Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer

Astérisque, tome 126 (1985), p. 99-110

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__99_0>

EXPOSÉ VIII

LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES DE KUMMER

Arnaud BEAUVILLE

Cet exposé est consacré à la démonstration du résultat suivant (voir l'exposé précédent pour la terminologie) :

Théorème. Soient X , X' deux surfaces K3 kählériennes et $\varphi : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X',\mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge effective. Supposons que X soit une surface de Kummer. Il existe alors un isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \varphi$.

La démonstration de cet énoncé est délicate, et fait appel à des techniques assez fines de géométrie algébrique. Il faut peut-être recommander au lecteur de la sauter en première lecture.

1. X' AUSSI EST UNE SURFACE DE KUMMER

Fixons d'abord les notations que nous utiliserons pour les surfaces de Kummer. Soit A un tore complexe de dimension 2 ; sauf mention du contraire, nous ne supposons pas fixée une origine sur A . Soit σ une involution de A qui induit sur $H^1(A,\mathbb{C})$ la multiplication par (-1). Une fois fixée une origine sur A , une telle involution est de la forme $x \longmapsto a-x$, avec $a \in A$. Nous noterons N l'ensemble des points fixes de σ ; c'est un espace affine sous le groupe A_2 des points d'ordre 2 de A (considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_2$). On note $\varepsilon : \hat{A} \longrightarrow A$ l'éclatement de N dans A , et $(E_n)_{n\in N}$ la famille des diviseurs exceptionnels. L'involution σ s'étend en une involution $\hat{\sigma}$ de $\hat{A}$. On désigne par X la surface quotient $\hat{A}/\hat{\sigma}$; c'est une surface K3 (Exposé IV,5.3). Posons $C_n = \pi(E_n)$, pour $n \in N$. Les courbes $(C_n)_{n\in N}$ forment une famille de 16 courbes rationnelles lisses disjointes sur X . L'application de passage au quotient $\pi : \hat{A} \longrightarrow X$ est un revêtement double ramifié le long de la réunion des C_n .

Rappelons maintenant un résultat bien connu en géométrie algébrique :

Lemme 1. Soient Y une variété analytique et Δ un diviseur lisse sur Y . Pour qu'il existe une variété $\tilde{Y}$ et un revêtement double $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ ramifié le long de Δ , il faut et il suffit que la classe de Δ soit divisible par 2 dans $\mathrm{Pic}(Y)$ (il revient au même de demander que $[\Delta]$ soit divisible par 2 dans $H^2(Y,\mathbb{Z})$).

Indiquons seulement la construction du revêtement : si $p : L \longrightarrow Y$ est un fibré en droites sur Y et s une section de $L^{\otimes 2}$ de diviseur Δ , on pose $\tilde{Y} = \{y \in L \mid y^{\otimes 2} = s(py)\}$.

Il résulte de ce lemme que la somme des C_n est divisible par 2 dans $\mathrm{Pic}(X)$. Inversement :

Lemme 2. Soit X une surface K3 contenant 16 courbes rationnelles lisses disjointes $(C_i)_{1\le i\le 16}$, telles que ΣC_i soit divisible par 2 dans $\mathrm{Pic}(X)$. Alors X est une surface de Kummer.

Soit $\pi : \hat{A} \longrightarrow X$ le revêtement double ramifié le long de la réunion des C_i (Lemme 1). On a $\pi^* C_i = 2E_i$, où E_i est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection (-1). On peut donc contracter les E_i par un morphisme birationnel $\varepsilon : \hat{A} \longrightarrow A$. Les calculs de l'Exposé IV (5.3), pris à l'envers, montrent que le fibré canonique de A est trivial (ce qui implique que A est minimale) et qu'on a $\chi_{top}(A) = 0$. De plus on a (cf.Exposé III)

$$b^+(A) = b^+(\hat{A}) \geq b^+(X) = 3$$

d'où $b^+(A) = 3 = 2\,p_g(A) + 1$, ce qui entraîne que $b_1(A)$ est pair (loc.cit.). On conclut alors de la classification des surfaces que A est un tore complexe. L'involution $\hat{\sigma}$ de $\hat{A}$ qui échange les deux feuillets du revêtement π fixe les courbes E_i , donc induit une involution σ de A ; puisque $H^1(X,\mathbb{C})$ est nul, σ agit sur $H^1(A,\mathbb{C})$ par multiplication par (-1). Ceci prouve le lemme. □

Remarque. L'hypothèse sur la somme des C_i est en fait conséquence des autres ; nous n'utiliserons pas ce résultat dont la démonstration est loin d'être triviale [1] .

Proposition 1. Sous les hypothèses du théorème, X' est aussi une surface de Kummer.

Soit $n \in N$. Puisque φ est effective, $\varphi([C_n])$ est la classe d'un diviseur effectif C'_n, de carré (-2). Puisque φ^{-1} est effective, C'_n est irréductible (sans quoi C_n serait linéairement équivalente à un diviseur réductible), donc rationnelle lisse. Puisque $\Sigma[C'_n] = \varphi(\Sigma[C_n])$ est divisible par 2 dans $\mathrm{Pic}(X')$, on déduit du Lemme 2 que X' est une surface de Kummer. $\sqcup$

Nous utiliserons pour la surface de Kummer X les notations A, N, ε, π... introduites ci-dessus, et noterons A', N', ε', π'... les données correspondantes pour X'. Remarquons qu'il existe par construction une bijection $\tilde{\varphi} : N \longrightarrow N'$ telle que $\varphi([C_n]) = [C'_{\tilde{\varphi}n}]$ pour tout $x \in N$.

2. RELATION ENTRE $H^2(A)$ ET $H^2(X)$

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ X & \end{tikzcd}$$

On pose $i(a) = \pi_* \varepsilon^* a$ pour $a \in H^2(A,\mathbb{C})$. Il est clair que i définit un homomorphisme de $H^2(A,\mathbb{C})$ dans $H^2(X,\mathbb{C})$, compatible aux structures de Hodge.

Observons que l'involution σ opère trivialement sur $H^2(A,\mathbb{C})$, et qu'il en est donc de même de $\hat{\sigma}$ sur $H^2(\hat{A},\mathbb{C})$. On a par conséquent

$$\pi^* \pi_* = 2 \quad \text{et} \quad \pi_* \pi^* = 2 \;;$$

On en déduit, pour a et b dans $H^2(A,\mathbb{C})$,

$$i(a).i(b) = \varepsilon^* a.\, \pi^* \pi_* \varepsilon^* b = 2\, a.b\,, \tag{1}$$

ce qui entraîne en particulier que l'homomorphisme i est injectif.

Notons L_X le sous-groupe de $H^2(X,\mathbb{Z})$ engendré par les classes $[C_n]$ pour $n \in N$.

Lemme 3. Le sous-groupe $i(H^2(A,\mathbb{Z})) \subset H^2(X,\mathbb{Z})$ est l'orthogonal de L_X dans $H^2(X,\mathbb{Z})$.

Cet énoncé est très facile en cohomologie rationnelle, mais plus délicat sur $\mathbb{Z}$. Au cours de la démonstration, on posera pour abréger $H^i(T) = H^i(T,\mathbb{Z})$ pour toute variété T.

Soient $a \in H^2(A)$ et $n \in N$; on a

$$C_n . i(a) = \pi^* C_n . \varepsilon^* a = 2 E_n . \varepsilon^* a = 0 ,$$

d'où l'inclusion $i(H^2(A)) \subset (L_X)^{\perp}$. Prouvons l'inclusion opposée. Soit $x \in (L_X)^{\perp}$; comme $\pi^* x$ est orthogonal aux E_n , il existe $a \in H^2(A)$ tel que $\pi^* x = \varepsilon^* a$. Comme $x = \frac{1}{2} \pi_* \pi^* x$, il suffit de prouver que a est divisible par 2 dans $H^2(A)$; ou encore, par dualité de Poincaré, que $(a.b)$ est pair pour tout $b \in H^2(A)$.

Posons $A_o = \hat{A} - \cup E_n = A - N$, et $X_o = \hat{X} - \cup C_n$; notons $\pi_o : A_o \longrightarrow X_o$ la restriction de π . Considérons le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{(C_n)} & H^2(X) & \longrightarrow & H^2(X_o) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_o^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{(E_n)} & H^2(\hat{A}) & \longrightarrow & H^2(A_o) & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

On va montrer plus bas que π_o^* est surjectif ; on en déduit que $H^2(\hat{A})$ est engendré par $\mathrm{Im}(\pi^*)$ et les E_n . Soit $b \in H^2(A)$; on peut écrire

$$\varepsilon^* b = \pi^* y + \Sigma\, m_n [E_n] , \text{ avec } y \in H^2(X) , m_n \in \mathbb{Z} .$$

On a alors

$$(a.b) = (\varepsilon^* a . \varepsilon^* b) = (\varepsilon^* a . \pi^* y) = (\pi^* x . \pi^* y) = 2(x.y) ,$$

d'où le résultat.

Il reste à montrer que π_o^* est surjectif. Puisque π_o est un revêtement étale galoisien de groupe $G = \mathbb{Z}/2$, on dispose de la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q(A_o)) \Longrightarrow H^{p+q}(X_o) .$$

Notons σ_q l'action de σ sur $H^q(A_o)$, et $\varepsilon_q^p = (-1)^p . \mathrm{Id}_{H^q(A_o)}$.

La théorie de la cohomologie des groupes cycliques fournit un isomorphisme

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ker}(\sigma_q - \varepsilon_q^p)/\mathrm{Im}(\sigma_q + \varepsilon_q^p) \text{ pour } p \neq 0 .$$

Pour $q \leq 2$, la restriction $H^q(A) \longrightarrow H^q(A_o)$ est un isomorphisme ; par suite on a $\sigma_q = \varepsilon_q^q$ pour $q \leq 2$. On en déduit $E_2^{2,1} = E_2^{3,0} = 0$, ce qui entraîne que l'"edge-homomorphisme" $H^2(X_o) \longrightarrow E_2^{0,2}$ de la suite spectrale est surjectif. Mais cet homomorphisme s'identifie à π_o^* , ce qui achève la démonstration du lemme. □

Revenons à la situation du théorème. On déduit du Lemme 3 que φ induit un isomorphisme $\psi : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z})$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2(A,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & H^2(A',\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ H^2(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & H^2(X',\mathbb{Z}) \end{array} \quad .$$

De plus ψ est une isométrie (formule (1)) et préserve les structures de Hodge. L'étape suivante consiste à examiner sous quelle condition une telle isométrie provient d'un isomorphisme de A' sur A .

3 . LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES TORES COMPLEXES

Commençons par deux remarques d'algèbre linéaire.

a) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2n, muni d'une forme quadratique de signature (n,n). Nous appellerons génératrices de V les sous-espaces isotropes maximaux ; il existe deux familles irréductibles de génératrices. Nous allons voir que le choix d'une de ces familles est canoniquement équivalent à celui d'une orientation de V .

Soit en effet G une génératrice de V . On déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow V \longrightarrow G^* \longrightarrow 0$$

des isomorphismes canoniques

$$\Lambda^{2n} V \longrightarrow \Lambda^n G \otimes \Lambda^n G^* \longrightarrow \mathbb{Q} ,$$

d'où une orientation de V , que l'on peut décrire comme suit : une base $(e_1,\ldots,e_{2n})$ de V telle que $e_1,\ldots,e_n \in G$ est directe si et seulement si $\det(e_i . e_{n+j}) > 0$.
Par continuité, l'orientation ainsi définie ne dépend que de la famille de génératrices à laquelle appartient G . On obtient ainsi une bijection canonique entre

l'ensemble des familles de génératrices de V et l'ensemble des orientations de V.

b) Soit H un $\mathbb{Z}$-module libre orienté de rang 4. On définit à l'aide de l'orientation une forme $\mathbb{Z}$-bilinéaire symétrique sur $\Lambda^2 H$

$$\Lambda^2 H \otimes \Lambda^2 H \longrightarrow \Lambda^4 H \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{Z} ,$$

qui est unimodulaire, de signature $(3,3)$. Une des deux familles de génératrices de $\Lambda^2 H_{\mathbb{Q}}$ est formée par les sous-espaces $h \wedge H_{\mathbb{Q}}$, pour $h \in H_{\mathbb{Q}}$; il lui correspond une orientation de $\Lambda^2 H$, dite canonique. Si $(e_1,\dots,e_4)$ est une base directe de H, la base

$$(e_1 \wedge e_2 \, , \, e_1 \wedge e_3 \, , \, e_1 \wedge e_4 \, , \, e_3 \wedge e_4 \, , \, e_4 \wedge e_2 \, , \, e_2 \wedge e_3)$$

de $\Lambda^2 H$ est directe.

Notons que la famille de génératrices ainsi distinguée est paramétrée canoniquement par $\mathbb{P}(H_{\mathbb{Q}})$ (exercice : la seconde famille est paramétrée par $\mathbb{P}(H^*_{\mathbb{Q}})$).

Lemme 4. Soient H, H' deux $\mathbb{Z}$-modules libres orientés de rang 4, et $\psi : \Lambda^2 H \longrightarrow \Lambda^2 H'$ une isométrie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) ψ préserve l'orientation ;

(ii) il existe un isomorphisme $\lambda : H \longrightarrow H'$ tel que $\psi = \pm \lambda \wedge \lambda$;

(iii) il existe un isomorphisme $\lambda_2 : H \otimes \mathbb{F}_2 \longrightarrow H' \otimes \mathbb{F}_2$ tel que

$$\psi \equiv \lambda_2 \wedge \lambda_2 \pmod{2} .$$

Montrons que (i) implique (ii). Sous l'hypothèse (i), l'application ψ envoie les génératrices du type $h \wedge H_{\mathbb{Q}}$ sur les génératrices analogues de $\Lambda^2 H'_{\mathbb{Q}}$; elle induit donc un isomorphisme de $\mathbb{P}(H_{\mathbb{Q}})$ sur $\mathbb{P}(H'_{\mathbb{Q}})$, associé à un isomorphisme linéaire $\lambda : H_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H'_{\mathbb{Q}}$, tel que

$$\psi(h \wedge H_{\mathbb{Q}}) = \lambda(h) \wedge H'_{\mathbb{Q}} \quad \text{pour tout } h \in H_{\mathbb{Q}} .$$

On en déduit aussitôt qu'il existe un nombre rationnel r tel que $\psi = r\, \lambda \wedge \lambda$.

D'autre part il existe des bases $(e_1,\dots,e_4)$ de H et $(e'_1,\dots,e'_4)$ de H', et des nombres rationnels $d_1,\dots,d_4$ tels que $\lambda(e_i) = d_i\, e'_i$ pour $1 \le i \le 4$; quitte à modifier λ par une homothétie on peut supposer que $d_1,\dots,d_4$ sont des entiers sans facteur commun. Mais comme ψ est un isomorphisme de $\Lambda^2 H$ sur $\Lambda^2 H'$, on doit avoir $r\, d_i\, d_j = \pm 1$ pour $1 \leq i < j \leq 4$, ce qui entraîne $d_i = \pm 1$ et $r = \pm 1$, d'où l'assertion (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Il est clair que (ii) implique (iii). Prouvons enfin (iii) $\Longrightarrow$(i). Il s'agit de montrer que les familles de génératrices $h' \wedge H'_{\mathbb{Q}}$, pour $h' \in H'_{\mathbb{Q}}$, et $\psi\,(h \wedge H_{\mathbb{Q}})$, pour $h \in H_{\mathbb{Q}}$, coïncident. Or il suffit de le vérifier après réduction mod.2 ; cela résulte alors de la condition (iii). □

<u>Remarque</u> 1 . Sous les conditions du lemme, l'isomorphisme λ tel que $\psi = \pm\, \lambda \wedge \lambda$ est <u>unique au signe près</u>. En effet, l'égalité $\lambda \wedge \lambda = \pm\, \mu \wedge \mu$ entraîne $\lambda(P) = \mu(P)$ pour tout 2-plan $P \subset H_{\mathbb{Q}}$; par intersection, on en déduit $\lambda(D) = \mu(D)$ pour toute droite $D \subset H_{\mathbb{Q}}$, d'où $\mu = r\lambda$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Comme $r^2 = \pm 1$ on doit avoir $r = \pm 1$.

Le même argument montre que l'<u>isomorphisme</u> λ_2 <u>tel que</u> $\psi \equiv \lambda_2 \wedge \lambda_2$ (mod.2) <u>est unique</u>.

Rappelons (Exposé I) qu'une structure de Hodge de poids un est définie par un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini Γ et une décomposition $\Gamma_{\mathbb{C}} = H \oplus \overline{H}$, où H et $\overline{H}$ sont des sous-espaces complexes conjugués de $\Gamma_{\mathbb{C}}$. Les morphismes de telles structures sont définis de manière évidente. Le résultat suivant est bien connu et d'ailleurs élémentaire :

<u>Lemme</u> 5 . <u>Le foncteur contravariant</u> $A \longmapsto H^1(A,\mathbb{Z})$ <u>définit une équivalence de la catégorie des tores complexes sur celle des structures de Hodge de poids un</u> .

Etant donnée une décomposition de Hodge $\Gamma_{\mathbb{C}} = H \oplus \overline{H}$, considérons l'homomorphisme composé

$$i \,:\, \Gamma^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathbb{C}},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H,\mathbb{C}) = H^* \;;$$

il est injectif, et identifie Γ^* à un réseau de H^*. On vérifie aussitôt que le foncteur qui associe à la structure de Hodge Γ le tore complexe H^*/Γ^* est quasi-inverse du foncteur H^1. □

Soit maintenant A un tore complexe de dimension 2 . Pour $1 \leq i \leq 4$, le cup-produit permet d'identifier $H^i(A,\mathbb{Z})$ à $\Lambda^i\, H^1(A,\mathbb{Z})$. On en déduit une orientation canonique sur $H^1(A,\mathbb{Z})$, puis d'après ce qui précède sur $H^2(A,\mathbb{Z})$. Si A' est un autre tore complexe de dimension 2 et v un morphisme de A' dans A, il résulte du Lemme 4 que l'homomorphisme $v^* : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z})$ préserve l'orientation.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> $\psi : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z})$ <u>une isométrie de Hodge préservant</u>

<u>l'orientation. Il existe alors un morphisme</u> $v : A' \longrightarrow A$ <u>tel que</u> $\psi = \pm v^*$.

D'après le lemme 4 , il existe un isomorphisme $\lambda : H^1(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(A',\mathbb{Z})$ tel que $\psi = \pm \lambda\wedge\lambda$. Puisque $\psi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(A)) = H^{2,0}(A')$, les 2-plans $H^{1,0}(A')$ et $\lambda_{\mathbb{C}}(H^{1,0}(A))$ dans $H^1(A',\mathbb{C})$ ont mêmes coordonnées plückériennes, donc coïncident. Cela signifie que λ est un isomorphisme de structures de Hodge, donc provient d'un isomorphisme $v : A' \longrightarrow A$ (Lemme 5) ; on a $v^* = \lambda\wedge\lambda = \pm \psi$. □

<u>Remarques</u>. 2) Il résulte de la remarque 1 que le morphisme v est unique à translation et changement de signe près.

3) Il existe des isométries de Hodge $v : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A,\mathbb{Z})$ qui ne respectent pas l'orientation (et ne proviennent donc pas d'un automorphisme de A). Prenons par exemple $A = E \times F$, où E et F sont des courbes elliptiques. Notons e la classe dans $H^2(A,\mathbb{Z})$ de la courbe $E \times \{0\}$, et f celle de $\{0\} \times F$. Les classes e et f engendrent un plan hyperbolique H , qui est facteur direct dans $H^2(A,\mathbb{Z})$ et contenu dans $H^{1,1}(A)$. L'application v , égale à l'identité sur $H^{\perp}$ et telle que $v(e) = f$, $v(f) = e$, est une isométrie de Hodge de déterminant (-1).

La proposition 2 est énoncée incorrectement dans [2], sans la condition sur l'orientation. De ce fait, la vérification de cette condition pour l'isométrie ψ obtenue à la fin du n°2, qui constitue la difficulté essentielle de cet exposé, ne figure pas dans [2].

4. <u>VÉRIFICATION DE LA CONDITION SUR L'ORIENTATION</u>

Nous reprenons les notations du n°1 pour la surface de Kummer X associée au tore complexe A . Rappelons que l'ensemble N des courbes exceptionnelles de X est un espace affine sous le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel A_2 formé des points d'ordre 2 de A .

<u>Lemme</u> 6 . <u>Les sous-ensembles</u> I <u>de</u> N <u>tel que</u> $\sum_{i\in I} C_i$ <u>soit divisible par</u> 2 <u>dans</u> Pic(X) <u>sont</u> $\emptyset$,N <u>et les hyperplans affines de</u> N .

Montrons d'abord qu'un hyperplan affine I de N possède la propriété indiquée. Prenons pour origine de A un point de N-I . Il existe alors une forme linéaire non nulle $\chi : A_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ telle que $I = \chi^{-1}(1)$. A cette forme est associé un revêtement étale double $r : B \longrightarrow A$, de façon que $r(B_2) = \operatorname{Ker} \chi$. On déduit de r un revêtement étale $\hat{r} : \hat{B} \longrightarrow \hat{A}$, où $\hat{B}$ est la variété obtenue à partir de B en éclatant les 32 points de $r^{-1}(A_2)$ (c'est-à-dire les 16 points de B_2 et les 16 points de $r^{-1}(I)$). L'involution $b \longmapsto -b$ s'étend à $\hat{B}$; le quotient Y est une surface K3 éclatée en 8 points, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{\hat{B}} \arrow[r] \arrow[d, "\hat{r}"] & Y \arrow[d, "s"] \\ \hat{A} \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd},$$

où s est un revêtement double ramifié le long de $\bigcup_{i\in I} C_i$. On conclut avec le lemme 1 du n°1 .

Inversement, soit I un sous-ensemble de N , et $s : Y \longrightarrow X$ un revêtement double ramifié le long de $\bigcup_{i\in I} C_i$. Notons B' le produit fibré $Y \times_X \hat{A}$. Le revêtement $r' : B' \longrightarrow \hat{A}$ est étale en dehors des courbes E_i pour $i \in I$. Au voisinage de E_i (pour $i \in I$), un calcul local sans difficultés montre que B' est réunion de deux surfaces qui se coupent transversalement au-dessus de E_i , telles que la restriction de r' à chaque surface soit un isomorphisme. Par conséquent la normalisée $\hat{\hat{B}}$ de B' est lisse, et le revêtement $\hat{r} : \hat{\hat{B}} \longrightarrow \hat{A}$ est étale ; il provient donc d'un revêtement double étale $r : B \longrightarrow A$. Si $I \neq \emptyset, N$, ce revêtement est non trivial (car les deux revêtements doubles $\hat{\hat{B}} \longrightarrow Y$ et $Y \longrightarrow X$ sont ramifiés, donc B est connexe), et on se trouve alors dans la situation précédente. Choisissant l'origine de A dans $N-I$ et celle de B au-dessus de celle de A , on voit que I est l'hyperplan affine $A_2 - r(B_2)$. $\square$

On peut reformuler le lemme de la façon suivante : <u>le noyau de l'homomorphisme de $\mathbb{F}_2^N$ dans $H^2(X,\mathbb{F}_2)$ défini par la famille $([C_n])_{n\in N}$ est l'espace des fonctions affines sur</u> N .

<u>Corollaire</u>. <u>L'application</u> $\tilde{\varphi} : N \longrightarrow N'$ <u>est affine</u>.

Il résulte en effet de ce qui précède que $\tilde{\varphi}$ transforme tout hyperplan affine de N en hyperplan affine de N' . Le "théorème fondamental de la géométrie affine" affirme alors que $\tilde{\varphi}$ est affine. Indiquons la démonstration de ce dernier résultat : fixons des origines de N et de N' de façon que $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Alors $\tilde{\varphi}$ transforme hyperplan vectoriel de N en hyperplan vectoriel de N' , d'où, par intersection, 2-plan (vectoriel) de N en 2-plan de N' . En considérant, pour $x \neq y$, le 2-plan $\{0,x,y, x+y\}$, on en déduit $\tilde{\varphi}(x+y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y)$, d'où notre assertion. $\square$

Ecrivons $A = V/\Gamma$, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et Γ un réseau dans V . Le dual Γ^* s'identifie d'une part au groupe des caractères de A (à valeurs dans $\mathbb{S}^1$), d'autre part à $H^1(A,\mathbb{Z})$. Soit γ un élément non nul de Γ^*, et $\hat{\gamma} : A \longrightarrow \mathbb{S}^1$ le caractère correspondant. Le noyau T_γ de $\hat{\gamma}$ est une sous-variété (réelle) de codimension un de A ; <u>la classe de</u> T_γ <u>dans</u> $H^1(A,\mathbb{Z})$ <u>est égale à</u> $\pm\gamma$ (le signe dépend de l'orientation). En effet pour le voir on peut supposer que γ fait partie d'une base de Γ^* ; il existe alors un difféomorphisme $A \longrightarrow (\mathbb{S}^1)^4$ par lequel $\hat{\gamma}$ s'identifie à la projection sur un des facteurs. L'assertion résulte alors immédiatement du théorème de Künneth.

Rappelons d'autre part que le dual A_2^* du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel A_2 s'identifie canoniquement à $H^1(A,\mathbb{Z}/2)$, via les morphismes

$$H^2(A,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} \Gamma^*/2\Gamma^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma/2\Gamma,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} A_2^* .$$

<u>Lemme 7</u> . <u>Soient</u> γ,δ <u>deux éléments de</u> $H^1(A,\mathbb{Z})$, <u>dont les classes</u> γ_2 <u>et</u> δ_2 <u>dans</u> A_2^* <u>sont distinctes et non nulles</u>. <u>Soit</u> $H \subset N$ <u>un</u> 2-<u>plan affine de direction</u> $\mathrm{Ker}(\gamma_2) \cap \mathrm{Ker}(\delta_2)$. <u>On a alors dans</u> $H^2(X,\mathbb{Z})$

$$i(\gamma \wedge \delta) \equiv \sum_{n\in H} [C_n] \pmod{2} .$$

Choisissons comme origine de A un point de H . D'après ce qui précède, l'élément $\gamma \wedge \delta$ de $H^2(A,\mathbb{Z})$ est représenté par la sous-variété $T_\gamma \cap T_\delta$, convenablement orientée. En modifiant continûment la structure complexe de A , on peut supposer que $T_\gamma \cap T_\delta$ est une sous-variété complexe de A . Soit alors Z son transformé strict dans $\hat{A}$; on a

$$\varepsilon^*(\gamma \wedge \delta) = [Z] + \sum_{n\in H} [E_n] .$$

Puisque Z est stable par l'involution $\hat{\sigma}$ de $\hat{A}$, la classe $\pi_*[Z]$ est divisible par 2 dans $H^2(X,\mathbb{Z})$, d'où le lemme. □

Notons $\psi_2 : H^2(A,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z}/2)$ la réduction de ψ mod.2 ; notons d'autre part $\tau : A_2 \longrightarrow A_2'$ l'application linéaire associée à $\tilde{\varphi}$, et $\check{\tau} : H^1(A,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(A',\mathbb{Z}/2)$ l'application transposée inverse.

<u>Lemme 8</u> . <u>On a</u> $\psi_2 = \check{\tau} \wedge \check{\tau}$.

Observons d'abord que l'homomorphisme $i_2 : H^2(A,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}/2)$ est injectif, puisque i est injectif et que son image est un sous-module primitif (Lemme 3). Compte tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(A,\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\psi_2} & H^2(A',\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle i'_2} \\ H^2(X,\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\varphi_2} & H^2(X',\mathbb{Z}/2)\ , \end{array}$$

il s'agit de montrer qu'on a, pour γ , δ dans $H^1(A,\mathbb{Z}/2)$,

$$\varphi_2(i_2(\gamma \wedge \delta)) = i'_2\ (\check{\tau}\gamma \wedge \check{\tau}\delta)\ .$$

On peut supposer que γ et δ sont distincts et non nuls. Soit H un 2-plan affine de N parallèle à $\mathrm{Ker}(\gamma) \cap \mathrm{Ker}(\delta)$. On a (Lemme 7)

$$\varphi_2(i_2(\gamma \wedge \delta)) = \sum_{n\in H} [C_{\tilde{\varphi}n}]$$

Mais comme le 2-plan affine $\tilde{\varphi}(H)$ est parallèle à $\mathrm{Ker}(\check{\tau}\gamma) \cap \mathrm{Ker}(\check{\tau}\delta)$, on a

$$i'_2(\check{\tau}\gamma \wedge \check{\tau}\delta) = \sum_{m\in\tilde{\varphi}(H)} [C_m]\ ,$$

d'où le lemme. □

5. FIN DE LA DÉMONSTRATION

Les Lemmes 4 et 8 montrent que l'isométrie $\psi : H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A',\mathbb{Z})$ préserve l'orientation. Il existe donc un morphisme $v : A' \longrightarrow A$ tel que $\psi = \pm v^*$ (Proposition 2). On va montrer qu'on a en fait $\psi = v^*$. Soit α (resp. ξ) une forme de Kähler sur A (resp. X). On a

$$[\xi].i([\alpha]) = \int_{\hat{A}} \varepsilon^*\alpha \wedge \pi^*\xi\ ;$$

les formes $\varepsilon^*\alpha$ et $\pi^*\xi$ étant positives sur $\hat{A}$ et non dégénérées en dehors des E_n , cette intégrale est strictement positive, ce qui entraîne $i([\alpha]) \in \mathcal{C}^+_X$ et par conséquent $i(\mathcal{C}^+_A) \subset \mathcal{C}^+_X$. Puisque φ est effective, on en déduit $\psi(\mathcal{C}^+_A) \subset \mathcal{C}^+_A$, d'où $\psi = v^*$.

Choisissons des origines $O_A \in N$ et $O_{A'} \in N'$ de façon que $\tilde{\varphi}(O_A) = O_{A'}$. Puisque v est défini à translation près, on peut le choisir de façon que $v(O_{A'}) = O_A$. On a alors $v(N') = N$, $v \circ \sigma' = \sigma \circ v$ et v induit des morphismes $\hat{v}$ et u rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "v"] & A \\
\hat{A}' \arrow[u, "\varepsilon'"] \arrow[r, "\hat{v}"] \arrow[d, "\pi'"'] & \hat{A} \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\pi"] \\
X' \arrow[r, "u"] & X
\end{tikzcd} .$$

Il s'agit de prouver qu'on a $u^* = \varphi$. Il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus qu'on a $u^* \circ i = i' \circ v^*$, de sorte que u^* coïncide avec φ sur l'image de i . Puisque $H^2(X,\mathbb{Q})$ est engendré par Im(i) et par les $[C_n]$, il reste à montrer que pour tout $n \in N$ on a $u^*([C_n]) = \varphi([C_n])$, autrement dit $v^{-1}(x) = \varphi(x)$. Identifions à l'aide des origines choisies N à A_2 et N' à A'_2 , de sorte que φ s'identifie à une application $\mathbb{F}_2$-linéaire $\tau : A_2 \longrightarrow A'_2$. D'autre part v induit un homomorphisme $v_2 : A'_2 \longrightarrow A_2$, dont le transposé ${}^t v_2 : H^1(A,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(A',\mathbb{Z}/2)$ n'est autre que l'homomorphisme induit par v . On a alors d'après le Lemme 8

$$\psi_2 = {}^t v_2 \wedge {}^t v_2 = \check{\tau} \wedge \check{\tau} ,$$

ce qui entraîne ${}^t v_2 = \check{\tau}$ (n°3, Remarque 1), soit encore $\tau = v_2^{-1}$, ce qui est la relation cherchée. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Nikulin : On Kummer surfaces, Math. USSR Izvestija 9 (1975), 261-275 .

[2] I. Pjateckii-Šapiro, I.R. Šafarevic : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR Izvestija 5 (1971), 547-588.

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n° 653
91405 ORSAY CEDEX (France)