Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Surfaces complexes et orientation [Appendice B à l'exposé III]

Astérisque, tome 126 (1985), p. 41-43
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__41_0>

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SURFACES COMPLEXES ET ORIENTATION

Arnaud BEAUVILLE

Soit M une variété différentielle compacte orientée de dimension 4. L'algèbre de cohomologie $H^*(M,\mathbb{Z})$ ne dépend bien sûr pas de l'orientation, alors que l'isomorphisme $H^4(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, lui, en dépend. Il en est de même par conséquent de la signature de la forme d'intersection. Si l'on note M^- la variété M munie de l'orientation opposée, on a donc, avec les notations du n°1,

$$b_i(M^-) = b_i(M) \text{ pour } 0 \leq i \leq 4 \;;\; b^+(M^-) = b^-(M) \;;\; b^-(M^-) = b^+(M) .$$

Supposons maintenant M munie d'une structure complexe compatible avec son orientation (cela signifie que si $m \in M$ et si e_1, e_2 sont deux vecteurs $\mathbb{C}$-indépendants de $T_m(M)$, la base (e_1, Je_1, e_2, Je_2) de $T_m(M)$ est directe). Les formules du Théorème 1 entraînent que les nombres de Hodge $h^{p,q}$ et les nombres de Chern c_1^2, c_2 ne dépendent que de la topologie de M <u>en tant que variété orientée.</u> Les nombres c_2, $q(=h^{0,1}), h^{1,0}$ sont des invariants topologiques ; par contre c_1^2, $p_g(=h^{0,2})$, $h^{1,1}$ dépendent de l'orientation.

<u>Proposition</u>. <u>Soit</u> M <u>une surface complexe</u>, <u>admettant une autre structure complexe compatible avec l'orientation opposée</u>. <u>On est alors dans l'un des cas suivants</u> :

a) M <u>est une surface géométriquement réglée</u> (c'est-à-dire admet une fibration en droites projectives sur une courbe)

b) <u>Les nombres de Chern</u> c_1^2 <u>et</u> c_2 <u>de</u> M <u>sont nuls</u>.

c) M <u>est une surface de type général</u>, <u>satisfaisant à</u> $c_1^2 \geq c_2$ <u>et</u> $c_1^2 \equiv 0 \mod 2$).

En particulier, les surfaces K3 (qui vérifient $c_1^2 = 0$, $c_2 = 24$) n'admettent pas de structure complexe compatible avec l'orientation inhabituelle. Il en est de même de $\mathbb{P}^2$, des surfaces d'Enriques, des surfaces de degré $d \neq 2$ dans $\mathbb{P}^3$, etc.

Démonstration de la Proposition. Notons M^- la variété M munie d'une structure complexe induisant l'orientation opposée. On a $c_2(M^-) = c_2(M)$, et en vertu de la formule (7) du n°1 ,

$$c_1^2(M^-) - 2\, c_2(M^-) = -\, c_1^2(M) + 2\, c_2(M) \;,$$

soit

$$c_1^2(M^-) = 4\, c_2(M) - c_1^2(M) \;.$$

Comme d'autre part on a $c_1^2(M^-) \equiv c_1^2(M)$ (mod.12) en vertu de la formule (6), on voit que $c_1^2(M)$ est pair.

Rappelons maintenant le résultat suivant, qui se déduit facilement de la classification de Kodaira et de l'inégalité de Miyaoka [1]. Soit M une surface complexe. On a alors une des deux situations suivantes :

(i) M est une surface réglée de genre $q \geq 2$;

(ii) on a $c_1^2 \leq 3\, c_2$ et $c_2 \geq 0$.

Supposons d'abord que M vérifie (i). Elle est alors obtenue à partir d'une surface géométriquement réglée par n éclatements. Un calcul immédiat donne

$$c_1^2(M) = 8(1-q) - n \quad , \quad c_2(M) = 4(1-q) + n \;,$$

d'où

$$c_1^2(M^-) = 8(1-q) + 5n > 3\, c_2(M^-) .$$

On en déduit que M^- est aussi une surface réglée de genre q . La formule donnant $c_1^2(M^-)$ entraîne alors $n = 0$: c'est le cas a).

Supposons maintenant que M vérifie (ii) ; d'après ce qui précède, il en est de même de M^- . On a donc

$$c_1^2(M) - c_2(M) = 3c_2(M^-) - c_1^2(M^-) \geq 0 \;,$$

d'où $c_1^2(M) \geq c_2(M) \geq 0$.

Si $c_1^2(M) = 0$, on est dans le cas b). Sinon, M est de type général (c'est le cas c)) ou rationnelle. Dans ce dernier cas, on a $c_1^2 + c_2 = 12$ (formule (6), n°1). Compte tenu des contraintes $c_1^2 \geq c_2$ et c_1^2 pair, les seules possibilités sont $c_1^2 = 8$, $c_2 = 4$ ou $c_1^2 = c_2 = 6$. Dans le premier cas, on sait que M est une surface géométriquement réglée sur $\mathbb{P}^1$ (cas a)) ; dans le second, M^- vérifie $c_1^2(M^-) = 18$, $c_2(M^-) = 6$, donc M^- est une surface de type général satisfaisant à $c_1^2 = 3\, c_2$. On sait d'après Yau qu'une telle surface est quotient de la boule unité de $\mathbb{C}^2$ par un groupe discret, en particulier n'est pas simplement connexe, or la surface rationnelle M est simplement connexe ce qui exclut cette possibilité. □

Un exemple simple de surface complexe admettant une structure complexe induisant l'orientation opposée est fourni par le produit de deux surfaces de Riemann : il suffit de remplacer la structure complexe de l'une de ces courbes par la structure complexe conjuguée. Suivant le genre des courbes choisies, cet exemple couvre les trois catégories de la proposition. On peut construire d'autres exemples : quotients de produits de courbes par un groupe fini, surfaces de Hopf, etc.... Cependant toutes ces surfaces ont une signature nulle. Il serait intéressant de construire un exemple (nécessairement de type c)) de signature $\neq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Miyaoka : On the Chern numbers of surfaces of general type, Inventiones Math.34 (1976), 99-111 .

Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris-Sud
ERA du CNRS n°653
91405 ORSAY CEDEX (France)