Astérisque

B. ANGÉNIOL
M. LEJEUNE-JALABERT

Le théorème de Riemann-Roch singulier pour les $\mathcal{D}$-modules

Astérisque, tome 130 (1985), p. 130-160
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__130_0>

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH SINGULIER POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES

par B. ANGÉNIOL et M. LEJEUNE-JALABERT

TABLE DES MATIÈRES

0 – INTRODUCTION

Dans cet article, on étudie diverses variantes du théorème de Riemann-Roch (cas lisses et singuliers, en géométrie algébrique ou analytique) ; seul le cas analytique singulier est nouveau. Puis, utilisant un théorème de Quillen qui donne une correspondance de Riemann-Hilbert en K-théorie, on en déduit diverses variantes d'un théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$-modules, qui implique notamment la formule d'indice global pour les modules holonomes, ou certaines formules du type d'Atiyah-Singer.

Dans le paragraphe 1, on étudie les isomorphismes entre les groupes de Grothendieck des $\mathcal{D}_X$-modules admettant une bonne filtration, des $\mathcal{O}_{T^*X}$-modules, et des $\mathcal{O}_X$-modules.

Dans le paragraphe 2, on rappelle le théorème de Riemann-Roch lisse et on en déduit un théorème pour les $\mathcal{D}_X$-modules ; on explicite ce théorème dans divers cas particuliers.

Dans le paragraphe 3, on montre comment utilisant les $\mathcal{D}$-modules à support dans une variété singulière on peut déduire du théorème de Riemann-Roch singulier pour les $\mathcal{O}$-modules, un théorème de Riemann-Roch singulier pour les $\mathcal{D}$-modules.

Dans le paragraphe 4, on montre le théorème de Riemann-Roch pour les espaces analytiques singuliers immersibles dans une variété analytique, à valeur en (co)homologie de Hodge.

Enfin, on dresse au paragraphe 5 une liste de certains des trous béants que nous n'avons pu combler et qui ont constitué quelques une des principales motivations de ce travail.

Nous tenons à remercier G. Laumon, B. Malgrange, Z. Mebkhout, C. Sabbah et J.L. Verdier avec lesquels nous avons eu de fructueuses conversations sur le sujet.

I – LA CORRESPONDANCE DE DE RHAM EN K-THÉORIE.

1.1. - LES ISOMORPHISMES DE QUILLEN.

Soit X une variété que l'on supposera soit algébrique lisse sur un corps K de caractéristique 0, soit analytique compacte sur $\mathbb{C}$. On note $n = \dim X$ sa dimension. Soit π la projection $T^*X \to X$ du fibré cotangent et soit $\sigma : X \to T^*X$ sa section nulle.

Dans la suite $K_i(\mathcal{D}_X)$ désignera le $i^{\text{ème}}$ K-groupe de Quillen de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche cohérents munis d'une bonne filtration (ce qui est automatique si X est algébrique). $K_i(\mathcal{O}_X)$ (resp. $K_i(\mathcal{O}_{T^*X})$ désignera le $i^{\text{ème}}$ K-groupe de Quillen de la catégorie des $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_{T^*X}$)-modules cohérents ([QUI]). Lorsque $i = 0$, il s'agit du groupe de Grothendieck de ces catégories, et on le notera parfois K au lieu de K_0.

THÉORÈME (QUILLEN). - <u>Les monomorphismes</u> $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{D}_X$ <u>et</u> $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi(\mathcal{O}_{T^*X})$ <u>induisent des isomorphismes</u> :

$$K_i(\mathcal{O}_X) \simeq K_i(\mathcal{D}_X) \simeq K_i(\mathcal{O}_{T^*X})$$

Cela résulte de ([QUI] §6 Th.7 et §7 Prop. 4.1).

Nous n'utiliserons ce théorème que dans le cas $i = 0$. C'est pourquoi nous allons donner une démonstration directe de ce cas, démonstration esquissée par Malgrange dans [M], et qui a l'avantage d'expliciter les isomorphismes.

1.2. - LA CORRESPONDANCE DE DE RHAM POUR LES GROUPES DE GROTHENDIECK.

1.2.1. Nous considérerons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, shift left, "\delta"] \arrow[dr, "gr"'] & & K(\mathcal{O}_X) \arrow[ll, shift left, "\rho"] \\ & K(\mathcal{O}_{T^*X}) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

où α, ρ, δ, gr sont les flèches déterminées par

$\alpha(\mathcal{L}) = \sigma^! \mathcal{L}[n] = \mathbb{L}\sigma^*\mathcal{L} \otimes \omega_X$

$\rho(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{\vee}$ (où $\mathcal{E}^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$)

$\delta = \alpha \circ \mathrm{gr}$

$\mathrm{gr}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}$ où $\mathcal{M}_i$ est une bonne filtration de $\mathcal{M}$) .

Le fait que gr détermine une flèche bien définie $K(\mathcal{D}_X) \to K(\mathcal{O}_{T^*X})$ a été vérifié par Laumon ([LAU] (6.1.3.1)).

On a alors la

1.2.2. PROPOSITION.

1) <u>Si</u> $\mathcal{M}$ <u>est un</u> $\mathcal{D}_X$<u>-module à gauche admettant une bonne filtration</u>, <u>l'image par</u> δ <u>de la classe de</u> $\mathcal{M}$ <u>dans</u> $K(\mathcal{D}_X)$ <u>est égale à la classe dans</u> $K(\mathcal{O}_X)$ <u>du complexe de de Rham de</u> $\mathcal{M}$ (cf(1.2.6)), <u>i.e.</u> : $\delta(\mathcal{M}) = DR(\mathcal{M})$.

2) <u>On a les relations</u>

$$\delta\rho = 1_{K(\mathcal{O}_X)} \quad , \quad \rho\delta = 1_{K(\mathcal{D}_X)} \ .$$

1.2.3. <u>Rappels</u> : ($\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module muni d'une bonne filtration $\mathcal{M}_i$) .

1.2.3.1. <u>Le complexe de de Rham</u> $DR(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est le complexe $\mathcal{M} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \to \dots \to \Omega^n_X \otimes \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est en degré $-n$, $\Omega^n_X \otimes \mathcal{M}$ en degré 0 et où la différentielle est donnée par la formule

$$d(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_{i=1}^{n} (dx_i \wedge \omega) \otimes \frac{\partial m}{\partial x_i}$$

(où les x_i forment un système de coordonnées locales) . Le complexe de de Rham est filtré par les sous-complexes $F^k(DR\,\mathcal{M})$

$$F^k(DR\,\mathcal{M}) = \mathcal{M}_{-k} \to \Omega^1_X \otimes \mathcal{M}_{-k+1} \to \dots \to \Omega^n_X \otimes \mathcal{M}_{-k+n} \ .$$

1.2.3.2. <u>La première suite de Spencer de</u> $\mathcal{M}$ <u>de degré</u> k est le complexe $Sp^k(\mathcal{M})$.

$$0 \to \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^n T_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_{k-n} \to \mathcal{D}_X \otimes \Lambda^{n-1} T_X \otimes \mathcal{M}_{k-n+1} \to \dots$$
$$\to \mathcal{D}_X \otimes T_X \otimes \mathcal{M}_{k-1} \to \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{M}_k$$

où la différentielle $\delta : \mathcal{D}_X \otimes \Lambda^p T_X \otimes \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{D}_X \otimes \Lambda^{p-1} T_X \otimes \mathcal{M}_{j+1}$ est

$$\delta\left(P \otimes (\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_p) \otimes m\right) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \Big[P\xi_i \otimes (\xi_1 \wedge \ldots \hat{\xi}_i \wedge \ldots \wedge \xi_p) \otimes m$$
$$- P \otimes (\xi_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \ldots \wedge \xi_p) \otimes \xi_i m\Big] + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} P \otimes ([\xi_i, \xi_j] \wedge \xi_1 \ldots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}_j \wedge \ldots \xi_p) \otimes m \ .$$

1.2.4. LEMME. Soit k_0 un entier tel que si $k \geq k_0$, on ait $\mathcal{D}_i \mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+i}$, $\forall i > 0$. Alors, pour tout $k \geq k_0$, on a :

1°) $F^{-k}(DR\,\mathcal{M}) \longrightarrow F^{-(k+1)}(DR\,\mathcal{M})$ est un quasi-isomorphisme.

2°) $Sp^{k+n}(\mathcal{M}) \longrightarrow Sp^{k+n+1}(\mathcal{M})$ est un quasi-isomorphisme.

(Ces résultats sont bien connus ; on peut les montrer en appliquant [LAU] 3.3.9) aux cônes des deux morphismes considérés, ce qui ramène le problème dans les deux cas à l'exactitude d'un complexe de Koszul. Le premier cas est traité dans [LAU] (5.2.3) et (6.4)).

1.2.5. COROLLAIRE. Soit k_0 un entier tel que si $k \geq k_0$, on ait $\mathcal{D}_i \mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+i}$, $\forall i > 0$. Alors, pour tout $k \geq k_0$, on a :

1°) $F^{-k}(DR\,\mathcal{M})$ est quasi-isomorphe à $DR(\mathcal{M})$.

2°) $Sp^{k+n}(\mathcal{M})$ muni de l'augmentation $\varepsilon_k : \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \mathcal{M}$ est une résolution de $\mathcal{M}$.

(Ce corollaire peut soit se déduire du lemme (1.2.4) soit se montrer directement en appliquant encore ([LAU] 3.3.9).

1.2.6. Remarque. $F^{-k}(DR\,\mathcal{M})$ est un complexe borné dont les termes sont des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents ; le corollaire (1.2.5) donne donc un sens à l'expression "la classe dans $K(\mathcal{O}_X)$ du complexe de de Rham de $\mathcal{M}$".

1.2.7. Démonstration de la proposition (1.2.2).

1) Nous notons $\overline{\mathcal{M}}$ la classe d'un module $\mathcal{M}$ dans le groupe de Grothendieck. On a :

$$\delta(\overline{\mathcal{M}}) = \alpha(\overline{gr(\mathcal{M})}) = \sigma^! \, \overline{gr\,\mathcal{M}[n]}$$
$$= \overline{\pi_* \sigma_* \sigma^! \, gr\,\mathcal{M}[n]}$$

$$= \overline{\pi_* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\sigma_* \mathcal{O}_X, \mathrm{gr}\,\mathcal{M}[n])}$$

$$= \overline{R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\pi_*\mathrm{gr}\,\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X, \mathrm{gr}\,\mathcal{M})[n]}$$

$$= \overline{\mathrm{gr}\,\mathrm{DR}(\mathcal{M})}$$

$$= \sum_{k \leq k_0} \overline{\mathrm{gr}^k \mathcal{M}} \quad \text{d'après 1.2.4.}$$

$$= \overline{F^{-k_0}\mathrm{DR}\,\mathcal{M}}$$

$$= \overline{\mathrm{DR}\,\mathcal{M}} \quad \text{d'après 1.2.5.}$$

2) On a :

$$\delta\rho(\bar{\mathcal{E}}) = \delta(\overline{\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{E} \otimes \omega_X^{\vee}}) = \mathrm{DR}(\overline{\mathcal{D} \otimes \mathcal{E} \otimes \omega_X^{\vee}}) = \omega_X \otimes \mathcal{E} \otimes \omega_X^{\vee} = \mathcal{E}$$

et

$$\rho\delta(\overline{\mathcal{M}}) = \rho(\overline{\mathrm{DR}(\mathcal{M})}) = \rho(\overline{F^{-k_0}\mathrm{DR}(\mathcal{M})})$$

$$= \overline{\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_{k+1} \otimes \Omega_X^1 \longrightarrow \dots \otimes \mathcal{M}_{k+n} \otimes \Omega_X^n) \otimes \omega_X^{\vee}}$$

$$= \overline{\mathrm{Sp}^{k+n}(\mathcal{M})} = \overline{\mathcal{M}}\,. \blacksquare$$

2 - LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH LISSE.

Commençons par rappeler l'énoncé du théorème de Riemann-Roch lisse que nous allons utiliser.

2.1. - LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH LISSE POUR LES $\mathcal{O}_X$-MODULES.

On se placera dans l'une des situations suivantes :

I) X et Y sont deux schémas intègres, de type fini et lisses sur un corps k de caractéristique zéro.

II) X et Y sont deux variétés analytiques irréductibles sur $\mathbb{C}$.

On notera $A^{\cdot}(X)$ l'un des trois anneaux :

a) $A^{\cdot}(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} H^i(X, \Omega_X^i)$ (Hodge)

b) $A^{\cdot}(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} H^{2i}(X, \Omega^{\cdot}_X)$ $(= \oplus H^{2i}(X,\mathbb{C})$ dans le cas II... de Rham)

c) $A^{\cdot}(X)$ est l'anneau de Chow de X (tensorisé par $\mathbb{Q}$) et de même pour $A(Y)$. (Chow)

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, et soit $f : X \to Y$ un morphisme dont la restriction au support de $\mathcal{M}$ est propre.

Pour $\mathcal{E}$ module cohérent sur X (resp. Y), on note $c(\mathcal{E}) = \sum c_i(\mathcal{E})$ le polynôme de Chern de $\mathcal{E}$ à valeurs dans $A^{\cdot}(X)$ (resp. $A^{\cdot}(Y)$) et si on note a_i les racines formelles de ce polynôme $(c(\mathcal{E}) = \prod_i (1+a_i))$, on note $ch(\mathcal{E})$ le caractère de Chern de $\mathcal{E}$, $ch\, \mathcal{E} = \sum_i e^{a_i}$ et $\mathrm{Todd}(\mathcal{E})$ sa classe de Todd , $\mathrm{Todd}\, \mathcal{E} = \prod_i \frac{a_i}{1-e^{-a_i}}$.

On note T_X et T_Y les fibrés tangents à X et Y . On a alors le :

THÉORÈME. <u>On suppose que l'on est dans une situation</u> I a), I b), I c) , II a) . <u>On a alors la relation</u> :

$$f_*(ch(\mathcal{M}) \cdot \mathrm{Todd}(T_X)) = ch\Big(\sum_{i \geq 0} (-1)^i R^i f_* \mathcal{M}\Big) \cdot \mathrm{Todd}(T_Y) .$$

Les cas I a) (resp. I b)) se déduisent du cas I c) par fonctorialité pour la flèche qui à un cycle associe sa classe en cohomologie de Hodge (resp. de de Rham)

Le cas I c) a été montré dans [B.S.] lorsque X et Y sont des variétés quasi-projectives et que f est un morphisme projectif. Le cas général a été montré dans [F-G] où il est déduit du théorème de Riemann-Roch singulier ([B-F-MP-VER]).

Le cas II a) a été montré dans [A-L.J.] . Le cas où Y est un point a été également montré dans [O-T-T_1] ; le cas général annoncé dans [O-T-T_2] .

Les cas II b) et II c) semblent être toujours ouverts. ∎

2.2. - LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES.

2.2.1. Images directes de $\mathcal{D}$-modules.

On se place dans l'une des situations I ou II de (2.1). On suppose que $f : X \to Y$ est un morphisme propre sur le support d'un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent $\mathcal{M}$ muni d'une bonne filtration globale $(\mathcal{M}_i)$. On note l'image directe de $\mathcal{M}$ $\int_f \mathcal{M} = Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$ qui est un élément de la catégorie dérivée $D^b_{qch}(\mathcal{D}_Y)$ des complexes de $\mathcal{D}_Y$-modules à cohomologie quasi cohérente. On a alors la

2.2.1.1. PROPOSITION. <u>$\int_f \mathcal{M}$ est un complexe de $\mathcal{D}_Y$-module à cohomologie cohérente.</u>

Lorsque f est projectif, c'est un théorème de Kashiwara ([KAS]). Nous indiquons ici brièvement une démonstration due à Malgrange.

2.2.1.2. LEMME. <u>Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, avec $f|_{\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}}$ propre on a</u>

$$\int_f (\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\omega}_X) = \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} Rf_*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \check{\omega}_Y .$$

Notons d'abord que la proposition (2.2.1.1) résulte immédiatement du lemme (2.2.1.2) puisque d'après (1.2.5, 2°) $\mathcal{M}$ admet une résolution par des $\mathcal{D}_X$-modules de la forme $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\omega}_X$ et que par (2.2.1.2) et le théorème de cohérence des images directes pour les $\mathcal{O}_X$-modules, l'image directe $\int_f (\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{E} \otimes \check{\omega}_X)$ est $\mathcal{D}_Y$ cohérente. ∎

Pour montrer le lemme (2.2.1.2), factorisant f, $X \to X \times Y \to Y$, on se ramène aux cas d'une immersion régulière et d'une projection lisse. Dans le premier cas, la propriété à montrer étant locale, on peut choisir des coordonnées locales de sorte que l'idéal de X dans Y soit engendré par $(f_1, \dots, f_p)$. On a alors $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = \mathcal{D}_Y / \sum_{i=1}^{p} \mathcal{D}_Y f_i = f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \check{\omega}_Y) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \omega_X$; d'où le résultat. Dans le second cas, on a $\int_f \mathcal{M} = Rf_* DR_{X/Y}(\mathcal{M}) \simeq Rf_*(\omega_{X/Y} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$ car $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \simeq \omega_{X/Y}$ et le résultat découle de l'isomorphisme $\omega_{X/Y} \simeq \omega_X \otimes f^* \check{\omega}_Y$. ∎

Notons que l'on a encore le

2.2.1.3. COROLLAIRE. On a : $DR(\int_f \mathcal{M}) = Rf_*(DR(\mathcal{M}))$.

Notons que d'après (1.2.5, 2°), il suffit de le montrer pour des faisceaux de la forme $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{\vee}$, et que d'après (1.2.7) on a $DR(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \otimes \omega_X^{\vee}) = \mathcal{E}$. Le corollaire résulte alors du lemme (2.2.1.2). ∎

2.2.2. <u>La classe τ d'un $\mathcal{D}$-module</u>.

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, on pose $T(\mathcal{E}) = ch(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{Todd}(T_X)$. On a vu en (2.1) que T définissait un morphisme $K(\mathcal{O}_X) \to A^{\cdot}(X)$. Par composition avec l'isomorphisme $\delta : K(\mathcal{D}_X) \to K(\mathcal{O}_X)$ de (1.2) , on obtient donc un morphisme $\tau : K(\mathcal{D}_X) \to A^{\cdot}(X)$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module muni d'une bonne filtration $(\mathcal{M}_i)$, il est facile de calculer explicitement la classe $\tau(\mathcal{M})$. D'après (1.2.2) et (1.2.5), on a en effet si $k>>0$:

$$\tau(\mathcal{M}) = T(\delta(\mathcal{M})) = ch(DR(\mathcal{M})) \cdot \mathrm{Todd}(T_X)$$

$$= ch(F^{-k} DR\,\mathcal{M})\ \mathrm{Todd}(T_X) ,$$

soit

$$(2.2.2.1)\quad \tau(\mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} ch(\mathcal{M}_{k+i})\, ch(\overset{i}{\Lambda}\, T^*X)\ \mathrm{Todd}(T_X) .$$

En particulier, on a :

$$\tau(\mathcal{D}) = ch(DR(\mathcal{D}))\ \mathrm{Todd}(T_X) = ch(\omega_X)\ \mathrm{Todd}(T_X) ,$$

soit

$$\tau(\mathcal{D}) = \mathrm{Todd}(T^*X)$$

d'après la relation $\prod \frac{-a_i}{1-e^{a_i}} \cdot e^{\Sigma a_i} = \prod \frac{a_i}{1-e^{-a_i}}$.

D'après (1.2.5, 2°)), cela permet d'écrire encore si $k \gg 0$

$$(2.2.2.2)\quad \tau(\mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} ch(\mathcal{M}_{k+i})\, ch(\overset{n-i}{\Lambda}\, T_X)\ \ \mathrm{Todd}(T_X^*) .$$

2.2.3. <u>Le théorème.</u>

D'après (2.2.1.1), $\int_f$ définit un morphisme $f_* : K(\mathcal{D}_X) \to K(\mathcal{D}_Y)$ qui, d'après (2.2.1.3) rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{f_*} & K(\mathcal{D}_Y) \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ K(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow[Rf_*]{} & K(\mathcal{O}_Y) \end{array} .$$

Puisque d'après le théorème de Riemann-Roch (2.1), on a encore un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{Rf_*} & K(\mathcal{O}_Y) \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ A^{\cdot}(X) & \xrightarrow[f_*]{} & A^{\cdot}(Y) \end{array}$$

on en déduit le

THÉORÈME. <u>On suppose que l'on est dans une des situations</u> I a), I b), I c), II a). <u>On a alors un diagramme commutatif</u> :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{f_*} & K(\mathcal{D}_Y) \\ {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ A^{\cdot}(X) & \xrightarrow[f_*]{} & A^{\cdot}(Y) \end{array}$$

i.e. $\tau(\int_f \mathcal{M}) = f_* \tau(\mathcal{M})$.

2.3. - <u>EXEMPLES ET APPLICATIONS</u>.

2.3.1. Le théorème contient bien sûr le théorème de Riemann-Roch classique car d'après (1.2.2), on a $T = T\delta\rho = \tau \cdot \rho$, de sorte qu'en appliquant le théorème précédent aux $\mathcal{D}$-modules de la forme $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{F}$ où $\mathfrak{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, on retrouve le théorème (2.1). Ce cas correspond aux $\mathcal{D}_X$-modules dont la variété caractéristique à la dimension maximum (2n) .

2.3.2. Considérons maintenant le cas des $\mathcal{D}_X$-modules holonômes, ceux dont la variété caractéristique a la dimension minimum (n). Soit $f : X \to \mathbb{C}$ (ou k) le morphisme structural et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On a alors (2.2.2)

$$\begin{aligned}\tau(\mathcal{M}) &= ch(\sigma^* gr\, \mathcal{M})\, Todd(T^*X) \\ &= \sigma^*[ch(gr\,\mathcal{M})\, Todd\, \pi^*(T^*X)] \\ &= \pi_* \sigma_* \sigma^*[ch(gr\,\mathcal{M})\, \pi^*(Todd\, T^*X)] \\ &= \pi_*[ch(gr\,\mathcal{M})\, \pi^* Todd\, T^*X \,.\, T^*_X X]\end{aligned}$$

où $T^*_X X$ est la section nulle de T^*X. Si l'on note $car\,\mathcal{M}$ le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$, on a : $ch(gr\,\mathcal{M}) = car\,\mathcal{M} + \ldots$ termes de degré $> n$.

On en déduit

$$f_*\tau(\mathcal{M}) = [car\,\mathcal{M} \cdot T^*_X X] \;.$$

Puisque l'on a $\tau(\int_f \mathcal{M}) = \chi(R\Gamma(X, DR(\mathcal{M}))) = ind(\mathcal{M})$, on obtient dans ce cas la formule de l'indice globale

$$\chi(X, R\Gamma(DR(\mathcal{M}))) = [car\,\mathcal{M} \cdot T^*_X X]$$

due à Dubson ([B-D-K]).

2.3.3. Considérons maintenant un cas intermédiaire. Soit X une variété analytique complexe compacte. Soit $\mathfrak{m}$ un complexe borné de $\mathcal{D}_X$-modules, avec de bonnes filtrations, dont nous supposerons qu'il possède la propriété suivante : pour tout point x de X, il existe $\epsilon > 0$, tel que si $0 < r < \epsilon$, la sphère $S(x,r)$ de centre x et de rayon r soit non caractéristique pour $\mathfrak{m}$ (i.e. $T^*_{S(x,r)} X \cap SS(\mathfrak{m}) \subset (0)$, où l'on a identifié l'espace conormal en x à la variété réelle sous jacente à X, $T^*_x X_{\mathbb{R}}$, à l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sous jacent à $T^*_x X$ comme en ([KAS 2] chap.4, §1). Il résulte alors de [KAS 2] (4.2.1) et (4.2.12) que $R\Gamma(X, DR\mathfrak{m})$ est un complexe à cohomologie de dimension finie. Le théorème permet alors de calculer l'indice de ce complexe. On a, si f est le morphisme structural de X dans $\mathbb{C}$

$$ind\,\mathfrak{m} = \chi(R\Gamma(X, DR(\mathfrak{m})) = \chi(\textstyle\int_f \mathfrak{m}) = \tau(\int_f \mathfrak{m})$$

et

$$\begin{aligned}f_*\tau(\mathfrak{m}) &= f_*[\sigma^* ch(gr\,\mathfrak{m}) \cdot Todd(T^*X)] \\ &= deg[\sigma^* ch(gr\,\mathfrak{m}) \cdot Todd\, T^*X]_n \;;\end{aligned}$$

d'où la formule :

$$\mathrm{ind}(\mathfrak{m}) = \deg[\sigma^* \mathrm{ch}(\mathrm{gr}\,\mathfrak{m}) . \mathrm{Todd}\, T^*X]_n .$$

Cette formule est à rapprocher du théorème d'Atiyah-Singer ([A-S 1, 2]) lorsque $\mathfrak{m}$ est elliptique, et surtout de la forme de ce théorème donnée par Boutet de Monvel et B. Malgrange ([B-M]).

3 - LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH SINGULIER.

3.1. - LOCALISATION SUR UNE SOUS-VARIÉTÉ LISSE.

Soit $i : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée régulière d'une variété lisse Z dans une variété lisse X, et soit $\mathfrak{m}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent muni d'une bonne filtration. On veut comparer ici la classe τ de $\mathfrak{m}$ et celle de $\mathbb{L}i^*\mathfrak{m}$.

Notons d'abord qu'en général $\mathbb{L}i^*\mathfrak{m}$ n'est pas un $\mathcal{D}_Z$-module cohérent. C'est néanmoins le cas si par exemple l'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée :

α) Z est non caractéristique pour $\mathfrak{m}(T^*_Z X \cap \mathrm{car}\,\mathfrak{m} \subset T^*_X X)$;

β) $\mathfrak{m}$ est holonome ;

γ) $\mathfrak{m}$ est à support dans Z.

C'est ici le cas γ) qui nous intéresse ; nous ne rappelons les résultats dans les cas α) et β) que pour mémoire.

α) Dans ce cas, on a $\mathbb{L}i^*\mathfrak{m} = i^*\mathfrak{m}$ et si l'on note les flèches $I : T^*X \times_X Z \to T^*Z$ et $\bar{I} : T^*X \times_X Z \to T^*X$, l'hypothèse signifie que $I/\mathrm{Supp}\,\bar{I}^*\mathrm{gr}\,\mathfrak{m}$ est propre, et l'on a : $\mathrm{gr}(i^*\mathfrak{m}) = I_* \bar{I}^*\mathrm{gr}\,\mathfrak{m}$ ([S.K.K]). On en déduit alors $\tau(i^*\mathfrak{m}) = i^*\tau(\mathfrak{m})\,\mathrm{Todd}\,(T^*_Z X)^{-1}$.

β) Si $\mathfrak{m}$ est holonome, il résulte alors de [KAS 3] que $\mathbb{L}i^*\mathfrak{m}$ est aussi holonome. De plus, on a alors $\tau(\mathfrak{m}) = \mathrm{car}\,\mathfrak{m}$ (resp. $\tau(\mathbb{L}i^*\mathfrak{m}) = \mathrm{car}(\mathbb{L}i^*\mathfrak{m})$) où $\mathrm{car}\,\mathfrak{m}$ désigne la classe fondamentale du cycle caractéristique de $\mathfrak{m}$. Pour la fonctorialité du cycle caractéristique, rappelons que dans [MP] , Mac Pherson a défini l'obstruction d'Euler $Eu_x(W)$, où W est une sous-variété de X et x un point de x . Il a alors défini un isomorphisme $Z(X) \xrightarrow{T} F(X) \simeq Z(X)$ où $Z(X)$ est le groupe des cycles sur X , $F(X)$ est le groupe des fonctions constructibles sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, où l'isomorphisme $F(X) \simeq Z(X)$ est $\Sigma n_i 1_{W_i} \longmapsto \Sigma n_i W_i$, et où T est défini par $T(\Sigma n_i W_i) = (x \longmapsto \Sigma n_i Eu_x(W_i))$. Il résulte alors de [K-B-D] (voir aussi [SAB] §4) que si $i : Z \to X$ est un morphisme quelconque, $\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome, si $\mathfrak{n}$ est un $\mathcal{D}_Z$-module holonome, on a :

$$\operatorname{car}(\textstyle\int_i \mathfrak{n}) = T_X i_* T_Z^{-1} \operatorname{car} \mathfrak{n}$$

$$\operatorname{car}(\mathbb{L} i^* \mathfrak{m}) = T_Z^{-1} i^* T_X \operatorname{car} \mathfrak{m} .$$

On a donc

$$\tau(\mathbb{L} i^* \mathfrak{m}) = T_Z^{-1} i^* T_X \tau(\mathfrak{m}) .$$

Par exemple, si i est l'immersion d'un point x dans X , on a

$$\operatorname{car}(\mathbb{L} i^* \mathfrak{m}) = Eu_x(\operatorname{car} \mathfrak{m}) \cdot x .$$

On déduit également que si $T^{-1}(1_W) = \Sigma \ell_i Z_i$, où W est une sous-variété de X , on a : $\Sigma \ell_i T^*_{Z_i} X = \operatorname{car}(R\Gamma_W(\mathcal{O}_X))$.

γ) Supposons désormais que $\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à support dans Z muni d'une bonne filtration $\mathfrak{m}_i$. On note p la codimension de Z dans X . On a alors :

$\mathbb{L}_k i^* \mathfrak{m} = 0$ si $k \neq p$ et $\mathbb{L}_p i^* \mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}_Z$-module cohérent qui est tel que l'on ait :

$$\textstyle\int_i \mathbb{L}_p i^* \mathfrak{m} = \mathfrak{m} .$$

Comme si η est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, on a aussi : $\mathbb{L}_p i^* \int_i \eta = \eta$, cela définit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents à support dans Z et les $\mathcal{D}_Z$-modules cohérents. Nous allons maintenant traduire pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents à support dans Z , le théorème de Riemann-Roch (2.2) énoncé pour les $\mathcal{D}_Z$-modules cohérents.

Suivant que l'on se place sous les hypothèses 2.1 a), b) ou c), nous désignerons par $A_Z(X)$ l'un des trois $A(X)$-modules :

a) $A_Z(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} H^i_Z(X, \Omega^i_X)$.

b) $A_Z(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} H_Z^{2i}(X,\mathbb{C})$.

c) $A_Z(X)$ est l'anneau des cycles à support dans Z , pris modulo équivalence rationnelle, tensorisé par $\mathbb{Q}$.

On a alors un isomorphisme K de $A(Z)$ dans $A_Z(X)$, et si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent à support dans Z, on peut définir $ch_X^Z(\mathcal{E}) \in A_Z(X)$ (cf. e.g. ([B-F-MP] , I 1°) ; nous y reviendrons lorsque Z admet des singularités) (lorsque $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_Z$-module cohérent, on a par exemple $ch_X^Z(\mathcal{E}) = (\mathrm{Todd}\,\mathcal{N}_{Z/X})^{-1} \cap ch_Z(\mathcal{E})$).

On peut alors poser, copiant (2.2.2.2)

$$\tau_X^Z(\mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} ch_X^Z(\mathcal{M}_{k+i}) ch(\Lambda^{n-i} T_X) \ \ \mathrm{Todd}(T^*X) .$$

On a alors

(3.1.1) $K(\tau_Z(\mathbb{L}i^*\mathfrak{m})) = \tau_X^Z(\mathfrak{m}))$ ([B-F-MP] I (2.6)) .

On peut donc réécrire le théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}_X$-modules à support dans Z .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

où Z , V , X , Y sont des variétés lisses, i et j des immersions régulières, g est un morphisme propre sur le support d'un $\mathcal{D}_X$-module $\mathfrak{m}$ à support contenu dans Z .

On suppose que l'on est dans une des hypothèses I a), b), c) ou II a) . On a alors le

3.1.2. THÉORÈME. <u>On a</u> : $f_*(\tau_X^Z(\mathfrak{m})) = \tau_Y^V(\int_f \mathfrak{m})$.

Notons d'abord que $\int_f \mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module à support dans V , donc que le second membre est un élément $A_V(Y)$; f_* est le morphisme $A_Z^{\cdot}(X) \longrightarrow A_V^{\cdot}(Y)$.

D'après (2.2), on a :

$$g_*\,\tau_Z(\mathbb{L}i^*\mathfrak{m}) = \tau_V(\int_g \mathbb{L}i^*\mathfrak{m}) .$$

Or, on a :

$$\int_g \mathbb{L}i^*m = \mathbb{L}j^* \int_j \int_g \mathbb{L}i^*m = \mathbb{L}j^* \int_f \int_i \mathbb{L}i^*m = \mathbb{L}j^* \int_f m .$$

On en déduit : $g_* \tau_Z(\mathbb{L}i^*m) = \tau_V(\mathbb{L}_j^* \int_f m)$ d'où le théorème d'après (3.1.1). ■

3.2. - LOCALISATION SUR UNE VARIÉTÉ SINGULIÈRE.

3.2.1. Soit Z une variété algébrique singulière plongée dans une variété algébrique lisse irréductible X (resp. un sous-espace analytique d'une variété analytique irréductible X) . Alors, la notion de $\mathcal{D}_Z$-module n'a plus de sens, mais celle de $\mathcal{D}_X$-module à support dans Z en a encore un. Le théorème de Riemann-Roch que nous allons montrer aura donc une forme analogue à (3.1.2) dans le cas lisse.

Nous gardons les notations de (3.1) pour $A_Z(X)$ dans les cas a) , b) , c).

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent à support dans Z , on peut définir un caractère de Chern $ch_X^Z(\mathcal{E}) \in A_Z(X)$ par l'une des trois méthodes suivantes :

(3.2.2) • Difference bundle (cas II.a), b), c)). Si $E_r \xrightarrow{d_r} \dots \xrightarrow{d_1} E_0$ est une résolution de $\mathcal{E}$, on pose $F_i = \operatorname{Ker} d_i$, on choisit des isomorphismes sur $X-Z$ $E_i \simeq F_i \oplus F_{i-1}$. On en déduit un isomorphisme σ sur $X-Z$:

$$E_{ev} = \sum_k E_{2k} \simeq \sum_i F_i \simeq \sum_k E_{2k+1} = E_{odd} .$$

Si F est un fibré sur X tel que $E_{odd} \oplus F = \varepsilon$ soit un fibré trivial sur X , $E_{ev} \oplus F \xrightarrow{\sigma \oplus 1_F} \varepsilon$ est une trivialisation sur $X-Z$, et on pose $ch_X^Z(\mathcal{E}) = ch_Z(E_{ev} \oplus F - \varepsilon)$ ([B-F-MP] chapitre I, n°1).

(3.2.3) • Le graphe de la grassmannienne (I a),b),c)). Avec les notations de (3.2.2) on note $G_i = \operatorname{Grass}_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$ où e_i est le rang de E_i , ξ_i le fibré tautologique sur G_i , $G = G_1 \times \dots \times G_r$, $\xi = \xi_0 - \xi_1 + \xi_2 - \dots + (-1)^r \xi_r$, π le morphisme $G \to X$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, si x est un point de X , soit $s_\lambda(x)$, le produit des graphes des applications λd_i au-dessus du point x ; on a donc une immersion

$$X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow G \times \mathbb{P}^1 \ , \quad (x,\lambda) \longmapsto (S_\lambda(x), \frac{1}{\lambda}) \ .$$

Soit C_∞ "la limite à l'infini" de $X \times \mathbb{A}^1$ dans $G \times \mathbb{P}^1$ pour cette immersion. On a alors $C_\infty = C + \bar{X}$ où $\bar{X}$ est une variété irréductible isomorphe à X en dehors de Z , et telle que $\pi(C) \subset Z$. On pose alors

$$\mathrm{ch}_Z^X(\mathcal{E}) = \pi_*(\mathrm{ch}\,\xi \cap C) \quad \text{(cf. B-F-MP chapitre II, n°1)} \ .$$

(3.2.4) • Classes d'Atiyah (cas I a) ou II a). Avec les notations de (3.2.2), on a défini dans ([A-LJ] (2.1.2.3)) des classes d'Atiyah $\lambda_{\mathcal{E}}^p$. $\lambda_{\mathcal{E}}^i \in \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes\Omega_X^i)$, et en (loc. cit.) (2.2.3) une trace : $\mathrm{Tr}.\ \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes\Omega_X^i) \longrightarrow H_Z^i(X, \Omega_X^i)$. On pose alors $\mathrm{ch}_Z^X(\mathcal{E}) = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}\,\mathrm{Tr}\,(\lambda_{\mathcal{E}}^i)$.

Le fait que cette définition coïncide avec les précédentes provient des propriétés de fonctorialité des classes d'Atiyah (cf. (loc.cit. (2.4) ; (2.4.4.2)).

(3.2.5) On peut alors définir la classe τ d'un $\mathcal{D}$-module à support comme dans le cas lisse.

Soit donc $\mathfrak{m}$ un $\mathcal{D}_X$-module à support dans Z muni d'une bonne filtration $\mathfrak{m}_i$. On pose alors :

$$\tau_Z^X(\mathfrak{m}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\, \mathrm{ch}_Z^X(\mathfrak{m}_{k+i})\,\mathrm{ch}(\Lambda^{n-i}\,T_X) \quad \mathrm{Todd}\,(T^*X) \quad \text{pour} \quad k \gg 0 \ .$$

(3.2.6) Suivant ([B-F-MP] chap.I, n°6), on peut poser si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent à support dans Z : $T_Z^X(\mathcal{E}) = \mathrm{ch}_Z^X(\mathcal{E}) \cap \mathrm{Todd}(T_X)$.

Si $\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à support dans Z , muni d'une bonne filtration $\mathfrak{m}_i$, le même raisonnement qu'en (2.2.2) montre alors que l'on a $\tau_Z^X(\mathfrak{m}) = T_Z^X(\mathrm{DR}\,\mathfrak{m})$ (où, comme en (1.2.6), on pose $T_Z^X(\mathrm{DR}\mathfrak{m}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i\, T_Z^X(F^{-k}(\mathrm{DR}\mathfrak{m})_i)$, pour $k \geq k_0$) .

3.3. - LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH SINGULIER POUR LES $\mathcal{O}$-MODULES.

Nous gardons les notations de (2.1). Nous supposons que l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où Z et V sont des sous-schémas de X et Y lisses (resp. des sous-espaces analytiques dans la situation II) admettant éventuellement des singularités. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module à support contenu dans Z ; on suppose que la restriction de g au support de $\mathcal{E}$ est un morphisme propre.

On a alors le

THÉORÈME. On suppose que l'on est dans une des situations I a), I b), I c) ou II a). On a alors la relation :

$$f_*(T_Z^X(\mathcal{E})) = T_V^Y(Rf_* \mathcal{E}) .$$

(ici f_* désigne le morphisme $A_Z^{\bullet}(X) \longrightarrow A_V^{\bullet}(Y)$, et $T_V^Y(Rf_* \mathcal{E}) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i T_V^Y(R^i f_* \mathcal{E})$).

Les cas I a) et I b) se déduisent du cas I c) comme dans le cas lisse par fonctorialité, en associant à un cycle sa classe fondamentale en cohomologie à support dans Z (ou V) de Hodge ou de de Rham. Le cas I c) a été montré dans [B-F-MP] lorsque X et Y sont des variétés projectives. Le cas général en a été déduit dans [F-G].

Nous donnerons les grandes lignes d'une démonstration valable dans le cas II a) (et aussi I a) au paragraphe 4. Les ingrédients essentiels sont déjà contenus dans [A-LJ]. ∎

3.4. - LE THÉORÈME POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES.

On se place dans la situation de 3.3. On se donne un $\mathcal{D}_X$-module m à support dans Z, muni d'une bonne filtration m_i ; on suppose g propre sur le support de m. On a alors le

THÉORÈME. On suppose que l'on est dans une des situations I a), I b), I c), II a). On a alors

$$f_*(\tau_X^Z(m)) = \tau_Y^V(\textstyle\int_f m) .$$

Cela résulte immédiatement de (3.3), de (3.2.6) et de (2.2.1.3). ■

Remarque. Si g est propre, notant $K_Z(\mathcal{D}_X)$ le groupe de Grothendieck des $\mathcal{D}_X$-modules à support dans Z, on peut réénoncer le théorème en disant que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_Z(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{\int_f} & K_V(\mathcal{D}_Y) \\ \big\downarrow \tau_X^Z & & \big\downarrow \tau_Y^V \\ A_Z^{\cdot}(X) & \xrightarrow{f_*} & A_V^{\cdot}(Y) \end{array} .$$

4 – LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH DANS LE CAS ANALYTIQUE SINGULIER.

Nous allons donner les grandes lignes d'une démonstration du théorème (3.3) dans le cas II a).

4.1. - CLASSES D'ATIYAH.

4.1.1. DÉFINITION. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, rappelons que la première classe d'Atiyah $\lambda^1_{\mathcal{E}}$ est l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes\Omega^1_X)$ correspondant à la suite exacte des parties principales :

$(4.1.1.1)_{\mathcal{E}}$ $$0 \longrightarrow \mathcal{E}\otimes\Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_X(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0 ,$$

où $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{E}) = p_{1*}\, p_2^*\mathcal{E}$, p_1 et p_2 étant les deux projections de $X \times X \to X$.

La $j^{\text{ème}}$ classe d'Atiyah $\lambda^j_{\mathcal{E}}$ est l'élément de $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes \Lambda^j T^*_X)$ obtenu par j-compositions de $\lambda^1_{\mathcal{E}}$ avec elle-même.

Nous noterons Tr_Z la trace $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes\Omega^j_X) \longrightarrow H^j_Z(X, \Omega^j_X)$ (où Z contient le support de $\mathcal{E}$) ; rappelons que l'on a

$$\mathrm{ch}^Z_X(\mathcal{E}) = \mathrm{Tr}_Z\Big(\sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j \mathcal{E}}{j\,!}\Big) .$$

Pour toutes les propriétés des classes d'Atiyah (fonctorialité, calcul d'un cocycle les représentant,...), nous renvoyons à [A-L.J]. Nous nous contentons ici de donner les propriétés ayant un rapport avec les $\mathcal{D}$-modules.

4.1.2. Cas des $\mathcal{D}$-modules admettant une bonne filtration.

(4.1.2.1) Notons d'abord que $\lambda^1_{\mathcal{E}}$ est nulle si et seulement si la suite $(4.1.1.1)_{\mathcal{E}}$ est scindée, c'est-à-dire si $\mathcal{E}$ est munie d'une connexion (non nécessairement intégrable). En particulier, si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}$-module, on a $\lambda^1_{\mathcal{M}} = 0$, donc $\lambda^j_{\mathcal{M}} = 0$ pour $j > 0$; si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent sur $\mathcal{O}_X$, donc localement libre de rang fini sur $\mathcal{O}_X$, on a donc $\operatorname{ch} \mathcal{M} = \operatorname{rg} \mathcal{M}$.

(4.1.2.2) La suite duale de $(4.1.1.1)_{\mathcal{E}^\vee}$, s'écrit : (si $\mathcal{E}^\vee = \underline{\mathrm{R\,Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{O}_X)$)

$$(4.1.2.2)_{\mathcal{E}} \qquad 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{D}_1 \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{E} \to \mathcal{E}\otimes T_X \to 0$$

et correspond donc, après tensorisation par Ω^1_X, à la classe $-\lambda^1_{\mathcal{E}}$ (où $\mathcal{D}_1$ désigne les opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1) .

(4.1.2.3) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module muni d'une bonne filtration $\mathcal{M}_i$. On vérifie alors immédiatement que la classe $-\lambda^1_{\mathcal{M}_i}$ est le composé des applications

$$\mathcal{M}_i \xrightarrow{\tau_i} \mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{d_i} (\mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i) \otimes \Omega^1_X \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{M}_i\otimes\Omega^1_X[1] \ ,$$

où τ_i est la flèche canonique, d_i la différentielle du complexe $\operatorname{gr} DR(\mathcal{M})$ (qui est $\mathcal{O}_X$-linéaire), et α_i est l'élément de $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i , \mathcal{M}_i)$ correspondant à la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_{i+1} \to \mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i \to 0 \ , \text{ tensorisé avec } \mathrm{id}_{\Omega^1_X} \ .$$

On vérifie de même que la classe correspondant à $-\lambda^1_{\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}}$ est égale au morphisme composé

$$\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{d_i} (\mathcal{M}_{i+1}/\mathcal{M}_i)\otimes\Omega^1_X \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{M}_i\otimes\Omega^1_X[1] \xrightarrow{\tau_i} (\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1})\otimes\Omega^1_X[1]$$

moins le morphisme composé

$$\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{i-1} \mathcal{M}_{i-1}[1] \xrightarrow{\tau_{i-1}} (\mathcal{M}_{i-1}/\mathcal{M}_{i-2})[1] \xrightarrow{d_{i-1}} (\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1})\otimes\Omega^1_X[1] \ .$$

Si on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_i \otimes \Omega^1_X) \arrow[r, "-\circ\tau_i"] \arrow[dr, "\tau_i \circ -"'] & \mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i \otimes \Omega^1_X) \\
 & \mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1} \otimes \Omega^1_X) \\
\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_{i-1}, (\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}) \otimes \Omega^1_X) \arrow[ur, "-\circ\alpha_{i-1}"'] \arrow[dr, "\alpha_{i-1}\circ -"'] & \\
 & \mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_{i-1} \otimes \Omega^1_X) \ .
\end{tikzcd}$$

On a donc la

(4.1.2.4) PROPOSITION. <u>Il existe deux classes</u> $\lambda_1 \in \mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_i \otimes \Omega^1_X)$ <u>et</u> $\lambda_2 \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1} \otimes \Omega^1_X)$ <u>telles que</u> :

1) <u>l'image de</u> λ_1 <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i \otimes \Omega^1_X)$ <u>soit</u> $\lambda^1_{\mathfrak{m}_i}$;

2) <u>l'image de</u> λ_2 <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_{i-1} \otimes \Omega^1_X)$ <u>soit</u> $\lambda^1_{\mathfrak{m}_{i-1}}$;

3) <u>la différence entre les images de</u> λ_1 <u>et</u> λ_2 <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1} \otimes \Omega^1_X)$ <u>soit</u> $\lambda^1_{\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}}$.

Il suffit de choisir $\lambda_1 = \alpha_i \circ d_i$ et $\lambda_2 = d_{i-1} \circ \tau_{i-1}$.

(4.1.2.5) COROLLAIRE.

(i) <u>Les images de</u> $\lambda^1_{\mathfrak{m}_i}$ <u>et</u> $\lambda^1_{\mathfrak{m}_{i-1}}$ <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_i \otimes \Omega^1_X)$ <u>sont nulles</u>.

(ii) <u>Notons</u> : $\lambda^1_{\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}}(k)$ <u>l'élément de</u> $\mathrm{Ext}^1((\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}) \otimes \Omega^k_X, (\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}) \otimes \Omega^{k+1}_X)$ <u>déduit de</u> $\lambda^1_{\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}}$; <u>alors on a la relation</u> :

$$\lambda^1_{\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_{i-1}}(k) \circ d_{i-1} + d_{i-1} \circ \lambda^1_{\mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_{i-2}}(k-1) = 0$$

<u>et on a donc un morphisme de complexes</u> :

$$\mathrm{gr}\, \mathrm{DR}(\mathfrak{m}) \to \mathrm{gr}\, \mathrm{DR}(\mathfrak{m})(1)[1] \ .$$

4.2. - <u>LA DÉMONSTRATION</u>.

4.2.1. <u>Réductions</u>.

Notons d'abord que si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & V \arrow[r, "g'"] \arrow[d, hook] & W \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "f'"'] & T
\end{tikzcd}$$

avec X, Y, T lisses, si le théorème est démontré pour f et f' , il l'est pour $f' \circ f$.

Etant donné le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & V \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} ,$$

on peut considérer le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "id"] \arrow[d, hook, "i"'] & Z \arrow[r, hook, "i\times g"] \arrow[d, "i\times f\circ i"] & X\times V \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "1_X\times j"'] & V \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, hook, "1_X\times f"'] & X\times Y \arrow[r] & X\times Y \arrow[r, "pr_2"'] & Y \end{tikzcd} .$$

On est donc ramené à montrer les trois propriétés :

A) Si on a $Z \underset{i}{\hookrightarrow} X \underset{f}{\hookrightarrow} Y$ avec X et Y lisses et f immersion régulière, on a :

$f_*(T^X_Z(\mathcal{E})) = T^Y_Z(f_*\mathcal{E})$.

B) Si on a $Z \underset{g}{\hookrightarrow} V \underset{j}{\hookrightarrow} Y$, avec Y lisse, on a :

$g_*(T^Y_Z(\mathcal{E})) = T^Y_V(\mathcal{E})$ où $g_* : H^\cdot_Z(\Omega^\cdot_Y) \longrightarrow H^\cdot_V(\Omega^\cdot_Y)$.

C) Si $Z = X\times V$ avec X lisse et $g = pr_2$, on a :

$pr_{2*}(T^{X\times Y}_{X\times V}(\mathcal{E})) = T^Y_V(pr_{2*}\mathcal{E})$.

4.2.2. La propriété B.

On se place sous les hypothèses B) ; on a alors $T^Y_Z(\mathcal{E}) = ch^Y_Z(\mathcal{E})\mathrm{Todd}(T_Y)$ et $T^Y_V(\mathcal{E}) = ch^Y_V(\mathcal{E})\mathrm{Todd}(T_Y)$ de sorte qu'il s'agit de vérifier la relation :

$$g_*(ch^Y_Z(\mathcal{E})) = ch^Y_V(\mathcal{E}) .$$

Or, on a :

$$ch^Y_Z(\mathcal{E}) = Tr_Z(\sum_{i\geq 0} \frac{\lambda^i_{\mathcal{E}}}{i!})$$

et
$$ch^Y_V(\mathcal{E}) = Tr_V(\sum_{i\geq 0} \frac{\lambda^i_{\mathcal{E}}}{i!}) .$$

L'égalité résulte alors de la relation (immédiate par définition) :

$$g_*\circ Tr_Z = Tr_V .$$

4.2.3. La propriété A.

La relation à démontrer s'écrit :

$$f_*(ch_Z^X(\mathcal{E}).\mathrm{Todd}(T_X)) = ch_Z^Y(f_*\mathcal{E})\mathrm{Todd}(T_Y)$$

soit, si N est le fibré normal de X dans Y :

$$f_*(ch_Z^X(\mathcal{E})\mathrm{Todd}(N)^{-1}) = ch_Z^Y(f_*\mathcal{E}) .$$

La démonstration de cette relation est classique (([B-F-MP] I.3.5) ([A-LJ] 2.4.7.4.2)). Nous en rappelons brièvement les grandes lignes :

(4.2.3.1) On se ramène d'abord au cas où Y est un fibré sur X et où f est la section nulle. En effet, si q est projection : $N \to X$, on dispose de morphismes de spécialisations :

$$\sigma : K_Z(Y) \longrightarrow K_Z(N) \quad \text{et}$$

$$\sigma : \underset{i}{\oplus} H_Z^i(Y, \Omega_Y^i) \longrightarrow \underset{i}{\oplus} H_Z^i(N, \Omega_N^i)$$

donnés par $\sigma = \mathbb{L}(f \circ q)^*$, et on déduit ([VER] 6.5) de la déformation au cône normal que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_Z(Y) & \xrightarrow{T_Z^Y} & \oplus H_Z^i(Y, r_Y^i) \\ \big\downarrow \sigma & & \big\downarrow \sigma \\ K_Z(N) & \xrightarrow{T_Z^N} & \oplus H_Z^i(N, r_N^i) \end{array}$$

et il suffit donc de montrer le théorème pour l'immersion $X \to N$.

(4.2.3.2) On suppose donc que Y est un fibré sur X et on note π la projection $Y \to Z$. On a donc :

$$f_*(ch_Z^X(\mathcal{E})\mathrm{Todd}(N)^{-1}) = f_*(f^* ch_Z^Y(\pi^*\mathcal{E})\mathrm{Todd}(N)^{-1})$$
$$= ch^Y_{\pi^*(Z)}(\pi^*\mathcal{E}) f_*(\mathrm{Todd}(N)^{-1}) .$$

Si l'on admet la formule, lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, on déduit :

$$f_*(ch^X_{\pi^*(Z)}(\mathcal{E})(\mathrm{Todd}\, N)^{-1}) = ch^Y_{\pi^*(Z)}(\pi^*\mathcal{E}) ch(f_*\mathcal{O}_X)$$
$$= ch_Z^Y(\pi^*\mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{O}_X) = ch_Z^Y(f_* f^*\pi^*\mathcal{E}) = ch_Z^Y(f_*\mathcal{E}) .$$

(4.2.3.3) Il reste à montrer la relation :

$$f_*((\mathrm{Todd}\, N)^{-1}) = ch(f_*\mathcal{O}_X) .$$

Cette relation est déjà montrée dans [B-S], car elle ne concerne que le théorème de Riemann-Roch dans le cas lisse (voir par exemple ([A-LJ] 2.4.7.4.2).

4.2.4. <u>La propriété C.</u>

(4.2.4.1) On est dans le cas d'une projection lisse.

$$\begin{tikzcd} X\times V \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & V \arrow[d, hook, "j"] \\ X\times Y \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$X \quad \pi$

où f et g sont les projections, j est une immersion fermée, où $i = 1_X \times j$, et où X et Y sont lisses. Il s'agit de montrer la relation :

$$f_*\left(\mathrm{ch}^{X\times Y}_{X\times V}(\mathcal{E})\,\mathrm{Todd}(\pi^* T_X)\right) = \mathrm{ch}^{Y}_{V}(Rf_*\,\mathcal{E}) .$$

On va suivre la démonstration de ([A - LJ] 2.4.7.4.3). On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "\Delta"] & X\times X\times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "h"] & X\times Y \arrow[d, "f"] \\ & X\times Y \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 sont les deux projections, et où Δ est l'immersion diagonale.

On va définir plusieurs morphismes.

(4.2.4.2) <u>Dualité pour</u> p_1 .

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{X\times Y}$-module à support dans $X\times V$. On a alors un morphisme $p_1^!$

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes\Omega^i_{X\times Y}) \xrightarrow[\sim]{p_1^!} \mathrm{Ext}^{n+i}(\Delta_*\mathcal{E}, p_1^*(\mathcal{E}\otimes\Omega^i_{X\times Y})\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y})$$

déduit par application de $R\Gamma$ de la suite d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} \underline{R\,Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) &\simeq \underline{R\,Hom}(p_{1*}\,\Delta_*\mathcal{E},\mathcal{F}) \\ &\simeq p_{1*}\,\underline{R\,Hom}(\Delta_*\mathcal{E}, p_1^!\mathcal{F}) \\ &= p_{1*}\,\underline{R\,Hom}(\Delta_*\mathcal{E}, p_1^*\mathcal{F}\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y}[n]) \end{aligned}$$

(où n est la dimension de X).

(4.2.4.3) <u>Isomorphisme de Kunneth.</u>

On va définir un morphisme h_* :

$$h_* \ : \ \mathrm{Ext}^{n+i}(\Delta_*\mathcal{E}\,,\, p_1^*(\mathcal{E}\otimes\Omega^i_{X\times Y})\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y})$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Ext}^i(Rf_*\,\mathcal{E}\,,\, Rf_*\,\mathcal{E}\otimes\Omega^i_Y) \ .$$

a) On a un morphisme :

$$p_1^*\mathcal{E} \to \Delta_*\Delta^* p_1^*\mathcal{E} \ = \ \Delta_*\mathcal{E}$$

et de même

$$p_2^*\mathcal{E} \to \Delta_*\mathcal{E} \ .$$

b) L'isomorphisme de Kunneth peut s'écrire :

$$Rh_*\,(p_1^*\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}p_2^*\mathcal{F}) \simeq Rf_*\,\mathcal{E}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Rf_*\mathcal{F} \quad :$$

on a donc des isomorphismes :

$$Rh_*\,\underline{R\,Hom}\,(\Delta_*\mathcal{E}\,,\, p_1^*\mathcal{F}\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y}[n])$$
$$\to \ Rh_*\,\underline{R\,Hom}(p_2^*\mathcal{E}\,,\, p_1^*\mathcal{F}\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y}[n])$$
$$\simeq \ Rh_*(p_1^*\mathcal{F}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}p_2^*\,\underline{R\,Hom}(\mathcal{E},\Omega^n_{X\times Y/Y}[n])$$
$$\simeq \ Rf_*\,\mathcal{F}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Rf_*\,\underline{R\,Hom}(\mathcal{E},f^!\mathcal{O}_Y)$$
$$\simeq \ Rf_*\,\mathcal{F}\otimes\underline{R\,Hom}(Rf_*\,\mathcal{E}\,,\,\mathcal{O}_Y)$$
$$\simeq \ \underline{R\,Hom}\,(Rf_*\,\mathcal{E}\,,\, Rf_*\,\mathcal{F}) \ .$$

h_* s'obtient en appliquant $R\Gamma$ à cette suite de morphismes, avec $\mathcal{F}\simeq\mathcal{E}\otimes\Omega^i_{X\times Y}$ et en composant avec le morphisme $f_*\,\Omega^i_{X\times Y}\to\Omega^i_Y$.

(4.2.4.4) Adjonction pour l'immersion diagonale.

On va définir un morphisme Δ^* :

$$\Delta^* \ : \ \bigoplus_i \mathrm{Ext}^{n+i}(\Delta_*\mathcal{E}\,,\, p_1^*(\mathcal{E}\otimes\Omega^i_{X\times Y})\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y})$$
$$\downarrow$$
$$\bigoplus_j \mathrm{Ext}^j(\mathcal{E}\,,\,\mathcal{E}\otimes\Omega^j_{X\times Y})$$

Δ^* s'obtient en appliquant $R\Gamma$ à la suite de morphismes suivants (à $\mathcal{F}=\mathcal{E}\otimes\Omega^i_{X\times Y}$) .

$$R\,\underline{Hom}(\Delta_*\mathcal{E}\,,\, p_1^*\mathcal{F}\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y}[n])$$
$$\to \ \underline{R\,Hom}(\Delta_*\mathcal{E}\,,\,\Delta_*\mathbb{L}\Delta^*(p_1^*\mathcal{F}\otimes p_2^*\Omega^n_{X\times Y/Y}[n]))$$
$$\simeq \ \Delta_*\,\underline{R\,Hom}(\mathbb{L}\Delta^*\Delta_*\mathcal{E}\,,\,\mathcal{F}\otimes\Omega^n_{X\times Y/Y}[n])$$
$$\simeq \ \Delta_*\,\underline{R\,Hom}(\bigoplus_j\mathcal{E}\otimes\Omega^j_{X\times Y/Y}[j]\,,\,\mathcal{F}\otimes\Omega^n_{X\times Y/Y}[n])$$

$$\simeq \bigoplus_j \Delta_* \underline{\mathrm{R\,Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}\otimes\Omega^{n-j}_{X\times Y/Y}[n-j]) \ .$$

(4.2.4.5) Traces.

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{X\times Y}$-module à support dans $X\times V$, $Rf_* \mathcal{E}$ est à support dans V et on a des traces :

$$\mathrm{Tr}^{X\times Y}_{X\times V} : \mathrm{Ext}^j(\mathcal{E}, \mathcal{E}\otimes\Omega^j_{X\times Y}) \longrightarrow H^j_{X\times V}(X\times Y, \Omega^j_{X\times Y})$$

et $$\mathrm{Tr}^Y_V : \mathrm{Ext}^i(Rf_* \mathcal{E}, Rf_* \mathcal{E}\otimes \Omega^i_Y) \longrightarrow H^i_V(Y, \Omega^i_Y) \ .$$

(4.2.4.6) On a enfin un morphisme :

$$f_* : H^{j+n}_{X\times V}(X\times Y, \Omega^{j+n}_{X\times Y}) \longrightarrow H^j_V(Y, \Omega^j_Y) \ .$$

(4.2.4.7) Relations.

LEMME. On a les identités :

1) $\Delta^* p_1^! \left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k_{\mathcal{E}}}{k!}\right) = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k_{\mathcal{E}}}{k!}\right) \mathrm{Todd}(T_{X\times Y/Y})$

2) $h_* p_1^! (\lambda^i_{\mathcal{E}}) = \lambda^i_{Rf_*\mathcal{E}}$

3) $f_* \mathrm{Tr}^{X\times Y}_{X\times V} \Delta^* = \mathrm{Tr}^Y_V h_*$.

((1) est le lemme (2.4.7.4.3.1) de [A-LJ]. Rappelons qu'un calcul local sur les classes d'Atiyah permet de déduire la relation 1) du théorème de Riemann pour l'immersion diagonale (ce qui introduit la classe de Todd).

2) est le lemme (2.4.7.3.8) de [A-LJ]. Rappelons qu'il suffit de vérifier que le morphisme $h_* \circ p_1^!$ s'obtient en fait par adjonction pour f .

3) résulte immédiatement des propriétés des traces développées dans [ILL] comptabilité aux images directes, à Kunneth), et des définitions données ci-dessus)).

(4.2.4.8) Démonstration de la propriété C.

On a :

$$\mathrm{ch}^Y_V(Rf_* \mathcal{E}) = \mathrm{Tr}^Y_V\left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k_{Rf_*\mathcal{E}}}{k!}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}^Y_V h_* p_1^! \left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k_{\mathcal{E}}}{k!}\right) \qquad \text{d'après (4.2.4.7.2)}$$

$$= f_* \mathrm{Tr}^{X\times Y}_{X\times V} \Delta^* p_1^! \left(\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k_{\mathcal{E}}}{k!}\right) \qquad \text{d'après (4.2.4.7.3)}$$

$$= f_* \operatorname{Tr}_{X\times V}^{X\times Y} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda_{\mathcal{E}}^k}{k!} \operatorname{Todd}(T_{X\times Y/Y}) \qquad \text{d'après } (4.2.4.7.1)$$

$$= f_* (\operatorname{ch}_{X\times V}^{X\times Y}(\mathcal{E}) \operatorname{Todd}(\pi^* T_X)) .$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

5 – PROBLÈMES ET QUESTIONS OUVERTES.

Plusieurs questions n'ont pu être résolues dans ce travail et constitueraient des améliorations notables aux résultats de cet article. Citons en trois.

5.1. - LES CAS II b) ET II c).

Il s'agit de montrer le théorème de Riemann-Roch (lisse et singulier) en géométrie analytique lorsque les classes de Chern considérées appartiennent à la cohomologie de De Rham ou à un anneau de Chow (à définir).

Les seules démonstrations du théorème de Riemann-Roch en géométrie analytique ([O-T-T1], [A-LJ]) utilisent la détermination locale des classes de Chern que l'on obtient grâce aux classes d'Atiyah. Il semble donc que dans le cas II c) (Chow), il faille faire appel à une idée nouvelle. Par contre, dans le cas II b), on peut espérer obtenir une détermination locale des classes de Chern en cohomologie de De Rham. Rappelons que l'on n'y parvient dans [A-LJ] que pour la classe $c_p(\mathcal{E})$ où p est la codimension de Z dans X (notations de 3.3).

Le théorème dans le cas II b) serait intéressant car il résulte de [HART] que (avec les notations de (3.3)), on a $H^{p+i}(X,\mathbb{C}) \simeq H_i(Z,\mathbb{C})$ est indépendant du plongement choisi. Le théorème (3.3) deviendrait un véritable théorème de Riemann-Roch intrinsèque, dans le cas singulier.

5.2. - LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES, A VALEURS DANS LA COHOMOLOGIE, A SUPPORT DANS LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE.

Il résulte du fait que le morphisme α du diagramme (1.2.1) est un isomorphisme, qu'il est équivalent de considérer le théorème de Riemann-Roch sur X comme en (2.2) ou le théorème de Riemann-Roch sur T^*X, comme le fait Laumon dans ([LAU] (6.3)). Si l'on note

$$\begin{tikzcd} T^*X & T^*Y \times_Y X \arrow[l, "F"'] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & T^*Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

le théorème s'énonce alors en disant que le diagramme suivant est commutatif : pour f morphisme propre.

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{D}_X) \arrow[rr, "\int_f"] \arrow[d, "T_{T^*X}\circ gr = \tau_X"'] & & K(\mathcal{D}_Y) \arrow[d, "T_{T^*Y}\circ gr = \tau_Y"] \\ A(T^*X)\otimes\mathbb{Q} \arrow[rr, "{\bar{f}_*[F^*(\cdot)\pi'^*(\mathrm{Todd}(f^*T^*Y)^{-1}\mathrm{Todd}(T^*X))]}"'] & & A(T^*(Y))\otimes\mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Mais, si $\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent muni d'une bonne filtration $\mathfrak{m}_i$, il a une variété caractéristique $\operatorname{car}\mathfrak{m}$, et on voudrait associer à $\mathfrak{m}$ une classe

$$\overline{\tau_X}(\mathfrak{m}) \in A_{\operatorname{car}\mathfrak{m}}(T^*X)\otimes\mathbb{Q} \quad ,$$

de manière à avoir encore une relation

$$\overline{\tau_Y}\left(\int_f \mathfrak{m}\right) = \bar{f}_*(F^*(\overline{\tau_X}\mathfrak{m}).\pi'^*(\mathrm{Todd}(f^*T^*Y)^{-1}\mathrm{Todd}(T^*X))) \ .$$

Une telle formule pourrait entraîner plusieurs théorèmes connus :

- lorsque $\mathfrak{m}$ est un module holonome, le théorème de l'indice local de [B-D-K], utilisant la formule pour l'obstruction d'Euler de [SAB] (cf. (3.1) β)) ;

- lorsque $\mathfrak{m} = \mathcal{D}_X/\xi\mathcal{D}_X$, où ξ est un sous-faisceau intégrable et plein ([B-B]) de T_X, le théorème d'existence des résidus de [B-B], sous la forme

$$\mathrm{ch}(T_X/\xi) = \sum_{Z\subset S} \mathrm{Res}(\xi, Z)$$

où S est le lieu singulier du feuilletage correspondant à ξ, et où Z décrit les composantes connexes de S (supposées compactes) ;

- lorsque $\mathfrak{m}$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules non caractéristique pour les pour les petites boules (au sens de (2.3.3)), une version relative du théorème d'Atiyah-Singer ([B-M]).

5.3. - <u>CLASSES DE</u> Todd <u>ET</u> <u>$\mathcal{D}_X$-MODULES.</u>

Tout ce qui précède concernait les apports de la géométrie analytique et algébrique à la théorie des $\mathcal{D}$-modules. L'idée initiale qui a motivé ce travail, suggérée par Z. Mebkhout, était au contraire qu'un théorème de Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}_X$-modules devrait être plus "naturel" qu'un théorème pour les $\mathcal{O}_X$-modules. En particulier, les classes de Todd qui interviennent dans la définition des classes $\tau(m)$ (2.2.2.2) devraient pouvoir être évitées : la première raison est que si l'on garde les notations de (1.1), on a un isomorphisme :

$$\sigma_* : A^\cdot(X) \longrightarrow A^\cdot_X(T^*X) \qquad \text{(cas b) ou c) de (2.1))}$$

et qu'il résulte immédiatement de Riemann-Roch que l'on a :

$$\mathrm{Todd}(T^*X) = (\sigma_*^{-1}(\gamma_X))^{-1}$$

où γ_X est la classe fondamentale de la section nulle dans T^*X ; la seconde résulte des calculs faits dans [A-LJ] (Prop. (2.4.5.2) et (2.4.5.3)).

En effet, on a :

$$\mathrm{ch}(\pi_*\mathcal{D}_k) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{ch}(\mathcal{D}_j/\mathcal{D}_{j-1}) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{ch}(S^j(T_X))$$

soit, si on note $a_1 \dots a_n$ les racines formelles du polynome de Chern de T^*X

$$\mathrm{ch}(\mathcal{D}_k) = \sum_{j_1+\dots+j_n \leq k} \prod_{i=1}^{n} e^{-j_i a_i}$$

et

$$\sigma^*\sigma_*\mathrm{ch}(\mathcal{D}_k) = \prod_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{|j| \leq k} \prod_{i=1}^{n} e^{-j_i a_i} \right) .$$

On voudrait donc donner un sens à la formule :

$$\tau(\mathcal{D}) = \mathrm{Todd}(T^*X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-e^{-a_i}} = \lim_{k\to\infty} \sigma^*\sigma_*\mathrm{ch}(\mathcal{D}_k) ,$$

soit encore

$$\tau(\mathcal{D}) = \sigma^*\sigma_*\mathrm{ch}(\pi_*\mathcal{D}) ,$$

formule qui n'a pas de sens puisque $\pi_*\mathcal{D}$ n'est pas cohérent (cf. (4.1)).

On déduirait alors de (1.2.5) et des formules d'additivité des classes de Chern :

$$\tau(m) = \sigma^{*}\sigma_{*}\mathrm{ch}(\pi_{*}m) .$$

Peut-être peut-on considérer $\mathrm{ch}(\pi_{*}m)$ comme étant un élément d'un anneau de fractions de l'anneau des opérateurs de Chern ? Nous n'avons pas réussi à donner un sens à cette formule.

On aimerait alors la réécrire :

$$\tau(m) = \pi_{*}[\sigma_{*}\mathrm{ch}\, m .\ T^{*}_{X}X]$$

où $T^{*}_{X}X$ est la section nulle dans $T^{*}X$, pour poser plus généralement :

$$\tau^{Z}(m) = \pi_{*}[\sigma_{*}\mathrm{ch}\, m .\ T^{*}_{Z}X] ,$$

si Z est une sous-variété lisse de X , et

$$\tau^{Z}(m) = \pi_{*}[\sigma_{*}\mathrm{ch}\, m .\ S^{*}_{Z}X] ,$$

si Z est une sous-variété singulière de X , et

$$S^{*}_{Z}(X) = \mathrm{car}\,(R\Gamma_{Z}(\mathcal{O}_{X})) = \sum_{i} m_{i}\, T^{*}_{W_{i}} X ,$$

où $\Sigma m_{i}W_{i} = T^{-1}(1_{Z})$, T étant l'isomorphisme de Mac Pherson (3.1.3).

BIBLIOGRAPHIE

[A-LJ] B. ANGENIOL - M. LEJEUNE-JALABERT, Calcul différentiel et classes caractéristiques en géométrie algébrique. A paraître Astérisque.

[A-S1] ATIYAH - SINGER, The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), pp. 422-433.

[A-S2] ATIYAH - SINGER - SEGAL, The index of elliptic operators. Annals of Math. 87 (1968), I pp. 484-530, II pp. 531-545, III pp. 546-604.

[B-B] BAUM - BOTT, Singularities of holomorphic foliations. J. Differential Geometry, 7 (1972), pp. 279-342.

[B-F-MP] BAUM - FULTON - MAC PHERSON, Riemann-Roch for singular varieties. Public IHES, n°45 (1975), pp. 101-167.

[B-S] BOREL - SERRE, Le théorème de Riemann-Roch. Bulletin de la Soc. Math. de France 86 (1958), pp. 97-136.

[B-M] BOUTET DE MONVEL - B. MALGRANGE, Le théorème d'Atiyah-Singer relatif. à paraître.

[B-D-K] BRYLINSKY - DUBSON - KASHIWARA, Formule de l'indice pour les modules holonormes et obstruction d'Euler locale. Note au C.R.A.S., 410, série I (1981).

[F-G] FULTON - GILLET, Riemann Roch for general algebraic varieties. Bull. Soc. Math. France, n°111 (1983).

[HART] HARTSHORNE, On the De Rham cohomology of algebraic varieties. Publications IHES, n°45, pp. 5-99.

[ILL] ILLUSIE, Complexe cotangent et déformations. Lecture notes in Math., n°239. Springer.

[KAS 1] KASHIWARA, B-functions and holonomic systems. Invent. Math. 38 (1976), pp. 33-53.

[KAS 2] KASHIWARA, Systèmes d'équations microdifférentielles. Cours à l'Université Paris-Nord-Progress in Math, Birkhaüser.

[KAS 3] KASHIWARA, On the holonomic systems of linear differential equations II. Inventiones Math. 49 (1978), pp. 121-135.

[S-K-K] SATO - KASHIWARA - KAWAI, Microfunctions and pseudo differential equations. Lecture Notes in Math. 287, pp. 265-529.

[LAU] LAUMON, Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés. Thèse d'Etat, Université d'Orsay, 1983, au Colloque franco-japonais de Tokyo Kyoto (oct. 82). Lecture Notes n°1016

[MP] MAC PHERSON, Chern classes for singular varieties. Ann. of Math. 1974 (n°100) pp. 423-432.

[M] MALGRANGE, $\mathcal{D}$-Modules et Riemann-Roch. Manuscrit (1983).

[MEB] MEBKHOUT, Une équivalence de catégorie, une autre équivalence de catégories, Compositio Mathematica n°51 (1984), pp. 51-88.

[O-T-T1] O'BRIAN - TOLEDO - TONG, Hirzebruch Riemann-Roch for coherent sheaves. Amer. J. Math. n°103 (1981), pp. 253-271.

[O-T-T 2] O'BRIAN - TOLEDO - TONG, Grothendieck - Riemann-Roch for complex manifolds.
Bull. A.M.S., n°5 (1981), pp. 182-184.

[QUI] QUILLEN, Higher Algebraic K Theory.
Dans Algebraic K Theory I, Lecture Notes n° 341, pp. 85-148.

[SAB] SABBAH, Quelques remarques sur la théorie des classes de Chern des espaces analytiques singuliers.
Preprint Ecole Polytechnique, janv. 83.

[VER] VERDIER J.L., Le théorème de Riemann-Roch pour les intersections complètes.
Astérisque 36-37 (1976), pp. 189-228.