AST

Géométrie des surfaces $K3$: modules et périodes [Pages préliminaires]

Astérisque, tome 126 (1985), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__1_0>

126 ASTÉRISQUE

1985

GÉOMÉTRIE DES SURFACES K3 : MODULES ET PÉRIODES

Séminaire Palaiseau, Octobre 1981-Janvier 1982

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 32 G, 32 J 15, 53 C 25, 53 C 55

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Ce livre est issu des notes du Séminaire de Géométrie du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique qui s'est tenu d'Octobre 81 à Janvier 82. Il a rassemblé des auditeurs formés soit à la géométrie algébrique soit à la géométrie différentielle. Son thème "Application des périodes des surfaces K3" avait été choisi à cause de la possibilité qu'il offrait d'utiliser des techniques venant des deux spécialités. Ce sujet a connu des développements tout à fait intéressants avant, pendant ou juste après la tenue du séminaire (voir références [8] à [14] de la bibliographie qui termine cette préface). On pourrait croire qu'il est entouré de maléfices, tant sont nombreux les travaux à son propos qui se sont révélés incomplets voire faux. Ce livre, qui est une version remaniée par A. Beauville des notes du séminaire, se propose d'en rendre compte de façon aussi autonome qu'il était possible de le faire en un seul volume. Il devrait donc être accessible à des étudiants ou à des mathématiciens ayant seulement des connaissances de base aussi bien en géométrie algébrique que différentielle.

L'idée de repérer une structure complexe sur une variété par la valeur d'intégrales de formes holomorphes est déjà présente chez Riemann. Les périodes des courbes algébriques complexes ont été l'objet, à la fin du siècle dernier, de nombreux travaux qui ont trouvé un de leurs aboutissements dans le théorème de Torelli (1914). On peut déjà introduire à leur propos la plus grande partie de l'attirail nécessaire pour discuter en général de l'application des périodes : forme d'intersection sur l'homologie de dimension moitié, marquage, relations bilinéaires et de positivité (voir Exposé I).

Dans le cas d'une surface complexe (comme les surfaces K3), la principale différence réside dans le caractère symétrique de la forme d'intersection (qui était alternée sur les surfaces de Riemann) et dans le fait qu'une structure de Hodge n'introduit pas comme dans le cas des courbes complexes un objet algébrique, la jacobienne. De ce point de vue les surfaces K3, dont le fibré canonique est trivial et qui sont d'irrégularité nulle, apparaissent comme le cas le plus simple où étudier l'application des périodes. En effet sur une telle surface X, il existe une droite de 2-formes holomorphes qui ne s'annulent jamais, ce qui permet de définir une application des périodes à valeurs dans $\mathbb{CP}^{21}$, l'espace des droites de $\mathbb{C}^{22}$ (22 est le rang de $H^2(X,\mathbb{Z})$), voir Exposé VII. La forme d'intersection et la relation de positivité restreignent l'application des périodes à prendre ses valeurs dans un ouvert d'une quadrique de $\mathbb{CP}^{21}$. Malgré leur définition tout à fait simple les surfaces K3 ont une très belle géométrie interne qui est développée dans l'Exposé IV (certains pensent qu'elles doivent autant leur dénomination au fait qu'elles soutiennent la comparaison avec un sommet de l'Himalaya qu'à la paternité de Kodaira et Kummer) ; parmi elles on trouve des variétés projectives comme les quartiques définies par quatre coordonnées homogènes. Alors que les conditions mises dans leur définition sont strictement complexes, elles se trouvent être toutes difféomorphes entre elles (voir Exposé VI). Elles jouissent de plus de propriétés tout à fait spéciales parmi les surfaces complexes (voir Exposé III).

Il est assez facile d'obtenir un théorème de Torelli local pour les surfaces K3 assurant un comportement excellent de l'application des périodes au voisinage de tout point (voir Exposé V). Pour obtenir des informations globales sur l'application des périodes, il est nécessaire de recourir à une famille particulière de surface K3, les surfaces de Kummer, qui proviennent de tores complexes par une construction géométrique (voir Exposé VIII). Le théorème de Torelli s'obtient alors en utilisant le fait que l'image des surfaces de Kummer est dense dans l'espace des périodes et un théorème de passage à la limite (Exposé IX).

La surjectivité de l'application des périodes est prouvée dans l'Exposé X et utilise la solution de la conjecture de Calabi par S.T. Yau (voir Exposé II) qui permet de construire sur toute surface K3 kählérienne une métrique pour laquelle toute 2-forme holomorphe soit parallèle, donc telle que toute relation linéaire vérifiée en un point le soit partout. Cette propriété résulte de considérations sur le groupe d'holonomie de métriques kählériennes à courbure de Ricci nulle (voir Exposé XV).

Pour montrer que toute surface K3 est kählérienne (voir Exposé XII), il est utile de disposer sur une variété complexe compacte non nécessairement kählérienne de métriques adaptées (voir Exposé XI). Il est alors possible d'obtenir une description satisfaisante de l'espace des modules des surfaces K3 marquées, ainsi que de l'espace des modules des métriques d'Einstein sur de telles surfaces (un espace de dimension 57).

Des exemples de variétés kählériennes généralisant les surfaces K3 sont présentées dans l'Exposé XVI. Elles possèdent de très intéressantes métriques à groupe d'holonomie spécial.

L'Exposé XIV consacré au type topologique des surfaces réelles de degré 4 s'apparente au sujet du séminaire par le fait que les surfaces K3 les plus belles sont des quartiques de $\mathbb{C}P^3$. Il a donc comme ambition de vous permettre de tester si vous avez réellement tout compris !

En résumé, ce livre contient des démonstrations complètes (!) des théorèmes :

- décrivant l'espace des modules des structures complexes sur les surfaces K3 , démonstrations par le biais de l'application des périodes qui pour ce cas particulier se comporte aussi bien qu'il est possible (elle est injective et surjective) ;

- montrant que toute surface K3 est kahlérienne, un résultat certes attendu mais qui assure qu'aucune pathologie n'apparaît et dont la preuve s'appuie sur l'application des périodes, ce qui était moins attendu.

Parmi les ouvrages qui peuvent servir d'introduction, nous retiendrons les livres suivants :

[A] K. Kodaira, J. Morrow : Complex manifolds, Holt, Rinehart, Winston (1971)

[B] P.A. Griffiths, J. Harris : Principles of algebraic geometry, Wiley, New York (1978)

[C] A. Beauville : Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54, Soc. Math. France (1978)

[D] Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi : Séminaire Palaiseau, Astérisque 58, Soc. Math. France (1978).

Nous terminons cette préface par la liste des articles de recherche traitant du sujet de ce séminaire dans l'ordre chronologique de leur parution. Ils apparaissent bien entendu à plusieurs reprises dans les bibliographies des différents exposés.

[1] A. Weil : Final report on contract AF 18(603)-57 (1958), Oeuvres scientifiques, Volume II, Springer-Verlag, New-York (1980).

[2] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, Amer, J. of Math. 86 (1964), 751-798.

[3] I. Shafarevic et al. : Algebraic surfaces, Proc. of the Steklov Institute 75 (1965) (trans. by Amer. Math. Soc. 1967).

[4] I. Shafarevic, I. Piatetskii-Shapiro : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR Izvestia 5 (1971), 547-588.

[5] D. Burns, M. Rapoport : On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris 8 (1975), 235-274.

[6] V. Kulikov : Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, Math. USSR Izvestia 11 (1977), 957-989

[7] F. Bogomolov : Hamiltonian Kähler manifolds, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1462-1465.

[8] A. Todorov : Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of K3 surfaces, Inventiones Math. 61 (1980), 251-265.

[9] E. Looijenga, C. Peters : A Torelli theorem for K3 surfaces, Compositio Math. 42 (1981), 145-186.

[10] U. Persson, H. Pinkham : Degenerations of surfaces with trivial canonical bundle, Ann. of Math. 113 (1981), 45-66

[11] E. Looijenga : A Torelli theorem for Kähler-Einstein K3 surfaces, in Geometry Symposium Utrecht 1980, Lecture Notes in Math. 894, Springer (1981), 107-112.

[12] Y.T. Siu : A simple proof of the surjectivity of the period map of K3 surfaces, Manuscripta Math.35 (1981), 311-321.

[13] Y.T. Siu : Every K3 surface is Kähler, Inventiones Math. 73 (1983), 139-150.

[14] A. Beauville : Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle, J. of Differential Geometry 18 (1983), 755-782.

En guise de conclusion, nous voulons remercier les auditeurs pour leur assiduité et leurs nombreuses remarques ainsi que Marie-Jo Lécuyer et Claudine Harmide pour le soin qu'elles ont mis à faire de ces notes un volume agréable à regarder.

Palaiseau le 27 Janvier 1984

Arnaud BEAUVILLE
Jean-Pierre BOURGUIGNON
Michel DEMAZURE