(Z,S) \to f^*T^*S$, et soit $\mathcal{C}(Z,S,M_s,x)$ celui de l'image inverse de $\{x\} \times T^*_s S$ dans $\mathcal{C}(Z,S,M_s)$ par le morphisme naturel

$$\mathcal{C}(Z,S,M_s) \longrightarrow \Lambda_s \longrightarrow M \times T^*S \, .$$

L'espace $\mathcal{C}(Z,S,M_s,x)$ est naturellement plongé dans $T_xM \times T^*_xM \times T_sS \times T^*_sS$, et on note $\overline{\mathcal{C}}$ son adhérence quadri-projective .

$$E\check{u}_Z(x,s) = \deg(c({}_M\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_M\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.c({}_S\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_S\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}. \quad [\overline{\mathcal{C}}]).$$

Il reste donc à calculer $\mathcal{C}(Z,S,M_s,x)$. On voit que

$$\mathcal{C}(Z,S,M_s) = T^*_{f|_Z} M|_s + \sum_{i \in I_s} m_i \, T^*_{Z_i} M \times T^*_s S \qquad \text{où} \quad I_s = \{i | s_i = s\} \, .$$

Comme $T^*_{f|Z} M|_s = T^*_{j^*_s Z} M$, on déduit de la définition de $E\check{u}_{f|_Z}$ que

$$E\check{u}_Z(x,s) = -E\check{u}_{f|Z}(x,s) + \sum_i m_i \, E\check{u}_{Z_i}(x) \, . \quad \square$$

5. IMAGE INVERSE

Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre deux variétés et Z un cycle sur X. On se propose dans ce paragraphe de donner une construction géométrique de l'unique cycle f^*Z de Y satisfaisant $E\check{u}_{f^*Z} = f^*E\check{u}_Z$.

Le seul cas non trivial, puisque la construction est locale, est celui où f est une immersion fermée régulière. On la notera donc $i : Y \hookrightarrow M$. La construction se fait en deux étapes : on se ramène d'abord au cas d'un cône.

(5.1) <u>Théorème</u> : 1) On a $i^*Z = i^*Sp_Y Z$, où l'inclusion de droite est celle de Y dans $N_Y M$.

2) Plus généralement, si Y' est une sous-variété contenant Y, et si $i' : Y \hookrightarrow N_{Y'}M$ désigne l'inclusion, on a $i^*Z = i'^*Sp_{Y'}Z$.

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence de (4.8.3). □

On est maintenant ramené au cas où i est l'inclusion $Y \hookrightarrow N_Y M$ et où le cycle est conique sur Y. On note $p : N_Y M \to Y$ la projection. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T^*(N_Y M) \arrow[dr] & p^*T^*Y \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & T^*Y \arrow[d] \\
& N_Y M \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(5.2) <u>Théorème</u> : 1) Les composantes du cycle i^*Z sont contenues dans $\rho(|p^*T^*Y \cap T^*_{Sp_Y Z}(N_Y M)|)$.

2) Le cycle $T^*_{i^*Z}Y$ est l'unique cycle lagrangien homogène de $\rho(p^*T^*Y \cap T^*_{Sp_Y Z}(N_Y M))$ satisfaisant à

$$[T^*_{i^*Z}Y] = \rho_*(p^*T^*Y \odot T^*_{Sp_Y Z}(N_Y M))$$

dans $H_{2\dim Y}(\rho(|p^*T^*Y \cap T^*_{Sp_Y Z}N_Y M|))$, où $\odot$ désigne une intersection tordue définie en (5.3).

(5.3) <u>Définition de $\odot$</u> : Soit $Z \subset N_Y M$ conique sur Y, et $\mathcal{C}(Z,Y)$ le cône normal de $T^*_Z(N_Y M) \cap p^*T^*Y$ dans $T^*_Z(N_Y M)$ (voir § 2). Soit π la projection naturelle

$$\mathcal{C}(Z,Y) \to T^*_Z(N_Y M) \cap p^*T^*Y.$$

Localement sur Y, on peut supposer que $N_Y M = Y \times E$ et $\mathcal{C}(Z,Y)$ est contenu dans $T^*Y \times E \times E^\vee$, et est homogène dans les directions E et $E^\vee$.

Soit $\mathcal{C}_i$ une composante de $\mathcal{C}(Z,Y)$. On note $\bar{\mathcal{C}}_i$ l'adhérence bi-projective de $\mathcal{C}_i$ dans $T^*Y \times P(E \oplus \mathbb{1}) \times P(E^\vee \oplus \mathbb{1})$.

On pose alors :

$$T^*_Z(N_YM) \odot p^*T^*Y = \pi_*(\{c(\mathcal{O}(1))^{-1}.c(\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}. \quad [\bar{\mathcal{C}}(Z,Y)]\}_{2\dim Y})$$

où $\mathcal{O}(1)$ (resp $\check{\mathcal{O}}(1)$) est le fibré canonique sur $\mathbb{P}(E\oplus 1)$ (etc.) , et $\{\ \}_{2\dim Y}$ désigne la classe de degré $2\dim Y$. La classe ci-dessus est donc une classe dans $H_{2\dim Y}(|T^*_Z(N_YM) \cap p^*T^*Y|)$.

<u>Remarque</u> : Si $Y = \{x\}$, le terme de droite n'est autre que $E\check{u}_Z(x)$.

(5.4) <u>Preuve du théorème (5.2)</u> : Il résulte du lemme (2.4.2) qu'il existe un unique cycle lagrangien homogène dans $\rho(|p^*T^*Y \cap T^*_{Sp_YZ}(N_YM)|)$ de classe fondamentale égale à $\rho_*(p^*T^*Y \odot T^*_{Sp_YZ}(N_YM))$. On notera ce cycle $T^*_{i\#Z}Y$.

Il faut montrer que pour tout $x \in Z \cap Y$ on a

$$E\check{u}_{i\#Z}(x) = E\check{u}_{Sp_YZ}(x) = E\check{u}_Z(x) .$$

Le problème est local sur Y, de sorte qu'on posera $N_YM = Y \times E$.

(5.4.1) <u>Lemme</u> : Le support du cycle $\mathcal{C}(Sp_YZ,Y)$ est contenu dans $T^*Y \times I_E$, où $I_E \subset E \times E^\vee$ est la variété d'incidence des couples (v,η) tels que $\eta(v) = 0$.

<u>Preuve</u> : Soit X une composante de Sp_YZ. Alors X est contenu dans $Y \times E$ et est conique sur Y. On peut supposer que X n'est pas contenu dans $Y = Y \times \{0\}$ sinon $\mathcal{C}(X,Y) = T^*_XY \times \{0\} \times E^\vee$ et la propriété est satisfaite. Un point (x,ξ,v,η) est dans $\mathcal{C}(X,Y)$ s'il existe un chemin analytique $(x(s),\xi'(s),v(s),\eta(s))$ dans $T^*_X(Y\times E)$ et un chemin $\lambda(s)$ dans $\mathbb{C}$, avec $\lambda(0) = 0$, tels que

$$(x,\xi,\eta,v) = \lim_{s\to 0} (x(s), \lambda(s)\ \xi'(s), v(s), \eta(s)).$$

Puisque X est homogène, un hyperplan tangent en un point lisse de X contient la génératrice passant par ce point. Donc pour $s \neq 0$, on a $\eta(s)(v(s)) = 0$. Par suite, à la limite on a $\eta(v) = 0$. □

(5.4.2) <u>Conséquence</u> : On a l'égalité suivante dans

$$H_{2\dim Y}(\rho(|p^*T^*Y \cap T^*_{Sp_YZ}(N_YM)|)) :$$

$$[T^*_{i^\#Z} Y] = \rho_*\pi_*(c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}. \quad [\overline{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,Y)] \ ).$$

<u>Preuve</u> : Elle est analogue à celle du lemme (2.4.3). On utilise ici le fait que sur la variété d'incidence de $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^\vee)$, la classe $c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}$ est la classe de Chern d'un fibré de rang dim E - 2. □

On a une application naturelle

$$\psi = \tau \circ \rho \circ \pi : \ \mathcal{C}(Sp_Y Z,Y) \to p^*T^*Y \cap T^*_{Sp_Y Z}(N_Y M) \to T^*Y|_{Z \cap Y} \to Z \cap Y.$$

Localement , une composante $\mathcal{C}_j$ de $\mathcal{C}(Sp_Y Z,Y)$ est contenue dans $T^*_{Z_j} Y \times E \times E^\vee$ si $Z_j = \psi(\mathcal{C}_j)$, d'après le lemme (2.4.2).

Pour $x \in Z \cap Y$, soit $\mathcal{C}(Sp_Y Z,Y,x)$ le cône normal de $\psi^{-1}(x)$ dans $\mathcal{C}(sp_Y Z,Y)$. Comme ψ est induit par la projection naturelle $T^*Y \times E \times E^\vee \to Y$, on a $\psi^{-1}(x) = \mathcal{C}(Sp_Y Z,Y) \cap T^*_x Y \times E \times E^\vee)$, et l'espace $\mathcal{C}(Sp_Y Z,Y,x)$ est contenu dans $T_x Y \times T^*_x Y \times E \times E^\vee$, et est quadrihomogène. Soit Γ_x son adhérence dans

$$\mathbb{P}(T_x Y \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(T^*_x Y \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(E^\vee \oplus \mathbb{1}),$$

et $\mathbb{P}(\Gamma_x)$ le quadriprojectifié de $\mathcal{C}(Sp_Y Z,Y,x)$ (comme au § 5.3).

(5.4.3) <u>Lemme</u> : On a

$$E\check{u}_{i^*Z}(x) = \deg(c({}_Y\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_Y\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1} \ c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1} \ [\Gamma_x] \ ).$$

<u>Preuve</u> : Soit $\mathcal{C}_j$ une composante irréductible de $\mathcal{C}(Sp_Y Z,Y)$. On suppose que $\mathcal{C}_j$ n'est pas contenu dans un sous-espace $T^*Y \times E \times 0$ ou $T^*Y \times 0 \times E^\vee$. Les cas dégénérés se traitent de même. Soit Γ_j l'adhérence de $\mathcal{C}_j$ dans $\mathbb{P}(T^*Y \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(E^\vee \oplus \mathbb{1})$, et $\psi : \Gamma_j \to Y$ l'application naturelle. Soit $E_x \Gamma_j$ l'éclaté de $\psi^{-1}(x) \times \{0\}$ dans $\Gamma_j \to \mathbb{C}$ et $\Gamma_{j,x}$ le diviseur exceptionnel, union de composantes de Γ_x. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_j \times \mathbb{C} \arrow[d, "\rho\circ\pi \times Id_{\mathbb{C}}"'] & E_x\Gamma_j \arrow[l, "e_x"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{\omega}"] & \Gamma_{j,x} \arrow[d, "\overline{\omega}"] \\
\rho\circ\pi(\Gamma_j) \times \mathbb{C} & E_x(\rho\circ\pi(\Gamma_j) \times \mathbb{C}) \arrow[l, "e_x"'] \arrow[r, hook] & \rho\circ\pi(\Gamma_j)_x
\end{tikzcd}$$

On a $\Gamma_{j,x} = \varpi^{-1}((\rho\circ\pi)(\Gamma_j)_x)$.

Il suffit maintenant de montrer que

$$(*) \qquad \varpi_*(c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.\ [\Gamma_x]\ ) = \alpha_j[(\rho\circ\pi)(\Gamma_j)_x]$$

où α_j est défini par

$$(\rho\circ\pi)_*\ (c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.\quad [\overline{\mathcal{C}}_j]) = \alpha_j[T^*_{Z_j}Y] \qquad \text{(voir (5.3))}.$$

Par le même argument qu'en (5.4.2) on peut supposer que $(\rho\circ\pi)\mathcal{C}_j = T^*_{Z_j}Y$ et quitte à normaliser, et utiliser par exemple $[F_1]$ prop.1, on peut supposer que Γ_j et $(\rho\circ\pi)(\Gamma_j)$ sont normaux. De plus il suffit de vérifier (*) en codimension 1 sur $\Gamma_{j,x}$, de sorte qu'on peut supposer que $E_x\ \rho\circ\pi(\Gamma_j)$ et $E_x\ \Gamma_j$ sont lisses.

Dans ce cas, le morphisme ϖ admet une classe fondamentale en homologie bivariante (voir $[F.M_2]$) et on a en fait

$$\alpha_j = \varpi_*(c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}[\varpi]\ ).$$

On en déduit (*) en utilisant la formule de multiplication ($[F.M_2]$)

$$[\Gamma_{j,x}] = [\varpi]\ .\ [\rho\circ\pi(\Gamma_j)_x]\ .\ \square$$

Montrons maintenant que $E\check{u}_{i\#Z}(x) = E\check{u}_{Sp_YZ}(x)$.

On a $E\check{u}_{Sp_YZ}(x) = \deg(c({}_{Y\times E}\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_{Y\times E}\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.[\ \overline{\mathcal{C}}(Sp_YZ,x)\ ])$ où $\mathcal{C}(Sp_YZ,x)$ est le cône normal de $T^*_{Sp_YZ}(Y\times E)\cap T^*_x(Y\times E)$ dans $T^*_{Sp_YZ}(Y\times E)$, et $\overline{\mathcal{C}}$ son adhérence bi-projective. Soit $\mathcal{C}(Sp_YZ,x,Y)$ le cône normal de $\mathcal{C}(Sp_YZ,x)\cap(T_xY\oplus E\oplus T^*_xY)$ dans $\mathcal{C}(Sp_YZ,x)$, qui est contenu dans $T_xY\oplus E\oplus T^*_xY\oplus E$, et $\overline{\mathcal{C}}(Sp_YZ,x,Y)$ son adhérence quadri-projective.

Il résulte de (A.3.2) qu'on a

$$E\check{u}_{Sp_YZ}(x) = \deg(c({}_Y\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_Y\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}[\ \overline{\mathcal{C}}(Sp_YZ,x,Y)\ ])$$

et on obtient l'égalité voulue à l'aide du lemme (5.4.3) et de (A.2.1) appliqué aux sous-variétés $T^*Y\times E$ et $T^*_x(Y\times E)$ de $T^*(Y\times E)$. $\square$

(5.5) Image inverse par un plongement fermé régulier en bonne position ou non caractéristique.

(5.5.1) Soit $i : Y \hookrightarrow M$ un plongement fermé comme ci-dessus, et Z un cycle de M. On dit que Y est en bonne position par rapport à Z si pour toute composante Z_j de Z, et tout point x de $Z_j \cap Y$, on peut trouver au voisinage de x une application analytique $\varphi : M \to \mathbb{C}^p$, avec $\varphi^{-1}(0) = Y$, et telle que $\varphi|_{Z_j}$ soit sans éclatement en codimension 0. C'est toujours le cas si $\mathrm{codim}_M Y = 1$ par exemple. On va donner une autre construction du cycle i^*Z quand Y est en bonne position par rapport à Z.

Pour cela, on choisit une décomposition locale $M = Y \times N$, $N = \mathbb{C}^p$ et $Y = Y \times \{0\} \subset Y \times N$, et on pose $E = T_0N$, $E^\vee = T_0^*N$. Soit $\mathcal{C}(Z,N)$ défini comme au § 2.4, et $\mathcal{C}(Z,N,Y)$ le cône normal de $\mathcal{C}(Z,N) \cap (T^*Y \times T_0^*N)$ dans $\mathcal{C}(Z,N)$. On a $\mathcal{C}(Z,N,Y) \subset T^*Y \times E \times E^\vee$.

(5.5.2) <u>Lemme</u> : Soit $\mathcal{C}_j$ une composante de $\mathcal{C}(Z,N,Y)$, et Y_j son image dans Y. Alors $\mathcal{C}_j$ est contenue dans $T^*_{Y_j}Y \times I_E$, si $I_E \subset E \times E^\vee$ est la variété d'incidence.

On laisse la preuve au lecteur. □

Ce lemme permet de remplacer dans le théorème (5.2) et la définition (5.3) le cône $\mathcal{C}(Sp_Y Z,Y)$ par $\mathcal{C}(Z,N,Y)$. On peut de même définir un cycle i^bZ, et il faut montrer que $E\check{u}_{i^bZ} = E\check{u}_Z$.

On montre comme en (5.4.3) qu'on a

$$E\check{u}_{i^bZ}(x) = \deg(c({}_Y\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_Y\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.c({}_E\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}[\ \bar{\mathcal{C}}(Z,N,Y,x\ ]$$

La démonstration consiste maintenant à définir $\mathcal{C}(Z,N,x,Y)$ (voir A.2) et à montrer que

$$E\check{u}_{i^bZ}(x) = \deg(c({}_{Y\times E}\mathcal{O}(1))^{-1}.c({}_Y\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.c({}_E\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}\ [\ \bar{\mathcal{C}}(Z,N,x)\ ])$$

Pour cela on utilise (A.2.1) et (A.3.2). Encore avec (A.2.1) on a

$$\mathcal{C}(Z,N,x) = \mathcal{C}(Z,x,N)$$

et (A.3.2) montre que

$$E\check{u}_{i^*b_Z}(x) = \deg(c(_{Y \times E}\mathcal{O}(1))^{-1}.c(_{Y \times E}\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.[\ \overline{\mathcal{C}}(Z,x)\ ] = E\check{u}_Z(x). \quad \square$$

(5.5.3) On suppose maintenant que Y est non caractéristique par rapport à Z. Cela signifie que $T^*_Y M \cap T^*_Z M \subset T^*_M M$. Autrement dit, toute limite d'espace tangent à Z en un point x de $Z \cap Y$ est transverse à $T_x Y$ dans $T_x M$. On en déduit que la projection $\pi : T^*_Z M|_Y \to T^*Y$ est bien définie, et est un morphisme fini. De plus, si on écrit localement $Y = Y \times \{0\} \hookrightarrow M = Y \times N$ et si $f = q|_Z : Z \to N$ est la restriction à Z de la projection $q : Y \times N \to N$, on voit que f est sans éclatement en codimension 0.

(5.5.4) <u>Proposition</u> : Sous cette hypothèse, le cycle $T^*_Z M|_Y$ est de dimension pure dim Y. De plus on a $[T^*_{i^*Z} Y] = \pi_*[T^*_Z M|_Y]$.

<u>Preuve</u> : Puisque, au voisinage de $Z \cap Y$, on a $Y \times T^*N \cap T^*_Z(Y \times N) \subset T^*_{Y \times N} Y \times N$, on déduit de la remarque suivant le lemme (2.4.2) que $\mathcal{C}(Z,N) = T^*_f Y$, et $\mathcal{C}(Z,N,Y)$ est le cône normal de $T^*_f Y|_{Y \times \{0\}}$ dans $T^*_f Y$. D'autre part, on a une application naturelle bien définie au voisinage de Y,

$$\varpi : T^*_Z M \longrightarrow T^*_f Y$$

induisant π en restriction à $Y \times \{0\}$. De plus, ϖ est finie et biméromorphe. On en déduit que $\pi_*[T^*_Z M|_Y] = [T^*_f Y|_{Y \times \{0\}}]$.

D'autre part, le calcul fait en (5.5.1) montre qu'ici

$$[T^*_{i^*Z} Y] = T^*_f Y.(T^*Y \times \{0\})$$

dans $T^*Y \times N$, autrement dit

$$[T^*_{i^*Z} Y] = [T^*_f Y|_{Y \times \{0\}}]. \quad \square$$

(5.6) <u>Preuve de la proposition (2.4.4)</u>

On reprend les notations du § 2. Soit $y \in N$, $Y = M \times \{y\}$, et $i : Y \hookrightarrow M \times N$ l'inclusion. On montre comme en (5.4.3) que

$$E\check{u}_{f_\# Z}(y) = \deg(c(V^M).c(_N\mathcal{O}(1))^{-1}.c(_N\check{\mathcal{O}}(-1))^{-1}.[\ \overline{\mathcal{C}}(Z,N,Y)\ ]).$$

Si Z est en bonne position par rapport à Y, (2.5) résulte de la construction faite en (5.5).

Dans le cas général, il suffit de montrer que $[\bar{\mathcal{C}}(Z,N,Y)] = [\bar{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,Y)]$ dans $\mathbb{P}(T^*Y \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(T_Y N \oplus \mathbb{1}) \times \mathbb{P}(T^*_Y N \oplus \mathbb{1})$.

On remarque que $\mathcal{C}(Z,N,Y)$ est égal au cône normal de $\mathcal{C}(Z,N,Y) \cap (Y \times T^*_Y N)$ dans $\mathcal{C}(Z,N,Y)$, et en utilisant (A.2.1) on voit que $[\bar{\mathcal{C}}(Z,N,Y)] = [\bar{\mathcal{C}}(Z,N,Y^*)]$, où $\mathcal{C}(Z,N,Y^*)$ est le cône normal de $\mathcal{C}(Z,N) \cap (Y \times T^*_Y N)$ dans $\mathcal{C}(Z,N)$. On a aussi $[\bar{\mathcal{C}}(Z,N,Y^*)] = [\bar{\mathcal{C}}(Z,Y^*,N)] \underset{\text{def}}{=} [\bar{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,N)]$.

On voit de même que $\mathcal{C}(Sp_Y Z,N)$ est conique sur $T^*Y \times N$, et donc

$$[\bar{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,N)] = [\bar{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,N,Y)] = [\bar{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,Y,N)] = [\bar{\mathcal{C}}(Sp_Y Z,Y)]. \quad \square$$

APPENDICE

(A.1) Dans [F.M$_1$] W. Fulton et R. MacPherson ont développé une théorie de l'intersection en géométrie algébrique (voir aussi [F$_1$], [F$_2$], [F.M$_2$]). Dans le cours du texte nous avons repris leur démarche en remplaçant la multiplicité par l'obstruction d'Euler locale. Nous nous proposons de montrer ici le résultat principal qui nous a servi, à savoir la manière commutative de calculer différentes classes de cônes normaux.

Considérons la situation suivante :

Soit $\varphi : X \to \mathbb{C}^2$ un morphisme analytique surjectif. On suppose X équidimensionnel, et que les fibres de φ, sauf éventuellement $\varphi^{-1}(0)$, ont toutes la même dimension $\dim X - 2$. On suppose de plus qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathbb{C}^2 & \end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée, M est lisse et équidimensionnel, et ψ est lisse. Soit C_1 et C_2 deux germes de courbes irréductibles dans $(\mathbb{C}^2,0)$. On note X_1 (resp X_2) le transformé strict de X par le morphisme de normalisation $n_1 : \bar{C}_1 \to C_1$ (resp. $n_2 : \bar{C}_2 \to C_2$), et D_1 (resp. D_2) les fibres de X_1 (resp.X_2) au-dessus de l'origine. D_1 et D_2 sont deux sous-espaces analytiques fermés de $\varphi^{-1}(0)$, qui peuvent être distincts si φ n'est pas plat.

On a cependant

(A.1.1) <u>Théorème</u> : Sous les hypothèses précédentes les classes fondamentales $[D_1]$ et $[D_2]$ sont égales dans $H_{2(\dim X-2)}(|\varphi^{-1}(0)|,\mathbb{Z})$.

On peut donner deux démonstrations de ce résultat (voir aussi $[F_2]$) :
1) Pour la première, on se restreint au voisinage d'un compact de $\varphi^{-1}(0)$. On peut trouver, d'après [H.L.T] une suite finie d'éclatements ponctuels au-dessus de $(\mathbb{C}^2,0)$ dont le composé est noté $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$, de sorte que le transformé strict $\tilde{\varphi}$ de φ par π soit plat. Il existe deux points a_1 et a_2 de $\pi^{-1}(0)$ tels que $D_1 = \tilde{\varphi}^{-1}(a_1)$ et $D_2 = \tilde{\varphi}^{-1}(a_2)$. Comme $\pi^{-1}(0)$ est connexe et que $\tilde{\varphi}$ est plat, on en déduit le théorème.

<u>Remarque</u> : Cette démonstration explicite une déformation analytique de D_1 sur D_2.

2) Il résulte de $[V_1]$, prop. 3.5.1, que le morphisme φ admet une classe fondamentale relative dans le groupe d'homologie bivariante

$$H_{2(\dim X-2)}(X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^2) \underset{\text{def}}{=} H_X^{2c}(M,\mathbb{Z})$$

avec $c = \operatorname{codim}_M X$ (voir aussi $[F.M_2]$).

On a les morphismes de restriction suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & H_{2(\dim X-2)}(X_1 \to \overline{C}_1) \arrow[dr, "\theta_1"] & \\
H_{2(\dim X-2)}(X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^2) \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & & H_{2(\dim X-2)}(|\varphi^{-1}(0)|) \\
 & H_{2(\dim X-2)}(X_2 \to \overline{C}_2) \arrow[ur, "\theta_2"'] &
\end{tikzcd}$$

et le diagramme ci-dessus est commutatif.

On a d'autre part :

$$\rho_i([X \longrightarrow \mathbb{C}^2]) = [X_i \longrightarrow \overline{C}_i]$$

$$\theta_i([X_i \to \overline{C}_i]) = [D_i] \qquad (i = 1,2) .$$

Par suite $[D_1] = \rho([X \longrightarrow \mathbb{C}^2]) = [D_2]$. □

(A.2) Cônes normaux itérés

On considère deux sous-variétés fermées Y et Z d'une variété M, et on suppose qu'on est dans un des cas suivants :

$$Y \subset Z , \qquad Z \subset Y, \qquad Y \pitchfork Z.$$

Soit X un sous-espace analytique fermé de M.

Soit $C_{Y \cap X}X \to Y \cap X$ le cône normal de $Y \cap X$ dans X. La projection est induite par la projection naturelle $N_Y M \to Y$. On notera $D_Y = C_{Y \cap X}X$.

- Si $Y \subset Z$, on note $D_{Y,Z}$ le cône normal de $N_Y Z \cap C_{Y \cap X}X$ dans $C_{Y \cap X}X$
- Si $Y \not\subset Z$, on note $D_{Y,Z}$ le cône normal de $N_Y M|Z \cap C_{Y \cap X}X$ dans $C_{Y \cap X}X$.

On définit de même $D_{Z,Y}$.

On voit que si $Y \subset Z$, $D_{Y,Z}$ est contenu dans le fibré normal de $N_Y Z$ dans $N_Y M$, c'est à dire $N_Y Z \oplus (N_Z M)|_Y$, et si $Y \not\subset Z$, $D_{Y,Z}$ est contenu dans le fibré normal de $N_Y M|_{Y \cap Z}$ dans $N_Y M$, c'est à dire $N_Y M|_{Y \cap Z} \oplus N_{Y \cap Z}Y$. Si l'intersection est transverse, ce dernier fibré n'est autre que $N_{Y \cap Z}M$. Enfin, $D_{Y,Z}$ est bihomogène par rapport à cette décomposition. On notera $\overline{\overline{D}}_{Y,Z}$ son adhérence biprojective.

(A.2.1) Corollaire : On a l'égalité suivante dans $H_*(N,\mathbb{Z})$: $[D_{Y,Z}] = [D_{Z,Y}]$ où on a posé $N = N_{Y \cap Z}M$ si $Y \pitchfork Z$

$N = N_Y Z \oplus (N_Z M)|_Y$ si $Y \subset Z$

$N = N_Z Y \oplus (N_Y M)|_Z$ si $Z \subset Y$.

Preuve : On construit une double déformation sur le cône normal associée à Y et Z (cf[F.M_i][V_3]) et on applique (A.1.1) au morphisme de déformation.

(A.3) Associativité de l'intersection

On reprend la situation précédente dans le cas suivant :

$$Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow M \hookleftarrow X .$$

On a vu que $\bar{\bar{D}}_{Y,Z}$ est contenu dans $\mathbb{P}(N_Y M|_Z \oplus \mathbb{1}) \times_Z \mathbb{P}(N_Z Y \oplus \mathbb{1})$, ainsi que $\bar{\bar{D}}_{Z,Y}$. On note ${}_Y\mathcal{O}(1)$ (resp. ${}_Z\mathcal{O}(1)$, resp. ${}_{Z,Y}\mathcal{O}(1)$) le fibré canonique sur $\mathbb{P}(N_Y M \oplus \mathbb{1})$ (resp. $\mathbb{P}(N_Z M \oplus \mathbb{1})$, resp. $\mathbb{P}(N_Z Y \oplus \mathbb{1})$). On voit que ${}_{Z,Y}\mathcal{O}(1)$ est la restriction de ${}_Z\mathcal{O}(1)$ par l'inclusion $\mathbb{P}(N_Z Y \oplus \mathbb{1}) \hookrightarrow \mathbb{P}(N_Z M \oplus \mathbb{1})$.

(A.3.1) Théorème : On a l'égalité suivante dans $H_*(|Z \cap X|, \mathbb{Z})$:

$$e_*(c(N_Z Y).c({}_Z\mathcal{O}(-1))^{-1}.c(N_Y M).c({}_Y\mathcal{O}(-1))^{-1}.[\bar{\bar{D}}_{Y,Z}])$$

$$= e_{Z_*}(c(N_Z M).c({}_Z\mathcal{O}(-1))^{-1}.[\bar{D}_Z]) ,$$

où e désigne la projection $\bar{\bar{D}}_{Y,Z} \to Z \cap X$, etc...

Remarque : Dans le groupe $H_{2(\dim X - \operatorname{codim} Z)}(|Z \cap X|)$, le deuxième terme représente l'intersection X.Z, et le premier l'intersection de X.Y avec Z (voir [FM_1], [F_2]).

Preuve : D'après le théorème (A.3.1) on peut remplacer à la première ligne de classe $[\bar{\bar{D}}_{Y,Z}]$ par la classe $[\bar{\bar{D}}_{Z,Y}]$. On est alors amené à considérer la situation suivante :

Soit une suite exacte de fibrés vectoriels sur un espace analytique T :

$$0 \to E \to H \xrightarrow{p} F \to 0 ,$$

et soit Σ un cône dans H, $\bar{\Sigma}$ son adhérence dans $\mathbb{P}(H \oplus \mathbb{1})$. Soit $C_E\Sigma$ le cône normal de $E \cap \Sigma$ dans Σ . Puisque $N_E H = E \oplus F$, on a $C_E\Sigma \subset E \oplus F$, et ce cône est bihomogène par rapport à cette décomposition. Soit $\overline{\overline{C_E\Sigma}}$ son adhérence dans $\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1}) \times_T \mathbb{P}(F \oplus \mathbb{1})$ et $\overline{C_E\Sigma}$ son adhérence dans $\mathbb{P}(E \oplus F \oplus \mathbb{1})$.

Soit $\pi : \mathbb{P}(H \oplus \mathbb{1}) \to T$ et $\varpi : \mathbb{P}(E \oplus \mathbb{1}) \times_T \mathbb{P}(F \oplus \mathbb{1}) \to T$ les projections. Etant donné un fibré vectoriel $\lambda : L \to T$, on note V_L le fibré $\lambda^* L/\mathcal{O}(-1)$ sur $\mathbb{P}(L)$, et $L \oplus \mathbb{1}$ la somme avec le fibré trivial de rang 1.

(A.3.2) <u>Lemme</u> : On a l'égalité suivante dans $H_*(T,\mathbb{Z})$:

$$\pi_*(c(V_H \oplus \mathbb{1}).[\bar{\Sigma}] = \varpi_*(c(V_E \oplus \mathbb{1}).c(V_F \oplus \mathbb{1}).[\overline{\overline{C_E\Sigma}}]).$$

<u>Preuve</u> : On montre que $\pi_*(c(V_H \oplus \mathbb{1})\ [\Sigma]\ ) = \varpi_*(c(V_E \oplus F \oplus \mathbb{1}).[\overline{C_E\Sigma}])$ en utilisant la déformation sur le cône normal. La preuve du lemme utilise alors le résultat suivant (voir [F.M$_1$] prop. 3.1) :

(A.3.3) <u>Lemme</u> : Soit $E \to T$ un fibré vectoriel et $\pi : \mathbb{P}(E) \to T$ le fibré projectif associé. On a l'égalité suivante dans $H_*(T,\mathbb{Z})$:

$$\pi_*(c(V_E).[\mathbb{P}(E)]) = [T]\ . \quad \square$$

Le théorème (A.3.1) se déduit du lemme (A.3.2) en considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_Z Y \longrightarrow N_Z M \longrightarrow N_Y M|_Z \longrightarrow 0\ .$$

On prend $\Sigma = D_Z \subset N_Z M$ et $C_E\Sigma = D_{Z,Y}$. $\square$

(A.4) On reprend les notations de (4.4). ON va montrer :

(A.4.1) <u>Lemme</u> : Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ la déformation de M sur le cône normal $N_Y M$ et pour $Z \subset M$, soit $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ la déformation de Z sur le cône normal de $Y \cap Z$ dans Z.Alors le morphisme composé

$$T^*_{\varphi|_{\mathcal{Z}}} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

s'identifie au morphisme de déformation de $T^*_Z M$ sur le cône normal de $T^*_Y M \cap T^*_Z M$ dans $T^*_Z M$.

Preuve : Soit $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus N_Y M$. On a un isomorphisme naturel

$$\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow[p]{} M \times \mathbb{C}^*$$

Ilsuffit alors de vérifier que l'inverse de l'application cotangente relative

$$T^*_\varphi \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{q} T^* M \times \mathbb{C}^*$$

est la déformation de T^*M sur le fibré normal de $T^*_Y M$ dans T^*M. On le vérifie localement sur M: On choisit des coordonnées locales (y,n) sur M et des coordonnées locales (y,x,t) sur $\mathcal{M}$ avec p(y,x,t)= (y,tx,t) et (y,x,t)=t. Si (y,x,t,η,ξ) sont les coordonnées cotangentes relatives sur $T^*_\varphi \tilde{\mathcal{M}}$, on vérifie que q est donnée par $q(y,x,t,\eta,\xi) = (y,tx,t,t\eta,\xi)$.

BIBLIOGRAPHIE

[B] J. L. Brylinski : (Co)homologie d'intersection et faisceaux pervers. Séminaire Bourbaki, 1981-1982, n° 585.

[B.D.K.] J. L. Brylinski, A. Dubson, M. Kashiwara : Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale. Note aux C.R.A.S. t.293 (30/11/81) p. 573-576.

[Br] J. P. Brasselet : Classes de Chern en théorie bivariante. A paraître dans conférence sur la topologie et l'analyse sur les espaces singuliers. Luminy 1981. Astérisque.

[D] P. Deligne : Exposé XIV, S.G.A. 7. II. Springer Lecture Notes n°340.

[Du] A. Dubson : Calcul des invariants numériques des singularités et applications. Preprint, Bonn 1981.

[F_1] W. Fulton : Rational equivalence on singular varieties. Publ. Math. I.H.E.S. n° 45 (1975), 147-167.

[F_2] W. Fulton : Intersection theory. Preprint.

[$F.M_1$] W. Fulton, R. Mac Pherson : Intersecting cycles on an algebraic variety. Real and complex singularities, Oslo 1976. Sijthoff and Noordhoff (1978) 179-197.

[$F.M_2$] W. Fulton, R. Mac Pherson : Bivariant theory. Memoirs of the A.M.S.

[G.V.] G. Gonzalez, J. L. Verdier : L'obstruction locale d'Euler et le théorème de Mac Pherson. Astérisque n° 82-83, 1981.

[H.M.] J. P. Henry, M. Merle : Limites de normales, conditions de Whitney, et éclatement d'Hironaka. Proc. of the A.M.S., Conf. on Singularities, Arcata 1981.

[H.M.S.] J. P. Henry, M. Merle, C. Sabbah : Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique. A paraître Annales de l'E.N.S.

[H] H. Hironaka : Stratifications and flatness. Real and complex analysis, Oslo 1976.

[H.L.T.] H. Hironaka, M. Lejeune, B. Teissier : Aplatissement local. Singularités à Cargèse. Astérisque n° 7/8 (1973).

[K] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems. Inv. Math. 49, 1978, p.121-135.

[K.S.] M. Kashiwara et P. Schapira : Microlocal study of sheaves I. Prépublication Univ. Paris-Nord.

[La] G. Laumon : $\mathcal{D}$-modules filtrés. Thèse. Orsay 1983.

[L] Lê D.T. : Limites d'espaces tangents sur les surfaces. Nova acta Leopoldina NF 52, n° 240 (1980).

[L.M.] Lê D.T. et Z. Mebkhout : Variétés caractéristiques et variétés polaires Note aux C.R.A.S., t. 296 (17 janvier 1983) p.129-132.

[$L.T_1$] Lê D.T. et B. Teissier : Variétés polaires et classes de Chern des variétés singulières. Ann. of Math. (1981).

[$L.T_2$] Lê D.T. et B. Teissier : Sur la géométrie des surfaces complexes I. Tangentes exceptionnelles. Amer. J. of Math. (1980).

[M] R. Mac Pherson : Chern classes for singular varieties. Ann. of Math. (1974).

[N] V. Navarro : Conditions de Whitney et sections planes. Inv. Math. 61, 3 (1980).

[R] C. Ramanujam : Geometric interpretation of multiplicity. Inv. Math. 22 (1973).

[S] C. Sabbah : Quelques remarques sur la théorie des classes de Chern des variétés singulières. Prepublication Ecole Polytechnique (Janvier 1983).

[T] B. Teissier : Variétés polaires II. Actes de la conférence de La Rabida. Springer Lecture Notes n° 961.

[V_1] J. L. Verdier : Classes d'homologie d'un cycle. Astérisque n° 36-37

[V_2] J. L. Verdier : Spécialisation des classes de Chern. Astérisque n°82-83 (1981).

[V_3] J. L. Verdier : Spécialisation des faisceaux et monodromie modérée. Conférence Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Astérisque n° 101-102.

[Me] Z. Mebkhout : Une autre équivalence de catégories. A paraître dans Compositio Math.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
(France)