PAUL GAUDUCHON

Théorème de Torelli local pour les surfaces K3

Astérisque, tome 126 (1985), p. 59-77
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__59_0>

EXPOSÉ V

THÉORÈME DE TORELLI LOCAL POUR LES SURFACES K3

Paul GAUDUCHON

1. DÉFORMATION D'UNE STRUCTURE COMPLEXE (INTRODUCTION)

Nous considérons une variété complexe compacte X (lisse, connexe) de dimension réelle 2n. Pour un géomètre différentiel un tel objet est d'abord une variété différentielle munie ensuite d'une structure complexe conçue comme structure additionnelle ; il est naturel dans cette optique de définir une déformation de X comme une modification de la structure complexe additionnelle sur la variété différentiable sous-jacente. Mais souvent la situation se présente de façon différente si, par exemple, X est définie par un système d'équations dans un espace ambiant $\tilde{X}$, ou comme quotient d'une variété complexe par un groupe d'automorphismes Γ ; dans ce cas, en modifiant légèrement les équations ou le groupe Γ nous obtenons des variétés complexes "proches" de X -dans un sens qu'il faut préciser- mais distinctesde X même d'un point de vue différentiable. Toutefois, si ces modifications sont légères, toutes ces variétés sont difféomorphes entre elles de sorte que par un choix approprié -explicite- de ces difféomorphismes cette seconde notion de déformation -plus exactement de famille de variétés complexes- se ramène à la première. Ainsi, tant que nous nous limitons à des déformations petites, les deux points de vue s'équivalent, mais le passage de l'un à l'autre n'est pas canonique en général.

Pour illustrer ce double point de vue un exemple simple est celui des tores complexes à une dimension (complexe). Ceux-ci sont naturellement définis comme quotient de plan complexe $\mathbb{C}$ par un réseau que nous pouvons considérer comme engendré par 1 et τ, où τ est un complexe de partie imaginaire positive, i.e. un élément du demi-plan de Poincaré H ; quand

τ varie dans H nous obtenons une *famille* T_τ de variétés complexes paramétrées par H. Toutes ces variétés complexes sont difféomorphes au produit $S^1 \times S^1$ du cercle par lui-même, mais elles ne sont isomorphes que si :

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} ,$$

où a, b, c, d sont des entiers tels que le déterminant $ad - bc$ soit égal à 1. Le passage de ce point de vue à l'autre ici est simple car il existe un difféomorphisme évident de T_τ sur $S^1 \times S^1$ qui consiste à associer au couple (u,v) de $S^1 \times S^1$ -u et v sont deux réels définis à un entier près- la classe d'équivalence de $u + v \cdot \tau$ dans T_τ. Si ξ et η sont les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ respectivement de $S^1 \times S^1$ la structure complexe, associé à τ, sur $S^1 \times S^1$ est déterminé, en termes d'opérateur presque-complexe J_τ par les relations :

$$(1) \qquad \begin{aligned} J_\tau\, \xi &= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \xi + \frac{1}{\beta} \cdot \eta \\ J_\tau\, \eta &= -\frac{|\tau|^2}{\beta} \cdot \xi + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \xi \end{aligned} ,$$

si $\tau = \alpha + i\beta$ (où $\beta > 0$ rappelons-le) ; on note que la structure complexe "naturelle" de $S^1 \times S^1$ correspond à $\tau = i$, c'est-à-dire au réseau carré.

Dans cet exemple, le paramètre τ évolue lui-même dans une variété complexe. Plus généralement, nous définissons une *famille analytique* (lisse) *de variétés complexes* (compactes, lisses) par la donnée :

- d'un espace de paramètres S qui est une variété complexe (lisse) de dimension complexe m
- d'une variété compacte $\mathcal{X}$ de dimension complexe $m + n$;
- d'une application holomorphe p de $\mathcal{X}$ sur S, propre et de rang maximal.

Ainsi chaque fibre $p^{-1}(s)$, $s \in S$, est une variété complexe compacte, de dimension complexe n, qui dépend analytiquement de s au sens qui vient d'être défini. L'exemple ci-dessus de la famille T_τ entre dans ce cadre avec $S = H$ et $\mathcal{X}$ quotient de $\mathbb{C} \times H$ par la relation d'équivalence qui identifie (z,τ) et $(z + a + b\tau, \tau)$, a, $b \in \mathbb{Z}$. On note, en revanche, que le caractère analytique de la déformation n'apparaît pas à l'évidence sur les relations (1).

Faisons choix, dans la famille $\mathcal{X} \xrightarrow{p} S$, d'une fibre de référence X_o au-dessus d'un point-base s_o de S. L'hypothèse de rang maximal implique

que p est, d'un point de vue différentiable, <u>localement trivial</u>, i.e. qu'il existe un voisinage Δ de s_o dans S et un difféomorphisme Φ de $p^{-1}(\Delta)$ sur le produit $X_o \times \Delta$ ([6], th. 4.1, p. 19-20). Au moyen de Φ nous pouvons transporter la structure complexe de $X_s = p^{-1}(s)$, $s \in \Delta$ sur X_o, obtenant ainsi une famille de structures complexes sur la seule et même variété différentiable sous-jacente à X_o. Nous sommes ainsi ramenés à notre point de vue initial. Toutefois le choix de Φ est arbitraire et nous avons été obligé de nous borner à un voisinage Δ de s_o dans S.

Explicitement la déformation de X_o se décrit comme suit ; pour Δ assez petit, nous pouvons choisir sur $p^{-1}(\Delta)$ des cartes $\mathcal{U}_i$ de la forme $\Phi^{-1}(U_i \times \Delta)$ où $\{U_i\}$ est un atlas de X_o ; l'hypothèse de rang maximal implique que l'on puisse choisir, sur chaque $\mathcal{U}_i$, des coordonnées complexes du type $(z_i^1,\ldots,z_i^n, t^1,\ldots,t^m)$ où $(t^1,\ldots,t^m)$ sont des coordonnées complexes de Δ ; nous obtenons ainsi, par transport par Φ, n fonctions complexes $\zeta_i^1(x,t),\ldots,\zeta_i^n(x,t)$ sur chaque ouvert U_i de X_o, telles que, pour t fixé sur Δ, elles constituent un système de coordonnées complexes pour la structure complexe associée à $t \in \Delta$; sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on a :

$$\zeta_i^\alpha(x,t) = h_{ij}^\alpha(\zeta_j(x,t),t) \quad ,$$

où les h_{ij}^α sont des fonctions <u>holomorphes</u> de $\mathbb{C}^{m+n}$ dans $\mathbb{C}$.
Les fonctions $\zeta_i^\alpha(x,t)$ sont elles-mêmes C^∞ sur $U_i \times \Delta$; on peut montrer qu'il est possible, par un choix approprié de Φ -mais non pour un Φ quelconque- de faire que ces fonctions dépendent elles-mêmes <u>analytiquement</u> du paramètre t ([5], ch. IV).

A partir de maintenant nous ne considérons que des <u>familles locales</u> au voisinage d'une variété complexe X_o, soit encore des <u>germes</u> de familles en ce sens que (S,s_o) est égal à $(\Delta,0)$, où Δ est une boule ouverte de $\mathbb{C}^m$, centrée à l'origine et de rayon réductible à volonté. Alternativement nous considérons des <u>déformations locales</u> de la structure complexe X_o déterminées soit par des coordonnées complexes $\{\zeta_i^\alpha(x,t)\}$, dépendant analytiquement du paramètre $t \in \Delta$, soit de la façon que nous allons développer à présent.

2. FAMILLE ANALYTIQUE DE STRUCTURES COMPLEXES

Une structure presque-complexe sur une variété différentielle X, de dimension 2n équivaut à la donnée d'un sous-fibré $\mathbb{C}$-vectoriel de rang n, $T^{0,1}X$ du fibré tangent complexifié $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C}$ tel que

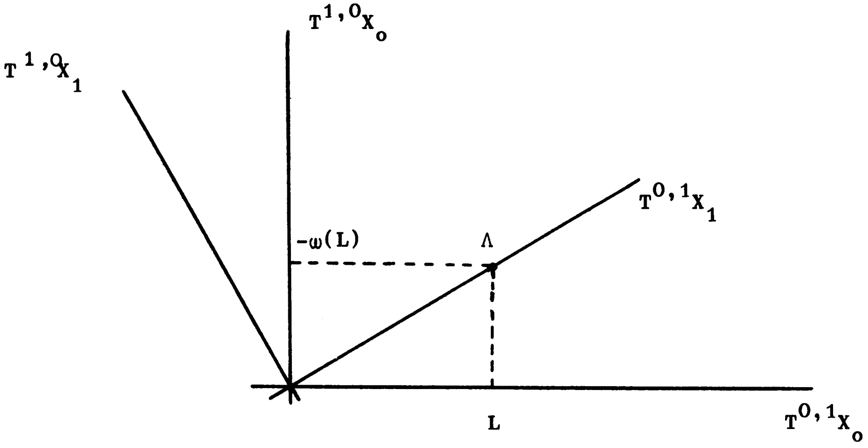
$$T_{\mathbb{C}}X = \overline{T^{0,1}X} \oplus T^{0,1}X \quad ,$$

c'est-à-dire tel que $T^{0,1}X$ et le fibré complexe conjugué $T^{1,0}X$ n'aient que la section nulle en commun. L'opérateur presque-complexe correspondant J est alors défini par le fait que $T^{0,1}X$ (resp. $T^{1,0}X$) est le sous-fibré propre de $T_{\mathbb{C}}X$ relativement à la valeur propre $-i$ (resp. $+i$).

Donnons-nous une structure presque-complexe de référence X_o sur X, avec la décomposition en types :

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X_o \oplus T^{0,1}X_o \quad .$$

Une structure presque complexe X_1 sur X est dite à distance finie de X_o si la projection de $T_{\mathbb{C}}X$ sur $T^{0,1}X_o$ définie par la structure X_o induit un $\mathbb{C}$-isomorphisme de $T^{0,1}X_1$ sur $T^{0,1}X_o$; cela veut dire qu'en chaque point x de X, $T^{0,1}X_1$ se situe dans la portion "finie" de la grassmannienne des n-plans complexes de $(T_{\mathbb{C}}X)_x$ déterminée par $(T^{0,1}X_o)_x$. Nous obtenons ainsi le schéma :



Tout élément Λ de $T^{0,1}X_1$ se décompose en

$$\Lambda = L + L' \quad ,$$

avec $L \in T^{0,1}X_o$ et $L' \in T^{1,0}X_o$;
puisque Λ et L se correspondent bijectivement dans cette décomposition, celle-ci induit un $\mathbb{C}$-homomorphisme de $T^{0,1}X_o$ dans $T^{1,0}X_o$ que nous noterons $-\omega$, déterminé par

$$L' = -\omega(L) \quad .$$

Cet homomorphisme ω détermine à son tour la structure X_1 puisque $T^{0,1}X_1$ est, par construction, constitué des éléments de $T_{\mathbb{C}}X$ qui sont de la forme :

(2) $$\Lambda = L - \omega(L) \quad .$$

Toutefois un $\mathbb{C}$-homomorphisme ω de $T^{0,1}X_o$ dans $T^{1,0}X_o$ ne détermine une structure presque-complexe X_1 sur X que si le sous-fibré de $T_{\mathbb{C}}X$ défini par (2) engendre, avec son conjugué, le fibré $T_{\mathbb{C}}X$ tout entier ; ce qui équivaut à dire que 1 n'est pas valeur propre de l'homomorphisme $\overline{\omega} \circ \overline{\omega}$ de $T^{0,1}X_o$ ([5], p. 38) ; cette condition est vérifiée pour ω assez proche de zéro (bien entendu zéro correspond à la structure X_o elle-même).

Les vecteurs complexes de $T^{0,1}X_1$, c'est-à-dire les vecteurs définis par la relation (2), sont les vecteurs de type (0,1) relativement à X_1. Une fonction (locale) f de X est holomorphe (relativement à X_1) si et seulement si $\Lambda \cdot f$ est nul pour tout vecteur Λ de type (0,1) relativement à X_1, autrement dit si et seulement si :

(3) $$L \cdot f - \omega(L) \cdot f = 0$$

pour tout vecteur L de type (0,1) (relativement à la structure de référence X_o).

La structure X_1 (définie par ω) est <u>intégrable</u> par définition, si elle est induite par une structure complexe, c'est-à-dire s'il est possible, au voisinage de tout point de X, de trouver un système de n fonctions holomorphes ζ^α, $\alpha = 1,\ldots,n$, indépendantes, i.e. telles que $\{d\zeta^\alpha\}$ constitue un système indépendant sur le voisinage considéré.

On observe que la condition (3) qui détermine les fonctions holomorphes pour X, équivaut à celle-ci :

(4) $$d''f - d'f \lrcorner\, \omega = 0 \quad ,$$

où ω est considéré comme une 1-<u>forme de type</u> (0,1) <u>à valeurs dans le fibré</u>

tangent holomorphe $T^{1,0}X_o$ et où le symbole $\lrcorner$ désigne la contraction de la 1-forme de type (1,0) d'f avec la partie fibrée de ω.

Notons $A^{0,p}(T^{1,0}X_o)$ l'espace des p-formes de type (o,p) à valeurs dans le fibré tangent holomorphe $T^{1,0}X_o$ de X_o, et $A^{0,*}(T^{1,0}X_o)$ l'espace somme directe des $A^{0,p}(T^{1,0}X_o)$. Il est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire d'une opération crochet $[.,.]$ $\mathbb{C}$-bilinéaire vérifiant :

(i) $\quad [\varphi,\psi] = (-1)^{pq}[\psi,\varphi] \quad , \quad \forall\ \varphi \in A^{0,p}(T^{1,0}X_o) \quad , \quad \forall\ \psi \in A^{0,q}(T^{1,0}X_o)$

(ii) $\quad (-1)^{pr}[\varphi,[\psi,\chi]] + (-1)^{qp}[\psi,[\chi,\varphi]] + (-1)^{rq}[\chi,[\varphi,\psi]] = 0 \quad ,$

$$\forall\ \varphi \in A^{0,p}(T^{1,0}X_o) \quad , \quad \forall\ \psi \in A^{0,q}(T^{1,0}X_o) \quad ,$$

$$\forall \quad \chi \in A^{0,r}(T^{1,0}X_o) \ .$$

En outre, cette opération est compatible avec l'opérateur d'' défini sur les formes à valeurs dans $T^{1,0}X_o$ en ce sens que :

$$d''[\varphi,\psi] = [d''\varphi,\psi] + (-1)^p[\varphi,d''\psi] \quad ,$$

$$\forall\ \varphi \in A^{0,p}(T^{1,0}X_o) \quad , \quad \forall\ \psi \in A^{0,*}(T^{1,0}X_o) \quad .$$

Relativement à une carte complexe locale $\{z^\alpha\}$, $\alpha = 1,\ldots,n$ de X_o, ce crochet est défini par :

$$[\varphi,\psi] = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} (\varphi^\lambda \wedge \partial_\lambda \psi^\alpha + (-1)^{pq+1}\ \psi^\lambda \wedge \partial_\lambda\ \varphi^\alpha)$$

pour φ dans $A^{0,p}(T^{1,0}X_o)$ et ψ dans $A^{0,q}(T^{1,0}X_o)$.

Cette parenthèse étant faite, il est très facile de voir, à partir de (4), que le fait que X_1 soit intégrable implique que ω vérifie la relation d'intégrabilité suivante :

(5) $$d''\omega - [\omega,\omega] = 0 \quad .$$

On vérifie aisément que cette condition d'intégrabilité équivaut à dire que la différentielle extérieure d'une forme θ de type (1,0) dans la structure X_1 appartient, en tout point, à l'idéal engendré par les formes de type (1,0), c'est-à-dire que $d\theta$ est la somme d'une forme de type (2,0) et d'une forme de type (1,1) pour la structure X_1. Nous obtenons ainsi une condition de Frobenius complexe. Newlander et Nirenberg ont montré que cette condition nécessaire est aussi suffisante :

si ω satisfait la condition d'intégrabilité (5) il existe, pour tout point x de X, un voisinage U et n fonctions complexes $\{\zeta^\alpha\}$, $\alpha = 1,\dots,n$, solutions de (4) et indépendantes en tout point de U. Le système (4) qui définit des fonctions holomorphes de X_1 équivaut alors, sur U, au système :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}^\mu} = 0 \quad , \quad \forall\, \mu = 1,\dots,n \quad .$$

(cf. [10] ou [2].)

Supposons à présent que nous ayons une famille (locale) de structures presque complexes $X_{(t)}$ sur X définie par une famille $\omega(t)$ d'éléments de $A^{0,1}(T^{0,1}X_o)$, où t appartient à Δ, telle que $\omega(0) = 0$, c'est-à-dire, telle que $X_{(o)} = X_o$; nous dirons que cette famille locale est analytique si les composantes $\omega^{\lambda}_{\bar{\mu}}(t)$ de $\omega(t)$ dans une carte complexe $\{z^\alpha\}$ de X_o sont des fonctions holomorphes de t. La famille $\omega(t)$ induit une structure presque complexe sur le produit $X \times \Delta$ de la façon suivante : à tout (x,t) de $X \times \Delta$ nous associons le sous-espace $(T^{0,1}X_{(t)})_x \oplus (T^{0,1}\Delta)_t$ de $(T_{\mathbb{C}}(X \times \Delta))_{(x,t)}$; relativement à la structure complexe de référence, cette structure presque complexe est déterminée par la forme $\tilde{\omega}$ définie par :

$$\tilde{\omega}((L,\xi))_{(x,t)} = (\omega(t)(L),0) \quad , \quad \forall\, (L,\xi) \in (T^{0,1}(X_o \times \Delta))_{(x,t)} \quad .$$

En particulier, pour tout point x de X, la structure presque complexe définie par restriction de $\tilde{\omega}$ à $\{x\} \times \Delta$ coïncide avec la structure complexe naturelle de Δ. On vérifie aisément que la condition d'intégrabilité (5) appliquée à $\tilde{\omega}$ se décompose en deux conditions portant sur $\omega(t)$:

(6)
$$d''\omega(t) - [\omega(t),\omega(t)] = 0 \quad , \quad \forall\, t \in \Delta$$
et
$$\partial_{\bar{t}}\,\omega(t) = 0$$

tandis que le système (4) définissant les fonctions holomorphes sur $X \times \Delta$ se décompose lui-même en :

$$(7)\qquad \begin{aligned} & d''f(t) - d'f(t) \lrcorner\, \omega(t) = 0 \quad , \quad \forall\, t \in \Delta \\ & \underline{\text{et}} \\ & \partial_{\bar t} f(t) = 0 \end{aligned}$$

où $f(t)$ désigne la restriction à $X \times \{t\}$ de f.

<u>Définition</u> . <u>Une déformation (locale) de X_o est une famille (locale) analytique de structures presque complexes intégrables au voisinage de</u> X_o .

Comme nous venons de voir, une telle déformation paramétrée par Δ détermine une structure presque complexe <u>intégrable</u> sur le produit $X \times \Delta$ telle que la projection p de $X \times \Delta$ sur Δ soit holomorphe et telle que les sous-variétés $\{x\} \times \Delta$ soient des sous-variétés complexes de $X \times \Delta$, pour tout x de X, isomorphes à Δ.

En particulier, il est possible d'exhiber localement sur $X \times \Delta$ des cartes complexes $\xi_i^A(x,t)$, $A = 1,\dots,m+n$, définies sur des ouverts $\mathcal{U}_i$ -que l'on peut choisir de la forme $U_i \times \Delta$ pour Δ assez petit- holomorphes pour la structure $\widetilde{\omega}$ de $X \times \Delta$ et donc, en particulier, <u>holomorphes en</u> t . Ces cartes peuvent être choisies de la forme $(\zeta_i^\alpha(x,t), t^1, \dots, t^m)$, $\alpha = 1,\dots,n$.

<u>Observation</u> . Nous venons d'obtenir à partir d'une déformation locale analytique de X_o une famille (locale) analytique de variétés complexes au voisinage de X_o. Inversement, on a vu au § 1 qu'une telle famille induit, par le biais d'un difféomorphisme Φ, une famille de structures presque complexes intégrables sur X au voisinage de X_o mais en général cette famille est seulement C^∞ et non analytique. On peut montrer toutefois que pour un choix convenable de Φ elle est analytique (cf. [5], Ch. 4).

<u>Illustration</u> . Reprenons l'exemple de la famille T_τ des tores complexes à une dimension. Choisissons la structure complexe naturelle de $S^1 \times S^1$ associée à $\tau = i$ comme structure de référence $X_o = T_i$. Un élément de $A^{1,0}(T^{1,0}X_o)$ est déterminé par un nombre complexe : en effet, $T^{0,1}X_o$ est engendré par $\xi \oplus i\eta$ tandis que $T^{1,0}X_o$ est engendré par $\xi - i\eta$. On vérifie aisément que $\omega(\tau)$ est tel que :

$$\omega(\tau)(\xi + i\eta) = \frac{\tau - i}{\tau + i}\,(\xi - i\eta) \quad ,$$

c'est-à-dire que $\omega(\tau)$ est "égal" à $\frac{\tau-i}{\tau+i}$. Or, l'application $\tau \to \frac{\tau-i}{\tau+i} = t$ est précisément l'isomorphisme canonique du demi-plan de Poincaré marqué en i (H,i) sur le disque ouvert de centre 0 dans $\mathbb{C}(\Delta,0)$. Ainsi, en prenant $(\Delta,0)$ comme nouvel espace de paramètres, l'application $(\Delta,0) \to (A^{1,0}(T^{1,0}X_o),0)$ se ramène à l'identité qui est évidemment analytique.

3. DÉFORMATION INFINITÉSIMALE. THÉORÈME DE KODAIRA-NIRENBERG-SPENCER

Nous venons de voir qu'une déformation (locale) de X_o est définie par une famille $\omega(t)$ d'éléments de $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$ variant analytiquement en t et telle que :

$$d''\omega(t) - [\omega(t),\omega(t)] = 0 \quad , \quad \forall\, t \in \Delta \quad .$$

En outre, $\omega(0)$ est nulle.

Nous avons ainsi une application holomorphe de Δ dans $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$ telle que l'image de 0 soit zéro.

L'application tangente en 0 envoie un élément $V = \sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial}{\partial t^i}$ de $(T^{1,0}\Delta)_o$ dans $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$. Comme $\omega(0) = 0$, l'image de V par cette application tangente est une forme d''-fermée qui détermine ainsi un élément de $H^1(X_o, \Theta)$ premier espace de cohomologie de X_o à valeurs dans le faisceau Θ des germes de champs de vecteurs holomorphes.

Nous obtenons de cette manière un $\mathbb{C}$-homomorphisme de $(T^{1,0}\Delta)_o$ dans $H^1(X_o,\Theta)$ qui est l'application de Kodaira-Spencer, notée ρ.

Considérons les cartes $\{\zeta_i^\alpha(x,t)\}_{i\in I}$ qui, pour t fixé, déterminent la structure complexe $\omega(t)$; chaque $\zeta_i^\alpha(x,t)$ est holomorphe sur $U_i \times \Delta$ muni de la structure $\tilde{\omega}$ et vérifie donc les relations (7) ; il en résulte que la forme $\sum_{a=1}^{m} V^a \frac{\partial}{\partial t^a} \omega(t)_{|t=0}$ qui représente $\rho(V)$ (et que nous noterons elle-même $\rho(V)$ par abus de langage) s'exprime localement sur U_i, par :

$$(8) \qquad \rho(V) = \sum_{\alpha=1}^{n} d''\Big(\sum_{a=1}^{m} V^a \frac{\partial}{\partial t^a} \zeta_i^\alpha(x,t)_{|t=0}\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \quad ,$$

où $\{z^\alpha(x)\} = \{\zeta^\alpha(x,0)\}$ sera une carte complexe de X_o.

Ainsi $\rho(V)$ est, localement, l'image par d'' d'un champ de vecteur de type (1,0) d'expression $\sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{a=1}^{m} V^a \frac{\partial}{\partial t^a} \cdot \zeta_i^\alpha(x,t)_{|t=0}\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, défini sur U_i ;

lorsque on passe de U_i à U_j, la différence de ces deux champs est égale, sur $U_i \cap U_j$ (supposé non vide), à :

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{a=1}^{m} V^a \frac{\partial}{\partial t^a} h_{ij}^{\alpha}(x,t)_{|t=0} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\alpha} ,$$

où les h_{ij}^{α} sont les fonctions de transitions entre les ζ_i^α et les ζ_j^α introduites au n° 1 ; nous obtenons ainsi sur chaque intersection $U_i \cap U_j$ non vide un champ de vecteur holomorphe et donc une 1-cochaîne à valeurs dans le faisceau Θ défini sur le nerf du recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de X_o ; cette 1-cochaîne est un 1-cocycle par construction (en tant que cobord d'une 0-cochaîne différentiable) ; la classe de cohomologie de Čech qu'elle détermine est, par construction même, le correspondant de $\rho(V)$ dans l'isomorphisme canonique qui lie, sur une variété, les cohomologies de Dolbeault et de Čech. Nous obtenons ainsi une définition équivalente de l'application de Kodaira-Spencer à l'aide des seules fonctions de transitions h_{ij}^{α} (cf. [6], Ch. 1, § 3).

Si la déformation est triviale, i.e. s'il existe un isomorphisme de $X \times \Delta$ sur $X_o \times \Delta$ commutant avec les projections sur Δ, il est possible de choisir des cartes $\zeta^\alpha(x,t)$ indépendantes de t, de sorte que l'application ρ est nulle.

Les difféomorphismes de X induisent une action sur l'ensemble des structures complexes de X ; l'orbite, sous l'action du groupe des difféomorphismes de X, d'une structure complexe est constitué de toutes les structures complexes qui lui sont isomorphes ; on a vu que l'ensemble $\mathcal{M}$ des structures complexes à distance finie constitue un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de l'espace vectoriel $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$ et que "l'espace tangent" en 0, c'est-à-dire en X_o, est constitué de formes d"-fermées de $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$; on vérifie que les "vecteurs tangents" à la trajectoire de X_o sous l'action du groupe $\mathcal{D}iff(X)$ des difféomorphismes sont des formes du type d"z, pour z un champ C^∞ de vecteurs de type (1,0) ; ainsi ρ mesure-t-elle, au niveau infinitésimal, les variations des classes d'isomorphismes de structures complexes qui interviennent dans la déformation de X_o.

On peut se demander, dès lors, s'il n'existe pas, au voisinage de 0 dans $\mathcal{M}$, une section transverse à l'orbite de 0 sous l'action de $\mathcal{D}iff(X)$, isomorphe à un voisinage ouvert de l'origine dans $H^1(X_o, \Theta)$, déterminant ainsi un possible objet universel dans la catégorie des déformations locales de X_o.

Un début de réponse est donné par le théorème suivant, dans le cas où $H^2(X_o, \Theta)$ est réduit à zéro :

<u>Théorème de Kodaira-Nirenberg-Spencer</u> [7] . <u>Soit</u> X_o <u>une variété complexe compacte</u>, <u>telle que</u> $H^2(X_o, \Theta) = \{0\}$; <u>il existe une déformation</u> (<u>analytique</u>) <u>de</u> X_o <u>paramétrée par un ouvert de</u> $H^1(X_o, \Theta)$ <u>telle que l'application de Kodaira-Spencer associée soit l'identité</u>.

La démonstration de [7] consiste à choisir arbitrairement une section transverse à l'action du groupe $\mathcal{D}iff(X)$ dans l'espace tangent, c'est-à-dire un sous-espace H de l'espace des formes d''-fermées de $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$ qui se projette isomorphiquement sur $H^1(X_o, \Theta)$, et à construire une application injective d'un voisinage de l'origine de H dans $\mathcal{M}$, appliquant l'origine de H en 0, telle que l'application tangente à l'origine soit l'identité, définissant ainsi la section transverse désirée dans $\mathcal{M}$ en 0.

Pour ce faire, nous nous donnons une base $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ de H, $m = \dim H^1(X_o, \Theta)$, et nous cherchons un élément de $\mathcal{M}$ sous la forme d'une série entière :

$$\omega(t) = \sum_{a=1}^{m} t_a \eta_a + \omega_2(t) + \dots + \omega_r(t) + \dots$$

où les $\omega_r(t)$ sont des polynômes homogènes de degré r en les $(t_1, \dots, t_m)$, avec $\omega_1(t) = \sum_{a=1}^{m} t_a \cdot \eta_a$.

Si une telle série entière, à coefficients dans $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$, peut être construite convergente, il est clair que le problème sera résolu. L'hypothèse relative à $H^2(X_o, \Theta)$ intervient dans la construction formelle de $\omega(t)$ que nous reproduisons ici pour cette raison. Nous renvoyons le lecteur à [K-N-S] pour la preuve de la convergence qui utilise des estimés de Douglis-Nirenberg sur les solutions d'équations elliptiques.

La construction formelle de $\omega(t)$ se fait par récurrence sur r. L'équation $d''\omega - [\omega, \omega] = 0$ qui définit $\mathcal{M}$ équivaut à la suite d'équations :

$$(9) \qquad d''\sigma_r(t) - [\sigma_r(t), \sigma_r(t)] \equiv 0 \pmod{t^{r+1}} \quad \forall r ,$$

où σ_r désigne la somme partielle $\sum_{i=1}^{r} \omega_i(t)$; cette condition est vérifiée au cran $r = 1$ puisque $\sum_{a=1}^{m} t_a \cdot \eta_a$ est d''-fermée et $[\Sigma t_a \cdot \eta_a , \Sigma t_a \cdot \eta_a]$ est un polynôme de degré 2. Supposons que (9) soit vérifiée jusqu'au cran r et posons :

$$\psi_{r+1} = d''\sigma_r - [\sigma_r, \sigma_r] \pmod{t^{r+2}} ,$$

où ψ_{r+1} est un polynôme homogène de degré (r+1) ; il se trouve que ψ_{r+1} est d''-fermée ; en effet :

$$\begin{aligned} d''\psi_{r+1} &= -d''[\sigma_r,\sigma_r] && (\text{mod. } t^{r+2}) \\ &= -2[d''\sigma_r,\sigma_r] && (\text{mod. } t^{r+2}) \\ &= -2[[\sigma_r,\sigma_r],\sigma_r] - 2[\psi_{r+1},\sigma_r] && (\text{mod. } t^{r+2}) \ . \end{aligned}$$

Or, le second membre de la dernière égalité est au moins de degré (r+2) ; comme $d''\psi_{r+1}$ est homogène de degré (r+1), il est nul. Mais ψ_{r+1} est une (0,2)-forme à valeurs dans $T^{1,0}X_o$; étant d''-fermée, elle est d''-exacte en vertu de l'hypothèse $H^2(X_o,\Theta)=\{0\}$; il existe donc φ_{r+1} dans $A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$ telle que :

$$\psi_{r+1} = d''\varphi_{r+1} \ .$$

Nous posons alors :

$$\sigma_{r+1} = \sigma_r - \varphi_{r+1}$$

et vérifions aisément que σ_{r+1} vérifie (9) au cran r+1 . Nous avons ainsi construit notre série formelle $\omega(t)$. Pour obtenir une série convergente le choix des φ_r ne devra pas être arbitraire ; on pourra, par exemple, se donner une métrique hermitienne auxiliaire sur X_o et choisir φ_{r+1} égal à $\delta''G\psi_{r+1}$, où G est l'opérateur de Green associé à la métrique et δ'' l'adjoint de d'' pour cette métrique.

Nous obtenons ainsi une famille locale du type désiré, sous l'hypothèse que $H^2(X_o,\Theta)$ est réduit à zéro. Kodaira et Spencer [9] montrent ensuite que cette famille est <u>complète</u> en ce sens que, pour toute famille (locale) analytique $(\mathfrak{X},X_o)\to(\mathcal{S},s_o)$ au voisinage de X_o, il existe un morphisme de cette famille dans celle que nous venons de construire ; ce morphisme est unique si l'espace $H^0(X_o,\Theta)$ est réduit à zéro ; dans ce cas la déformation locale de [7] est effectivement un objet universel.

Dans le cas où $H^2(X_o,\Theta)$ n'est pas nul, il est possible encore, en utilisant le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach, de construire une déformation locale semi-universelle de X_o ; l'espace des paramètres est alors, soit un voisinage ouvert de l'origine de $H^1(X_o,\Theta)$, comme précédemment , soit un sous-espace analytique de $H^1(X_o,\Theta)$ avec une singularité à l'origine, tel que l'espace tangent de Zariski en ce point soit $H^1(X_o, \Theta)$ tout entier ([5] ou [1]).

4. L'ESPACE DES PÉRIODES

Nous considérons désormais une surface complexe X (compacte, connexe, lisse). D'après l'appendice A à l'exposé 3, l'espace $H^2(X,\mathbb{C})$ admet une décomposition de Hodge :

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X) \quad .$$

La forme d'intersection $<.,.>$ induit une forme d'intersection hermitienne sur les 2-formes définie par

$$(\varphi, \psi) = <\varphi, \overline{\psi}> \quad .$$

La restriction de cette forme hermitienne à $H^{2,0}(X)$ et $H^{0,2}(X)$ est définie positive. Elle est définie négative sur $H^{1,1}(X)$ si $b_1(X)$ est impair et de signature $(1, h^{1,1} - 1)$ si $b_1(X)$ est pair.

La dimension (complexe) de $H^{2,0}(X)$ est le genre géométrique de X que nous noterons h .

Nous définissons l'espace des périodes Ω de la surface X comme la partie de la grassmannienne $Gr(H^2, h)$ des h-plans complexes de $H^2(X,\mathbb{C}) = H^2$, constituée des h-plans isotropespour la forme d'intersection et tels que la restriction de la forme d'intersection hermitienne soit définie positive.

Ainsi, chaque point de Ω correspond à une structure de Hodge "possible" pour une "possible" structure complexe sur X .

Soit μ un point de $\Omega \subset Gr(H^2,h)$. L'espace tangent en μ à la grassmannienne $Gr(H^2,h)$ s'identifie canoniquement à :

$$T_\mu \, Gr(H^2,h) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu \, , \frac{H^2}{\mu}) \quad .$$

L'identification se fait ainsi :

un vecteur U tangent en μ est déterminé par une courbe locale $\gamma(u)$, $u \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$, avec $\gamma(0) = 0$, $\mathring{\gamma}(0) = U$. A tout point $\varphi \in \mu$ nous associons l'élément $\frac{d}{du} \tilde{\gamma}(u)_{|u=0}$ de H^2, où $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ passant par φ ; cet élément est parfaitement déterminé, modulo μ, par φ seulement.

Considérons à présent une courbe complexe locale $C(\tau)$ dans $Gr(H^2,h)$, où $\tau = u + iv$ est un complexe proche de zéro, telle que $C(0) = \mu$. L'homomorphisme qui à $\varphi \in \mu$ associe $\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{C}(\tau)_{|\tau=0}$ (modulo μ), où $\tilde{C}(\tau)$ est un relèvement de $C(\tau)$ passant par φ, correspond au vecteur (réel) $\frac{1}{2}\left(C_*(\frac{\partial}{\partial u}) - i\, JC_*(\frac{\partial}{\partial v})\right)_o$; de même l'homomorphisme qui associe à φ $\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \tilde{C}(\tau)_{|\tau=0}$ (modulo μ) correspond au vecteur $\frac{1}{2}\left(C_*(\frac{\partial}{\partial u}) + i\, JC_*(\frac{\partial}{\partial v})\right)_o$.

Ainsi la <u>courbe</u> $C(\tau)$ <u>est holomorphe en</u> 0 <u>si et seulement si</u> $\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \tilde{C}(\tau)_{|\tau=0}$ <u>appartient à</u> μ.

Si tel est le cas l'homomorphisme : $\varphi \to \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{C}(\tau)_{|\tau=0}$ (modulo μ) s'identifie à $C_*(\frac{\partial}{\partial u})$.

L'espace des périodes Ω est un ouvert de la sous-variété Q de $Gr(H^2, h)$ définie par l'équation

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \quad .$$

L'espace tangent en $\mu \in \Omega$ à Ω s'identifie donc à :

$$T_\mu \Omega = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu, \frac{\mu^\perp}{\mu})$$

où $\mu^\perp$ désigne l'orthogonal de μ dans H^2 pour la forme d'intersection (comme μ est isotrope, il appartient à son orthogonal $\mu^\perp$).

Le sous-espace μ de H^2 induit une structure de Hodge "virtuelle" $H^2 = \mu \oplus H_\mu^{1,1} \oplus \bar{\mu}$, et $H_\mu^{1,1}$ s'identifie précisément à $\mu^\perp/\mu$ de sorte que :

$$T_\mu \Omega = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu, H_\mu^{1,1}) \quad .$$

5. <u>APPLICATION DES PÉRIODES</u>

Soit X_o une surface complexe et $\omega : \Delta \to A^{0,1}(T^{1,0}X_o)$ une <u>déformation</u> (analytique) de X_o, où Δ est une boule ouverte de $\mathbb{C}^m$ centrée à l'origine.

A tout point t de Δ est associé une structure complexe $X_{(t)}$ sur la variété X sous-jacente à X_o, et donc une structure de Hodge sur $H^2(X, \mathbb{C})$. Nous notons p(t) le point correspondant de Ω et p est dite <u>application des périodes</u> associée à la déformation.

<u>Théorème</u> . <u>L'application des périodes est holomorphe</u>.

Preuve : Soit $t_o \in \Delta$ et $\mu_o = p(t_o) \in \Omega$. Je considère $\varphi_o \in \mu_o$ une 2-forme holomorphe de $X_{(t_o)}$. L'application des périodes p est holomorphe en t_o si pour toute courbe holomorphe (locale) de Δ passant par t_o et parametrée par τ la courbe correspondante $C(\tau)$ de Ω est elle-même holomorphe en 0. Pour appliquer le critère du paragraphe précédent, il nous faut un relèvement C^∞ $\tilde{C}$ de C passant par φ_o ; on peut, par exemple, utiliser une métrique hermitienne g_t, fonction C^∞ de t, et considérer la partie Δ''-harmonique de la composante de type (2,0) -dans $X_{(t)}$- de φ_o ; la courbe $\tilde{C}(\tau)$ ainsi obtenue est C^∞ en vertu de la régularité de l'opérateur de Green utilisé (cf. [K-S 1], § 2). Localement, $\tilde{C}(\tau)$ s'écrit :

$$\tilde{C}(\tau) = \varphi_{12}(\tau)\ d\zeta^1(x,\tau) \wedge d\zeta^2(x,\tau)$$

relativement à la carte $\{\zeta^1(x,\tau)\}$ introduite à la fin du n° 2. Comme les $\zeta^\alpha(x,\tau)$ dépendent analytiquement de τ, $\dfrac{\partial\tilde{C}(\tau)}{\partial\bar{\tau}}$ appartient à $C(\tau)$ pour tout τ, ce qui démontre le théorème.

Plaçons-nous au point 0 de Δ et notons encore μ_o l'image de 0 dans Ω correspondant à la structure de Hodge initiale. Nous nous proposons de déterminer l'application tangente en 0 de l'application des périodes p. Soit $V = \sum V^a \dfrac{\partial}{\partial\mu^a}$ un vecteur tangent (de type (1,0)) en 0 à Δ déterminé par une courbe holomorphe locale de Δ paramétrée par τ.

L'image de V par dp_o est le vecteur (de type (1,0)) en μ_o dont la partie réelle correspond à l'homomorphisme

$$\varphi \longrightarrow \left.\frac{\partial\tilde{C}(\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \qquad (\text{modulo } \mu)$$

puisque p est holomorphe. Nous obtenons ainsi (en confondant un vecteur de type (1,0) et sa partie réelle et en identifiant $\mu_o^\perp/\mu_o$ avec $H^{1,1}(X_o)$:

$$dp_o(V) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d''\ \dot{\zeta}^\alpha(x,0) \wedge dz^\beta$$

soit encore, en vertu de (8) :

$$(10) \qquad dp_o(V) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \varphi_{\alpha\beta}\ \dot{\omega}(V)^\alpha_\mu\ dz^{\bar{\mu}} \wedge dz^\beta .$$

6. LE TRIANGLE FONDAMENTAL (cf. [3], II)

Le fibré tangent holomorphe $T^{1,0}X_o$ est dual du fibré cotangent holomorphe, de sorte que les espaces de cohomologie $H^p(X_o, \Theta)$ $(p = 0,1,2)$ à valeurs dans le faisceau Θ se contractent avec les espaces $H^{p,q}(X_o)$ qui s'identifient, rappelons-le, aux espaces $H^q(X_o,\Omega^p)$. Par contraction avec $H^{2,0}(X_o) \simeq H^0(X_o,\Omega^2)$ nous obtenons ainsi trois homorphismes de cup-produit -contraction que nous écrivons sous la forme :

$$H^0(X_o, \Theta) \xrightarrow{K_o} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_o), H^{1,0}(X_o))$$

$$H^1(X_o, \Theta) \xrightarrow{K_1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_o), H^{1,1}(X_o))$$

$$H^2(X_o, \Theta) \xrightarrow{K_2} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_o), H^{1,2}(X_o)) \quad .$$

En termes de cohomologie de Dolbeault tous les espaces s'expriment en termes de formes d''-fermées, formes scalaires de type (p,q) pour les espaces $H^{p,q}(X_o)$, formes de type $(0,p)$ à valeurs dans $T^{1,0}X_o$ pour les espaces $H^p(X_o, \Theta)$. Les homomorphismes K_o, K_1 et K_2 s'explicitent alors ainsi, relativement à une carte locale $\{z^\alpha\}$ de X_o :

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} K_o(\xi)\varphi &= \sum_{\alpha,\lambda=1}^{2} \varphi_{\alpha\lambda} \cdot \xi^\lambda \, dz^\alpha \\ K_1(\theta)\varphi &= \sum_{\alpha,\lambda=1}^{2} \varphi_{\alpha\lambda} \cdot \theta^\lambda_{\bar\mu} \, dz^{\bar\mu} \wedge dz^\alpha \\ K_2(\sigma)\varphi &= \sum_{\alpha,\lambda=1}^{2} \varphi_{\alpha\lambda} \cdot \sigma^\lambda_{\bar\mu\bar\nu} \, dz^{\bar\mu} \wedge dz^{\bar\nu} \wedge dz^\alpha \end{aligned}$$

pour φ 2-forme holomorphe.

On se souvient que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_o), H^{1,1}(X_o))$ s'identifie canoniquement à $T_{\mu_o}\Omega$; nous obtenons ainsi le triangle fondamental :

$$\begin{tikzcd} T_o\Delta \arrow[rr, "dp_o"] \arrow[dr, "\rho"'] & & T_{\mu_o}\Omega = \mathrm{Hom}(H^{2,0}(X_o), H^{1,1}(X_o)) \\ & H^1(X_o; \Theta) \arrow[ur, "K_1"'] & \end{tikzcd}$$

et la simple confrontation de (10) et (11) montre que ce triangle est commutatif.

7. LE THÉORÈME D'ANDREOTTI-WEIL (cf. [4], th. 17)

Si le fibré canonique de X_o est trivial, $H^{2,0}(X_o)$ est un espace de dimension 1 engendré par une 2-forme holomorphe sans zéro. Il en résulte immédiatement que les homomorphismes K_o, K_1 et K_2 du § 6 sont des isomorphismes, et donc :

$$\dim H^0(X_o;\Theta) = h^{1,0}$$

$$\dim H^1(X_o;\Theta) = h^{1,1}$$

$$\dim H^2(X_o;\Theta) = h^{1,2} = h^{1,0} \quad .$$

En particulier, si X_o est une surface K3, $H^0(X_o,\Theta)$ est réduit à $\{0\}$, ce qui exprime que le groupe des automorphismes de X_o est discret, $H^1(X_o,\Theta)$ est un espace vectoriel complexe de dimension 20 et $H^2(X_o,\Theta)$ est réduit à $\{0\}$. Nous pouvons alors appliquer les théorèmes de Kodaira-Nirenberg-Spencer et Kodaira-Spencer et obtenir un espace de déformations locales universel de X_o paramétré par un voisinage ouvert de $H^1(X_o,\Theta)$, tel que l'application ρ de Kodaira-Spencer soit l'identité.

En reportant ces observations sur le triangle fondamental nous concluons que dp_o s'identifie à K_1 et est donc un isomorphisme, ce qui prouve le

Théorème d'Andreotti-Weil . L'application des périodes associée à la famille universelle de déformations locales d'une surface K3 X_o est un isomorphisme local.

Corollaire . Les surfaces K3 algébriques sont denses dans la famille universelle de déformations de X_o .

Preuve : Observons tout d'abord que, dans le cas d'une surface K3, la grassmannienne $Gr(H^2,h)$ est l'espace projectif associé à $H^2(X_o,\mathbb{C})$, et Ω est un ouvert de la quadrique définie par l'équation :

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = 0 \quad .$$

Si $(\Gamma_1,\dots,\Gamma_{22})$ est une base de $H_2(X_o;\mathbb{Z})$ un point de Ω est déterminé par ses coordonnées homogènes qui sont les intégrales d'une 2-forme φ correspondante sur les Γ_i. En particulier, le point μ_o de Ω, correspondant à la structure X_o de référence, est déterminé par le 22-uple :

$$\left(\int_{\Gamma_1}\varphi : \dots : \int_{\Gamma_{22}}\varphi\right) = (m_1 : \dots : m_{22})$$

où φ est une 2-forme holomorphe de X_o. Ce 22-uple $(m_1 : \dots : m_{22})$ peut être approché d'aussi près qu'on veut par un 22-uple de nombres rationnels-complexes, i.e. de nombres complexes à parties réelles et imaginaires rationnels.

Ces points correspondent, en vertu du théorème d'Andreotti-Weil, à des structures complexes proches de X_o. Il reste à montrer qu'elles sont algébriques. Or ces surfaces possèdent une 2-forme holomorphe dont les parties réelle et imaginaire représentent des éléments de $H^2(X,\mathbb{Z})$ dans $H^2(X,\mathbb{C})$ et engendrent dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^2(X,\mathbb{Q})$ un espace de dimension 2 tel que la restriction à ce sous-espace de la forme d'intersection soit définie positive ; son orthogonal dans $H^2(X,\mathbb{Q})$ est un sous-espace de dimension 20 et de signature (1,19). Il existe donc un élément de $H^2(X,\mathbb{Q})$ -et donc aussi un élément de $H^2(X,\mathbb{Z})$ - de carré positif et orthogonal à $H^{2,0}$, i.e. de type (1,1), i.e. une classe de Chern de carré positif ce qui implique que notre surface est algébrique (cf. Exposé III).

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Douady : Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki 1964-1965, Exposé No 277.

[2] G.D. Folland, J.J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann equation, Annals of Math. Studies 75, Princeton Univ. Press (1972).

[3] P. Griffiths : Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II, Amer. J. Math. 90 (1968), 568-626, 805-865.

[4] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, I, Amer. J. Math . 86 (1964), 751-798.

[5] M. Kuranishi : Deformations of compact complex manifolds, Presses de l'Université de Montréal 39 (1971).

[6] K. Kodaira, J. Morrow : Complex manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New-York (1971).

[7] K. Kodaira, L. Nirenberg, D. Spencer : On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math . 68 (1958) 450-459.

[8] K. Kodaira, D. Spencer : On deformations of complex analytic structures, I, Annals of Maths. 67 (1958), 328-466.

[9] K. Kodaira, D. Spencer : A theorem of completeness for complex analytic fibre structures, Acta Math 100 (1958), 281-294.

[10] D. Newlander, L. Nirenberg : Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Annals of Math . 65 (1957), 391-404.

53, rue de Lyon
75012 PARIS