LUC ILLUSIE

Déformations de groupes de Barsotti-Tate

Astérisque, tome 127 (1985), p. 151-198
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__151_0>

Exposé VI

DÉFORMATIONS DE GROUPES DE BARSOTTI-TATE(*)

d'après A. GROTHENDIECK

par Luc ILLUSIE

O.- INTRODUCTION

Dans son cours au Collège de France, en juin 1971, Grothendieck avait établi un théorème d'existence de prolongements infinitésimaux pour les groupes de Barsotti-Tate et Barsotti-Tate tronqués. Nous présentons ici la démonstration de ce résultat (non publié), telle que nous avons pu la reconstituer d'après les notes des auditeurs du cours. Ce théorème jouait un rôle central dans les travaux de Grothendieck sur la classification des groupes de Barsotti-Tate et des groupes finis commutatifs localement libres en termes de cristaux de Dieudonné, cf.[11] et [12] . Une partie de son programme a été menée à bien par Messing [22] et Mazur-Messing [20] , puis par Berthelot-Breen-Messing [3] , suivant une méthode différente utilisant, à la place du résultat de Grothendieck, un résultat de Raynaud affirmant qu'un groupe fini commutatif localement libre se plonge localement, pour la topologie de Zariski, dans un schéma abélien [3, 3.1.1] ; le recours à ce résultat simplifie d'ailleurs assez sensiblement la construction des cristaux de Dieudonné que Grothendieck avait en vue. La raison pour laquelle nous donnons ici la démonstration du théorème de Grothendieck est qu'il permet, très simplement, d'étendre le théorème de Raynaud sur le déterminant du module de Tate d'un groupe p-divisible [25,4.2.1] au cas des groupes de Barsotti-Tate tronqués, et que cette extension conduit, comme l'ont montré Deligne et Paršin, à des améliorations "effectives" du théorème de Faltings [9] , voir [7], [26] .

La démonstration du théorème de Grothendieck utilise deux ingrédients. Le premier est constitué par les propriétés différentielles des groupes de Barsotti-Tate tronqués, qui figurent pour l'essentiel dans [22] , et auxquelles

(*) Cet exposé ne correspond à aucun exposé oral du séminaire.

Société Mathématique de France
Astérisque 127 (1985)

nous consacrons le n°2, après avoir réuni au n°1, pour la commodité du lecteur, quelques définitions et résultats standard. Le second est la théorie d'obstructions de [14] , dont nous rappelons, au n°3, les énoncés dont nous avons à nous servir. Nous donnons la démonstration du théorème de Grothendieck au n°4, en même temps que quelques applications, notamment à la variante du théorème de Raynaud sur le déterminant à laquelle on a fait allusion plus haut.

Je remercie P. Deligne, T. Ekedahl, O. Gabber et M. Raynaud pour d'utiles discussions pendant la préparation de cet exposé. En outre, P. Berthelot et O. Gabber ont lu attentivement le manuscrit ; ils m'ont signalé quelques erreurs et m'ont suggéré plusieurs améliorations; je les en remercie très chaleureusement.

Dans toute la suite, p désigne un nombre premier fixé. Si n est un entier ≥ 0 et G un groupe abélien, on note ${}_{p^n}G$ ou, comme Grothendieck et quand il n'en peut résulter de confusion, $G(n)$ le noyau de la multiplication par p^n dans G .

1.- GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DE BARSOTTI-TATE (cf. [22] ,[12])

Soit S un schéma. On travaillera avec la topologie fppf sur (Sch)/S (mais cette topologie ne jouera qu'un rôle de figurant).

Définition 1.1.- *Soient* n *un entier* ≥ 1 *et* G *un faisceau abélien sur* S . *On dit que* G *est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon* n *(en abrégé,* BTT *d'échelon* n, *ou* BT_n) *si* G *vérifie les conditions* (i) et (ii) *ci-après et la condition supplémentaire* (iii) *quand* $n = 1$:

(i) G *est annulé par* p^n *et plat sur* $\mathbb{Z}/p^n$;

(ii) $G(1)$ *est représentable par un* S-*schéma en groupes fini localement libre (le rang de* $G(1)$ *est alors de la forme* p^h , *où* h *est un entier localement constant sur* S , *qu'on appelle la hauteur de* G) ;

(iii) $(n = 1)$ *si* $S_o := V(p) \subset S$ *et* $G_o := G\times_S S_o$, *la suite*

$$G_o \xrightarrow{F} G_o^{(p)} \xrightarrow{V} G_o \text{ est exacte. } (*)$$

Il est clair que ces conditions sont stables par changement de base $S' \longrightarrow S$.

Exemple 1.2.: Si A est un S-schéma abélien de dimension relative g , $A(n)$ est un BTT d'échelon n et de hauteur $2g$ [22,I 3.4].

(*) Dans [22,I 1.3], Messing définit un BT_1 sur S par les conditions (i) à (iii) en supposant p localement nilpotent sur S ; j'ignore l'utilité de cette restriction.

Remarques 1.3. : a) Pour G annulé par p^n, la condition de platitude sur $\mathbb{Z}/p^n$ équivaut aux suivantes : (i') $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}/p^n}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$, i.e la suite $G \xrightarrow{p^{n-1}} G \xrightarrow{p} G$ est exacte ; (i") pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}/p^n}(\mathbb{Z}/p^i, G) = 0$, i.e la suite $G \xrightarrow{p^{n-i}} G \xrightarrow{p^i} G$ est exacte.

b) Pour G fini localement libre annulé par p, l'exactitude de la suite $G_o \xrightarrow{F} G_o^{(p)} \xrightarrow{V} G_o$ équivaut à celle de la suite $G_o^{(p)} \xrightarrow{V} G_o \xrightarrow{F} G_o^{(p)}$, et implique que $\mathrm{Ker}\,F$ et $\mathrm{Ker}\,V$ sont finis localement libres (si $\mathrm{Im}\,F = \mathrm{Ker}\,V$, le critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.11) montre que $\mathrm{Im}\,F$ est fini localement libre et $F : G_o \longrightarrow \mathrm{Im}\,F$ plat, donc $\mathrm{Ker}\,F$ et $\mathrm{Im}\,V = G_o/\mathrm{Im}\,F$ sont finis localement libres et $V : G_o^{(p)} \longrightarrow \mathrm{Im}\,V$ est plat ; or on a $\mathrm{Im}\,V \subset \mathrm{Ker}\,F$, et $\mathrm{rg}\,\mathrm{Im}\,V = (\mathrm{rg}\,G/(\mathrm{rg}\,\mathrm{Ker}\,V) = \mathrm{rg}\,\mathrm{Ker}\,F$, donc $\mathrm{Im}\,V = \mathrm{Ker}\,F$; même raisonnement pour l'autre implication).

c) Si G est un BTT d'échelon n et hauteur h, G est représentable par un S-schéma en groupes fini localement libre de rang p^{nh} (cela résulte des suites exactes $0 \longrightarrow G(1) \longrightarrow G(i) \xrightarrow{p} G(i-1) \longrightarrow 0$ pour $2 \leq i \leq n$, cf. [22,I,1.5]) . On voit aussi, à l'aide du critère de platitude par fibres, que si G est un faisceau abélien vérifiant les conditions (i) et (iii) de 1.1 et tel que, pour un r avec $1 \leq r \leq n$, $G(r)$ soit représentable par un S-schéma en groupes fini et plat de présentation finie, alors G est un BT_n.

d) Soit G un BT_n sur S. Alors, pour $1 \leq i \leq n$, $G(i)$ est un BT_i (comme $G(n-i) = p^iG$, la suite exacte $0 \longrightarrow G(n-i) \longrightarrow G \xrightarrow{p^{n-i}} G(i) \longrightarrow 0$ donne un isomorphisme $G \otimes \mathbb{Z}/p^i \xrightarrow{\sim} G(i)$, d'où la platitude de $G(i)$ sur $\mathbb{Z}/p^i$; pour la vérification de (iii) pour $n \geq 2$ et $i = 1$, voir [22 II 3.3.11]).

e) Si G est un BTT d'échelon n et hauteur h sur S, son dual de Cartier $G^* = \underline{\mathrm{Hom}}(G, \mathbb{G}_m)$ est un BTT d'échelon n et hauteur h.

f) Si $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de S-groupes finis localement libres annulé par p^n, et si deux des groupes sont des BT_n, le troisième l'est également [3,3.3.9].

1.4.- Supposons que $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique p, et soit $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Notons $D = W_\sigma[F,V]/(FV=VF=p)$ l'anneau de Dieudonné (σ = automorphisme de Frobenius de W). Rappelons que le foncteur (contravariant) associant à un p-groupe fini commutatif G sur S son module de Dieudonné

$$M(G) := \mathrm{Hom}_S(G, CW) ,$$

où CW est le faisceau des covecteurs de Witt sur S, est une anti-équivalence de la catégorie des p-groupes finis (commutatifs) sur celle des D-modules de longueur finie sur W [10, p.128]. De plus, le foncteur $M(-)$ est exact. Dans cette équivalence, les BT_n sur S correspondent aux D_n-modules libres de type fini sur W_n (où $D_n := D \otimes \mathbb{Z}/p^n$, $W_n = W \otimes \mathbb{Z}/p^n$), vérifiant quand $n = 1$ la condition supplémentaire $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Ker}\, V$ (équivalente à $\mathrm{Im}\, V = \mathrm{Ker}\, F$). Si G est un BTT d'échelon n et hauteur h, $M(G)$ est libre de rang h sur W_n.

Définition 1.5.- *Soit* G *un faisceau abélien sur* S. *On dit que* G *est un groupe de Barsotti-Tate* (en abrégé, BT) *si* :

(i) G *est de* p-*torsion*, i.e. $G = \varinjlim G(n)$,

(ii) G *est* p-*divisible, i.e* $p\mathrm{Id}_G$ *est un épimorphisme,*

(iii) $G(1)$ *est représentable par un schéma en groupes fini localement libre.*

Sorites 1.6.- Si G est un BT sur S, alors, pour tout $n \geqq 1$, $G(n)$ est un BT_n [22,I,2.3], et le foncteur qui à G associe le système inductif des $G(n)$ (avec les inclusions évidentes) est une équivalence de la catégorie des BT sur S sur celle des systèmes inductifs $(G_1 \xrightarrow{i_1} G_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow G_n \xrightarrow{i_n} \dots)$ où G_n est un BT_n et i_n induit un isomorphisme $G_n \xrightarrow{\sim} G_{n+1}(n)$.
De même, le foncteur qui associe à G le système projectif des $G(n)$ (avec les projections $p : G(n+1) \longrightarrow G(n)$) est une équivalence de la catégorie des BT sur S sur celle des systèmes projectifs $(G_1 \xleftarrow{p_1} G_2 \longleftarrow \dots \longleftarrow G_n \xleftarrow{p_n} \dots)$ où G_n est un BT_n et p_n induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/p^n \otimes_{\mathbb{Z}/p} G_{n+1} \xrightarrow{\sim} G_n$.

On appelle *hauteur* d'un BT G sur S la hauteur de $G(1)$.

Une extension de deux BT est un BT (et de même pour un quotient G/H) [22,I.2.4] mais le noyau d'un épimorphisme de BT n'est pas en général un BT (par exemple le noyau de p). Le quotient d'un BT par un sous-groupe fini localement libre est un BT [3, 3.3.12].

Si G est un BT, le système inductif des $G(n)^*$, où $i_n : G(n)^* \longrightarrow G(n+1)^*$ est dual de p, est un BT qu'on appelle *dual* de G, et qu'on note G^*.

Enfin, sous les hypothèses de 1.4, si G est un BT, $M(G) := \varprojlim M(G(n))$ est un D-module libre de type fini sur W, et le foncteur (contravariant) $G \longmapsto M(G)$ est une anti-équivalence de la catégorie des BT sur S sur celle des D-modules libres de type fini sur W.

Il est naturel de poser la question suivante : si G est un BT_n sur S, existe-t-il un BT H tel que $G = H(n)$? Voici une réponse partielle, que nous généraliserons plus loin.

PROPOSITION 1.7.- *On suppose que* $S = \mathrm{Spec}(k)$, *où* k *est un corps parfait de caractéristique* p . *Soit* G *un* BT_n *sur* S . *Alors il existe un* BT H *tel que* $G = H(n)$.

C'est un résultat bien connu. Faute d'avoir pu trouver une référence, nous en donnerons une démonstration - et même deux (le lecteur choisira).

a) (d'après T. Ekedahl). Par dualité, on peut se borner à traiter le cas où G est unipotent, i.e V nilpotent sur le module de Dieudonné M de G . On peut donc considérer M comme un E_n-module, où $E_n = E \otimes \mathbb{Z}/p^n$ et E est le complété V-adique de l'anneau de Dieudonné D . Soit (e_i) $(1 \leq i \leq r)$ une famille d'éléments de M dont les images dans M/V forment une base de M/V sur k . On a alors

$$Fe_i = \Sigma\, a_{ij}(V) e_j \quad ,$$

où les $a_{ij}(V)$ sont des polynômes en V à coefficients dans W_n . Notons L (resp. R) le E_n-module libre de base g_i (resp. h_i) $(1 \leq i \leq r)$. Soient $u : R \longrightarrow L$ l'application E_n-linéaire définie par $u(h_i) = Fg_i - \Sigma\, a_{ij}(V) g_j$, $v : L \longrightarrow M$ l'application E_n-linéaire définie par $v(g_i) = e_i$. Par construction, la suite

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ u\ } L \xrightarrow{\ v\ } M \longrightarrow 0$$

est un complexe. Montrons qu'elle est exacte. Comme les termes de (*) sont plats sur W_n (G étant un BT_n , M est libre sur W_n) , il suffit de prouver que $(*) \otimes \mathbb{Z}/p$ est exacte, autrement dit, on peut supposer $n = 1$. Il est clair que $(*) = \mathrm{R}\varprojlim_n E_1/V^n \overset{L}{\otimes}_{E_1} (*)$, donc il suffit de prouver que $E_1/V \overset{L}{\otimes}_{E_1} (*) = 0$, et pour cela il suffit de montrer que le noyau et le conoyau de V sur (*) sont acycliques. Or, par hypothèse, on a, sur M , $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Ker}\, V$ et $\mathrm{Im}\, V = \mathrm{Ker}\, F$, de sorte que la multiplication à gauche par F donne un isomorphisme $F : M/V \xrightarrow{\sim} {}_V M$. On vérifie facilement d'autre part que la même propriété est vraie pour E_1 , i.e que $F : E_1/V \xrightarrow{\sim} {}_V E_1$. Il suffit donc de montrer que le conoyau de V sur (*) est acyclique, ce qui se vérifie par un calcul direct standard : soit $\Sigma\, x_{ki} F^k g_i \in L/V$, ou, en notation matricielle, $x = \Sigma\, {}^t x_k F^k g$, où $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix}$,

${}^t x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kr})$; alors $vx = \Sigma\, {}^t x_k a^{(k)} e$, où $a = (a_{ij} \bmod V)$, $a^{(k)} := a^{(\sigma^{k-1})} \ldots a$, σ = automorphisme de Frobenius de k ; $vx = 0$ donne $\Sigma\, {}^t x_k a^{(k)} = 0$, d'où $x = \Sigma\, {}^t x_k (F^k - a^{(k)}) g$, mais pour $k \geq 1$,

$$F^k - a^{(k)} = (F^{k-1} + F^{k-2} a^{\sigma} + \ldots + a^{(\sigma^{k-1})} \ldots a^{\sigma})(F - a) \; ,$$

d'où finalement

$$x = u(\sum_{k\geq 1} {}^t x_k (F^{k-1} + \ldots + a^{(\sigma^{k-1})} \ldots a^{\sigma})h) ,$$

ce qui prouve l'exactitude de (*) mod V en L/V ; l'injectivité de u mod V est immédiate. L'exactitude de (*) étant ainsi établie, on relève u en un homomorphisme E-linéaire $u' : R' \longrightarrow L'$, où L' (resp. R') est le E-module libre de base $(g_i^!)$ (resp. $(h_i^!)$) et $u'(h_i^!) = Fg_i^! - \Sigma a_{ij}^!(V)g_j^!$, $a_{ij}^!(V)$ étant un polynôme en V à coefficients dans W relevant $a_{ij}(V)$. Alors $M' = \mathrm{Coker}\, u'$ relève M , est de type fini sur W (car p-adiquement séparé et complet et de type fini mod p) , et sans p-torsion (par la suite exacte du serpent, compte tenu de l'exactitude de $(*) \otimes \mathbb{Z}/p$) , donc M' , en tant que D-module, est le module de Dieudonné d'un BT qui relève G .

b) (d'après O. Gabber). Soit M le module de Dieudonné de G . Le D_n-module M est libre sur W_n , soit m son rang. Posons $\overline{M} = M/p$, $\overline{M}$ est donc de dimension m sur k . Comme ${}_F\overline{M} = V\overline{M}$ (1.3 d)) , il existe des éléments $\bar{e}_{r+1},\ldots,\bar{e}_m$ de $\overline{M}$ tels que $V\bar{e}_{r+1},\ldots,V\bar{e}_m$ forment une base de ${}_F\overline{M}$. Soit $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_r)$ une base d'un supplémentaire de ${}_F\overline{M}$ dans $\overline{M}$. Relevons $\bar{e}_i$ en e_i dans M . Alors $(e_1,\ldots,e_r,Ve_{r+1},\ldots,Ve_m)$ engendrent M sur W_n , donc forment une base de M sur W_n . D'autre part, par construction, $(F\bar{e}_1,\ldots,F\bar{e}_r)$ forment une base de $F\overline{M} = {}_V\overline{M}$, et comme $V\bar{e}_{r+1},\ldots,V\bar{e}_m$ sont linéairement indépendants, $(F\bar{e}_1,\ldots,F\bar{e}_r,\bar{e}_{r+1},\ldots,\bar{e}_m)$ forment une base de $\overline{M}$, donc $(Fe_1,\ldots,Fe_r,e_{r+1},\ldots,e_m)$ forment une base de M sur W_n . Notons (g_i) (resp. (h_i)) la base $(e_1,\ldots,e_r,Ve_{r+1},\ldots,Ve_m)$ (resp. $(Fe_1,\ldots,Fe_r,e_{r+1},\ldots,e_m)$) , et a la matrice (inversible) définie par $g_i = \Sigma a_{ij}h_j$. Dans les bases (g_i) et (h_i) , F a pour matrice $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, et dans les bases (h_i) et (g_i) , V a pour matrice $\begin{pmatrix} p.1_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $a' = (a_{ij}^!) \in GL_m(W)$ un relèvement de a . Notons M' un W-module libre de base $(h_i^!)$ $(1 \leq i \leq m)$, et $(g_i^!)$ la base de M' telle que $g_i^! = \Sigma a_{ij}^! h_j^!$. Soient $F : M' \longrightarrow M'$ l'homomorphisme σ-linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ dans les bases $(g_i^!)$ et $(h_i^!)$, et $V : M' \longrightarrow M'$ l'homomorphisme σ^{-1}-linéaire de matrice $\begin{pmatrix} p.1_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases $(h_i^!)$ et $(g_i^!)$. On a évidemment $FV = VF = p$, de sorte que F et V munissent M' d'une structure de

D-module, et comme M' est libre sur W , M' est le module de Dieudonné d'un BT sur k . D'autre part, si l'on identifie M'/p^n à M par $h_i^! \longmapsto h_i$, par construction $g_i^!$ s'envoie sur g_i , et l'endomorphisme de M'/p^n induit par F (resp. V) coïncide avec l'endomorphisme F (resp. V) de M . Autrement dit, M' relève M, ce qui achève la démonstration.

2.- PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET COHOMOLOGIQUES DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE TRONQUÉS

2.1.- Rappels sur les complexes de Lie et co-Lie

Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes, plat et localement de présentation finie. On note ℓ_G le *complexe de co-Lie* de G , défini par

(2.1.1) $$\ell_G = Le^*L_{G/S} \in \mathrm{ob}\ D(S)$$

où $L_{G/S}$ est le complexe cotangent de G/S et $e : S \longrightarrow G$ la section unité (cf. [14,VII]) . Comme G/S est localement d'intersection complète, ℓ_G est parfait, d'amplitude parfaite $\subset [-1,0]$. La connaissance de ℓ_G équivaut à celle de $L_{G/S}$, car on a un isomorphisme canonique $L_{G/S} \xrightarrow{\sim} \pi^*\ell_G$ où $\pi : G \longrightarrow S$ est la projection, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait. Le *complexe de Lie* de G est par définition le dual de ℓ_G ,

(2.1.2) $$\check{\ell}_G := \underline{RHom}(\ell_G, \mathcal{O}_S) \quad ;$$

c'est donc un complexe d'amplitude parfaite $\subset [0,1]$. Le foncteur $G \longmapsto \ell_G$ (resp. $\check{\ell}_G$) transforme suites exactes courtes en triangles distingués, ce qui permet notamment le calcul de ℓ_G quand on dispose d'une résolution $0 \longrightarrow G \longrightarrow G^0 \longrightarrow G^1 \longrightarrow 0$, avec G^0 et G^1 lisses (ou formels lisses), car on a $\ell_{G^i} = \omega_{G^i} = e^*\, \Omega^1_{G^i/S}$, d'où

(2.1.3) $$\ell_G \xrightarrow{\sim} (\omega_{G^1} \longrightarrow \omega_{G^0}) \quad .$$

Les seuls faisceaux de cohomologie éventuellement non nuls de ℓ_G (resp. $\check{\ell}_G$) sont $\underline{H}^0$ et $\underline{H}^{-1}$ (resp. $\underline{H}^0$ et $\underline{H}^1$) : on pose (notations de Grothendieck)

(2.1.4) $$\omega_G = \underline{H}^0(\ell_G) \ , \ n_G = \underline{H}^{-1}(\ell_G) \ , \ t_G = \underline{H}^0(\check{\ell}_G) \ , \ \nu_G = \underline{H}^1(\check{\ell}_G) \ ;$$

on a donc

$$t_G = \omega_G^{\vee} \quad , \quad n_G = \nu_G^{\vee} \ .$$

D'autre part, le *rang* (au sens de (SGA 6 I)) du complexe parfait ℓ_G (resp. $\check{\ell}_G$) est égal à la dimension relative de G/S. En particulier, si G est fini localement libre, cas qui nous occupe principalement, on a $\mathrm{rg}\ \ell_G = \mathrm{rg}\ \check{\ell}_G = 0$; si de plus ω_G est localement libre de type fini, alors il en est de même de n_G , t_G, ν_G , et ces quatre modules ont même rang.

Quand G est commutatif, fini localement libre, le complexe de Lie de G admet la description suivante, due à Grothendieck [20, 14.1] : pour tout $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent M , on a un isomorphisme canonique (de $D(S,\underline{O}_S)$)

(2.1.5) $$\underline{\mathrm{RHom}}_{\underline{O}_S}(\ell_G,M) \xrightarrow{\sim} t_{\leq 1}\, \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathbb{Z}}(G^*,M) \ ,$$

où G^* est le dual de Cartier de G et M est considéré comme faisceau sur S_{fppf} (la topologie importe peu : on ne changerait pas le second membre en regardant M comme faisceau sur le grand site zariskien). Pour $M=\underline{O}_S$, on a notamment :

(2.1.6) $$\check{\ell}_G \xrightarrow{\sim} t_{\leq 1}\underline{\mathrm{RHom}}_{\mathbb{Z}}(G^*,\underline{O}_S)$$

et en particulier

(2.1.6.1) $$t_G \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G^*,\underline{O}_S) \ , \quad \nu_G \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Z}}(G^*,\underline{O}_S) \ .$$

2.1.7.- Soient A un anneau (discret) commutatif et G un schéma en A-modules, plat et localement de présentation finie sur S . Notons $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\underline{O}_S$ un produit tensoriel dérivé de A et $\underline{O}_S$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-algèbres différentielles graduées à degré ≤ 0 (cf. [14, VI 10.3.19]), et $D(A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\underline{O}_S)$ la catégorie déduite de celle des modules différentiels gradués sur $A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\underline{O}_S$ par inversion des flèches qui induisent des isomorphismes sur les objets de $D(\mathbb{Z})$ sous-jacents (loc. cit.). Dans [14, VII 4.1.4] , on définit, à partir d'un certain diagramme traduisant l'action de A sur G , un objet ${}_A\check{\ell}_G$ de $D(A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\underline{O}_S)$, qui, par restriction des scalaires via $\underline{O}_S \longrightarrow A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\underline{O}_S$, donne le complexe de Lie $\check{\ell}_G$ de (2.1.2). On définit aussi (loc. cit.) un objet ${}_A\ell_G$ de $D(A\overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\underline{O}_S)$ (dual de ${}_A\check{\ell}_G$ à valeurs dans $\underline{O}_S$), qui, par oubli, donne le complexe de co-Lie ℓ_G de (2.1.1). Bien entendu, ${}_A\ell_G$ (resp. ${}_A\check{\ell}_G$) et ℓ_G(resp. $\check{\ell}_G$) donnent le même objet de $D(S,\mathbb{Z})$ par oubli. Dans la suite, nous nous permettrons parfois d'omettre l'indice A de la notation ${}_A\ell_G$ (resp. ${}_A\check{\ell}_G$) .

2.2.- Propriétés différentielles et cohomologiques des BTT

Les résultats , dûs à Grothendieck, concernent d'une part la structure de ℓ_G pour G un BT_n sur S , avec $n\geq N$, et $p^N\underline{O}_S=0$, d'autre part le calcul des $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathbb{Z}/p^n}(G,M)$ pour $n\geq N$, M quasi-cohérent annulé par p^N , et $i\leq 2$.

PROPOSITION 2.2.1.- *Soit* S *un schéma tel que* $p^N\underline{O}_S=0$, *où* N *est un entier* ≥ 1 , *et soit* G *un* BT_n *sur* S . *On suppose* $n\geq N$.

a) *Pour tout entier* $m\geq 1$ *tel que* $n\geq m+N-1$ *et tout entier* k *tel que*

$1 \leqq k < p^m$, *on a*

$$\mathrm{Inf}^k G \subset G(m+N-1)$$

où $\mathrm{Inf}^k G$ *désigne le* k*-ième voisinage infinitésimal de la section unité* $e : S \longrightarrow G$.

b) *Pour tout entier* k *tel que* $1 \leqq k < p^{n-N+1}$, G *est lisse tronqué d'échelon* k *le long de* e , *ce qui signifie que les conditions suivantes - équivalentes d'après* [22,II 3.1.1]- *sont satisfaites* :

(i) ω_G *est localement libre de type fini, et l'application canonique* $S^i\omega_G \longrightarrow J^i/J^{i+1}$ (*où* J *est l'idéal définissant* e) *est un isomorphisme pour* $i \leqq k$;

(ii) *pour tout* S*-schéma affine* Y , *tout voisinage infinitésimal d'ordre* k X' *de* Y , *tout sous-*S*-schéma fermé* X *de* X' *contenant* Y , *tout* S*-morphisme* $g : X \longrightarrow G$ *tel que* $g|Y = 0$ *se prolonge à* X' (*).

c) *Les faisceaux* n_G , t_G, ν_G *sont localement libres de type fini de même rang que* ω_G . *De plus, pour* $n \geqq n' \geqq N$:

(i) *l'inclusion* $G(n') \longrightarrow G$ *induit un isomorphisme* $\omega_G \xrightarrow{\sim} \omega_{G(n')}$ (*resp.* $t_{G(n')} \xrightarrow{\sim} t_G$) , *et, si* $n-n' \geqq N$, *induit le morphisme nul* $n_G \longrightarrow n_{G(n')}$ (*resp.* $\nu_{G(n')} \longrightarrow \nu_G$) ;

(ii) *l'épimorphisme* $p^{n-n'} : G \longrightarrow G(n')$ *induit un isomorphisme* $n_{G(n')} \xrightarrow{\sim} n_G$ (*resp.* $\nu_G \xrightarrow{\sim} \nu_{G(n')}$) *et, si* $n - n' \geqq N$, *le morphisme nul* $\omega_{G(n')} \longrightarrow \omega_G$ (*resp.* $t_G \longrightarrow t_{G(n')}$) .

L'assertion a) est prouvée dans [22,II 3.3.17] . L'assertion b) est prouvée, si $N = 1$, dans [22,II 2.1.2,2.1.5] (compte tenu de 1.3.d)), et si $k < p^{n-N}$, découle aisément de [22,II 3.3.10] : soit $g : X \longrightarrow G$ comme en (ii) , alors par définition, g se factorise à travers $\mathrm{Inf}^k G$, donc $G(n-N+N-1) = G(n-1)$ d'après a), et l'obstruction à prolonger $g : X \longrightarrow G(n-1)$ à X' se tue quand on passe à $G(n)$ d'après (loc. cit.) (réduction au cas où l'idéal J (resp. I) de de X (resp. Y) dans X' vérifie $JI = pJ = 0$ et application de (loc. cit.) pour $N = 0$). Dans le cas général, on se ramène au cas où g se factorise à travers $G(n-1)$ par l'argument suivant (de Grothendieck). Par changement de base, on peut supposer $S = X'$. D'autre part, on peut supposer $N \geq 2$ (le cas $N = 1$ étant déjà traité), et $JI = 0$ où J (resp. I) est l'idéal de X (resp. Y) dans X' . Notons X'_{N-2} (resp. X_{N-2}, Y_{N-2}) le sous-schéma fermé de X' (resp. X, Y) défini par l'annulation de p^{N-1} :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X' \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ Y_{N-2} & \hookrightarrow & X_{N-2} & \hookrightarrow & X'_{N-2} \end{array} ,$$

et g_{N-2} la restriction de g à X_{N-2}. Comme par hypothèse on a $k < p^{n-(N-1)}$, par le cas déjà traité g_{N-2} admet un prolongement $g'_{N-2} : X'_{N-2} \longrightarrow G$. Les flèches g et g'_{N-2} définissent $\bar{g} : \bar{X} = X \coprod_{X_{N-2}} X'_{N-2} \longrightarrow G$. Or $\bar{X}$ est un sous-schéma fermé de X' contenant X'_{N-2}, donc on peut supposer que X contient X'_{N-2}, i.e que $J \subset p^{N-1}\underline{O}_{X'}$ (ce qui entraîne notamment que $pJ = 0$). L'obstruction à prolonger g à X' est alors un élément $x \in \mathrm{Ext}^1_{\underline{O}_Y}(\ell_{G_o}, J)$ [14,III 2.2.4] où Y_o est le lieu de $p = 0$ et $G_o = G \times_S Y_o$. Posons $p^{N-1}\underline{O}_{X'} = J'$, et considérons la suite exacte des Ext associée à $0 \longrightarrow J \longrightarrow J' \longrightarrow J'' \longrightarrow 0$:

$$\mathrm{Hom}(\ell_{G_o}, J') \xrightarrow{a} \mathrm{Hom}(\ell_{G_o}, J'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\ell_{G_o}, J) \xrightarrow{b} \mathrm{Ext}^1(\ell_{G_o}, J') .$$

La flèche a s'identifie à $\mathrm{Hom}(\omega_{G_o}, J') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\omega_{G_o}, J'')$. Comme ω_{G_o} est localement libre de type fini (d'après le cas particulier $N = 1$) et que Y_o est affine, a est surjective, donc b est injective. Il suffit donc de montrer que l'image de x par b est nulle, ce qui nous ramène au cas où $X = X'_{N-2}$. Or $g'_{N-2} : X'_{N-2} \longrightarrow G$ se factorise à travers $\mathrm{Inf}^k G$ et comme $k < p^{n-N'}$ $(N' = N-1)$ et $p^{N'} = 0$ sur X'_{N-2}, on a $\mathrm{Inf}^k G \subset G(n-N'+N'-1) = G(n-1)$ par a), ce qui ramène au cas déjà traité, et achève d'établir b) dans le cas général. Le fait que n_G, t_G, ν_G soient localement libres de type fini de même rang que ω_G découle aussitôt de b) (cf. la remarque suivant 2.1.4). Par a), pour $k = m = 1$, on a $\mathrm{Inf}^1 G \subset G(n)$, d'où la première assertion de c) (i). La seconde en résulte par la suite exacte à six termes

$$0 \longrightarrow n_{G(n-n')} \longrightarrow n_G \longrightarrow n_{G(n')} \longrightarrow \omega_{G(n-n')} \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \omega_{G(n')} \longrightarrow 0$$

déduite du triangle distingué $\ell_{G(n-n')} \longrightarrow \ell_G \longrightarrow \ell_{G(n')} \rightarrow$ associé à la suite exacte $0 \longrightarrow G(n') \longrightarrow G \xrightarrow{p^{n'}} G(n-n') \longrightarrow 0$. La preuve de (ii) est analogue.

<u>Remarques 2.2.2</u>. a) Soit G un BT_n sur S. Si p est inversible sur S, G est étale (il suffit d'ailleurs de supposer que G est fini localement libre et annulé par p^n) : en effet $p^n : \omega_G \longrightarrow \omega_G$ est à la fois 0 et un isomorphisme.
b) Si $p^N\underline{O}_S = 0$ $(N \geq 1)$ et $n \geq N$, et G est un BT_n sur S, on appelle *dimension* de G le rang de ω_G. Si p est localement nilpotent sur S, et H est un BT sur S, on appelle *dimension* de H le rang du $\underline{O}_S$-module localement libre $\omega_H = \varprojlim \omega_{H(n)}$; c'est aussi la dimension du groupe de Lie formel associé à H

(cf. [22, II]) ; si S est le spectre d'un anneau local noethérien complet de corps résiduel k de caractéristique p, et G (resp. H) un BT_n (resp. BT) sur S, on appelle encore dimension de G (resp. H) celle de $G\times_S \mathrm{Spec}(k)$. Dans l'un ou l'autre cas, soit G^* (resp. H^*) le dual de Cartier de G (resp. H). Si d^* est la dimension de G^* (resp. H^*), on a $d+d^*=h$, où h est la hauteur de G (resp. H). Pour le voir, on peut se borner au cas où S est le spectre d'un corps de caractéristique p, et il suffit de noter qu'on a

$$\begin{aligned} p^{\dim G} &= \mathrm{rang}\ \mathrm{Ker}(F_{G(1)}) \\ &= \mathrm{rang}\ \mathrm{Coker}(F_{G(1)}) \\ &= \mathrm{rang}\ \mathrm{Ker}(V_{G^*(1)}) \\ &= \mathrm{rang}\ \mathrm{Im}(F_{G^*(1)}) \\ &= p^{ht(G)-\dim(G^*)} \quad . \end{aligned}$$

c) Supposons $p^N \underline{O}_S = 0$ $(N \geq 1)$, et soit G un BT_n sur S. Sans l'hypothèse $n \geq N$, il n'est pas vrai en général que ω_G soit localement libre. L'exemple le plus simple est μ_{p^n}, qui a pour complexe de co-Lie $\underline{O}_S \xrightarrow{p^n} \underline{O}_S$ (utiliser la résolution $0 \longrightarrow \mu_{p^n} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$) : on a $\omega_G = \underline{O}_S/p^n$, $n_G = {}_{(p^n)}\underline{O}_S$. Voir 4.9 pour des compléments sur ce point.

2.2.3.- Munissons S d'une topologie comme en 1. Posons $A = \mathbb{Z}/m$ (m entier ≥ 1). Soient G, M des faisceaux de A-modules sur S. L'isomorphisme d'adjonction

(2.2.3.1) $$\underline{\mathrm{RHom}}_A(G \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A, M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{RHom}}_{\mathbb{Z}}(G,M)$$

donne une suite spectrale

$$E_2^{ij} = \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\underline{\mathrm{Tor}}^{\mathbb{Z}}_j(G,A),M) \Rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathbb{Z}}(G,M) \quad ,$$

qui se réduit à l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}_A(G,M) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G,M)$ et la suite exacte longue

(2.2.3.2) $$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_A(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Z}}(G,M) \xrightarrow{\phi} \underline{\mathrm{Hom}}_A(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2_A(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G,M)$$
$$\longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_A(G,M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathbb{Z}}(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i-1}_A(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}_A(G,M) \longrightarrow \dots$$

Si l'on préfère, on peut voir (2.2.3.2) comme la suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(-,M)$ associée au triangle distingué

$$G[1] \longrightarrow G \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow G \longrightarrow \quad .$$

L'homomorphisme ϕ de (2.2.3.2) est déduit par faisceautisation de l'homomorphisme associant à une $\mathbb{Z}$-extension $0 \longrightarrow M \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$ l'homomorphisme $G \longrightarrow M$

déduit par passage au quotient de la multiplication par m dans H (vérification : pour $u : G \longrightarrow M[1]$ réalisé par la suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$, u correspond par (2.2.3.1) à la flèche u' de $D(A)$ composée de $G \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{u \overset{L}{\otimes} A} M \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A[1] \longrightarrow H^0(M \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A)[1] = M[1]$, et $\phi(u)$ à la composée de u' avec $H^{-1}(G \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A)[1] = G[1] \longrightarrow G \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} A$; comme $u \overset{L}{\otimes} A$ est réalisé par l'extension de complexes (en degrés -1 et 0)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

$\phi(v)$ est le cobord correspondant, i.e l'application déduite de $m : H \longrightarrow H$ par passage au quotient).

Supposons que G soit un schéma en groupes commutatif, annulé par m, et que $m\,\underline{O}_S = 0$. Compte tenu de (2.1.6), l'homomorphisme ϕ de (2.2.3.2) pour G^* (dual de Cartier de G) et $M = \underline{O}_S$ s'identifie à un homomorphisme

(2.2.3.3) $\qquad \phi_G : \nu_G \longrightarrow t_G$.

Comme $t_G = \omega_G^{\vee}$ et $n_G^{\vee} = \nu_G$, si ω_G est localement libre, on en déduit par dualité un homomorphisme

(2.2.3.4) $\qquad \phi_G^{\vee} : \omega_G \longrightarrow n_G$.

PROPOSITION 2.2.4.- *Soient* G *un* BT_n *sur* S *et* M *un* $\underline{O}_S$*-Module quasi-cohérent tel que* $p^n M = 0$. *Posons* $A = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. *Alors l'application canonique*

$$\phi : \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Z}}(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(G,M)\ (= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(G,M))$$

de (2.2.3.2) (*pour* $m = p^n$) *est un isomorphisme. En d'autres termes, on a*

(2.2.4.1) $\qquad \underline{\mathrm{Ext}}^1_A(G,M) = 0$

et l'application naturelle

(2.2.4.2) $\qquad \underline{\mathrm{Ext}}^2_A(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G,M)$

est un isomorphisme .

On peut considérer M comme un faisceau quasi-cohérent sur le sous-schéma fermé S' de S défini par l'annulation de p^n : plus précisément $M = i_* M'$, où $M' = M \otimes \underline{O}_S$, et $i : S' \longrightarrow S$ est l'inclusion. Le calcul des $\underline{\mathrm{Ext}}^i$ sur les grands sites zariskiens donne un isomorphisme d'adjonction

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbb{Z}}(G, i_* M') \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbb{Z}}(G', M') ,$$

où $G' = G \times_X S'$. Donc, quitte à remplacer S par S', on peut supposer que

$p^n \underline{O}_S = 0$. Alors, d'après 2.2.1 c), t_{G^*} et ν_{G^*} sont localement libres (de même rang) et ϕ s'identifie, d'après 2.1.5, à $\phi_{G^*} \otimes M : \nu_G{}^* \otimes M \longrightarrow t_G{}^* \otimes M$, avec la notation de (2.2.3.3). On peut donc supposer que $M = \underline{O}_S$. Comme les complexes de Lie et co-Lie commutent au changement de base, donc aussi ω et ν , et par suite t et n quand ω est localement libre, on est ramené à vérifier que ϕ_{G^*} est un isomorphisme quand S est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p . De plus, comme ϕ_{G^*} ne dépend que de la composante connexe de G^* , on peut se borner à supposer G unipotent (i.e annulé par une puissance de V) . Nous aurons besoin de l'interprétation suivante de ϕ :

LEMME 2.2.4.3.- *Soient* $S = \mathrm{Spec}(k)$, *où* k *est un corps parfait de caractéristique* p , G *un* S-*schéma en groupes commutatifs, fini, annulé par* p^n *et unipotent, et* L *le module de Dieudonné de* G , *i.e* $L = \mathrm{Hom}(G, CW^u)$ où $CW^u = \varinjlim_V W_n$ *est le faisceau des covecteurs unipotents. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} {}_VL \quad , \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} L/V \ ,$$

et moyennant ces isomorphismes, $\phi : \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{G}_a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{G}_a)$ *s'identifie à* $p^{n-1}F : L/V \longrightarrow {}_VL$.

Soit D l'anneau de Dieudonné. Le module de Dieudonné de $\mathbb{G}_a$ est D/V [8,p.551] . D'après [8,5.1 p.556], le foncteur module de Dieudonné induit des isomorphismes

$$(*)\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_D(D/V,L) \ , \ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_D(D/V,L) \ ,$$

d'où la première assertion. Compte tenu de l'interprétation de ϕ donnée en 2.2.3 et des isomorphismes (*) , $\phi : \mathrm{Ext}^1_D(D/V,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(D/V,L)$ associe à une extension $0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow D/V \longrightarrow 0$ l'homomorphisme $D/V \longrightarrow L$ déduit de $p^n : E \longrightarrow E$ par passage au quotient. On doit vérifier la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} L/V \arrow[r, "p^{n-1}F"] \arrow[d, "a"', "\simeq"] & {}_VL \arrow[d, "b", "\simeq"'] \\ \mathrm{Ext}^1_D(D/V,L) \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Hom}_D(D/V,L) \end{tikzcd} ,$$

où a associe à l'image dans L/V de $u : D \longrightarrow L$ l'extension déduite par u de $0 \longrightarrow D \xrightarrow{V} D \longrightarrow D/V \longrightarrow 0$, et b(x) , pour $x \in {}_VL$, envoie $1 \in D/V$ sur x . Cette vérification est immédiate, et laissée au lecteur.

Achevons la démonstration de 2.2.4. Soit L le module de Dieudonné de G. D'après 2.2.4.3, on doit montrer que $p^{n-1}F : L/V \longrightarrow {}_VL$ est un isomorphisme. On procède par récurrence sur n. Pour $n=1$, $F : L/V \longrightarrow {}_VL$ est un isomorphisme par l'hypothèse que G est un BT_1 (1.4). Supposons $n \geq 2$. Comme L est de longueur finie, on a $\dim_k(L/V) = \dim_k({}_VL)$. Donc il suffit de montrer que $p^{n-1}F : L/V \longrightarrow {}_VL$ est injectif. Or, comme L est plat sur W_n, $p : L/p^{n-1} \longrightarrow L$ est injectif. Par l'hypothèse de récurrence, $p^{n-2}F : (L/p^{n-1})/V = L/V \longrightarrow {}_V(L/p^{n-1})$ est un isomorphisme. On conclut par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} L/V & \xrightarrow[\simeq]{p^{n-2}F} & {}_V(L/p^{n-1}) \\ \| & & \downarrow p \\ L/V & \xrightarrow{p^{n-1}F} & {}_VL \end{array}$$

Ceci achève la démonstration de 2.2.4.

COROLLAIRE 2.2.5.- *Supposons* $p^n\underline{O}_S = 0$ $(n \geq 1)$, *et soit* G *un* S-*schéma en groupes commutatifs, fini localement libre, annulé par* p^n. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est un* BT_n ;

(ii) ω_G *et* ω_{G^*} *sont localement libres, et les flèches* $\phi_G : \nu_G \longrightarrow t_G$, $\phi_{G^*} : \nu_{G^*} \longrightarrow t_{G^*}$ (2.2.3.3) *sont des isomorphismes ;*

(ii') ω_G *et* ω_{G^*} *sont localement libres, et les flèches* $\phi_G^\vee : \omega_G \longrightarrow n_G$, $\phi_{G^*}^\vee : \omega_{G^*} \longrightarrow n_{G^*}$ *sont des isomorphismes.*

L'équivalence de (ii) et (ii') est triviale, et (i)$\Longrightarrow$(ii) découle de 2.2.4. Supposons (ii) satisfaite. D'après 1.3 a) (i') et b), on doit vérifier que, si $n \geq 2$, $p^{n-1} : G \longrightarrow G(1)$ est un épimorphisme, et si $n=1$, que $F : G_o \longrightarrow {}_VG_o^{(p)}$ est un épimorphisme (notation de (loc. cit.)). Vu la commutation de ω, n, t, ν au changement de base observée dans la preuve de 2.2.4, le critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.11) nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p. Si $G = \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$, $a<n$ ϕ_{G^*} est nul d'après 2.2.4.3. On peut donc supposer G unipotent connexe (donc G^* aussi). Pour $n=1$, (ii) exprime exactement, d'après 2.2.4.3, la condition $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Ker}\, V$ (cf. 1.3.b)). Supposons $n \geq 2$. Soit L le module de Dieudonné de G. Considérons le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & L/V & \xrightarrow{F} & L/p & \longrightarrow & L/F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p^{n-1}F} & & \downarrow{\scriptstyle p^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle p^{n-1}V} & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_VL & \longrightarrow & {}_pL & \longrightarrow & {}_FL & & . \end{array}$$

Par hypothèse, on a $\phi_{G^*} : \nu_{G^*} \xrightarrow{\sim} t_{G^*}$, i.e (2.2.4.3) $p^{n-1}F : L/V \xrightarrow{\sim} {}_VL$.

D'autre part, le module de Dieudonné de G^* est $L^\vee = \mathrm{Hom}(L,W_n)$, et $\phi_G : \nu_G \xrightarrow{\sim} t_G$ signifie que $p^{n-1}F : L^\vee/V \xrightarrow{\sim} {}_VL^\vee$. Dualisant, on trouve que $p^{n-1}V : L/V \xrightarrow{\sim} {}_FL$. Par le lemme des cinq, on en conclut que $p^{n-1} : L/p \xrightarrow{\sim} {}_pL$ est un isomorphisme, donc que $p^{n-1} : G \longrightarrow G(1)$ est un épimorphisme, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 2.2.6</u>.- Supposons que $p^n\underline{O}_S = 0$, et soit G un BT_{2n} sur S . Considérons la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow G(n) \longrightarrow G \xrightarrow{p^n} G(n) \longrightarrow 0 \ .$$

Il résulte de 2.2.1 c) que la flèche bord

$$\delta : n_{G(n)} \longrightarrow \omega_{G(n)}$$

figurant dans la suite exacte à six termes déduite du triangle distingué $\ell_{G(n)} \longrightarrow \ell_G \longrightarrow \ell_{G(n)} \longrightarrow$ associé à (*) est un isomorphisme. Il est facile de vérifier que δ est inverse de $\phi^\vee_{G(n)}$ (2.2.3.4).

<u>COROLLAIRE 2.2.7</u>.- *Soient* $n \geq n' \geq N \geq 1$ *des entiers avec* $n - n' \geq N$, M *un* $\underline{O}_S$*-Module quasi-cohérent tel que* $p^NM = 0$, G *un* BT_n *sur* S . *Alors, dans la suite exacte des* $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathbb{Z}}(-,M)$ *associée à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow G(n') \longrightarrow G \xrightarrow{p^{n'}} G(n-n') \longrightarrow 0 \qquad :$$

(i) $\underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G(n-n'),M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G,M)$ *est un isomorphisme,*

(ii) $\underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G(n'),M)$ *est la flèche nulle,*

(iii) $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Z}}(G,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Z}}(G(n'),M)$ *est un isomorphisme.*

Comme dans la preuve de 2.2.4, on se ramène aussitôt au cas où $p^N\underline{O}_S = 0$. Il suffit de prouver (i) : (ii) en découle trivialement, et implique que la flèche de (iii) est un épimorphisme, donc un isomorphisme, ν_{G^*} et $\nu_{G(n')^*}$ étant localement libres de même rang (en fait, on retrouve l'isomorphisme de 2.2.1 c) $\nu_{G^*} \otimes M \longrightarrow \nu_{G(n')^*} \otimes M$ induit par $p^{n-n'} : G^* \longrightarrow G(n')^*$ (dual de

l'inclusion $G(n') \longrightarrow G)$, pour lequel on n'a d'ailleurs pas besoin de l'hypothèse $n-n' \geq N)$.
Considérons le carré commutatif, où les flèches horizontales sont définies par $p^{n'} : G \longrightarrow G(n-n')$ et les flèches verticales par restriction des scalaires :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}/p^{n-n'}}(G(n-n'),M) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(G,M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G(n-n'),M) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathbb{Z}}(G,M) \end{array} .$$

Comme $n \geq N$ et $n-n' \geq N$, les flèches verticales sont des isomorphismes d'après 2.2.4. D'autre part, $p^{n'}$ s'identifie à la projection canonique $G \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}/p^n} \mathbb{Z}/p^{n-n'}$, et comme G est plat sur $\mathbb{Z}/p^n$, il en résulte que la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme. Donc la flèche de (i) est un isomorphisme.

3.- OBSTRUCTIONS AUX DÉFORMATIONS DE SCHÉMAS EN GROUPES

3.0.- Soit A un anneau (discret) commutatif. Les résultats de [14,VII] dont nous aurons à nous servir concernent les prolongements infinitésimaux de schémas en A-modules, plats et localement de présentation finie sur la base (en pratique finis et localement libres), et de morphismes de tels. Nous les reproduisons ici pour la commodité du lecteur. On fixe dans ce qui suit des immersions fermées

$$S_o \hookrightarrow S \hookrightarrow S'$$

définies par des idéaux $J \subset K$, avec $JK = 0$. Tous les schémas en A-modules considérés seront supposés plats et localement de présentation finie sur la base.

PROPOSITION 3.1.- *Soient* F', G' *des schémas en A-modules sur* S', F, F_o *(resp.* G, G_o*) les schémas déduits de* F' *(resp.*G'*) par les changements de base* $S \longrightarrow S'$, $S_o \longrightarrow S'$, *et soit* $f : F \longrightarrow G$ *un S-morphisme de schémas en A-modules.*

a) *Il existe une obstruction*

$$o(f) \in \mathrm{Ext}^1_A(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un morphisme de schémas en A-modules $f' : F' \longrightarrow G'$ *prolongeant* f . *Cette obstruction a les propriétés de fonctorialité suivantes : pour* $u' : E' \longrightarrow F'$, $o(fu)$ *est l'image de* $o(f)$ *par* $u_o : E_o \longrightarrow F_o$, *et pour* $v' : G' \longrightarrow H'$, $o(vf)$ *est l'image de*

$o(f)$ *par* $\check{\ell}_{v_o} : \check{\ell}_{G_o} \longrightarrow \check{\ell}_{H_o}$ *(notations évidentes).*

b) *Quand* $o(f) = 0$, *l'ensemble des prolongements* f' *de* f *est un espace affine sous le groupe* $\mathrm{Ext}^0_A(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$.

(Le produit tensoriel $\overset{L}{\otimes}$, *calculé sur* $\underline{O}_{S_o}$, *est un objet de* $D(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} \underline{O}_{S_o})$, *qui, dans le calcul de* $\mathrm{Ext}^i_A(\ , \ )$ *(sur le grand site zariskien de* S_o *), est considéré comme objet de* $D(A)$ *par restriction des scalaires).*

Notons $i : S_o \longrightarrow S$ l'inclusion. Pour M dans $D^+(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} \underline{O}_{S_o})$, à cohomologie quasi-cohérente sur S_o , le calcul des Ext^i_A comme cohomologie spatiale [14, VI 11.5.3.11] fournit un isomorphisme d'adjonction

(3.1.1) $$\mathrm{Ext}^i_A(F, i_*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_A(F_o, M) .$$

Comme la formation du complexe cotangent d'un morphisme plat commute au changement de base [14,II 2.2.3] , il en est de même de la formation du complexe ${}_A\check{\ell}$- d'un schéma en A-modules plat et localement de présentation finie sur la base, de sorte qu'on a canoniquement (dans $D(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S)$)

(3.1.2) $$\check{\ell}_G \overset{L}{\otimes}_{O_S} J \xrightarrow{\sim} i_*(\check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_{S_o}} J) .$$

Compte tenu de (3.1.1) et (3.1.2), 3.1 est une reformulation de [14,VII 4.2.3] .

Remarque 3.1.3.- Sous l'hypothèse de 3.1 b), fixons un prolongement $\tilde{f} : F' \longrightarrow G'$ de f , d'où une identification de l'ensemble des prolongements de f avec le groupe $\mathrm{Ext}^0_A(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$. Pour $v' : G' \longrightarrow H'$ donné, le prolongement $v'\tilde{f}$ de vf fournit une identification de l'ensemble des prolongements de vf avec $\mathrm{Ext}^0_A(F_o , \check{\ell}_{H_o} \overset{L}{\otimes} J)$. Il est facile de voir qu'alors l'application qui à un prolongement f' de f associe le prolongement $v'f'$ de vf correspond, par les identifications précédentes, à l'homomorphisme naturel de $\mathrm{Ext}^0_A(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$ dans $\mathrm{Ext}^0_A(F_o, \check{\ell}_{H_o} \overset{L}{\otimes} J)$ donné par $\check{\ell}_{v_o} : \check{\ell}_{G_o} \longrightarrow \check{\ell}_{H_o}$. On a une compatibilité analogue pour un morphisme $u' : E' \longrightarrow F'$, qu'on laisse au lecteur le soin de formuler.

PROPOSITION 3.2.- *Soient* G *un schéma en A-modules sur* S , $G_o = G \times_S S_o$.

a) *Il existe une obstruction*

$$o(G) \in \mathrm{Ext}^2_A(G_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un schéma en A-modules G' *sur* S' *prolongeant* G . *Cette obstruction possède la propriété* *de fonctorialité suivante : soit* $u : F \longrightarrow G$ *un morphisme de schémas en A-modules, alors on a*

(3.2.1) $$u_o^* \, o(G) = \check{\ell}_{u_o} \, o(F) \quad ,$$

où

$$\mathrm{Ext}_A^2(G_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{u_o^*} \mathrm{Ext}_A^2(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\check{\ell}_{u_o}} \mathrm{Ext}_A^2(F_o, \ell_{F_o} \overset{L}{\otimes} J)$$

sont les flèches de fonctorialité.

b) *Si* $o(G) = 0$ *, l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements de* G *en un schéma en A-modules* G' *sur* S' *est un espace affine sous* $\mathrm{Ext}_A^1(G_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$ *, et le groupe des automorphismes d'un prolongement donné* G' *est* $\mathrm{Ext}_A^o(G_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$.

(Mêmes notations que pour 3.1).

Grâce à (3.1.1) et (3.1.2), c'est une traduction de [14, VII 4.2.1] (la fonctorialité de o(G) découle de (loc. cit. (iii)).

Remarques 3.3.- a) Sous les hypothèses de 3.1, soit F'' un schéma en A-modules sur S' tel que $F'' \times_{S'} S = F$. D'après 3.1 a), on a donc une obstruction $o(f,F')$ (resp. $o(f,F'')) \in \mathrm{Ext}_A^1(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$ à prolonger f en $f' : F' \longrightarrow G'$ (resp. $f'' : F'' \longrightarrow G'$) . D'autre part, d'après 3.2. b), la différence $[F'] - [F'']$ des classes des prolongements F' et F'' est un élément de $\mathrm{Ext}_A^1(F_o, \check{\ell}_{F_o} \overset{L}{\otimes} J)$. Revenant à la définition de o(f) (cf. [14,III 2.2.4]), on peut montrer que l'on a

(3.3.1) $$o(f,F') - o(f,F'') = \check{\ell}_{f_o} \, ([F'] - [F''])$$

(avec la notation de (3.2.1)). De même, si G'' est un schéma en A-modules prolongeant G , on a

(3.3.2) $$o(f,G') - o(f,G'') = -f_o^*([G'] - [G'']) \ .$$

b) Soit $A' \longrightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux (commutatifs). L'image de l'obstruction o(f) de 3.1 dans $\mathrm{Ext}_{A'}^1(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$ par restriction des scalaires est l'obstruction à prolonger f en un morphisme de schémas en A'-modules $F' \longrightarrow G'$. De même, l'image de l'obstruction o(G) de 3.2 a) dans $\mathrm{Ext}_{A'}^2(G_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$ par restriction des scalaires est l'obstruction à prolonger G en un schéma en A'-modules sur S' . Ces propriétés résultent aussitôt de la définition de ces obstructions (cf. [14,VII 4.1.4 a), 4.1.6, 4.2.1, 4.2.3]).

4.- DÉFORMATIONS DE BTT

Pour étudier les obstructions aux déformations de BTT , nous nous appuierons sur le lemme suivant, conséquence de 2.2.4 :

LEMME 4.1.- *Soient* n *un entier* ≥ 1 , S_o *un schéma affine tel que* $p^n\underline{O}_{S_o} = 0$, J *un* $\underline{O}_{S_o}$*-Module quasi-cohérent,* F_o , G_o des BT_n sur S_o . *Alors les flèches naturelles suivantes sont des isomorphismes :*

(4.1.1) $$t_{F_o^*} \otimes t_{G_o} \otimes J \xrightarrow[\sim]{(2.1.5)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, t_{G_o} \otimes J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \quad ,$$

(4.1.2) $$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, \nu_{G_o} \otimes J) \xrightarrow[\sim]{(2.1.5)} t_{F_o^*} \otimes \nu_{G_o} \otimes J \quad ,$$

(4.1.3) $$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(F_o, t_{G_o} \otimes J) \xleftarrow[\sim]{(2.2.4.2)} \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, t_{G_o} \otimes J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \quad .$$

Considérons le triangle distingué de $D(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S)$ $(A = \mathbb{Z}/p^n)$ défini par troncation de $\check{\ell}_{G_o}$:

(1) $$t_{G_o} \longrightarrow \check{\ell}_{G_o} \longrightarrow \nu_{G_o}[-1] \longrightarrow \quad .$$

D'après 2.2.1 c), t_{G_o} et ν_{G_o} sont localement libres de type fini sur S_o , donc le triangle distingué déduit par application de $\overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_{S_o}} J$ s'écrit

(2) $$t_{G_o} \otimes J \longrightarrow \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J \longrightarrow \nu_{G_o} \otimes J[-1] \longrightarrow \quad .$$

La suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}/p^n}(F_o, -)$ correspondante fournit d'abord le second isomorphisme de (4.1.1), puis, compte tenu de (2.2.4.1) et du fait que S_o est affine, la suite exacte (où $A = \mathbb{Z}/p^n$)

(3) $$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(F_o, \nu_{G_o} \otimes J) \xrightarrow{d} \mathrm{Ext}^2_A(F_o, t_{G_o} \otimes J)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(F_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow 0 \quad .$$

Notons que $d = 0$. En effet, compte tenu de (2.2.4.2), il suffit de montrer que la flèche déduite par oubli, en remplaçant A par $\mathbb{Z}$, est nulle. Or celle-ci est définie par la flèche de degré 1 du triangle (2), vu comme triangle de $D(S_o, \mathbb{Z})$. Mais comme S_o est affine et que t_{G_o} et ν_{G_o} sont localement libres de type fini, la flèche de degré 1 de (1), vu comme triangle de $D(S_o, \underline{O}_{S_o})$, est nulle, donc il en est de même de la flèche de degré 1 du triangle (2), vu comme triangle de $D(S_o,\underline{Q}_{S_o})$, donc a fortiori comme triangle de $D(S_o,\mathbb{Z})$. Les isomorphismes de (4.1.2) et (4.1.3) découlent alors aussitôt de (3).

PROPOSITION 4.2.- *Soient* N *un entier* ≥ 1, $S_o \hookrightarrow S \hookrightarrow S'$ *des immersions fermées définies par des idéaux* $J \subset K$ *tels que* $JK=0$ et $p^N \underline{O}_{S_o}=0$, F', G' *des* BTT *d'échelon* $n \geq N$ *sur* S', F, F_o (resp. G, G_o) *les* BTT *déduits de* F' (resp. G') *par les changements de base* $S \longrightarrow S'$, $S_o \longrightarrow S'$, $f: F \longrightarrow G$ *un morphisme de schémas en groupes. On suppose* S' *affine.*

a) *Il existe une obstruction*

$$o(f) \in t_{F_o^*} \otimes \nu_{G_o} \otimes J$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence de $f': F' \longrightarrow G'$ *prolongeant* f. *Elle dépend fonctoriellement, en un sens évident, de* F', G'.

b) *Quand* $o(f)=0$, *l'ensemble des prolongements* f' *de* f *est un espace affine sous le groupe* $t_{F_o^*} \otimes t_{G_o} \otimes J$.

Compte tenu de (4.1.1) et (4.1.2), c'est un cas particulier de 3.1.

COROLLAIRE 4.3.- *Soient* F', G' *comme en* 4.2.

a) *Supposons* $n \geq 2N$. *Soit* $f': F' \longrightarrow G'$ *tel que* $f: F \longrightarrow G$ *soit nul Alors* $f'(n-N): F'(n-N) \longrightarrow G'(n-N)$ *est nul.*

b) *Soit* $f: F \longrightarrow G$ *tel que* $f(N): F(N) \longrightarrow G(N)$ *admette un prolongement* $g': F'(N) \longrightarrow G'(N)$. *Alors* f *admet un prolongement* $f': F' \longrightarrow G'$. (NB. On n'impose pas à f' d'être tel que $f'(N)=g'$).

Prouvons a). Appliquons la compatibilité 3.1.3 avec $v' = p^N_{G'}: G' \longrightarrow G'(n-N) = H'$, $\tilde{f}=0$. On dispose de $c\ell(f') \in t_{F_o^*} \otimes t_{G_o} \otimes J$ défini par le prolongement f' de f, et de $c\ell(p^N_{G'}, f') \in t_{F_o^*} \otimes t_{G_o(n-N)} \otimes J$ défini par le prolongement $p^N_{G'} f'$ de $p^N_G f$, et par suite $c\ell(p^N_{G'}, f')$ est l'image de $c\ell(f')$ par l'application définie par $p^N_{G_o}: t_{G_o} \longrightarrow t_{G_o(n-N)}$. Or, comme $n-N \geq N$, cette application est nulle d'après 2.2.1 c) (ii). Donc $c\ell(p^N_{G'} f') = 0$, i.e $p^N_{G'} f' = p^N_{G'} \tilde{f} = 0$. Mais $p^N_{G'} f' = f'(n-N)\, p^N_{F'}$, et comme $p^N_{F'}: F' \longrightarrow F'(n-N)$ est un épimorphisme, $f'(n-N) = 0$.

Prouvons b). Par hypothèse, on a $0 = o(f(N)) \in t_{F_o(N)^*} \otimes \nu_{G_o(N)} \otimes J$.

Par fonctorialité de l'obstruction, on a donc

$$0 = (p^{n-N}_{F_o})^* o(f(N)) = o(f(N)\ p^{n-N}_F) = o(p^{n-N}_G f) = p^{n-N}_{G_o}\, o(f) \quad ,$$

mais $p^{n-N}_{G_o} : \nu_{G_o} \otimes J \longrightarrow \nu_{G_o(N)} \otimes J$ est un isomorphisme d'après 2.2.1 c) (ii), donc $o(f) = 0$, et par suite f se prolonge.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cet exposé.

THÉORÈME 4.4 (Grothendieck).- *Soient* $i : S \longrightarrow S'$ *une nilimmersion et* G *un* BT_n *sur* S . *On suppose* S' *affine (mais* p *n'y est pas supposé localement nilpotent)*.

a) *Il existe un* BT_n G' *sur* S' *prolongeant* G .

b) *Notons* $Def(G,i)$ *l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements* G' *de* G *sur* S' . *Pour tout* $n' \leq n$, *l'application*

(4.4.1) $\qquad Def(G,i) \longrightarrow Def(G(n'),i), \quad G' \longmapsto G'(n')$

est surjective.

c) *Soit* N *un entier* ≥ 1 . *Supposons que* i *soit définie par un idéal* J *et qu'on ait un idéal* $K \supset J$, *définissant* $S_o \hookrightarrow S'$, *avec* $JK = 0$, *et* $p^N \underline{O}_{S_o} = 0$. *Alors, si* $n \geq N$, *l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements* G' de G *est un espace affine sous* $t_{G^*_o} \otimes \nu_{G_o} \otimes J$ *(groupe qui s'identifie à* $t_{G^*_o} \otimes t_{G_o} \otimes J$ *par* ϕ_{G_o} *(2.2.5)) et l'ensemble des automorphismes d'un prolongement* G' *(induisant l'identité sur* G *) est isomorphe à* $t_{G^*_o} \otimes t_{G_o} \otimes J$ [1]

---

[1] Il est facile de vérifier, en revenant à la définition de ϕ (2.2.3.2), que pour $n \geq n' \geq N$, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \nu_{G_o} & \xrightarrow[p^{n-n'}]{\sim} & \nu_{G_o(n')} \\ {\scriptstyle \phi_{G_o}}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle \phi_{G_o(n')}} \\ t_{G_o} & \xleftarrow[t(\mathrm{incl})]{\sim} & t_{G_o(n')} \end{array}$$

(où les flèches horizontales sont des isomorphismes (2.2.1 c))) .

d) *Soient* N, J, K *comme en* c) . *Alors, pour tout* $n \geq n' \geq N$, *l'application* (4.4.1) *est bijective. De plus, si* G' *est un prolongement de* G *sur* S' , *alors pour* $n \geq n' \geq N$ *et* $n-n' \geq N$, *l'homomorphisme*

$$\mathrm{Aut}(G') \longrightarrow \mathrm{Aut}(G'(n')) \tag{4.4.2}$$

est nul, Aut *désignant le groupe des automorphismes induisant l'identité au-dessus de* S .

e) *Si* S *est local noethérien complet, de corps résiduel parfait de caractéristique* p , *il existe un* BT H *sur* S *tel que* $G = H(n)$.

f) *S'il existe un* BT H *sur* S *tel que* $G = H(n)$, *alors, pour tout prolongement* G' *de* G *sur* S' , *il existe un* BT H' *sur* S' *prolongeant* H *tel que* $G' = H'(n)$.

4.5.- <u>Démonstration de 4.4</u> . Elle va se faire en plusieurs étapes. Notons tout d'abord que si G' est un S'-schéma en groupes commutatifs annulé par p^n , plat sur S', prolongeant G, G' est automatiquement un BT_n : cela résulte du critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.11).

4.5.1.- Soient i, J, K comme en c), avec $N = 1$, $n \geq 1$, et supposons que $G = H(n)$, où H est un BT sur S . Alors :

(i) Il existe un BT_n G'sur S' prolongeant G .

(ii) Avec les notations de b), l'application (4.4.1)

$$\mathrm{Def}(H(n+1),i) \longrightarrow \mathrm{Def}(H(n),i)$$

est bijective. En particulier, pour tout prolongement de G en un BT_n G' sur S' , il existe un BT H' sur S' prolongeant H et tel que $H'(n) = G'$.

D'après 3.2, l'obstruction à prolonger G en un BT_n sur S' , ou ce qui revient au même, en un schéma en $\mathbb{Z}/p^n$-modules fini et plat sur S' , est un élément o(G) de $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(G_o, \check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J)$ (où $G_o = G \times_S S_o$) . Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(G_o,\check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) & \xrightarrow{(1)} & \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o,\check{\ell}_{G_o} \overset{L}{\otimes} J) \\
{\scriptstyle (3)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (4)} \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(G_o,t_{G_o} \otimes J) & \xrightarrow{(2)} & \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o,t_{G_o} \otimes J)
\end{array} ,$$

où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli et les flèches verticales sont données par $t_{G_o} \longrightarrow \check{\ell}_{G_o}$. D'après 4.1, (2) et (3) sont des isomorphismes. D'autre part, on a, dans $D(S_o,\mathcal{O}_{S_o})$, $\check{\ell}_{G_o} \xrightarrow{\sim} t_{G_o} \oplus \nu_{G_o}[-1]$, parce que S_o

est affine et que ν_{G_o} est localement libre de type fini. Donc (4) est l'injection d'un facteur direct. D'autre part, l'image de $o(G)$ par (1) est l'obstruction à déformer G en un schéma en groupes commutatifs plat sur S' (3.3 b)) . Donc le diagramme ci-dessus montre que l'existence d'un BT_n sur S' prolongeant G équivaut à celle d'un schéma en groupes commutatifs plat sur S' prolongeant G , et l'obstruction à ce problème est un élément $o(G)$ du facteur $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o, t_{G_o} \otimes J)$ de $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o, \check{\ell}_{G_o} \otimes J)$. De même, l'existence d'un BT_{n+1} sur S' prolongeant H(n+1) équivaut à celle d'un schéma en groupes commutatifs plat sur S' prolongeant H(n+1), et l'obstruction correspondante est un élément $o(H(n+1))$ du facteur $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n+1), t_{H_o(n+1)} \otimes J)$ de $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n+1), \check{\ell}_{H_o(n+1)} \otimes J)$. Enfin, par $t_{H_o(n+1)} \longrightarrow \check{\ell}_{H_o(n+1)}$, $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o, t_{H_o(n+1)} \otimes J)$ est facteur direct de $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o, \check{\ell}_{H_o(n+1)} \overset{L}{\otimes} J)$. Par fonctorialité de l'obstruction (3.2 a) appliqué à

$A = \mathbb{Z}$ et u l'inclusion $H(n) = G \longrightarrow H(n+1))$, on a donc

$$u_o^* o(H(n+1)) = t_{u_o}\, o(G) ,$$

où

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n+1), t_{H_o(n+1)} \otimes J) \xrightarrow{u_o^*} \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o, t_{H_o(n+1)} \otimes J) \xleftarrow{t_{u_o}} \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G_o, t_{G_o} \otimes J)$$

sont les flèches de fonctorialité. Mais t_{u_o} est un isomorphisme d'après 2.2.1 c) (i), tandis que $u_o^* = 0$ d'après 2.2.7 (ii). Donc $o(G) = 0$, ce qui prouve (i).

Prouvons (ii). Posons $H(n+1) = F$, $F_o = F \times_S S_o$. Soit G' une déformation de G en un BT_n sur S' . D'après (i), il existe une déformation F' de F en un BT_{n+1} sur S' . Notant [ ] la classe d'isomorphie d'une déformation, d'après 3.2 b) et 4.1.2), on a

$$[F'(n)] - [G'] \in t_{G_o^*} \otimes \nu_{G_o} \otimes J .$$

Il s'agit de montrer qu'il existe une unique classe [F''] telle que $[F''(n)] - [G'] = 0$. Comme

$$[F''(n)] - [G'] = [F'(n)] - [G'] + [F''(n)] - [F'(n)],$$

tout revient à voir que l'application

$$(*) \qquad t_{F_o^*} \otimes \nu_{F_o} \otimes J \longrightarrow t_{G_o^*} \otimes \nu_{G_o} \otimes J , \quad [F''] - [F'] \longrightarrow [F''(n)] - [F'(n)]$$

est bijective. Soit F'' une déformation de F en un BT_{n+1} sur S' , et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & F' \arrow[dd, "p"] & \\
F \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "p"'] & & F'' \arrow[dd, "p"] \\
 & G' & \\
G \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] & & G''
\end{tikzcd}$$

où p est la multiplication par p . D'après 3.3 (pour $f = l'$identité), $[F']-[F'']$ est l'obstruction $o(Id_F,F',F'')$ à prolonger l'identité de F en $F' \longrightarrow F''$. De même, $[G'] - [G''] = o(Id_G,G',G'')$. Par fonctorialité de l'obstruction (3.1 a) ou 4.2 a)), on a

$$p^*o(Id_G,G',G'') = o(p : F \longrightarrow G,\ F',\ G'') = p_*o(Id_F,F',F'') ,$$

où

$$t_{G_0^*} \otimes \nu_{G_0} \otimes J \xrightarrow{p^*} t_{F_0^*} \otimes \nu_{G_0} \otimes J \xleftarrow{p_*} t_{F_0^*} \otimes \nu_{F_0} \otimes J$$

sont les flèches de fonctorialité. Mais, d'après 2.2.1 c), ces deux flèches sont des isomorphismes. Il en est donc de même de l'application (*), qui n'est autre que $(p^*)^{-1}p_*$, ce qui prouve (ii).

4.5.2.- <u>Preuve de</u> e) : Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$, soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de A , $k = A/\underline{m}$; pour $r \geq 0$, notons $S_r = \mathrm{Spec}(A/\underline{m}^{r+1})$, $G_r = G \times_S S_r$. Comme k est parfait, il existe, d'après 1.7, un BT H_0 sur S_0 tel que $G_0 = H_0(n)$. Supposons donné, pour $r \geq 0$ fixé, un BT H_r sur S_r tel que $G_r = H_r(n)$. Appliquant 4.5.1 (ii) à $(S_0 \hookrightarrow S_r \hookrightarrow S_{r+1}, H_r)$, on trouve qu'il existe un BT H_{r+1} sur S_{r+1} prolongeant H_r et tel que $H_{r+1}(n) = G_{r+1}$. Par récurrence sur r , on obtient donc un système inductif de prolongements H_r tels que $H_r(n) = G_r$. D'après [22,II 4.16] , ce système définit un BT H sur S tel que $H(n) = G$.

4.5.3.- <u>Preuve de</u> a) : On va se ramener au cas où S' est artinien de corps résiduel parfait de caractéristique p et l'idéal J de S dans S' annulé par l'idéal maximal.

1) Posons $S' = \mathrm{Spec}\ A'$, $S = \mathrm{Spec}\ A$. On a $A' = \varinjlim A'_\alpha$, où A'_α parcourt les sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de A' , et $A = \varinjlim A_\alpha$, où $A_\alpha = \mathrm{Im}\ A'_\alpha \longrightarrow A$. Des arguments standard montrent que G provient d'un G_α sur un $S_\alpha = \mathrm{Spec}\ A_\alpha$, et si G_α admet un prolongement G'_α sur $S'_\alpha = \mathrm{Spec}\ A'_\alpha$, $G' := G'_\alpha \times_{S'_\alpha} S'$ prolonge G . On peut donc supposer que A' est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

2) Comme A' est alors noethérien, l'idéal J de S dans S' est nilpotent. Prolongeant de $\mathrm{Spec}\ A'/J^r$ à $\mathrm{Spec}\ A'/J^{r+1}$, on se ramène à supposer $J^2 = 0$.

3) Soit $S' = \bigcup S'_i$ un recouvrement ouvert, posons $S_i = S'_i \cap S$, $G_i = G|S_i$. Montrons que si, pour tout i , G_i admet un prolongement (en un BT_n) sur S'_i , alors G admet un prolongement (en un BT_n) sur S' . Choisissons, pour

chaque i , un BT_n $G_i^!$ sur $S_i^!$ prolongeant G_i . Notant [ ] une classe d'isomorphie, on a, d'après 3.2 b) ,

$$[G_i^!|S_i^! \cap S_j^!] - [G_j^!|S_i^! \cap S_j^!] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G|S_i \cap S_j, \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J) \quad .$$

L'obstruction à trouver, après raffinement éventuel du recouvrement $(S_i^!)$, un système de prolongements $G_i^!$ tels que $G_i^!|S_i^! \cap S_j^! \xrightarrow{\sim} G_j^!|S_i^! \cap S_j^!$ est donc un élément

$$c_1 \in H^1(S, \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J)) \ .$$

Or, le calcul des $\underline{\mathrm{Ext}}^a_{\mathbb{Z}/p^n}(G,M)$ comme cohomologie spatiale [14,VI 11.5.3.11] montre que, pour tout a , $\underline{\mathrm{Ext}}^a_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_G \otimes J)$ est quasi-cohérent. Donc, comme S est affine, $c_1 = 0$. Un système de prolongements $G_i^!$ tels que $G_i^!|S_i^! \cap S_j^! \simeq G_j^!|S_i^! \cap S_j^!$ étant choisi, l'obstruction à trouver (après raffinement éventuel de $(S_i^!)$) un système transitif d'isomorphismes $g_{ij} : G_i^!|S_i^! \cap S_j^! \longrightarrow G_j^!|S_i^! \cap S_j^!$ est, d'après 3.2 b), un élément

$$c_2 \in H^2(S, \underline{\mathrm{Ext}}^0_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J)) \ .$$

Pour la même raison que précédemment, on a $c_2 = 0$, donc G admet bien un prolongement G' sur S' . En d'autres termes, le problème de prolongement de G est local sur S pour la topologie de Zariski.

4) Soient $T' = \mathrm{Spec}\ A' \otimes \mathbb{Z}[1/p]$, $T = \mathrm{Spec}\ A \otimes \mathbb{Z}[1/p]$. Le BTT G_1 induit par G sur T est étale (2.2.2 a)), donc admet un prolongement (d'ailleurs unique) G_1' sur T' . La question de l'existence de G' est donc locale au voisinage des points fermés de S de corps résiduel fini de caractéristique p . On peut donc supposer S' local noethérien, de corps résiduel parfait de caractéristique p .

5) Un argument analogue à celui de 3) montre que la question de l'existence d'un prolongement G' de G sur S' est locale sur S' pour la topologie fpqc. Cela nous permet de supposer de plus que S' est complet. Soit $\underline{m}$ l'idéal maximal de A' . Supposons d'abord S' artinien, de sorte qu'il existe r tel que $\underline{m}^{r+1} = 0$. Décomposant $A' \longrightarrow A = A/J$ en $A' \longrightarrow A'/\underline{m}^r J \longrightarrow \dots \longrightarrow A'/\underline{m}J \longrightarrow A$, on se ramène au cas où $\underline{m}J = 0$. Grâce à e) (prouvé en 4.5.2), il existe un BT H sur S tel que $G = H(n)$. On conclut alors par 4.5.1 (i). Dans le cas général, on a $S' = \varinjlim S_r'$, $S = \varinjlim S_r$, où $S_r' = \mathrm{Spec}\ A'/\underline{m}^{r+1}$, $S_r = \mathrm{Spec}\ A/\underline{m}^{r+1}A$. Soit $G_r = G \times_S S_r$. Supposons construit un prolongement G_r' de G_r sur S_r' . Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_r & \hookrightarrow & S_{r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_r' & \hookrightarrow & S_{r+1}' \end{array}$$

donne une immersion (de carré nul) $T_{r+1} = S'_r \coprod_{S_r} S_{r+1} \hookrightarrow S'_{r+1}$. Le groupe $G'_r \coprod_{G_r} G_{r+1}$ sur T_{r+1} est un BT_n prolongeant G_{r+1} et G'_r . D'après le cas artinien déjà traité, il se prolonge en un BT_n G'_{r+1} sur S'_{r+1} . Par récurrence, on obtient donc un système inductif de prolongements G'_r de G_r sur S'_r . D'après [22, II 4.15] , ce système inductif définit un prolongement G' de G sur S' , ce qui achève la démonstration de a).

4.5.4.- Preuve de b) : les réductions 1) et 2) de 4.5.3 permettent de supposer que $S' = \operatorname{Spec} A'$, $S = \operatorname{Spec} A$, avec A' de type fini sur $\mathbb{Z}$, et $J = \operatorname{Ker}(A' \longrightarrow A)$ de carré nul. Posons $H = G(n')$. Soit G' un prolongement de G sur S' (un tel prolongement existe d'après a)). Alors $H' := G'(n')$ prolonge H , et, d'après 3.2. b), il s'agit de montrer que l'application

$$a : \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{n'}}(H, \check{\ell}_H \overset{L}{\otimes} J) \ , \ [G''] - [G'] \longmapsto [G''(n)] - [G'(n)]$$

où G'' désigne un prolongement de G sur S') est surjective (l'application (*) envisagée en 4.5.1 est un cas particulier de a). Comme en (loc. cit.), on a

$$[G''] - [G'] = o(\mathrm{Id}_G, G', G'') , \quad [H''] - [H'] = o(\mathrm{Id}_H, H', H'') \quad .$$

D'après 3.3.b), on a un carré commutatif de $D(S, \mathbb{Z}/p^n)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "o(\mathrm{Id}_G, G', G'')"] \arrow[d] & \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J \ [1] \arrow[d] \\ H \arrow[r, "o(\mathrm{Id}_H, H', H'')"] & \check{\ell}_H \overset{L}{\otimes} J \ [1] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par $p^{n-n'} : G \longrightarrow H = G(n')$. Par adjonction, ce carré donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/p^{n'} \overset{L}{\underset{\mathbb{Z}/p^n}{\otimes}} G \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p^{n'} \overset{L}{\underset{\mathbb{Z}/p^n}{\otimes}} (\check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J) \ [1] \arrow[d] \\ H \arrow[r] & \check{\ell}_H \overset{L}{\otimes} J \ [1] \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. Il s'ensuit que la flèche a ci-dessus s'insère dans un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J) \arrow[r] \arrow[dr, "a"'] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_H \overset{L}{\otimes} J) \arrow[d, "\simeq"] \\ & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{n'}}(H, \check{\ell}_H \overset{L}{\otimes} J) \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est donnée par fonctorialité de $\check{\ell}$, et la flèche verticale est l'isomorphisme d'adjonction. On a déjà observé (en 4.5.3.3)) que les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ associés sont quasi-cohérents. Comme les flèches du triangle ci-dessus sur les $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ sont $\underline{O}_S$-linéaires, on voit que la surjectivité de a est locale pour la topologie fpqc. Les réductions 3), 4) et 5) de 4.5.3 nous ramènent alors à la situation de 4.5.1, où la flèche a est même bijective d'après (ii).

4.5.5.- Preuve de f). Conséquence immédiate de b).

4.5.6.- Preuve de c). Résulte aussitôt de 3.2. b) et 4.1.

4.5.7.- Preuve de d). La première assertion résulte de la description de la flèche a donnée en 4.5.4 : dans la situation de d), la flèche (4.4.1) n'est autre que l'isomorphisme donné par 2.2.1 c) :

$$t_{(p^{n-n'*})}^{-1} \otimes \nu_{p^{n-n'}} : t_{G_o^*} \otimes \nu_{G_o} \otimes J \xrightarrow{\sim} t_{H_o^*} \otimes \nu_{H_o} \otimes J ,$$

où $H = G(n')$ et $(p^{n-n'})^* : H_o^* \longrightarrow G_o^*$ est l'inclusion duale de $p^{n-n'} : G_o \longrightarrow H_o$ (on pourrait aussi appliquer 4.3 b)). Pour la seconde assertion, il suffit de noter que, d'après c), la flèche (4.4.2) s'identifie, avec les notations ci-dessus à la flèche

$$t_{(p^{n-n'*})}^{-1} \otimes t_{p^{n-n'}} : t_{G_o^*} \otimes t_{G_o} \otimes j \longrightarrow t_{H_o^*} \otimes t_{H_o} \otimes J ,$$

qui, pour $n \geq n' \geq N$, $n-n' \geq N$, est nulle d'après 2.2.1 c). Ceci achève la démonstration de 4.4.

Remarques 4.6.- a) Dans la situation de 4.5.1, identifions $t_{H_o(n)}$ à $t_{H_o} := t_{H_o(1)}$ au moyen de l'isomorphisme $t_{H_o(1)} \xrightarrow{\sim} t_{H_o(n)}$ donné par l'inclusion $H_o(1) \hookrightarrow H_o(n)$ (2.2.1 c)). Les groupes $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n), t_{H_o(n)} \otimes J)$, identifiés ainsi à $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n), t_{H_o} \otimes J)$, forment, suivant les inclusions $H_o(n) \hookrightarrow H_o(n+1)$, un système projectif "$\varprojlim$" $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n), t_{H_o} \otimes J)$. Un point clé de la démonstration de 4.5.1 (donc de 4.5) est que les flèches de transition de ce système projectif sont nulles : si $o_n \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n), t_{H_o} \otimes J)$ est l'obstruction à prolonger H(n), les o_n définissent un élément

$$(*) \qquad (o_n)_{n \geq 1} \in \varprojlim \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n), t_{H_o} \otimes J) ,$$

d'où la nullité des o_n . En fait, il suffit, pour conclure, de connaître la nullité du second membre de (*), i.e. de savoir que

(4.6.1) $\varprojlim \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n),\mathbb{G}_a) = 0$.

Ce résultat, un peu plus simple, est établi dans [3] : d'après [3,2.4.6.1], on a

(4.6.2) $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o,\mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n),\mathbb{G}_a)$

et le premier membre de (4.6.2) est nul d'après [3, 3.3.2] .

Pour $p \neq 2$, on a déjà

(4.6.3) $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n),\mathbb{G}_a) = 0$

pour tout n , comme cas particulier du théorème d'annulation de Breen [5] .
Par contre, pour $p = 2$, il peut arriver qu'on ait $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(n),\mathbb{G}_a) \neq 0$.
Supposons par exemple que H_o soit le groupe p-divisible d'une courbe elliptique supersingulière sur un corps algébriquement clos de caractéristique p. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \alpha_p \longrightarrow H_o(1) \xrightarrow{"F"} \alpha_p \longrightarrow 0 \quad .$$

Dans la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{G}_a)$ correspondante, on a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_o(1),\mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\alpha_p,G_a) \xrightarrow{\sim} k$$

(comme le montre par exemple 2.2.4.3), d'où une inclusion

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(\alpha_p,G_a) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_o(1),\mathbb{G}_a) \quad .$$

Mais, pour $p = 2$, on a $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(\alpha_p,\mathbb{G}_a) \neq 0$ (en fait, $\simeq k$) d'après Breen [4] (dans (loc. cit.), Breen montre que les classes des cocycles (1, 1+uxy) pour $u \in k$ définissent un isomorphisme de k sur $\mathrm{Ext}^2(\alpha_p,\mathbb{G}_m)$, mais les mêmes arguments montrent que les classes des cocycles (0,uxy) définissent un isomorphisme de k sur $\mathrm{Ext}^2(\alpha_p,\mathbb{G}_a)$) ; de plus, dans le cas de $\mathbb{G}_a$, l'hypothèse que k soit séparablement clos (donc ici, algébriquement clos) est inutile).

b) Il semble que Raynaud sache démontrer (du moins pour G connexe) 4.4 a) et b), et se débarrasser de l'hypothèse de perfection sur le corps résiduel dans e), en utilisant, à la place de la théorie d'obstructions de [14] , la théorie des modules de Cartier des groupes de Lie formels ([6], [19]).

<u>COROLLAIRE 4.7</u>.- *Soient* i, J, K, N *comme en* 4.4 c), *et* H *un* BT *sur* S . *Alors* :

(i) *Pour tout* $n \geq N$, *l'application*

(4.7.1) $\mathrm{Def}(H,i) \longrightarrow \mathrm{Def}(H(n),i)$

associant à la classe d'isomorphie d'un prolongement H' *de* H *en un* BT *sur* S' *la classe du prolongement* H'(n) *de* H(n), *est bijective.*

(ii) *Le groupe des automorphismes d'un prolongement* H' *de* H *sur* S' (*induisant l'identité sur* H *est réduit à* 0).

D'après 1.6, prolonger H en un BT H' sur S' équivaut à prolonger le système projectif des $H(n)$ en un système projectif $(H'_1 \leftarrow H'_2 \leftarrow \dots \leftarrow H'_n \xleftarrow{p_n} \dots)$ où H'_n est un BT_n et p_n induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/p^n \otimes_{\mathbb{Z}/p^{n+1}} H'_{n+1} \xrightarrow{\sim} H'_n$. En fait, comme on l'a observé au début de 4.5, le critère de platitude par fibres montre que si H'_n est un schéma en $\mathbb{Z}/p^n$-modules, plat sur S', prolongeant $H(n)$, H'_n est un BT_n ; le même critère montre de plus que la condition sur p_n est alors automatiquement vérifiée. Notons $S.$ le topos des systèmes projectifs $(E_1 \longleftarrow E_2 \longleftarrow \dots \longleftarrow E_n \longleftarrow \dots)$ de faisceaux sur le grand site zariskien (ou fppf, ou fpqc) de S, et $\mathbb{Z}/p^{\cdot}$ l'anneau de $S.$ défini par le système projectif $(\mathbb{Z}/p \longleftarrow \mathbb{Z}/p^2 \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathbb{Z}/p^n \longleftarrow \dots)$. Considérant le système projectif $H(.)$ des $H(n)$ comme un schéma en $\mathbb{Z}/p^{\cdot}$-modules au-dessus de $S.$, les constructions de [14,VII] fournissent un complexe de Lie $\check{\ell}_{H(.)}$ dans $D(S.,\mathbb{Z}/p^{\cdot} \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S)$, et, comme H admet un prolongement sur S' d'après 4.4 a) et f), une variante de 3.2 b) (laissée au lecteur) montre que l'ensemble des classes d'isomorphie de prolongements de H sur S' est un espace affine sous le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(H_o(.),\check{\ell}_{H_o(.)} \overset{L}{\otimes} J)$, et que le groupe des automorphismes d'un prolongement H' est $\mathrm{Ext}^o_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(H_o(.),\check{\ell}_{H_o}(.) \overset{L}{\otimes} J)$. Il est aisé d'expliciter ces groupes. En effet, si $E.$ est un objet de $D^-(S.,\mathbb{Z}/p^{\cdot})$ dont les flèches de transition induisent des isomorphismes $\mathbb{Z}/p^n \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}/p^{n+1}} E_{n+1} \xrightarrow{\sim} E_n$ et $F.$ un objet de $D^+(S.,\mathbb{Z}/p^{\cdot})$, pour i donné, les $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}/p^n}(E_n,F_n)$ forment de façon naturelle un système projectif (de groupes abéliens), et il est facile de voir qu'on a une suite exacte canonique

$$(*)\qquad 0 \longrightarrow R^1\varprojlim \mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathbb{Z}/p^n}(E_n,F_n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(E.,F.) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}/p^n}(E_n,F_n) \longrightarrow 0 .$$

Appliquant cela sur $S_o.$ à $E. = H_o(.)$, $F. = \check{\ell}_{H_o(.)} \overset{L}{\otimes} J$, on obtient un isomorphisme

$$(1)\qquad \mathrm{Ext}^o_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(H_o(.),\check{\ell}_{H_o(.)} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}^o_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J) ,$$

et une suite exacte

$$(2)\qquad 0 \longrightarrow R^1\varprojlim \mathrm{Ext}^o_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \otimes J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(H_o(.),\check{\ell}_{H_o(.)} \overset{L}{\otimes} J)$$

$$\longrightarrow \varprojlim \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow 0 .$$

Or, pour $n \geq N$, on a, d'après 4.1,

(3) $$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\sim} t_{H_o(n)^*} \otimes t_{H_o(n)} \otimes J \quad ,$$

et

(4) $$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\sim} t_{H_o(n)^*} \otimes \nu_{H_o(n)} \otimes J \quad .$$

Pour $n \geqq n' \geqq N$ et $n-n' \geqq N$, la flèche de transition de n à n' du second membre de (3) est nulle (2.2.1 c), ou 4.4 c) et d)). Donc le premier membre de (1) est nul, ce qui prouve (ii). De plus, le terme de gauche de (2) est nul, et comme, pour $n \geqq n' \geqq N$, la flèche de transition de n à n' du second membre de (4) est un isomorphisme, on en conclut que, pour $n \geqq N$, la flèche naturelle

(5) $$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(H_o(.),\check{\ell}_{H_o(.)} \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J)$$

est un isomorphisme. Mais, si l'on fixe un point-base dans $\mathrm{Def}(H,i)$, (5) n'est autre que (4.7.1), ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.7.2.- Comme le système projectif des $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J)$ est essentiellement constant, son $R^1\varprojlim$ est nul, de sorte que (*), pour $i=2$, donne

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(H_o(.),\check{\ell}_{H_o(.)} \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),\check{\ell}_{H_o(n)} \overset{L}{\otimes} J)$$

$$\xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(H_o(n),t_{H_o(n)} \otimes J) \quad (4.1.3)$$

car le système projectif des $t_{H_o(n)}$ est essentiellement nul (2.2.1 c)). Par la variante de 3.2. b) mentionnée plus haut, on retrouve que l'obstruction à prolonger H est nulle.

COROLLAIRE 4.8.- *Soient* k *un corps parfait de caractéristique* p, $W=W(k)$ *l'anneau des vecteurs de Witt sur* k , n *un entier* ≥ 1 , H_o *un* BT *sur* k *de hauteur* h *et dimension* d (2.2.2 b)), H_o^* *le* BT *dual (qui est donc de hauteur* h *et dimension* d^*, *avec* $h=d+d^*$). *Notons* $\underline{A}$ *la catégorie des* W-*algèbres locales artiniennes de corps résiduel* k .

(i) *Le foncteur des déformations de* H_o *sur* $\underline{A}$ *est pro-représentable par un* W-*schéma formel lisse* S , *de dimension relative* dd^*
(i.e $S \simeq \mathrm{Spf}(W[[(t_{ij})_{\substack{1\leq i\leq d^* \\ 1\leq j\leq d}}]])$.

(ii) *Soit* H *la déformation universelle de* H_o *sur* S . *Alors, le couple* $(S,H(n))$ *est une déformation verselle de* $H_o(n)$ *sur* $\underline{A}$ *(au sens de*

Schlessinger [27]).

(iii) *Posons* $t_{H_o} = t_{H_o}(1)$, $t_{H_o^*} = t_{H_o}(1)^*$. *L'application "de Kodaira-Spencer"*

(4.8.1) $$T_S(k) \longrightarrow t_{H_o^*} \otimes t_{H_o}$$

associant à un point $f : \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow S$ *tel que* $f(0)$ *soit l'inclusion canonique* $\mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow S$ *la différence* $[f^*H] - [H_o \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)]$ (resp. $[f^*H(n)] - [H_o(n) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/\varepsilon^2\,)]$, *considérée comme élément de* $t_{H_o^*} \otimes t_{H_o}$ *via* 4.4 c) *via* (4.7.1), *est bijective.*

Cela résulte immédiatement de 4.4 et 4.7 (rappelons que (ii) signifie que (a) pour tout $A \in \underline{A}$ et toute déformation G_n' de $H_o(n)$ sur A , il existe un W-morphisme $g : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow S$ tel que $g^*H(n) \xrightarrow{\sim} G_n'$, i.e une déformation H' de H_o sur A telle que $H'(n) \xrightarrow{\sim} G_n'$, (b) la classe de H' est unique quand $A = k[\varepsilon]/\varepsilon^2$, (c) pour toute flèche surjective $A \twoheadrightarrow A'$ de $\underline{A}$ et toute déformation G_n' de $H_o(n)$ sur A , toute application $g' : \mathrm{Spec}(A') \longrightarrow S$ représentant $G_n'|\mathrm{Spec}(A')$ se prolonge en une application $g : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow S$ représentant G_n') .

Remarque 4.8.2.- Compte tenu de 4.8 (iii), il est naturel, dans (i), de choisir les "paramètres" t_{ij} de manière que, si $\underline{m}$ est l'idéal maximal de S , on ait, via (4.8.1),

$$t_{ij} \bmod \underline{m}^2 = a_i \otimes b_j ,$$

où (a_i) (resp. (b_j)) est une base de $t_{H_o^*}$ (resp. t_{H_o}) .

COROLLAIRE 4.9.- *Soient* n *un entier* ≥ 1 , R *un anneau local noethérien complet, de corps résiduel* k *parfait de caractéristique* p , G *un* BT_n *de dimension* d (2.2.2 b)) *sur* $S = \mathrm{Spec}(R)$.

(i) *On a, dans* $D(S,\underline{O}_S)$,

(4.9.1) $$\ell_G \xrightarrow{\sim} (\underline{O}_S^d \xrightarrow{p^n} \underline{O}_S^d) .$$

En particulier, si R *est sans* p-*torsion, on a*

$$\ell_G \xrightarrow{\sim} \omega_G \xrightarrow{\sim} (\underline{O}_S/p^n\underline{O}_S)^d$$

$$\check{\ell}_G \xrightarrow{\sim} \nu_G[-1] \xrightarrow{\sim} (O_S/p^n\underline{O}_S)^d \ [-1] .$$

(ii) *Notons* $\underline{d}_{G/S} \subset O_S$ *l'idéal différente absolue de* G (cf. [25, Appendice, Définition 8]). *On a :*

(4.9.2) $\qquad \underline{d}_{G/S} = p^{nd}\underline{O}_S$.

D'après [22, II 4.8, 4.15] , il existe une suite exacte de BT_n

$$0 \longrightarrow G^o \longrightarrow G \longrightarrow G^{ét} \longrightarrow 0 ,$$

avec G^o connexe (i.e de fibre spéciale radicielle) et $G^{ét}$ étale. Le triangle distingué des complexes de co-Lie donne $\ell_G \xrightarrow{\sim} \ell_{G^o}$, ce qui ramène à supposer G connexe. Soit H un BT sur S tel que $G = H(n)$, (4.4 e)). On a alors une suite exacte

(1) $$0 \longrightarrow G \longrightarrow \overline{H} \xrightarrow{p^n} \overline{H} \longrightarrow 0 ,$$

où $\overline{H}$ est le groupe de Lie formel associé à H [22, II 4.4, 4.14] . On a $\ell_{\overline{H}} = \omega_{\overline{H}}$, et $\omega_{\overline{H}}$ est un $\underline{O}_S$-module libre de rang d . Le triangle distingué des complexes de co-Lie de (1) fournit (4.9.1) (cf. (2.1.3)).

Pour la preuve de (ii), nous aurons besoin de quelques rappels sur la différente (cf. [26, 1.3]).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini et plat, d'intersection complète, avec Y noéthérien. D'après la théorie de dualité de Grothendieck [13] , $\omega_{X/Y} := f^!\underline{O}_Y$ est alors un $\underline{O}_X$-module inversible. On a de plus une "classe fondamentale"

(4.9.3) $$c_{X/Y} : \underline{O}_X \longrightarrow \omega_{X/Y} ,$$

définie de l'une des façons équivalentes suivantes :

(a) Supposons que l'on dispose d'une Y-immersion fermée i de X dans un Y-schéma lisse Z , de dimension relative N , et soit J l'idéal de i . Alors on a [13, chap. III] un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \Lambda^N(J/J^2)^{\otimes -1} \otimes \Omega^N_{Z/Y} ,$$

et $c_{X/Y}$ est définie par

$$c_{X/Y} = (\Lambda^N d_{Z/Y}) \otimes \Lambda^N(J/J^2)^{\otimes -1} ,$$

où

$$d_{Z/Y} : J/J^2 \longrightarrow \Omega^1_{Z/Y} \otimes \underline{O}_X$$

est la différentielle.

b) Soit $Tr_{X/Y} : f_*\underline{O}_X \longrightarrow \underline{O}_Y$ l'homomorphisme trace, i.e $Tr_{X/Y}(b)$ = trace de la multiplication par b dans $f_*\underline{O}_X$. Alors $c_{X/Y}$ est le morphisme correspondant à $Tr_{X/Y}$ par la formule de dualité $Hom(f_*\underline{O}_X,\underline{O}_Y) = Hom(\underline{O}_X, f^!\underline{O}_Y)$.

Une démonstration, due à Tate, de l'équivalence des définitions (a) et (b) est donnée dans [21, Appendix]. La *différente* de X/Y est l'idéal

(4.9.4) $\qquad \underline{D}_{X/Y} := \operatorname{Im} \check{c}_{X/Y} : \omega_{X/Y}^{-1} \longrightarrow \underline{O}_X$

C'est un idéal localement principal, mais pas en général, inversible. La description (a) montre que, si $X = V(f_1,\ldots,f_N) \subset Y[T_1,\ldots,T_N]$, où $(f_1,\ldots,f_N)$ est une suite régulière (fibre à fibre), on a $\omega_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \underline{O}_X$ et

(4.9.5) $\qquad \underline{D}_{X/Y} = \det(\partial f_i/\partial T_j).\underline{O}_X$.

Cette formule serait encore valable si $Y[T_1,\ldots,T_N]$ était remplacé par $Y[[T_1,\ldots,T_N]]$.

Si maintenant X est un schéma en groupes commutatifs, fini et plat sur Y , l'idéal $\underline{D}_{X/Y}$ est muni d'une action naturelle de X , de sorte que, si $f : X \longrightarrow Y$ est la projection et $e : Y \longrightarrow X$ la section unité, on a

(4.9.6) $\qquad \underline{D}_{X/Y} \xrightarrow{\sim} f^*\underline{d}_{X/Y}$, $\underline{d}_{X/Y} := e^*\underline{D}_{X/Y}$,

où l'idéal $\underline{d}_{X/Y}$ de $\underline{O}_Y$ est la *différente absolue* de X dans la terminologie de [25, Appendice, Définition 8] . Pour X défini par des équations $(f_1,\ldots,f_N)$ comme ci-dessus, $\underline{d}_{X/Y}$ est l'idéal engendré par la valeur en e de $\det(\partial f_i/\partial T_j)$.

LEMME 4.9.7.- (cf. [21,6.3 + 8.3]). *Soit*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow G^0 \xrightarrow{h} G^1 \longrightarrow 0$$

une suite exacte, où G^0 *et* G^1 *sont des schémas en groupes commutatifs lisses (resp. formels lisses) sur* Y . *Alors on a*

(4.9.7.1) $\qquad \underline{d}_{X/Y} = \det((dh)_e).\underline{O}_Y$,

où $(dh)_e = \omega_h : \omega_{G^1} \longrightarrow \omega_{G^0}$, *et* det *désigne un déterminant (bien défini à une unité près).*

Cela résulte facilement de (4.9.5).

Prouvons maintenant 4.9 (ii). On peut supposer G connexe. Il suffit alors d'appliquer 4.9.7 à la suite exacte (1) de la démonstration de (i).

COROLLAIRE 4.10 (Raynaud).- *Soient* R *un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel* k *algébriquement clos de caractéristique* p , *de corps des fractions* K *de caractéristique nulle,* n *un entier* ≥ 1 , *et* G *un* BT *(resp.* BT_n*) sur* $\operatorname{Spec}(R)$, *de hauteur* h *et de dimension* d (2.2.2 b)) . *Posons* $G_K = G\times_{\operatorname{Spec}(R)}\operatorname{Spec}(K)$. *Alors on a*

$$\Lambda^h_{\mathbb{Z}_p} T_p(G_K) \simeq \mathbb{Z}_p(d) \quad (\text{avec } T_p(G_K) = \varprojlim_m {}_{(p^m)}G_K)$$

$$(\text{resp. } \Lambda^h_{\mathbb{Z}/p^n}\, G_K \simeq (\mathbb{Z}/p^n)(d))\ ,$$

où, au second membre, (d) *désigne un twist à la Tate.*

Le cas où G est un BT est traité dans [25,4.2.1] . Le cas d'un BT_n s'en déduit grâce à 4.4 e).

Remarques 4.10.1. a) Pour $n = 1$, 4.10 concorde avec le résultat de Raynaud [25,4.1.1] , compte tenu de 4.9 (ii).

b) On peut reformuler 4.10 en disant que le déterminant de $T_p(G_K)$ (resp. G_K) a la même valeur que si $G_k = G\times_{\mathrm{Spec}(R)}\mathrm{Spec}(k)$ était ordinaire, i.e G_k^o de type multiplicatif. La démonstration de Raynaud consiste à se ramener à ce cas par déformation. Le lemme clé [25, 4.2.3] est qu'il existe une déformation de G sur $R[[t]]$ qui est ordinaire au point générique de la fibre spéciale. Raynaud démontre ce lemme au moyen de la théorie des modules de Cartier des groupes de Lie formels. On peut aussi le prouver par un calcul infinitésimal utilisant 4.8 (iii) et le cristal de Dieudonné de G au sens de Grothendieck-Berthelot-Breen-Mazur-Messing [11], [22], [20], [3] , cf. Appendice 2.

4.11.- Complément. Soient $n \geq 1$, $i : S \longrightarrow S'$ une nilimmersion avec S' affine, F' un S'-schéma en groupe fini commutatif, localement libre, annulé par p^n , $F = F'\times_{S'}S$, $u : F \longrightarrow G$ un homomorphisme qui est une immersion fermée, avec G un BT_n sur S . Il existe alors un BT_n G' sur S' prolongeant G et un homomorphisme $u' : F' \longrightarrow G'$ prolongeant u (automatiquement une immersion fermée).

Cet énoncé généralise 4.4 a) (4.4 a) correspond à $F' = 0$). La démonstration est analogue, nous allons l'indiquer rapidement.

Notons tout d'abord que l'énoncé ci-dessus équivaut à celui-ci, qui en est dual :

4.11* : Soient n , i , G comme en 4.11, H' un S'-schéma en groupe fini commutatif, localement libre, annulé par p^n , $H = H'\times_{S'}S$, $v : G \longrightarrow H$ un épimorphisme. Il existe alors un BT_n G' sur S' prolongeant G et un épimorphisme $v' : G' \longrightarrow H'$ prolongeant v .

Techniquement, il nous sera plus commode de traiter le problème de 4.11*.

Les réductions de 4.5.3 1) et 2) ramènent à supposer que $S' = \mathrm{Spec}(A')$, avec A' une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini et l'immersion i définie par un idéal J de carré nul.

Soit $F = \ker v$; c'est un S-schéma en groupe fini, localement libre, annulé par p^n . D'après [14,VII 4.2.5] , l'obstruction à l'existence du prolongement cherché (G',v') est un élément

$$o(i,G',v) \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_F \overset{L}{\otimes} J)$$

(en fait, comme d'après 4.4 a) G admet un prolongement G' sur S', cette obstruction appartient même au sous-groupe

$$\mathrm{Coker}\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_G \overset{L}{\otimes} J) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_H \overset{L}{\otimes} J) ,$$

l'application ϕ, induite par $\check{\ell}_v$, s'interprétant, une fois choisi un prolongement $\widetilde{G}$, comme associant à la classe d'un prolongement G' l'obstruction à prolonger v en $v' : G' \longrightarrow H'$) ; de plus, si $o(i,G',v) = 0$, l'ensemble des classes de solutions du problème est un espace affine sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_F \overset{L}{\otimes} J)$, et l'ensemble des automorphismes d'une solution s'identifie à $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}/p^n}(G, \check{\ell}_F \overset{L}{\otimes} J)$. Par suite, les arguments de 4.5.3 3), 4), 5) ramènent à supposer A' artinien, de corps résiduel k parfait de caractéristique p, d'idéal maximal $\underline{m}$, et l'idéal J de S dans S' annulé par $\underline{m}$. D'après 4.4 e), il existe alors un BT C sur S tel que $G = C(n)$. Notons $C(.)$ le système projectif des $C(m)$, $m \geq n$, avec $p : C(m+1) \longrightarrow C(m)$ comme flèche de transition, $v. : C(.) \longrightarrow H$ le système projectif des $v.p^{m-n} : C(m) \longrightarrow H$, $B. = (B_m)_{m\geq n}$ le système projectif noyau de $v.$. Pour prouver l'existence d'un prolongement (G',v'), il suffit de résoudre le problème (a priori plus difficile) suivant :

(P) Trouver un BT C' sur S' prolongeant C et un prolongement $(v'). : C'(.) \longrightarrow H'$ du système projectif $v.$.

Notons par l'indice zéro la réduction sur $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$ (k le corps résiduel de A', de sorte qu'on a $S_0 \hookrightarrow S \overset{i}{\hookrightarrow} S'$). D'après une variante de [14,VII 4.2.5] (cf. preuve de 4.7), l'obstruction au problème (P) est un élément $o(P)$ de

$$E = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(C_0(.), \check{\ell}_{(B.)_0} \overset{L}{\otimes} J) \tag{4.11.1}$$

(et même du sous-groupe

$$\mathrm{Coker}\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(C_0(.), \check{\ell}_{C_0(.)} \overset{L}{\otimes} J) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^{\cdot}}(C_0(.), \check{\ell}_{H_0} \overset{L}{\otimes} J) ,$$

mais cela ne nous servira pas). Nous allons montrer que $E = 0$.

On procède pour cela comme en 4.7.2. Le point est que le système projectif $B.$ est "aussi bon" que le système projectif des tronqués d'un BT. Soient C^* le BT dual de Cartier de C, et

$$0 \longrightarrow H^* \longrightarrow C^*(.) \longrightarrow B^*_{\cdot} \longrightarrow 0$$

la suite exacte de systèmes inductifs duale de Cartier de la suite exacte

$$0 \longrightarrow B. \longrightarrow C(.) \longrightarrow H \longrightarrow 0 .$$

On sait [3,3.3.12] que $B^* := \varinjlim B_n^*$ est un BT . L'argument de (loc.cit.) montre aussi que l'on a $B^*(r) \subset B_{n+r}^*$ pour tout $r \geq 1$, de sorte que le système inductif des B_{an}^* contient "en sandwich" celui des $B^*(an)$:

$$B_n^* \subset B^*(n) \subset B_{2n}^* \subset \ldots \subset B_{an}^* \subset B^*(an) \subset B_{(a+1)n}^* \ldots \quad .$$

Dualement, si B est le dual de Cartier de B^* , le système projectif des $B(an)$ (avec $p^n : B((a+1)n) \longrightarrow B(an)$ comme flèche de transition) s'insère en sandwich dans celui des B_{an} :

(4.11.2) $B_n \longleftarrow B(n) \longleftarrow B_{2n} \longleftarrow \ldots \longleftarrow B_{an} \longleftarrow B(an) \longleftarrow B_{(a+1)n} \longleftarrow \ldots$.

Cela posé, la suite exacte (*) de la démonstration de 4.7 donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1\varprojlim \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), \check{\ell}_{(B_m)_o} \otimes J) \longrightarrow E \longrightarrow \varprojlim \operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), \check{\ell}_{(B_m)_o} \otimes J) \longrightarrow 0 \ .$$

Vu le triangle distingué

$$t_{(B_m)_o} \longrightarrow \check{\ell}_{(B_m)_o} \longrightarrow \nu_{(B_m)_o}[-1] \longrightarrow$$

et (2.2.4.1), on a une suite exacte (de k-vectoriels)

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), \check{\ell}_{(B_m)_o} \otimes J) \longrightarrow \operatorname{Hom}(C_o(m), \nu_{(B_m)_o} \otimes J)$$

$$(= t_{C_o^*(m)} \otimes \nu_{(B_m)_o} \otimes J) \ .$$

Donc les Ext^1 sont de dimension finie sur k , donc le système projectif des Ext^1 (qui est k-linéaire) vérifie (ML), donc son $R^1\varprojlim$ est nul, et par suite on a

$$E \xrightarrow{\sim} \varprojlim \operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), \check{\ell}_{(B_m)_o} \otimes J) \ .$$

D'autre part, par le triangle ci-dessus et (2.2.4.1) on a une suite exacte de systèmes projectifs

$$\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), t_{(B_m)_o} \otimes J) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), \check{\ell}_{(B_m)_o} \otimes J) \longrightarrow 0 \ .$$

Comme la flèche de $t_{B_o((a+1)n)}$ dans $t_{B_o(an)}$ induite par p^n est nulle (2.2.1 c) (ii)), (4.11.2) montre que le système projectif des $t_{(B_m)_o}$ $(m \geq n)$ est essentiellement nul. Il en est donc de même du système des $\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}/p^m}(C_o(m), \check{\ell}_{(B_m)_o} \otimes J)$, et par suite $E = 0$. Le problème (P) a donc une solution, ce qui achève la démonstration des énoncés 4.11 et 4.11*.

Dans le cas où l'idéal J de i est de carré nul, on peut, grâce à [14,VII 4.2.5, VII 4.2.7] , décrire par des Ext convenables l'ensemble des solutions du problème 4.11 (resp. 4.11*) et l'ensemble des automorphismes d'une solution. Nous en laissons le soin au lecteur.

APPENDICE 1

Le Théorème de Serre-Tate, d'après Grothendieck

Rappelons le résultat classique suivant de Grothendieck ($\sim$ 1962) :

THÉORÈME A 1.1.- *Soient* S' *un schéma affine,* $i : S \longrightarrow S'$ *une nilimmersion d'idéal* J, A *un schéma abélien sur* S .

(i) *Il existe un schéma abélien* A' *sur* S' *prolongeant* A .

(ii) *Supposons qu'on ait un idéal* $K \supset J$ *définissant* $S_o \subset S'$ *tel que* $JK = 0$. *Notons* A^* *le schéma abélien dual de* A *, et désignons par l'indice* o *les schémas déduits par le changement de base* $S_o \longrightarrow S$ *. Alors l'ensemble des classes d'isomorphie de déformations de* A *sur* S' *est un espace affine sous* $t_{A_o^*} \otimes t_{A_o} \otimes J$ *, et le groupe des automorphismes d'un prolongement* A' *de* A *(induisant l'identité sur* A *) est réduit à zéro.*

L'argument de Grothendieck est esquissé dans [24, p.231-238] , avec, semble-t-il, une légère inexactitude p. 238, 1.18. On peut aussi procéder comme suit. Tout d'abord, des arguments standard ramènent à prouver (i) dans la situation de (ii). L'existence d'un prolongement et les assertions de (ii) découlent alors de 3.2 et du lemme suivant :

LEMME A.1.2.- *Soient* S *un schéma affine,* A *un schéma abélien sur* S *,* M *un* $\underline{O}_S$*-module quasi-cohérent. Alors on a*

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(A,M) = 0 .$$

Voir [3, 2.5.6 et p. 107, 1.11] . On peut aussi se ramener à supposer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p^n \underline{O}_S = 0$ et que $M = \underline{O}_S$. Il suffit alors d'écrire la suite exacte des Ext associée à la suite exacte $0 \longrightarrow A(n) \longrightarrow A \xrightarrow{p^n} A \longrightarrow 0$, et de noter que la flèche

$$(t_{A^*} \simeq \,)\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\underline{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A(n),\underline{O}_S)\ (\simeq \nu_{A(n)^*})$$

est un isomorphisme (examiner les rangs).

COROLLAIRE A 1.3 (Serre-Tate).- *Soient* $i : S \longrightarrow S'$ *une nilimmersion,* A *un schéma abélien sur* S *,* $G = \varinjlim A(n)$ *le* BT *associé. On suppose que* p *est localement nilpotent sur* S *. Notons* $\underline{\mathrm{Def}}(A,i)$ (resp. $\underline{\mathrm{Def}}(G,i)$) *le champ des* *déformations de* A (resp. G) *en un schéma abélien* (resp. BT) *sur* S' . *Alors le foncteur* "BT *associé*"

$$\underline{\mathrm{Def}}(A,i) \longrightarrow \underline{\mathrm{Def}}(G,i)$$

est une équivalence.

On se ramène au cas où S' est affine, p nilpotent sur S , et l'idéal de i de carré nul. La conclusion découle alors de 4.4 c), 4.7 et A 1.1.

L'argument ci-dessus est dû à Grothendieck. La démonstration originale de Serre-Tate est, à notre connaissance, non publiée. Pour d'autres démonstrations voir [22, V 2.3] , et [17,1] , qui présente une preuve due à Drinfeld.

APPENDICE 2

Inversibilité générique de Hasse-Witt, d'après Koblitz

Koblitz a étudié dans [18] la variation infinitésimale de la matrice de Hasse-Witt d'une variété abélienne principalement polarisée. Il est aisé de transcrire ses calculs dans le cadre des F-cristaux, ce qui permet de les appliquer au cristal de Dieudonné d'un BT.

A 2.1.- Soient k un corps parfait de caractéristique p, $A = k[[t_1,\dots,t_n]]$, $\underline{m}$ l'idéal maximal de A, $A_i = A/\underline{m}^{i+1}$, M un A-module libre de rang h, muni d'une connexion intégrable $\nabla : M \longrightarrow \Omega^1_A \otimes M$ (où $\Omega^1_A = \Omega^1_{A/\mathbb{F}_p} = \Omega^1_{A/k} = \oplus A\, dt_i$) et d'un endomorphisme σ-linéaire F, horizontal pour ∇, σ désignant l'endomorphisme de Frobenius de A ; autrement dit, (M, ∇, F) est un F-cristal sur A/k, libre de rang h. On fait l'hypothèse que $N = \mathrm{Im}\, F : M \longrightarrow \sigma_* M$ est libre, de sorte que $L = \mathrm{Ker}\, F$ l'est aussi. On note r (resp. s) le rang de L (resp. N). On pose $M_i = M \otimes_A A_i$, et d'une manière générale, on désigne par l'indice i les objets déduits par extension des scalaires de A à A_i.

Ces données déterminent deux invariants principaux : d'une part, *l'endomorphisme de Hasse-Witt*

(A 2.1.1) $\quad HW : N \longrightarrow N$,

qui est l'endomorphisme σ-linéaire déduit de F par passage au quotient, d'autre part *l'application de Kodaira-Spencer*

(A 2.1.2) $\quad \mathrm{Kod} : L \longrightarrow \Omega^1_A \otimes N$,

qui est l'application A-linéaire déduite de ∇ par passage au quotient.

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : calculer $HW_1 : N_1 \longrightarrow N_1$, connaissant $HW_o : N_o \longrightarrow N_o$ et $\mathrm{Kod}_o : L_o \longrightarrow \Omega^1_A \otimes N_o (= \underline{m}/\underline{m}^2 \otimes_k N_o)$. En fait, ces données ne suffisent pas tout à fait, mais on donnera une formule pour HW_1 en termes de Kod_o et F_o.

Nous allons pour cela transcrire dans le cadre précédent le calcul de Koblitz [18, p. 183-185]. Soit

(A 2.1.3) $\quad P : M_1 \longrightarrow M_1$ (resp. $P : A_1 \longrightarrow A_1$)

l'application définie par

$$Px = x - \Sigma t_i \nabla(\partial_{t_i})x \qquad (\text{resp. } Px = x - \Sigma t_i \partial_{t_i} x) .$$

On déduit de [18, p. 173-175] (ou l'on vérifie directement) que P possède les propriétés suivantes :

(A.2.1.4) $$P^2 = P \,, \quad P(fx) = P(f)P(x) \quad (\forall f \in A_1 \,, \forall x \in M_1) \,, \quad P(\underline{m}\, M_1) = 0 \,, \quad P(F_1 x) = F_1 x \quad (\forall x \in M_1) \ .$$

Notons d'autre part que $\nabla : M \longrightarrow \oplus\ (dt_i \otimes M)$ est donné par $\nabla x = \Sigma dt_i \otimes \nabla(\partial_{t_i})x$, de sorte que

$$\mathrm{Kod}_o : L_o \longrightarrow \Omega^1_A \otimes N_o \ (=\underline{m}/\underline{m}^2 \otimes_k N_o = \underline{m}\, M/(\underline{m}\, L + \underline{m}^2 M)\ )$$

est donné par

(A 2.1.5) $$\mathrm{Kod}_o(\overline{x}) = \text{classe de } \ \Sigma t_i \nabla(\partial_{t_i})x \ \text{ dans } \ \underline{m}\, M/(\underline{m}\, L + \underline{m}^2 M)$$

pour $\overline{x}$ = classe de $x \in L_1$ dans L_o .

Choisissons des éléments

(A 2.1.6) $$(e_i)\ (1 \leq i \leq r) \quad (\text{resp. } (f_j)\ (1 \leq j \leq s))$$

de L_1 (resp. M_1 tels que (e_i) soit une base de L_1 , les images de f_j dans N_1 forment une base de N_1 , et $Pf_j = f_j$ pour tout j (on prend d'abord (e_i), (f_j') vérifiant les deux premières conditions, puis on remplace f_j' par $Pf_j' = f_j$: comme P est l'identité mod $\underline{m}$, les deux premières conditions sont encore satisfaites, et la troisième l'est aussi car $P^2 = P$) . On a donc une décomposition

$$M_1 = L_1 \oplus N_1 \,,$$

où N_1 est identifié à $\oplus A_1 f_j$, et $F_1 : M_1 \longrightarrow M_1$ est donné par une matrice

(A 2.1.7) $$\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix}$$

dans la base $((e_i), (f_j))$, avec B_1 de type (r,s) et H_1 carrée d'ordre s . La matrice H_1 représente $HW_1 : N_1 \longrightarrow N_1$ (A 2.1.1), et le rang de F_o , donc de $\begin{pmatrix} B_o \\ H_o \end{pmatrix}$, est égal à s . D'autre part, dans les bases (e_i^o) et (f_j^o) de L_o et N_o induites par (e_i) et (f_j) , l'application Kod_o (A 2.1.2, 2.1.5) est représentée par une matrice K_o de type (s,r) à coefficients dans $\underline{m}/\underline{m}^2$.

<u>PROPOSITION A 2.1.8</u> (cf. [18, p. 185, 1.-2]) . *Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité suivante entre matrices carrées d'ordre* s *à coefficients dans* A_1 :

$$H_1 = H_o - K_o B_o$$

(dans cette formule, H_o *et* B_o *sont à coefficients dans* $k = A_o \subset A_1$*)* .

C'est le calcul de (loc. cit.). Posons $B_1 = (b_{ij})$, $H_1 = (h_{ij})$, $K_o = (k_{ij})$. On a

$$F_1 f_j = \Sigma_i b_{ij} e_i + \Sigma_\ell h_{\ell j} f_\ell .$$

Comme $PF_1 = F_1$, et compte tenu des formules de (A 2.1.4), on en déduit (en notant a^o le terme constant (dans k) d'un élément a de A_1) :

$$F_1 f_j = \Sigma_i b^o_{ij} Pe_i + \Sigma_\ell h^o_{\ell j} f_\ell \quad (\text{car } Pf_\ell = f_\ell)$$

$$= \Sigma_i b^o_{ij}(e_i - \Sigma_m t_m \nabla(\partial_{t_m}) e_i) + \Sigma_\ell h^o_{\ell j} f_\ell ,$$

d'où, compte tenu de (A 2.1.5),

$$H_1 f_j = -\Sigma_i b^o_{ij}(\Sigma_m k_{mi} f_n) + \Sigma_\ell h^o_{\ell j} f_\ell$$

$$= \Sigma_\ell (h^o_{\ell j} - \Sigma_i k_{\ell i} b^o_{ij}) f_\ell ,$$

ce qui est l'égalité annoncée.

COROLLAIRE A 2.1.9.- *On suppose que* M *est "modulaire", en ce sens que l'application de Kodaira-Spencer* (A.2.1.2) *induit un isomorphisme* $(\Omega^1_A)^\vee = T_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L,N)$ *(ou, ce qui revient au même, que* Kod_o *induit un isomorphisme* $T_A(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(L_o,N_o)$*). On note* (T_{ij}) $(1 \leq i \leq s\ ,\ 1 \leq j \leq r)$ *un système de coordonnées sur* A *tel que la dérivation* $\partial_{T_{ij}}$ *corresponde par cet isomorphisme à* $(e^o_j)^* \otimes f^o_j$ *((-)* désignant la base duale). Alors* K_o *est la matrice* (T_{ij}) *. Pour* $u \in T_A(k)$ *,* $u : A \longrightarrow k[\varepsilon]$ $(\varepsilon^2 = 0)$*, donné par* $\Sigma u_{ij} \partial_{T_{ij}}$ *, la matrice* u^*H *, à coefficients dans* $k[\varepsilon]$ *, induite par* u *, est*

$$u^*H = H_o - \varepsilon U B_o ,$$

où $U = (u_{ij})$ $(1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq r)$.

C'est immédiat.

COROLLAIRE A 2.1.10.- *Sous les hypothèses de* (A 2.1.9)*, supposons que* $\mathrm{rg}(H_o) = a < s$ *. Soit* V *le sous-espace de* $T_A(k)$ *défini par*

$$V = \{u : A \longrightarrow k[\varepsilon],\ \Lambda^{a+1} u^*H = 0\} .$$

Alors on a $V \neq T_A(k)$.

Il existe a lignes de H_o qui sont linéairement indépendantes. Quitte à rénuméroter la base (f_j) , on peut supposer que ce sont les a premières. Les $s-a$ dernières en sont donc des combinaisons linéaires, et comme le rang de $\begin{pmatrix} B_o \\ H_o \end{pmatrix}$ est $s > a$, il existe une ligne $(b^o_{m,.})$ de B_o telle que la matrice $(a+1)\times s$

$$C = \begin{pmatrix} b^o_{m,.} \\ h^o_{1,.} \\ \cdots \\ h^o_{a,.} \end{pmatrix}$$

soit de rang $a+1$. Soit $u : L_o \longrightarrow N_o$ l'application linéaire telle que $u(e^o_m) = f^o_{a+1}$ et $u(e^o_i) = 0$ pour $i \neq m$. La matrice U de u (dans les bases (e^o_i) et (f^o_j)) a donc pour seul terme non nul celui d'indice $(a+1,m)$, égal à 1 . La matrice UB_o a pour seule ligne non nulle la $(a+1)$-ième, égale à $b^o_{m,.}$. La matrice des $a+1$ premières lignes de $H_o - \varepsilon UB_o$ est donc

$$D = \begin{pmatrix} h^o_{1,.} \\ \cdots \\ h^o_{a,.} \\ h^o_{a+1,.} - \varepsilon b^o_{m,.} \end{pmatrix} .$$

Si Δ est un mineur $\neq 0$ de C , formé avec les colonnes d'indice $j_1 < \ldots < j_{a+1}$, le mineur de D formé avec les mêmes colonnes est non nul, car le coefficient de ε est $\pm \Delta$. Donc $\Lambda^{a+1}u^*H \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

Le résultat ci-dessus est très grossier. On pourrait, comme Koblitz dans [18, IV §9] , étudier les sous-espaces de $T_A(k)$ définis par des conditions de rang ou de p-rang sur H .

A 2.2.- On suppose maintenant que k est algébriquement clos, et on considère un k-schéma lisse de type fini $S \neq \emptyset$, et un F-cristal (M,∇, F) sur S , localement libre de rang h, tel que $L = \operatorname{Ker} F$ soit localement libre de rang r, et $N = M/L$ localement libre de rang s . On définit comme en A 2.1 l'endomorphisme de Hasse-Witt HW et l'application de Kodaira-Spencer Kod. On suppose que M est modulaire, i.e. que Kod induit un isomorphisme $T_S \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(L,N)$.

PROPOSITION A 2.2.1.- *Sous les hypothèses précédentes, il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que, pour tout point fermé* x *de* S' , $(HW)(x)$ *soit inversible.*

Soit a le sup des rangs de $(HW)(x)$, pour x parcourant les points fermés de S . Supposons que l'on ait $a < s$. Alors $\Lambda^{a+1}HW = 0$. Appliquant A 2.1.10 au cristal induit par M sur le complété de S en un point fermé x où $rg(HW)(x) = a$, on obtient une contradiction.

Bien entendu, comme on l'a signalé plus haut, on peut paraphraser Koblitz, et stratifier S par le rang et le p-rang de HW .

A 2.3.- Soient S/k comme en A 2.2, et G un BT (resp. BTT) de hauteur h sur S . On sait alors associer à G un F-cristal $M = \underline{\mathbb{D}}(G)$ sur S/k , localement libre de rang h , tel que $L = \mathrm{Ker}\ F$ s'identifie canoniquement au module $\omega_G = \omega_{G(1)} = \text{"}\varprojlim\text{"}\omega_{G(n)}$, localement libre de rang $d = \dim G$, et le quotient $N = M/L$ au module $t_{G^*} = t_{G(1)^*} = \text{"}\varinjlim\text{"}\ t_{G^*(n)}$, localement libre de rang $d^* = \dim G^*$:

$$(A\ 2.3.1)\qquad 0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow M \longrightarrow t_{G^*} \longrightarrow 0 \quad ,$$

voir par exemple [3, 3.3.6 et 3.3.11] . Il résulte de (loc. cit.) et de [2, 1.5.1] que l'endomorphisme de Hasse-Witt correspondant

$$(A\ 2.3.2)\qquad HW : t_{G^*} \longrightarrow t_{G^*}$$

n'est autre que l'opération de puissance p-ième symbolique. On a d'autre part une application de Kodaira-Spencer

$$(A\ 2.3.3)\qquad \mathrm{Kod} : \omega_G \longrightarrow \Omega^1_S \otimes t_{G^*} \quad .$$

<u>LEMME A 2.3.4</u>.- *Soit* s *un point fermé de* S . *L'application*

$$\mathrm{Kod}(s) : T_S(s) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\omega_G(s), t_{G^*}(s)) = t_G(s) \otimes t_{G^*}(s)$$

associe à un morphisme f *de* $S' = \mathrm{Spec}\ k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ *d'origine* s *la différence des classes de déformations de* G(s) *sur* S' , $[f^*H]-[H(s)x_sS']$ (cf. 4.4 c) *et* 4.7).

D'après [3,3.3.5] , M est défini par $M = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{S/k}(G,\underline{O}_{S/k})$. Ce groupe peut se calculer comme cohomologie cristalline "spatiale" d'un diagramme convenable. Pour faire le lien avec [14] , il est commode d'utiliser, plutôt que le diagramme [3, 2.1.6.2] , le diagramme (beaucoup plus compliqué) $(\underline{G} \longrightarrow \underline{S}) = (N(\mathbb{Z},G) \longrightarrow N(\mathbb{Z},S))$ de [14, VI 4.1.6] . Pour vérifier A 2.3.4 , on peut se ramener à supposer que G est un BT formel lisse. Alors M se calcule comme un groupe de cohomologie de De Rham relative formelle

$$M = H^1_{DR}(\underline{G}/\underline{S}) \quad ,$$

la connexion ∇ est donnée par Gauss-Manin, et (A 2.3.1) par la filtration de Hodge. Il est standard (cf. par exemple [16, 1.4.1.7]) que l'application (de Kodaira-Spencer) $T_S(k) \longrightarrow H^1(\underline{G},T_{\underline{G}/\underline{S}})$ induite par ∇ associe à $f : S' \longrightarrow S$ la différence des classes de déformations de $\underline{G}(\underline{s})$ sur $\underline{S}'$, $[f^*\underline{G}] - [\underline{G}(\underline{s}) x_{\underline{s}} \underline{S}']$. Il ne reste plus qu'à identifier $H^1(\underline{G},T_{\underline{G}/\underline{S}})$ à $t_G \otimes t_{G^*}$ de manière compatible avec (4.7.1) et 4.4 c).

LEMME A 2.3.5.- *Soit* s *un point fermé de* S . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G(s) *est ordinaire, i.e* $G^o(s)$ *de type multiplicatif* (cf. 4.10.1)) ;

(ii) HW(s) $(=(x \longmapsto x^{(p)}))$: $t_{G^*(s)} \longrightarrow t_{G^*(s)}$ *est bijectif.*

(ii') $(x \longmapsto x^{(p)})$: $t_{G(s)} \longrightarrow t_{G(s)}$ *est bijectif.*

En effet, il revient au même de dire que G(s) ou que G*(s) est ordinaire, et pour G(s) radiciel on a (G(s) multiplicatif) $\Longleftrightarrow$ (V bijectif sur G(s)) $\Longleftrightarrow$ $(x \longmapsto x^{(p)}$ bijectif sur $t_{G(s)})$.

PROPOSITION A 2.3.6.- *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout point fermé* s *de* S , *si* $\hat{S_s}$ *désigne le complété de* S *en* s , *la restriction de* G *à* $\hat{S_s}$ *est une déformation verselle de* G(s) *sur la catégorie des* k*-algèbres locales artiniennes de corps résiduel* k (cf. 4.8) ;

(ii) *L'application*

$$T_S \longrightarrow t_G \otimes t_{G^*}$$

induite par l'application de Kodaira-Spencer (A 2.3.3) *est un isomorphisme. Si ces conditions sont remplies, il existe un ouvert non vide* U *de* S *tel que, pour tout point fermé* s *de* U , G(s) *soit ordinaire.*

La première assertion découle de 4.8 et A 2.3.4, la seconde de A 2.2.1 et A 2.3.5.

Remarque A 2.3.7.- Les théorèmes d'algébrisation de M. Artin [1] montrent qu'il existe des BTT G/S vérifiant les conditions de A 2.3.6. J'ignore ce qu'il en est pour les BT .

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, *Algebraization of formal moduli*, I , *in Global Analysis*, papers in honor of K. Kodaira, Univ. of Tokyo Press & Princeton Univ. Press, 1969, et *Construction techniques for algebraic spaces*, Cong. int. 1970, I, 419-423, Gauthier-Villars, 1971.

[2] P. BERTHELOT. *Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait*, Ann. Scient. E.N.S, 4ème série, t. 13, 1980, 225-268.

[3] P. BERTHELOT, L. BREEN, W. MESSING. *Théorie de Dieudonné cristalline* II, Lecture Notes in Mathematics n°930, Springer Verlag, 1982.

[4] L. BREEN. *On a nontrivial higher extension of representable abelian sheaves*, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 1969, 1249-1253.

[5] L. BREEN. *Un théorème d'annulation pour certains* Ext^i *de faisceaux abéliens*, Ann.Scient. E.N.S 5 (1975), 339-352.

[6] P. CARTIER. *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés*, CRAS Paris, t. 265, 1967, série A, 49-52, et *Modules associés à un groupe formel commutatif, courbes typiques*, CRAS Paris, t. 265, 1967, série A, 129-132.

[7] P. DELIGNE. *Le Lemme de Gabber* et *Représentations ℓ-adiques*, Exposés n°5 et 9, ce Séminaire.

[8] M. DEMAZURE et P. GABRIEL. *Groupes algébriques*, North-Holland, 1970.

[9] G. FALTINGS, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inv. Math., 73, 1983, 349-366.

[10] J-M FONTAINE. *Groupes* p *divisibles sur les corps locaux*, Astérisque 47-48, SMF, 1977.

[11] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Cong. int. 1970, I, 431-436, Gauthiers-Villars, 1971.

[12] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Sém. Math. Sup. 45, Presses de l'Univ. de Montréal, 1970.

[13] R. HARTSHORNE. *Residues and Duality*, Lectures Notes in Mathematics n°20, Springer-Verlag, 1966.

[14] L. ILLUSIE. *Complexe cotangent et déformations* I, II, Lecture Notes in Mathematics n°239 et 283, Springer-Verlag, 1971, 1972.

[15] N. KATZ. *Nilpotent connections and the monodromy theorem*, Pub. Math. IHES, 39, 175-232, 1970.

[16] N. KATZ. *Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration)*, Inv. Math., 18, 1972, 1-118.

[17] N. KATZ. *Serre-Tate local moduli*, Exp. V bis dans Surfaces Algébriques, Lecture Notes in Mathematics n° 868, Springer-Verlag 1981.

[18] N. KOBLITZ. p-*adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields*, Comp. Math ,31,1975,119-218.

[19] M. LAZARD. *Commutative Formal Groups*, Lecture Notes in Mathematics n°443, Springer-Verlag, 1975.

[20] B. MAZUR, W. MESSING. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture Notes in Math. n°370, Springer-Verlag, 1974.

[21] B. MAZUR, L. ROBERTS. *Local Euler Characteristics*, Inv. Math., 9 1970, 201-234.

[22] W. MESSING. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math. n°264, Springer-Verlag, 1972.

[23] A. OGUS. F-*crystals and Griffiths transversality*, Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, 15-44.

[24] F. OORT, *Finite group schemes, local moduli for abelian varieties and lifting problems*, Proc. 5th Nordic Summer School, The Netherlands, Walters-Noordhoff, 1970.

[25] M. RAYNAUD. *Schémas en groupes de type* (p,...,p), Bull. Soc. math. France, 102, 1974, 241-280.

[26] M. RAYNAUD. *Hauteurs et isogénies*. Exp.7, ce Séminaire.

[27] M. SCHLESSINGER. *Functors of Artin rings*, Trans. AMS, 130, (1968), 208-222.

EGA IV *Eléments de Géométrie algébrique*, par A. Grothendieck, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Pub. IHES 20, 24, 28, 32.

SGA 6 *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 66/67, par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, Lecture Notes in Mathematics n°225, Springer-Verlag, 1971.

LUC ILLUSIE
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX