AST

Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell [Pages préliminaires]

Astérisque, tome 127 (1985), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__1_0>

127 ASTÉRISQUE

1985

SÉMINAIRE SUR LES PINCEAUX ARITHMÉTIQUES : LA CONJECTURE DE MORDELL

Lucien SZPIRO

Avec la participation de :
Mireille DESCHAMPS, Pierre DELIGNE, Renée ELKIK, Marguerite FLEXOR, Luc ILLUSIE, Laurent MORET-BAILLY, Michel RAYNAUD, Lucien SZPIRO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Les auteurs des différents articles de ce volume
dédient respectueusement ce travail à André Néron.

reponse: voir Faltings

Greifswald, November 3

Dear Deligne,

after our meeting at Moscow I have realized that it's possible to change Faltings proof in order to obtain some estimate for the number of rational points. Let X be a proper and smooth curve over number field K, $g > 1$, $P \in X(K)$. Consider an abelian variety $A_P = \mathrm{Jac}(X_P)$, where X_P is a ramified (in P) covering of our curve X. Then $\#\{A_P ; P \in X(K)$ mod isogenies$\}$ can be bounded, if You use an effective version of Chebotarev's density theorem (see Serre's paper in Public. Math. IHES). If $T = \{A_P, P \in X(K)$ and all A_P are isogenious$\}$ then by Faltings there exists a set M of primes (which depends only on X and effectively computable) s. th. $h(A_P) = h(A_Q)$ if there exists an isogeny $f : A_P \to A_Q$ with $(\deg f, M) = 1$. From the definition of $h(A)$ we get for all isogenies $f : A_P \to A_Q$: $h(A_Q) \leq \prod_{\ell \in M} c_\ell^{n(\ell)} h(A_P)$ (for exponential height) if $\deg f = \prod \ell^{n(\ell)}$. These constants $c_\ell = c_\ell(X)$ are also can be written explicitly. (to prove this You must decompose f a product of an isogeny of degree, prime with M and of isogenies with elementary kernels ~~of~~ (element. ℓ-groups). The next step is that the function $h(P) = h(A_P)$ is equivalent to some Weil-height on the curve X. Now apply Mumford's estimate for the growth of heights on the curves of $g > 1$ (Amer. J. Math., 1965)

$$h(P_n) \geq c_1^{c_2^n}$$

if You order all $P \in X(K)$ as P_n with $h(P_{n+1}) \geq h(P_n)$. In this estimate the constants $c_{1,2}$ are computable if You know one rational point P_0 on X. More of that it is possible to do all estimates not only in principal computable but to give them in an explicity way (Arakelov's intersection theory is very usefull here). <raspis:

Zarhin have found also some interesting additions to Faltings paper. One of them relates with the proof of Tate's conjecture about homomorphisms. He mentioned that the kernel of isogenies in the proof are isomorphic to the group of all points (of some order) on some abelian variety this gives the invariance of height at this situation without any use of ℓ-divisible groups (at least when the ground field is not too large).

We hope to write some detailed survey article (for Uspekhi) of Faltings proof and all related results. So it would be usefull to give there Your proof of the finiteness for the monodromy (many peoples are interesting in it very much). Do You permit us to do this?

Also I couldnot understand one place in Faltings preprint, where he gives an estimate for non-archimedian part of height (p. 10) (a construction of a scheme $\underset{\sim}{Z}$). If You known some details we would be very thankfull to get them.

Sincerely Yours

Паршин

(A. Parshin)

Gerd Faltings
Universität
Gesamthochschule
Wuppertal

Fachbereich 7
Mathematik

Universität · Gesamthochschule Wuppertal, Postfach 100127, 5600 Wuppertal 1

Geschäftszeichen

Gesprächspartner(-in)

Telex 8 592 262 ghw

☎ (0202) 439-

Gaußstraße 20

Gebäude

5600 Wuppertal 1

26.5.83

Dear Szpiro!

I think I should tell you that in the last days I have proven the Mordell-conjecture. The method is an extension of my Oberwolfach talk and proceeds roughly as follows (the details will be in the paper I shall send to you soon):

We prove, that there are only finitely many isom. classes of principally polarized abelian varieties with bad reduction only at a finite set of places. We already know that this is true up to isogeny. So we fix one A, and consider only B's isogenous to A. For any prime ℓ the π-lattice $T_\ell(B) \subseteq T_\ell(B) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ falls in only finitely many isom.-classes, and it is seen that the ℓ-adic valuation of $\exp(2[K:\mathbb{Q}](h(B)-h(A)))$ $(\in \mathbb{Q}^*)$ is bounded.

($h(B)$ = Hight)

We are done if we show that for big primes $\ell >> 0$

an isogeny

$\varphi : B_1 \longrightarrow B_2$

of degree ℓ^h

does not change $h(B)$.

For this we may assume that $\ell \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

If $d = \# \omega^1_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$, then

$h(B_1) - h(B_2) = \log(\ell)\left(\frac{h}{2} - \frac{d}{m}\right)$, $m = [K : \mathbb{Q}]$,

and by Raynaud (Bull. Soc. math. Fr. 102)

$\tilde{\pi} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ acts on

$\Lambda^{mh}\left(\mathrm{Ind}_{\pi}^{\tilde{\pi}}(\mathrm{Ker}(\varphi)(\bar{K}))\right)$ as

χ_0^{-d},

$\chi_0 : \tilde{\pi} \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$

the cyclotomic character.

Fix p, and let $P_{mh}(T) = \det(T - F_p \mid \Lambda^{mh}(\mathrm{Ind}_{\pi}^{\tilde{\pi}}(T_\ell(A)))$

Then $P_{mh}(p^{-j}) \neq 0$ for $0 \leq j \leq mg$, $j \neq \frac{mh}{2}$, and

$\chi_0^{-d}(F_p) = p^{-d}$ as a zero of P_{mh} mod ℓ.

If ℓ is big enough ($\ell \nmid \prod_{j \neq \frac{mh}{2}} P_{mh}(p^{-j})$),

then $d = \frac{mh}{2}$.

Best wishes, Gerd Faltings

INTRODUCTION

Ce Séminaire, qui s'est tenu à l'E.N.S, rue d'Ulm, en 1983-1984, est centré sur la démonstration par G. Faltings de la conjecture de Mordell : une courbe lisse, projective, géométriquement connexe, de genre au moins deux sur un corps de nombres n'a qu'un nombre fini de points rationnels sur ce corps.

Le lecteur qui veut se faire une idée rapide de cette démonstration lira d'abord l'article original de G. Faltings (Inventiones Vol.73, Fasc. 3 (1983)) ou les deux exposés au Séminaire Bourbaki de novembre 1983 sur ce sujet (n°619 par L. Szpiro et n°616 par P. Deligne). La conjecture de Mordell est démontrée une première fois dans ce volume dans l'exposé X §1,(Corollaire du Théorème 1). La seconde démonstration, plus "effective", se trouve dans l'exposé XI §2. Cette dernière démonstration est une relecture astucieuse par Parshin de la première due à G. Faltings.

Les raisons d'être de ce séminaire sont :

a) de donner une version plus complète que les seize pages imprimées de G. Faltings ou les quarante pages frappées du Séminaire Bourbaki (notons que G. Faltings, G. Wüstholz et alt. ont publié leur séminaire de Bonn sur ce sujet : "Rational points", Vieweg 1984, 268p.)

b) d'apporter des éléments nouveaux, surtout d'effectivité, que nous signalons plus bas dans l'analyse détaillée de chaque exposé (exposés V, VII, XI).

La preuve par G. Faltings de la conjecture de Mordell est organisée autour de quatre "gadgets" : la hauteur modulaire, les isogénies et la conjecture de Tate, la conjecture de Shafarevich, la construction de Kodaira-Parshin. Le "grain de sel" de Parshin utilise en plus la théorie des intersections d'Arakelov. Nous analysons ci-dessous les exposés autour de ces cinq thèmes.

Thème 1 : La hauteur modulaire : (exposés I, IV, V).

Dans l'exposé I, nous introduisons l'idée d'Arakelov : mettre des métriques hermitiennes à l'infini sur les fibrés inversibles permet de définir la hauteur d'un point rationnel d'un point de vue géométrique (Corollaire de la Prop. 1.1 et introduction du §3). Nous montrons d'abord comment ce point de vue permet de penser géométriquement les éléments de la théorie géométrique des nombres de Hermite et Minkowski. En particulier, le théorème 1.4 (Hermite) : "l'ensemble des corps de nombre de degré et de ramification donnés est fini" est d'un usage constant dans ces pages. (On peut le voir comme "la conjecture de Shafarevich pour les morphismes finis"). Nous introduisons ensuite la hauteur modulaire d'une variété abélienne sur un corps de nombres (§3.3 Déf.2). Puis nous montrons que pour une famille semi-stable de variétés abéliennes, sur une base normale et de caractéristique zéro, la hauteur modulaire est à "singularités logarithmiques" (Th.3.2).

Le Théorème 3.1' (Northcott avec singularités logarithmiques) exprime qu'un faisceau ample muni de métriques à singularités logarithmiques permet de définir une hauteur qui satisfasse aux énoncés de finitude habituels.

Pour montrer que l'ensemble des variétés abéliennes polarisées de dimension donnée, de hauteur modulaire bornée, sur un corps de nombres de degré donné, est fini - ce qui est le but de ce thème - il faut réussir à voir la hauteur modulaire comme une hauteur sur une compactification du schéma des variétés abéliennes polarisées, associée à un faisceau ample. C'est ce qui est fait succintement aux exposés IV et V.

Dans l'exposé IV de P. Deligne, est montré le "lemme de Gabber" : quitte à accepter des espaces algébriques à la place des schémas, on a une famille de variétés semi-abéliennes (i.e une extension de variété abélienne par un tore) sur un éclaté d'une compactification du module des variétés abéliennes. La hauteur modulaire peut donc être vue comme associée à une métrique - à singularités logarithmiques - sur la puissance extérieure maximale de l'image directe des différentielles relatives.

Dans l'exposé V de L. Moret-Bailly, est montrée l'amplitude du faisceau inversible cité plus haut, sur une compactification à la Mumford via les groupes thêta. On en déduit bien sûr le Théorème de finitude pour la hauteur modulaire indiqué plus haut (Théorème 1.3). Il est à noter que L. Moret-Bailly a obtenu de cette façon la première démonstration complète du Théorème ci-dessus.

<u>Thème 2</u> : <u>Isogénies et conjecture de Tate</u> (exposés VI, VII, VIII)

Dans l'exposé VIII, M. Flexor explique les arguments de Zarhin et Tate qui réduisent la conjecture de Tate à montrer que dans une classe d'isogéniessur un corps de nombres il n'y a qu'un nombre fini de variétés abéliennes. La conjecture de Tate dit que les G-endomorphismes du premier groupe d'homologie ℓ-adique d'une variété abélienne sont ceux de la variété abélienne sur K quitte à tensoriser par $\mathbb{Z}_\ell$ (G est le groupe de Galois de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K, sur K). On montre aussi par la même occasion que la représentation de G dans ce groupe d'homologie est semi-simple sur $\mathbb{Q}_\ell$. Pour montrer la finitude d'une classe de K-isogénies(Th.2), on veut bien entendu utiliser le Théorème de finitude pour la hauteur modulaire cité plus haut. C'est ce qui est fait dans l'exposé VI.

Dans l'exposé VII M. Raynaud montre que la variation de la hauteur modulaire dans une classe d'isogénies est effectivement bornée (Théorème 4.4.9). Ce résultat est plus fin que celui de G. Faltings. Il utilise les résultats de M. Raynaud sur les groupes de type (p,...,p) appliqués aux groupes de Barsotti-Tate tronqués plutôt qu'aux groupes p-divisibles.

Dans l'exposé VI de L. Illusie (d'après A. Grothendieck), on montre le théorème d'existence de prolongements infinitésimaux des groupes de Barsotti-Tate tronqués qui est utilisé dans l'exposé VII de M. Raynaud.

Thème 3 : La conjecture de Shafarevich (exposés IX et X)

Dans l'exposé IX de P. Deligne, on trouvera, sous sa forme la plus effective, le merveilleux argument de G. Faltings prouvant qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de K-isogénies de variétés abéliennes de dimension et mauvaise réduction fixées (Corollaire de Théorème 1).

Comme on l'a vu plus haut chaque classe d'isogénies ne contient qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. On obtient ainsi la preuve de la conjecture de Shafarevich (Théorème 0 dans l'exposé X) : "Soit K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K, g un entier, l'ensemble des classes de K-isomorphismes de variétés abéliennes sur K de dimension g et ayant bonne réduction en dehors de S, est fini".

On en déduit, bien sûr, par le théorème de Torelli, la conjecture originale de Shafarevich : "Soient K, S, $g \geq 1$ comme plus haut, alors l'ensemble des classes de K-isomorphismes de courbes projectives, lisses sur K, géométriquement connexes et de genre g, est fini".

Thème 4 : La construction de Kodaira-Parshin (exposé X)

Dans l'exposé X, M. Martin-Deschamps explique la construction de Kodaira-Parshin qui permet de déduire la conjecture de Mordell de celle de Shafarevich pour les courbes. Essentiellement, à chaque point rationnel sur K d'une courbe C on a attaché une courbe X_p et un morphisme $X_p \longrightarrow C$ qui n'est ramifié qu'en P. Le degré de ce morphisme étant fixé en fonction du genre de C (supposé supérieur à deux), la mauvaise réduction de X_p étant fixée par celle de C, on voit facilement que "Shafarevich" implique "Mordell" (c'est un argument de Parshin). En fait, la construction de Kodaira-Parshin peut être faite pour une famille à un paramètre (ce que nous appelons un pinceau). Ce fait sert à contrôler la mauvaise réduction de X_p et dans l'exposé XI à "contrôler" le nombre de points rationnels de C sur K.

<u>Thème 5</u> : <u>La théorie des intersections d'Arakelov</u> (exposés I, II, III, XI)

L'exposé I §2 donne un résumé de la théorie des intersections d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques qui est développé dans les exposés II et III.

Dans l'exposé II de L. Moret-Bailly, on montre le théorème de Riemann-Roch de Faltings pour les surfaces arithmétiques et le théorème de comparaison entre la hauteur de Néron-Tate et les intersections d'Arakelov (Faltings-Hriljac). La présentation ici adoptée est nouvelle et part des métriques permises sur les variétés abéliennes pour revenir ensuite au cas des courbes.

Dans l'exposé III de R. Elkik, on établit de façon assez complète l'existence des fonctions de Green d'Arakelov. On montre ensuite le théorème d'existence de Faltings (Théorème 3) qui dit qu'un faisceau arakelovien suffisamment positif possède des sections "holomorphes" au sens d'Arakelov. Ce théorème culmine dans l'application qui en est faite à la positivité de la self intersection du dualisant (Faltings).

Dans l'exposé XI, nous reprenons d'abord, selon Parshin, la démonstration de la conjecture de Mordell par Faltings pour en tirer une borne "presque effective" du nombre de points rationnels (§2 Théorème). La nouveauté introduite par Parshin est notamment de calculer la "constante de Mumford" en termes de l'intersection d'Arakelov (§1). Nous continuons sur cette veine au §3 en montrant que la constante de Mumford est souvent négative et qu'en conséquence on peut, dans les fibres de la fibration de Kodaira, trouver une infinité de courbes sur $\bar{\mathbb{Q}}$ dont la différence de deux points distincts sur $\bar{\mathbb{Q}}$ n'est jamais de torsion. Comme beaucoup de ces essais d'effectivité tournent autour de la question d'une borne pour la self intersection du dualisant relatif, nous explicitons notre conjecture des petits points qui remplit ce programme parfaitement, surtout pour les corps de fonctions où je l'ai montrée. Il est à noter que cet exposé XI contient surtout des énoncés non encore publiés.

On voit ainsi qu'à part le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces arithmétiques (exposé II), l'ensemble des développements de ce volume servent dans l'une ou l'autre preuve de la conjecture de Mordell. Nous avons en outre étudié (notamment dans l'appendice de M. Martin-Deschamps à l'exposé IX) le cas des corps de fonctions qui sont de type fini sur $\mathbb{Q}$. Le lecteur intéressé par les courbes ou les variétés abéliennes sur les corps de fonctions consultera avec profit notre précédent séminaire paru dans la même collection (n°86) et le "Pinceaux de variétés abéliennes" de L. Moret-Bailly à paraître simultanément, toujours dans la collection Astérisque.

Je tiens à remercier les participants au Séminaire et surtout les auteurs des différents exposés, qui n'ont ménagé ni leur peine, ni leurs critiques, afin que nous menions à bien, ensemble ce travail, et tout spécialement Mireille Martin-Deschamps et Laurent Moret-Bailly qui ont assuré la réalisation définitive de la publication. J'espère que le présent volume rendra service à ceux qui s'intéressent à l'arithmétique d'un point de vue géométrique. Le délicat travail de frappe de ce texte a été assuré avec dextérité par Mesdames Postadjian et Saman. Je tiens à les en remercier vivement.

Lucien SZPIRO

LES DEUX CHEMINS POUR DÉMONTRER LA CONJECTURE DE MORDELL

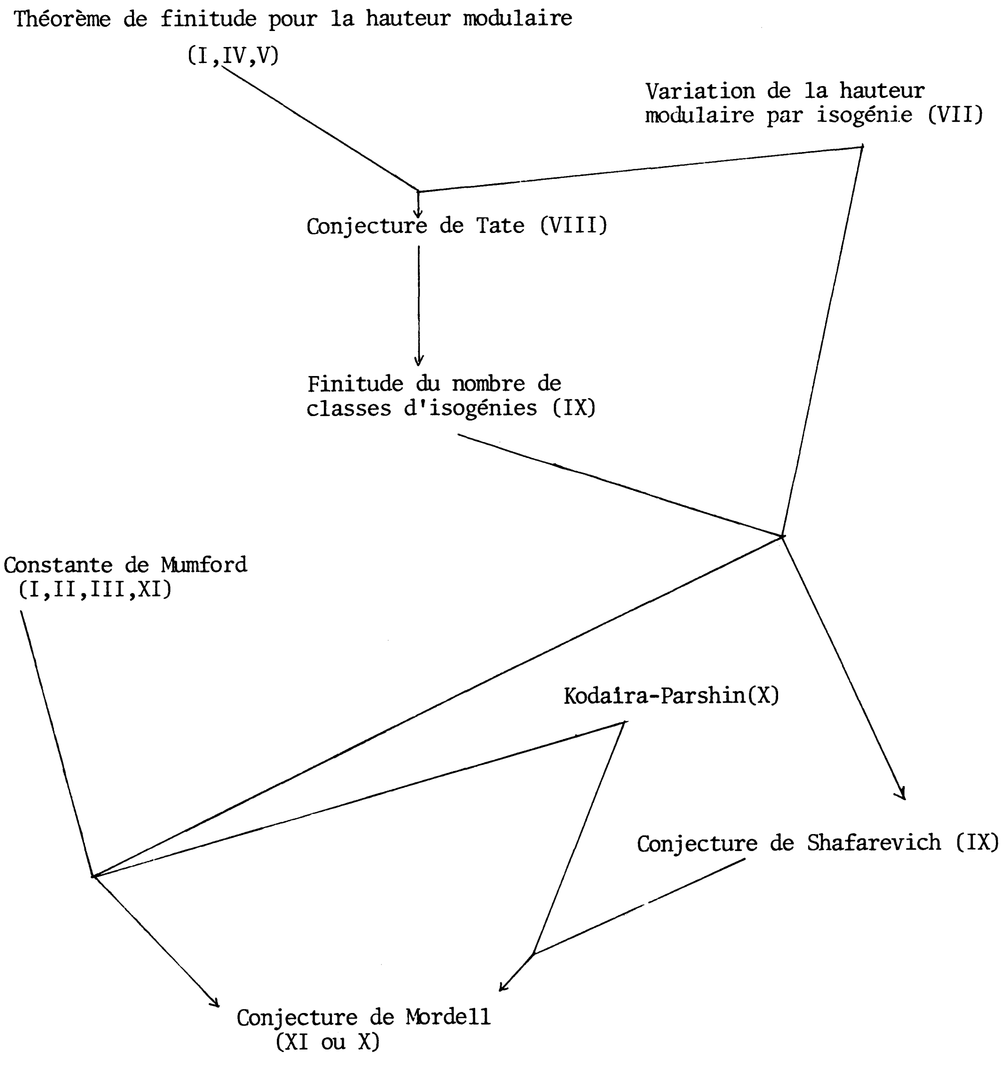

TABLE DES MATIÈRES