

Astérisque

FRÉDÉRIC PHAM

**La descente des cols par les onglets de Lefschetz,
avec vues sur Gauss-Manin**

Astérisque, tome 130 (1985), p. 11-47

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__11_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA DESCENTE DES COLS PAR LES ONGLETS DE LEFSCHETZ,
AVEC VUES SUR GAUSS-MANIN (*)

(STEEPEST DESCENT ALONG LEFSCHETZ THIMBLES,
WITH VIEWS ON GAUSS-MANIN)

Frédéric PHAM

•

La méthode du col pour les intégrales de Laplace dans \mathbb{C} remonte aux débuts de l'analyse classique. Je voudrais en exposer ici une généralisation dans \mathbb{C}^n , version avec paramètres de l'étude amorcée dans [31].

La première partie de l'exposé est consacrée à l'étude *globale* des intégrales de Laplace polynomiales dans \mathbb{C}^n . L'essentiel du travail est de nature topologique, et consiste (comme dans la méthode du col classique) à déformer le cycle d'intégration de façon que la décroissance à l'infini de l'intégrand soit la plus rapide possible : on y arrive en « descendant les cols » (points critiques de la fonction de phase) par les « ongles de Lefschetz » (généralisation à n dimensions des lignes de thalweg issues d'un col).

La deuxième partie contient diverses considérations sur le module (micro)-différentiel de Gauss-Manin, principal outil permettant d'analyser la contribution *locale* des ongles aux développements asymptotiques des intégrales de Laplace.

Le problème exposé ici a une longue histoire, et l'on pourra reconnaître dans les pages qui suivent l'influence directe ou indirecte de nombreux auteurs que, par ignorance ou par oubli, je n'aurai pas tous cités. L'impulsion décisive est sans doute venue de l'école russe (Maslov[24], Bernstein[5], Arnold[2][3][4], Fedoryuk [11]...), mais l'auteur qui a le plus influencé ma façon de voir est sans doute Malgrange[21][22], conjointement à Voros[47]; je dois aussi citer Duistermaat, dont l'article[10] a été le point de départ de mon intérêt pour ces problèmes [26].

•

• PLAN •

1ère Partie : La méthode du col dans \mathbb{C}^n pour les intégrales de Laplace polynomiales

1. Décomposition de l'homologie H_{\star}^n
2. Valeurs singulières « de deuxième type »
3. Homologie relative attachée à une valeur singulière « du type de Milnor »
4. Dépendance dans les paramètres
5. Dualité
6. Analyse des intégrales de Laplace polynomiales.

2ème Partie : Points de vue sur Gauss-Manin

1. Point de vue différentiel
2. Point de vue microdifférentiel
3. Etude topologique de la variation
4. Une interprétation transcendante de la « dualité par résidus » de K.Saito *

Appendice : Le complexe des chaînes « semi-algébriques à support dans Φ »

(*) Exposé au Colloque "Systèmes différentiels et singularités", Juin-Juillet 1983, C.I.R.M. Marseille-Luminy.

* Résultat trouvé après la conférence de Luminy, à l'occasion du séjour à Nice de K.Saito.

1ère Partie : LA MÉTHODE DU COL DANS \mathbb{C}^n POUR LES INTÉGRALES DE LAPLACE POLYNOMIALES

Il s'agit d'étudier des fonctions analytiques définies par des intégrales

$$(1) \quad \psi(\tau, u) = \int_{\Gamma} e^{-\tau f(x, u)} a(x, u) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où f et a sont des fonctions polynomiales complexes des variables $(x, u) = (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$; τ est un paramètre complexe non nul dont il sera intéressant de faire tendre le module vers l'infini, pour un argument $-\theta$ fixé :

$$\tau = |\tau| e^{-i\theta} \in \mathbb{C}^*.$$

Le premier travail est de préciser comment choisir le n -cycle d'intégration Γ pour que l'intégrale ait un sens.

- Commençons par supposer u fixé, de sorte que $f, a \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

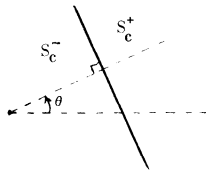
Pour tout $c > 0$ considérons les demi-plans (Fig.1)

$$S_c^+ = \{t \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(t e^{-i\theta}) \geq c\}$$

$$S_c^- = \{t \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(t e^{-i\theta}) \leq c\}$$

(on suppose pour le moment que l'on a fixé $\theta = -\operatorname{Arg} \tau$)

Fig.1



et notons Φ la famille des fermés $A \subset \mathbb{C}^n$ tels que

$$(2) \quad \forall c > 0, A \cap f^{-1}(S_c^-) \text{ est compact.}$$

C'est une « famille de supports » au sens de la théorie de l'homologie, et je prétends qu'on peut donner un sens à l'intégrale (1) sur toute classe d'homologie $[\Gamma] \in H_n^\Phi$, l'homologie de \mathbb{C}^n à supports dans Φ . Intuitivement, la condition (2), qui se lit encore

$$(2') \quad \operatorname{Re}(\tau f(x)) \rightarrow +\infty \text{ quand } \|x\| \rightarrow \infty, x \in A,$$

est faite pour obliger l'exponentielle $e^{-\tau f}$ à tendre vers zéro à l'infini de la chaîne d'intégration; la convergence de l'intégrale (1) en résultera si la chaîne d'intégration est assez "gentille" au voisinage de l'infini pour laisser la décroissance exponentielle l'emporter sur l'éventuelle croissance de la mesure polynomiale $a(x) dx_1 \dots dx_n$. Techniquement, il s'agit donc de définir un complexe de chaînes que nous noterons $C_*^{[\Phi]}$, tel que

- i) l'homologie de ce complexe soit H_*^Φ ;
- ii) les intégrales $\int e^{-\tau f} \omega$ ($\omega =$ forme polynomiale) soient convergentes sur les éléments de $C_*^{[\Phi]}$, et vérifient la formule de Stokes.

En gros, les éléments de C_*^Φ seront les chaînes "semi-algébriques à support dans Φ ", en un sens précisé dans l'Appendice (*).
Renvoyant ce point à l'Appendice, nous passons à l'étude de l'homologie.

1. Décomposition de H_*^Φ (u et θ sont fixés)

f est donc ici une application polynomiale de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C} .

En dehors d'un nombre fini de valeurs $t \in \mathbb{C}$ (dites "*valeurs singulières*" de f), cette application est une fibration topologique localement triviale. Il en résulte que l'inclusion de paires

$$(\mathbb{C}^n, f^{-1}(S_c^+)) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, f^{-1}(S_{c'}^+))$$

est, pour tous $c > c' > 0$ assez grands, une équivalence d'homotopie.

Or le complexe de chaînes (p.ex. singulières) à supports dans Φ peut s'identifier à la limite projective

$$C_*^\Phi(\mathbb{C}^n) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \text{proj. } C_*(\mathbb{C}^n, f^{-1}(S_c^+))$$

des complexes de chaînes relatives. D'après l'équivalence d'homotopie précédente la limite projective "passe à l'homologie" en devenant une limite projective d'isomorphismes :

$$(1.0) \quad H_*^\Phi = H_*(\mathbb{C}^n, f^{-1}(S_c^+)) \quad \text{pour tous } c \text{ assez grands.}$$

Comme \mathbb{C}^n est contractile on en déduit par la suite exacte d'homologie (en travaillant en *homologie réduite*) que

$$(1.1) \quad H_k^\Phi = H_k(\mathbb{C}^n, f^{-1}(S_c^+)) \xrightarrow[\approx]{\partial} H_{k-1}(f^{-1}(S_c^+)) \approx H_{k-1}(f^{-1}(t))$$

pour tout $t \in S_c^+$, à condition de prendre c assez grand pour que S_c^+ ne contienne aucune valeur singulière.

Conclusion (1.1): L'homologie H_*^Φ est isomorphe à l'homologie réduite ordinaire (à supports compacts), en dimension l de moins, de la fibre générique $f^{-1}(t)$.

Revenons maintenant à l'isomorphisme (1.0). Notons (s^λ) la collection des valeurs singulières de f, et soit (T_λ) la collection des demi-droites fermées $T_\lambda = s^\lambda + \mathbb{R}^+ e^{i\theta}$. Pour un choix générique de θ on pourra supposer ces demi-droites disjointes.

"Épaississons" les T_λ en des voisinages fermés \tilde{T}_λ mutuellement disjoints, rétractibles par déformation sur les T_λ . Alors, toujours pour c assez grand, on a les isomorphismes suivants, dont les symboles explicatifs "exc" (pour "excision") et "dr" (pour "déformation-rétraction") tentent de suggérer la construction; il s'agit chaque fois d'une déformation-rétraction évidente dans \mathbb{C} , que la fibration f permet de relever dans \mathbb{C}^n .

(*) Qu'une telle notion "n'aille pas de soi" m'avait d'abord échappé. Je remercie O. Gabber d'avoir attiré mon attention sur cette difficulté.

$$\begin{aligned}
 H_*(\mathbb{C}^n, f^{-1}(S_c^+)) &\stackrel{dr}{\approx} H_*(\cup_{\lambda} f^{-1}(\tilde{T}_{\lambda} \cup S_c^+), f^{-1}(S_c^+)) \\
 &\stackrel{exc, dr}{\approx} H_*(\cup_{\lambda} f^{-1}(\tilde{T}_{\lambda}), \cup_{\lambda} f^{-1}(\tilde{T}_{\lambda} \cap S_c^+)) \\
 &\approx \bigoplus_{\lambda} H_*(f^{-1}(\tilde{T}_{\lambda}), f^{-1}(\tilde{T}_{\lambda} \cap S_c^+)) \\
 &\stackrel{exc, dr}{\approx} \bigoplus_{\lambda} H_*(f^{-1}(S_{\lambda}) \cap f^{-1}(S_{\lambda}^+(\theta))) \\
 (1.2) \quad &\text{où } S_{\lambda} \text{ désigne un petit disque de centre } s_{\lambda} : \\
 &S_{\lambda} = \{t \in \mathbb{C} \mid |t - s_{\lambda}| < \epsilon\} \\
 &\text{et } S_{\lambda}^+(\theta) \text{ désigne la "lunule"} \\
 &S_{\lambda}^+(\theta) = S_{\lambda} \cap \{\operatorname{Re}(t e^{-i\theta}) \geq \frac{\epsilon}{2}\}.
 \end{aligned}$$

Conclusion (1.2): Pour θ générique comme ci-dessus, H_*^{Φ} est isomorphe à la somme directe, sur toutes les valeurs singulières s_{λ} , des "homologies relatives attachées à ces valeurs singulières" (où l'expression entre guillemets désigne les composantes de la somme directe (1.2)).

2. Valeurs singulières « de deuxième type »

Les valeurs singulières d'une application polynomiale f sont d'abord les *valeurs critiques* (images des *points critiques*, où le gradient de f s'annule), mais aussi éventuellement certaines valeurs non critiques, à cause du fait que pour $n > 1$ l'application f n'est pas propre (intuitivement, on peut avoir des "points critiques à l'infini"). Ces autres valeurs singulières que nous appellerons de « deuxième type » sont plus difficiles à calculer et à étudier, c'est pourquoi il est agréable de savoir reconnaître des situations où elles n'existent pas. Il suffit pour cela, comme l'a remarqué Malgrange (non publié), que la condition suivante soit vérifiée en dehors d'une boule assez grande :

$$(2.1) \quad \exists \delta > 0, \quad \|x\| \|\operatorname{grad} f(x)\| > \delta;$$

remarquons que Fedoryuk utilise dans [11] la condition plus forte

$$(2.1)' \quad \exists \delta > 0, \quad \|\operatorname{grad} f(x)\| > \delta.$$

De façon précise, si la condition (2.1) est vérifiée dans un ensemble de la forme $f^{-1}(S) \cap \{\|x\| > R_0\}$ (où S est un disque de \mathbb{C}), les fibres $f^{-1}(t)$ resteront transverses à toutes les sphères $\|x\| = R$ pour $R > R_1$ (R_1 assez grand) quand t parcourra S , ce qui assurera la trivialité topologique "au voisinage de l'infini des fibres".

Voici maintenant un critère effectif "à la Newton" permettant de s'assurer que la condition (2.1) (et en fait (2.1)') est vérifiée :

Proposition (2.2) : Supposons que le polynôme f soit commode et que sa partie principale Newtonienne à l'infini soit non dégénérée (cf. Kouchnirenko[17]). Alors il vérifie la condition (2.1)' dans tout le complémentaire d'une boule assez grande.

Rappelons la définition des termes de l'énoncé : pour un polynôme $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} x^{\alpha}$, on note $\Gamma_{-}(f)$ l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}_{+}^n de l'ensemble $\bigcup_{\alpha} \alpha - \mathbb{R}_{+}^n$, où α prend toutes les valeurs dans \mathbb{N}^n telles que $a_{\alpha} \neq 0$, et en outre la valeur 0; la réunion des faces fermées, ne passant pas par 0, du polyèdre $\Gamma_{-}(f)$, est notée $\Gamma(f)$ et appelée *frontière de Newton à l'infini* du polynôme f ; le polynôme est dit *commode* si $\Gamma(f)$ rencontre tous les axes de coordonnées; sa "*partie principale Newtonienne à l'infini*" définie par $f_{\infty} = \sum_{\alpha \in \Gamma(f)} a_{\alpha} x^{\alpha}$, est dite *non dégénérée* si pour chaque face σ de $\Gamma(f)$ le polynôme quasihomogène $f_{\sigma} = \sum_{\alpha \in \sigma} a_{\alpha} x^{\alpha}$ vérifie la condition de « non dégénérescence » :

$$x_i \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n \Rightarrow x_1 x_2 \dots x_n = 0.$$

Remarque : Les résultats de ce paragraphe semblent être connus de beaucoup de gens, notamment à Moscou (David Bernstein aurait démontré depuis déjà plusieurs années des résultats analogues pour le cas plus général des applications polynomiales de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^p). Mais je n'en connais pas de version publiée complète. L'article de Broughton[8] se contente d'exploiter, plus systématiquement que ne le fait [31], les conséquences topologiques de la condition (2.1)'. Quant à la proposition (2.2), apparemment connue à Moscou (cf. [17]), Hà Huy Vui en a écrit une démonstration indépendante que je tiens à la disposition des lecteurs intéressés.

3. Homologie relative attachée à une valeur singulière « du type de Milnor »

Considérons une valeur singulière s^{λ} , image d'un point critique isolé x^{λ} et d'aucun autre, "*fût-ce à l'infini*" (ce qui pourra signifier que la condition (2.1) est vérifiée dans un ensemble de la forme $f^{-1}(S) \cap \{\|x\| > R_0\}$ pour R_0 assez grand, S étant un disque de centre s^{λ}).

Soit alors B une «*boule de Milnor*», c.à.d. une boule ouverte centrée au point critique, de rayon ρ assez petit pour que toutes les boules de même centre et de rayons $\rho' \leq \rho$ soient transverses à $f^{-1}(s^{\lambda})$. Quitte à choisir le rayon η du disque S assez petit, on peut supposer que toutes les fibres $f^{-1}(t)$ pour $t \in S$ sont transverses au bord de B (cf. Milnor[25]). Cette hypothèse jointe aux précédentes implique que la restriction de f à $f^{-1}(S) \cap B$ est une fibration triviale (de variété à bord), ce qui permet de ramener le calcul de l'homologie relative attachée à s^{λ} à un calcul local à la source (dans B), essentiellement déjà fait dans Milnor[25].

Pour simplifier les notations, nous supposons que $x^\lambda=0$, $s^\lambda=0$, et nous noterons (S, S^+) la paire "disque, lunule" notée $(S_\lambda, S_\lambda^+(\theta))$ au paragraphe 1.

Proposition : Avec les hypothèses ci-dessus on a les isomorphismes

$$H_k(f^{-1}(S), f^{-1}(S^+)) \approx H_k(X, X^+) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X^+) \xrightarrow{dr} H_{k-1}(X_t^+), \quad t \in S^+,$$

où l'on a noté $X = B \cap f^{-1}(S)$, $X^+ = B \cap f^{-1}(S^+)$, $X_t^+ = B \cap f^{-1}(t)$;

de plus, d'après Milnor[25], $H_{k-1}(X_t^+) = 0$ si $k \neq n$, tandis que pour $k=n$ on a $H_{n-1}(X_t^+) = \mathbb{Z}^\mu$, où μ est le "nombre de Milnor" du point critique; ce groupe est appelé «groupe d'homologie évanescence» du point critique.

Preuve : La fin de la proposition est un résultat bien connu de Milnor. L'isomorphisme dr ("déformation-rétraction") est évident, ainsi que l'isomorphisme ∂ (X est contractile).

Enfin, démontrer le premier des isomorphismes revient, par la suite exacte d'un triplet, à démontrer que

$$H_*(f^{-1}(S), X \cup f^{-1}(S^+)) = 0$$

ce qui équivaut, par excision, à établir que

$$H_*(\bigcup_Y X, \dot{X} \cup \bigcup_{Y^+} X^+) = 0,$$

où l'on a noté $Y=f^{-1}(S)$, $Y^+=f^{-1}(S^+)$, et \dot{X} le bord de X dans Y . Mais, toujours par la suite exacte d'un triplet, cette égalité équivaut à la suivante (où l'on a noté \dot{X}^+ le bord de X^+ dans Y^+) :

$$H_*(\bigcup_Y X, \dot{X}) = H_*(\bigcup_{Y^+} X^+, \dot{X}^+)$$

qui est vraie parce que la paire écrite à droite est rétracte de déformation de celle écrite à gauche (trivialité topologique "à l'infini").

Remarque : Si l'on fait varier θ , l'homologie relative (\approx homologie évanescence) forme sur le cercle trigonométrique S^1 un système local de \mathbb{Z} -modules libres de rang μ .

Exemple : "Onglets de Lefschetz"[18] associés à un point critique quadratique non dégénéré.

Supposons que le point critique soit quadratique non dégénéré. Comme le problème est devenu local, nous pouvons nous autoriser des changements de coordonnées analytiques locaux et mettre ainsi f sous la forme

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (\text{Lemme de Morse analytique complexe}).$$

L'homologie relative et l'homologie évanescence sont isomorphes à \mathbb{Z} , engendrées respectivement par l'onglet de Lefschetz $\Delta(t)$ défini ci-dessous, et par la sphère évanescence $e(t)=\partial\Delta(t)$.

Si $\theta=0$ (c'est-à-dire $t \in \mathbb{R}^+$), avec les notations $x' = \operatorname{Re} x$, $x'' = \operatorname{Im} x$, l'onglet de Lefschetz $\Delta(t)$ est défini par

$$x_1'' = \dots = x_n'' = 0, \quad x_1'^2 + \dots + x_n'^2 \leq t;$$

entre ses deux orientations possibles, nous appellerons "orientation standard" celle définie par les coordonnées (x_1', \dots, x_n') .

Le cas θ quelconque se déduit du cas $\theta=0$ par l'isomorphisme linéaire

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (e^{\frac{i\theta}{2}} x_1, \dots, e^{\frac{i\theta}{2}} x_n) ;$$

comme θ n'est défini que mod. 2π , cet isomorphisme n'est défini que modulo l'application antipodale $x \longmapsto -x$, qui change ou non l'orientation de l'onglet selon que n est impair ou pair. Autrement dit, *le système local sur S^1 d'homologie relative (\approx homologie évanescence) est un revêtement trivial ou non selon que n est pair ou impair.*

4. **Dépendance en u, θ**

Considérons l'application polynomiale

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p. \\ x, u &\longmapsto t = f(x, u), u \end{aligned}$$

Au-dessus du complémentaire d'une hypersurface algébrique $\Sigma \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$, cette application est une fibration topologique localement triviale.

Soit alors $U \subset \mathbb{C}^p$ l'ouvert de Zariski dense au-dessus duquel la projection canonique $\pi_\Sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^p$ est propre (à fibres finies). Quand u varie dans U et $e^{i\theta}$ dans S^1 , le raisonnement qui a conduit à l'isomorphisme (1.1) du §1 peut être fait "en famille", conduisant à une dépendance continue en u, θ de l'isomorphisme (1.1) :

$$H_k^{\Phi(\theta, u)} \approx H_{k-1}(\mathbf{F}^{-1}(t, u)), \quad u \in U, t \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_u$$

(où $\Sigma_u = \pi_\Sigma^{-1}(u)$ désigne l'ensemble des valeurs singulières de $f(\cdot, u)$).

(4.1) **Conclusion :** $(H_x^{\Phi(\theta, u)})_{(e^{i\theta}, u) \in S^1 \times U}$ est un système local sur $S^1 \times U$ de groupes abéliens de type fini.

(4.2) **Exemple :** Soit $f(x, u) = f_0(x) + g(x, u)$, où f_0 est un polynôme vérifiant les hypothèses de la Proposition (2.2), tandis que g a tous ses monômes en x strictement en-dessous du polyèdre de Newton à l'infini de f_0 (cf. §2), c'est-à-dire : $g = \sum_\alpha a_\alpha(u) x^\alpha$, $a_\alpha \neq 0$ seulement pour $\alpha \in \Gamma(f_0) \setminus \Gamma(f_0)$. Alors Σ est le lieu discriminant de \mathbf{F} (image de l'ensemble critique), et $U = \mathbb{C}^p$ tout entier (cela résulte d'une version en famille de la proposition (2.2)).

Examinons maintenant la décomposition en somme directe (1.2).

Soit $U^* \subset U$ l'ouvert dense de Zariski de U où le nombre de valeurs singulières de $f(\cdot, u)$ est maximum ($U^* =$ complément dans U du "lieu de bifurcation"). Alors la décomposition en somme directe (1.2) est bien définie localement en $u \in U^*$ pourvu que les coupures $T_\lambda(\theta, u)$ ne se chevauchent pas, c'est-à-dire pourvu que

$$(4.3) \quad \theta \neq \text{Arg}(s^\lambda - s^{\lambda'}) \text{ pour tout couple de valeurs singulières distinctes } s^\lambda \neq s^{\lambda'} ;$$

de plus la dépendance en θ, u est évidemment continue à cette condition.

(4.4) Conclusion : Localement dans $(\mathbb{S}^1 \times U^*)'$, ouvert dense semi-algébrique des $(e^{i\theta}, u) \in \mathbb{S}^1 \times U^*$ pour lesquels la condition (4.3) est vérifiée, le système local d'homologie $(H_*^{\Phi(\theta, u)})$ admet une décomposition en somme directe (1.2) de systèmes locaux indexés par les différentes branches locales de Σ au-dessus de U^* .

Notons bien que cette décomposition est multiforme, et "saute" de façon discontinue à la traversée de la « cloison de Stokes », ensemble des points où la condition (4.3) n'est pas vérifiée : c'est le « phénomène de Stokes », qu'il est commode d'observer [47] soit à θ fixé (générique) en faisant varier u , soit à u fixé (générique) en faisant varier θ ; dans ce dernier cas la cloison de Stokes se manifeste dans le plan complexe des τ comme l'union des « lignes de Stokes » [23] de la théorie classique des systèmes différentiels ordinaires à singularité irrégulière (il s'agit dans notre cas de la singularité en $\tau = \infty$ du système différentiel vérifié par l'intégrale (1): cf. §6 ci-après).

5. Dualité

On suppose ici u fixé, et l'on considère les familles de supports $\Phi(\theta)$ et $\Phi(\theta + \pi)$ correspondant à deux directions opposées du plan complexe des τ . Comme $\Phi(\theta) \cap \Phi(\theta + \pi) = \mathbf{C}$ (famille des compacts), l'intersection dans \mathbb{C}^n d'un n -cycle à support dans $\Phi(\theta)$ et d'un n -cycle à support dans $\Phi(\theta + \pi)$ est "en général" (c'est-à-dire une fois ces cycles mis en position générale) un 0-cycle à support compact, donc un élément de $H_0(\mathbb{C}^n) = \mathbb{Z}$. On définit donc ainsi une forme bilinéaire d'intersection

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccc} H_n^{\Phi(\theta + \pi)} \otimes H_n^{\Phi(\theta)} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \Delta, \Gamma & \longmapsto & \langle \Delta, \Gamma \rangle \end{array}$$

Théorème : Supposons que la fonction polynomiale $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ n'ait que des valeurs singulières du type étudié au §3. Alors la forme bilinéaire d'intersection (5.1) est non dégénérée.

Preuve : Comme la dépendance en θ est continue (cf. §4), on peut supposer θ choisi de telle sorte que les droites de direction θ passant par deux quelconques valeurs singulières distinctes ne se rencontrent pas

$$(5.2) \quad (T_{\lambda}(\theta) \cup T_{\lambda}(\theta + \pi)) \cap (T_{\lambda'}(\theta) \cup T_{\lambda'}(\theta + \pi)) = \emptyset \quad \text{pour } \lambda \neq \lambda'.$$

Sous cette hypothèse, il est clair que la forme bilinéaire (5.1) est "diagonale" pour la décomposition (1.2) de l'homologie. Nous sommes donc ramenés à démontrer la non-dégénérescence de la forme bilinéaire (5.1) *restreinte au sous-espace d'homologie relative attaché à chacune des valeurs singulières s^λ* . Il s'agit là, en vertu des arguments du §3, d'un problème *local au voisinage du point critique*; or le germe de fonction analytique que définit f au voisinage de ce point critique peut toujours être déformé de façon que le point critique (isolé, de nombre de Milnor μ) se scinde en μ points critiques quadratiques non dégénérés, et cette scission fournit précisément la décomposition de l'homologie relative énoncée au paragraphe 3 :

$$H_n(f^{-1}(S), f^{-1}(S^+)) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\mu \text{ fois}} ;$$

comme la forme d'intersection (5.1) est diagonale par rapport à cette décomposition (c'est évident après déformation, or la forme d'intersection varie continûment par déformation), on est ramené à montrer l'inversibilité dans \mathbb{Z} de chacun des termes diagonaux, c'est-à-dire :

$$(5.3) \quad \langle \overline{\Delta}_\lambda(\theta + \pi), \Delta_\lambda(\theta) \rangle = \pm 1,$$

où $\Delta_\lambda(\theta)$ et $\overline{\Delta}_\lambda(\theta + \pi)$ désignent les deux onglets de Lefschetz issus du point critique dans les deux directions opposées θ et $\theta + \pi$; comme ces deux onglets peuvent être identifiés localement aux nappes de gradient descendantes et montantes d'une même fonction de Morse d'indice n dans $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, la formule (5.3) est évidente et l'on peut même en préciser le signe :

$$(5.3)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \overline{\Delta}_\lambda(\theta + \pi), \Delta_\lambda(\theta) \rangle = (-1)^{n(n-1)/2}, \text{ avec la convention que } \overline{\Delta}_\lambda(\theta + \pi) \\ \text{désigne l'onglet déduit localement de } \Delta_\lambda(\theta) \text{ en faisant parcourir e}^{i\theta} \\ \text{le demi-cercle dans le sens trigonométrique.} \end{array} \right.$$

Commentaire : Si le polynôme f n'a que des points critiques quadratiques non dégénérés, les familles d'onglets de Lefschetz relatifs aux deux directions opposées θ et $\theta + \pi$ forment, d'après ce que nous venons de voir, deux bases *duales l'une de l'autre* des homologies $H_n^{\Phi(\theta)}$ et $H_n^{\Phi(\theta + \pi)}$ (à l'orientation près des onglets).

Une classe d'homologie quelconque $\Gamma \in H_n^{\Phi(\theta)}$ se décomposera donc explicitement en somme d'onglets de la façon suivante :

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \sum_\lambda N_\lambda \Delta_\lambda(\theta) \\ \text{où } N_\lambda = (-1)^{n(n-1)/2} \langle \overline{\Delta}_\lambda(\theta + \pi), \Gamma \rangle. \end{array} \right.$$

Remarque : On rencontre dans certains problèmes (notamment le problème des "intégrales oscillantes") des intégrales de type (1) dont le cycle d'intégration Γ n'a pas son support dans $\Phi(\theta)$ mais dans une famille plus grande

$$\Psi(\theta) = \{ A \text{ fermé } \subset \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f e^{-i\theta}) \text{ borné inférieurement sur } A \}.$$

Pour donner un sens à de telles intégrales il suffit de montrer que tout tel cycle se déforme de façon unique (à homologie près) en un cycle à support dans $\Phi(\theta)$, c'est-à-dire que l'on a l'isomorphisme canonique (démontré dans [31]):

$$H_n^{\Phi(\theta)} \cong H_n^{\Psi(\theta)} .$$

Dans la situation du "commentaire" ci-dessus, un cycle Γ à support dans $\Psi(\theta)$ sera homologue dans $H_n^{\Psi(\theta)}$ à une combinaison linéaire d'onglets de Lefschetz encore donnée par la formule (5.4): on remarquera que les nombres d'intersection de la formule (5.4) gardent un sens lorsque Γ est à support dans $\Psi(\theta)$, car $\Psi(\theta) \cap \Phi(\theta + \pi) = \mathbf{C}$ (famille des compacts).

Exemple (correspondant au cas des *intégrales oscillantes*) :

$\Gamma = \mathbb{R}^n$, τ imaginaire positif ($\theta = -\frac{\pi}{2}$), $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ (la "fonction de phase" f est réelle).

L'indice d'intersection $N_\lambda = \langle \bar{\Delta}_\lambda(+\frac{\pi}{2}), \Gamma \rangle$ vaut alors :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \text{Im } s^\lambda > 0 \\ (-1)^{n(n-1)/2} & \text{si } \text{Im } s^\lambda = 0 \quad (*) \\ (-1)^{n-1} \langle e_\lambda(t), \gamma(t) \rangle & \text{si } \text{Im } s^\lambda < 0; \text{ cette dernière expression doit} \end{cases}$$

être comprise comme un nombre d'intersection de $(n-1)$ -cycles dans $f^{-1}(t)$, où $\{t\} = \mathbb{R} \cap T_\lambda(+\frac{\pi}{2})$; $e_\lambda(t)$ est le "cycle évanescent", bord de l'onglet $\bar{\Delta}_\lambda(+\frac{\pi}{2})$ (cf. §3); $\gamma(t) = \text{Re } f^{-1}(t)$ est la fibre de Γ au-dessus de t .

6. Analyse des intégrales de Laplace polynomiales

Les constructions topologiques qui précèdent nous ont permis de donner un sens aux intégrales (1) pour $\tau \in \mathbb{C}^*$, $u \in U$ (ouvert de Zariski de \mathbb{C}^P défini au §4) en permettant une variation continue du cycle d'intégration. Nous obtenons ainsi sur $\mathbb{C}^* \times U$ des *fonctions analytiques multiformes* $\psi(\tau, u)$ dont les propriétés essentielles sont résumées par l'énoncé suivant :

(6.1) *Les fonctions $\psi(\tau, u)$ définies par (1) sont "de classe de Bernstein" c'est-à-dire qu'elles sont solutions d'un système holonome d'équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{C}[\tau, u] \langle \partial_\tau, \partial_u \rangle$ (anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux).*

(*) Le point critique est alors supposé réel. S'il ne l'était pas, s^λ ne proviendrait pas d'un mais au moins de deux points critiques complexes conjugués; les onglets correspondants auraient alors un nombre d'intersection nul avec $\Gamma = \mathbb{R}^n$

Précisons un peu la signification de cette affirmation.

Dans un espace affine dont les coordonnées sont notées z_1, \dots, z_m , soit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{z_1, \dots, z_m} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m] \langle \partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_m} \rangle$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Dans [5], I.N. Bernstein a introduit une classe de \mathbb{D} -modules à gauche (notée \mathcal{L}_0 dans [5]) que nous conviendrons d'appeler les \mathbb{D} -modules *holonomes* (par une transposition évidente de la terminologie introduite par M. Sato pour le cas analytique). Il a montré que cette classe était stable par les opérations *image directe ou réciproque par une application polynomiale*, ainsi que par *transformation de Laplace formelle* (échange $(z, \partial_z) \leftrightarrow (-\partial_z, \zeta)$).

Par exemple, pour tout polynôme $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p]$, la fonction $e^{-\tau f(x, u)}$ est évidemment annihilée par les opérateurs de $\mathbb{D}_{\tau, x, u}$:

$$(\partial_\tau + f, \partial_{x_j} + f'_{x_j} \tau, \partial_{u_j} + f'_{u_j} \tau)$$

dont on montre aisément qu'ils engendrent l'idéal à gauche, annulateur de $e^{-\tau f}$; de plus le quotient de $\mathbb{D}_{\tau, x, u}$ par cet idéal est un module holonome que nous noterons

$$(6.2) \quad \tilde{\mathbb{B}}_f = \mathbb{D}_{\tau, x, u} e^{-\tau f(x, u)} = \mathbb{D}_{\tau, x, u} / \mathbb{D}_{\tau, x, u} (\partial_\tau + f, \partial_x + f'_x \tau, \partial_u + f'_u \tau)$$

Pour des chaînes d'intégration vérifiant nos hypothèses de "semi-algèbricité à support dans Φ ", les intégrales de formes différentielles relatives à coefficients dans $\tilde{\mathbb{B}}_f$ sont justiciables des règles usuelles : formule de Stokes; dérivation sous le signe d'intégration (dans le cas d'un cycle à dépendance continue dans les paramètres). La formule de Stokes implique en particulier que la fonction $\psi(\tau, u)$ définie par l'intégrale (1) ne dépend que de la classe de $a(x, u) e^{-\tau f}$ dans

$$(6.3) \quad \tilde{\mathbb{H}}_f = \tilde{\mathbb{B}}_f / \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \tilde{\mathbb{B}}_f$$

c.à.d. dans le $\mathbb{D}_{\tau, u}$ -module holonome, image directe de $\tilde{\mathbb{B}}_f$ par la projection $(\tau, x, u) \mapsto (\tau, u)$. De plus l'action d'un opérateur différentiel sur cette fonction $\psi(\tau, u)$ est donnée par la structure de $\mathbb{D}_{\tau, u}$ -module de l'image directe (dérivation sous le signe d'intégration).

Exemple : une classe d'intégrales oscillantes

Il s'agit des intégrales de la forme

$$(6.4) \quad \psi(\tau, u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tau f(x, u)} a(x, u) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p]$ vérifie les conditions (4.2).

Alors, en faisant subir au cycle d'intégration le traitement indiqué à la fin du §5, on donne un sens à l'intégrale, et l'on obtient une fonction $\psi(\tau, u)$ analytique sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p$, qui se prolonge sur tout $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^p$ en fonction analytique multiforme, de classe de Bernstein sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$.

Et Gauss-Manin ... ?

Par transformation de Laplace partielle en τ ($\tau \leftrightarrow \partial_t, \partial_\tau \leftrightarrow -t$) les \mathbb{D} -modules holonomes (6.2)(6.3) deviennent respectivement :

$$(6.2)' \quad \mathbb{B}_f = \mathbb{D}_{t,x,u} \langle \delta(t-f(x,u)) \rangle = \mathbb{D}_{t,x,u} / \mathbb{D}_{t,x,u} (t-f, \partial_x + f'_x \partial_t, \partial_u + f'_u \partial_t)$$

(où l'expression entre guillemets peut s'interpréter, dans le cas où le corps de base est \mathbb{R} au lieu de \mathbb{C} , comme la distribution delta de Dirac);

$$(6.3)' \quad \mathbb{H}_f = \mathbb{B}_f / \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbb{B}_f$$

(image directe de (6.2)' par la projection $(t,x,u) \mapsto (t,u)$).

Le $\mathbb{D}_{t,u}$ -module \mathbb{H}_f est le *module de Gauss-Manin* de la projection $(x,u) \mapsto (t=f(x,u),u)$. Il y aurait probablement beaucoup de choses intéressantes à dire de ce module de Gauss-Manin *algébrique global*. Nous allons nous contenter d'en étudier une version *analytique locale* qui, sous l'hypothèse de la Prop.2.2, suffira pour nous renseigner sur le comportement à $|\tau|$ grand des intégrales (1).

2ème Partie : POINTS DE VUE SUR GAUSS-MANIN

0. Grâce au travail topologique global de la 1ère partie, et moyennant les hypothèses du §2 (qui nous ont garanti que "rien d'intéressant ne se passait à l'infini"), l'étude des intégrales de Laplace se ramène essentiellement à un problème *analytique local* : il s'agit d'étudier la contribution *locale*, à une intégrale du type

$$(1) \quad \psi(r,u) = \int_{\Gamma} e^{-r f(x,u)} a(x,u) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (\text{cf. 1ère partie}),$$

d'un point critique que nous pouvons supposer être l'origine $(x,u)=(0,0)$, sachant que $x=0$ est un point critique *isolé* de $f_0 = f(\cdot, 0)$, (on pourra supposer $f(0,0)=0$). L'idée va être de tronquer l'intégrale en prenant pour cycle d'intégration Γ un *cycle relatif* du type étudié au §3 de la 1ère partie; bien entendu l'intégrale dépendra de la façon de tronquer, et nous devons préciser comment.

Choisissons dans \mathbb{C}^n une "boule de Milnor" B pour f_0 (cf. 1ère partie, §3), puis dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ un polydisque $S = S_0 \times U$ de polyrayon convenable, tel que

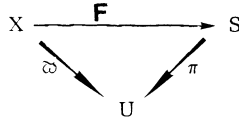
i) pour tout $(t,u) \in S$ les fibres de l'application

$$F: x, u \longmapsto t=f(x,u), u$$

soient transverses à $\partial B \times U \subset \mathbb{C}^n \times U$ (où ∂B désigne le bord de la boule B) ;

ii) les valeurs critiques de $f(\cdot, u)|_B$ restent à l'intérieur du disque S_0 quand u parcourt U .

Alors, en posant $X = F^{-1}(S) \cap B$, on a le diagramme commutatif



où π et $\tilde{\omega}$ sont les projections canoniques $(t,u) \mapsto u$ et $(x,u) \mapsto u$ respectivement.

La restriction de F à son ensemble critique $C \subset X$ est un morphisme propre à fibres finies, dont l'image $\Sigma \subset S$ est une hypersurface analytique complexe de S ; de plus $\tilde{\omega}|_C$ et $\pi|_{\Sigma}$ sont des revêtements ramifiés de U .

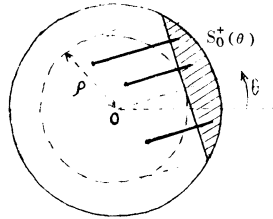
Pour définir des intégrales tronquées du type (1) à dépendance analytique en u , il sera commode de renforcer la condition ii), en exigeant que les valeurs critiques de $f(\cdot, u)|_B$ restent à l'intérieur du disque de rayon

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{le rayon du disque } S_0;$$

cette condition permet de paraphraser toutes les constructions de la 1ère partie en les appliquant à l'homologie relative

$$\begin{aligned}
 & H_n(X(u), X^+(\theta, u)), \quad \text{où l'on a posé} \\
 & X(u) = \tilde{\omega}^{-1}(u), \quad X^+(\theta, u) = \{(x, u) \in X(u) \mid f(x, u) \in S_0^+(\theta)\}, \\
 \text{avec} \quad & S_0^+(\theta) = \{t \in S_0 \mid \operatorname{Re}(t e^{-i\theta}) > \rho\} \quad (\text{Fig. 2, page suivante}) \rightarrow
 \end{aligned}$$

Fig.2



(cf. la Fig.2, où l'on a dessiné les projections des onglets)

L'homologie relative forme ainsi sur $S^1 \times U$ un système local de groupes abéliens libres de rang μ (isomorphe à l'homologie évanescence), et l'intégrale (1) sur une classe d'homologie relative Γ est une fonction analytique multiforme de (τ, u) dans $\mathbb{C}^* \times U$, bien définie à l'addition près de fonctions à décroissance plus rapide que $Cte \times e^{-\rho|\tau|}$ dans tout secteur angulaire du plan des τ .

Les considérations qui suivent vont nous permettre de préciser le comportement asymptotique de telles intégrales quand $|\tau| \rightarrow \infty$

1. Point de vue différentiel

1.1 Etude locale à u fixé

Il s'agit d'étudier une intégrale de type (1) sur une classe d'homologie relative, dans le cas où $p=0$ (pas de paramètre, $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$). D'après la 1ère partie (§3), on peut se ramener au cas où la classe d'intégration est celle d'un onglet Δ , dont la projection est le demi-axe réel positif (c.à.d. qu'on a pris $\theta=0$), ou plus exactement un segment $[0, ?]$ de ce demi-axe réel. (*)

Alors

$$(1.0) \quad \psi(\tau) = \int_{\Delta} e^{-\tau f(x)} a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_0^? e^{-\tau t} dt \int_{e(t)} \frac{\omega}{df} \Big|_{f^{-1}(t)},$$

où $e(t)$ est le cycle évanescant, fibre de l'onglet Δ , $\omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, et $\frac{\omega}{df}$ désigne n'importe quelle forme différentielle χ telle que $df \wedge \chi = \omega$ (si t n'est pas valeur critique, la restriction d'une telle forme à $f^{-1}(t)$ ne dépend que de ω).

En résumé, la fonction ψ est une "transformée de Laplace-Borel" (tronquée)

$$(1.1) \quad \psi(\tau) = \int_0^? e^{-\tau t} \tilde{\psi}(t) dt, \text{ où}$$

$$(1.2) \quad \tilde{\psi}(t) = \int_{e(t)} \frac{\omega}{df} \Big|_{f^{-1}(t)}$$

de sorte que le comportement asymptotique de ψ pour $\tau \rightarrow \infty$ est gouverné par le comportement local de $\tilde{\psi}$ au voisinage de la valeur critique $t=0$.

(*) Le choix de l'extrémité de ce segment n'a pas d'importance pour ce qui va suivre. Sous les hypothèses globales de la 1ère partie on peut prendre tout le demi-axe $[0, \infty]$, si du moins ce demi-axe ne contient pas d'autres valeurs critiques.

Pour analyser ce comportement local, il est naturel de chercher à étudier le système différentiel vérifié par $\tilde{\psi}$ au voisinage de $t=0$. Pour cela on construit le "module différentiel de Gauss-Manin" \mathcal{H}_f , analogue analytique local du \mathbb{D} -module \mathbb{H} construit au §6 de la 1ère partie. Pour bien en comprendre la construction exposée ci-dessous, il est utile de remarquer que les intégrales de type (1.2) sont des cas particuliers d'intégrales plus générales

$$(1.3) \quad \int_{e(t)} \text{Res}_{f^{-1}(t)} \zeta \quad ,$$

où $\zeta \in \Omega^n \left[\frac{1}{t-f} \right]$ est un germe de forme méromorphe fermée à pôle le long du graphe de f , et Res désigne la classe résidu d'une telle forme, définie comme chez Leray [19] (le fait que $f: X \rightarrow S$ soit de Stein permet de paraphraser la théorie des résidus de Leray en restant dans le cadre holomorphe).

Les intégrales (1.2) correspondent au cas particulier où ζ a un pôle simple :

$$\zeta = \frac{\omega}{-2\pi i(t-f)} \quad , \quad \text{Res}_{f^{-1}(t)} \zeta = \frac{\omega}{df} \Big|_{f^{-1}(t)}$$

Mais la classe d'intégrales (1.3) a l'avantage d'être stable par dérivation par rapport à t . Remarquons que l'intégrale (1.3) est nulle si ζ est holomorphe, et aussi si ζ est une différentielle de forme méromorphe. Cela justifie la définition suivante :

(1.4) Définition : $\mathcal{H}_f = \Omega_{[f]}^n / d \Omega_{[f]}^{n-1}$,

où $\Omega_{[f]}^* = \Omega_{x,t/t}^* \left[\frac{1}{t-f} \right] / \Omega_{x,t/t}^*$ est le "complexe des singularités de formes méromorphes à pôles le long du graphe de f "; on a noté $\Omega_{x,t/t}^*$ le complexe des germes de formes holomorphes relatives à la projection $x,t \mapsto t$ (c.à.d. du type $\chi = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x,t) dx^{\alpha}$); ce complexe a une structure évidente de \mathcal{D}_t -module à gauche, où \mathcal{D}_t désigne l'anneau (noethérien) des germes à l'origine d'opérateurs différentiels analytiques en t ; il en est donc de même de $\Omega_{[f]}^*$, et par conséquent de \mathcal{H}_f , qui de plus est un \mathcal{D}_t -module de type fini à singularité régulière, "le \mathcal{D}_t -module de Gauss-Manin".

Les classes dans \mathcal{H}_f de formes méromorphes à pôle simple forment un réseau $\mathcal{H}_f^{(0)} \subset \mathcal{H}_f$, c'est-à-dire un sous $\mathcal{O}_t (= \mathbb{C}\{t\})$ -module de type fini qui engendre \mathcal{H}_f comme \mathcal{D}_t -module; d'après Brieskorn[7] et Sébastiani[42] ce réseau est libre de rang μ sur \mathcal{O}_t (*) (μ désigne le nombre de Milnor du point critique).

(*) Le rang est $\mu+1$ dans le cas particulier $n=1$. En effet \mathcal{H}_f contient dans ce cas comme sous \mathcal{D}_t -module, libre de rang 1 sur \mathcal{O}_t , le module engendré par la forme $\frac{df}{-2\pi i(t-f)}$ (dont le résidu vaut 1). Pour ne pas avoir à distinguer le cas $n=1$ nous conviendrons désormais que \mathcal{H}_f a été remplacé dans ce cas par son quotient par ce sous-module. Avec cette convention l'opérateur ∂_t est inversible dans \mathcal{H}_f , ce qui signifie que \mathcal{H}_f est égal à son microlocalisé (cf. §2).

♦ Solutions du module différentiel de Gauss-Manin

Pour tout cycle évanescents e , à dépendance continue multiforme en t en dehors de l'origine, l'intégrale (1.3) définit une fonction analytique multiforme de t qui ne dépend que de la classe de ζ dans \mathcal{H}_f . L'intégration (1.3) définit ainsi un homomorphisme de \mathcal{D}_t -modules

$$f_e : \mathcal{H}_f \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$$

où $\tilde{\mathcal{O}}$ désigne le \mathcal{D}_t -modules des "germes à l'origine de fonctions analytiques multiformes" (on laisse au lecteur le soin de préciser ce que cela signifie).

D'après Maisonobe et Rombaldi [20], la correspondance $e \mapsto f_e$ identifie l'espace vectoriel (sur \mathbb{C}) d'homologie évanescents à l'espace vectoriel (M.R.I.1) $\text{Hom}_{\mathcal{D}_t}(\mathcal{H}_f, \tilde{\mathcal{O}})$ des solutions analytiques multiformes de \mathcal{H}_f (pour être tout-à-fait exact je ne devrais pas dire "espaces vectoriels" mais "systèmes locaux sur \mathbb{S}^1 " d'espaces vectoriels).

♦ Exposants du réseau $\mathcal{H}_f^{(0)}$

D'après la théorie générale des systèmes différentiels ordinaires à singularités régulières, au réseau $\mathcal{H}_f^{(0)}$ est associé un ensemble fini d'"exposants" α (en général complexes; dans notre cas ils seront *rationnels* d'après le théorème de "quasi-unipotence de la monodromie") et un nombre fini d'entiers naturels p , tels que toute fonction de la forme (1.2) (image d'un élément de $\mathcal{H}_f^{(0)}$ par une solution f_e) s'écrive comme une somme finie

$$(1.5) \quad \tilde{\psi}(t) = \sum_{\alpha, p} c_{\alpha, p}(t) t^{\alpha} (\text{Log } t)^p, \quad c_{\alpha, p} \in \mathbb{C}\{t\}.$$

Les résultats les plus profonds connus à l'heure actuelle sur ces exposants sont ceux de Varchenko[45][46], qui les relie à la structure de Hodge mixte de la cohomologie évanescents (cf. aussi la jolie version de M.Saito[36]; une exposition succincte est donnée dans [30]).

Conclusion : L'intégrale (1.0) admet un développement asymptotique (transformé de Laplace-Borel de (1.5))^(*)

$$(1.6) \quad \psi(\tau) \sim \sum_{\alpha, p} \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\alpha, p}^{(k)} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\tau^{\alpha+k+1}} (\text{Log } \tau)^p,$$

où les $c_{\alpha, p}^{(k)}$ sont les coefficients du développement de Taylor de $c_{\alpha, p}$ à l'origine :

$$c_{\alpha, p}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\alpha, p}^{(k)} t^k.$$

Remarquez la non-convergence du développement asymptotique (1.6) due à la présence des fonctions gamma au numérateur.

^(*) On sait que tous les α sont > -1 , ce qui exprime la convergence à l'origine de l'intégrale (1.1).

Exemple : cas d'un point critique quadratique non dégénéré

Dans ce cas l'onglet tronqué de projection $[0, t]$ (dont $e(t)$ est le bord) s'identifie dans des coordonnées "de Morse" (1ère partie, §3) à la boule réelle à n dimensions de rayon \sqrt{t} . La fonction $\tilde{\psi}(t)$ peut s'écrire comme la dérivée par rapport à t d'une intégrale sur cet onglet, et l'on en déduit la formule (cf. Leray[19]):

$$(1.5)' \quad \tilde{\psi}(t) = c(t) t^{\frac{n}{2}-1}, \quad c(t) \in \mathbb{C}\{t\}$$

où le coefficient constant de la fonction $c(t)$ est donné par

$$(1.7) \quad c_0 = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\text{Hess } f)^{-\frac{1}{2}} a(0), \quad \text{pour } \omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n^{(*)}$$

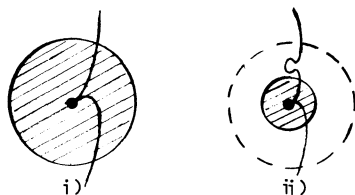
Par transformation de Laplace-Borel on retrouve ainsi la formule célèbre "de la phase stationnaire" :

$$(1.6)' \quad \psi(\tau) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\text{Hess } f)^{-\frac{1}{2}} a(0) \tau^{-n/2} [1 + O(\frac{1}{\tau})].$$

1.2 Dépendance en u

Généraliser la définition du module différentiel de Gauss-Manin au cas "avec paramètre" u ne présente pas de difficulté particulière si l'on adopte un point de vue local à la source : il suffit dans la définition (1.4) de remplacer $\Omega_{x,t}^\bullet$ par $\Omega_{Z/S}^\bullet$, où $Z = X \times_{\mathbb{C}} S$. On obtient ainsi sur X un faisceau $\mathcal{H}_{\mathbf{F}}^{\text{loc}}$ de $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{Q}_S)$ -modules, à support sur l'ensemble critique C . Mais il n'est pas raisonnable d'espérer des propriétés de "cohérence" de ce faisceau, sauf si l'on se restreint aux strates d'une "stratification de Thom" de C (stratification vérifiant les conditions locales de Thom pour l'application \mathbf{F} , cf. [44][35]): intuitivement, cela correspond au fait que la condition de transversalité qui définit les "boules de Milnor" n'est pas continue par déformation, mais seulement semi-continue (cf. Fig.3).

Fig.3



Boules de Milnor:

- i) en un point spécial
- ii) en un point plus général

A chaque strate C_I d'une telle stratification est associée un système local d'"homologie évanescence" (de rang $\mu_I =$ nombre de Milnor des points de C_I) auquel

(*) La détermination de la racine du Hessien dépend du choix d'orientation du cycle évanescence et de la détermination choisie pour \sqrt{t} . Ces trois objets habitent sur le revêtement universel du cercle trigonométrique \mathbb{S}^1 , et il suffira de décrire leur dépendance mutuelle au point de base $\theta=0$ de ce revêtement: choisissons la détermination positive de \sqrt{t} , alors $(\text{Hess } f)^{\frac{1}{2}}$, qui peut être compris comme le déterminant jacobien d'un changement de coordonnées mettant f sous "forme de Morse", doit être choisi de façon que ce changement de coordonnées transforme l'onglet dont $e(t)$ est le bord en "l'onglet standard" muni de l'orientation définie au paragraphe 3 de la 1ère Partie.

il ne devrait pas être difficile de généraliser le résultat de Maisonobe et Rombaldi (M.R.1.1):

(M.R.1.2) *Le système local d'homologie évanescence (complexifié) relatif à la strate C_I s'identifie au système local des solutions analytiques multiformes dans $S \setminus \Sigma$ de $\mathcal{H}_F^{\text{loc}}|_{C_I}$.* (*)

La formulation précise des définitions correspondantes est laissée au lecteur : disons seulement qu'il s'agit de systèmes locaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension μ_I (nombre de Milnor de $f(\cdot, u)$ aux points $(x, u) \in C_I$) sur l'espace $C_I \times S^1$, où S^1 désigne le cercle trigonométrique des directions des onglets dans le plan des t .

Le point de vue local à la source permet de calculer la contribution *locale* d'un ongle au développement asymptotique d'une intégrale (1), et nous montre que cette contribution dépend analytiquement de u tant que le point critique (t, u) reste dans une strate de Thom C_I . Mais pour comprendre ce qui se passe quand u varie sans contrainte il faut tenir compte des phénomènes *globaux en t* (ou ici *semi-locaux*) évoqués dans la 1ère partie (§4) sous le nom de "*phénomènes de Stokes*" : tant que $(\theta = -\text{Arg } \tau, u)$ évite la cloison de Stokes la décomposition de l'intégrale (1) en somme d'intégrales sur des onglets dépend continûment des paramètres (θ, u) , ce qui permet de représenter (1) par un développement formel

$$(1.8) \quad \psi(\tau, u) \propto \sum_{\lambda} e^{-\tau s^{\lambda}(u)} \sum_{\alpha_{\lambda}, p_{\lambda}} \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\alpha_{\lambda}, p_{\lambda}; \lambda}^{(k)}(u) \frac{\Gamma(\alpha_{\lambda} + k + 1)}{\tau^{\alpha_{\lambda} + k + 1}} (\text{Log } \tau)^{p_{\lambda}},$$

où les fonctions (multiformes) $s^{\lambda}(u)$ décrivent les différentes branches locales de Σ au-dessus de U^* (complémentaire dans U du lieu de bifurcation); les coefficients $c_{\alpha_{\lambda}, p_{\lambda}; \lambda}^{(k)}(u)$ de ces développements sont des fonctions analytiques (multiformes) de u localement indépendantes de θ , mais qui subissent des sauts quand (θ, u) franchit la cloison de Stokes.

2. Point de vue microdifférentiel

2.1 Etude à u fixé (f fonction de x seulement)

Le point de vue microdifférentiel intervient de façon naturelle lorsqu'on veut étudier, dans une situation *globale* (*) comme celle de la 1ère partie, la contribution *locale* d'un point critique de f à la singularité d'une intégrale

$$(2.1) \quad \tilde{\Psi}(t) = \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{d\tilde{f}} \Big|_{f^{-1}(t)}$$

(*) La cohérence de $\mathcal{H}_F^{\text{loc}}|_{C_I}$ comme $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{D}_S)$ -Module devrait pouvoir se démontrer par les techniques de [16].

(♦) Ou bien dans une situation *semi-locale* obtenue par déformation d'une situation locale en fixant une valeur non nulle du paramètre de déformation u .

(où, contrairement à l'intégrale (1.2), $f^{-1}(t)$ désigne maintenant la fibre *globale* de f , de sorte que $\gamma(t) \in H_{n-1}(f^{-1}(t))$ n'est plus un cycle évanescant pour le point critique étudié).

On suppose toujours que le point critique étudié est l'origine, de valeur critique 0. L'hypothèse que ce point critique est *isolé* implique que sa contribution à la singularité de $\tilde{\Psi}(t)$ puisse être localisée à une boule de Milnor B . Plus précisément, soit $\epsilon(t)$ le cycle non compact, trace de $\gamma(t)$ dans la boule de Milnor ouverte B ; il définit une "classe d'homologie co-évanescante", c.à.d. un élément de $H_{n-1}^F(X_t)$ (homologie à support fermé de la fibre de Milnor, duale de l'homologie évanescante par la dualité de Poincaré); de plus on peut donner un sens non ambigu à l'intégrale $\int_{\epsilon(t)} \frac{\omega}{df}|_{f^{-1}(t)}$ en tant que microfonction, c.à.d. comme élément de $\mathcal{D} \text{ mod } \mathcal{O}$, et l'intégrale ainsi comprise ne dépend que de la classe de $\epsilon(t)$ dans $H_{n-1}^F(X_t)$: pour cela (cf. Leray [19], Maisonobe et Rombaldi [20]) on commence par remplacer la classe coévanescante $\epsilon(t) \in H_{n-1}^F(X_t)$ par son "cobord de Leray" $\delta\epsilon(t) \in H_n^F(B \setminus X_t) \cong H_n(B \setminus X_t)$, que l'on peut représenter par une chaîne de $B \setminus X_t$ à bord fixe près du bord de B ; l'intégrale de $\frac{\omega}{2\pi i(t-f)}$ sur cette chaîne est donc une fonction analytique multiforme de t , qui ne dépend du choix du représentant de la classe $\delta\epsilon(t)$ (ou du rayon de la boule B) qu'à l'addition d'une fonction holomorphe près.

Un anneau agit naturellement sur les microfonctions, c'est l'anneau \mathcal{E}_t des opérateurs microdifférentiels de Sato, anneau noethérien qui contient \mathcal{D}_t comme sous-anneau, et où l'opérateur ∂_t est inversible (cf. par exemple [27], microlocalisation §1 et 2). Cet anneau admet une filtration $\dots \subset \mathcal{E}_t^{(m)} \subset \mathcal{E}_t^{(m+1)} \subset \dots$ par l'"ordre" des opérateurs microdifférentiels ($m \in \mathbb{Z}$), avec $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_t^{(m)} = 0$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_t^{(m)} = \mathcal{E}_t$. En particulier $\mathcal{E}_t^{(0)}$ est un sous-anneau de \mathcal{E}_t , et la multiplication à gauche (ou à droite) par ∂_t^m établit une bijection entre $\mathcal{E}_t^{(0)}$ et $\mathcal{E}_t^{(m)}$.

Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser le sous-anneau (commutatif) des opérateurs microdifférentiels à coefficients constants :

$$(2.2) \quad \mathbb{C}\{\partial_t^{-1}\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum a_k \partial_t^{-k} \in \mathbb{C}\{\partial_t^{-1}\} \mid \sum \frac{|a_k|}{k!} \tau^{-k} < \infty \text{ pour } \tau \gg 0 \right\}$$

(anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre zéro à coefficients constants); $\mathbb{C}\{\partial_t^{-1}\}[\partial_t] =$ anneau des opérateurs microdifférentiels d'ordre quelconque à coefficients constants.

On sait [26][27] que la structure différentielle des modules de Gauss-Manin (§1.1) s'étend en une structure microdifférentielle, et plus précisément que

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_f^{(0)} & \text{est un } \mathcal{E}_t^{(0)}\text{-module noethérien, libre de rang } \mu \text{ sur } \mathbb{C}\{\partial_t^{-1}\}; \\ \mathcal{H}_f & \text{est un } \mathcal{E}_t\text{-module noethérien, libre de rang } \mu \text{ sur } \mathbb{C}\{\partial_t^{-1}\}[\partial_t]. \end{cases}$$

L'intégration sur une classe co-évanescence ϵ définit un homomorphisme de \mathbb{C}_t -modules

$$\int_{\epsilon} : \mathcal{H}_f \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$$

c'est-à-dire une *microsolution* (ou solution microfonction) du module de Gauss-Manin.

(M.R.2.1) Proposition (Maisonobe et Rombaldi[20]):

La correspondance $\epsilon \longmapsto \int_{\epsilon}$ identifie l'espace vectoriel (sur \mathbb{C}) d'homologie co-évanescence à l'espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathbb{C}_t}(\mathcal{H}_f, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ des microsolutions de \mathcal{H}_f .

Exemple : le cas quadratique non dégénéré

Dans ce cas la singularité de l'intégrale peut s'écrire sous la forme

$$(2.4) \quad \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} \Big|_{f^{-1}(t)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle e, \gamma \rangle \tilde{c}(\partial^{-1}) \delta_t^{(-\frac{n}{2})}(t) \text{ mod. } \mathcal{O},$$

où la notation $\delta^{(-\alpha)}(t) \in \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ désigne (pour α quelconque $\in \mathbb{C}$) la "dérivée- α -ième de la microfonction de Dirac" définie

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^* \text{ par} \\ \delta^{(-\alpha)}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{-2\pi i (\alpha-1)!} \text{ Log } t \text{ mod. } \mathcal{O} \\ \text{et pour } \alpha \notin \mathbb{N}^* \text{ par} \\ \delta^{(-\alpha)}(t) = \frac{(-t)^{\alpha-1}}{2\pi i \Gamma(-\alpha)} \text{ mod. } \mathcal{O} \end{cases} ;$$

on a $\partial_t^{-k} \delta^{(-\alpha)}(t) = \delta^{(-\alpha-k)}(t)$; dans la formule (2.4), $\tilde{c}(\partial^{-1}) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \partial_t^{-1} + \dots \in \mathbb{C}\{\partial_t^{-1}\}$ est un opérateur microdifférentiel à coefficients constants dont le terme principal est donné par

$$(2.6) \quad \tilde{c}_0 = (2\pi)^{n/2} (\text{Hess } f)^{-\frac{1}{2}} a(0) \quad (\text{si } \omega = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n). (*)$$

Remarque : A la notation "de Dirac" (2.5) près, les formules (2.4)(2.6) sont essentiellement dues à Leray[19].

Elles correspondent aux formules (1.5)' (1.7) par le diagramme des "variations"

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} H_{n-1}^F(X_t) = \text{Hom}_{\mathbb{C}_t}(\mathcal{H}_f, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) & & \text{(d'après M.R.1.1)} \\ \downarrow \text{var} & \parallel & \downarrow \text{var} \\ H_{n-1}(X_t) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{H}_f, \tilde{\mathcal{O}}) & & \text{(d'après M.R.2.1)} \end{array}$$

(*) Même remarque que pour la formule (1.7) concernant la détermination de la racine du Hessien. La convention est ici la même, avec dans la formule (2.5) le même choix de détermination de \sqrt{t} .

où l'application $\text{var} : \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ est celle qui à la classe mod. \mathcal{O} d'une fonction analytique multiforme $\tilde{\psi}(t)$ associe la fonction analytique multiforme $\tilde{\psi}(t) - \tilde{\psi}(e^{-2\pi i} t)$ (excusez l'abus de notation!). Quant à l'application var de l'homologie co-évanescence, sa définition sera rappelée au paragraphe suivant, où l'on verra que c'est un *isomorphisme*; la formule (2.4)(2.6) se déduit donc de (1.5)'(1.7) comme étant l'unique formule qui rende commutatif le diagramme (2.7) (exercice : expliciter la correspondance entre $c(t)$ et $\tilde{c}(\partial_t^{-1})$); le coefficient $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle e, \gamma \rangle$ provient de la formule de Picard-Lefschetz (cf. n°3.2 ci-après).

2.2 Dépendance en u

Les considérations du n°2.1 peuvent se généraliser à des intégrales du type

$$(2.8) \quad \tilde{\psi}(t, u) = \int_{\gamma(t, u)} \frac{\omega}{dx} \Big|_{f^{-1}(t, u)}$$

Un point de vue commode pour cette étude (cf. [32]) est le point de vue des modules sur l'anneau $\mathbb{E}_\pi \langle \partial_u \rangle$, où \mathbb{E}_π désigne l'anneau des opérateurs microdifférentiels relatifs à la projection $\pi : S \rightarrow U$, c.à.d. des familles analytiques en u d'opérateurs microdifférentiels de la variable t , tandis que $\mathbb{E}_\pi \langle \partial_u \rangle$ désigne l'extension polynomiale de cet anneau par les dérivations $\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_p}$. Il s'agit en fait de faisceaux cohérents d'anneaux sur S , et l'on pourra aussi considérer sur U les faisceaux d'anneaux

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_U \{ \{ \partial_t^{-1} \} \} &\subset \pi_* \mathbb{E}_\pi^{(0)} \quad (\text{définition analogue à (2.2)}), \\ \mathcal{O}_U \{ \{ \partial_t^{-1} \} \} [\partial_t] &\subset \pi_* \mathbb{E}_\pi \end{aligned}$$

(familles analytiques en u d'opérateurs microdifférentiels à coefficients constants).

Soit alors $\mathcal{H}_F = \mathbf{F}_* (\mathcal{H}_F^{loc})$ le faisceau image directe du "Module différentiel de Gauss-Manin local à la source" défini au n°2.1. Il est muni d'une filtration évidente, et l'on a les résultats suivants :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_F^{(0)} \text{ est un } \mathbb{E}_\pi^{(0)} \langle \partial_u, \partial_t^{-1} \rangle \text{-Module cohérent,} \\ \text{et } \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)} \text{ est libre de rang } \mu \text{ sur } \mathcal{O}_U \{ \{ \partial_t^{-1} \} \}; \\ \mathcal{H}_F \text{ est un } \mathbb{E}_\pi \langle \partial_u \rangle \text{-Module cohérent,} \\ \text{et } \pi_* \mathcal{H}_F \text{ est libre de rang } \mu \text{ sur } \mathcal{O}_U \{ \{ \partial_t^{-1} \} \} [\partial_t]. \end{array} \right.$$

Nous appellerons \mathcal{H}_F le "module microdifférentiel de Gauss-Manin" (cf. [27], où il apparaît -avec une définition un peu différente mais équivalente- sous le nom de «système microdifférentiel de Gauss-Manin»). Son support est le lieu discriminant $\Sigma = \mathbf{F}(C)$. Sa variété caractéristique est l'ensemble des "directions conormales à Σ " (directions limites de conormales à la partie lisse de Σ).

La notion de *microsolution* pour un tel Module est un peu plus délicate à définir qu'en 2.1: il faut prendre soin de distinguer (cf.[33], d'après des idées de [14])

les **microsolutions locales**, qui forment un faisceau localement constant sur $\mathbb{S}^1 \times \Sigma^*$, où $\Sigma^* = \pi_{\Sigma}^{-1}(U^*)$ (U^* = complément dans U du lieu de bifurcation),

les **microsolutions semilocales**, qui forment un faisceau localement constant de rang μ sur $\mathbb{S}^1 \times U$; sa restriction à $(\mathbb{S}^1 \times U^*)'$ (complément de la cloison de Stokes) est l'image directe du précédent (restreint à $(\mathbb{S}^1 \times \Sigma^*)' = (\text{id}_{\mathbb{S}^1} \times \pi_{\Sigma}^{-1})^{-1}(\mathbb{S}^1 \times U^*)'$).

Ces deux faisceaux ont un répondant topologique, le *faisceau des cycles co-évanescents (locaux resp. semi-locaux)*, qui leur est isomorphe par une généralisation facile de (M.R.2.1) :

(M.R.2.2) *La correspondance $\epsilon \mapsto \int_{\epsilon}$ (intégration sur les cycles co-évanescents) identifie le faisceau des cycles co-évanescents locaux [resp. semi-locaux] au faisceau des microsolutions locales de $\mathcal{H}_{\mathbf{f}}$ [resp. microsolutions semi-locales de $\pi_{*}\mathcal{H}_{\mathbf{f}}$].*

2.3 Modules microdifférentiels de Gauss-Manin et classification des singularités

Les modules microdifférentiels de Gauss-Manin occupent une place importante parmi les modules microdifférentiels holonomes à singularité régulière. Par exemple on peut montrer que *tout module microdifférentiel holonome à caractéristique simple est localement isomorphe au module de Gauss-Manin d'un germe de déploiement \mathbf{F} non dégénéré* (à une transformation "essentielle" ∂_t^{α} ($\alpha \in \mathbb{C}$) près; cf.[27], microlocalisation, §6). De plus, un tel germe de module holonome à caractéristique simple est *stable* si et seulement si le déploiement correspondant est un *déploiement stable* (cf.[28][29]; voir aussi [9] pour une généralisation de la notion de module de Gauss-Manin, conduisant à une classe plus large de modules holonomes stables).

L'un des exemples les plus simples est le module de Gauss-Manin de la catastrophe "pli" de Thom ($f(x,u) = x^3 + ux$); ses microsolutions semi-locales peuvent être représentées, à u fixé, par des fonctions de type hypergéométrique, et leurs transformées de Laplace s'expriment par des fonctions d'Airy. En fait, de très nombreux problèmes de physique mathématique font intervenir des systèmes de Gauss-Manin de déploiements stables (cf. par ex.[1][6][15][26][34]), et il est tentant de voir dans le double aspect de Gauss-Manin (aspect "système holonome" dans S /vs/aspect "image directe" par \mathbf{F}) une généralisation à plusieurs variables du double aspect des "fonctions spéciales de la physique mathématique" (cf. p.ex. Whittaker et Watson [49]): d'une part solutions d'équations différentielles remarquables, d'autre part susceptibles d'être définies sous forme d'intégrales spéciales.

Mais pour que cette idée devienne autre chose qu'une remarque mondaine, il faudrait pouvoir pousser l'étude des modules de Gauss-Manin au-delà du niveau des généralités: savoir en donner des présentations canoniques, savoir représenter leurs micro-solutions par des fonctions analytiques explicitement définies (comme nous l'avons fait ici pour le cas quadratique non dégénéré). C'est pour le moment K.Saito qui est allé le plus loin dans cette voie [39][40][41].

2.3 Microdifférentiel vs/différentiel ?

Le point de vue microdifférentiel vaut-il vraiment la peine d'être introduit de préférence au point de vue différentiel ?

Je le trouve plus souple, et aussi plus naturel si l'on s'intéresse aux singularités, mais je ne sais si les pages précédentes ont suffi à convaincre le lecteur. Qu'il relise alors l'article de Malgrange [21], le premier où ait été mise en évidence la relation entre la monodromie de la fibre de Milnor et l'analyse des intégrales oscillantes: le point de vue microdifférentiel n'y est-il pas présent à chaque ligne ? (Même si le mot n'est pas encore prononcé).

Cependant, il est vrai que le point de vue microdifférentiel n'est pas indispensable, puisqu'on peut passer automatiquement d'un point de vue à l'autre par l'isomorphisme de "variation" (cf. formule (2.7)). Le fait que la variation soit un isomorphisme (§3 ci-après) est l'une des deux propriétés fondamentales des modules de Gauss-Manin, l'autre étant la *dualité de K.Saito* dont il sera question au §4.

3. Etude topologique de la variation

Reprenons les notations de l'introduction, mais en supposant $p=0$ (U =un point). $f:X \rightarrow S$ est donc un représentant de Milnor d'un germe de fonction analytique à point critique isolé (avec $f(0)=0$, $df(0)=0$);

$$S = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \eta\}, \quad X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| < \rho, \quad |f(x)| < \eta\},$$

avec $0 < \eta \ll \rho$, ρ assez petit.

La *variation de Lefschetz* [18] (de l'homologie co-évanescence dans l'homologie évanescence)

$$\text{var: } H_{n-1}^F(X_{t_0}) \rightarrow H_{n-1}^F(X_{t_0}), \quad t_0 \in S^* = S \setminus \{0\}$$

est définie ainsi :

pour $[\epsilon_0] \in H_{n-1}^F(X_{t_0})$, soit $s: [0,1] \rightarrow S^*$ un lacet de base t_0 tournant une fois dans le sens trigonométrique autour de 0, et soit $([\epsilon_\theta] \in H_{n-1}^F(X_{s(\theta)}))_{\theta \in [0,1]}$ une déformation continue du cycle ϵ_0 le long de ce lacet; en réalisant cette déformation par une

isotopie de la fibre de Milnor, isotope à l'identité en restriction à un voisinage du bord de la boule, on obtient une famille de cycles coévanescents ϵ_θ tels que ϵ_1 coïncide avec ϵ_0 en dehors d'un compact de X_{t_0} , de sorte que $\epsilon_0 - \epsilon_1$ est un cycle à support compact, dont la classe d'homologie compacte ne dépend que de $[\epsilon_0]$, et définit $\text{var} [\epsilon_0] = [\epsilon_0 - \epsilon_1] \in H_{n-1}(X_{t_0})$.

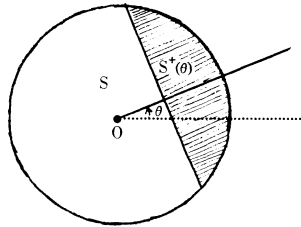
Le but de ce paragraphe est de montrer comment la *dualité des onglets* (1ère partie, §5)^(*) fournit une démonstration topologique très simple du résultat bien connu selon lequel *la variation de Lefschetz est un isomorphisme*.

Si on la lit avec Laplace présent à l'esprit, cette démonstration montre très clairement pourquoi la *transformée de Laplace-Borel des solutions de \mathcal{H}_f* (formule (1.1)) et la *transformée de Laplace des microsolutions de \mathcal{H}_f* (réf.[33]) sont une seule et même notion (cf. n°3.3 ci-après).

3.1 Le transposé de l'isomorphisme «bord»

Pour tout angle θ , posons $S^+(\theta) = \{t \in S \mid \text{Re}(t e^{-i\theta}) > \frac{\eta}{2}\}$ (Fig.4), et $X^+(\theta) = X \cap f^{-1}(S^+(\theta))$.

Fig.4



On va s'intéresser à deux valeurs antipodales de θ , disons par exemple $\theta=0$, et $\theta=\pi$, et l'on posera

$$\begin{aligned} S^+ &= S^+(0) & , & & S^- &= S^+(\pi) \\ X^+ &= X^+(0) & , & & X^- &= X^+(\pi). \end{aligned}$$

D'après la 1ère partie, §3, on a des isomorphismes

$$H_n(X, X^\pm) \xrightarrow[\sim]{\partial_\pm} H_{n-1}(X^\pm) \approx H_{n-1}(X_{t_\pm}), \quad \text{où } t_+ \in [\frac{\eta}{2}, \eta], \quad t_- = -t_+$$

Regardons en particulier l'isomorphisme ∂_- , et cherchons à expliciter son transposé ∂_-^T :

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X^+) & \xleftarrow{\partial_-^T} & H_{n-1}^F(X_{t_-}) \\ \text{dualité de la 1ère partie §3} \Big| & & \Big| \text{dualité de Poincaré} \\ H_n(X, X^-) & \xrightarrow{\partial_-} & H_{n-1}(X_{t_-}) \end{array}$$

^(*) Il s'agit en réalité de l'analogue semi-local des résultats de la 1ère partie, §5.

Lemme : $\partial_-^T = (-1)^n j^{-1} \circ \ell_{\otimes}$, où ℓ_{\otimes} et j sont les applications définies

ci-dessous :

$$1^{\circ) } \ell_{\otimes} : H_{n-1}^F(X, \underline{t}_-) \longrightarrow H_n^F(X, X^+) \\ \epsilon_- \longmapsto \ell \otimes \epsilon_-$$

où $\ell : [0, 1] \rightarrow S^*$ mod. S^+ est un chemin dont la classe d'homologie relative est représentée sur la Fig.5,

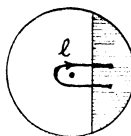


Fig.5

et $\ell \otimes \epsilon_-$ désigne la classe d'homologie d'un n -cycle déduit du $(n-1)$ -cycle ϵ_- par "isotopie au-dessus de ℓ "

2 $^{\circ}$) L'isomorphisme $j : H_n(X, X^+) \xrightarrow{\approx} H_n^F(X, X^+)$ est défini comme le composé des deux isomorphismes

$$H_n(X, X^+) \xrightarrow{\approx} H_n(X, \partial_\rho, X \cup X^+) \xleftarrow{\approx} H_n^F(X, X^+)$$

où $\partial_\rho, X = \{x \in X \mid \rho' < \|x\| (< \rho)\}$; le premier de ces deux isomorphismes est induit par l'inclusion des paires, et se démontre par déformation rétraction; le second provient du fait que la limite projective qui définit les chaînes relatives à support fermé $(C_n^F(X, X^+) = \lim \text{proj. } C_n(X, \partial_\rho, X \cup X^+))$ est homologiquement triviale par un argument d'isotopie.

Preuve du lemme : Pour $\Delta_- \in H_n(X, \bar{X}^-)$, on a en posant $e_- = \partial_- \Delta_-$:

$$\langle \partial_-^T \epsilon_-, \Delta_- \rangle = \langle \epsilon_-, \partial_- \Delta_- \rangle = \langle \epsilon_-, e_- \rangle,$$

à comparer à

$$\langle j^{-1}(\ell \otimes \epsilon_-), \Delta_- \rangle = \langle \ell \otimes \epsilon_-, \underline{T}_- \otimes e_- \rangle = (-1)^{n-1} \langle \ell, \underline{T}_- \rangle \langle \epsilon_-, e_- \rangle \\ = (-1)^n \langle \epsilon_-, e_- \rangle,$$

c.q.f.d.

(on a noté \underline{T}_- la demi-droite orientée $[0, -\infty[$, base de l'onglet Δ_- , et utilisé le fait que localement au-dessus du point d'intersection $\ell \cap \underline{T}_-$ nos cycles peuvent s'écrire comme les produits tensoriels indiqués).

3.2 Lien avec la variation

Lemme : Soit $\epsilon_+ \in H_{n-1}^F(t_+)$, et soit $\epsilon_- \in H_{n-1}^F(t_-)$ la classe co-évanescence déduite de ϵ_+ par isotopie du côté $\text{Im } t > 0$. Alors

$$\text{var } \epsilon_+ = \partial_+(j^{-1}(\ell \otimes \epsilon_-))$$

Preuve : conséquence immédiate des définitions.

Conclusion : Il résulte des lemmes 3.1 et 3.2 que

$$(var) \quad \boxed{\text{var } \epsilon_+ = (-1)^n \partial_+ \partial_-^T \epsilon_-} ,$$

ce qui démontre que la variation est un isomorphisme.

Exemple : le cas quadratique non dégénéré

Dans ce cas les groupes d'homologie considérés sont cycliques, engendrés par des onglets et cycles évanescents qu'on peut mettre en correspondance de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_+ & \xrightarrow{e^{i\pi}} & \Delta_- \\ \downarrow \partial_+ & & \downarrow \partial_- \\ e_+ & \xrightarrow{e^{i\pi}} & e_- \end{array}$$

où $e^{i\pi}$ symbolise le prolongement par isotopie dans le demi-plan $\text{Im}t > 0$ (ce qui correspond à $\Delta_+ = \Delta(0)$, $\Delta_- = \Delta(\pi)$ avec les conventions de notation de la 1ère partie, formule (5.3)') .

Si l'on prend pour ϵ_+ le dual de e_+ , défini par $\langle \epsilon_+, e_+ \rangle = 1$, on aura aussi par isotopie $\langle \epsilon_-, e_- \rangle = 1$, ce qui comparé à la formule $\langle \Delta_+, \Delta_- \rangle = (-1)^{n(n+1)/2}$ (1ère partie, formule (5.3)') montre que $\Delta_+ = (-1)^{n(n+1)/2} \partial_-^T \epsilon_-$.

La formule (var) s'écrit donc dans ce cas

$$(P.L.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{var } \epsilon_+ = (-1)^{n(n-1)/2} e_+ , \\ \text{ce qui peut encore s'écrire} \\ \text{var } \gamma = (-1)^{n(n-1)/2} \langle e_+, \gamma \rangle e_+ : \end{array} \right.$$

c'est la formule de Picard-Lefschetz [18].

3.3 Traduction par Laplace

Soit $\omega \longmapsto \int_{\epsilon} \frac{\omega}{df} \Big|_{f^{-1}(t)}$ une microsolution du module de Gauss-Manin définie par l'intégration sur un cycle co-évanescents ϵ (cf.(M.R.2.1)). Reprenons les notations précédentes ($\epsilon_+ = \epsilon(\theta=0)$, $\epsilon_- = \epsilon(\theta=\pi)$, ...) et notons $e_+ = \text{var } \epsilon_+ = \partial_+ \Delta_+$, où $\Delta_+ = (-1)^n \partial_-^T \epsilon_- = j^{-1} \circ \omega_{\otimes}(\epsilon_-)$. Alors la transformée de Laplace (au sens de [33]) de cette microsolution s'écrit $\omega \longmapsto \psi^\omega(\tau) = \int_{\Delta_t} e^{-\tau f} \omega$, et coïncide avec la transformée de Laplace-Borel $\psi^\omega(\tau) = \int_0^\tau e^{-\tau t} \tilde{\psi}^\omega(t) dt$ de la solution $\tilde{\psi}^\omega(t) = \int_{\epsilon_+} \frac{\omega}{df} \Big|_{f^{-1}(t)}$.

Cette affirmation est une conséquence immédiate de tout ce qui précède. On peut aussi en donner une version "avec paramètres" (cf.n°2.2), soit "locale" soit "semi-locale".

4. Une interprétation transcendante de la «dualité par résidus» de K.Saito

Depuis quelques années K.Saito a beaucoup avancé (avec sa théorie des "formes primitives") dans ce qui me semble être une tentative de réaliser pour Gauss-Manin l'idéal d'Abhyankar : transformer l'"Algèbre universitaire" (avec ses "idéaux", "modules", etc...) en "Algèbre de Lycée" (avec des équations explicites). Une des clefs de sa construction est la notion de «higher residue pairing», dont la définition algébrique est assez compliquée (cf.[39][40]). Je me propose ici d'en donner une interprétation transcendante, qui utilise de façon amusante les constructions des paragraphes précédents.

4.0 - Soit
$$\mathbf{F}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$$

$$x, u \longmapsto t=f(x,u), u$$

un germe de déploiement de fonction à point critique isolé, et soient

$$\zeta = \left[\frac{\omega}{t-f} \right] \quad \zeta' = \left[\frac{\omega'}{t-f} \right]$$

deux éléments de $\mathcal{H}_{\mathbf{F}}^{(0)}$.

Choisissons une base $(\Delta_{\lambda}(\theta))_{\lambda=1,2,\dots,\mu}$ de sections multiformes du système local sur \mathbb{S}^1 d'homologie relative de \mathbf{F} (cf.§0), et soit $(\bar{\Delta}_{\lambda}(\theta+\pi))_{\lambda=1,2,\dots,\mu}$ la base duale (1ère Partie, paragraphe 6).

Posons
$$\psi_{\lambda}^{\omega}(\tau, u) = \int_{\Delta_{\lambda}} e^{-\tau f(x, u)} \omega$$

 et
$$\bar{\psi}_{\lambda}^{\omega'}(\tau, u) = \int_{\bar{\Delta}_{\lambda}} e^{+\tau f(x, u)} \omega'.$$

Il s'agit (cf.§0) de sections multiformes sur \mathbb{S}^1 du faisceau des "développements asymptotiques au sens de Malgrange"[23], c.à.d. du faisceau quotient a^0/\bar{a}^- , où a^0 = le faisceau sur $\mathbb{S}^1 \ni e^{i\theta}$ des germes de fonctions $\psi(\tau, u)$ analytiques dans des voisinages sectoriels de $\tau=\infty$ (c.à.d. $|\tau| > R$ grand, $-\text{Arg } \tau$ voisin de θ), admettant pour tout $\alpha > 0$ une majoration $|\psi(\tau, u)| < e^{\alpha|\tau|}$ pour tout $|u| < \epsilon$ assez petit; (ϵ dépendant de α);

\bar{a}^- = même définition, mais avec une majoration

$$|\psi(\tau, u)| < e^{-\beta|\tau|} \text{ pour } \beta > 0 \text{ convenable.}$$

Notre résultat principal est le

Théorème : L'expression

$$\mathcal{K}^{\zeta, \zeta'}(\tau, u) = \sum_{\lambda=1, \dots, \mu} \psi_{\lambda}^{\omega}(\tau, u) \bar{\psi}_{\lambda}^{\omega'}(\tau, u)$$

définit une section uniforme du faisceau a^0/\bar{a}^- des "développements asymptotiques de Malgrange" indépendante du choix de la base (Δ_{λ}) , et dont le développement asymptotique au sens classique s'écrit :

$$\mathcal{K}^{\zeta, \zeta'}(\tau, u) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K^{(r)}(\zeta, \zeta')(u) \cdot \tau^{-n-r}$$

où les $K^{(r)}(\zeta, \zeta') \in \mathbb{C}\{u_1, \dots, u_p\}$ sont les «residue pairing» successifs de K.Saito.

4.1 - Commençons par rappeler une construction de K.Saito([39], §10):

soit $D\mathbf{F} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ le déploiement "self-différence" de \mathbf{F} , défini à l'aide de la fonction $D\mathbf{F}(x,y,u) = f(x,u) - f(y,u)$ par $D\mathbf{F}(x,y,u) = (Df(x,y,u), u)$.

En écrivant $D\mathbf{F}$ comme une application composéee

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{\begin{matrix} \mathbf{F} \times \mathbf{F} \\ \cup \\ \mathbf{F} \end{matrix}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{Dt} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \\ \begin{matrix} x \\ y \\ u \end{matrix} & & \begin{matrix} t \\ t' \\ u \end{matrix} & & \begin{matrix} s \\ u \end{matrix} \\ & & \parallel \parallel & & \parallel \\ & & f(x,u) \ f(y,u) & & t-t' \end{array}$$

on est amené naturellement à considérer l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathbf{F}}^{(0)} & \times & \mathcal{H}_{\mathbf{F}}^{(0)} & \xrightarrow{(Dt)_*^{(0)}} & \mathcal{H}_{D\mathbf{F}}^{(0)} \\ \left[\frac{a(x,u) dx}{-2\pi i(t-f(x,u))} \right] & \times & \left[\frac{b(y,u) dy}{-2\pi i(t'-f(y,u))} \right] & \longmapsto & \left[\frac{a(x,u) b(y,u) dx \wedge dy}{-2\pi i(s-Df(x,y,u))} \right] \end{array},$$

ce qui s'écrit encore

$$[a(x,u) \delta(t-f(x,u)) dx] \times [b(y,u) \delta(t'-f(y,u)) dy] \longmapsto [a(x,u) b(y,u) \delta(s-Df(x,y,u)) dx dy].$$

Il s'agit d'une application $\mathbb{C}\{u\}[[\partial^{-1}]]$ -bilinéaire, où l'on a noté $\partial = \partial_s = \partial_t = -\partial_{t'}$; elle s'étend de façon évidente en une application $\mathbb{C}\{u\}[[\partial^{-1}]][\partial]$ -bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathbf{F}} & \times & \mathcal{H}_{\mathbf{F}} & \xrightarrow{(Dt)_*} & \mathcal{H}_{D\mathbf{F}} \\ [a(x,u) \delta^{(k)}(t-f(x,u)) dx] & \times & [b(y,u) \delta^{(k')}(t'-f(y,u)) dy] & \longmapsto & [a(x,u) b(y,u) \delta^{(k+k')}(s-Df(x,y,u)) dx dy] \end{array}$$

Je me propose de montrer (Prop.4.3) que l'homologie co-évanescence de $D\mathbf{F}$ contient une classe canonique ϵ_0 , telle que la microsolution correspondante f_{ϵ_0} (cf. n°2.2) soit de la forme

$$\begin{array}{ccc} f_{\epsilon_0} : \mathcal{H}_{D\mathbf{F}} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{u\}[[\partial_s^{-1}]][\partial_s] \delta(s) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{H}_{D\mathbf{F}}^{(0)} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{u\}[[\partial^{-1}]] \delta^{(-n)}(s) \end{array}$$

où $\delta(s)$ est la microfonction de Dirac, et $\delta^{(-n)}(s) = \partial_s^{-n} \delta(s)$ (cf. n°2.1).

Par composition avec $(Dt)_*$ on obtiendra ainsi une application $\mathbb{C}\{u\}[[\partial^{-1}]][\partial]$ -bilinéaire:

$$(4.1) \quad K = f_{\epsilon_0} \circ (Dt)_* : \mathcal{H}_{\mathbf{F}} \times \mathcal{H}_{\mathbf{F}} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\}[[\partial_s^{-1}]][\partial_s] \delta(s)$$

$$\zeta \quad , \quad \zeta' \longmapsto \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ (\text{borné inf})}} K^{(r)}(\zeta, \zeta') \delta^{(-n-r)}(s)$$

dont les différents coefficients $K^{(r)}(\zeta, \zeta') \in \mathbb{C}\{u\}$ se trouveront coïncider avec les "residues pairing" successifs de K.Saito.

Remarque : Comme la construction est invariante par changement de base, il sera commode de la faire pour un déploiement universel.

4.2 Description de l'homologie évanescence de $D\mathbf{F}$

Supposons que \mathbf{F} soit un germe de déploiement universel, et considérons au-dessus d'une boule U de \mathbb{C}^p le diagramme des ensembles critiques (désignés par la lettre C) et des lieux discriminants (désignés pas la lettre Σ) :

$$\begin{array}{ccc} C_{D\mathbf{F}} = C_{\mathbf{F}} \times_{\bar{U}} C_{\mathbf{F}} & \supset & (C_{\mathbf{F}} \times_{\bar{U}} C_{\mathbf{F}})|_{x=y} \approx C_{\mathbf{F}} \\ \text{(revêtement à } \mu^2 \text{ feuilletts de } U) & & \text{(revêtement à } \mu \text{ feuilletts de } U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_{D\mathbf{F}} & \supset & \{0\} \times U \end{array}$$

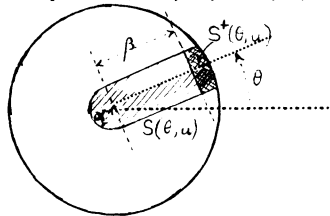
Nous voyons que $\Sigma_{D\mathbf{F}}$ a une composante $\Sigma_0 = \{0\} \times U$ de multiplicité μ et $\mu(\mu-1)$ autres composantes de multiplicité 1 :

$$\Sigma_{D\mathbf{F}} = \Sigma_0 \cup \Sigma' \quad (\Sigma' = \bigcup_{\lambda \neq \lambda'} \Sigma_{\lambda\lambda'}, \text{ union des autres composantes}).$$

Reprenons les notations du §0, où les germes sont remplacés par des "représentants de Milnor", de sorte que l'espace source de \mathbf{F} est noté X ; de même l'espace source de $D\mathbf{F}$ sera noté $DX = X \times_{\bar{U}} X$, etc...

Pour étudier comment l'homologie relative de $D\mathbf{F}$ se déduit de celle de \mathbf{F} , il est plus commode de définir cette dernière comme homologie de la paire $(X(\theta, u), X^+(\theta, u))$, image réciproque par $f(\cdot, u)$ de la paire $(S(\theta, u), S^+(\theta, u))$ de la figure ci-dessous :

Fig. 6



On fera de même pour l'homologie relative de $D\mathbf{F}$, mais en remplaçant les distances α, β de la Figure par $2\alpha, \beta - \alpha$ respectivement, ce qui permet de définir l'application bilinéaire "produit de Künneth" des complexes de chaînes relatifs :

$$C.(X(\theta, u), X^+(\theta, u)) \times C.(X(\theta + \pi, u), X^+(\theta + \pi, u)) \xrightarrow{\otimes} C.(DX(\theta, u), DX^+(\theta, u))$$

d'où l'on déduit en homologie le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X(\theta, u), X^+(\theta, u)) \times H_n(X(\theta + \pi, u), X^+(\theta + \pi, u)) & \xrightarrow{\otimes} & H_{2n}(DX(\theta, u), DX^+(\theta, u)) \\ \Delta(\theta) & \Delta'(\theta + \pi) & \longmapsto \Delta(\theta) \otimes \Delta'(\theta + \pi) \\ \downarrow \partial & \downarrow \partial & \downarrow \partial \\ H_{n-1}(X^+(\theta, u)) & \times & H_{n-1}(X^+(\theta + \pi, u)) & \xrightarrow{*} & H_{2n-1}(DX^+(\theta, u)) \\ e(\theta) & e'(\theta + \pi) & \longmapsto & e(\theta) * e'(\theta + \pi) \end{array}$$

où l'application $*$ désigne le "joint" des cycles évanescents, défini par la commutativité du diagramme (rappelons que les flèches verticales sont des isomorphismes).

Lemme : L'application bilinéaire \otimes [resp. $*$] fait du groupe de droite le produit tensoriel des deux groupes de gauche.

Preuve : Comme il s'agit de systèmes locaux sur l'espace connexe $\mathbb{S}^1 \times U$, il suffit de vérifier le lemme pour (θ, u) générique, ce qui est facile : la décomposition (4.4) (1ère Partie) de l'homologie fournit des bases explicites des groupes de gauche, dont il est facile de vérifier qu'elles donnent par \otimes , $*$ des bases des groupes de droite :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\lambda\lambda'}(\theta) & = & \Delta_{\lambda}(\theta) \otimes \Delta_{\lambda'}(\theta+\pi) \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, \dots, \mu \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ e_{\lambda\lambda'}(\theta) & = & e_{\lambda}(\theta) * e_{\lambda'}(\theta+\pi) \end{array}$$

où $e_{\lambda\lambda'}(\theta)$ est un cycle évanescents correspondant à la valeur critique $s^{\lambda\lambda'} = s^{\lambda} - s^{\lambda'}$ de $Df(\cdot, u)$, donc à la branche $\Sigma_{\lambda\lambda'}$, pour $\lambda \neq \lambda'$; pour $\lambda = \lambda'$, les $e_{\lambda\lambda}(\theta)$ sont les μ cycles évanescents correspondant à la branche Σ_{\circ} .

Remarque : On obtiendrait par la même méthode une démonstration très simple du résultat de Sébastiani-Thom[43], dont ce qui précède est un cas particulier.

4.3 Définition de la classe co-évanescents ϵ_{\circ} , et description de la microsolution correspondante

Soient $e = \partial\Delta$ et $e' = \partial\Delta'$ deux sections multiformes de l'homologie évanescents semi-locale de \mathbf{F} . Le nombre d'intersection $\langle \Delta'(\theta+\pi), \Delta(\theta) \rangle$ (cf. 1ère Partie, §5) est évidemment continu en θ, u , donc constant. Il définit donc une application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_{\circ} : H_{2n-1}(DX^+(\theta, u)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ e * e' & \longmapsto & \langle \Delta'(\theta+\pi), \Delta(\theta) \rangle \end{array}$$

indépendante de θ, u , c.à.d. une section globale sur \mathbb{S}^1 du système local d'homologie co-évanescents de $D\mathbf{F}$.

Proposition : La microsolution de $\mathcal{H}_{D\mathbf{F}}^{\epsilon_{\circ}}$ définie par $\int_{\epsilon_{\circ}}$ (cf. n°2.2) est nulle aux points génériques de Σ' , et a donc son support dans Σ_{\circ} . Le long de Σ_{\circ} elle est à valeurs dans $\mathbb{C}\{u\}\{\{\partial_s^{-1}\}\}[\partial_s]\delta(s)$, et plus précisément elle envoie $\mathcal{H}_{D\mathbf{F}}^{\epsilon_{\circ}(0)}$ dans $\mathbb{C}\{u\}\{\{\partial_s^{-1}\}\}\delta^{(-n)}(s)$.

Preuve : Pour une valeur générique fixée de θ , plaçons-nous au-dessus "d'une région de Stokes" de l'espace U (c.à.d. une composante connexe du complémentaire de la "cloison de Stokes" : cf. 1ère Partie, §4). Alors l'homologie évanescents admet la base $(e_{\lambda\lambda'})$ définie au n°4.2, et la formule $\langle \epsilon_{\circ}, e_{\lambda\lambda'} \rangle = 0$ pour $\lambda \neq \lambda'$ implique que les composantes $\Sigma_{\lambda\lambda'}$ sont non singulières pour les intégrales $\int_{\epsilon_{\circ}}$ (cf. n°2.1, formule (2.4)). Comme l'union des régions de Stokes est dense, la première partie de la proposition en résulte par le théorème des singularités inexistantes.

La deuxième partie s'obtient en appliquant à nouveau à D^F la formule (2.4) (ou plutôt sa version "avec paramètres") pour chacun des μ points critiques quadratiques non dégénérés $x^\lambda \times x^\lambda$ de $Df(\cdot, u)$ pour une valeur générique de u : on trouve ainsi que pour $u \in U^*$, ouvert dense de U , l'intégrale sur ϵ_0 d'une forme à pôle simple le long de $s - Df(x, y, u) = 0$ est localement de la forme

$$k(s, u) s^{n-1} \text{Log } s + h(s, u)$$

(k, h holomorphes au voisinage de $\{0\} \times U^*$); le fait que k, h s'étendent en fonctions holomorphes au voisinage de $\{0\} \times U$ se déduit de la 1ère partie de la proposition, qui nous apprend que l'intégrale étudiée est de classe de Nilsson locale le long de $\{0\} \times U$.

Remarque : La formule (2.6) nous permet d'expliciter le terme principal du développement de $\int_{\epsilon_0} \tilde{\zeta}$,

$$\text{pour } \tilde{\zeta} = [c(x, y; u) \delta(s - Df(x, y, u)) dx_\lambda dy] \in \mathcal{H}_{D^F}^{(0)} ;$$

on trouve, pour u générique

$$\int_{\epsilon_0} \tilde{\zeta} = \left((-i)^{n^2} \sum_{\lambda=1}^{\mu} \frac{c(x^\lambda, x^\lambda; u)}{\text{Hess}_{x^\lambda} f(x^\lambda, u)} \right) \delta^{(-n)}(s) + \dots$$

expression qui s'étend à u quelconque grâce à la notion de "résidu de Grothendieck":

$$\int_{\epsilon_0} \tilde{\zeta} = (-i)^{n^2} \text{Res}_{\mathbb{C}^n \times U/U} \left[\frac{c(x, x; u) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f'_{x_1} \dots f'_{x_n}} \right] \delta^{(-n)}(s) + \dots ;$$

en appliquant cette formule à $\tilde{\zeta} = (Dt)_*^{(0)}(\zeta, \zeta')$ pour $(\zeta, \zeta') \in \mathcal{H}_{\mathbf{f}}^{(0)} \times \mathcal{H}_{\mathbf{f}}^{(0)}$ (cf. n°4.1), on retrouve bien comme coefficient de $\delta^{(-n)}(s)$ le «1st residue pairing» $K^{(0)}(\zeta, \zeta')$ de *K.Saito* (au coefficient $(-i)^{n^2}$ près).

4.4 Preuve du théorème 4.0 :

On voit facilement que l'application bilinéaire K définie au n°4.1 vérifie les propriétés énoncées dans [40], théorème (4.10) (après traduction par "Laplace"). Par ailleurs on montre sans difficulté (*K.Saito*, communication privée) que ces propriétés suffisent à caractériser les "higher residue pairings", une fois connu le "1st residue pairing" $K^{(0)}$. Compte tenu de la remarque ci-dessus, notre application bilinéaire K coïncide donc bien avec celle de *Saito*. Pour en déduire le théorème 4.0 il suffit d'expliciter (à l'aide du n°3.3) la transformée de Laplace de la microsolution \int_{ϵ_0} définie en 4.3.

•



Le complexe $C_*^{[\Phi]}$ des chaînes «semi-algébriques à support dans Φ »

Traditionnellement l'homologie à support dans Φ est définie comme l'homologie du complexe des combinaisons linéaires *localement finies*, à support dans Φ , de simplexes singuliers.

Mais le fait d'avoir des combinaisons infinies de simplexes rend difficile de définir une notion de semi-Algèbricité suffisamment contraignante au voisinage de l'infini. C'est pourquoi on préférera travailler avec l'homologie relative d'un compactifié.

Soit Z une compactification de \mathbb{C}^n , c.à.d. une variété algébrique compacte (complexe) irréductible contenant \mathbb{C}^n comme ouvert de Zariski : $\mathbb{C}^n = Z \setminus Z_\infty \subset Z$. Définissons dans Z la famille de supports

$$\Phi_Z = \{A \text{ fermé } \subset Z \mid A \cap \mathbb{C}^n \in \Phi\};$$

en particulier $\Phi_Z|_{Z_\infty} =$ tous les fermés = tous les compacts (de Z_∞).

Soit $C_*^{\Phi_Z}(Z)$ le complexe des chaînes singulières de Z à support dans Φ_Z ; comme Z est compact il s'agit de combinaisons linéaires *finies* de simplexes singuliers; celles de ces combinaisons dont les simplexes sont *semi-algébriques* en forment un sous-complexe que nous noterons $C_*^{[\Phi_Z]}(Z)$.

En faisant le quotient de $C_*^{\Phi_Z}(Z)$ [resp. de $C_*^{[\Phi_Z]}(Z)$] par le sous-complexe $C_*(Z_\infty)$ [resp. $C_*^{[\]}(Z_\infty)$] des chaînes [resp. chaînes semi-algébriques] de Z_∞ à supports compacts, on obtient un complexe qui sera noté

$$C_*^{\Phi_Z}(Z, Z_\infty) \text{ [resp. } C_*^{[\Phi_Z]}(Z, Z_\infty)].$$

Tout morphisme de compactification $\hat{Z} \rightarrow Z$ induit des homomorphismes des complexes de chaînes correspondants, ce qui permet de définir les limites projectives^(*)

$$C_*^\Phi = \lim_{\text{proj.}} \text{proj. } C_*^\Phi(Z, Z_\infty)$$

$$C_*^{[\Phi]} = \lim_{\text{proj.}} \text{proj. } C_*^{[\Phi_Z]}(Z, Z_\infty).$$

Proposition :

- i) les groupes d'homologie des $C_*^{\Phi_Z}(Z, Z_\infty)$ forment un système projectif *trivial*, de limite projective H_*^Φ (homologie de \mathbb{C}^n à supports dans Φ);
- [i] la même chose est vraie pour les groupes d'homologie des $C_*^{[\Phi_Z]}(Z, Z_\infty)$;
- [ii] les intégrales $\int e^{-\tau f} \omega$ ($\omega =$ forme polynomiale) sont bien définies sur les éléments de $C_*^{[\Phi]}$, et vérifient la formule de Stokes.

(*) Le fait que les compactifications de \mathbb{C}^n forment un système projectif se déduit du théorème d'Hironaka sur la "résolution des indéterminations d'une application birationnelle" [13].

Preuve de (i) : En fait on va démontrer l'égalité

$$H_*^\Phi = H_*^{\Phi_Z}(Z, Z_\infty)$$

(A0) pour toute compactification Z vérifiant les deux propriétés suivantes :

a) l'application $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ s'étend en une application

$$f_Z: Z \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C});$$

la partie à l'infini de Z peut alors s'écrire

$$Z_\infty = X_\infty \cup Y_\infty$$

où $Y_\infty = f_Z^{-1}(\infty)$, et $X_\infty =$ union des autres composantes de Z_∞ ;

b) Z est lisse, et Z_∞ est un diviseur à croisements normaux (cf. Hironaka [13]).

Nous aurons besoin du

Lemme d'excision à support :

Soit (Z, Z_∞) une paire d'espaces topologiques, et soit Φ_Z une famille de supports sur Z , incluse dans la famille des compacts (on ne suppose pas ici que Z soit compact). Soit $S \subset Z_\infty$ vérifiant les propriétés suivantes pour tout $A \in \Phi_Z$:

- 1) A est inclus dans S au voisinage de tout point de $S \cap A$;
- 2) A est inclus dans Z_∞ au voisinage de tout point de $\bar{S} \cap A$.

Alors l'inclusion de paires $(Z \setminus S, Z_\infty \setminus S) \hookrightarrow (Z, Z_\infty)$ induit un isomorphisme des groupes d'homologie relative

$$H_*^{\Phi_Z \setminus S}(Z \setminus S, Z_\infty \setminus S) \xrightarrow{\approx} H_*^{\Phi_Z}(Z, Z_\infty)$$

(on a noté $\Phi_{Z \setminus S} = \Phi_Z |_{(Z-S)}$).

Preuve : calquée sur la preuve habituelle du théorème d'excision.

Exemple : Avec les hypothèses (A0), un S vérifiant les hypothèses du lemme d'excision à support sera par exemple le complément dans X_∞ d'un voisinage fermé V de $X_\infty \cap Y_\infty$ dans X_∞ .

On aura donc

$$(A1) \quad H_*^{\Phi_Z}(Z, Z_\infty) = H_*^{\Phi_{Z'}}(Z', Z'_\infty)$$

avec $Z' = Z \setminus S, S = X_\infty \setminus V, Z'_\infty = Z_\infty \setminus S = Y_\infty \cup V$.

On peut choisir V de façon qu'il se rétracte par déformation sur $X_\infty \cap Y_\infty$. Alors Z'_∞ se rétracte par déformation sur Y_∞ , de sorte que $H_*(Z'_\infty) = H_*(Y_\infty)$ (homologie à support compact), ce qui donne par la suite exacte d'homologie (compte tenu du fait que $\Phi_{Z'} |_{Z'_\infty} =$ tous les compacts)

$$(A2) \quad H_*^{\Phi_{Z'}}(Z', Z'_\infty) = H_*^{\Phi_Y}(Y, Y_\infty),$$

où l'on a posé $Y = Z' \setminus (X_\infty \setminus X_\infty \cap Y_\infty)$, et $\Phi_Y = \Phi_{Z'} |_Y$.

Il nous reste donc à calculer $H_*^{\Phi_Y}(Y, Y_\infty)$.

Rappelons que Y est muni d'une projection

$$f_Y = f_Z|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Soit $\Omega_R = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus D_R$ le complément dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ du disque de rayon R de $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Ω_R se rétracte par déformation sur ∞ (par homothétie), et cette déformation-rétraction se relève, pour R assez grand, en une déformation-rétraction de $f_Y^{-1}(\Omega_R)$ sur Y_∞ (il suffit de prendre R assez grand pour que D_R contienne toutes les valeurs critiques de la restriction de f_Z aux différentes strates de $X_\infty \setminus X_\infty \cap Y_\infty$: c'est ici qu'il est commode de faire l'hypothèse A0b)).

Cette déformation-rétraction ne préserve pas la famille Φ_Y , mais elle en préserve la sous-famille

$$\Phi_Y(R) = \{A \in \Phi_Y \mid \operatorname{Re}(f e^{-i\theta})|_{A \cap (\Omega_R \setminus \infty)} > 0\}$$

(car les homothéties *restreintes au demi-plan* $\operatorname{Re}(t e^{-i\theta}) > 0$ font croître $\operatorname{Re}(t e^{-i\theta})$ en même temps que $|t|$). On a donc

$$(A3) \quad H_*^{\Phi_Y(R)}(Y, Y_\infty) = H_*^{\Phi_Y(R)}(Y, f_Y^{-1}(\Omega_R)).$$

En appliquant à nouveau le lemme d'excision à support, on peut enlever $f_Y^{-1}(\Omega_{2R})$ à chacun des termes de cette dernière paire, ce qui donne la paire $(f^{-1}(D_{2R}), f^{-1}(D_R))$, avec la famille de supports

$$\Phi_Y(R)|_{f^{-1}(D_{2R})} = \text{tous les compacts dont l'image par } f \text{ est dans}$$

$$E_R = D_R \cup D_{2R}^+(\theta), \text{ où } D_{2R}^+(\theta) = \{t \in D_{2R} \mid \operatorname{Re}(t e^{-i\theta}) > 0\}.$$

Par conséquent, d'après (A3),

$$(A4) \quad H_*^{\Phi_Y(R)}(Y, Y_\infty) = H_*\{f^{-1}(E_R), f^{-1}(E_R \setminus D_R)\},$$

qui est bien égal à H_*^Φ d'après les raisonnements du §1 de la 1ère Partie.

Nous avons donc montré que $H_*^{\Phi_Y(R)}(Y, Y_\infty) = H_*^\Phi$ pour tout R assez grand. Comme la famille Φ_Y est la limite inductive (pour l'inclusion) des familles $\Phi_Y(R)$, il en résulte bien que

$$(A5) \quad H_*^{\Phi_Y}(Y, Y_\infty) = H_*^\Phi,$$

ce qui démontre la partie (i) de la Proposition (combiner (A1), (A2), (A5)).

Preuve de [i] : il suffit de reproduire la démonstration de (i), en se convainquant que toutes les constructions peuvent être choisies *semi-algébriques*.

Preuve de (ii): soit σ un simplexe singulier semi-algébrique (c.à.d. défini par

une application semi-algébrique du simplexe standard) dans Z , à support dans Φ_Z . Si l'image de σ est dans Z_∞ , on décrive que $\int_{\hat{Z}} e^{-\tau f} \omega = 0$.

Sinon, on a affaire à une intégrale impropre, dont la convergence au voisinage de Z_∞ est assurée par les résultats de Herrera sur l'intégration sur les ensembles semi-analytiques :

on considère le graphe de σ comme définissant un courant d'intégration dans l'espace produit du simplexe standard Δ par Z ; d'après Herrera ([12], chap.II, théorème 2.1(c)), l'intégrale sur ce graphe de la forme rationnelle qu'est l'image réciproque de ω dans $\Delta \times Z$ va diverger de façon *au plus polynomiale* au voisinage de $\Delta \times Z_\infty$, de sorte que le facteur exponentiellement décroissant suffira à assurer la convergence. Il est clair que l'intégrale $\int_{\hat{Z}}$ ainsi définie va coïncider avec l'intégrale $\int_{\hat{Z}}$ pour tout morphisme de compactifications induisant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{Z} & \xrightarrow{\quad} & Z \\ \searrow \hat{\sigma} & \Delta & \nearrow \sigma \end{array}$$

L'intégrale ne dépend donc que de la classe de σ dans la limite projective $C_*^{[\Phi]}$.

Quant à la formule de Stokes, on la tire aussi de Herrera.

•

- [1] Airy, G.B., *Intensity of light in a neighborhood of a caustic*, Trans. Cambridge Philos. Society, 6, (1838)
- [2] Arnold, V.I., *Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of projections of Lagrangian manifolds* (en Russe), Funkt. Analiz i evo prilozhenia 6, 3 (1972)
- [3] Arnold, V.I., *Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities* (en Russe), Funkt. Analiz i evo prilozhenia 6, 4 (1972)
- [4] Arnold, V.I., *Remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers* (en Russe), Usp. Math. Nauk 28, 5 (1973)
- [5] Bernstein, I.N., *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter* (en Russe), Funkt. Analiz i evo prilozhenia 6, 4 (1972)
- [6] Berry, M.V., *Cusped rainbows and incoherence effects...*, J.Phys. A 8, 4 (1975)
- [7] Brieskorn, E., *Die Monodromie der isolierten singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta math. 2, (1970)
- [8] Broughton, S.A., *On the topology of polynomial hypersurfaces*, in Proceedings of Symp. in Pure Math. 40, part I, (1983)
- [9] Dai, N.T., N.H.Duc & F.Pham, *Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n°6, (1981)
- [10] Duistermaat, J.J., *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Comm. Pure and Applied Math. 27, (1974)
- [11] Fedoryuk, M.V., *The asymptotics of the Fourier transform of the exponential function of a polynomial*, Dokl. Akad. Nauk 227, (1976), n°3 (english trsl. Soviet Math Dokl. 17, (1976))
- [12] Herrera, M.E., *Integration on a semi-analytic set*, Bull. Soc. Math. France 94, 2 (1966)
- [13] Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety...*, Ann. of Math., 79, n°1 & 2, (1964)
- [14] Kashiwara, M., & T.Kawai, *On holonomic systems of microdifferential equ. III*, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 17, 3, (1981)
- [15] Kashiwara, M., T.Kawai, & T.Oshima, *A study of Feynman integrals by microdifferential equations*, Comm. Math. Phys., 60, (1978)
- [16] Kashiwara, M. & P.Shapira, *Microlocal study of sheaves I*, prépubl. de l'Univ. de Paris-Nord, juin 1983

- [17] Kouchnirenko, A.G., *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, *Inventiones Math.* 32, (1976)
- [18] Lefschetz, S., *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, (1924)
- [19] Leray, J., *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe*, *Bull. Soc. Math. France* 87, (1959)
- [20] Maisonobe, P., & J.E. Rombaldi, *Solutions du système de Gauss-Manin d'un germe de fonction à point critique isolé*, in : (ref.[27])
- [21] Malgrange, B., *Intégrales asymptotiques et monodromie*, *Ann. Ecole Normale Sup.* 4, n°7, (1974)
- [22] Malgrange, B., *Méthode de la phase stationnaire et sommation de Borel*, in *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory*, *Lect. Notes in Physics* 126, Springer, (1980)
- [23] Malgrange, B., *Rapport sur les théorèmes de Boutet de Monvel et Kashiwara*, in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers II-III*, *Astérisque* 101-102, (1983), cf. aussi : cours à cette Conférence
- [24] Maslov, V.P., *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod, Paris 1972
- [25] Milnor, J., *Singular points of complex hypersurfaces*, *Ann. of Math. Studies* (1961), Princeton Univ. Press
- [26] Pham, F., *Caustiques, phase stationnaire et microfonctions*, *Acta Math. Vietnamica* 2, 2, (1977), résumé dans *Caustics and microfunctions*, *Publ. R.I.M.S.* 12, supplément (1977)
- [27] Pham, F., *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, *Progress in Math.* 2, (1980)
- [28] Pham, F., *Déploiements de singularités de systèmes holonomes*, *C.R.Acad.Sci.* 289, série A, (1979)
- [29] Pham, F., *Remarque sur l'équivalence des fonctions de phase*, *C.R.Acad.Sci.* 290, série A, (1980)
- [30] Pham, F., *Structures de Hodge limites d'un point critique isolé*, in *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers (II,III)*, *Astérisque*, 101-102, (1983)
- [31] Pham, F., *Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method*, in *Proc. of Symp. in Pure Math.*, 40, part 2, (1983)
- [32] Pham, F., *Intégrales de type singulier fini et calcul microdifférentiel*, in *Journées complexes Nancy 82*, (1983)
- [33] Pham, F., *Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes*, *L'Enseignement mathématique*, (à paraître)
- [34] Pham, F., *Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique*, preprint Nice 1983, (exposé à la 36ème rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens, I.R.M.A. Strasbourg, (1983))
- [35] Sabbah, C., *Morphismes analytiques sans éclatement et cycles évanescents*, in *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers (II,III)*, *Astérisque* 101-102, (1983)
- [36] Saito, M., *Gauss-Manin system and mixed Hodge structure*, *Proc. Japan Acad.* 58, ser.A, n°1, (1982)
- [37] Saito, M., Exposé à cette conférence
- [38] Saito, M., *On the structure of Brieskorn lattice*, (Grenoble preprint, 1983)
- [39] Saito, K., *On the periods of primitive integrals*, Harvard preprint
- [40] Saito, K., *The higher residue pairings for a family of hypersurface singular points*, in *Proc. of Symp. in Pure Math.* 40, part 1, (1983)
- [41] Saito, K., *Period mapping associated to a primitive form*, (preprint, May 1983); cf. aussi: exposé à cette Conférence
- [42] Sebastiani, M., *Preuve d'une conjecture de Brieskorn*, *Manuscripta Math.* 2, (1970)
- [43] Sebastiani, M., & R.Thom, *Un résultat sur la monodromie*, *Inventiones Math.* 13, (1971)
- [44] Thom, R., *Ensembles et morphismes stratifiés*, *Bull.Amer.Math.Soc.* 75, (1969)
- [45] Varchenko, A.N., *Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure* (en Russe), *Dokl.Akad. Nauk SSSR*, 255, 5, (1980)
- [46] Varchenko, A.N., *Asymptotic mixed Hodge structure on vanishing cohomology*,

- Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Math. 45, 3, (1981)
- [47] Voros, A., *The return of the quartic oscillator*, à paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré, série A, résumé dans: *Problème spectral de Sturm-Liouville: le cas de l'oscillateur quartique*, Sémin. Bourbaki 35ème année, n°602, (1982/83)
- [48] Vui, Hà huy, *Une condition de trivialité topologique à l'infini pour les polynômes complexes*, preprint Nice 1982, (non publié)
- [49] Whittaker, E.T., & Watson, G.N., *A course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 4th ed., (1965).

•