

Astérisque

PAUL GAUDUCHON

**Structure de Hodge d'une surface complexe
[Appendice A à l'exposé III]**

Astérisque, tome 126 (1985), p. 39-40

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__39_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE DE HODGE D'UNE SURFACE COMPLEXE

Paul GAUDUCHON

Soit X une surface complexe compacte (connexe).

L'espace $H^2(X, \mathbb{C})$ est égal par définition au quotient de l'espace des 2-formes complexes d-fermées par celui des 2-formes d-exactes.

L'espace $H^2(X, \mathbb{R})$ se définit de la même façon en remplaçant "2-formes complexes" par "2-formes réelles" ; l'image de $H^2(X, \mathbb{Z})$ dans $H^2(X, \mathbb{R})$ est constituée des classes de $H^2(X, \mathbb{R})$ représentées par des 2-formes réelles entières, c'est-à-dire dont l'intégrale sur un 2-cycle entier quelconque est un nombre entier. $H^2(X, \mathbb{C})$ est le complexifié de $H^2(X, \mathbb{R})$.

Chaque espace $H^{p,q}(X)$ est, par définition, le quotient de l'espace des formes de type (p,q) d"-fermées par celui des formes d"-exactes. On sait que $H^{p,q}(X)$ s'identifie canoniquement au q-ième groupe de cohomologie à valeurs dans le faisceau des germes de p-formes holomorphes. Nous ne considérons ici que le cas $p+q=2$, c'est-à-dire les espaces $H^{2,0}(X)$, $H^{1,1}(X)$ et $H^{0,2}(X)$.

Soit g une métrique hermitienne (non nécessairement kählerienne) sur X ; elle induit un opérateur de Hodge $*$ \mathbb{C} -linéaire sur les formes complexes préservant chaque espace de formes de type (p,q) , $p+q=2$. (Nous choisissons ici l'extension \mathbb{C} -linéaire de $*$ et non l'opérateur complexe conjugué). Chaque espace $H^{p,q}(X)$ s'identifie alors, en vertu de la théorie de Hodge-Kodaira, à l'espace des formes φ Δ "-harmoniques de type (p,q) , c'est-à-dire des formes φ telles que φ soit d"-fermée et $*\varphi$ d'-fermée (cette dernière condition équivaut à $\delta''\varphi = 0$ à cause du choix fait sur $*$).

Comme cet opérateur de Hodge $*$ se réduit à l'identité sur $A^{2,0}$ et sur $A^{0,2}$, les espaces $H^{2,0}$ et $H^{0,2}$ s'identifient aux espaces des formes fermées de type $(2,0)$ et $(0,2)$ respectivement. (Elles sont alors harmoniques -au sens riemannien- pour toute métrique hermitienne).

Ainsi $H^{2,0}$ et $H^{0,2}(X)$ se plongent canoniquement dans $H^2(X, \mathbb{C})$ en deux sous-espaces conjugués.

Soit κ l'application de $H^2(X, \mathbb{R})$ dans $H^{0,2}(X)$ induite par la projection d'une 2-forme réelle fermée sur sa partie de type (0,2) ; nous obtenons une section σ de κ en associant à une forme fermée de type (2,0) le double de sa partie réelle ; ainsi κ est surjective et on a la décomposition :

$$H^2(X, \mathbb{R}) = \text{Ker } \kappa \oplus \sigma(H^{0,2}(X)) .$$

Le noyau $\text{Ker } \kappa$ s'identifie pour sa part aux classes de $H^2(X, \mathbb{R})$ représentables par des formes réelles fermées de type (1,1).

Le complexifié de $\sigma(H^{0,2}(X))$ dans $H^2(X, \mathbb{C})$ s'identifie à la somme $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ de sorte que $H^2(X, \mathbb{C})$ est égal à la somme $H^{2,0}(X) \oplus \tilde{H}^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$, où $\tilde{H}^{1,1}(X)$ est le sous-espace de $H^2(X, \mathbb{C})$ constitué des classes représentables par des formes complexes de type (1,1) fermées. De telles formes sont aussi d'' -fermées ; nous obtenons ainsi un \mathbb{C} -homomorphisme canonique α de $\tilde{H}^{1,1}(X)$ dans $H^{1,1}(X)$. Pour montrer que α est injectif, il suffit de montrer qu'une 2-forme fermée de la forme $d''u^{1,0}$, où $u^{1,0}$ est une 1-forme de type (1,0), est d -exacte ; or, par hypothèse $u^{1,0}$ est une 2-forme holomorphe, donc nulle, ce qui prouve notre assertion.

Par ailleurs, la dimension $h^{1,1}$ de $H^{1,1}(X)$ est égale (Corollaire 1 au Théor.1) à la différence $b^2 - (h^{2,0} + h^{0,2})$, donc à celle de $\tilde{H}^{1,1}(X)$ de sorte que α est un isomorphisme par lequel nous pouvons identifier les deux espaces $\tilde{H}^{1,1}(X)$ et $H^{1,1}(X)$. Nous obtenons ainsi une structure de Hodge sur $H^2(X, \mathbb{C})$

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

avec $H^{0,2}(X) = \overline{H^{2,0}(X)}$. Chacun des sous-espaces $H^{2,0}(X)$ et $H^{0,2}(X)$ est isotrope pour la forme d'intersection tandis que $H^{1,1}(X)$ est orthogonal à la somme des deux autres, pour des raisons de type. Ainsi, la donnée de $H^{2,0}(X)$ détermine la structure de Hodge toute entière.